UNIVERZITET SINGIDUNUM

BEOGRAD

DEPARTMAN ZA POSLEDIPLOMSKE STUDIJE

DOKTORSKA DISERTACIJA

PREISPITIVANJE TOBINOVE TEOREME ODVAJANJA

MENTOR:

Prof. dr Nikola Stefanović

STUDENT:

Mirko Babanić

BROJ INDEKSA:

450025/2015

BEOGRAD, 2022. godina

Sažetak

Pripremni deo disertacije, koji vodi ka osnovnom, zasnovan je na parametrima povrat-varijansa koji predstavljaju dve ključne slučajne promenljive modela koji je osmislio Markowitz. U istraživanju su korišćeni istorijski podaci koji sami po sebi reflektuju sve dostupne informacije koje je finansijsko tržište absorbovalo te stoga, možemo da ih smatramo ne samo homogenim već i apsolutnim, (iz razloga realizovanosti). Nad takvim, dakle, ni sa čim uslovljenim, podacima koji predstavljaju kombinacije vrednosti prosečnih povrata i varijansi povrata portfolija, izvršen je analitički postupak aproksimacije polinomom šestog stepena, čime je uspostavljena relacija koja je eksplicitno iskazana algebarskom polinomijalnom jednačinom šestog stepena. Nakon toga, daljim analitičkim postupkom determinisani su uslovi za egzistenciju i minimuma i tangentnog portfolija, a redefinisani su i pojmovi: efikasni skup portfolija, sklonost ka riziku, averzija prema riziku i linija indeferencije. Centralna tema disertacije, preispitivanje Tobinove teoreme odvajanja, formulisana je i dokazana kroz tri teoreme od kojih jedna osnovna i dve pomoćne.

Ključne reči: partitivni portfolio, nerizično pozajmljivanje, efikasni skup, sklonost ka riziku, averzija prema riziku, linija indiferencije, tangentni portfolio

Abstract

The preparatory part of the dissertation, which leads to the basic one, is based on return-variance parameters that represent two key random variables of the model devised by Markowitz. The research used historical data that in themselves reflect all available information absorbed by the financial market, and therefore, we can consider them not only homogeneous but also absolute (for reasons of realization). Therefore, an analytical procedure of approximation by a sixth-degree polynomial was performed on such data, which represent combinations of values of average returns and variances of portfolio returns, thus establishing a relation that is explicitly expressed by an algebraic sixth-degree polynomial equation. After that, further analytical procedure determined the conditions for the existence of both the minimum and the tangent portfolio and redefined the terms: efficient portfolio set, preference toward risk, risk aversion, and indifference line. The central topic of the dissertation, the revision of Tobin 's separation theorem, is formulated and proved through three theorems, one basic and two auxiliary.

Key words: mean-variance partitive portfolio, riskless lending, efficient set, preference toward risk, risk aversion, indifference line, tangent portfolio

SADRŽAJ

UVOD

1.1 Predmet istraživanja

U disertaciji će biti izložena inovativna metodologija formiranja diversifikovanog portfolija. Naime, biće reči o sledećem: za razliku od modela selekcije portfolija, koji je osmislio Markowitz (1952), u modelu koji će ovde biti izložen biće uvedena relacija poretka, tako što će članovi portfolija biti poređani po rastućem rasporedu njihovih prosečnih povrata. Nakon toga će biti formirani partitivni skupovi, na taj način što će prvi partitivni skup da čine dva člana portfolija sa najnižim prosečnim (ili očekivanim) povratom. Naredni partitivni skup nastaje dodavanjem, na prethodni partitivni skup, sledeće hartije od vrednosti u nizu. Proces formiranja partitivnih skupova se nastavlja dok se ne uvrste sve izabrane hartije od vrednosti.

Tema ove doktorske disertacije predstavlja suštinu portfolio teorije, odnosno izbora portfolija pod uslovom rizika. Naime, u zavisnosti od sklonosti prema riziku investitori će biti izloženi različitim optimalnim rešenjima za povrat i rizik (meren varijansom povrata) portfolija, ali će njihov izbor rizičnog portfolija uvek da se svodi na tangentni portfolio. U ovom stavu se i nalazi doprinos ove teze, dakle, racionalan investitor će uvek izabrati, ispravno matematički formulisan, tangentni portfolio kao optimalnu kombinaciju rizične imovine.

U disertaciji su analizirani mnogi problemi moderne portfolio teorije kako je to i sistematizovano u pet delova disertacije. Krenulo se, dakle, od istorijskih podataka o dnevnim cenama hartija od vrednosti iz kojih su izračunati dnevni povrati i varijanse povrata hartija od vrednosti uključenih u statistički značajan indeks DJIA, a ovi rezultati su upotrebljeni kao polazna osnova za istraživanje koje je sprovedeno i izneto u ovoj disertaciji.

Rezultat ove doktorske disertacije biće mnogo potpunije i preciznije razumevanje moderne portfolio teorije zasnovane na matematičkoj metodologiji, od stavova i teorija koje su do sada iznosili različiti autori kao što su Harry Markovitz, William Sharpe, James Tobin i mnogi drugi koji su pisali u vezi sa portfolio teorijom. Disertacija sadrži inovativni predlog formiranja portfolija i njegovu potpunu determinaciju metodologijom matematičke analize, analitičke i diferencijalne geometrije i linearne algebre. U okviru disertacije, dakle, determinisan je potpuno novi pristup (otvorene arhitekture) portfolio teoriji, čije mogućnosti nisu ograničene ni veličinom portfolija ni vrstom aktive uključenom u portfolio.

1.2 Cilj istraživanja

Cilj istraživanja je preispitivanje, u finansijskoj literaturi važeće i opšte prihvaćene kao tačne, teoreme odvajanja o kojoj je zaključke izneo James Tobin u svom radu iz 1956 godine pod nazivom: Preferencija likvidnosti kao ponašanje prema riziku (eng. "*Liquidity Preference as Behavior Towards Risk*"). Naime, u ovoj disertaciji biće formulisan i dokazan set od tri teoreme koje zajednički definišu: a) način nalaženja tangentnog portfolija, b) njegovu optimizaciju, i c) izbor kombinacije nerizične i rizične aktive u zavisnosti od nivoa sklonosti ka riziku pojedinih investitora, pri čemu izbor kombinacije nerizične i rizične aktive ne mora da (ili ne) predstavlja odvojen problem od pronalaženja tangentnog portfolija. Naime, biće dokazano da iznalaženje optimalnog tangentnog portfolija neposredno zavisi i od sklonosti ka riziku svakog pojedinačnog investitora i od veličine prinosa nerizične imovine.

1.3 Značaj teme

U disertaciji se obrazlaže inovativan pristup problemima diversifikacije i iznalaženja optimalnog portfolija na metodološki sasvim jasan i očigledan način. Kao konačni rezultat diversifikacije pojavljuju se samo dve aktive (nerizična i rizična). Obe aktive smeštene su na istoj pravoj liniji koja predstavlja tangentu iz tačke koja determiniše nerizični prinos na liniju efikasnog skupa portfolija. Bez obzira na sklonost ka riziku bilo kog investitora, izbor rizične aktive će uvek biti tangentni portfolio. Iznalaženje optimalnog rizičnog portfolija se dakle, može determinisati kao granični slučaj sečice (o kojoj će biti više reči u tački 2.3 Tangenta regresione krive, 2. Poglavlja) na krivoj efikasnog skupa portfolija, koji nastaje postavljanjem tangente iz tačke koja leži na apscisi i predstavlja koordinate nerizične aktive**.**

1.4 Kratak pregled literature. Teorijski okvir

Markowitz (1952) definiše dvodimenzioni prostor, ograničen koordinatama očekivanog (anticipiranih) povrata i varijansom povrata, hartija od vrednosti koje učestvuju u portfoliju, u kojem determiniše površinu takozvanih ostvarivih (eng. *attainable*) kombinacija očekivanih povrata i varijansi povrata. Markowitz (1952) dalje determiniše očekivani povrat kao pozitivnu osobinu, dok varijansu povrata determiniše kao negativnu osobinu. Na površi ostvarivih kombinacija očekivanih povrata i varijansi povrata, hartija od vrednosti uključenih u portfolio, on geometrijski ilustruje efikasnu površinu, za slučaj u kojem je broj dostupnih hartija od vrednosti mali, nigde ne definišući algebarski oblik, ili jednačinu takve efikasne površine. Markowitz (1952) dalje piše da izolinije očekivanog povrata predstavljaju pramen paralelnih pravih, dok izolinije varijansi povrata predstavljaju koncentrične elipse.

Sharpe et al (1998) pišu da je većina hartija od vrednosti koja je raspoloživa za investiranje rizična, iz razloga što ima neizvesne ishode. Osnovni problem s kojim se svaki investitor suočava je dakle, determinisanje rizičnih hartija od vrednosti. Obične deonice i korporativne obveznice su primer rizičnih hartija od vrednosti, međutim u razmatranje se uvode i nerizične hartije od vrednosti, koje predstavljaju dug savezne vlade. S obzirom da vlada može da emituje novac po sopstvenoj odluci, obećane isplate takvih hartija od vrednosti sigurno se izvršavaju prema unapred određenom rasporedu. Nerizične hartije od vrednosti pružaju investitoru siguran (izvestan) povrat u vremenskom periodu investiranja. S obzirom da je investitor pre svega zainteresovan za očuvanje kupovne moći sopstvenih ulaganja, povrat od nerizičnih hartija od vrednosti bi morao da bude siguran, i to ne samo monetarno, već i u smislu realnog povrata koji je prilagođen stopi inflacije (Sharpe, Alexander & Bailey, 1998).

S obzirom da portfolio predstavlja skup hartija od vrednosti, izbor portfolija se svodi na to da investitor odabere optimalan portfolio iz skupa mogućih portfolija. Ovako koncipiran problem, često se naziva i problemom selekcije portfolija (Sharpe, Alexander & Bailey, 1998). Markowitz (1952) je izneo jedno rešenje ovog problema, kada je objavio rad koji se smatra osnovom modernog pristupa u teoriji investiranja u portfolio hartija od vrednosti. Sharpe et al (1998) dalje pišu da se Markowitzev pristup zasniva na pretpostavci da investitor ima određenu sumu novca koju može da investira danas. Taj novac će dakle, biti uložen na određeni vremenski period koji se definiše i kao period investiranja. Na kraju perioda posedovanja, investitor će prodati hartije od vrednosti kupljene na početku perioda, a ostvareni prihod će potrošiti ili će ga reinvestirati. Stoga se Markowitzov pristup može posmatrati kao investiranje sa jednim periodom, pri čemu se početak perioda označava sa t =0, a kraj perioda sa t =1. U trenutku t =0 dakle, investitor mora odlučiti koje će hartije od vrednost kupiti i držati do trenutka t =1.

Pri donošenju odluke u trenutku t =0, investitor bi trebao da prepozna da su povrati hartija od vrednosti (a time i povrati portfolija) nepoznati, tokom narednog perioda držanja. Međutim, investitor ima mogućnost da proceni očekivani (ili srednji) povrat hartija od vrednosti koje razmatra, a zatim da uloži novac u one s najvišim očekivanim povratom (Sharpe, Alexander & Bailey, 1998). Markowitz (1952) napominje da bi to bila nepromišljena odluka, jer tipični investitor, iako želi da "*povrat bude visok*", takođe želi da "*povrati budu što sigurniji*". Stoga je, pišu dalje Sharpe et al (1998) investitor pri donošenju odluke o kupovini u trenutku t = 0, u nastojanju da maksimizira očekivani povrat i minimizira neizvesnost, odnosno rizik, izložen dvama suprotstavljenim ciljevima (povrat vs. varijansa povrata), koji moraju međusobno da se uravnoteže. Markowitzev pristup kako investitor treba da se ponaša prilikom donošenja odluke o investiranju, u potpunosti uzima u obzir, oba ova konfliktna cilja. Uopšte, pretpostavlja se da investitori imaju averziju prema riziku, što znači da će gotovo uvek odabrati portfolio koji ima nižu varijansu povrata (Sharpe, Alexander & Bailey, 1998).

Jensen (1972) piše da je Markowitzev rad na odabiru portfolija rezultirao revolucijom u teoriji finansija i da je postavio temelj modernoj teoriji tržišta kapitala. Njegov glavni doprinos je stav da se pri odabiru portfolija javlja problem maksimizacije korisnosti pri uslovima neizvesnosti. Jensen (1972) dalje piše da se Markowitz uglavnom bavi posebnim slučajem investiranja u trajanju jednog perioda, u kojem se pretpostavlja da su preferencije investitora definisane u odnosu na srednju vrednost i varijansu povrata portfolija. Krugman i Obstfeld (2009, str. 597) pišu da je Tobin opisao ideju diversifikacije rečima: 'Nemojte da stavljate sva jaja u istu korpu'. Ukoliko je privreda otvorena, rizičnost sopstvenog bogatstva može da se smanji na taj način što će se deo bogatstva staviti u inostranu 'korpu', što zapravo i predstavlja motiv za trgovanje finansijskom aktivom.

Mangram (2013) piše da Markowitzev inovativni rad predstavlja temelj moderne teorije portfolija. Njegov model je zapravo, okvir za izbor hartija od vrednosti i konstrukciju portfolija koji se zasniva na maksimiziranju očekivanih povrata portfolija i istovremenom minimiziranju investicionog rizika, merenog varijansom povrata. Važan aspekt Markowitzevog modela bio je i opis uticaja kovarijansi povrata između hartija od vrednosti uključenih u portfolio, na diversifikaciju portfolija. Bodie, Kane, Marcus (2009, str. 183) pišu da se svojstvo odvajanja može posmatrati kroz dva nezavisna zadatka. Prvo se određuje najbolji (optimalni) rizični portfolio, koji je identičan za sve investiture bez obzira na njihovu averziju prema riziku, dok se drugi zadatak odnosi na formiranje portfolija koji se sastoji od nerizične active i portfolija rizične active, koji zavisi od ličnih preferencija.

Walras je prvi formulisao stanje ekonomskog sistema kao simultani niz jednačina koje predstavljaju, sa jedne strane, tražnju za robama od strane potrošača i sa druge strane, ponudu roba od strane proizvođača, na taj način da se formira ravnotežno stanje između ponude i tražnje na bilo kojem tržištu (Arrow, Debreu, 1954). Merton (1969) istražuje kombinovani problem izbora optimalnog portfolija sa pravilima potrošnje pojedinaca u modelu vremenskog kontinuma, gdje se prihod pojedinaca generira prinosom na imovinu, a ti su povrati stohastični.

Fama (1968) raspravlja u vezi sa povratom na imovinu, rizikom ostvarivanja povrata i ravnotežom između povrata i rizika, postavljajući pitanja: koja je to pogodna mera rizika kojom bi se merio rizik kapitalne aktive i šta bi predstavljao ravnotežni odnos između očekivanog povrata i takve mere rizika i zaključuje da, ukoliko je povrat na imovinu ili portfolio definisan na taj način da predstavlja relativnu promenu u ukupnoj imovini tokom perioda investiranja, investitori mogu da donose optimalne odluke u vezi sa ulaganjem u portfolio na osnovi dva parametra, prosečnog povrata i standardne devijacije povrata. Na efikasnom tržištu, u informacionom smislu, promene cena moraju biti nepredvidive pod uslovom da su pravilno predviđene, odnosno ako u potpunosti uključuju očekivanja i informacije svih učesnika na tržištu (Campbell, Lo & MacKinlay, 1997).

Ukhov (2005) piše da je analiza, povrata i varijanse statičan problem iz razloga što su broj i karakteristike rizične imovine fiksni. S obzirom da je realnost svetskih finansijskih tržišta dinamična, stoga što se prilike za ulaganja stalno menjaju, tako što se nova imovina uvodi kroz nekoliko kanala, uključujući inicijalne javne ponude (eng. *IPO*), programe privatizacije i liberalizacije finansijskog tržišta, postavlja se važno pitanje, kako se efikasni portfoliji menjaju kada se uvodi nova hartija od vrednosti i kako se time menja tržišna struktura ekonomije.

Sharpe, Alexander, Bailey (1998, str. 228-229) definišu teoremu odvajanja na sledeći način: "*optimalna kombinacija rizične imovine za investitora može se odrediti bez ikakvog znanja o investitorovim sklonostima prema riziku i povratu*".

Breuer, Gürtler (2009, str. 1) o teoremi odvajanja pišu: "*pod određenim uslovima optimalni (pod) portfolio rizičnih aktiva isti je za sve investitore bez obzira na njihove posebne sklonosti ka riziku ili njihovo početno bogatstvo*".

Buiter (2003, str.3) piše: "*ključna 'teorema odvajanja' koju je dokazao Tobin [1958b] je da u svetu s jednom sigurnom aktivom i velikim brojem rizičnih aktiva, izbor portfolija od strane bilo kojeg vlasnika portfolija nesklonog riziku može biti opisan kao izbor između sigurne aktive i istog portfolija rizične aktive. Odnos udela u ukupnom portfoliju koji su određeni prema bilo kojem paru rizične aktive isti je za sve vlasnike portfolija koji su neskloni riziku. Stepen averzije prema riziku određuje samo udele u ukupnom portfoliju koji su određeni prema sigurnoj aktivi i prema zajedničkom portfoliju rizične aktive*".

Sharpe (1998) u intervjuu govori o teoremi odvajanja*:"...,i James Tobin koji je u radu iz 1958. godine rekao da ako držite rizične hartije od vrednosti i ako se možete zadužiti - kupovanjem akcija na margini - ili pozajmiti - kupovanjem nerizične aktive - i to radite po istoj stopi, onda je efikasna granica jedan portfolio rizičnih hartija od vrednosti plus uzajmljivanje i pozajmljivanje, koji dominira nad bilo kojom drugom kombinacijom. Tobinova teorema odvajanja kaže da problem možete odvojiti tako da prvo pronađete onu optimalnu kombinaciju rizičnih hartija od vrednosti, a zatim odlučite hoćete li pozajmiti ili uzajmiti, u zavisnosti od vašeg stava prema riziku. Potom je pokazano da ako postoji samo jedan portfolio plus uzajmljivanje i pozajmljivanje, on mora biti tržišni*".

Tobin (1956, str. 35-36) piše: *"...proporcionalni sastav negotovinskih aktiva nezavisan je od njihovog ukupnog udela u bilansu ulaganja. ... da opišete odluke investitora kao da je postojala* *pojedinačna negotovinska imovina, mešavina formirana kombinovanjem mnoštva stvarne negotovinske imovine u fiksnim proporcijama*".

Živković (2006) o Tobinovom radu piše, da doprinosi teoriji finansija sa tzv. teoremom odvajanja, koja simplifikovano može da se opiše na sledeći način: pod pretpostavkom da postoji nerizična aktiva i različite vrste rizičnih aktiva, izbor optimalnog portfolija, od strane investitora nesklonih riziku (eng. "*Risk Averse Portfolio Holder*") predstavlja izbor između te nerizične aktive i skupa rizičnih portfolija. Za determinaciju ravnoteže nije potrebno da se unapred znaju preferencije investitora prema rizku i povratu. Nivo averzije prema riziku svakog investitora u tom slučaju determiniše strukturu portfolija, odnosno veličinu porcija uloženih u nerizičnu i rizične aktive (Živković, 2006). Prema teoremi o odvajanju fondova koji su uveli Tobin (1958.) i Markowitz (1952.), ako postoji rizična imovina, a investitor ima preferencije prema relaciji povrat-varijansa, tada se udeli, u kojima se u optimalnom portfoliju drži različita rizična imovina, fiksni i nezavisni od averzije investitora prema riziku, mada bi investitor koji je skloniji riziku trebao da drži veći deo svog portfolija u rizičnoj imovini (Wang, 2003).

Fama (1970) piše da je primarna uloga tržišta kapitala raspodela vlasništva nad kapitalom u okviru jedne ekonomije. Stoga, postojanje tržišta na kojem cene aktive pružaju tačne signale na koji način bi se kapitalni resursi raspodelili, predstavljalo bi idealan slučaj za izučavanje. "Efikasnim" tržištem, dakle, može da se nazove takvo tržište, na kojem kompanije mogu potpuno autonomno da donose proizvodne i investicijske odluke, a investitori mogu da biraju između različitih hartija od vrednosti posredstvom kojih stiču kontrolu nad aktivnostima kompanija, pod pretpostavkom da cene izabranih hartija od vrednosti u bilo kom trenutku "potpuno odražavaju" sve dostupne informacije (Fama, 1970 str. 383).

S obzirom na činjenicu da cene hartija od vrednosti, ukoliko je reč o efikasnom tržištu, reflektuju sve raspoložive informacije o tržištu u celini i o svakoj pojedinačnoj kompaniji, tim pre će u istorijske cene hartija od vrednosti, da budu inkorporirane sve relevantne informacije. U ovom radu će se, iz tih razloga, istraživanje bazirati na istorijskim podacima, dakle u smislu "slabe forme" testa tržišne efikasnosti (Fama, 1970), za razliku od istraživanja koje je sproveo Markowitz (1952) koje se baziralo na vrednostima anticipiranih (nerealizovanih) povrata. Razlika između istorijskih i anticipiranih povrata je suštinska. Naime, istorijski povrati su realizovani, dok anticipirani povrati tek treba da se realizuju, odnosno možemo tek, sa određenom verovatnoćom, da očekujemo njihovu realizaciju. Dakle, korišćenjem istorijskih podataka, tačno znamo šta se dogodilo sa cenama aktive na finansijskom tržištu, dok korišćenjem anticipiranih podataka možemo tek da očekujemo, sa određenom verovatnoćom, šta će se dogoditi sa cenama aktive na finansijskom tržištu.

1.5 Metodologija istraživanja

Pri analizi koristićemo istorijske podatke o dnevnom kretanju cena akcija industrijskih kompanija, koje su predstavljene indeksom DJIA, u periodu od tri meseca od 04.sept. do 03.dec. 2018. Istorijske podatke koristimo iz razloga da bi saznali šta se zaista dogodilo sa cenama aktive. Za isti period posmatranja izabraćemo i nerizičnu kratkoročnu obveznicu američkog trezora. Najpre ćemo da izračunamo dnevne povrate na osnovi dnevnih kretanja cena posmatranih akcija i nakon toga njihovu prosečnu vrednost i varijansu. Za izračunavanja prosečnih vrednosti dnevnih povrata i varijansi povrata koristićemo program Excel (videti Excel tabelu, Problem dva investitora, kolone od A do DP i Minitab 4 tačke u koordinatnom sistemu mr-var). Prosečni povrati i varijanse povrata hartija od vrednosti uključenih u portfolio, predstavljaju dve ključne slučajne promenljive na kojima se bazira celokupno istraživanje (Markowitz, 1952). Prosečni povrat i varijansa povrata biće izračunati na osnovi dnevnog kretanja cena hartija od vrednosti. Dakle, biće analizirani hronološki nizovi dnevnih povrata svake pojedinačne hartije od vrednosti, na osnovi kojih će biti izračunati prosečni dnevni povrati i varijanse povrata svake pojedinačne hartije od vrednosti.

Kada izvršimo izračunavanja prosečnih povrata i varijansi povrata, sledeći korak je da uvedemo relaciju poretka. Naime, izvršićemo ređanje akcija po rastućem rasporedu njihovih prosečnih povrata (videti Excel tabelu, kolone DQ,DR). Nakon toga formiraćemo prvi partitivni portfolio koji se sastoji od dve akcije sa najnižim vrednostima prosečnih povrata (videti Excel tabelu, kolone od DS do DX). Nakon formiranja prvog partitivnog portfolija, svaki naredni partitivni portfolio formiraćemo dodavanjem po jedne akcije iz formiranog rasporeda sa rastućim prosečnim povratom. Na taj način obrazovaće se lanac partitivnih portfolija, gde će svaki naredni da bude superioran (nadređen) prethodnom partitivnom portfoliju. Svaki partitivni portfolio u lancu će predstavljati potskup konačnog portfolija, sastavljenog od svih akcija koje su uključene u indeks sa oznakom DJIA.

U toku naučnog i istraživačkog rada upotrebljene su metode statističke i matematičke analize, analitičke i diferencijalne geometrije i linearne algebre, kao i metoda logičke dedukcije, a sve u cilju da primenjena metodologija ima najviši mogući nivo objektivnosti, tačnosti i sistematičnosti.

Istorijski podaci o dnevnom kretanju cena hartija od vrednosti, a koje hartije pripadaju skupu opisanom indeksom DJIA, a koji podaci su korišćeni u okviru statističke analize kao jedini objektivni i tačni (iz razloga što su realizovani), preuzeti su sa web adrese: https://finance.yahoo.com/. Na osnovi podataka o dnevnom kretanju cena finansijske aktive izračunate su vrednosti dnevnih povrata na aktivu, kao poželjne promenljive i varijanse povrata, kojom ćemo meriti rizik. Ove dve slučajne promenljive su ključne u celokupnom istraživanju u ovoj disertaciji. Naime, formiraćemo prostor ograničen koordinatama srednjeg (očekivanog) povrata (kao mere centralne tendencije), koji predstavlja nezavisnu slučajnu promenljivu i varijanse povrata (kao mere odstupanja), koja predstavlja zavisnu slučajnu promenljivu.

1.6 Osnovna i pomoćne hipoteze istraživanja

Opšta hipoteza u disertaciji, koja predstavlja osnovu istraživanja, data je u formi teoreme odabira rizičnog portfolija, koja glasi:

Teorema izbora rizičnog portfolija: bez obzira na sklonost prema riziku racionalan investitor će uvek izabrati dostupan tangentni portfolio.

Dokaz ove teoreme biće izveden u petom poglavlju disertacije metodologijom matematičke analize, analitičke i diferencijalne geometrije i statističke analize čime će biti i potvrđena navedena forma teoreme odvajanja.

Pomoćne hipoteze predstavljaju formulisanje i dokazivanje pomoćnih teorema:

a) Teorema egzistencije tangentnog portfolija koja glasi: ako postoji nerizični prinos, onda i samo onda postoji tangentni portfolio koji je optimalna kombinacija rizične aktive.

Dokaz teoreme će biti izveden u trećem poglavlju disertacije.

b) Teorema egzistencije višestrukih tangentnih portfolija, koji su posledica različitih sklonosti ka riziku investitora, koja glasi: u zavisnosti od različitih sklonosti prema riziku, investitorima će biti dostupni različiti tangentni portfoliji.

Dokaz ove teoreme biće izveden u četvrtom poglavlju disertacije. Pri dokazivanju navedenih teorema biće korišćena metodologija statističke i matematičke analize, linearne algebre, analitičke i diferencijalne geometrije.

1.7 Opis sadržaja disertacije

Disertacija sadrži uvod, pet poglavlja (istraživačkog rada) i zaključak. U uvodnom razmatranju sažeto je izložen problem koji će se razmatrati u ovoj disertaciji. Uvod sadrži opšte (istorijske) podatke koji će biti korišćeni za determinaciju problema kao i metodološki pristup i strukturu rada.

U okviru drugog poglavlja definisani su pojmovi: a) partitivni portfolio; b) minimum regresione krive; c) tangenta regresione krive*;* d) konveksnost regresione krive. U drugom poglavlju se dakle, uz pomoć statističke i metodologije matematičke analize definišu pojmovi neophodni u daljoj determinaciji problema.

Treće poglavlje sadrži determinaciju: a) efikasnog skupa portfolija; i b) uslova pod kojima egzistira *tangentni* portfolio. U ovom poglavlju se determiniše teorema egzistencije tangentnog portfolija koja glasi: ako postoji nerizični prinos, onda i samo onda postoji tangentni portfolio koji je optimalna kombinacija rizične aktive.

U četvrtom poglavlju se definišu pojmovi: a) sklonosti ka riziku; b) averzije prema riziku; c) partitivnog portfolija višeg ranga; d) portfolija najvišeg ranga; i e) tržišne linije kapitala (eng. "*capital market line*"). U trećem poglavlju se determiniše teorema egzistencije višestrukih tangentnih portfolija koja glasi: u zavisnosti od različitih sklonosti prema riziku, investitorima će biti dostupni različiti tangentni portfoliji. Naime, u ovom poglavlju biće determinisan problem (najmanje) dva investitora koji imaju suprotne sklonosti ka riziku.

U petom poglavlju se determiniše teorema odabira rizičnog portfolija koja glasi: bez obzira na sklonost prema riziku racionalan investitor će uvek izabrati dostupan tangentni portfolio i optimalni tangentni portfolio. Dakle, u disertaciji ćemo se baviti pojmovima izbora i optimizacije rizičnog portfolija.

U šestom poglavlju determinisani su pojmovi: a) linija indiferencije (eng. “*the indifference line*“); b) efekat diversifikacije (eng. “*a diversification effect*“) sa geometrijskim i algebarskim pristupom. Naime, biće dokazano da je linija indiferencije, ništa drugo nego, posledica postojanja tangente čiji je priraštaj funkcije jednak priraštaju argumenta, dok se efekat diversifikacije (koji nastaje uvođenjem novih hartija od vrednosti ili druge imovine u portfolio) menja u zavisnosti od sklonosti ka riziku (averzije prema riziku) investitora.

Zaključak je iznet na kraju disertacije, kao i spisak korištene literature.

POGLAVLJE 2.

U ovom poglavlju definisaćemo najpre pojam partitivnog portfolija, koji predstavlja dvočlani podskup osnovnog skupa, a koji osnovni skup predstavlja portfolio sastavljen od hartija od vrednosti uključenih u statistički značajan indeks DJIA. Prvi partitivni portfolio formiraćemo na taj način što ćemo da iskombinujemo različite udele dve hartije od vrednosti sa najnižom vrednošću prosečnog (očekivanog) povrata i dobićemo vrednosti prosečnog povrata i varijanse povrata takvog dvočlanog portfolija. Nakon ovoga izvršićemo regresiju dobijenih rezultata za povrat i varijansu, tako što ćemo prosečni povrat da smatramo nezavisnom, a varijansu zavisnom varijablom (promenljivom). Naredni partitivni portfolio dobićemo tako što na prethodni dodajemo narednu hartiju od vrednosti iz rastućeg rasporeda prosečnih povrata, sve dok ne uvedemo sve hartije iz rasporeda u finalni portfolio koji ća da dominira svim prethodnim.

Sledeći pojam koji uvodimo je minimum regresione krive. Naime, koristićemo uslove egzistencije ekstremuma krive, primenjene na dobijene regresione krive. Nakon ovoga uvodimo pojam tangente regresione krive takođe koristeći poznate jednačine tangente date u eksplicitnom obliku, a koja tangenta je povučena na krivu iz tačke van krive, specifično iz tačke koja leži na apscisi koordinatnog sistema datog koordinatama prosečnog povrata i varijanse povrata.

Poslednji pojam koji uvodimo u ovom poglavlju je konveksnost regresione krive, koju ispitujemo na osnovi poznatih kriterijuma matematičke analize za konveksnost (konkavnost na dole) krive.

2.1 Partitivni portfolio

Partitivni portfolio (PP), po definiciji, predstavlja dvočlani podskup osnovnog skupa sastavljenog od akcija predstavljenih indeksom DJIA. Prvi (PP) biće sastavljen od akcija čiji su simboli GS i AAPL. Da bi formirali portfolio potrebno je da znamo podatke o prosečnim (srednjim) vrednostima povrata, varijansama i kovarijansama povrata ove dve akcije (videti Excel tabelu, od kolone DS do kolone DX). Vrednosti dnevnih povrata računaćemo pomoću jednačine koja glasi (Van Horne, 2001):

$$R_{t+1} = (P_{t+1}/P_t) + (D_{t+1}/P_t) - 1 \qquad \text{(t.e.1)}$$

gde:

R_{t+1} je vrednost povrata na akciju u trenutku (t+1)

P_{t+1} je tržišna cena akcije u trenutku (t+1)

P_t je tržišna cena akcije u trenutku (t)

D_{t+1} je vrednost dividende isplaćene u trenutku (t+1)

Metodologija formiranja portfolija je poznata u literaturi. Naime, pravićemo kombinacije različitih porcija dve akcije, s tim da zbir porcija svake kombinacije mora da bude jednak '1'.

Koristićemo i dve poznate jednačine za vrednosti povrata i varijanse portfolija, koje glase (Van Horne, 2001):

$R_p = \sum_j \Pi_j * R_j$ (t.e.2)

$\sigma^2 = \sum_j \sum_k \Pi_j * \Pi_k * \sigma_{jk}$ (t.e.3)

gde:

R_p je srednja vrednost povrata portfolija

Π_j je porcija (udeo) uložena u svaku pojedinačnu deonicu 'j'

R_j je prosečna (srednja) vrednost povrata svake pojedinačne deonice j uključene u portfolio

σ^2 je vrednost varijanse portfolija

Π_k je porcija (udeo) uložena u svaku pojedinačnu deonicu 'k'

σ_{jk} je vrednost kovarijanse između svake dve deonice uključene u potfolio

Kada formiramo prvi (PP), u oznaci PP1-1, izvršićemo regresiju na taj način da vrednosti povrata (PP) budu nezavisna slučajna promenljiva, a vrednosti varijanse (PP) zavisna slučajna promenljiva. Dakle, sada sa statističke analize prelazimo na matematičku analizu. Regresioni model predstavićemo polinomom šestog stepena, koji najbolje aproksimuje vrednosti slučajnih promenljivih, povrata i varijansi povrata partitivnog portfolija (videti Minitab regresija 1, ptr=0). Regresiona jednačina prvog partitivnog portfolija glasi:

Var_1 = 0.210871 +131.725 * R_1 +20601.5 * R_1 ^2 -45.8417 * R_1 ^3 -10354 * R_1 ^4 -

1244199 * R_1 ^5 -62128259 * R_1 ^6 (p.f.1.1)

gde:

Var_1 je varijansa PP1

R_1 je povrat PP1

Greška aproksimacije je izračunata iz jednačine (Miličić, Trifunović &Ušćumlić, 1986):

$$S^2_{y-\hat{y}} = (1/N)*\sum_j (y_j - \hat{y}_j)^2$$

gde je $S^2_{y-\hat{y}}$ srednja kvadratna greška, y je stvarna vrednost zavisne promenljive, $\hat{y}$ je procenjena vrednost zavisne promenljive. Sledi

$S^2_{y-\hat{y}}$ = 3.95E-27 (videti EXCEL tabelu, kolona DX od 24 do 44 i polje DY24).

Domen regresione funkcije (p.f.1.1) je [-0.0032369; -0.0031027] (videti EXCEL tabelu, kolona C i kolona AI).

2.2 Minimum regresione krive

Naredni metodološki postupak je da odredimo minimum portfolija PP1-1, ukoliko postoji. Uslovi za postojanje minimuma neke krive su poznati u matematičkoj literaturi (Miličić,Trifunović & Ušćumlić, 1986). Dovoljni uslovi da funkcija u nekoj tački ima minimum:

a) ukoliko su prvi izvod i svi ostali izvodi do (n-1) izvoda funkcije, u toj tački, jednaki nuli,

b) i pri tome je n-ti izvod funkcije u toj tački pozitivan (veći od nule), a važi da je 'n' paran broj.

Matematički zapis prethodne tvrdnje je sledeći:

$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, i $f^{(n)}(x_0) > 0$,

pri tome je n-paran broj, odnosno može da se zapiše u obliku: $n = 2t$; $t = 1,2,3,\ldots$, onda funkcija $f(x)$ za $x = x_0$ ima minimum.

Formule diferenciranja glase (Bilimović,1961):

$c' = 0$ (c je konstanta); $x' = 1$; $(x^n)' = nx^{n-1}$; $(u + v - w)' = u' + v' - w'$ (u, v, w su funkcije promenljive x); $(cu)' = cu'$;

Sledeći ova pravila diferenciranja prvi izvod regresione funkcije (1.1) glasi:

$Var_1' = 131.725 + 41203 * R_1 - 137.5251 * R_1 \text{^}2 - 41416 * R_1 \text{^}3 - 6220995 * R_1 \text{^}4 -$

$372769554 * R_1 \text{^}5$ (d.f.1.1)

Potrebno je sada prvi izvod izjednačiti sa nulom, dakle:

$Var_1' = 0$

sledi

$131.725 + 41203 * R_1 - 137.5251 * R_1 \text{^}2 - 41416 * R_1 \text{^}3 - 6220995 * R_1 \text{^}4 -$

$372769554 * R_1 \text{^}5 = 0$

Za izračunavanje korena ove jednačine koristićemo program Matlab.

```
>> p = [-372769554 -6220995 -41416 -137.5251 41203 131.725];

r = roots(p)

format long

r

r =

 -0.105908741542026 + 0.000000000000000i

 -0.003372902952484 + 0.102534432268772i

 -0.003372902952484 - 0.102534432268772i
```

0.099162928096641 + 0.000000000000000i

-0.003196961927935 + 0.000000000000000i

Prihvatićemo samo peti rezultat koji pripada domenu regresione funkcije (p.f.1.1) R_{1min} = -0.003196961927935. Sada imamo potreban uslov da regresiona funkcija (p.f.1.1) ima minimum. Kada prethodni rezultat uvrstimo u osnovnu jednačinu (p.f.1.1) uz program Matlab, dobijamo vrednost: Var_{1min} = 3.1094e-04.

```
>> p = [-62128259 -1244199 -10354 -45.8417 20601.5 131.725 0.210871];

polyval(p,-0.003196962)
```

Var_1 = 0.00031094

Proverimo sada i dovoljan uslov da funkcija u nekoj tački ima minimum, a to je, da neki njen parni izvod, u toj tački, ima pozitivnu vrednost (veću od nule). Drugi izvod regresione funkcije (p.f.1.1) glasi:

$$Var_1'' =41203-275.0502*R_1-124248*R_1\text{^}2-24883980*R_1\text{^}3-1863847770*R_1\text{^}4 \qquad \text{(d2.f.1.1)}$$

Ako sada vrednost $R_{1min} \approx -0.003196962$ uvrstimo u jednačinu (d2.f.1.1) dobijamo rezultat

Var_{1min}'' = 41203.22782 i zaključujemo da je ispunjen i dovoljan uslov da regresiona funkcija (p.f.1.1) ima minimum. Koordinate tačke 'M_1' u kojoj regresiona funkcija (p.f.1.1) ima minimum su: M_1(-0.003196962; 0.00031094), jer je R_{1min} = -0.003196962 i Var_{1min} = 0.00031094. Drugi izvod regresione funkcije (p.f.1.1) iznosi Var_{1min}'' = 41203.22782.

Regresiona kriva, sama po sebi (ipso facto) predstavlja geometrijski prikaz PP1-1, sastavljenog od akcija sa oznakama GS i AAPL. Konačno, možemo da odredimo porcije akcija (GS i AAPL) u PP1-1 sa minimalnom varijansom. Koristićemo jednačinu (t.e.2). S obzirom da je:

R_a (GS) = -0.0032369

R_a (AAPL) = -0.0031027

sledi:

$R_{min} = \Pi_j$ (GS) * R_a (GS) + Π_k (AAPL) * R_a (AAPL)

takođe je

$$\Pi_k = 1 - \Pi_j \qquad \text{(t.e.4)}$$

odnosno

$R_{min} = \Pi_j$ * R_a (GS) + (1 - Π_j) * R_a (AAPL)

Rešićemo ovu linearnu jednačinu po parametru Π_j. Dakle biće:

$R_{min} = \Pi_j$ * R_a (GS) + R_a (AAPL) - Π_j * R_a (AAPL)

R_{min} $-R_a$ (AAPL) = Π_j [R_a (GS) - R_a (AAPL)]

Π_j = [R_{min} - R_a (AAPL)] / [R_a (GS) - R_a (AAPL)]

Π_j = [-0.003196962 + 0.0031027] / [-0.0032369 + 0.0031027] = [-0.000094262]/ [-0.0001342] = 0.702399403874814 ili $\underline{\Pi_j \approx 0.7024}$

sledi

Π_k = 1 - 0.702399403874814 = 0.297600596125186 ili $\underline{\Pi_k \approx 0.2976}$.

Dakle, porcija akcije GS u PP1-1 iznosi Π_j = 0.7024, a porcija akcije AAPL iznosi Π_k = 0.2976 (videti Excel tabelu kolone DY, DZ).

Proverimo prethodne rezultate. Formiraćemo jednačinu:

Π_j (GS) * R_a (GS) + Π_k (AAPL) * R_a (AAPL) = 0.7024 * -0.0032369 + 0.2976 * -0.0031027=

$\underline{-0.003196962}$

Dakle, dobijeni rezultat potvrđuje prethodnu analizu, odnosno minimum varijanse partitivnog portfilija PP1-1 nalazi se u tački R_{1min} = -0.003196962, pri čemu vrednost varijanse iznosi

Var_{1min} = $\underline{0.00031094}$

Sada prelazimo na statističku analizu. Naime, da bi dobili vrednosti koordinata minimuma PP1-1, pomnožićemo vrednosti porcija sa koordinatama dnevnih povrata (videti Excel tabelu, kolona EA). Izračunaćemo i vrednosti prosečnog povrata i varijanse (videti Excel tabelu, kolone EB, EC). Uočavamo da su vrednosti prosečnog povrata i varijanse, dobijene statističkim postupkom, istovetne vrednostima pomenutih varijabli dobijenih matematičkim postupkom. Iz ovoga izvodimo zaključak da je primenjena analiza ispravna, odnosno da regresija polinomom šestog stepena dobro aproksimuje vrednosti PP1. S obzirom da ćemo da primenimo istovetan postupak i na sve ostale partitivne portfolije, videćemo da su svi rezultati dobijeni matematičkom analizom saglasni sa rezultatima dobijenim statističkom analizom.

2.3 Tangenta regresione krive

S obzirom da je godišnja efektivna stopa interesa na nerizične trezorske račune iznosila je 2.07% (0.0207), na zatvaranju 04. Sept. 2018, ekvivalentna interesna stopa obračunata za period od jednog dana iznosi (Marić, 2002):

$$(1 + R_e)^{365} = 1 + R_n \qquad \text{(t.e.5)}$$

gde:

R_e je ekvivalentna stopa interesa,

R_n je godišnja efektivna stopa interesa,

sledi:

$R_e = (1 + R_n)^{1/365} -1 = (1 + 0.0207)^{1/365} -1 = 1.00005613490818 -1 = \underline{0.0000561349}$

Na osnovi podatka o ekvivalentnoj stopi interesa koja je isto što i *nerizična stopa interesa pozajmljivanja*, u oznaci R_{rfl} (Sharpe, Alexander and Bailey, 1998), možemo da konstruišemo tangentu na regresionu krivu (p.f.1.1). Dakle, implicitno uvodimo u razmatranje mogućnost postojanja, neometanog nerizičnog pozajmljivanja (eng. "*lending*"). Matematički postupak je sledeći. Koristićemo jednačinu tangente na krivu u nekoj tački 'T', koja ima oblik (Lažetić, 1991):

$$Y - y = f'(x)\,(X - x) \tag{t.e.6}$$

gde:

$f'(x)$ je prvi izvod funkcije

X i Y su tekuće koordinate tačaka tangente i

$X = 0.0000561349$, $Y = 0$.

odnosno tačka iz koje postavljamo tangentu na krivu nalazi se na apscisi (x- osi).

Regresiona kriva predstavljena je jednačinom (p.f.1.1) a njen prvi izvod jednačinom (d.f.1.1). Uvrstimo ove jednačine u jednačinu tangente (t.e.6). Sledi:

$0 - Var_1 = [131.725 + 41203 * R_1 - 137.5251 * R_1 \hat{}2 - 41416 * R_1 \hat{}3 - 6220995 * R_1 \hat{}4 - 372769554 * R_1 \hat{}5] * (0.0000561349 - R_1)$

odnosno

$-Var_1 = 0.0073943697025 - 129.4120737153 * R_1 - 41203.00771995773599 * R_1\hat{}2 + 135.2002169816 * R_1\hat{}3 + 41066.7850677745 * R_1\hat{}4 + 6200069.6183631654 * R_1\hat{}5 + 372769554 * R_1\hat{}6$

kada prethodnu jednačinu saberemo sa jednačinom (p.f.1.1), dobijamo:

$0.2182653697025 + 2.3129262847 * R_1 - 20601.50771995 * R_1\hat{}2 + 89.3585169816 * R_1\hat{}3 + 30712.7850677745 * R_1\hat{}4 + 4955870.61836317 * R_1\hat{}5 + 310641295 * R_1\hat{}6 = 0$

Pronađimo korene ove jednačine. Koristićemo program Matlab.

```
>> p = [310641295 4955870.61836317 30712.7850677745 89.3585169816 -20601.50771995 2.3129262847 0.2182653697025];

r = roots(p)

r =
-0.094221 + 0.000000i
-0.004014 + 0.090282i
-0.004014 - 0.090282i
 0.086183 + 0.000000i
 0.003312 + 0.000000i
```

-0.003199 + 0.000000i (-0.00319928086790776l preciznije)

Prvih pet rezultata ne pripadaju domenu regresione funkcije (p.f.1.1), stoga koristimo samo rezultat, R_1 = -0.00319928. S obzirom da je dobijeni rezultat R_1, koji predstavlja koordinatu 'x' tačke 'T' na krivoj (p.f.1.1) u kojoj tangenta dodiruje krivu, manji od $R_{1min} \approx$ -0.003196962, odnosno nalazi se levo od tačke u kojoj kriva (p.f.1.1) ima minimum, zaključujemo da tačka 'T' ne pripada efikasnom skupu koji ćemo definisati kasnije.

Izračunajmo i koordinatu 'y' tačke 'T' u kojoj kriva dodiruje tangentu. Uvrstićemo rezultat R_1 (T) = -0.00319928 u jednačinu (p.f.1.1) i dobijamo Var (T) = 0.00031105, što je očigledno veće od Var_{1min} = 0.00031094. Dakle, tačka 'T' ima koordinate (-0.00319928; 0.00031105). Konačno, kada koordinate tačke 'T' i vrednost prvog izvoda funkcije (p.f.1.1) u tački 'T' koji iznosi Var′ (T) = -0.095547812, uvrstimo u jednačinu tangente (t.e.6) dobijamo jednačinu:

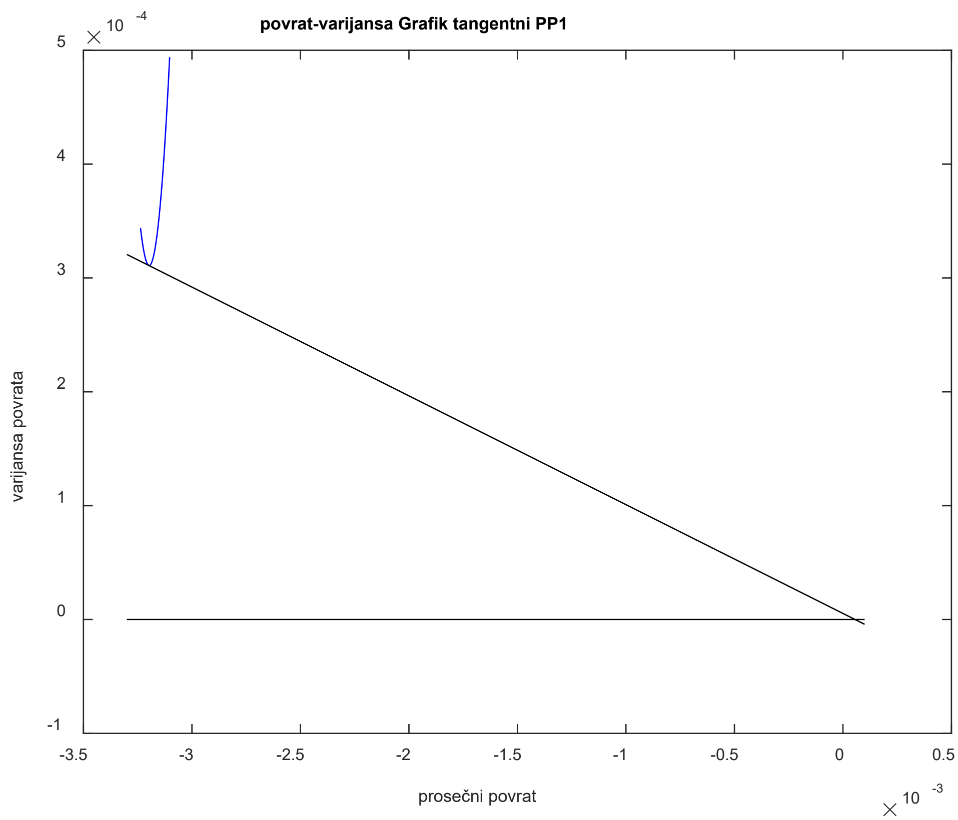
$$(Y - 0.00031105) = -0.095547812\,(X + 0.00319928)$$

odnosno,

$$Y = 0.0000053658 - 0.095547812 * X \qquad (t.1)$$

Jednačina (t.1) predstavlja jednačinu tangente na regresionu krivu (p.f.1.1). Tangenta je povučena iz tačke koja se nalazi na ‘x’ osi čije su koordinate (0.0000561349, 0) i dodiruje krivu (p.f.1.1) u tački 'T'(-0.00319928, 0.00031105). (videti Grafik 1.)

Grafik 1. Tangentni partitivni portfolio 1



2.4 Konveksnost (konkavnost na gore) regresione krive

Pre nego što definišemo efikasni skup pokazaćemo konveksnost krive (p.f.1.1). S obzirom da smo već utvrdili da je drugi izvod funkcije (p.f.1.1) različit od nule ($Var'' \neq 0$), možemo da postavimo uslove pri kojima, neka kriva ima konveksan oblik. Naime, kriva je konveksna ukoliko je njen drugi izvod pozitivan (veći od nule), odnosno važi da je (Miličić, Trifunović & Ušćumlić, 1986):

$$d^2y / dx^2 > 0 \tag{t.e.7}$$

Zapravo, važe sledeći opšti uslovi konveksnosti krive (Miličić, Trifunović & Ušćumlić, 1986):

C1: $dy / dx < 0 \ \& \ d^2y / dx^2 > 0$ (t.e.8)

funcija je opadajuća i konveksna

C2: $dy / dx > 0 \ \& \ d^2y / dx^2 > 0$ (t.e.9)

funkcija je rastuća i konveksna

C3: $dy / dx = 0 \ \& \ d^2y / dx^2 > 0$ (t.e.10)

funkcija ima minimum.

gde:

dy / dx je prvi izvod funkcije

d^2y / dx^2 je drugi izvod funkcije

S obzirom da vrednost drugog izvoda funkcije (p.f.1.1) u tački minimuma iznosi $Var_1''_{min}$ = 41203.22782, odnosno sigurno je veći od nule, zaključujemo da je ispunjen prethodni uslov C3 da funkcija ima minimum. Ispitajmo granu regresione funkcije (p.f.1.1) kada su vrednosti argumenta $R_1 < R_{1min}$. Vrednost drugog izvoda funkcije (p.f.1.1) u tački 'T' iznosi Var'' (T) = 41203.22782, dok vrednost prvog izvoda regresione funkcije (p.f.1.1) u toj tački iznosi Var' (T) = -0.095547812. Zaključujemo da je ispunjen uslov C1 da je funkcija na toj grani opadajuća i konveksna. Ostaje da proverimo granu regresione krive (p.f.1.1) za vrednosti argumenta $R_1 > R_{1min}$. Uzmimo neku proizvoljnu tačku 'E' čija vrednost argumenta iznosi R_1(E) = -0.003195 i izračunajmo vrednosti prvog i drugog izvoda u toj tački. Vrednost prvog izvoda regresione funkcije (p.f.1.1) u tački 'E' iznosi Var' (E) = 0.080837764, dok vrednost drugog izvoda regresione funkcije (p.f.1.1) u istoj tački iznosi Var'' (E) = 41203.22782. Zaključujemo da je ispunjen i uslov C2 da je funkcija (p.f.1.1) na toj grani rastuća i konveksna (videti Tabela 1.).

Tabela 1. Različite tačke skupa mogućih portfolija (regresione krive (p.f.1.1))

R_{1min}	R(T)	R(E)
-0.003196961927935	-0.00319928	-0.003195
Var_{1min}	Var(T)	Var(E)
0.00031094	0.00031105	0.0003110163679
$Var_1'_{min}$	Var'(T)	Var'(E)
0	-0.095547812	0.080837764
$Var_1''_{min}$	Var''(T)	Var''(E)
41203.22782	41203.22782	41203.22782

Dakle, regresiona funkcija (p.f.1.1) je na intervalu (-0.0032369, -0.003196961927934886) opadajuća i konveksna, u tački čija je vrednost argumenta (-0.003196961927934886) ima minimum i na intervalu (-0.003196961927934886, -0.0031027) je rastuća i konveksna.

POGLAVLJE 3.

U ovom poglavlju najpre uvodimo pojam efikasnog skupa regresione krive na taj način što ispitujemo funkciju na osnovi njenog prvog i drugog izvoda i na osnovi vrednosti prvog i drugog izvoda regresione krive, na njenim pojedinim segmentima, definišemo efikasni skup tako da prvi izvod regresione funkcije, na kojoj se nalazi efikasni skup, mora da ima nenegativnu vrednost.

Uvešćemo u razmatranje i pomoćnu teoremu egzistencije tangentnog portfolija, gde ćemo da dokažemo da je jedina moguća linearna zavisnost između rizične i nerizične aktive u koordinatnom sistemu definisanom prosečnim povratom i varijansom povrata, moguća ukoliko se koordinate nerizične imovine nalaze na apscisi koordinatnog sistema. (Napomena, ukoliko se koristi koordinatni sistem definisan sa promenljivim veličinama, prosečnog povrata i standardne devijacije povrata, onda za vrednost koeficijenta korelacije $r_{jk}=1$ postoji linearna veza između dve različite rizične aktive).

3.1 Efikasni skup regresione krive

Konačno, možemo da definišemo *efikasni skup*. Pod efikasnim skupom podrazumevaćemo deo krive (p.f.1.1) kojem pripadaju: a) tačka u kojoj kriva ima minimum i b) sve tačke krive za koje je ona rastuća i konveksna, odnosno u svim slučajevima u kojima važe uslovi:

a) $dy / dx = 0$ & $d^2y / dx^2 > 0$

b) $dy / dx > 0$ & $d^2y / dx^2 > 0$

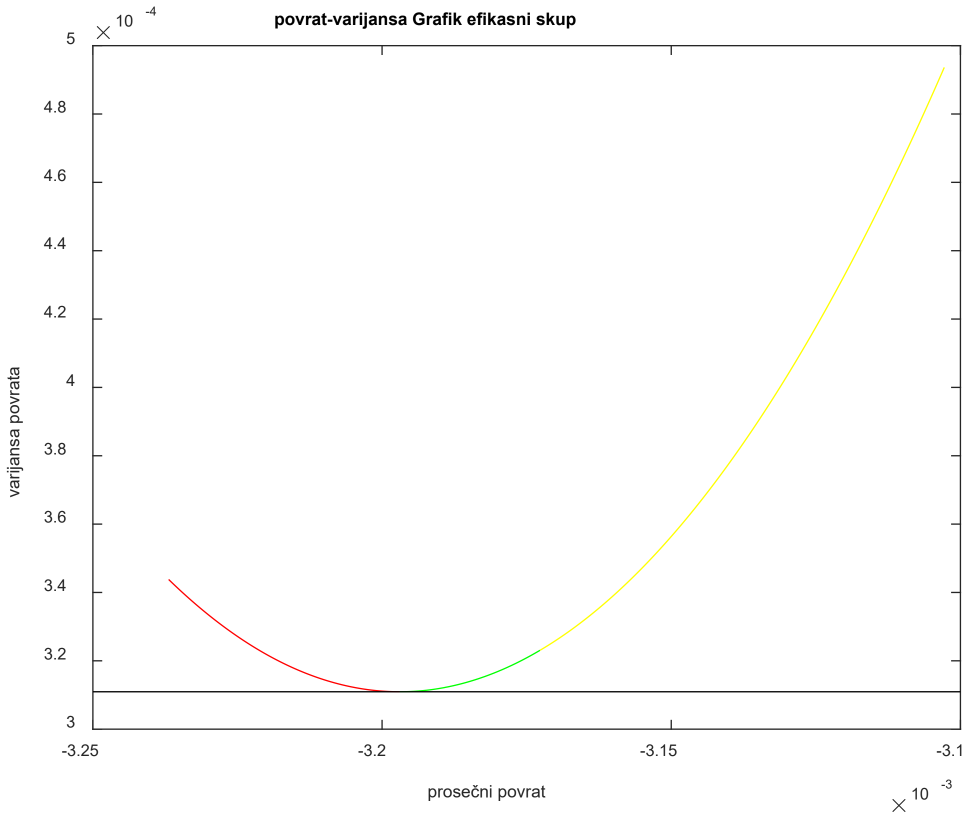
Proverimo ovu tvrdnju. S obzirom da su vrednosti varijansi regresione krive (p.f.1.1) u tačkama 'T' i 'E' veće od varijanse u tački 'M' u kojoj regresiona funkcija (p.f.1.1) ima minimum (videti Tabela 1.) zaključujemo da sve tačke regresione krive (p.f.1.1) za koje važi uslov $R_1<R_{1min}$ ne pripadaju efikasnom skupu. Naime, za sve tačke regresione krive (p.f.1.1) za koje je ispunjen uslov $R_1<R_{1min}$ njen prvi izvod je manji od nule, odnosno $dy / dx < 0$. Dakle, racionalan investitor će odbaciti sve tačke parcijalnog portfolija koje se nalaze na delu regresione krive (p.f.1.1) za koje važi da je $R_1<R_{1min}$. Izbor partitivnog portfolija, racionalnog investitora, svodi se na deo regresione krive (p.f.1.1) za koju važe uslovi $R_1=R_{1min}$ i $R_1>R_{1min}$. Dakle, izbor PP1 mora da se izvrši na delu regresione krive (p.f.1.1) koji pripada efikasnom skupu (videti Matlab Grafik 2.). Na grafiku može da se uoči da deo regresione krive (p.f.1.1) označen crvenom bojom ne pripada efikasnom skupu, dok delovi označeni zelenom i žutom bojom pripadaju efikasnom skupu PP1.

3.2 Egzistencija tangentnog portfolija

Problem postojanja (egzistencije) tangentnog portfolija obrazložićemo uz pomoć matematičke teorije. Naime, koristićemo definicije diferencijalne geometrije. Potrebno je dakle, da definišemo pojmove krive (zadate eksplicitno) i tangente na krivu.

Prost luk krive predstavlja geometrijsko mesto tačaka u ravni čije koordinate zadovoljavaju jednačinu $y = f(x)$, gde je $f(x)$ na intervalu $a \leq x \leq b$ jednoznačna, neprekidna i ima neprekidan izvod (Miličić, Trifunović & Ušćumlić, 1986). *Tangenta* krive u tački M, koja pripada krivoj sa koordinatama (x,y) je granični položaj sečice MM_1, gde je M_1 tačka na krivoj, kada $M_1 \rightarrow M$. Ako se sa X,Y označe tekuće koordinate tačaka tangente, jednačina tangente na krivu, datu u eksplicitnom obliku, je $Y - y = f'(x)(X - x)$ (Miličić, Trifunović & Ušćumlić, 1986).

Grafik 2. Efikasni skup



Formulišimo, sada, prvu pomoćnu teoremu istraživanja, koja glasi:

Teorema egzistencije tangentnog portfolija
"*Ako postoji nerizični prinos, onda i samo onda postoji tangentni portfolio koji je optimalna kombinacija rizične aktive*".

Pre nego što pristupimo dokazivanju teoreme potrebno je da definišemo neke osnovne pojmove matematičke logike. Miličić & Ušćumlić (1984) definišu: *Iskaz* podrazumeva bilo koju rečenicu koja može da bude samo tačna ili samo netačna, odnosno, iskaz može da ima samo jednu od istinitosnih vrednosti: tačan (istinit), tj. netačan (neistinit). Iskazi se, po konvenciji, obeležavaju malim slovima latinice: p,q,r,… Uvode se i oznake **T** (tačno) i ⊥ (netačno). Istinitosna vrednost iskaza p, u oznaci τ (p), biće: τ (p)= **T**, ako je iskaz p tačan i τ (p)= ⊥ , ako je iskaz p netačan.

logičke operacije

Neka su dati iskazi p i q.

Konjukcija iskaza p i q je iskaz (p ∧ q) kojem odgovara tablica istinitosti (Miličić & Ušćumlić, 1984):

p	q	p ∧ q
T	T	T
T	⊥	⊥
⊥	T	⊥
⊥	⊥	⊥

Disjunkcija iskaza p i q je iskaz p ∨ q kojem odgovara tablica istinitosti (Miličić & Ušćumlić, 1984):

p	q	p ∨ q
T	T	T
T	⊥	T
⊥	T	T
⊥	⊥	⊥

Implikacija iskaza p i q je iskaz p ⇒ q kojem odgovara tablica istinitosti (Miličić & Ušćumlić, 1984):

p	q	p ⇒ q
T	T	T
T	⊥	⊥
⊥	T	T
⊥	⊥	T

Jedan od najznačajnijih veznika upravo je veznik implikacije. Rečenica "p implicira q" sa nepromenjenim značenjem može da se zapiše i na sledeće načine: a) "ako p, onda q", b) "iz p sledi q", c) "q, ako p", d) "p je dovoljan uslov za q", e) "q je potreban uslov za p" (Miličić & Ušćumlić, 1984).

Ekvivalencija iskaza p i q je iskaz p ⇔ q čije su istinitosne vrednosti zadate tablicom (Miličić & Ušćumlić, 1984):

p	q	p ⇔ q
T	T	T
T	⊥	⊥
⊥	T	⊥
⊥	⊥	T

Rečenicu "p je ekvivalentno q" možemo da iskažemo i na sledeći način: a) "ako p, onda q, i ako q, onda p", b) "p je potreban i dovoljan uslov za q", c) "p ako i samo ako q" (Miličić & Ušćumlić, 1984).

Pored ovih osnovnih binarnih logičkih veznika (operatora) (binarni, iz razloga što se od dva iskaza stvara jedan novi iskaz), postoji i unarni veznik (operator), koji od iskaza p stvara novi složeniji iskaz, $\neg$p, (“ne-p”) (Miličić & Ušćumlić, 1984).

Negacija iskaza p je iskaz $\neg$p kojem odgovara tablica istinitosti (Miličić & Ušćumlić, 1984):

p	**$\neg$p**
T	**⊥**
⊥	**T**

Iskazne konstante (T i ⊥), sva iskazna slova (p,q,r,…) i svi složeni iskazi nazivaju se iskazne formule. Da bi iskazna formula bila nedvosmisleno zapisana, prilikom zapisivanja koriste se i zagrade. Polazi se od pretpostavke da je negacija, operacija najvišeg prioriteta, nakon nje su konjukcija i disjunkcija (međusobno ravnopravne), i na kraju implikacila i ekvivalencija (takođe međusobno ravnopravne). Iskazne formule koje su uvek, za sve vrednosti iskaznih slova, tačne nazivaju se *tautologije* (Miličić & Ušćumlić, 1984).

Dokaz:

S obzirom da teorema egzistencije tangentnog portfolija predstavlja iskaz ekvivalencije dokazivanje ćemo izvesti pravilom logičkog zaključivanja, tzv. svođenja na protivrečnost, odnosno formalno $(\neg p \Rightarrow (q \land \neg q)) \Rightarrow p$.

A) pretpostavimo, dakle, suprotno da iskaz 'p' nije tačan, odnosno da važi: postoji tangentni portfolio koji je optimalna kombinacija rizične aktive i u slučaju da postoji rizični prinos.

Ovu tvrdnju ćemo opovrgnuti prethodno opisanom metodologijom svođenja na apsurd (lat. reductio ad absurdum). Dakle, neka postoji rizični prinos, koji ćemo obeležiti sa R_{ry} u koordinatnom sistemu definisanom koordinatama prosečnog (očekivanog) povrata i varijansom povrata, čije su koordinate (0.0000561349; 0.00001).

S obzirom da kriva (p.f.1.29) ima oblik

Var_{29} = 0.000145289 -0.0845825 * R_{29} +23.3946 * R_{29} ^2 +0.0000000126906 * R_{29} ^3 - 0.00000412688 * R_{29} ^4 +0.00069451 * R_{29} ^5 -0.0474143 * R_{29} ^6

i da njen prvi izvod (d.f.1.29) ima oblik

Var_{29}' = -0.0845825 +46.7892 * R_{29} +0.0000000380718 * R_{29} ^2 -0.00001650752 * R_{29} ^3 +0.00347255 * R_{29} ^4 -0.2844858 * R_{29} ^5

Tangenta na krivu (p.f.1.29) iz tačke R_{rs}(0.0000561349;0.00001) imaće jednačinu

$0.00001-Var_{29} =(-0.0845825 +46.7892 * R_{29} +0.0000000380718 * R_{29} ^2 -0.00001650752 * R_{29} ^3 +0.00347255 * R_{29} ^4 -0.2844858 * R_{29} ^5)*(0.0000561349-R_{29})$

nakon sređivanja dobija se

$-Var_{29} = -0.000014748+0.087209007*R_{29} -46.7892*R_{29}^2-0.000000039*R_{29}^3 + 0.00001670245*R_{29}^4-0.003488519582*R_{29}^5+0.2844858*R_{29}^6$

kada se prethodna jednačina sabere sa jednačinom (p.f.1.29) dobija se:

$0=0.000130541+0.002626507*R_{29}-23.3946*R_{29}^2-0.00000002631*R_{29}^3+0.00001257557* R_{29}^4 -0.002794*R_{29}^5+0.2370715*R_{29}^6$

Korene ove jednačine dobićemo korišćenjem programa Matlab:

```
>> p = [0.2370715 -0.002794 0.00001257557 -0.00000002631 -23.3946 0.002626507 0.000130541];

r = roots(p)

r =

 3.1547 + 0.0000i

 0.0029 + 3.1518i

 0.0029 - 3.1518i

-3.1489 + 0.0000i

 0.0024 + 0.0000i (0.0024189966 preciznije)

-0.0023 + 0.0000i
```

kada vrednost (0.0024189966) koja jedina pripada domenu [0.0016248; 0.0038495], regresione funkcije (p.f.1.29) uvrstimo u jednačinu (p.f.1.29) dobijamo vrednost varijanse (0.000077578764229) u tački T_{29ry} u kojoj tangenta povučena iz tačke R_{ry}, čije su koordinate (0.0000561349:0.00001), dodiruje regresionu krivu (p.f.1.29). Vrednost prvog izvoda jednačine (d.f.1.29) iznosi (0.0286004157168044) i dobijamo je kada vrednost (0.0024189966) uvrstimo u prethodnu jednačinu. Konačno, možemo da postavimo jednačinu tangente:

$Y-0.000077578764229 =0.0286004157168044(X-0.0024189966)$

odnosno nakon sređivanja

$Y =0.0286*X+0.0000084$

Dakle, strogo matematički posmatrano, sasvim je moguće da postoji tangenta na regresionu krivu (p.f.1.29) koja je povučena iz bilo koje tačke van te krive, kao što je to urađeno u ovom slučaju. Međutim, sa stanovišta portfolio teorije, rizični prinos (R_{ry}) i tangentni portfolio (T_{29ry}) nalaze se u odnosu korelacije čiji je koeficijent korelacije različit od nule, u oznaci ($r_{jk} \neq 0$). Ukoliko, dakle važi slučaj nenultog koeficijenta korelacije onda bi, ukoliko rizične aktive obeležimo sa 'j' i 'k', jednačine za izračunavanje prosečnog povrata i varijanse portfolija bile (t.e.2) i (t.e.3), dakle:

$R_p = \sum_j \Pi_j * R_j$

$\sigma^2 = \sum_j \sum_k \Pi_j * \Pi_k * \sigma_{jk}$

S obzirom da jednačina za izračunavanje vrednosti koeficijenta korelacije glasi (Van Horne, 2001):

$r_{jk} = \sigma_{jk} / (\sigma_j * \sigma_k)$

gde

σ_j je standardna devijacija aktive 'j'

σ_k je standardna devijacija aktive 'k'

sledi:

$\sigma^2 = \sum_j \sum_k \Pi_j * \Pi_k * r_{jk} * \sigma_j * \sigma_k$.

S obzirom da za aktivu R_{ry} nemamo podatke o kretanju dnevnih povrata, već smo isključivo u cilju dokazivanja teoreme pretpostavili da postoji, sa nivoom rizika, merenog varijansom (0.00001), iz tog razloga i ne mogu da budu izračunate vrednosti kovarijanse i koeficijenta korelacije u odnosu na drugu rizičnu aktivu. Stoga, pretpostavimo da je koeficijent korelacije između ovih rizičnih aktiva (R_{ry}) i (T_{29ry}) jednak:

a) $r_{jk} = 1$; i b) $r_{jk} = 0.5$ (videti EXCEL tabelu, kolone PP do PT, a) polja 45 do 66 i b) polja 67 do 88). Regresijom dobijenih vrednosti za prosečne povrate i varijanse, takvog portfolija, dobijaju se polinomijalne krive linije šestog stepena (videti Minitab regresija 3) čime se tvrdnja da postoji tangentni portfolio i u slučaju postojanja izabranog rizičnog prinosa svodi na apsurd. (Napomena, ukoliko se koristi koordinatni sistem definisan promenljivim, prosečni povrat-standardna devijacija povrata, za vrednost koeficijenta korelacije $r_{jk} = 1$ postoji linearna veza između rizičnog prinosa i povrata tangentnog portfolija, videti Minitab regresija 3 i Excel tabelu, kolone PU do PY, polja 67 do 88).

Proverimo sada da li vrednosti varijanse za slučaj polinomijalne jednačine kada je $r_{jk} = 1$, odgovaraju vrednostima varijansi jednačine tangente iz tačke R_{ry} na regresionu krivu (p.f.1.29). Regresiona jednačina glasi (videti Minitab regresija 3):

$Var(R_{ry}-T_{29ry};\ r_{jk}=1)= 0.00000916972 +0.0144704 *R +5.70879 *R ^ 2 - 0.000000000203006 *R ^ 3 + 0.000000140175 *R ^ 4 - 0.0000401378 *R ^ 5 + 0.00376119 *R ^ 6$

Neka je proizvoljno izabrana vrednost prosečnog povrata iz domena [0.0000561349; 0.0024189966] jednaka (0.002). Izračunajmo vrednosti varijansi ovih dveju jednačina:

$Var(R_{ry}-T_{29ry};\ r_{jk}=1)=$ <u>0.00006094568</u>

dok je vrednost varijanse jednačine tangente Y=0.0286*X+0.0000084; Y= <u>0.0000656</u>

Očigledno je da regresija rezultata povrata i varijansi ove dve rizične aktive ne potvrđuje postojanje linearne veze između njih, odnosno ne potvrđuje postojanje tangente koja bi bila povučena iz tačke R_{ry} na regresionu krivu (p.f.1.29), koja bi dodirivala regresionu krivu u tački T_{29ry}. Dakle, s obzirom da tvrdnja, A) postoji tangentni portfolio koji je optimalna kombinacija rizične aktive i u slučaju da postoji rizični prinos, ne može da bude tačna, potvrđen je stav da jedina linearna zavisnost (tangenta) na regresionu krivu, a koja kriva predstavlja različite kombinacije rizičnog portfolija, postoji samo ukoliko postoji nerizični prinos (čija je varijansa jednaka nuli).

U slučaju nulte korelacije između dve aktive, odnosno slučaja kada je $r_{jk}=0$, sledi da je i vrednost kovarijanse između te dve aktive jednaka nula, odnosno $\sigma_{jk}=0$. Razlog za to je, što je u tom slučaju, varijansa jedne od tih aktiva jednaka nuli ($\sigma_j^2=0$), a samim tim je i standardna devijacija jednaka nuli ($\sigma_j=0$), iz čega sledi da se jednačina za određivanje vrednosti varijanse ovakvog (dvočlanog) portfolija redukuje na oblik:

$\sigma^2 = \sum_k * \Pi_k * \sigma_k^2$ (videti Excel tabelu, kolone PP do PT, polja 89 do 110).

Regresijom dobijenih rezultata za povrate i varijanse portfolija pravilne tangente, dobija se očekivano, linearna forma čija je jednačina identična jednačini (t.5) (videti Minitab regresija 3), čime se potvrđuje istinitost teoreme.

Dokažimo sada teoremu i iz suprotnog smera, odnosno:

B) pretpostavimo suprotno da iskaz 'q' nije tačan, odnosno da važi: postoji neki drugi tangentni portfolio, koji je optimalan, ako postoji nerizični prinos.

I ovu tvrdnju osporićemo metodom svođenja na apsurd. Dakle, neka je vrednost povrata takvog tangentnog portfolija, u oznaci T_{29fls} veća od vrednosti povrata pravilnog tangentnog portfolija T_{29} (0.00250778;0.000080302) i neka iznosi (0.003). Ukoliko ovu vrednost uvrstimo u jednačinu (p.f.1.29) dobijamo vrednost varijanse koja iznosi (0.0001020929). Dakle, 'lažni' tangentni portfolio ima koordinate (0.003; 0.0001020929) i nalazi se na efikasnom skupu regresione krive (p.f.1.29). Postavlja se pitanje da li je on tangentni portfolio i da li je optimalan.

Jednačina tangente (t.5), koja je povučena na regresionu krivu (p.f.1.29) iz tačke van krive čije su koordinate (0.0000561349;0), dakle iz tačke koja predstavlja nerizični prinos i nalazi se na apscisi, glasi:

Y = 0.032755*X -0.0000018403339

Ukoliko vrednost povrata 'lažnog' tangentnog portfolija uvrstimo u ovu jednačinu dobijamo vrednost varijanse portfolija koji se nalazi na linearnom efikasnom skupu definisanom jednačinom tangente (t.5). Sledi:

Y = 0.032755*0.003 -0.0000018403339=<u>0.0000964246661</u>

Očigledno je da postoji razlika u vrednosti varijansi 'lažnog' tangentnog portfolija i portfolija koji se nalazi na linearnom efikasnom skupu definisanom sa (t.5), i ta razlika iznosi:

$\Delta\sigma^2$= 0.0001020929-0.0000964246661=<u>0.0000056682339</u>

Dakle, zaključujemo da tačka T_{29fls} ne pripada tangenti (t.5), te samim tim i nije tangentni portfolio i s obzirom da ima veći nivo varijanse, za isti nivo povrata, od portfolija na linearnom efikasnom skupu nije ni optimalni portfolio. Duž definisana tačkama T_{29fls} i T_{29} predstavlja samo jednu od sečica koja je prethodno definisana. Ovim je teorema dokazana i u suprotnom smeru. Dakle, konačni zaključak koji izvodimo je da je teorema egzistencije tangentnog portfolija tačna u formi u kojoj je izložena.

Diskusija i finansijske posledice pomoćne teoreme egzistencije tangentnog portfolija: dakle, dokazali smo pomoćnu teoremu egzistencije tangentnog portfolija u oba smera, smatrajuči je iskazom ekvivalencije. Zaključak koji izvodimo je da se u koordinatnom sistemu definisanom prosečnim povratom i varijansom povrata, jedina moguća linearna veza, između rizične i nerizične aktive, realizuje postavljanjem tangente na regresionu krivu, a koja kriva predstavlja skup mogućih rizičnih portfolija, čime se i definiše tangentni portfolio. Zapravo, tangenta se postavlja na deo krive koji je definisan kao efikasni skup portfolija, iz tačke koja se nalazi na apscisi koordinatnog sistema, a koja tačka, predstavlja koordinate nerizične aktive. Dakle, za egzistenciju tangentnog portfolija, neophodan uslov je postojanje nerizičnog prinosa, odnosno samo uz taj uslov i može da postoji. Ovim se izbor portfolija od strane bilo kojeg investitora svodi na vrednosti kombinacija nerizične i rizične aktive koje se nalaze na tangenti, koja je sama po sebi linearna veza između ova dva tipa aktive. Ovakvim postupkom, dakle, izborom portfolija na linearnom efikasnom skupu, investitori značajno smanjuju nivo rizika (merenog varijansom) izabrane kombinacije nerizičnog i rizičnog portfolija za identičan nivo povrata koji može da se postigne na efikasnom skupu regresione krive, a koja kriva je kombinacija isključivo rizičnih portfolija. Dakle, investiranje metodom kombinovanja rizične aktive (tangentnog portfolija) sa nerizičnim prinosom značajno smanjuje nivo rizika u odnosu na investiranje isključivo u rizičnu imovinu.

POGLAVLJE 4.

U ovom poglavlju najpre uvodimo kriterijume za izbor portfolija na taj način što određujemo vrednost funkcije prvog izvoda regresione funkcije i na taj način nepristrasno biramo kombinaciju portfolija koji leži na datoj regresionoj krivoj.

Naredni pojmovi koje definišemo su sklonost ka riziku i averzija prema riziku. Ove pojmove, iz razloga kvantifikovanja, definišemo kao vrednost prvog izvoda, u određenoj tački regresione krive, i recipročnu vrednost prvog izvoda regresione funkcije, respektivno. Ovakvim načinom definisanja pomenute veličine se posmatraju kao međusobno inverzne, dakle njihov proizvod je jednak '1'.

Sledeći pojam je partitivni portfolio višeg ranga koji nastaje tako što na prethodni partitivni portfolio dodajemo hartiju od vrednosti koja neposredno sledi iz uspostavljenog rastućeg poretka prosečnih povrata svake hartije od vrednosti u nizu.

Naredni pojmovi koje je potrebno definisati su tangentni portfolio najvišeg ranga i tržišna linija kapitala. Portfolio najvišeg ranga dobija se kao konačni rezultat u lancu partitivnih portfolija, na koji se onda postavlja tangenta iz tačke koja predstavlja koordinate nerizičnog prinosa i time definiše tzv. tržišnu liniju kapitala, koja je ništa drugo do tangenta na regresionu krivu najvišeg ranga, odnosno na njen krak koji je monotono rastući.

Poslednji pojam koji uvodimo u ovom poglavlju je egzistencija višestrukih tangentnih portfolija. Posmatraćemo problem koji nastaje kada investitori nemaju 'nultu' sklonost ka riziku, čime se regresione krive koje predstavljaju partitivne portfolije pomeraju prema višim vrednostima prosečnih povrata i varijanse povrata u koordinatnom sistemu definisanom sa ove dve promenljive. U ovoj tački poglavlja uvodimo i drugu pomoćnu teoremu egzistencije višestrukih tangentnih portfolija.

4.1 Kriterijumi za izbor portfolija

C4: Prvi izvod regresione funkcije jednak je nuli ($Var' = 0$)

C5: Tangentni portfolio (ukoliko postoji)

C6: Prvi izvod regresione funkcije jednak je jedan ($Var' = 1$)

Prethodno je pokazano (u tačkama 3. i 5. Poglavlja 2.) da regresiona kriva (p.f.1.1) ima minimum u tački M_1(-0.003196962; 0.00031094) i da tangenta čija je jednačina (t.1) dodiruje regresionu krivu (p.f.1.1) u tački T(-0.00319928; 0.00031105). Zaključujemo da je kriterijum za izbor portfolija C4 ispunjen, ali da kriterijum C5 nije, iz razloga što tačka 'T' ne pripada prethodno definisanom efikasnom skupu. Preostaje da proverimo da li je ispunjen kriterijum C6.

Izračunaćemo, za koju vrednost argumenta je prvi izvod funkcije (p.f.1.1), jednak '1'. Tačku regresione krive (p.f.1.1) u kojoj je njen prvi izvod jednak '1' označićemo sa 'T^1'. Izjednačićemo dakle, funkciju (d.f.1.1) sa jedinicom, odakle sledi:

$131.725 + 41203 * R_1 - 137.5251 * R_1 ^2 - 41416 * R_1 ^3 - 6220995 * R_1 ^4 -$

$372769554 * R_1 ^5 = 1$

odnosno

$130.725 + 41203 * R_1 - 137.5251 * R_1 ^2 - 41416 * R_1 ^3 - 6220995 * R_1 ^4 -$

$372769554 * R_1 ^5 = 0$

Da bi dobili korene ove jednačine koristićemo program Matlab:

```
>> p = [-372769554 -6220995 -41416 -137.5251 41203 130.725];

r = roots(p)

 r =
-0.10591 + 0.00000i
-0.00338 + 0.10253i
-0.00338 - 0.10253i
 0.09916 + 0.00000i
-0.00317 + 0.00000i (-0.003172692 preciznije)
```

S obzirom da samo peti rezultat (-0.003172692) pripada domenu regresione funkcije (p.f.1.1) uvrstićemo ga u jednačinu (p.f.1.1) i dobijamo vrednost var = 0.00032591, koja predstavlja vrednost varijanse u tački u kojoj je vrednost prvog izvoda funkcije (p.f.1.1) jednaka '1'. Dakle, koordinate tačke 'T^1' su (-0.003172692; 0.00032591). Zaključujemo dakle, da je ispunjen i kriterijum C6 za izbor portfolija. Postavimo sada tangentu iz tačke 'R_1^1' koja leži na 'x' osi na regresionu krivu (p.f.1.1) koja će da dodiruje krivu u tački u kojoj je njen prvi izvod jednak '1' (videti Matlab Grafik 3.).

Koristićemo jednačinu (t.e.6) iz koje dobijamo:

$Y - 0.00032591 = 1 * (X + 0.003172692).$

odnosno,

$Y = X + 0.003498602$ (t.2)

S obzirom na uslov da je koordinata Y=0, sledi da je X= -0.003498602. Dakle, koordinate tačke 'R_1^1' koja leži na 'x' osi iz koje smo povukli tangentu koja će da dodiruje regresionu krivu (p.f.1.1) u tački 'T^1' u kojoj je njen prvi izvod jednak '1', su: R_1^1(-0.003498602; 0). Očigledno je da se koordinate tačke 'R_1^1' značajno razlikuju od vrednosti dnevne nerizične stope R_e = 0.0000561349.

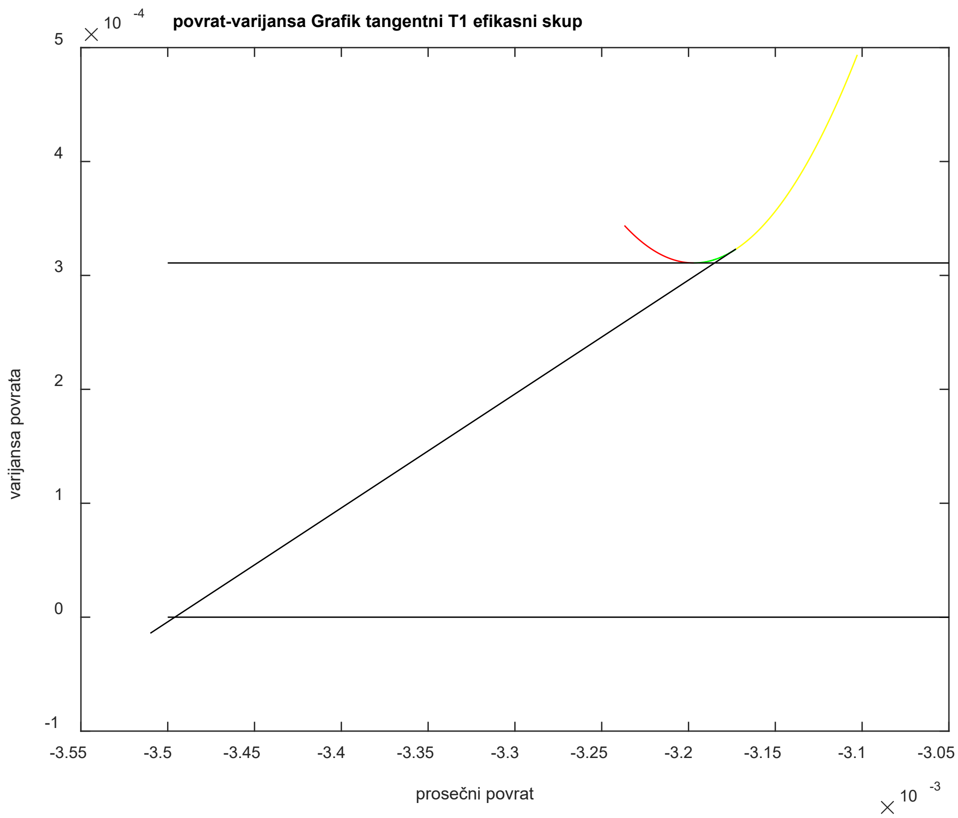
Proverimo sada pod kojim uslovima bi bio ispunjen kriterijum C5. Neka je prvi izvod regresione funkcije (p.f.1.1) jednak 0.725 i tu tačku regresione krive (p.f.1.1) označićemo sa '$T^{0.725}$'. Potrebno je da funkciju (d.f.1.1) izjednačimo sa 0.725. Dakle biće:

$131.725 + 41203 * R_1 - 137.5251 * R_1 ^2 - 41416 * R_1 ^3 - 6220995 * R_1 ^4 - 372769554 * R_1^5 = 0.725$

odnosno

131 +41203*R_1 -137.5251*R_1 ^2 -41416 * R_1 ^3 -6220995 * R_1 ^4 -372769554*R_1 ^5 = 0

Grafik 3. Tangentni efikasni skup (T1)



Korene ove jednačine dobićemo uz pomoć programa Matlab:

```
>> p = [-372769554 -6220995 -41416 -137.5251 41203 131];
r = roots(p)
r =
-0.10591 + 0.00000i
-0.00338 + 0.10253i
-0.00338 - 0.10253i
0.09916 + 0.00000i
-0.00318 + 0.00000i (-0.0031793659 preciznije)
```

S obzirom da samo peti rezultat (-0.00318) pripada domenu funkcije (p.f.1.1), uvrstićemo ga u jednačinu (p.f.1.1) i dobijamo rezultat var = 0.00031686, koji predstavlja vrednost varijanse u tački u kojoj je vrednost prvog izvoda funkcije (p.f.1.1) var′ = 0.725. Postavićemo sada tangentu iz tačke '$R_1^{0.725}$' koja leži na 'x' osi na regresionu krivu (p.f.1.1) koja će da dodiruje krivu u tački u kojoj je njen prvi izvod jednak 0.725 (var′ = 0.725) (videti Matlab Grafik 4.).

Koristićemo jednačinu (t.e.6) i dobijamo:

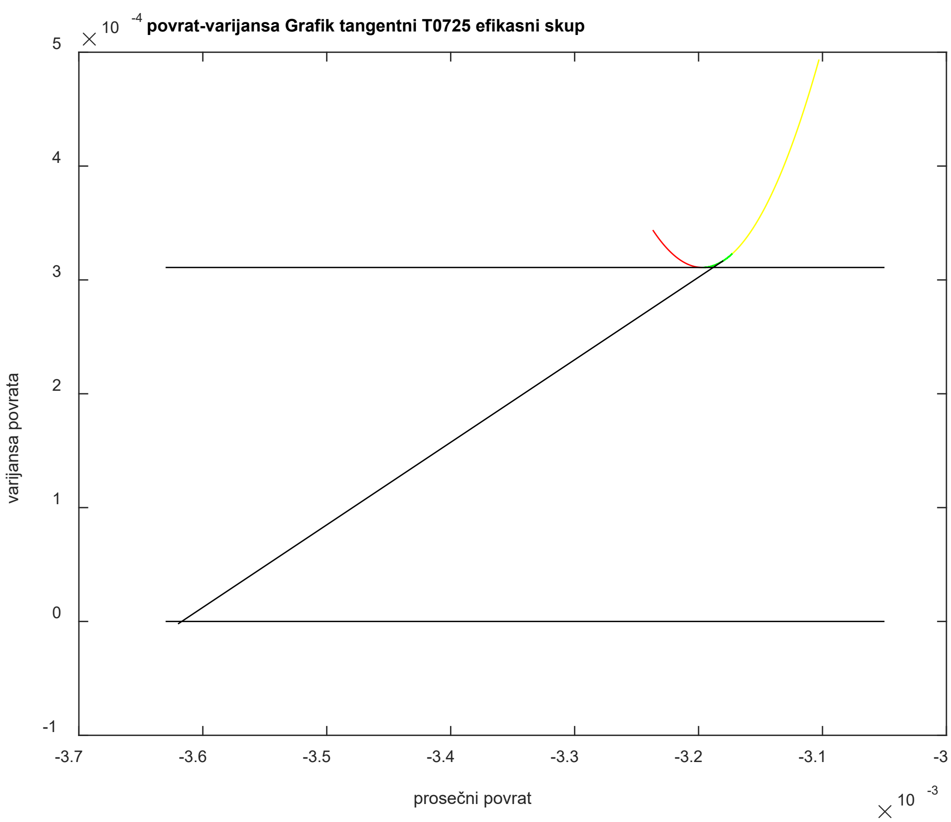
Y -0.00031686=0.725* (X +0.0031793659).

odnosno

Y=0.725*X+0.0026219 (t.3)

S obzirom na uslov Y=0, sledi da je X= -0.0036164. Dakle, koordinate tačke '$R_1^{0.725}$' koja leži na 'x' osi iz koje smo povukli tangentu koja će da dodiruje regresionu krivu (p.f.1.1) u tački '$T^{0.725}$ u kojoj je njen prvi izvod var′ = 0.725, su: $R_1^{0.725}$(-0.0036164; 0). Očigledno je da se i koordinate tačke $R_1^{0.725}$ značajno razlikuju od vrednosti dnevne nerizične stope R_e = 0.0000561349. Dakle, da bi bio ispunjen kriterijum C5 da postoji tangentni portfolio sa unapred zadatom vrednošću povrata i varijanse, vrednost dnevne nerizične stope morala bi da bude negativna, kako je to i pokazano za tačke 'R^1' i '$R^{0.725}$'.

Grafik 4. Tangentni efikasni skup (T0725)



4.2 Sklonost ka riziku. Averzija prema riziku

Definišimo pojam sklonosti investitora ka riziku, odnosno averzije prema riziku. Posmatrajući regresionu krivu (p.f.1.1) uočavamo da se na njenom efikasnom skupu, prvi izvod, u oznaci var′, konstantno menja duž linije efikasnog skupa. Naime, prvi izvod regresione funkcije (p.f.1.1), iz tačke M_1 u kojoj je jednak '0' konstantno raste kako se povećava vrednost argumenta R_1. Sa rastom vrednosti argumenta povećava se i vrednost funkcije, odnosno varijansa. Nas zapravo, zanima koliki će biti prirast vrednosti funkcije za proizvoljan prirast vrednosti argumenta. Ukoliko je vrednost prvog izvoda funkcije veća od '0' i manja od '1', u oznaci $0<var'<1$, onda će vrednost prirasta argumenta funkcije biti veća od prirasta vrednosti same funkcije. Stoga je, *sklonost ka riziku*, po definiciji, jednaka prvom izvodu regresione funkcije, u oznaci (*ptr* = var′), dok regresiona funkcija sama po sebi (ipso facto) predstavlja eksplicitni algebarski oblik nekog portfolija. Matematička interpretacija ovog stave biće sledeća (Miličić, Trifunović & Ušćumlić, 1986):

$$dy = f'(x)\,dx \tag{t.e.11}$$

gde:

dy je diferencijal funkcije 'y'

f′(x) je prvi izvod funkcije y =f(x)

dx je diferencijal argumenta 'x'

Iz jednačine (t.e.11) može da se zaključi, da ukoliko je prvi izvod funkcije f′(x) veći od '0' i manji od '1', u oznaci $0<f'(x)<1$, onda je prirast vrednosti funkcije dy, manji od prirasta vrednosti argumenta funkcije dx. Stoga će investitori neskloni riziku uvek birati portfolio čiji je prvi izvod regresione krive manji od '1' (videti Matlab Grafik 3. i Grafik 4. na kojima mogu da se uoče zeleni deo regresione krive (p.f.1.1), gde je vrednost prvog izvoda manja od '1' i žuti deo regresione krive, gde je vrednost prvog izvoda veća od '1'). Ukoliko je prvi izvod regresione krive jednak '1' onda je prirast vrednosti argumenta regresione funkcije jednak prirastu vrednosti same funkcije. Zapravo, tangenta iz tačke 'R_1^1' koja leži na 'x' osi, na regresionu krivu (p.f.1.1), koja dodiruje krivu u tački u kojoj je njen prvi izvod jednak '1', predstavlja *liniju duž koje je prirast povrata jednak prirastu varijanse*. O ovoj liniji biće više reči kasnije u tekstu (videti Matlab Grafik 3.). Nasuprot pojmu sklonosti ka riziku, pojam *averzija prema riziku* definisaćemo kao recipročnu vrednost prvom izvodu regresione funkcije, u oznaci (*rav* =1/var′). Suština ovakvog načina definisanja pojmova, sklonost ka riziku i averzija prema riziku, jeste taj da možemo da ih izrazimo kao brojnu vrednost. I zaista, u tački R_{1min}, u kojoj regresiona kriva (p.f.1.1) ima minimum, sklonost ka riziku jednaka je '0' (*ptr* =0), dok averzija prema riziku u toj istoj tački teži beskonačnosti (*rav* →∞). U tački 'T^1' u kojoj je prvi izvod regresione funkcije (1.1) jednak '1' i sklonost ka riziku i averzija prema riziku su jednaki '1', odnosno (*ptr* =1) i (*rav* =1). U tački '$T^{0.725}$', u kojoj je prvi izvod regresione funkcije (p.f.1.1) jednak <u>0.725</u>, sklonost ka riziku je (*ptr* =0.725), dok je averzija prema riziku jednaka <u>1.37931</u>, odnosno (*rav* =1/0.725≈1.37931). Dakle, sklonost ka riziku, duž linije efikasnog skupa, raste od '0' (u tački R_{1min}) do <u>3.8839</u> (u krajnjoj tački domena regresione krive (p.f.1.1) u kojoj je vrednost povrata R_1(AAPL) = -0.0031027, a vrednost prvog izvoda var′ =3.8839), dok averzija prema riziku opada od ∞ (u tački R_{1min}) do <u>0.257473</u> (u krajnjoj tački domena regresione krive (p.f.1.1), videti, Tabela 2.).

Tabela 2. Različite sklonosti ka riziku duž linije efikasnog skupa funkcije (p.f.1.1)

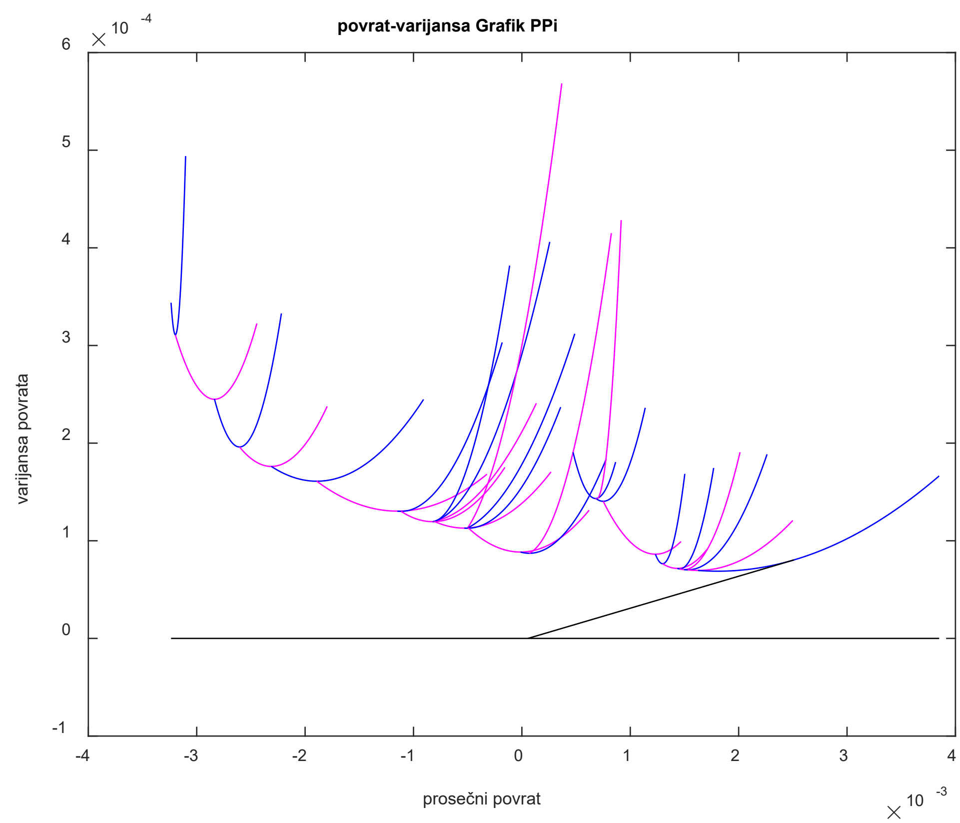
R_{1min}	R_1 ($T^{0.725}$)	R_1 (T^1)	R_1(AAPL)
-0.003196962	-0.00318	-0.00317	-0.0031027
ptr	*ptr*	*ptr*	*ptr*
0	0.725	1	3.8839
rav	*rav*	*rav*	*rav*
∞	1.37931	1	0.257473

4.3 Partitivni portfolio višeg ranga

4.3.1 Formirajmo sada PP2-1 koji predstavlja kombinaciju PP1-1 i akcije sa oznakom DWDP. PP2-1 je drugi u lancu i biće superioran u odnosu na PP1-1, iz razloga što ima viši nivo povrata uz nižu varijansu (videti Matlab Grafik 5. i Grafik 6.)**.**

Pre nego što formiramo PP2-1 usvojićemo stav da se radi o investitorima koji nisu skloni riziku, odnosno čija je averzija prema riziku visoka (videti tačku 9 ovog poglavlja) (Sharpe, 1965). Postupak formiranja PP2-1 je identičan postupku koji smo primenili prilikom formiranja PP1-1.

Grafik 5. Partitivni portfolio (i)



Dakle, kombinujemo različite porcije PP1-1 i akcije čija je oznaka DWDP (videti Excel tabelu, kolone ED do EI). Kada izvršimo regresiju kombinovanih rezultata za PP2-1, dobijamo regresionu jednačinu koja glasi (videti Minitab regresija 1 ptr=0):

Var_2 = 0.00432083 +2.87395 * R_2 +506.609 * R_2 ^2 -0.000414929 * R_2 ^3 -0.112906 * R_2 ^4 -

16.3477 * R_2 ^5 -983.951 * R_2 ^6 (p.f.1.2)

gde:

Var_2 je varijansa PP2-1

R_2 je povrat PP2-1

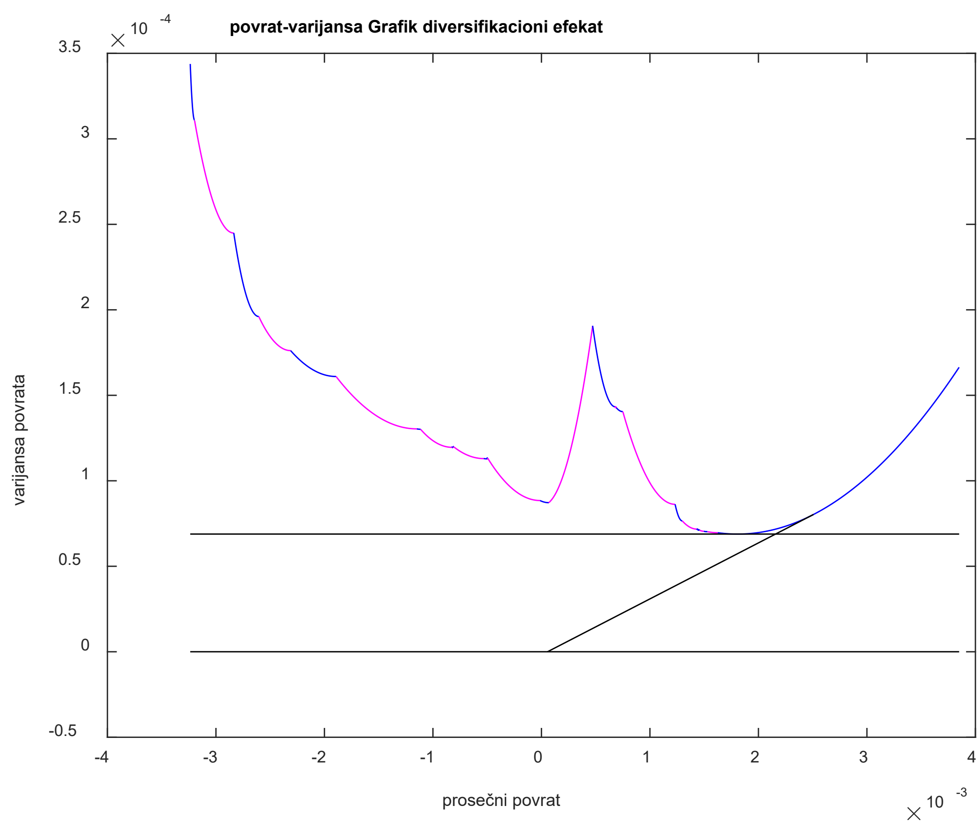
S obzirom da PP1-1 ima minimum u tački M_1, i da se radi o investitorima nesklonim riziku, ta tačka će predstavljati početnu tačku PP2-1. Stoga će, domen regresione funkcije (p.f.1.2) biti [-0.003196962; -0.002445] (videti Excel tabelu, od kolone ED do kolone EI).

Prvi izvod regresione krive (p.f.1.2) glasi:

Var_2' = 2.87395 + 1013.218 * R_2 -0.001244787 * R_2 ^2 -0.451624 * R_2 ^3 -81.7385 * R_2 ^4 -

5903.706 * R_2 ^5 (d.f.1.2)

Grafik 6. Efekat diversifikacije



Da bi proverili da li PP2-1 ima minimum, potrebno je da jednačinu (d.f.1.2) izjednačimo sa nulom ($Var_2' = 0$) i da pronađemo njene korene. Koristićemo program Matlab.

>> p = [-5903.706 -81.7385 -0.451624 -0.001244787 1013.218 2.87395];

r = roots(p)

r =

-0.64639 + 0.00000i

-0.00275 + 0.64364i

-0.00275 - 0.64364i

0.64089 + 0.00000i

-0.00284 + 0.00000i (-0.0028358 preciznije)

Očigledno je da samo peti rezultat (-0.0028358) pripada domenu regresione funkcije (p.f.1.2). PP2-1 ima minimum u tački M_2(-0.0028358; 0.0002449). Koordinatu 'y' tačke M_2 dobijamo kada vrednost (-0.0028358) uvrstimo u jednačinu (p.f.1.2). Drugi izvod regresione funkcije (p.f.1.2) je $Var_2'' \approx 1013.2$. Porcije PP1-1 i akcije DWDP u PP2-1 dobijamo koristeći jednačine (t.e.2), i (t.e.4) iz kojih izračunavamo da je Π_j (PP1-1) =0.52 i Π_k (DWDP) =0.48 (videti Excel tabelu, kolone od EJ do EN).

4.3.2 Naredni partitivni portfolio u lancu koji treba da formiramo je PP3, koji predstavlja kombinaciju minimuma PP2-1 i akcije sa oznakom IBM. Postupak formiranja ovog partitivnog portfolija je identičan prethodnom (videti Excel tabelu, kolone od EO do ET). PP3 će biti superioran u odnosu na PP2-1 (videti Matlab Grafik 6.).

Regresiona jednačina PP3-1 glasi (videti Minitab regresija 1 ptr=0):

Var_3 = 0.00642018 +4.877858 * R_3 +917.194 * R_3 ^2 -0.00115582 * R_3 ^3 -0.347872 * R_3 ^4 -

55.7102 * R_3 ^5 -3708.98 * R_3 ^6 (p.f.1.3)

gde:

Var_3 je varijansa PP3-1

R_3 je povrat PP3-1

Domen regresione funkcije (p.f.1.3) je [-0.0028358; -0.0022189] (videti Excel tabelu, kolone od EO do ET).

Prvi izvod regresione krive (p.f.1.3) glasi:

Var_3' = 4.77858 + 1834.388 * R_3 -0.00346746 * R_3 ^2 -1.391488 * R_3 ^3 -278.551 * R_3 ^4 -

22253.88 * R_3 ^5 (d.f.1.3)

Da bi proverili da li PP3-1 ima minimum, potrebno je da jednačinu (d.f.1.3) izjednačimo sa nulom ($Var_3' = 0$) i da pronađemo njene korene. Koristićemo program Matlab.

>> p = [-22253.88 -278.551 -1.391488 -0.00346746 1834.388 4.77858];

r = roots(p)

r =

-0.53830 + 0.00000i

-0.00248 + 0.53582i

-0.00248 - 0.53582i

 0.53335 + 0.00000i

-0.00260 + 0.00000i (-0.0026049996 preciznije)

Očigledno je da samo peti rezultat (-0.0026049996) pripada domenu regresione funkcije (p.f.1.3). Regresiona kriva (p.f.1.3) ima minimum u tački sa koordinatama M_3(-0.002605; 0.00019608). Kada vrednost povrata R_{3min} = -0.002605 uvrstimo u jednačinu (p.f.1.3) dobijamo vrednost varijanse var_3 =0.00019608. Dovoljan uslov da regresiona kriva (p.f.1.3) ima minimum je da njen drugi izvod ($Var_3'' \approx 1834.4$) bude veći od nule. Porcije PP2-1 i IBM će biti Π_j (PP2-1) =0.62587 i Π_k (IBM) =0.37413 (videti Excel tabelu, kolone od EU do EY).

Svaki od narednih partitivnih portfolija PP4-1, PP5-1, PP6-1, PP7-1, PP8-1 formiraćemo na prethodno opisan način, odnosno tražićemo minimum regresione funkcije, dok ćemo partitivnom portfoliju PP9-1 pristupiti na drugačiji način, iz razloga koji će biti opisani kasnije (videti Matlab Grafik 5. i Grafik 6.). Naime PP9-1 neće imati minimum i iz tog razloga ćemo u pristupu za njegov izbor koristiti kriterijume koji su opisani u tački 3.1 ovog poglavlja.

4.3.3 PP4-1 predstavlja kombinaciju minimuma PP3-1 i akcije sa oznakom HD i imaće sledeću regresionu jednačinu (videti Minitab regresija 1 ptr=0):

$$Var_4 = 0.0014147 + 1.07153 * R_4 + 231.756 * R_4\,^2 + 0.0000390763 * R_4\,^3 + 0.0133838 * R_4\,^4 + 2.43667 * R_4\,^5 + 181.241 * R_4\,^6 \qquad \text{(p.f.1.4)}$$

gde:

Var_4 je varijansa PP4-1

R_4 je povrat PP4-1

Domen regresione funkcije (p.f.1.4) je [-0.002605; -0.0017966] (videti Excel tabelu, kolone od EZ do FE).

Prvi izvod regresione krive (p.f.1.4) glasi:

$$Var_4' = 1.07153 + 463.512 * R_4 + 0.0001172289 * R_4\,^2 + 0.0535352 * R_4\,^3 + 12.18335 * R_4\,^4 + 1087.446 * R_4\,^5 \qquad \text{(d.f.1.4)}$$

Minimum PP4-1 dobićemo kada prvi izvod (var_4') izjednačimo sa ‘0’. Kao i u prethodnim slučajevima koristićemo program Matlab.

```
>> p = [1087.446 12.18335 0.0535352 0.0001172289 463.512 1.07153];

r = roots(p)

r =
```

-0.57357 + 0.57134i

-0.57357 - 0.57134i

0.56912 + 0.57134i

0.56912 - 0.57134i

-0.00231 + 0.00000i (-0.002311763 preciznije)

Jasno je da samo peti rezultat (-0.002311763) pripada domenu regresione funkcije (p.f.1.4). Koordinate tačke minimuma regresione funkcije (p.f.1.4) su M_4(-0.002311763; 0.00017614). Kada vrednost povrata (-0.002311763) uvrstimo u funkciju (p.f.1.4) dobijamo vrednost varijanse (0.00017614) u tački u kojoj regresiona funkcija (p.f.1.4) ima minimum. Dovoljan uslov da funkcija (p.f.1.4) ima minimum je $Var_4'' \approx 463.6$. Porcije PP3-1 i HD će biti Π_j (PP3-1) =0.63726 i Π_k (HD) =0.36274 (videti Excel tabelu, kolone od EZ do FJ).

4.3.4 PP5-1 biće formiran kao kombinacija minimuma PP4-1 i akcije sa oznakom UTX. Regresiona jednačina imaće sledeći oblik (videti Minitab regresija 1 ptr=0):

Var_5 = 0.000469938 +0.326476 * R_5 +86.2512 * R_5 ^2 +0.000000215785 * R_5 ^3 +0.0000976855 * R_5 ^4 + 0.0230445 * R_5 ^5 +2.21464 * R_5 ^6 (p.f.1.5)

gde:

Var_5 je varijansa PP5-1

R_5 je povrat PP5-1

Domen regresione funkcije (p.f.1.5) je [-0.0023117; -0.0009072] (videti Excel tabelu, kolone FK do FP).

Prvi izvod regresione krive (p.f.1.5) glasi:

Var_5' = 0.326476 + 172.5024 * R_5 +0.000000647355 * R_5 ^2 +0.000390742 * R_5 ^3 +0.1152225 * R_5 ^4 +13.28784 * R_5 ^5 (d.f.1.5)

Minimum PP5-1 dobićemo iz uslova var_5' =0. Komanda za program Matlab biće:

```
>> p = [13.28784 0.1152225 0.000390742 0.000000647355 172.5024 0.326476];

r = roots(p)

r =
```

-1.34390 + 1.34221i

-1.34390 - 1.34221i

1.34051 + 1.34221i

1.34051 - 1.34221i

-0.00189 + 0.00000i (-0.001892588 preciznije)

Samo peti rezultat (-0.001892588) pripada domenu regresione funkcije (p.f.1.5). Koordinate tačke u kojoj regresiona funkcija (p.f.1.5) ima minimum su M_5(-0.001892588; 0.000161). Kada se vrednost povrata (-0.001892588) uvrsti u jednačinu (p.f.1.5) dobija se rezultat (0.000161), koji predstavlja vrednost varijanse u tački u kojoj regresiona funkcija (p.f.1.5) ima minimum. Vrednost drugog izvoda je $var_5'' \approx 172.5$, tako da je ispunjen i dovoljan uslov da funkcija (p.f.1.5) ima minimum. Vrednosti porcija PP4-1 i UTX će biti Π_j (PP4-1) =0.7016 i Π_k (UTX) =0.2984 (videti Excel tabelu, kolone od FK do FU).

4.3.5 PP6-1 biće formiran kao kombinacija minimuma PP5-1 i akcije sa oznakom JPM. Regresiona jednačina imaće sledeći oblik (videti Minitab regresija 1 ptr=0):

$$Var_6 = 0.000203396 + 0.127153 * R_6 + 55.3465 * R_6\hat{}2 - 0.0000000354674 * R_6\hat{}3 - 0.0000253791 * R_6\hat{}4 - 0.00912199 * R_6\hat{}5 - 1.29832 * R_6\hat{}6 \quad \text{(p.f.1.6)}$$

gde:

Var_6 je varijansa PP6-1

R_6 je povrat PP6-1

Domen regresione funkcije (p.f.1.6) je [-0.0018926; -0.0003221] (videti Excel tabelu, kolone od FV do GA).

Prvi izvod regresione krive (p.f.1.6) glasi:

$$Var_6' = 0.127153 + 110.693 * R_6 - 0.0000001064022 * R_6\hat{}2 - 0.0001015164 * R_6\hat{}3 - 0.04560995 * R_6\hat{}4 - 7.78992 * R_6\hat{}5 \quad \text{(d.f.1.6)}$$

Minimum PP6-1 dobićemo iz uslova $var_6' = 0$. Rezultat je dobijen programom Matlab.

```
>> p = [-7.78992 -0.04560995 -0.0001015164 -0.0000001064022 110.693 0.127153];

r = roots(p)

r =

  -1.9427 + 0.0000i

  -0.0012 + 1.9415i

  -0.0012 - 1.9415i

   1.9404 + 0.0000i

  -0.0011 + 0.0000i (-0.0011487 preciznije)
```

Kada rezultat (-0.0011487) uvrstimo u jednačinu (p.f.1.6) dobijamo koordinatu varijanse za minimum regresione funkcije koja iznosi $var_6 = 0.00013037$. Dovoljan uslov za egzistenciju minimuma funkcije je ($var_6'' \approx 110.7$). Dakle tačka u kojoj regresiona funkcija (p.f.1.6) ima minimum imaće koordinate M_6 (-0.0011487;0.00013037). Preostaje još da izračunamo porcije PP5-1 i akcije JPM u PP6-1. Koristićemo jednačine (t.e.2) i (t.e.4), iz kojih izračunavamo: Π_j (PP5-1) =0.52633 i Π_k (JPM) =0.47367 (videti Excel tabelu, kolone od GB do GF).

4.3.6 PP7-1 nastaje kombinacijom minimuma PP6-1 i akcije sa oznakom NKE. Regresiona jednačina ima sledeći oblik (videti Minitab regresija 1 ptr=0):

Var_7 = 0.000377129 +0.443435 * R_7 +199.021 * R_7 ^2 +0.000000110886 * R_7 ^3 + 0.000123858 * R_7 ^4 +0.0702073 * R_7 ^5 +15.8994 * R_7 ^6 (p.f.1.7)

gde:

Var_7 je varijansa PP7-1

R_7 je povrat PP7-1

Domen regresione funkcije (p.f.1.7) je [-0.0011487; -0.0001818] (videti Excel tabelu, kolone od GG do GL).
Prvi izvod regresione krive (p.f.1.7) glasi:

Var_7' = 0.443435 + 398.042 * R_7 +0.000000332658 * R_7 ^2 +0.000495432 * R_7 ^3 +0.3510365 * R_7 ^4 +95.3964 * R_7 ^5 (d.f.1.7)

Minimum PP7-1 dobićemo iz uslova var_7' =0. Rezultat je dobijen programom Matlab.

```
>> p = [95.3964 0.3510365 0.000495432 0.000000332658 398.042 0.443435];

r = roots(p)

r =

  -1.0113 + 1.0106i

  -1.0113 - 1.0106i

   1.0100 + 1.0106i

   1.0100 - 1.0106i

  -0.0011 + 0.0000i (-0.0011139 preciznije)
```

Uvrstićemo rezultat (-0.0011139) u jednačinu (p.f.1.7) i dobijamo vrednost (0.00013013) koja predstavlja vrednost varijanse regresione funkcije (p.f.1.7) u kojoj ona ima minimum. S obzirom da je (var_7'' ≈398.05), koordinate tačke u kojoj regresiona funkcija (p.f.1.7) ima minimum su M_7 (-0.0011139;0.00013013), dok porcije iznose : Π_j (PP6-1) =0.964 i Π_k (NKE) =0.036 (videti Excel tabelu, kolone od GM do GQ).

4.3.7 PP8-1 nastaje kombinacijom minimuma PP7-1 i akcije sa oznakom TRV. Regresiona jednačina ima sledeći oblik (videti Minitab regresija 1 ptr=0):

Var_8 = 0.000204367 +0.205991 * R_8 +125.093 * R_8 ^2 -0.0000000463958 * R_8 ^3 - 0.0000586495 * R_8 ^4 -0.0376278 * R_8 ^5 -9.64592 * R_8 ^6 (p.f.1.8)

gde:

Var_8 je varijansa PP8-1

R_8 je povrat PP8-1

Domen regresione funkcije (p.f.1.8) je [-0.0011139; -0.0001567] (videti Excel tabelu, kolone od GR do GW).

Prvi izvod regresione krive (p.f.1.8) glasi:

$Var_8' = 0.205991 + 250.186 * R_8 - 0.0000001391874 * R_8 ^2 - 0.000234598 * R_8 ^3 - 0.188139 * R_8 ^4 - 57.87552 * R_8 ^5$ (d.f.1.8)

Minimum PP8-1 dobićemo iz uslova $var_8' = 0$. Rezultat je dobijen programom Matlab.

```
>> p = [-57.87552 -0.188139 -0.000234598 -0.0000001391874 250.186 0.205991];

r = roots(p)

r =

  -1.4425 + 0.0000i

  -0.0006 + 1.4419i

  -0.0006 - 1.4419i

   1.4413 + 0.0000i

  -0.0008 + 0.0000i (-0.0008234 preciznije)
```

Kada rezultat (-0.0008234) uvrstimo u jednačinu (p.f.1.8) dobijamo vrednost varijanse regresione funkcije (0.00011957) u kojoj funkcija (p.f.1.8) ima minimum. Koordinate tačke minimuma su $M_8(-0.0008234; 0.00011957)$. Vrednost drugog izvoda je ($var_8'' \approx 250.2$), dok će porcije članova PP8-1 imati vrednosti Π_j (PP7-1) =0.69646 i Π_k (TRV) =0.30354 (videti Excel tabelu, kolone GX do HB).

4.3.8 PP9-1 formiraćemo kombinacijom minimuma PP8-1 i akcije sa oznakom V. Regresiona jednačina ima sledeći oblik (videti Minitab regresija 1 ptr=0):

$Var_9 = 0.000470103 + 0.837496 * R_9 + 500.093 * R_9 ^2 - 0.000000265134 * R_9 ^3 - 0.000434409 * R_9 ^4 - 0.361653 * R_9 ^5 - 120.848 * R_9 ^6$ (p.f.1.9)

gde:

Var_9 je varijansa PP9-1

R_9 je povrat PP9-1

Domen regresione funkcije (p.f.1.9) je [-0.0008234; -0.000113] (videti Excel tabelu, kolone od HC do HH).

Prvi izvod regresione krive (p.f.1.9) glasi:

$Var_9' = 0.837496 + 1000.186 * R_9 - 0.000000795402 * R_9 ^2 - 0.001737636 * R_9 ^3 - 1.808265 * R_9 ^4 - 725.088 * R_9 ^5$ (d.f.1.9)

Pronađimo minimum regresione funkcije (p.f.1.9). Kao i u prethodnim slučajevima izjednačićemo prvi izvod funkcije sa ‘0’, odnosno (var_9' =0). Koristićemo program Matlab.

>> p = [-725.088 -1.808265 -0.001737636 -0.000000795402 1000.186 0.837496];

r = roots(p)

r =

-1.08415 + 0.00000i

-0.00041 + 1.08373i

-0.00041 - 1.08373i

1.08332 + 0.00000i

-0.00084 + 0.00000i (-0.00083734 preciznije)

Očigledno je da nijedan od pet rezultata ne pripada domenu regresione funkcije (p.f.1.9) koji se nalazi u intervalu (-0.0008234;-0.000113), stoga možemo da zaključimo da PP9-1 neće imati minimum. Dakle, kriterijum C4 (videti tačku 8. ovog poglavlja) neće biti ispunjen, odnosno na domenu regresione funkcije (p.f.1.9) njen prvi izvod neće biti jednak '0'. Proverimo sada da li će da važi kriterijum C6 da prvi izvod regresione funkcije (p.f.1.9) bude jednak '1' (var_9' =1). Koristićemo program Matlab.

>> p = [-725.088 -1.808265 -0.001737636 -0.000000795402 1000.186 -0.162504];

r = roots(p)

r =

-1.08440 + 0.00000i

-0.00066 + 1.08373i

-0.00066 - 1.08373i

1.08307 + 0.00000i

0.00016 + 0.00000i (0.000162474 preciznije)

Dobijeni rezultati takođe ne pripadaju domenu regresione funkcije (p.f.1.9), stoga neće biti ispunjen ni kriterijum C6. Preostaje još da proverimo, da li je ispunjen kriterijum C5, odnosno, da li postoji tangentni portfolio konstruisan na PP9. Koristićemo jednačinu tangente (t.e.6), ali pre nego što se upustimo u analitički postupak, izvršićemo kratak logički postupak. Naime, s obzirom da domen regresione funkcije pripada intervalu (-0.0008234;-0.000113), a da je dnevna eqvivalentna nerizična stopa pozitivna i da je njena vrednost (R_e = 0.0000561349), odnosno da tačka, van krive, iz koje će biti povučena tangenta na krivu, ima koordinate (0.0000561349;0), možemo da zaključimo da se koordinate dodirne tačke krive i njene tangente sigurno neće nalaziti na efikasnom skupu. Matematički postupak je sledeći:

$0 - Var_9 = [0.837496 + 1000.186 * R_9 - 0.000000795402 * R_9{}^\wedge 2 - 0.001737636 * R_9{}^\wedge 3 - 1.808265 * R_9{}^\wedge 4 - 725.088 * R_9{}^\wedge 5] * (0.0000561349 - R_9)$

odnosno

$-Var_9 = 0.000047013 -0.781350659 * R_9 -1000.186 * R_9^2 +0.000000698 * R_9^3 + 0.001636129 * R_9^4 + 1.767562258 * R_9^5 + 725.088 * R_9^6$

Kada prethodnu jednačinu saberemo sa jednačinom (p.f.1.9), dobijamo :

$0.000517116 + 0.056145341 * R_9 -500.093 * R_9^2 + 0.000000433 * R_9^3 + 0.00120172 * R_9^4 + 1.405909258 * R_9^5 + 604.24 * R_9^6 = 0$

Za pronalaženje korena ove jednačine koristićemo program Matlab.

```
>> p = [604.24 1.405909258 0.00120172 0.000000433 -500.093 0.056145341 0.000517116];

r = roots(p)

r =
-0.95442 + 0.00000i
-0.00061 + 0.95381i
-0.00061 - 0.95381i
 0.95320 + 0.00000i
 0.00107 + 0.00000i
-0.00096 + 0.00000i
```

Kao što je prethodno razmotreno, dobijeni rezultati ne pripadaju, ne samo efikasnom skupu već ne pripadaju ni domenu regresione krive (p.f.1.9). Stoga, zaključujemo da nije ispunjen ni kriterijum C5 za izbor portfolija.

Dakle, s obzirom da nije ispunjen nijedan od tri *nepristrasna kriterijuma* za izbor portfolija, preostaje nam samo pristrasni izbor. Prethodno smo definisali da je reč o investitorima koji nisu skloni riziku, odnosno čija je averzija prema riziku veoma visoka i stoga biramo vrednost (*rav* =50), odakle sledi da je (*ptr* =0.02) (videti tačka 9. ovog poglavlja). Razlog zašto biramo vrednost prvog izvoda jednaku 0.02 je veoma jednostavan. Objasnićemo uz pomoć programa Matlab. Naime, ukoliko početnu i krajnju vrednost domena regresione funkcije (p.f.1.9) uvrstimo u jednačinu prvog izvoda (d.f.1.9), dobićemo vrednosti funkcije prvog izvoda. Koristićemo program Matlab:

```
>> p = [-725.088 -1.808265 -0.001737636 -0.000000795402 1000.186 0.837496];

polyval(p,-0.0008234)

Var9′ = 0.0139
>> p = [-725.088 -1.808265 -0.001737636 -0.000000795402 1000.186 0.837496];

polyval(p,-0.0001567)

Var9′ =  0.6808
```

Dakle, vrednosti funkcije (d.f.1.9) su (0.0139;0.6808). Stoga, izbor vrednosti za sklonost ka riziku (*ptr* =0.02) je više nego očigledan. S obzirom da smo definisali da sklonost ka riziku (*ptr*) predstavlja prvi izvod regresione funkcije, ukoliko vrednost (0.02) uvrstimo u jednačinu (d.f.1.9) dobijamo:

$0.02 = 0.837496 + 1000.186 * R_9 - 0.000000795402 * R_9 \wedge 2 - 0.001737636 * R_9 \wedge 3 - 1.808265 * R_9 \wedge 4 - 725.088 * R_9 \wedge 5$

sledi:

$0.817496 + 1000.186 * R_9 - 0.000000795402 * R_9 \wedge 2 - 0.001737636 * R_9 \wedge 3 - 1.808265 * R_9 \wedge 4 - 725.088 * R_9 \wedge 5 = 0$

Korene ove jednačine dobićemo uz pomoć programa Matlab.

```
>> p = [-725.088 -1.808265 -0.001737636 -0.000000795402 1000.186 0.817496];

r = roots(p)

r =
-1.08415 + 0.00000i
-0.00042 + 1.08373i
-0.00042 - 1.08373i
 1.08331 + 0.00000i
-0.00082 + 0.00000i (-0.000817344 preciznije)
```

Kada rezultat (-0.000817344), koji jedini pripada domenu, uvrstimo u regresionu funkciju (p.f.1.9) dobijamo vrednost (0.00011967) koja predstavlja vrednost varijanse PP9-1 kada je vrednost averzije prema riziku *rav* =50. Vrednosti porcija PP8-1 i akcije sa oznakom V, koje učestvuju u PP9-1, izračunaćemo koristeći jednačine (t.e.2) i (t.e.4) iz kojih dobijamo Π_j (PP8-1) =0.991475 i Π_k (V) =0.008525 (videti Excel tabelu, kolone od HI do HM).

Dakle, iz prethodno izloženog možemo da izvedemo zaključak da partitivni portfolio ne mora imati minimum (kriterijum C4), kao i to, da je njegov domen tako ograničen da ne ispunjava uslov da prvi izvod regresione funkcije može da ima vrednost jednaku '1' (kriterijum C6). Takođe je pokazano da tangenta povučena iz tačke koja se nalazi na 'x' osi i koja ima unapred zadate koordinate (0.0000561349;0) može da dodirne regresionu krivu (p.f.1.9) tek izvan njenog domena (kriterijum C5). Iz razloga, dakle što nije moguće ispuniti ni jedan od tri nepristrasna kriterijuma za izbor portfolija, jedino što preostaje je da se posegne za izborom koji jeste pristrasan, ali je u datom slučaju jedini moguć. S obzirom da smo već definisali da se radi o investitorima koji nisu skloni riziku, izabrali smo visoku vrednost varijable averzije prema riziku (*rav* =50), odnosno nisku vrednost varijable sklonosti ka riziku (*ptr* =0.02).

4.3.9 Sledeći partitivni portfolio koji ćemo konstruisati je PP10-1 koji se sastoji od PP9-1 kada je vrednost sklonosti ka riziku (*ptr* =0.02) i akcije čija je oznaka MMM, koji će biti superioran u odnosu na prethodni PP9-1 (videti MATLAB Grafik 6.). Regresiona jednačina ima sledeći oblik (videti Minitab regresija 1 ptr=0):

$$Var_{10} = 0.000211652 + 0.203885 * R_{10} + 111.758 * R_{10} \wedge 2 - 0.0000000101027 * R_{10} \wedge 3 - 0.0000212321 * R_{10} \wedge 4 - 0.0189375 * R_{10} \wedge 5 - 5.90018 * R_{10} \wedge 6 \qquad \text{(p.f.1.10)}$$

gde:

Var_{10} je varijansa PP10-1

R_{10} je povrat PP10-1

Domen regresione funkcije (p.f.1.10) je [-0.0008173; 0.0001336] (videti Excel tabelu, kolone od HN do HS).

Prvi izvod regresione krive (p.f.1.10) glasi:

Var_{10}' = 0.203885 + 223.516 * R_{10} -0.0000000303081 * R_{10} ^2 -0.0000849284 * R_{10} ^3 - 0.0946875 * R_{10} ^4 -35.40108 * R_{10} ^5 (d.f.1.10)

Pronađimo minimum regresione funkcije (d.f.1.10), dakle uslov je (Var_{10}' =0). Koristimo program Matlab.

```
>> p = [-35.40108 -0.0946875 -0.0000849284 -0.0000000303081 223.516 0.203885];

r = roots(p)

r =
-1.58560 + 0.00000i
-0.00044 + 1.58516i
-0.00044 - 1.58516i
 1.58472 + 0.00000i
-0.00091 + 0.00000i
```

Očigledno je da nijedan rezultat ne pripada domenu i stoga zaključujemo da ne postoji minimum PP10-1 (kriterijum C4). Pokušajmo sada da pronađemo koordinate tačke u kojoj je vrednost prvog izvoda regresione funkcije (p.f.1.10) jednaka '1'. U toj tački PP10-1, dakle bile bi vrednosti (*rav* =1) i (*ptr* =1). Koristimo program Matlab:

```
>> p = [-35.40108 -0.0946875 -0.0000849284 -0.0000000303081 223.516 -0.796115];

r = roots(p)

r =
 1.58538 + 0.00000i
 0.00022 + 1.58516i
 0.00022 - 1.58516i
-1.58494 + 0.00000i
-0.00356 + 0.00000i
```

Očigledno je da ni u ovom slučaju nijedan od rezultata ne pripada domenu (-0.0008173; 0.0001336),stoga nije ispunjen ni kriterijum C6. Preostaje još da proverimo da li egzistira tangentni portfolio (kriterijum C5). Koristićemo jednačinu tangente (t.e.6), dakle biće:

0 -Var_{10} = [0.203885 + 223.516 * R_{10} -0.0000000303081 * R_{10} ^2 -0.0000849284 * R_{10} ^3 - 0.0946875* R_{10} ^4 -35.40108* R_{10} ^5] * (0.0000561349 -R_{10})

odnosno

$-Var_{10}$ = 0.000011445 -0.191337952 * R_{10} -223.516 * R_{10}^2 +0.000000025538 * R_{10}^3 + 0.0000796134 * R_{10}^4 + 0.092700264 * R_{10}^5 + 35.40108 * R_{10}^6

Kada prethodnu jednačinu saberemo sa jednačinom (1.10), dobijamo:

0.000223097 + 0.012547048 * R_{10} -111.758 * R_{10}^2 + 0.0000000154353 * R_{10}^3 + 0.0000583813 * R_{10}^4 + 0.073762764 * R_{10}^5 + 29.5009 * R_{10}^6 = 0

Za pronalaženje korena ove jednačine koristimo program Matlab.

```
>> p = [29.5009 0.073762764 0.0000583813 0.0000000154353 -111.758 0.012547048 0.000223097];

r = roots(p)

r =
-1.39577 + 0.00000i
-0.00065 + 1.39512i
-0.00065 - 1.39512i
 1.39446 + 0.00000i
 0.00147 + 0.00000i
-0.00136 + 0.00000i
```

S obzirom da nijedan rezultat ne pripada domenu regresione funkcije (p.f.1.10), izvodimo zaključak da nije ispunjen ni kriterijum C5. Ponovo nam preostaje jedino moguće, a to je pristrasan izbor portfolija. U ovom slučaju vrednost averzije prema riziku koju možemo da biramo, a da pripada domenu regresione funkcije (p.f.1.10) je (*rav* =45), odnosno vrednost sklonosti ka riziku, koja ujedno predstavlja i vrednost prvog izvoda regresione funkcije iznosi (*ptr* =0.022222222). Uvrstićemo vrednost (0.022222222) u jednačinu (d.f.1.10), odakle sledi:

0.022222222 =0.203885 + 223.516 * R_{10} -0.0000000303081 * R_{10} ^2 -0.0000849284 * R_{10} ^3 - 0.0946875 * R_{10} ^4 -35.40108 * R_{10} ^5

odnosno

0.181662778 + 223.516 * R_{10} -0.0000000303081 * R_{10} ^2 -0.0000849284 * R_{10} ^3 -0.0946875 * R_{10} ^4 -35.40108 * R_{10} ^5 =0

Korene ove jednačine dobićemo uz pomoć programa Matlab.

```
>> p = [-35.40108 -0.0946875 -0.0000849284 -0.0000000303081 223.516 0.181662778];

r = roots(p)

r =
-1.58563 + 0.00000i
-0.00047 + 1.58516i
-0.00047 - 1.58516i
```

1.58469 + 0.00000i

-0.00081 + 0.00000i (-0.0008126 more precisely)

Kada rezultat (-0.0008126), koji jedini pripada domenu, uvrstimo u regresionu funkciju (p.f.1.10), dobijamo vrednost varijanse PP10-1, koja iznosi (Var_{10} =0.00011977), pri čemu je vrednost averzije prema rizku (*rav* =45). Očigledno je dakle, da prethodni PP9-1 i PP10-1 ne mogu da imaju jednaku vrednost averzije prema riziku, iz razloga što domeni regresionih funkcija (p.f.1.9) i (p.f.1.10) nisu jednaki, tako da identična vrednost varijable *rav* nije moguća, jer ne pripada jednakim domenima funkcija prvih izvoda. Preostaje još da izračunamo vrednosti porcija članova PP10-1, koje iznose Π_j (PP9-1) =0.995 i Π_k (MMM) =0.005 (videti Excel tabelu, kolone od HT do HX).

4.3.10 PP11-1 konstruisaćemo na taj način što ćemo na PP10 čija je vrednost sklonosti ka riziku 0.022222222 (*ptr* =0.022222222), dodati akciju čija je oznaka MSFT. Ovaj portfolio biće dominantan u odnosu na PP10 (videti Matlab Grafik 6.). Regresiona jednačina ima sledeći oblik (videti Minitab regresija 1 ptr=0):

Var_{11} = 0.000291205 +0.390146 * R_{11} +220.498 * R_{11} ^2 +0.00000000126564 * R_{11} ^3 + 0.00000798285 * R_{11} ^4 +0.0129956 * R_{11} ^5 +6.94142 * R_{11} ^6 (p.f.1.11)

gde:

Var_{11} je varijansa PP11-1

R_{11} je povrat PP11-1

Domen regresione funkcije (p.f.1.11) je [-0.0008126; 0.0002572] (videti Excel tabelu, kolone od HY do ID).

Prvi izvod regresione krive (p.f.1.11) glasi:

Var_{11}' = 0.390146 + 440.996 * R_{11} +0.00000000379692 * R_{11} ^2 +0.0000319314 * R_{11} ^3 + 0.064978 * R_{11} ^4 +41.64852 * R_{11} ^5 (d.f.1.11)

Minimum regresione funkcije (d.f.1.11) dobijamo iz uslova (Var_{11}' = 0). Koristimo program Matlab.

```
>> p = [41.64852 0.064978 0.0000319314 0.00000000379692 440.996 0.390146];

r = roots(p)

r =
  -1.27571 + 1.27554i
  -1.27571 - 1.27554i
   1.27537 + 1.27554i
   1.27537 - 1.27554i
  -0.00088 + 0.00000i
```

Uočavamo da nijedan od pet rezultata ne pripada domenu regresione funkcije (p.f.1.11), stoga ne može da bude ispunjen kriterijum C4 za izbor portfolija. Proverimo sada da li je ispunjen uslov C6, odnosno da li važi uslov (Var_{11}' = 1). Koristimo program Matlab.

```
>> p = [41.64852 0.064978 0.0000319314 0.00000000379692 440.996 -0.609854];
```

r = roots(p)

r =

-1.27613 + 1.27554i

-1.27613 - 1.27554i

1.27494 + 1.27554i

1.27494 - 1.27554i

0.00082 + 0.00000i

Jasno je da ni u ovom slučaju nijedan od rezultata ne pripada domenu regresione funkcije (p.f.1.11), stoga nije ispunjen ni kriterijum C6. Preostaje još da proverimo da li postoji tangentni portfolio (kriterijum C5). Iz jednačine tangente (t.e.6) sledi:

$0 - Var_{11} = [0.390146 + 440.996 * R_{11} + 0.00000000379692 * R_{11}\,\hat{}2 + 0.0000319314 * R_{11}\,\hat{}3 + 0.064978 * R_{11}\,\hat{}4 + 41.64852 * R_{11}\,\hat{}5] * (0.0000561349 - R_{11})$

odnosno

$-Var_{11} = 0.0000219 - 0.36539073364 * R_{11} - 440.996 * R_{11}\hat{}2 - 0.000000002 * R_{11}\hat{}3 - 0.00002828387 * R_{11}\hat{}4 - 0.06264 * R_{11}\hat{}5 - 41.64852 * R_{11}\hat{}6$

Kada prethodnu jednačinu saberemo sa jednačinom (p.f.1.11), dobijamo:

$0.000313105 + 0.02475526636 * R_{11} - 220.498 * R_{11}\hat{}2 - 0.00000000073436 * R_{11}\hat{}3 - 0.00002030102 * R_{11}\hat{}4 - 0.0496444 * R_{11}\hat{}5 - 34.7071 * R_{11}\hat{}6 = 0$

Korene ove jednačine pronaćićemo koristeći program Matlab.

```
>> p = [-34.7071 -0.0496444 -0.00002030102 -0.00000000073436 -220.498 0.02475526636 0.000313105];
```

r = roots(p)

r =

1.12223 + 1.12262i

1.12223 - 1.12262i

-1.12300 + 1.12262i

-1.12300 - 1.12262i

0.00125 + 0.00000i

-0.00114 + 0.00000i

Ni u ovom slučaju nijedan rezultat ne pripada domenu regresione funkcije (p.f.1.11), stoga zaključujemo da nije ispunjen ni kriterijum C5. Preostaje nam jedino moguće, a to je pristrasan izbor portfolija. U ovom slučaju vrednost averzije prema riziku koju možemo da biramo, a da pripada domenu regresione funkcije (p.f.1.11) je (*rav* =30), odnosno vrednost sklonosti ka riziku, koja ujedno predstavlja i vrednost prvog izvoda regresione funkcije iznosi (*ptr* =0.033333333).

Uvrstićemo ovu vrednost u jednačinu (d.f.1.11), odakle sledi:

$0.033333333 = 0.390146 + 440.996 * R_{11} + 0.00000000379692 * R_{11}\ \hat{}2 + 0.0000319314 * R_{11}\ \hat{}3 + 0.064978 * R_{11}\ \hat{}4 + 41.64852 * R_{11}\ \hat{}5$

odnosno

$0.356812667 + 440.996 * R_{11} + 0.00000000379692 * R_{11}\ \hat{}2 + 0.0000319314 * R_{11}\ \hat{}3 + 0.064978 * R_{11}\ \hat{}4 + 41.64852 * R_{11}\ \hat{}5 = 0$

Korene ove jednačine dobićemo uz pomoć programa Matlab.

```
>> p = [41.64852 0.064978 0.0000319314 0.00000000379692 440.996 0.356812667];

r = roots(p)

r =
-1.27573 + 1.27554i
-1.27573 - 1.27554i
 1.27535 + 1.27554i
 1.27535 - 1.27554i
-0.00081 + 0.00000i (-0.000809 preciznije)
```

Rezultat (-0.000809), koji jedini pripada domenu, uvrstićemo u regresionu funkciju (p.f.1.11), i dobijamo vrednost varijanse PP11-1, koja iznosi (Var_{11} =0.00011977), pri čemu je vrednost averzije prema rizku (*rav* =30), odnosno vrednost sklonosti ka riziku (*ptr* =0.033333333). Vrednosti porcija članova PP11-1 iznose Π_j (PP10-1) =0.9967 i Π_k (MSFT) =0.0033 (videti Excel tabelu, kolone od IE do II).

4.3.11 PP12-1 je konstruisan nad PP11-1 čija je vrednost sklonosti ka riziku (*ptr* =0.033333333), dodavanjem akcije sa oznakom XOM i očigledno je biti dominantan u odnosu na PP11 (videti Matlab Grafik 6.). Regresiona jednačina ima sledeći oblik (videti Minitab regresija 1 ptr=0):

$Var_{12} = 0.00013838 + 0.0955216 * R_{12} + 89.8169 * R_{12}\ \hat{}2 - 0.000000000357943 * R_{12}\ \hat{}3 - 0.00000456749 * R_{12}\ \hat{}4 - 0.00948756 * R_{12}\ \hat{}5 - 5.88615 * R_{12}\ \hat{}6$ (p.f.1.12)

gde:

Var_{12} je varijansa PP12-1

R_{12} je povrat PP12-1

Domen regresione funkcije (1.12) je [-0.000809; 0.0002686] (videti Excel tabelu, kolone od IJ do IO).

Prvi izvod regresione krive (p.f.1.12) glasi:

$Var_{12}' = 0.0955216 + 179.6338 * R_{12} - 0.000000001073829 * R_{12}\ \hat{}2 - 0.00001826996 * R_{12}\ \hat{}3 - 0.0474378 * R_{12}\ \hat{}4 - 35.3169 * R_{12}\ \hat{}5$ (d.f.1.12)

Minimum regresione funkcije (p.f.1.12) dobijamo iz uslova (Var_{12}' =0). Koristimo program Matlab.

>> p = [-35.3169 -0.0474378 -0.00001826996 -0.000000001073829 179.6338 0.0955216];

r = roots(p)

r =

-1.50197 + 0.00000i

-0.00020 + 1.50176i

-0.00020 - 1.50176i

1.50156 + 0.00000i

-0.00053 + 0.00000i (-0.0005318 preciznije)

S obzirom da peti rezultat (-0.0005318) pripada domenu jasno je da regresiona funkcija (p.f.1.12) ima minimum. Kada rezultat (-0.0005318) uvrstimo u jednačinu (p.f.1.12) dobijamo vrednost varijanse koji iznosi (0.000113). Dovoljan uslov da postoji minimum je da Var_{12}'' bude veće od nule. S obzirom da je vrednost drugog izvoda ($Var_{12}'' \approx 179.7$) izvodimo zaključak da je ispunjen i dovoljan uslov da regresiona funkcija (p.f.1.12) ima minimum i to u tački koju ćemo označiti sa M_{12}(-0.0005318;0.000113). Vrednosti porcija članova PP12-1, iznose Π_j (PP11-1) =0.7427 i Π_k (XOM) =0.2573 (videti Excel tabelu, kolone od IP do IT).

4.3.12 Prelazimo na PP13-1 dodavanjem akcije sa oznakom CVX na minimum PP12-1. PP13-1 je superioran u odnosu na prethodni PP12-1 (videti Matlab Grafik 6.). Regresiona jednačina ima sledeći oblik (videti Minitab regresija 1 ptr=0):

Var_{13} = 0.000155156 +0.168465 * R_{13} +167.6963 * R_{13} ^2 +0.00000000335543 * R_{13} ^3 + 0.00000397427 * R_{13} ^4 -0.017372 * R_{13} ^5 -26.8684 * R_{13} ^6 (p.f.1.13)

gde:

Var_{13} je varijansa PP13-1

R_{13} je povrat PP13-1

Domen regresione funkcije (p.f.1.13) je [-0.0005318; 0.0003577] (videti Excel tabelu, kolone od IU do IZ).

Prvi izvod regresione krive (p.f.1.13) glasi:

Var_{13}' = 0.168465 +335.326 * R_{13} +0.00000001006629 * R_{13} ^2 +0.00001589708 * R_{13} ^3 - 0.08686 * R_{13} ^4 -161.2104 * R_{13} ^5 (d.f.1.13)

Minimum regresione funkcije (p.f.1.13) dobijamo iz uslova (Var_{13}' =0). Koristimo program Matlab.

>> p = [-161.2104 -0.08686 0.00001589708 0.00000001006629 335.326 0.168465];

r = roots(p)

r =

1.20092 + 0.00000i

-0.00001 + 1.20093i

-0.00001 - 1.20093i

-1.20094 + 0.00000i

-0.00050 + 0.00000i (-0.0005024 preciznije)

Očigledno da samo peti rezultat (-0.0005024) pripada domenu i jasno je da regresiona funkcija (1.13) ima minimum. Rezultat (-0.0005024) uvrstićemo u jednačinu (p.f.1.13) i dobijamo vrednost varijanse koja iznosi (0.0001128). S obzirom da je vrednost drugog izvoda (Var_{13}'' ≈335.4) izvodimo zaključak da je ispunjen i dovoljan uslov da regresiona funkcija (p.f.1.13) ima minimum i to u tački koju ćemo označiti sa M_{13}(-0.0005024;0.0001128). Vrednosti porcija članova PP13-1 iznose Π_j (PP12-1) =0.967 i Π_k (CVX) =0.033 (videti Excel tabelu, kolone od JA do JE).

4.3.13 PP14-1 nastaje dodavanjem akcije sa oznakom CAT na minimum PP13-1. PP14-1 dakle, biće dominantan u odnosu na prethodni PP13-1 (videti Matlab Grafik 6.).

Regresiona jednačina ima sledeći oblik (videti Minitab regresija 1 ptr=0):

Var_{14} = 0.000299899 +0.578653 * R_{14} +410.671 * R_{14} ^2 +0.00000000154274 * R_{14} ^3 -0.00000209957 * R_{14} ^4 -0.00169597 * R_{14} ^5 +10.8944 * R_{14} ^6 (p.f.1.14)

gde:

Var_{14} je varijansa PP14-1

R_{14} je povrat PP14-1

Domen regresione funkcije (p.f.1.14) je [-0.0005024; 0.0003679] (videti Excel tabelu, kolone od JF do JK).

Prvi izvod regresione krive (p.f.1.14) glasi:

Var_{14}' = 0.578653 + 821.342 * R_{14} +0.00000000462822 * R_{14} ^2 -0.00000839828 * R_{14} ^3 -0.00847985 * R_{14} ^4 +65.3664 * R_{14} ^5 (d.f.1.14)

Potražimo minimum regresione funkcije (1.14) iz uslova (Var_{14}' =0). Koristimo program Matlab:

```
>> p = [65.3664 -0.00847985 -0.00000839828 0.00000000462822 821.342 0.578653];

r = roots(p)

r =

 1.33151 + 1.33130i

 1.33151 - 1.33130i

-1.33110 + 1.33130i

-1.33110 - 1.33130i

-0.00070 + 0.00000i
```

Jasno je da nijedan od rezultata ne pripada domenu, stoga izvodimo zaključak da regresiona funkcija (p.f.1.14) na domenu nema minimum. Ukoliko vrednosti domena (-0.0005024;0.0003679) uvrstimo u jednačinu prvog izvoda (d.f.1.14) dobijamo vrednosti prvog izvoda regresione funkcije (p.f.1.14). Koristićemo program Matlab:

```
>> p = [65.3664 -0.0047985 -0.00000839828 0.00000000462822 821.342 0.578653];
```

polyval(p,-0.0005024)

$Var_{14}' = 0.16601$

>> p = [65.3664 -0.00847985 -0.00000839828 0.00000000462822 821.342 0.578653];

polyval(p,0.0003679)

$Var_{14}' = 0.88082$

Dakle, vrednosti funkcije (d.f.1.14) u početnoj i krajnjoj tački domena su (0.16601;0.88082). S obzirom da su vrednosti prvog izvoda manje od '1', zaključujemo da nije ispunjen ni kriterijum C6 za izbor portfolija. Proverimo da li je ispunjen kriterijum tangente C5. Postupak je sledeći:

$0 - Var_{14} = [0.578653 + 821.342 * R_{14} + 0.00000000462822 * R_{14}{}^{\wedge}2 - 0.00000839828 * R_{14}{}^{\wedge}3 - 0.00847985 * R_{14}{}^{\wedge}4 + 65.3664 * R_{14}{}^{\wedge}5] * (0.0000561349 - R_{14})$

odnosno

$-Var_{14} = 0.000032482628 - 0.532547049 * R_{14} - 821.342 * R_{14}{}^{\wedge}2 - 0.0000000051 * R_{14}{}^{\wedge}3 + 0.00000792228 * R_{14}{}^{\wedge}4 + 0.01214918633 * R_{14}{}^{\wedge}5 - 65.3664 * R_{14}{}^{\wedge}6$

Kada prethodnu jednačinu saberemo sa jednačinom (p.f.1.14), dobijamo:

$0.000332381628 + 0.046105951 * R_{14} - 410.671 * R_{14}{}^{\wedge}2 - 0.00000000355726 * R_{14}{}^{\wedge}3 + 0.00000582271 * R_{14}{}^{\wedge}4 + 0.01045321633 * R_{14}{}^{\wedge}5 - 54.472 * R_{14}{}^{\wedge}6 = 0$

Korene ove jednačine pronalazimo koristeći program Matlab.

>> p = [-54.472 0.01045321633 0.00000582271 -0.00000000355726 -410.671 0.046105951 0.000332381628];

r = roots(p)

r =

1.17172 + 1.17170i

1.17172 - 1.17170i

-1.17168 + 1.17170i

-1.17168 - 1.17170i

0.00096 + 0.00000i

-0.00085 + 0.00000i

Očigledno je da ni u ovom slučaju nijedan rezultat ne pripada domenu regresione funkcije (p.f.1.14), stoga izvodimo zaključak da nije ispunjen ni kriterijum C5. Preostaje nam dakle, jedino moguće, a to je pristrasan izbor portfolija. U ovom slučaju vrednost averzije prema riziku koju možemo da biramo, a da pripada domenu regresione funkcije (p.f.1.14) je (*rav* =6), odnosno vrednost sklonosti ka riziku, koja ujedno predstavlja i vrednost prvog izvoda regresione funkcije iznosi (*ptr* =0.1666666667).

Uvrstimo ovu vrednost u jednačinu (d.f.1.14), odakle sledi:

$0.1666666667 = 0.578653 + 821.342 * R_{14} + 0.00000000462822 * R_{14}\ ^\wedge 2 - 0.00000839828 * R_{14}\ ^\wedge 3 - 0.00847985 * R_{14}\ ^\wedge 4 + 65.3664 * R_{14}\ ^\wedge 5$

odnosno

$0.4119863333 + 821.342 * R_{14} + 0.00000000462822 * R_{14}\ ^\wedge 2 - 0.00000839828 * R_{14}\ ^\wedge 3 - 0.00847985 * R_{14}\ ^\wedge 4 + 65.3664 * R_{14}\ ^\wedge 5 = 0$

Koreni ove jednačine dobijeni su uz pomoć programa Matlab.

```
>> p = [65.3664 -0.00847985 -0.00000839828 0.00000000462822 821.342 0.4119863333];

r = roots(p)

r =

-1.33115 + 1.33130i
-1.33115 - 1.33130i
 1.33146 + 1.33130i
 1.33146 - 1.33130i
-0.00050 + 0.00000i (-0.0005015 preciznije)
```

Kada rezultat (-0.0005015), koji jedini pripada domenu, uvrstimo u regresionu funkciju (p.f.1.14), dobijamo vrednost varijanse PP14-1, koja iznosi (Var_{14} =0.00011297), pri čemu je vrednost averzije prema rizku (*rav* =6), odnosno vrednost sklonosti ka riziku (*ptr* =0.1666666667). Vrednosti porcija članova PP14-1 iznose Π_j (PP13-1) =0.999 i Π_k (CAT) =0.001 (videti Excel tabelu, kolone od JL do JP).

4.3.14 Naredni partitivni portfolio je PP15-1. On će biti konstruisan dodavanjem akcije sa oznakom CSCO nad PP14-1, čija je vrednost averzije prema riziku (*rav* =6) (videti Matlab Grafik 6.). Regresiona jednačina ima sledeći oblik (videti Minitab regresija 1 ptr=0):

$$Var_{15} = 0.000178257 + 0.203105 * R_{15} + 145.464 * R_{15}\ ^\wedge 2 + 0.0000000000106594 * R_{15}\ ^\wedge 3 + 0.00000654397 * R_{15}\ ^\wedge 4 + 0.0000730251 * R_{15}\ ^\wedge 5 - 17.0912 * R_{15}\ ^\wedge 6 \qquad \text{(p.f.1.15)}$$

gde:

Var_{15} je varijansa PP15-1

R_{15} je povrat PP15-1

Domen regresione funkcije (p.f.1.15) je [-0.0005015; 0.000488] (videti Excel tabelu, kolone od JQ do JV).

Prvi izvod regresione krive (p.f.1.15) glasi:

$$Var_{15}' = 0.203105 + 290.928 * R_{15} + 0.0000000000319782 * R_{15}\ ^\wedge 2 + 0.00002617588 * R_{15}\ ^\wedge 3 + 0.0003651255 * R_{15}\ ^\wedge 4 - 102.5472 * R_{15}\ ^\wedge 5 \qquad \text{(d.f.1.15)}$$

Potražimo minimum regresione funkcije (p.f.1.15) iz uslova (Var_{15}' =0). Koristimo program Matlab.

```
>> p = [-102.5472 0.0003651255 0.00002617588 0.0000000000319782 290.928 0.203105];
```

r = roots(p)

r =

1.29800 + 0.00000i

0.00018 + 1.29782i

0.00018 - 1.29782i

-1.29765 + 0.00000i

-0.00070 + 0.00000i

Očigledno je da nijedan od rezultata ne pripada domenu, stoga izvodimo zaključak da regresiona funkcija na domenu (-0.0005015;0.000488) nema minimum. Dakle, kriterijum C4 nije ispunjen. Ukoliko vrednosti domena uvrstimo u jednačinu prvog izvoda (d.f.1.15) dobijamo vrednosti prvog izvoda regresione funkcije (p.f.1.15). Koristimo program Matlab.

>> p = [-102.5472 0.0003651255 0.00002617588 0.0000000000319782 290.928 0.203105];

polyval(p,-0.0005015)

$Var_{15}' = 0.057205$

>> p = [-102.5472 0.0003651255 0.00002617588 0.0000000000319782 290.928 0.203105];

polyval(p,0.000488)

$Var_{15}' = 0.34508$

Vrednosti funkcije (d.f.1.15) u početnoj i krajnjoj tački domena su (0.057205;0.34508). S obzirom da su vrednosti prvog izvoda manje od '1', zaključujemo da nije ispunjen ni kriterijum C6 za izbor portfolija. Proverimo da li je ispunjen kriterijum tangente C5. Postupak je kao i u prethodnom slučaju, sledeći:

$0 - Var_{15} = [0.203105 + 290.928 * R_{15} + 0.0000000000319782 * R_{15}\text{^}2 + 0.00002617588 * R_{15}\text{^}3 + 0.0003651255 * R_{15}\text{^}4 - 102.5472 * R_{15}\text{^}5] * (0.0000561349 - R_{15})$

odnosno

$-Var_{15} = 0.0000114 - 0.1867737858 * R_{15} - 290.928 * R_{15}\text{^}2 + 0.0000000014374 * R_{15}\text{^}3 - 0.0000261553837 * R_{15}\text{^}4 - 0.00612160232 * R_{15}\text{^}5 + 102.5472 * R_{15}\text{^}6$

Kada prethodnu jednačinu saberemo sa jednačinom (p.f.1.15), dobijamo:

$0.000189657 + 0.0163312142 * R_{15} - 145.464 * R_{15}\text{^}2 + 0.000000001448 * R_{15}\text{^}3 - 0.000019611413 * R_{15}\text{^}4 - 0.00604857722 * R_{15}\text{^}5 + 85.456 * R_{15}\text{^}6 = 0$

Korene ove jednačine pronalazimo koristeći program MATLAB.

>> p = [85.456 -0.00604857722 -0.0000196114137 0.000000001448 -145.464 0.0163312142 0.000189657];

r = roots(p)

r =

1.14222 + 0.00000i

-0.00001 + 1.14223i

-0.00001 - 1.14223i

-1.14224 + 0.00000i

0.00120 + 0.00000i

-0.00109 + 0.00000i

Jasno je da ni u ovom slučaju nijedan rezultat ne pripada domenu regresione funkcije (p.f.1.15), stoga izvodimo zaključak da nije ispunjen ni kriterijum C5.

Preostaje nam samo pristrasan izbor portfolija. U ovom slučaju vrednost averzije prema riziku koju možemo da biramo, a da pripada domenu regresione funkcije (p.f.1.15) je (*rav* =17), odnosno vrednost sklonosti ka riziku, koja ujedno predstavlja i vrednost prvog izvoda regresione funkcije iznosi (*ptr* =0.0588235294). Uvrstimo vrednost (*ptr*) u jednačinu (d.f.1.15), odakle sledi:

0.0588235294 =0.203105 +290.928 * R_{15} +0.0000000000319782 * R_{15} ^2 +0.00002617588 * R_{15} ^3 +0.0003651255 * R_{15} ^4 -102.5472 * R_{15} ^5

odnosno

0.1442814706 +290.928 * R_{15} +0.0000000000319782 * R_{15} ^2 +0.00002617588 * R_{15} ^3 + 0.0003651255 * R_{15} ^4 -102.5472 * R_{15} ^5 =0

Korene ove jednačine dobijamo uz pomoć programa Matlab.

```
>> p = [-102.5472 0.0003651255 0.00002617588 0.0000000000319782 290.928 0.1442814706];
r = roots(p)
```

r =

1.29795 + 0.00000i

0.00012 + 1.29782i

0.00012 - 1.29782i

-1.29770 + 0.00000i

-0.00050 + 0.00000i (-0.000496 preciznije)

Rezultat (-0.000496), koji jedini pripada domenu, uvrstićemo u regresionu funkciju (p.f.1.15) i dobijamo vrednost varijanse PP15-1, koja iznosi: (Var_{15} =0.0001133)

Kao potvrdu iskoristimo program Matlab:

```
p = [-17.0912 0.0000730251 0.00000654397 0.0000000000106594 145.464 0.203105 0.000178257];
polyval(p,-0.000496)
```

Var_{15} =1.1330e-04

Vrednosti porcija članova PP15-1 iznose Π_j (PP14-1) =0.9944 i Π_k (CSCO) =0.0056 (videti Excel tabelu, kolone od JW do KA).

4.3.15 Sledeći u lancu je PP16-1. On će biti konstruisan dodavanjem akcije sa oznakom WMT nad PP15-1, čija je vrednost averzije prema riziku (*rav* =17) (videti Matlab Grafik 6.). Regresiona jednačina ima sledeći oblik (videti Minitab regresija 1 ptr=0):

Var_{16} = 0.0000884754 +0.00284569 * R_{16} ^2 +106.663 * R_{16} ^2 +0.000000000013882 * R_{16} ^3 - 0.00000000361341 * R_{16} ^4 +0.000390099 * R_{16} ^5 -1.05494 * R_{16} ^6 (p.f.1.16)

gde:

Var_{16} je varijansa PP16-1

R_{16} je povrat PP16-1

Domen regresione funkcije (p.f.1.16) je [-0.000496; 0.0006202] (videti Excel tabelu, kolone od KB do KG).

Prvi izvod regresione krive (p.f.1.16) glasi:

Var_{16}' = 0.00284569 +213.326 * R_{16} +0.0000000000416469 * R_{16} ^2 -0.00000001445364 * R_{16} ^3 +0.001950495 * R_{16} ^4 -6.32964 * R_{16} ^5 (d.f.1.16)

Potražimo minimum regresione funkcije (p.f.1.16) iz uslova (Var_{16}' =0). Koristimo program Matlab.

```
>> p = [-6.32964 0.001950495 -0.00000001445364 0.0000000000416469 213.326 0.00284569];

r = roots(p)

r =

 2.40952 + 0.00000i

 0.00008 + 2.40944i

 0.00008 - 2.40944i

-2.40936 + 0.00000i

-0.00001 + 0.00000i (-0.0000133 preciznije)
```

Jasno je da samo peti rezultat (-0.0000133) pripada domenu i da regresiona funkcija (p.f.1.16) ima minimum. Kada rezultat (-0.0000133) uvrstimo u jednačinu (p.f.1.16) dobijamo vrednost varijanse koja iznosi (0.0000885). S obzirom da je vrednost drugog izvoda (Var_{16}'' ≈213.5) izvodimo zaključak da je ispunjen i dovoljan uslov da regresiona funkcija (p.f.1.16) ima minimum i to u tački koju ćemo označiti sa M_{16}(-0.0000133;0.0000885). Vrednosti porcija članova PP16-1 iznose Π_j (PP15-1) =0.567586 i Π_k (WMT) =0.432414 (videti Excel tabelu, kolone od KH do KL).

4.3.16 Naredni u lancu je PP17-1. On će biti konstruisan dodavanjem akcije sa oznakom DIS nad minimumom PP16-1 (videti Matlab Grafik 6.). Regresiona jednačina ima sledeći oblik (videti Minitab regresija 1 ptr=0):

Var_{17} = 0.0000880768 -0.0259445 * R_{17} +191.401 * R_{17} ^2 -0.0000000198329 * R_{17} ^3 + 0.0000535188 * R_{17} ^4 -0.0634364 * R_{17} ^5 +27.426 * R_{17} ^6 (p.f.1.17)

gde:

Var_{17} je varijansa PP17-1

R_{17} je povrat PP17-1

Domen regresione funkcije (p.f.1.17) je [-0.0000133; 0.0007783] (videti Excel tabelu, kolone od KM do KR).

Prvi izvod regresione krive (p.f.1.17) glasi:

Var_{17}' = -0.0259445 +382.802 * R_{17} -0.0000000594987 * R_{17} ^2 +0.0002140752 * R_{17} ^3 - 0.317182 * R_{17} ^4 +164.556 * R_{17} ^5 (d.f.1.17)

Potražimo minimum regresione funkcije (p.f.1.17) iz uslova (Var_{17}' =0). Koristimo program Matlab.

```
>> p = [164.556 -0.317182 0.0002140752 -0.0000000594987 382.802 -0.0259445];

r = roots(p)

r =
 0.87374 + 0.87327i
 0.87374 - 0.87327i
-0.87281 + 0.87327i
-0.87281 - 0.87327i
 0.00007 + 0.00000i (0.0000678 preciznije)
```

S obzirom da peti rezultat (0.0000678) pripada domenu jasno je da regresiona funkcija (p.f.1.17) ima minimum. Ukoliko rezultat (0.0000678) uvrstimo u jednačinu (p.f.1.17) dobijamo vrednost varijanse koji iznosi (0.0000872). S obzirom da je vrednost drugog izvoda ($Var_{17}'' \approx 382.8$) izvodimo zaključak da je ispunjen i dovoljan uslov da regresiona funkcija (p.f.1.17) ima minimum i to u tački koju ćemo označiti sa M_{17}(0.0000678;0.0000872). Vrednosti porcija članova PP17-1 iznose Π_j (PP16-1) =0.89758 i Π_k (DIS) =0.10242 (videti Excel tabelu, kolone od KS do KW).

4.3.17 Sledeći u lancu je PP18-1. On će biti konstruisan dodavanjem akcije sa oznakom BA nad minimumom PP17-1 (videti Matlab Grafik 6.).

Regresiona jednačina ima sledeći oblik (videti Minitab regresija 1 ptr=0):

Var_{18} = 0.0000858836 -0.0145282 * R_{18} +500.699 * R_{18} ^2 -0.0000000317367 * R_{18} ^3 + 0.0000922676 * R_{18} ^4 -0.114672 * R_{18} ^5 +50.9638 * R_{18} ^6 (p.f.1.18)

gde:

Var_{18} je varijansa PP18-1

R_{18} je povrat PP18-1

Domen regresione funkcije (p.f.1.18) je [0.0000678; 0.0008254] (videti Excel tabelu, kolone od KX do LC).

Prvi izvod regresione krive (p.f.1.18) glasi:

$Var_{18}' = -0.0145282 +1001.398 * R_{18} -0.0000000952101 * R_{18} ^2 +0.0003690704 * R_{18} ^3 - 0.57336 * R_{18} ^4 +305.7828 * R_{18} ^5$ (d.f.1.18)

Potražimo minimum regresione funkcije (1.18) iz uslova (Var_{18}' =0). Koristimo program Matlab.

```
>> p = [305.7828 -0.57336 0.0003690704 -0.0000000952101 1001.398 -0.0145282];

r = roots(p)

r =
 0.95169 + 0.95123i
 0.95169 - 0.95123i
-0.95076 + 0.95123i
-0.95076 - 0.95123i
 0.00001 + 0.00000i
```

Jasno je da nijedan od pet rezultata ne pripada domenu regresione funkcije (p.f.1.18), dakle izvodimo zaključak da ne postoji minimum na zadatom domenu. Odredimo sada vrednosti prvog izvoda u ekstremnim tačkama domena. Koristimo program Matlab:

```
 >> p = [305.7828 -0.57336 0.0003690704 -0.0000000952101 1001.398 -0.0145282];
polyval(p,0.0000678)
```

Var_{18}' =0.053367

```
 >> p = [305.7828 -0.57336 0.0003690704 -0.0000000952101 1001.398 -0.0145282];
polyval(p,0.0008254)
```

Var_{18}' =0.81203

S obzirom da vrednosti prvog izvoda u krajnjim tačkama domena regresione funkcije (p.f.1.18) pripadaju intervalu (0.053367;0.81203) izvodimo zaključak da je prvi izvod na celokupnom domenu regresione funkcije (p.f.1.18) manji od '1'. Iz prethodne analize zaključujemo da nisu ispunjeni kriterijumi C4 i C6 za izbor portfolija. Proverimo sada da li je ispunjen kriterijum C5. Matematički postupak je sledeći:

$0 -Var_{18} = [-0.0145282 +1001.398 * R_{18} -0.0000000952101 * R_{18} ^2 +0.0003690704 * R_{18} ^3 - 0.57336* R_{18} ^4 +305.7828* R_{18} ^5] * (0.0000561349 -R_{18})$

odnosno

$-Var_{18} = -0.00000081553905418 +0.0707415765902 * R_{18} -1001.398 * R_{18}^2 +0.00000011592783 * R_{18}^3 -0.000401255906264 * R_{18}^4 +0.59052508689972 * R_{18}^5 - 305.7828 * R_{18}^6$

Kada prethodnu jednačinu saberemo sa jednačinom (p.f.1.18), dobijamo:

$0.00008506806094582 +0.0562133765902 * R_{18} -500.699 * R_{18}^2 +0.00000008419113 * R_{18}^3 - 0.000309 * R_{18}^4 + 0.475853087 * R_{18}^5 -254.819 * R_{18}^6 = 0$

Korene ove jednačine pronalazimo koristeći program Matlab.

>> p = [-254.819 0.475853087 -0.000309 0.00000008419113 -500.699 0.0562133765902 0.00008506806094582];

r = roots(p)

r =

0.83762 + 0.83718i

0.83762 - 0.83718i

-0.83675 + 0.83718i

-0.83675 - 0.83718i

0.00047 + 0.00000i (0.0004721 preciznije)

-0.00036 + 0.00000i

U ovom slučaju peti rezultat (0.0004721) pripada domenu regresione funkcije (p.f.1.18). Jasno je dakle da će postojati tangenta, koja je povučena iz tačke van krive sa koordinatama (0.0000561349;0), i koja će krivu dodirivati u tački čija ’x’ koordinata ima vrednost (0.0004721). Stoga, možemo da izvedemo zaključak da je ispunjen nepristrasan kriterijum za izbor portfolija C5. Izračunajmo sada i vrednost ’y’ koordinate dodirne tačke. Uvrstićemo rezultat (0.0004721) u jednačinu (p.f.1.8). Koristićemo program Matlab:

>> p = [50.9638 -0.114672 0.0000922676 -0.0000000317367 500.699 -0.0145282 0.0000858836];

polyval(p,0.0004721)

Var =1.9062e-04

Dakle, tangenta će dodirivati regresionu krivu (p.f.1.18) u tački koju ćemo označiti sa T_{18} (0.0004721;0.00019062). Kada smo izračunali koordinate tačke T_{18}, zapravo smo dobili vrednosti srednjeg povrata i varijanse PP18-1. Da bi smo dobili vrednosti sklonosti ka riziku i averzije prema riziku, moramo da izračunamo vrednost prvog izvoda regresione funkcije (p.f.1.18) u tački T_{18}. izračunavanje vršimo uz pomoć programa Matlab:

>> p = [305.7828 -0.57336 0.0003690704 -0.0000000952101 1001.398 -0.0145282];

polyval(p,0.0004721)

Var′ =0.45823

Dakle, vrednost sklonosti ka riziku je (*ptr* =0.45823), odakle sledi da je vrednost averzije prema riziku jednaka (*rav* =1/*ptr* = 1/0.45823 =2.18217). Postavimo sada jednačinu tangente. Koristeći izraz (t.e.6) dobijamo:

Y -0.00019062 =0.45823 (X -0.0004721)

odnosno

Y =0.45823*X -0.00002571 (t.4)

Tangenta definisana jednačinom (t.4), dodirivaće regresionu krivu (p.f.1.18) u tački T_{18}, i samim tim će definisati koordinate PP18. Dakle, PP18 nalaziće se upravo u tački T_{18} i samim tim može da se nazove *tangenti parcijalni portfolio*.

Preostaje još da izračunamo vrednosti porcija članova PP18-1. Vrednosti porcija članova PP18-1 iznose Π_j (PP17-1) =0.4663 i Π_k (BA) =0.5337 (videti Excel tabelu, kolone od LD do LH).

4.3.18 Naredni u lancu je PP19-1. On će biti konstruisan dodavanjem akcije sa oznakom AXP nad tangentni partitivni portfolio PP18-1 (videti Matlab Grafik 6.).

Regresiona jednačina ima sledeći oblik (videti Minitab regresija 1 ptr=0):

Var_{19} = 0.000649751 -1.48946 * R_{19} +1095.06 * R_{19} ^2 +0.000058773 * R_{19} ^3 -0.0678581 * R_{19} ^4 +41.4461 * R_{19} ^5 -10462.5 * R_{19} ^6 (p.f.1.19)

gde:

Var_{19} je varijansa PP19-1

R_{19} je povrat PP19-1

Domen regresione funkcije (p.f.1.19) je [0.0004721; 0.0008647] (videti Excel tabelu, kolone od LI do LN).

Prvi izvod regresione krive (p.f.1.19) glasi:

Var_{19}' = -1.48946 +2190.12 * R_{19} +0.000176319 * R_{19} ^2 -0.2714324 * R_{19} ^3 +207.2305 * R_{19} ^4 -62775 * R_{19} ^5 (d.f.1.19)

Minimum regresione funkcije (p.f.1.19) pronalazimo iz uslova (Var_{19}' =0). Koristimo program Matlab.

```
>> p = [-62775 207.2305 -0.2714324 0.000176319 2190.12 -1.48946];

r = roots(p)

r =
 0.43284 + 0.00000i
 0.00066 + 0.43219i
 0.00066 - 0.43219i
-0.43153 + 0.00000i
 0.00068 + 0.00000i (0.0006802 preciznije)
```

Očigledno je da peti rezultat (0.0006802) pripada domenu, stoga je jasno da regresiona funkcija (p.f.1.19) ima minimum. Rezultat (0.0006802) uvrstićemo u jednačinu (p.f.1.19) i dobijamo vrednost varijanse koja iznosi (0.0001433). S obzirom da je vrednost drugog izvoda (Var_{19}'' ≈2190.2) izvodimo zaključak da je ispunjen i dovoljan uslov da regresiona funkcija (p.f.1.19) ima minimum i to u tački koju ćemo označiti sa M_{19}(0.0006802;0.0001433). Vrednosti porcija članova PP19-1 iznose Π_j (PP18-1) =0.47 i Π_k (AXP) =0.53 (videti Excel tabelu, kolone od LO do LS).

4.3.19 Naredni u lancu je PP20-1. On je konstruisan dodavanjem akcije sa oznakom INTC nad minimum PP19-1 (videti Matlab Grafik 6.).

Regresiona jednačina ima sledeći oblik (videti Minitab regresija 1 ptr=0):

Var_{20} = 0.00279003 -7.67788 * R_{20} +5567.08 * R_{20} ^2 +0.00476506 * R_{20} ^3 -4.46087 * R_{20} ^4 +2221.8 * R_{20} ^5 -459980 * R_{20} ^6 (p.f.1.20)

gde:

Var_{20} je varijansa PP20-1

R_{20} je povrat PP20-1

Domen regresione funkcije (p.f.1.20) je [0.0006802; 0.0009161] (videti Excel tabelu, kolone od LT do LY).

Prvi izvod regresione krive (p.f.1.20) glasi:

Var_{20}' = -7.67788 +11134.16 * R_{20} +0.01429518 * R_{20} ^2 -17.84348 * R_{20} ^3 +11109 * R_{20} ^4 -2759880 * R_{20} ^5 (d.f.1.20)

Minimum regresione funkcije (p.f.1.20) pronalazimo iz uslova (Var_{20}' =0). Koristimo program Matlab.

```
>> p = [-2759880 11109 -17.84348 0.01429518 11134.16 -7.67788];

r = roots(p)

r =
 0.25286 + 0.00000i
 0.00083 + 0.25202i
 0.00083 - 0.25202i
-0.25119 + 0.00000i
 0.00069 + 0.00000i (0.0006896 preciznije)
```

Očigledno je da peti rezultat(0.0006896) pripada domenu, i stoga regresiona funkcija (p.f.1.20) ima minimum. Kada rezultat (0.0006896) uvrstimo u jednačinu (p.f.1.20) dobijamo vrednost varijanse koja iznosi (0.0001428). S obzirom da je vrednost drugog izvoda (Var_{20}'' ≈11134) izvodimo zaključak da je ispunjen i dovoljan uslov da regresiona funkcija (p.f.1.20) ima minimum i to u tački koju ćemo označiti sa M_{20}(0.0006896;0.0001428). Vrednosti porcija članova PP20-1 iznose Π_j (PP19-1) =0.96 i Π_k (INTC) =0.04 (videti Excel tabelu, kolone od LZ do MD).

4.3.20 Sledeći u lancu je PP21-1. On je konstruisan dodavanjem akcije sa oznakom UNH nad minimum PP20-1 (videti Matlab Grafik 6.).

Regresiona jednačina ima sledeći oblik (videti Minitab regresija 1 ptr=0):

Var_{21} = 0.000499404 -0.956779 * R_{21} +637.524 * R_{21} ^2 +0.0000918523 * R_{21} ^3 -0.0759397 * R_{21} ^4 +33.2797 * R_{21} ^5 -6040.73 * R_{21} ^6 (p.f.1.21)

gde:

Var_{21} je varijansa PP21-1

R_{21} je povrat PP21-1

Domen regresione funkcije (p.f.1.21) je [0.0006896; 0.0011379] (videti Excel tabelu, kolone od ME do MJ).

Prvi izvod regresione krive (p.f.1.21) glasi:

Var_{21}' = -0.956779 +1275.048 * R_{21} +0.0002755569 * R_{21} ^2 -0.3037588 * R_{21} ^3 +166.3985 * R_{21} ^4 -36244.38 * R_{21} ^5 (d.f.1.21)

Minimum regresione funkcije (p.f.1.21) pronalazimo iz uslova (Var_{21}' =0). Koristimo program Matlab.

```
>> p = [-36244.38 166.3985 -0.3037588 0.0002755569 1275.048 -0.956779];

r = roots(p)

r =

0.43404 + 0.00000i
0.00096 + 0.43308i
 0.00096 - 0.43308i
-0.43212 + 0.00000i
 0.00075 + 0.00000i (0.0007504 preciznije)
```

S obzirom da peti rezultat(0.0007504) pripada domenu, jasno je da regresiona funkcija (p.f.1.21) ima minimum. Rezultat (0.0007504) uvrstićemo u jednačinu (p.f.1.21) i dobijamo vrednost varijanse koja iznosi (0.0001404). S obzirom da je vrednost drugog izvoda (Var_{21}'' ≈1275.1) izvodimo zaključak da je ispunjen i dovoljan uslov da regresiona funkcija (p.f.1.21) ima minimum i to u tački koju ćemo označiti sa M_{21}(0.0007504;0.0001404). Vrednosti porcija članova PP21-1 iznose Π_j (PP20-1) =0.8644 i Π_k (UNH) =0.1356 (videti Excel tabelu, kolone od MK do MO).

4.3.21 Naredni u lancu je PP22-1. On je konstruisan dodavanjem akcije sa oznakom JNJ nad minimum PP21-1 (videti Matlab Grafik 6.).

Regresiona jednačina ima sledeći oblik (videti Minitab regresija 1 ptr=0):

Var_{22} = 0.000440916 -0.575785 * R_{22} +233.677 * R_{22} ^2 +0.0000039281 * R_{22} ^3 -0.0027239 * R_{22} ^4 +0.99311 * R_{22} ^5 -148.825 * R_{22} ^6 (p.f.1.22)

gde:

Var_{22} je varijansa PP22-1

R_{22} je povrat PP22-1

Domen regresione funkcije (p.f.1.22) je [0.0007504; 0.0014681] (videti Excel tabelu, kolone od MP do MU).

Prvi izvod regresione krive (p.f.1.22) glasi:

Var_{22}' = -0.575785 +467.354 * R_{22} +0.0000117843 * R_{22} ^2 -0.0108956 * R_{22} ^3 +4.96555 * R_{22} ^4 -892.95 * R_{22} ^5 (d.f.1.22)

Minimum regresione funkcije (p.f.1.22) pronalazimo iz uslova (Var_{22}' =0). Koristimo program Matlab.

```
>> p = [-892.95 4.96555 -0.0108956 0.0000117843 467.354 -0.575785];

r = roots(p)
```

r =

 0.85164 + 0.00000i

 0.00108 + 0.85056i

 0.00108 - 0.85056i

-0.84948 + 0.00000i

 0.00123 + 0.00000i (0.001232 preciznije)

Jasno je i u ovom slučaju da peti rezultat (0.001232) pripada domenu, stoga izvodimo zaključak da regresiona funkcija (p.f.1.22) ima minimum. Rezultat (0.001232) uvrstićemo u jednačinu (p.f.1.22) i dobijamo vrednost varijanse koja iznosi (0.0000862). Koristimo program Matlab:

>> p = [-148.825 0.99311 -0.0027239 0.0000039281 233.677 -0.575785 0.000440916];

polyval(p,0.001232)

Var_{22} =0.0000862

S obzirom da je vrednost drugog izvoda (Var_{22}'' ≈467.4) izvodimo zaključak da je ispunjen i dovoljan uslov da regresiona funkcija (p.f.1.22) ima minimum i to u tački koju ćemo označiti sa M_{22} (0.001232;0.0000862). Dakle, zaključujemo da je ispunjen nepristrasan uslov C4 za izbor portfolija. Vrednosti porcija članova PP22-1 iznose Π_j (PP21-1) =0.328953 i Π_k (JNJ) =0.671047 (videti Excel tabelu, kolone od MV do MZ).

4.3.22 Naredni u lancu je PP23-1. On je konstruisan dodavanjem akcije sa oznakom VZ nad minimum PP22-1 (videti Matlab Grafik 6.).

Regresiona jednačina ima sledeći oblik (videti Minitab regresija 1 ptr=0):

Var_{23} = 0.00378466 -5.71129 * R_{23} +2199.13 * R_{23} ^2 +0.0427523 * R_{23} ^3 -23.5993 * R_{23} ^4 +6940.34 * R_{23} ^5 -849565 * R_{23} ^6 (p.f.1.23)

gde:

Var_{23} je varijansa PP23-1

R_{23} je povrat PP23-1

Domen regresione funkcije (p.f.1.23) je [0.001232; 0.0015031] (videti Excel tabelu, kolone od NA do NF).

Prvi izvod regresione krive (p.f.1.23) glasi:

Var_{23}' = -5.71129 +4398.26 * R_{23} +0.1282569 * R_{23} ^2 -94.3972 * R_{23} ^3 +34701.7 * R_{23} ^4 -5097390 * R_{23} ^5 (d.f.1.23)

Minimum regresione funkcije (p.f.1.23) pronalazimo iz uslova (Var_{23}' =0). Koristimo program Matlab.

>> p = [-5097390 34701.7 -94.3972 0.1282569 4398.26 -5.71129];

r = roots(p)

r =

 0.17277 + 0.00000i

0.00138 + 0.17139i

0.00138 - 0.17139i

-0.17001 + 0.00000i

0.00130 + 0.00000i (0.0012986 preciznije)

Jasno je i u ovom slučaju da peti rezultat(0.0012986) pripada domenu, stoga izvodimo zaključak da regresiona funkcija (p.f.1.23) ima minimum. Kada rezultat (0.0012986) uvrstimo u jednačinu (p.f.1.23) dobijamo vrednost varijanse koja iznosi (0.0000765). S obzirom da je vrednost drugog izvoda ($Var_{23}'' \approx 4398.3$) izvodimo zaključak da je ispunjen i dovoljan uslov da regresiona funkcija (p.f.1.23) ima minimum i to u tački koju ćemo označiti sa M_{23}(0.0012986;0.0000765). Dakle, zaključujemo da je ispunjen nepristrasan uslov C4 za izbor portfolija. Vrednosti porcija članova PP23-1 iznose Π_j (PP22-1) =0.754578 i Π_k (VZ) =0.245422 (videti Excel tabelu, kolone od NG do NK).

4.3.23 Sledeći u lancu je PP24-1. On je konstruisan dodavanjem akcije sa oznakom KO nad minimum PP23-1 (videti Matlab Grafik 6.).

Regresiona jednačina ima sledeći oblik (videti Minitab regresija 1 ptr=0):

Var_{24} = 0.000607371 -0.747002 * R_{24} +260.438 * R_{24} ^2 -0.000055247 * R_{24} ^3 +0.0298903 * R_{24} ^4 -8.55893 * R_{24} ^5 +1014.03 * R_{24} ^6 (p.f.1.24)

gde:

Var_{24} je varijansa PP24-1

R_{24} je povrat PP24-1

Domen regresione funkcije (p.f.1.24) je [0.0012986; 0.0017054] (videti Excel tabelu, kolone od NL do NQ).

Prvi izvod regresione krive (p.f.1.24) glasi:

Var_{24}' = -0.747002 +520.876 * R_{24} -0.000165741 * R_{24} ^2 +0.1195612 * R_{24} ^3 -42.79465 * R_{24} ^4 +6084.18 * R_{24} ^5 (d.f.1.24)

Minimum regresione funkcije (p.f.1.24) pronalazimo iz uslova (Var_{24}' =0). Koristimo program Matlab.

```
>> p = [6084.18 -42.79465 0.1195612 -0.000165741 520.876 -0.747002];

r = roots(p)

r =

 0.38389 + 0.38249i

 0.38389 - 0.38249i

-0.38109 + 0.38249i

-0.38109 - 0.38249i

 0.00143 + 0.00000i (0.0014341 preciznije)
```

Očigledno je i u ovom slučaju da peti rezultat (0.0014341) pripada domenu, stoga izvodimo zaključak da regresiona funkcija (p.f.1.24) ima minimum. Rezultat (0.0014341) uvrstićemo u jednačinu (p.f.1.24) i dobijamo vrednost varijanse koja iznosi (0.0000717). S obzirom da je vrednost drugog izvoda (Var_{24}'' ≈520.9) izvodimo zaključak da je ispunjen i dovoljan uslov da regresiona funkcija (p.f.1.24) ima minimum i to u tački koju ćemo označiti sa M_{24} (0.0014341;0.0000717). Dakle, zaključujemo da je ispunjen nepristrasan uslov C4 za izbor portfolija. Vrednosti porcija članova PP24-1 iznose Π_j (PP23-1) =0.6668477 i Π_k (KO) =0.3331523 (videti Excel tabelu, kolone od NR do NV).

4.3.24 Sledeći u lancu je PP25-1. On je konstruisan dodavanjem akcije sa oznakom PFE nad minimum PP24-1 (videti Matlab Grafik 6.).

Regresiona jednačina ima sledeći oblik (videti Minitab regresija 1 ptr=0):

Var_{25} = 0.00232472 -3.09287 * R_{25} +1061.19 * R_{25} ^2 +0.00988244 * R_{25} ^3 -4.634 * R_{25} ^4 + 1157.66 * R_{25} ^5 -120374 * R_{25} ^6 (p.f.1.25)

gde:

Var_{25} je varijansa PP25-1

R_{25} je povrat PP25-1

Domen regresione funkcije (p.f.1.25) je [0.0014341; 0.0017695] (videti Excel tabelu, kolone od NW do OB).

Prvi izvod regresione krive (p.f.1.25) glasi:

Var_{25}' = -3.09287 +2122.38 * R_{25} +0.02964732 * R_{25} ^2 -18.536 * R_{25} ^3 +5788.3 * R_{25} ^4 - 722244 * R_{25} ^5 (d.f.1.25)

Minimum regresione funkcije (p.f.1.25) pronalazimo iz uslova (Var_{25}' =0). Koristimo program Matlab.

```
>> p = [-722244 5788.3 -18.536 0.02964732 2122.38 -3.09287];

r = roots(p)

r =
 0.23447 + 0.00000i
 0.00164 + 0.23283i
 0.00164 - 0.23283i
-0.23119 + 0.00000i
 0.00146 + 0.00000i (0.0014573 preciznije)
```

Očigledno je i u ovom slučaju da peti rezultat(0.0014573) pripada domenu, stoga izvodimo zaključak da regresiona funkcija (p.f.1.25) ima minimum. Rezultat (0.0014573) uvrstićemo u jednačinu (p.f.1.25) i dobijamo vrednost varijanse koja iznosi (0.0000712). S obzirom da je vrednost drugog izvoda (Var_{25}'' ≈2122.4) izvodimo zaključak da je ispunjen i dovoljan uslov da regresiona funkcija (p.f.1.25) ima minimum i to u tački koju ćemo označiti sa M_{25}(0.0014573;0.0000712). Dakle, zaključujemo da je ispunjen nepristrasan uslov C4 za izbor portfolija. Vrednosti porcija članova PP25-1 iznose Π_j (PP24-1) =0.9309334 i Π_k (PFE) =0.0690666 (videti Excel tabelu, kolone od OC do OG).

4.3.25 Sledeći u lancu je PP26-1. On je konstruisan dodavanjem akcije sa oznakom PG nad minimum PP25-1 (videti Matlab Grafik 6.).

Regresiona jednačina ima sledeći oblik (videti Minitab regresija 1 ptr=0):

Var_{26} = 0.00107784 -1.34679 * R_{26} +450.147 * R_{26} ^2 -0.0000863323 * R_{26} ^3 +0.0385251 * R_{26} ^4 -9.12682 * R_{26} ^5 +896.912 * R_{26} ^6 (p.f.1.26)

gde:

Var_{26} je varijansa PP26-1

R_{26} je povrat PP26-1

Domen regresione funkcije (p.f.1.26) je [0.0014573; 0.0020127] (videti Excel tabelu, kolone od OH do OM).

Prvi izvod regresione krive (p.f.1.26) glasi:

Var_{26}' = -1.34679 +900.294 * R_{26} -0.0002589969 * R_{26} ^2 +0.1541004 * R_{26} ^3 -45.6341 * R_{26} ^4 +5381.472 * R_{26} ^5 (d.f.1.26)

Minimum regresione funkcije (p.f.1.26) pronalazimo iz uslova (Var_{26}' =0). Koristimo program Matlab.

```
>> p = [5381.472 -45.6341 0.1541004 -0.0002589969 900.294 -1.34679];

r = roots(p)

r =

 0.45397 + 0.45223i

 0.45397 - 0.45223i

-0.45048 + 0.45223i

-0.45048 - 0.45223i

 0.00150 + 0.00000i (0.0014959 preciznije)
```

Očigledno je i u ovom slučaju da peti rezultat (0.0014959) pripada domenu, stoga izvodimo zaključak da regresiona funkcija (p.f.1.26) ima minimum. Kada rezultat (0.0014959) uvrstimo u jednačinu (p.f.1.26) dobijamo vrednost varijanse koja iznosi (0.0000705). S obzirom da je vrednost drugog izvoda (Var_{26}'' ≈900.3) izvodimo zaključak da je ispunjen i dovoljan uslov da regresiona funkcija (p.f.1.26) ima minimum i to u tački koju ćemo označiti sa M_{26}(0.0014959;0.0000705). Dakle, zaključujemo da je ispunjen nepristrasan uslov C4 za izbor portfolija. Vrednosti porcija članova PP26-1 iznose Π_j (PP25-1) =0.93042 i Π_k (PG) =0.06958 (videti Excel tabelu, kolone od ON do OR).

4.3.26 Sledeći u lancu je PP27-1. On je konstruisan dodavanjem akcije sa oznakom MCD nad minimum PP26-1 (videti Matlab Grafik 6.).

Regresiona jednačina ima sledeći oblik (videti Minitab regresija 1 ptr=0):

Var_{27} = 0.000588679 -0.677461 * R_{27} +221.304 * R_{27} ^2 -0.0000329341 * R_{27} ^3 +0.0135075 * R_{27} ^4 -2.93728 * R_{27} ^5 +264.621 * R_{27} ^6 (p.f.1.27)

gde:

Var_{27} je varijansa PP27-1

R_{27} je povrat PP27-1

Domen regresione funkcije (p.f.1.27) je [0.0014959; 0.0022619] (videti Excel tabelu, kolone od OS do OX).

Prvi izvod regresione krive (p.f.1.27) glasi:

Var_{27}' = -0.677461 +442.608 * R_{27} -0.0000988023 * R_{27} ^2 +0.05403 * R_{27} ^3 -14.6864 * R_{27} ^4 +1587.726 * R_{27} ^5 (d.f.1.27)

Minimum regresione funkcije (p.f.1.27) pronalazimo iz uslova (Var_{27}' =0). Koristimo program Matlab.

```
>> p = [1587.726 -14.6864 0.05403 -0.0000988023 442.608 -0.677461];

r = roots(p)

r =
 0.51573 + 0.51380i
 0.51573 - 0.51380i
-0.51187 + 0.51380i
-0.51187 - 0.51380i
 0.00153 + 0.00000i (0.0015306 preciznije)
```

Jasno je i u ovom slučaju da peti rezultat (0.0015306) pripada domenu, stoga izvodimo zaključak da regresiona funkcija (p.f.1.27) ima minimum. Kada rezultat (0.0015306) uvrstimo u jednačinu (p.f.1.27) dobijamo vrednost varijanse koja iznosi (0.0000702). S obzirom da je vrednost drugog izvoda (Var_{27}'' ≈442.7) izvodimo zaključak da je ispunjen i dovoljan uslov da regresiona funkcija (p.f.1.27) ima minimum i to u tački koju ćemo označiti sa M_{27}(0.0015306;0.0000702). Dakle, zaključujemo da je ispunjen nepristrasan uslov C4 za izbor portfolija. Vrednosti porcija članova PP27-1 iznose Π_j (PP26-1) =0.9546844 i Π_k (MCD) =0.0453156 (videti Excel tabelu, kolone od OY do PC).

4.3.27 Naredni u lancu je PP28-1. On je konstruisan dodavanjem akcije sa oznakom MRK nad minimum PP27-1 (videti Matlab Grafik 6.).

Regresiona jednačina ima sledeći oblik (videti Minitab regresija 1 ptr=0):

Var_{28} = 0.000246091 -0.21723 * R_{28} +66.8511 * R_{28} ^2 +0.00000021278 * R_{28} ^3 -0.0000780966 * R_{28} ^4 +0.0149108 * R_{28} ^5 -1.15397 * R_{28} ^6 (p.f.1.28)

gde:

Var_{28} je varijansa PP28-1

R_{28} je povrat PP28-1

Domen regresione funkcije (p.f.1.28) je [0.0015306; 0.0024992] (videti Excel tabelu, kolone od PD do PI).

Prvi izvod regresione krive (p.f.1.28) glasi:

$Var_{28}' = -0.21723 + 133.7022 * R_{28} + 0.00000063834 * R_{28}\ \hat{}2 - 0.0003123864 * R_{28}\ \hat{}3 + 0.074554 * R_{28}\ \hat{}4 - 6.92382 * R_{28}\ \hat{}5$ (d.f.1.28)

Minimum regresione funkcije (p.f.1.28) pronalazimo iz uslova (Var_{28}' =0). Koristimo program Matlab.

```
>> p = [-6.92382 0.074554 -0.0003123864 0.00000063834 133.7022 -0.21723];

r = roots(p)

r =
 2.09856 + 0.00000i
 0.00229 + 2.09627i
 0.00229 - 2.09627i
-2.09399 + 0.00000i
 0.00162 + 0.00000i (0.0016248 preciznije)
```

Jasno je i u ovom slučaju da peti rezultat (0.0016248) pripada domenu, stoga izvodimo zaključak da regresiona funkcija (p.f.1.28) ima minimum. Rezultat (0.0016248) uvrstićemo u jednačinu (p.f.1.28) i dobijamo vrednost varijanse koja iznosi (0.0000696). S obzirom da je vrednost drugog izvoda ($Var_{28}'' \approx 133.7$) izvodimo zaključak da je ispunjen i dovoljan uslov da regresiona funkcija (p.f.1.28) ima minimum i to u tački koju ćemo označiti sa M_{28}(0.0016248;0.0000696). Dakle, zaključujemo da je ispunjen nepristrasan uslov C4 za izbor portfolija. Vrednosti porcija članova PP28-1 iznose Π_j (PP27-1) =0.9028183 i Π_k (MRK) =0.0971817 (videti Excel tabelu, kolone od PJ do PN).

4.3.28 Poslednji u lancu je portfolio koji je označen sa Pdjia30. On je konstruisan dodavanjem akcije sa oznakom WBA nad minimum PP28-1 (videti Matlab Grafik 6.).

Regresiona jednačina ima sledeći oblik (videti Minitab regresija 1 ptr=0):

$Var_{29} = 0.000145289 - 0.0845825 * R_{29} + 23.3946 * R_{29}\ \hat{}2 + 0.0000000126906 * R_{29}\ \hat{}3 - 0.00000412688 * R_{29}\ \hat{}4 + 0.00069451 * R_{29}\ \hat{}5 - 0.0474143 * R_{29}\ \hat{}6$ (p.f.1.29)

gde:

Var_{29} je varijansa portfolija Pdjia30

R_{29} je povrat portfolija Pdjia30

Domen regresione funkcije (p.f.1.29) je [0.0016248; 0.0038495] (videti Excel tabelu, kolone od PO do PT).

Prvi izvod regresione krive (p.f.1.29) glasi:

$Var_{29}' = -0.0845825 + 46.7892 * R_{29} + 0.0000000380718 * R_{29}\ \hat{}2 - 0.00001650752 * R_{29}\ \hat{}3 + 0.00347255 * R_{29}\ \hat{}4 - 0.2844858 * R_{29}\ \hat{}5$ (d.f.1.29)

Minimum regresione funkcije (p.f.1.29) pronalazimo iz uslova (Var_{29}' =0). Koristimo program Matlab.

```
>> p = [-0.2844858 0.00347255 -0.00001650752 0.0000000380718 46.7892 -0.0845825];
```

r = roots(p)

r =

3.58374 + 0.00000i

0.00260 + 3.58114i

0.00260 - 3.58114i

-3.57854 + 0.00000i

0.00181 + 0.00000i (0.0018077 preciznije)

I u ovom slučaju je jasno da peti rezultat (0.0018077) pripada domenu, stoga izvodimo zaključak da regresiona funkcija (p.f.1.29) ima minimum. Kada rezultat (0.0018077) uvrstimo u jednačinu (p.f.1.29) dobijamo vrednost varijanse koja iznosi (0.000068838). Koristili smo program Matlab:

>> p = [-0.0474143 0.00069451 -0.00000412688 0.0000000126906 23.3946 -0.0845825 0.000145289];

polyval(p,0.0018077)

Var_{29} = 6.8838e-05

S obzirom da je vrednost drugog izvoda ($Var_{29}'' \approx 46.8$) izvodimo zaključak da je ispunjen i dovoljan uslov da regresiona funkcija (p.f.1.29) ima minimum i to u tački koju ćemo označiti sa M_{29} (0.0018077;0.000068838). Dakle, zaključujemo da je ispunjen nepristrasan uslov C4 za izbor portfolija. Vrednosti porcija članova minimuma portfolija Pdjia30 iznose Π_j (PP28) =0.91777 i Π_k (WBA) =0.08223 (videti Excel tabelu, kolone od PU do PY).

Vrednost porcije svake pojedinačne akcije u portfoliju najvišeg ranga izračunata je multiplikacijom vrednosti porcija u svakom parcijalnom portfoliju, tako da, zbir porcija svih akcija koje učestvuju u minimumu portfolija, očekivano iznosi '1' (videti Excel tabelu, kolona PZ).

Ako početnu i krajnju tačku domena regresione funkcije (p.f.1.29) uvrstimo u jednačinu (d.f.1.29), dobijamo vrednosti prvog izvoda funkcije. Koristimo program Matlab:

>> p = [-0.2844858 0.00347255 -0.00001650752 0.0000000380718 46.7892 -0.0845825];

polyval(p,0.0016248)

Var_{29}' = -0.0085594

>> p = [-0.2844858 0.00347255 -0.00001650752 0.0000000380718 46.7892 -0.0845825];

polyval(p,0.0038495)

Var_{29}' = 0.095533

Izvodimo zaključak da je vrednost prvog izvoda značajno manja od '1' i da kriterijum C6 ne može da bude ispunjen. Matematičko objašnjenje je sledeće:

$1 = -0.0845825 + 46.7892 * R_{29} + 0.0000000380718 * R_{29}{}^{\wedge}2 - 0.00001650752 * R_{29}{}^{\wedge}3 + 0.00347255 * R_{29}{}^{\wedge}4 - 0.2844858 * R_{29}{}^{\wedge}5$

nakon sređivanja sledi:

$0 = -1.0845825 +46.7892 * R_{29} +0.0000000380718 * R_{29}$ ^2 $-0.00001650752 * R_{29}$ ^3 $+0.00347255 * R_{29}$ ^4 $-0.2844858 * R_{29}$ ^5

Korene ove jednačine izračunaćemo uz pomoć programa Matlab.

```
>> p = [-0.2844858 0.00347255 -0.00001650752 0.0000000380718 46.7892 -1.0845825];

r = roots(p)

r =
-3.58386 + 0.00000i
-0.00274 + 3.58116i
-0.00274 - 3.58116i
 3.57838 + 0.00000i
 0.02318 + 0.00000i  (0.0231801890412 preciznije)
```

Očigledno je da nijedan od pet rezultata ne pripada domenu regresione funkcije (p.f.1.29), stoga i nije ispunjen kriterijum C6 za izbor portfolija. Preostaje da proverimo da li postoji tangentni portfolio, odnosno, da li je ispunjen kriterijum C5. Identično prethodnim slučajevima u kojima smo postavljali tangentu na krivu iz tačke koja leži na 'x' osi i čije su koordinate (0.0000561349;0), matematički postupak je sledeći:

$0 - Var_{29} = (-0.0845825 +46.7892 * R_{29} +0.0000000380718 * R_{29}$ ^2 $-0.00001650752 * R_{29}$ ^3 $+0.00347255 * R_{29}$ ^4 $-0.2844858 * R_{29}$ ^5)*(0.0000561349-R_{29})

sledi:

$-Var_{29} = -0.000004748 +0.087209007*R_{29} -46.7892*R_{29}$^2 $-0.000000039*R_{29}$^3 + $0.0000167*R_{29}$^4 $-0.0034885196*R_{29}$^5 $+0.2844858*R_{29}$^6

Kada se ova jednačina sabere sa jednačinom (p.f.1.29) dobija se:

$0 = 0.000140541 +0.00262651*R_{29} -23.3946*R_{29}$^2 $-0.0000000263*R_{29}$^3 $+0.00001257312*R_{29}$^4 $-0.002794*R_{29}$^5 $+0.2370715*R_{29}$^6

Korene ove jednačine izračunaćemo korišćenjem programa Matlab.

```
>> p = [0.2370715 -0.002794 0.00001257312 -0.0000000263 -23.3946 0.00262651 0.000140541];

r = roots(p)

r =
 3.15472 + 0.00000i
 0.00292 + 3.15180i
 0.00292 - 3.15180i
-3.14888 + 0.00000i
 0.00251 + 0.00000i (0.00250778 preciznije)
-0.00240 + 0.00000i
```

S obzirom da samo peti rezultat (0.00250778) pripada domenu regresione funkcije (p.f.1.29) kada ga uvrstimo u jednačinu (p.f.1.29) dobićemo vrednost varijanse u tački u kojoj tangenta dodiruje krivu. Koristićemo program Matlab:

>> p = [-0.0474143 0.00069451 -0.00000412688 0.0000000126906 23.3946 -0.0845825 0.000145289];

polyval(p,0.00250778)

Var_{29} = 8.0302e-05

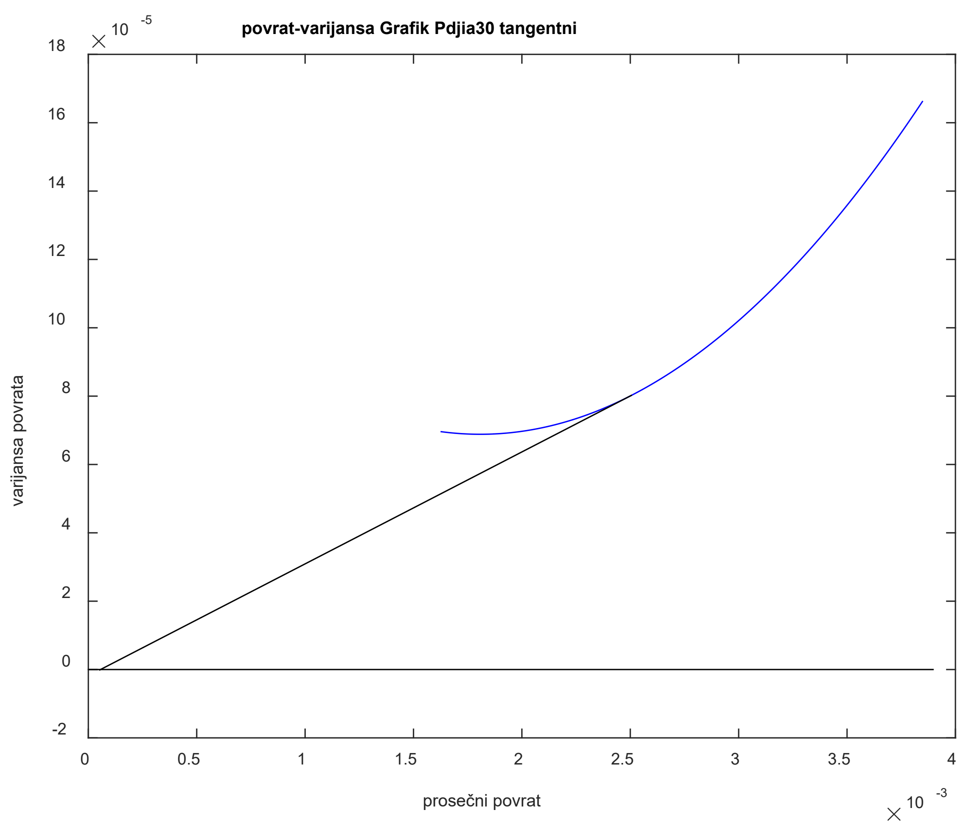
Dakle, tačka T_{29} u kojoj će tangenta dodirivati krivu (p.f.1.29) ima koordinate (0.00250778;0.000080302) (videti Matlab Grafik 7.).

Vrednosti porcija članova tangentnog portfolija Pdjia30 iznose Π_j (PP28-1) =0.6031 i Π_k (WBA) =0.3969 (videti EXCEL tabelu, kolone od QA do QE). I u ovom slučaju zbir porcija svih akcija koje učestvuju u tangentnom portfoliju, očekivano iznosi '1' (videti Excel tabelu, kolona QF).

4.4 Tangentni portfolio najvišeg ranga. Tržišna linija kapitala (CML)

Analizirajmo najpre efikasni skup portfolija Pdjia30. Kao što je prethodno definisano, efikasni skup predstavlja deo regresione krive čiji je prvi izvod jednak ili veći od '0'. S obzirom da regresiona funkcija (p.f.1.29) ima minimum u tački M_{29}(0.0018077;0.000068838), sledi da efikasni skup počinje upravo u tački M_{29} i da se završava u tački čije su koordinate (0.0038495;0.0001664), koje predstavljaju vrednosti povrata i varijanse povrata akcije sa oznakom WBA, koja je poslednja u nizu uključena u portfolio.

Grafik 7. Tangentni portfolio P30



Proverimo vrednost prvog izvoda funkcije (p.f.1.29) u krajnjoj tački efikasnog skupa. Koristimo program Matlab:

```
>> p = [-0.2844858 0.00347255 -0.00001650752 0.0000000380718 46.7892 -0.0845825];

polyval(p,0.0038495)
```

$Var_{29}' = 0.095533$

Dakle, vrednosti prvog izvoda efikasnog skupa regresione funkcije (p.f.1.29) pripadaju intervalu (0;0.095533). Pokažimo sada da je bilo gde na efikasnom skupu regresione krive (p.f.1.29), prirast povrata veći od prirasta varijanse. Izaberimo bilo koju tačku E_{29} koja pripada efikasnom skupu i neka je prvi izvod regresione funkcije u tački E_{29} jednak 0.01, odnosno $Var_{29}'(E_{29})=0.01$. (videti Tabelu 3.)

Dakle vrednost prvog izvoda regresione funkcije (p.f.1.29) se sigurno nalazi u naznačenom intervalu (0;0.095533). Koordinate tačke E_{29} dobićemo na sledeći način. Postavićemo jednačinu:

$0.01 = -0.0845825 +46.7892 * R_{29} +0.0000000380718 * R_{29}\ \hat{}2 -0.00001650752 * R_{29}\ \hat{}3 +0.00347255 * R_{29}\ \hat{}4 -0.2844858 * R_{29}\ \hat{}5$

odnosno

$0 = -0.0945825 +46.7892 * R_{29} +0.0000000380718 * R_{29}\ \hat{}2 -0.00001650752 * R_{29}\ \hat{}3 +0.00347255 * R_{29}\ \hat{}4 -0.2844858 * R_{29}\ \hat{}5$

Tabela 3. Različite tačke duž efikasnog skupa regresione funkcije (p.f.1.29)

$R(M_{29})$	$R(E_{29})$	$R(T_{29})$	R(WBA)
0.0018077	0.00202	0.00250778	0.0038495
$Var(M_{29})$	$Var(E_{29})$	$Var(T_{29})$	Var(WBA)
0.000068838	0.000069892	0.000080302	0.0001664
$Var'(M_{29})$	$Var'(E_{29})$	$Var'(T_{29})$	Var′(WBA)
0	0.01	0.032755	0.095533

Korene ove jednačine dobićemo uz pomoć programa Matlab.

```
>> p = [-0.2844858 0.00347255 -0.00001650752 0.0000000380718 46.7892 -0.0945825];

r = roots(p)

r =
  3.58369 + 0.00000i
  0.00255 + 3.58114i
  0.00255 - 3.58114i
 -3.57859 + 0.00000i
  0.00202 + 0.00000i
```

Jasno je da samo peti rezultat (0.00202) pripada domenu regresione funkcije koji kada ga uvrstimo u jednačinu (p.f.1.29) daje vrednost varijanse u tački E_{29} koja iznosi (0.000069892). Koristićemo program Matlab:

```
>> p = [-0.0474143 0.00069451 -0.00000412688 0.0000000126906 23.3946 -0.0845825 0.000145289];

polyval(p,0.00202)
```

Var_{29} = 6.9892e-05

Dakle, koordinate tačke E_{29} su (0.00202;0.000069892). S obzirom da su koordinate tačke M_{29}(0.0018077;0.000068838), možemo da postavimo sledeće jednakosti:

ΔR =0.00202 -0.0018077= 0.0002123

ΔVar =0.000069892 -0.000068838 = 0.000001054

Jasno sledi da je između tačaka E_{29} i M_{29} prirast povrata jednak (0.0002123), dok je prirast varijanse (0.000001054). Proverimo sada kolika je razlika u prirastu povrata i prirastu varijanse između tačaka T_{29} i E_{29}. Koordinate tačke T_{29} su (0.00250778;0.000080302). Kao i u prethodnom slučaju postavljamo jednakosti:

ΔR =0.00250778 -0.00202 = 0.00048778

ΔVar =0.000080302 -0.000069892 = 0.00001041

I u ovom slučaju je jasno da je prirast povrata između tačaka T_{29} i E_{29} veći od prirasta varijanse. Uradimo isto i sa tačkama WBA(0.0038495;0.0001664) i T_{29}. Jednakosti glase:

ΔR =0.0038495 -0.00250778 = 0.00134172

ΔVar =0.0001664 -0.000080302 = 0.000086098

I u ovom slučaju je jasno da je prirast povrata između tačaka WBA i T_{29} veći od prirasta varijanse. Stoga, možemo da zaključimo da je prirast povrata veći od prirasta varijanse na celokupnom efikasnom skupu regresione krive (p.f.1.29).

Odredićemo sada jednačinu tangente, koju postavljamo iz tačke koja leži na 'x' osi, čije su koordinate (0.0000561349;0), na regresionu krivu (p.f.1.29). Vrednost prvog izvoda regresione funkcije (p.f.1.29) u tački T_{29} iznosi (0.032755). Koristili smo program Matlab:

```
>> p = [-0.2844858 0.00347255 -0.00001650752 0.0000000380718 46.7892 -0.0845825];

polyval(p,0.00250778)
```

$Var_{29}'(T_{29})$ = 0.032755

S obzirom da su koordinate tačke T_{29}(0.00250778;0.000080302), matematički postupak dobijanja jednačine tangente je sledeći:

Y -0.000080302 = 0.032755*(X -0.00250778)

odakle sledi:

Y -0.000080302 = 0.032755*X -0.0000821423339

odnosno

Y = 0.032755*X -0.0000018403339 (t.5)

Jednačina (t.5) predstavlja jednačinu tangente koja je povučena iz tačke sa koordinatama (0.0000561349;0) na regresionu krivu (p.f.1.29). Tangenta će da dodiruje regresionu krivu i time formira tangentni portfolio u tački T_{29} (videti Matlab Grafik 7.). Sama po sebi (ipso facto) tangenta povučena iz tačke koja se nalazi na 'x' osi čije koordinate predstavljaju nerizični prinos i nultu varijansu, na krivu liniju koja predstavlja efikasni skup portfolija, nije ništa drugo nego *tržišna linija kapitala* (Sharpe, 1964). S obzirom da Sharpe et al (1998) definišu *tržišni portfolio* kao skup koji se sastoji od svih hartija od vrednosti koje se nalaze na tržištu gde porcije investirane u svaku pojedinačnu hartiju korespondiraju njihovim relativnim tržišnim vrednostima, opšta tržišna linija kapitala će takođe biti tangenta na krivu efikasnog skupa koja predstavlja različite kombinacije rizične aktive. U tom slučaju će opšta tržišna linija kapitala da dodiruje ovu krivu u tački koja će da predstavlja koordinate tržišnog portfolija. Dakle, Sharpe et al (1998) tvrde da u stanju tržišne ravnoteže porcije investirane u svaku pojedinačnu hartiju od vrednosti tangentnog portfolija korespondiraju sa porcijama hartija od vrednosti tržišnog portfolija.

Alternativni način izvođenja jednačine tangente prikazaćemo na sledeći način. Naime, možemo da koristimo poznatu jednačinu analitičke geometrije, koja glasi (Miličić,& Ušćumlić, 1984):

$(x - x_1)/(x_2 - x_1) = (y - y_1)/(y_2 - y_1)$ (t.e.12)

gde:

x_1 i x_2 predstavljaju 'x' koordinate dve tačke kroz koje prolazi prava linija

y_1 i y_2 predstavljaju 'y' koordinate dve tačke kroz koje prolazi prava linija

x i y su tekuće promenljive prave linije

Dve tačke koje pripadaju tangenti, a koje biramo su: a) tačka $R_e = R_{rfl}$ na 'x' osi iz koje povlačimo tangentu na krivu (p.f.1.29), čije su koordinate (0.0000561349;0) i b) tačka u kojoj tangenta dodiruje regresionu krivu (p.f.1.29), odnosno tačka T_{29}, čije su koordinate (0.00250778;0.000080302). Uvrstićemo vrednosti koordinata ovih tačaka u jednačinu (t.e.12) odakle dobijamo sledeće:

(x -0.0000561349)/(0.00250778 -0.0000561349) = (y -0)/(0.000080302 -0)

odakle sledi

(x -0.0000561349)*0.000080302 = 0.0024516451*y

odnosno

y = 0.0327543329986873*(x -0.0000561349)

ili konačno

y = 0.0327543329986873*x -0.00000183866120744801 (t.6)

Uočavamo da je jednačina (t.6) identična jednačini (t.5). Analizirajmo sada jednačinu tangente (t.6). Interval definisanosti koji nas posebno zanima je (0.0000561349;0.00250778), koji predstavlja 'x' koordinate dve izabrane tačke, R_{rfl} i T_{29}. Ukoliko vrednost argumenta (0.0000561349) uvrstimo u jednačinu (t.6) dobijamo vrednost koja je očekivano jednaka '0'. Zaista je:

y = 0.0327543329986873* 0.0000561349 -0.00000183866120744801 = 0

Ukoliko sada uvrstimo vrednost argumenta (0.00250778) u jednačinu (t.6) očekivano dobijamo vrednost koja je jednaka (0.000080302). Dakle, biće:

y = 0.0327543329986873* 0.00250778 -0.00000183866120744801 = 0.000080302

Ovaj uređeni par (0;0.000080302) očigledno predstavlja vrednosti varijansi, u početnoj i krajnjoj tački izabranog intervala definisanosti funkcije (t.6). Ova funkcija sama posebi (ipso facto) predstavlja skup mogućih linearnih portfolija, koji su nastali kao posledica uvođenja tangente na regresionu krivu (p.f.1.29). Dakle, strogo matematički posmatrano, sama tangenta predstavlja skup linearnih portfolija. S obzirom na činjenicu da je tangentni portfolio potskup efikasnog skupa, portfolija koji smo označili sa Pdjia30, onda je i linearni skup portfolija, koji su definisani jednačinom tangente (t.6), takođe efikasni skup. Drugim rečima, sve tačke na liniji, definisane jednačinom (t.6), predstavljaju linearni efikasni skup portfolija.

Analizirajmo sada jednačinu (t.6). Ukoliko uvrstimo bilo koju vrednost argumenta iz domena u jednačinu (t.6) dobijamo sledeće:

a) Neka je vrednost argumenta (0.00009), koja očigledno pripada domenu funkcije (t.6), sledi:

$y = 0.0327543329986873 * 0.00009 - 0.00000183866120744801 = 0.00000110922876243385$

prirast argumenta, dakle iznosi:

$\Delta x = 0.00009 - 0.0000561349 = 0.0000338651$

dok prirast funkcije iznosi:

$\Delta y = 0.00000110922876243385 - 0 = 0.00000110922876243385$

Očigledno je da je prirast argumenta (Δx) daleko veći od prirasta funkcije (Δy), što veoma lako može da se proveri ukoliko ove dve vrednosti prirasta stavimo u međuodnos. Dakle, biće:

$\Delta x / \Delta y = 0.0000338651 / 0.00000110922876243385 = 30.5303118228685$

Zaključujemo da je na segmentu [0.0000561349;0.00009] prirast argumenta više od trideset puta veći od prirasta same funkcije.

b) Isprobajmo identični postupak u blizini gornje granice domena funkcije (t.6). Neka je sada vrednost argumenta (0.002), koja takođe pripada domenu, sledi:

$y = 0.0327543329986873 * 0.002 - 0.00000183866120744801 = 0.0000636700047899266$

prirast argumenta u ovom slučaju je:

$\Delta x = 0.00250778 - 0.002 = 0.00050778$

dok je prirast funkcije:

$\Delta y = 0.000080302 - 0.0000636700047899266 = 0.0000166319952100734$

Odnos prirasta, argumenta i funkcije iznosi:

$\Delta x / \Delta y = 0.00050778 / 0.0000166319952100734 = 30.5303118228685$

Takođe je, i na segmentu [0.002;0.00250778], prirast argumenta veći od prirasta funkcije. Interesantno je i sledeće, da je odnos prirasta, i argumenta i funkcije, duž celokupne linije definisane funkcijom (t.6) identičan i da iznosi ($\Delta x / \Delta y = 30{,}5303118228685$). Ovo je posledica činjenice da je prvi izvod funkcije (t.6), u oznaci y', jednak (0.0327543329986873), odnosno $dy/dx = 0.0327543329986873$.

Dakle, sklonost ka riziku, duž celokupne linije definisane jednačinom (t.6) iznosi

(*ptr* =0.0327543329986873), dok averzija prema riziku iznosi (*rav* =30.5303118228685). Iz prethodno izloženog zaključujemo da bilo koji investitor, duž linearnog efikasnog skupa definisanog funkcijom (t.6), ima priliku da bira portfolio čiji je prirast argumenta mnogo veći od prirasta funkcije. Praktično ovo znači da je prirast povrata portfolija, značajno veći od prirasta rizika portfolija, merenog varijansom povrata.

R_{rfl} i T_{29} nazvaćemo tačkama isključivanja. Naime, ukoliko investitor izabere portfolio u tački R_{rfl}, on će time automatski isključiti svu rizičnu aktivu i obrnuto, ukoliko izabere portfolio u tački T_{29} time će isključiti nerizičnu aktivu.

Ukoliko, na primer, investitor želi portfolio koji se nalazi tačno na polovini linearnog efikasnog skupa definisanog funkcijom (t.6), između tačaka R_{rfl} i T_{29}, povrat i varijansu izračunaćemo na sledeći način:

Neka su M_1 i M_2 početna i krajnja tačka duži M_1M_2 i neka su njihove koordinate (x_1, y_1) i (x_2, y_2), respektivno. Koordinate (x, y) tačke M koje dele duž M_1M_2 u datom odnosu:

$\lambda = M_1M / MM_2$

determinisane su jednačinama (Miličić,& Ušćumlić, 1984):

a) $x = (x_1+\lambda*x_2)/(1+\lambda)$;

b) $y = (y_1+\lambda*y_2)/(1+\lambda)$

Ako je tačka M u središtu duži, onda je ($\lambda = 1$), odakle sledi:

a) $x = (x_1+x_2)/2$;

b) $y = (y_1+y_2)/2$

Ako je ($\lambda<0$), onda je reč o spoljašnjoj podeli duži.

Izračunajmo povrat i varijansu portfolija koji se nalazi na polovini linearnog efikasnog skupa, sledi:

$R_{lin} = (0.0000561349 + 0.00250778)/2 = \underline{0.00128195745}$

prethodnu vrednost povrata uvrstićemo u jednačinu (t.6) iz koje sledi:

$Var_{lin} = 0.0327543329986873 * 0.00128195745 - 0.0000183866120744801 = \underline{0.000040151}$

gde:

R_{lin} je povrat linearnog efikasnog skupa

Var_{lin} je varijansa linearnog efikasnog skupa

Izračunajmo sada porcije kombinacije nerizične hartije od vrednosti i tangentnog portfolija kada se investitorov izbor nalazi na sredini linearnog efikasnog skupa. Iz jednačine (t.e.2) sledi:

$\Pi_j*0.0000561349 + (1-\Pi_j)*0.00250778 = 0.00128195745$

nakon sređivanja prethodne jednačine dobija se:

$\Pi_j = 0.5$ i $\Pi_k = 1-\Pi_j = 0.5$

Proverimo dobijene rezultate. S obzirom da je varijansa tangentnog portfolija $Var(T_{29}) = 0.000080302$, sledi da je varijansa ovakve kombinacije nerizične aktive i tangentnog portfolija:

$Var_{lin} = \Pi_j*Var(R_{rfl}) + \Pi_k*Var(T_{29}) = 0.5*0.000080302 = 0.000040151$

Dakle, dobijen je identičan rezultat kao i prethodni. Takođe važi da su vrednosti varijanse nerizične aktive i kovarijanse između nerizične aktive i tangentnog portfolija jednake '0'(Sharpe, Alexander and Bailey, 1998).

Analizirajmo sada šta se dešava ukoliko investitor izabere neki portfolio iz linearnog efikasnog skupa koji se nalazi dalje od tangentnog portfolija. Neka, na primer, investitor izabere portfolio koji ima povrat R_{29} =0.0035, koji se nalazi u domenu regresione krive (p.f.1.29). Varijansu portfolija sa ovim nivoom povrata izračunaćemo ukoliko vrednost (0.0035) uvrstimo u jednačinu (p.f.1.29). Koristićemo program Matlab:

```
>> p = [-0.0474143 0.00069451 -0.00000412688 0.0000000126906 23.3946 -0.0845825 0.000145289];

polyval(p,0.0035)
```

Var_{29} = 1.3583e-04

Dakle, ukoliko investira isključivo u rizični portfolio investitor će se suočiti sa varijansom koja je jednaka (0.00013583). Zanima nas, na koji način će investitor uspeti da snizi varijansu a da pri tome ostvari identičan povrat ukoliko iskoristi mogućnosti linearnog efikasnog skupa. Izračunajmo porcije ovakve kombinacije nerizične hartije od vrednosti i tangentnog portfolija linearnog efikasnog skupa. Iz jednačine (t.e.2) sledi:

Π_j*0.0000561349 +(1-Π_j)*0.00250778 =0.0035

nakon sređivanja prethodne jednačine dobija se:

Π_j = -0.404716, odakle sledi da je Π_k =1-Π_j =1.404716

Dobijeni rezultati, na prvi pogled, deluju apsurdno, ali su sasvim očekivani. Naime, dešava se sledeće. Investitor u ovom slučaju *uzajmljuje novčana sredstva po nerizičnoj stopi*, koju ćemo označiti sa R_{rfb}, koja je identična nerizičnoj stopi pozajmljivanja R_{rfl}, i ta uzajmljena novčana sredstva, zajedno sa sopstvenim novčanim sredstvima investira u tangentni portfolio (Sharpe, Alexander and Bailey, 1998). Iz tog razloga se dobijaju negativna vrednost za porciju nerizične aktive i vrednost porcije koja je veća od '1' kada je reč o ulaganju u tangentni portfolio. Proverimo dobijene rezultate. Povrat kombinacije uzajmljene aktive po nerizičnoj stopi i tangentnog portfolija biće:

R_{lin} = -0.404716*0.0000561349 +1.404716*0.00250778 = -0.0000227 +0.0035227 = $\underline{0.0035}$

Dakle, dobijen je identičan rezultat zahtevanom. Proverimo sada koliku vrednost varijanse ima ova kombinacija. Iz jednačine (t.6) sledi:

Var_{lin} = 0.0327543329986873* 0.0035 -0.0000018386612074480 1 = $\underline{0.000112801504287958}$

Ukoliko prethodni rezultat uporedimo sa rezultatom za varijansu rizičnog portfolija uočavamo da postoji razlika koja je jednaka:

$\Delta Var = Var_{29} - Var_{lin}$ = 0.00013583 -0.000112801504287958 =0.000023028495712042

Dakle, kombinovanjem uzajmljenih novčanih sredstava po nerizičnoj stopi i tangentnog portfolija dobija se portfolio čiji je povrat identičan povratu rizičnog portfolija koji se nalazi dalje od tangentnog portfolija duž regresione krive (p.f.1.29), ali je njegova varijansa značajno niža, zahvaljujući prednostima koje nudi linearni efikasni skup. Očigledno je da su vrednosti povrata i varijanse linearnog efikasnog skupa značajno povoljnije za investitora. Ukoliko dakle, investitor želi da bira bilo koju vrednost uređenog para povrat-varijansa koja se nalazi na linearnom efikasnom skupu može da postigne značajno povoljnije rezultate nego investiranjem isključivo u rizični portfolio.

Iz prethodne analize sledi interesantno pitanje, da li investitor može umesto tangentnog portfolija da izabere neki drugi portfolio koji leži na efikasnom skupu regresione funkcije (p.f.1.29). Odgovor je da. S obzirom da je prethodno već pokazano da je prirast povrata, između tačaka T_{29} i WBA, veći od prirasta varijanse, očekivano bi bilo da investitor izabere neki portfolio koji leži na efikasnom skupu regresione krive (p.f.1.29), između ove dve tačke. Ukoliko investitor napravi takav izbor, očigledno je da će ostvariti prirast povrata koji je veći od prirasta varijanse, međutim izgubiće linearnu vezu između nerizičnog prinosa i uređenog para povrat-varijansa tangentnog portfolija. Samim tim će izgubiti mogućnost da smanji varijansu portfolija, time što će da kombinuje rizični tangentni portfolio sa nerizičnim prinosom pod uslovom linearne veze.

4.5 Egzistencija višestrukih tangentnih portfolija (problem dva investitora koji imaju suprotne sklonosti ka riziku)

Pretpostavićemo sada da postoje investitori čija sklonost ka riziku nije nulta, odnosno čija averzija prema riziku ne teži beskonačnosti. Neka takvi investitori, iz razloga nepristrasnosti, zadovoljavaju kriterijum C6 za izbor portfolija, dakle potrebno je da njihova sklonost (i averzija) ka riziku budu jednake '1'. Dakle, formiraćemo lanac partitivnih portfolija, na identičan način prethodnom, s tom razlikom što sada uvodimo parcijalne portfolije koji nastaju kao posledica stava da postoje investitori čija je sklonost ka riziku veća od '0' (ptr > 0).

4.5.1. Formiraćemo PP2-2 koji predstavlja kombinaciju PP1-2 i akcije sa oznakom DWDP, ali sada će sklonost ka riziku investitora, biti jednaka '1'. PP2-2 je drugi u lancu i biće superioran u odnosu na PP1-1, iz razloga što ima viši nivo povrata ali ne nužno i nižu varijansu (videti Matlab Grafik 8.).

Pre nego što smo formirali PP2-2 usvojili smo stav da se radi o investitorima koji su skloni riziku, odnosno čija je averzija prema riziku jednaka '1' (videti tačka 4.2 ovog poglavlja). Postupak formiranja PP2-2 je identičan postupku koji smo primenili prilikom formiranja PP2-1. Dakle, kombinujemo različite porcije PP1-2 i akcije čija je oznaka DWDP (videti Excel tabelu, kolone od EE do EI, polja od 24 do 44). Kada izvršimo regresiju kombinovanih rezultata za PP2-2, dobijamo regresionu jednačinu koja glasi (videti Minitab regresija 2 ptr=1):

Var_2 = 0.00470745 +3.17587 * R_2 +565.421 * R_2 ^2 +0.0015324 * R_2 ^3 +0.413304 * R_2 ^4 + 59.3539* R_2 ^5 +3545.68 * R_2 ^6 (p.f.2.2)

gde:

Var_2 je varijansa PP2-2

R_2 je povrat PP2-2

S obzirom da prvi izvod funkcije (p.f.1.1) ima vrednost '1' u tački čije su koordinate (-0.003172692; 0.00032307) (koristili smo Matlab):

```
>> p = [-372769554 -6220995 -41416 -137.525 41203 130.725];

r = roots(p)

r =
```

-0.1059 + 0.0000i

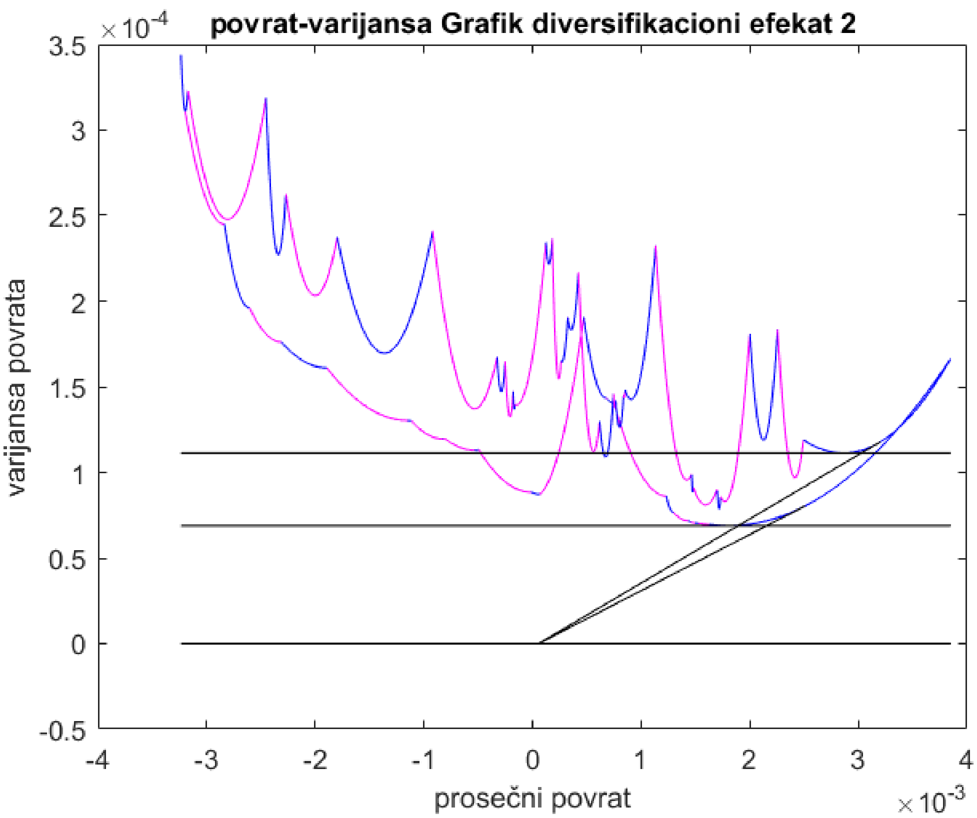
-0.0034 + 0.1025i

-0.0034 - 0.1025i

0.0992 + 0.0000i

-0.0032 + 0.0000i (-0.003172692 preciznije)

Grafik 8. Efekat diversifikacije 2



Kada vrednost argumenta (-0.003172692) uvrstimo u jednačinu (p.f.1.1) dobijamo vrednost funkcije (0.00032307), koja predstavlja vrednost varijanse u tački u kojoj je vrednost prvog izvoda regresione funkcije (p.f.1.1) jednaka '1'.

>> p = [-62128259 -1244199 -10354 -45.8417 20601.5 131.725 0.210871];

polyval(p,-0.0031727)

Var = 3.2307e-04

Dakle, koordinate tačke u kojoj će PP1-1 imati vrednost prvog izvoda jednaku '1' su (-0.003172692; 0.00032307) i ta tačka će sada predstavljati početnu tačku za formiranje PP2-2. Stoga, domen regresione funkcije (p.f.2.2) će biti [-0.003172692; -0.002445] (videti Excel tabelu, kolone od ED do EI).

S obzirom da je reč o investitoru čija je sklonost ka riziku znatno veća od '0' u ovom slučaju će i vrednosti porcija akcija GS i AAPL u PP1-2 da budu različite. Postupak za izračunavanje porcija je identičan kao i za investitora sa nultom sklonošću ka riziku. Koristićemo jednakost:

$\Pi_j = [\ R_1^1 - R_a\ (AAPL)] / [R_a\ (GS) - R_a\ (AAPL)]$

odakle je

$\Pi_j = [-0.003172692 + 0.0031027] / [-0.0032369 + 0.0031027] = [\ -0.000069992]/ [\ -0.0001342] = 0.5215499$ ili $\underline{\Pi_j \approx 0.52155}$

Stoga, iz jednačine (t.e.4) sledi

$\Pi_k = 1 - 0.5215499 = 0.4784501$ ili $\underline{\Pi_k \approx 0.47845}$.

Dakle, porcija akcije GS u PP1-2 iznosi $\Pi_j = 0.52155$, a porcija akcije AAPL iznosi $\Pi_k = 0.47845$ (videti Excel tabelu kolona DY, polje 24, i kolona DZ. polje 24). Koordinate PP1-2 u slučaju investitora čija je sklonost ka riziku jednaka '1' izračunavaju se na taj način što se vrednosti porcija, hartija od vrednosti koje učestvuju u PP1-2, pomnože sa vrednostima njihovih dnevnih povrata. (videti Excel tabela, kolona EB, polja 6 do 68).

Prvi izvod regresione krive (p.f.2.2) glasi:

$Var_2' = 3.17587 + 1130.842 * R_2 +0.0045972 * R_2$ ^2 $+1.653216 * R_2$ ^3 $+296.7695 * R_2$ ^4 +

$21274.08 * R_2$ ^5 (d.f.2.2)

Proverimo sada da li PP2-2 ima vrednost prvog izvoda jednaku '1' na domenu funkcije. Potrebno je da izračunamo vrednosti funkcije date jednačinom (d.f.2.2) na domenu funkcije. Koristićemo program Matlab.

```
>> p = [21274.08 296.7695 1.653216 0.0045972 1130.842 3.17587];

polyval(p,-0.0031727)

Var' = -0.4120

>> p = [21274.08 296.7695 1.653216 0.0045972 1130.842 3.17587];

polyval(p,-0.002445)

Var' = 0.4110
```

Dakle, vrednosti funkcije (d.f.2.2) na domenu funkcije iznose (-0.412) i (0.411) respektivno. S obzirom na to da su ove vrednosti prvog izvoda značajno manje od '1', biramo vrednost funkcije prvog izvoda koja je moguća. S obzirom da je izbor sklonosti ka riziku pristrasan, izabraćemo vrednost ptr=0.4, odnosno vrednost rav=2.5. Dobijamo jednačinu:

$0.4=3.17587 + 1130.842 * R_2 +0.0045972 * R_2$ ^2 $+1.653216 * R_2$ ^3 $+296.7695 * R_2$ ^4 +

$21274.08 * R_2$ ^5

odnosno,

$0=2.77587+ 1130.842 * R_2 +0.0045972 * R_2 \hat{}2 +1.653216 * R_2 \hat{}3 +296.7695 * R_2 \hat{}4 +$

$21274.08 * R_2 \hat{}5$

Korene ove jednačine izračunaćemo uz pomoć programa Matlab:

```
>> p = [21274.08 296.7695 1.653216 0.0045972 1130.842 2.77587];
r =roots(p)
r =
-0.3424 + 0.3395i
-0.3424 - 0.3395i
 0.3367 + 0.3395i
 0.3367 - 0.3395i
-0.0025 + 0.0000i (-0.0024542 preciznije)
```

Porcije PP1-2 i akcije DWDP u PP2-2 izračunaćemo kao i u prethodnim slučajevima. Naime, postavićemo jednačinu koja glasi:

$\Pi_j *(-0.0031727) + (1- \Pi_j) *(-0.002445)= -0.0024542$

odakle sledi

$\Pi_j \approx 0.01332$ i $\Pi_k \approx 0.98668$

Dakle, vrednosti porcija iznose Π_j(PP1-2)=0.01332 i Π_k(DWDP)=0.98668 (videti Excel tabelu, kolona EJ, polje 24, i kolona EK, polje 24).

4.5.2 Prelazimo na PP3-2 koji ćemo da formiramo na način što ćemo na PP2-2 da dodamo akciju sa oznakom IBM. Pri konstrukciji PP3-2 polazimo dakle, iz tačke čija je vrednost argumenta (-0.0024542) za koju je vrednost funkcije (d.f.2.2) jednaka 0.4, odnosno vrednost prvog izvoda regresione funkcije (p.f.2.2), koja je po definiciji i vrednost sklonosti ka riziku investitora (ili grupe) jednaka je 0.4. U ovom slučaju vrednost povrata, hartije od vrednosti sa oznakom IBM iznosi (-0.0022189) i ta vrednost predstavlja gornju granicu domena PP3-2. Dakle, domen PP3-2 je definisan povratima PP2-2 i IBM i to [-0.0024542; -0.0022189]. Koordinate PP2-2 izračunavaju se tako što se vrednosti porcija Π_j(PP1-2)=0.01332 i Π_k(DWDP)=0.98668 pomnože sa vrednostima njihovih povrata (videti Excel tabela, kolona EM, polja 6 do 68). Sada, kombinujemo različite porcije PP2-2 i akcije čija je oznaka IBM (videti Excel tabelu, kolone od EP do ET, polja od 24 do 44). Kada izvršimo regresiju kombinovanih rezultata za PP3-2, dobijamo regresionu jednačinu koja glasi (videti Minitab regresija 2 ptr=1):

$$Var_3 = 0.0391632 +33.2683 * R_3 +7106.04 * R_3 \hat{}2 +1.49871 * R_3 \hat{}3 +481.642 * R_3 \hat{}4 + 82537.7*R_3 \hat{}5 +5892368 * R_3 \hat{}6 \qquad \text{(p.f.2.3)}$$

gde:

Var_3 je varijansa PP3-2

R_3 je povrat PP3-2

Prvi izvod regresione krive (p.f.2.3) glasi:

$Var_3' = 33.2683 + 14212.86 * R_3 +4.49613 * R_3 \hat{}2 +1926.568 * R_3 \hat{}3 +412688.5 * R_3 \hat{}4 +$

35354208* R_3 ^5 (d.f.2.3)

Vrednosti funkcije prvog izvoda (d.f.2.3) na domenu [-0.0024542; -0.0022189] izračunaćemo uz pomoć programa Matlab:

```
>> p = [35354208 412688.5 1926.568 4.49613 14212.86 33.2683];

polyval(p,-0.0024542)

Var' = -1.6129

>> p = [35354208 412688.5 1926.568 4.49613 14212.86 33.2683];

polyval(p,-0.0022189)

Var' = 1.7314
```

Očigledno je da vrednost funkcije prvog izvoda (d.f.2.3) prevazilazi vrednost '1', na domenu regresione funkcije (p.f.2.3), te u ovom slučaju imamo nepristrasan izbor vrednosti argumenta i funkcije koji definišu PP3-2. Vrednost argumenta funkcije prvog izvoda (d.f.2.3) nalazimo uz pomoć programa Matlab:

```
>> p = [35354208 412688.5 1926.568 4.49613 14212.86 32.2683];

r=roots(p)

r =

  -0.1025 + 0.1001i

  -0.1025 - 0.1001i

   0.0978 + 0.1001i

   0.0978 - 0.1001i

  -0.0023 + 0.0000i  (-0.0022704 preciznije)
```

Naime, koristili smo jednačinu

1= 33.2683 + 14212.86 * R_3 +4.49613 * R_3 ^2 +1926.568 * R_3 ^3 +412688.5 * R_3 ^4 +

35354208* R_3 ^5

odnosno

0= 32.2683 + 14212.86 * R_3 +4.49613 * R_3 ^2 +1926.568 * R_3 ^3 +412688.5 * R_3 ^4 +

35354208* R_3 ^5

Kada vrednost argumenta (-0.0022704) uvrstimo u regresionu jednačinu (p.f.2.3) dobijamo vrednost funkcije, odnosno vrednost varijanse u tački u kojoj je vrednost prvog izvoda regresione funkcije jednak '1'. Ponovo ćemo da upotrebimo program Matlab:

>> p = [5892368 82537.7 481.642 1.49871 7106.43 33.2683 0.0391632];

polyval(p,-0.0022704)

Var = 2.6247e-04

Preostaje još da izračunamo porcije PP2-2 i hartije sa oznakom IBM koje ulaze u sastav PP3-2. Koristimo, slično prethodnim slučajevima jednakost:

Π_j *(-0.0024542) + (1- Π_j) *(-0.0022189)= -0.0022704

odakle sledi

$\Pi_j \approx 0.2187$ i $\Pi_k \approx 0.7813$ (videti Excel tabelu, kolone EU i EV, polja 24).

4.5.3 PP4-2 formiramo tako što na PP3-2 dodajemo akciju čija je oznaka HD. Kao i u prethodnim slučajevima domen na kojem egzistira PP4-2 određujemo na način da za donju granicu uzimamo vrednost povrata (-0.0022704) u kojem prvi izvod funkcije (p.f.2.3) ima vrednost '1', a za gornju granicu domena vrednost povrata koji je ostvarila novododata akcija sa oznakom HD. Dakle, domen na kojem egzistira PP4-2 je [-0.0022704; -0.0017966]. PP4-2 dakle, dobijamo tako što kombinujemo različite porcije PP3-2 i novododate hartije od vrednosti HD (videti Excel tabela, kolona EX, polja 6 do 68 i kolone od FA do FE, polja od 24 do 44). Regresiona kriva imaće jednačinu (videti Minitab regresija 2 ptr=1):

Var_4 = 0.00348239 +3.27679 * R_4 +818.624 * R_4 ^2 -0.00497181 * R_4 ^3 -1.83274 * R_4 ^4 - 359.814*R_4 ^5 -29392.4 * R_4 ^6 (p.f.2.4)

gde:

Var_4 je varijansa PP4-2

R_4 je povrat PP4-2

Prvi izvod regresione krive (p.f.2.4) glasi:

Var_4' = 3.27679 + 1637.248 * R_4 -0.01491543 * R_4 ^2 -7.33096 * R_4 ^3 -1799.07 * R_4 ^4 -

176354.4* R_4 ^5 (d.f.2.4)

Interval vrednosti funkcije prvog izvoda (d.f.2.4) dobićemo korišćenjem programa Matlab:

>> p = [-176354.4 -1799.07 -7.33096 -0.01491543 1637.248 3.27679];

polyval(p,-0.0022704)

Var' = -0.4404

>> p = [-176354.4 -1799.07 -7.33096 -0.01491543 1637.248 3.27679];

polyval(p,-0.0017966)

Var' = 0.3353

Dakle, s obzirom da je vrednost prvog izvoda regresione funkcije (p.f.2.4) značajno manja od '1', ponovo smo u situaciji da imamo pristrasan izbor. Stoga, biramo vrednost ptr= 0.3333 ili rav=3. Korene jednačine (d.f.2.4) u slučaju kada je Var' = 0.3333 dobićemo korišćenjem programa Matlab:

>> p = [-176354.4 -1799.07 -7.33096 -0.01491543 1637.248 2.94349];

r=roots(p)

r =

-0.3125 + 0.0000i

-0.0021 + 0.3104i

-0.0021 - 0.3104i

0.3083 + 0.0000i

-0.0018 + 0.0000i (-0.0017978 preciznije)

Porcije sa kojima PP3-2 i HD učestvuju u PP4-2 dobijamo iz jednačine:

Π_j *(-0.0022704) + (1- Π_j) *(-0.0017966)= -0.0017978
odakle sledi
$\Pi_j \approx 0.0026$ i $\Pi_k \approx 0.9974$ (videti Excel tabelu, kolone FF i FG, polja 24).

4.5.4 Sledeći po redu u rastućem poretku povrata na portfolio je PP5-2. On se konstruiše dodavanjem hartije od vrednosti sa oznakom UTX na PP4-2. Postupak je identičan prethodnim.

Domen PP5-2 je [-0.0017978; -0.0009072]. Koordinate PP4-2 (videti Excel tabela, kolona FI, polja 6 do 68) i vrednosti povrata i varijanse, dobijene kombinovanjem različitih porcija PP4-2 i akcije UTX (videti Excel tabela, kolone od FL do FP, polja od 24 do 44). Regresiona kriva glasi (videti Minitab regresija 2 ptr=1):

Var_5 = 0.000838423 +0.980395 * R_5 +359.331 * R_5 ^2 +0.000000049951 * R_5 ^3 -0.000040771 *R_5^4-0.0348081*R_5^5-7.29547*R_5^6 (p.f.2.5)

gde:

Var_5 je varijansa PP5-2

R_5 je povrat PP5-2

Prvi izvod regresione krive (p.f.2.5) glasi:

Var_5' = 0.980395 + 718.662 * R_5 +0.000000149853 * R_5 ^2 -0.000163084 * R_5 ^3 -0.1740405 * R_5^4-43.77282*R_5^5 (d.f.2.5)

Interval vrednosti funkcije prvog izvoda (d.f.2.5), korišćenjem programa Matlab, biće:

>> p = [-43.77282 -0.1740405 -0.000163084 0.000000149853 718.662 0.980395];

polyval(p,-0.0017978)

Var' = -0.3116

>> p = [-43.77282 -0.1740405 -0.000163084 0.000000149853 718.662 0.980395];

polyval(p,-0.0009072)

Var' = 0.3284

Očigledno je da ponovo imamo pristrasan izbor vrednosti sklonosti ka riziku, tako da biramo ptr=0.32, odnosno rav=3.125. Korene jednačine (d.f.2.5) pri vrednosti Var'=0.32 dobijamo uz pomoć programa Matlab:

>> p = [-43.77282 -0.1740405 -0.000163084 0.000000149853 718.662 0.660395];

r=roots(p)

r =

-2.0137 + 0.0000i

-0.0008 + 2.0129i

-0.0008 - 2.0129i

2.0122 + 0.0000i

-0.0009 + 0.0000i (-0.0009189 preciznije)

Porcije PP4-2 i UTX, koji učestvuju u PP5-2 dobijamo iz jednačine:

Π_j *(-0.0017978) + (1- Π_j) *(-0.0009072)= -0.0009189
odakle sledi
$\Pi_j \approx 0.013163$ i $\Pi_k \approx 0.986837$ (videti Excel tabelu, kolone FQ i FR, polja 24).

4.5.5 Naredni u redosledu je PP6-2. Njega ćemo da formiramo tako što dodajemo akciju JPM na PP5-2. Domen PP6-2 je [-0.0009189; -0.0003221]. Koordinate PP5-2 (videti Excel tabela, kolona FT, polja 6 do 68) i vrednosti povrata i varijanse, dobijene kombinovanjem različitih porcija PP5-2 i akcije JPM (videti Excel tabela, kolone od FW do GA, polja od 24 do 44). Regresiona kriva glasi (videti Minitab regresija 2 ptr=1):

Var_6 = 0.000335144 +0.742779 * R_6 +696.769 * R_6 ^2 -0.00000344395 * R_6 ^3 -0.00449032 *R_6^4-3.03458*R_6^5-831.727*R_6^6 (p.f.2.6)

gde:

Var_6 je varijansa PP6-2

R_6 je povrat PP6-2

Prvi izvod regresione krive (p.f.2.6) glasi:

$Var_6' = 0.742779 + 1393.538 * R_6 -0.00001033185 * R_6 ^2 -0.01796128 * R_6 ^3 -15.1729 * R_6^4-4990.362*R_6^5$ (d.f.2.6)

Interval vrednosti funkcije prvog izvoda (d.f.2.6), korišćenjem programa Matlab, biće:

>> p = [-4990.362 -15.1729 -0.01796128 -0.00001033185 1393.538 0.742779];

polyval(p,-0.0009189)

Var' = -0.5377

>> p = [-4990.362 -15.1729 -0.01796128 -0.00001033185 1393.538 0.742779];

polyval(p,-0.0003221)

Var' = 0.2939

Biramo vrednost ptr=0.29. Korene jednačine (d.f.2.6) izračunaćemo uz pomoć Matlab programa:

>> p = [-4990.362 -15.1729 -0.01796128 -0.00001033185 1393.538 0.452779];

r=roots(p)

r =

-0.7276 + 0.0000i

-0.0007 + 0.7269i

-0.0007 - 0.7269i

0.7263 + 0.0000i

-0.0003 + 0.0000i (-0.0003249 preciznije)

Porcije PP5-2 i JPM, koji učestvuju u PP6-2 imaju vrednosti: $\Pi_j \approx 0.004714$ i $\Pi_k \approx 0.995286$ (videti Excel tabelu, kolone GB i GC, polja 24).

4.5.6 PP7-2 formiraćemo dodavanjem akcije sa oznakom NKE na PP6-2. Domen PP7-2 je [-0.0003249; -0.0001818]. Vrednosti povrata i varijanse, dobijene kombinovanjem različitih porcija PP6-2 i akcije NKE (videti Excel tabela, kolone od GH do GL, polja od 24 do 44). Regresiona kriva glasi (videti Minitab regresija 2 ptr=1):

$Var_7 = 0.00130679 +8.08092 * R_7 +14077.6 * R_7 ^2 -0.000545534 * R_7 ^3 -1.44916 *R_7^4-1963.91*R_7^5-1044867*R_7^6$ (p.f.2.7)

gde:

Var_7 je varijansa PP7-2

R_7 je povrat PP7-2

Prvi izvod regresione krive (p.f.2.7) glasi:

$Var_7' = 8.08092 + 28155.2 * R_7 -0.001636602 * R_7 ^2 -5.79664 * R_7 ^3 -9819.55 * R_7^4- 6269202*R_7^5$ (d.f.2.7)

Za izračunavanje Intervala vrednosti funkcije prvog izvoda (d.f.2.7), koristimo program Matlab:

```
>> p = [-6269202 -9819.55 -5.79664 -0.001636602 28155.2 8.08092];

polyval(p,-0.0003249)

Var' = -1.0667

>> p = [-6269202 -9819.55 -5.79664 -0.001636602 28155.2 8.08092];

polyval(p,-0.0001818)

Var' = 2.9623
```

Očigledno je da postoji nepristrasan izbor, odnosno ptr=1. Korene jednačine (d.f.2.7) izračunaćemo uz pomoć Matlab programa:

```
>> p = [-6269202 -9819.55 -5.79664 -0.001636602 28155.2 7.08092];

r=roots(p)

r =

-0.2592 + 0.0000i

-0.0003 + 0.2589i

-0.0003 - 0.2589i

 0.2585 + 0.0000i

-0.0003 + 0.0000i (-0.0002515 preciznije)
```

Porcije PP6-2 i NKE, koji učestvuju u PP7-2 imaju vrednosti: $\Pi_j \approx 0.487044$ i $\Pi_k \approx 0.512956$ (videti Excel tabelu, kolone GM i GN, polja 24).

4.5.7 PP8-2 formiraćemo dodavanjem akcije sa oznakom TRV na PP7-2. Domen PP8-2 je [-0.0002515; -0.0001567]. Vrednosti povrata i varijanse, dobijene kombinovanjem različitih porcija PP7-2 i akcije TRV (videti Excel tabela, kolone od GS do GW, polja od 24 do 44). Regresiona kriva glasi (videti Minitab regresija 2 ptr=1):

$Var_8 = 0.000850038 +6.92219 * R_8 +16692.2 * R_8 ^2 +0.00766641 * R_8 ^3 +28.4146 *R_8^4+55935.6*R_8^5+45687587*R_8^6$ (p.f.2.8)

gde:

Var_8 je varijansa PP8-2

R_8 je povrat PP8-2

Prvi izvod regresione krive (p.f.2.8) glasi:

$Var_8' = 6.92219 + 33384.4 * R_8 +0.02299923 * R_8 ^2 +113.6584 * R_8 ^3 +279678 * R_8^4+274125522*R_8^5$ (d.f.2.8)

Za izračunavanje Intervala vrednosti funkcije prvog izvoda (d.f.2.8), koristimo program Matlab:

```
>> p = [274125522 279678 113.6584 0.02299923 33384.4 6.92219];

polyval(p,-0.0002515)

Var' = -1.474

>> p = [274125522 279678 113.6584 0.02299923 33384.4 6.92219];

polyval(p,-0.0001567)

Var' = 1.6909
```

Očigledno je da i sada postoji nepristrasan izbor, odnosno ptr=1. Korene jednačine (d.f.2.8) izračunaćemo uz pomoć Matlab programa:

```
>> p = [274125522 279678 113.6584 0.02299923 33384.4 5.92219];

r=roots(p)

r =

-0.0745 + 0.0743i

-0.0745 - 0.0743i

 0.0741 + 0.0743i

 0.0741 - 0.0743i

-0.0002 + 0.0000i (-0.0001774 preciznije)
```

Porcije PP7-2 i TRV, koji učestvuju u PP8-2 imaju vrednosti: $\Pi_j \approx 0.2183$ i $\Pi_k \approx 0.7817$ (videti Excel tabelu, kolone GX i GY, polja 24).

4.5.8 Prelazimo sada na PP9-2 koji ćemo da formiramo dodavanjem akcije sa oznakom V na PP8-2. Domen PP9-2 je [-0.0001774; -0.000113]. Vrednosti povrata i varijanse, dobijene kombinovanjem različitih porcija PP8-2 i akcije V (videti Excel tabela, kolone od HD do HH, polja od 24 do 44). Regresiona kriva glasi (videti Minitab regresija 2 ptr=1):

$Var_9 = 0.00252184 +28.6798 * R_9 +86215.6 * R_9 ^2 -0.0246949 * R_9 ^3 -125.157 *R_9^4-335835*R_9^5-372699030*R_9^6$ (p.f.2.9)

gde:

Var_9 je varijansa PP9-2

R_9 je povrat PP9-2

Prvi izvod regresione krive (p.f.2.9) glasi:

Var_9' = 28.6798 + 172431.2 * R_9 -0.0740847 * R_9 ^2 -500.628 * R_9 ^3 -1679175 * R_9^4-2236194180*R_9^5 (d.f.2.9)

Za izračunavanje intervala vrednosti funkcije prvog izvoda (d.f.2.9), koristimo program Matlab:

```
>> p = [-2236194180 -1679175 -500.628 -0.0740847 172431.2 28.6798];

polyval(p,-0.0001774)

Var' = -1.9095

>> p = [-2236194180 -1679175 -500.628 -0.0740847 172431.2 28.6798];

polyval(p,-0.000113)

Var' = 9.1951
```

Očigledno je da i sada postoji nepristrasan izbor, odnosno ptr=1. Korene jednačine (d.f.2.9) izračunaćemo uz pomoć Matlab programa:

```
>> p = [-2236194180 -1679175 -500.628 -0.0740847 172431.2 27.6798];

r=roots(p)

r =

-0.0939 + 0.0000i

-0.0001 + 0.0937i

-0.0001 - 0.0937i

 0.0936 + 0.0000i

-0.0002 + 0.0000i (-0.0001605 preciznije)
```

Porcije PP8-2 i V, koji učestvuju u PP9-2 imaju vrednosti: $\Pi_j \approx 0.738$ i $\Pi_k \approx 0.262$ (videti Excel tabelu, kolone HI i HJ, polja 24).

4.5.9 Naredni u redosledu je PP10-2 koji ćemo da formiramo dodavanjem akcije sa oznakom MMM na PP9-2. Domen PP10-2 je [-0.0001605; 0.0001336]. Vrednosti povrata i varijanse, dobijene kombinovanjem različitih porcija PP9-2 i akcije MMM (videti Excel tabela, kolone od HO do HS, polja od 24 do 44). Regresiona kriva glasi (videti Minitab regresija 2 ptr=1):

Var_{10} = 0.000167267 +0.378981 * R_{10} +1288.34 * R_{10} ^2 +0.0000000292791 * R_{10} ^3 +0.0013042*R_{10}^4-1.57318*R_{10}^5-38361.4*R_{10}^6 (p.f.2.10)

gde:

Var_{10} je varijansa PP10-2

R_{10} je povrat PP10-2

Prvi izvod regresione krive (p.f.2.10) glasi:

Var_{10}' = 0.378981 + 2576.68 * R_{10} +0.0000000878373 * R_{10} ^2 +0.0052168 * R_{10} ^3 -7.8659 * R_{10}^4-230168.4*R_{10}^5 (d.f.2.10)

Za izračunavanje Intervala vrednosti funkcije prvog izvoda (d.f.2.10), koristimo program Matlab:

```
>> p = [-230168.4 -7.8659 0.0052168 0.0000000878373 2576.68 0.378981];

polyval(p,-0.0001605)

Var' = -0.0346

>> p = [-230168.4 -7.8659 0.0052168 0.0000000878373 2576.68 0.378981];

polyval(p,0.0001336)

Var' = 0.7232
```

Očigledno je da ne postoji nepristrasan izbor, stoga biramo ptr=0.7, odnosno rav=1.42857. Korene jednačine (d.f.2.10) izračunaćemo uz pomoć Matlab programa:

```
>> p = [-230168.4 -7.8659 0.0052168 0.0000000878373 2576.68 -0.321019];

r=roots(p)

r =

-0.3253 + 0.0000i

-0.0000 + 0.3253i

-0.0000 - 0.3253i

 0.3252 + 0.0000i

 0.0001 + 0.0000i (0.0001246 preciznije)
```

Porcije PP9-2 i MMM, koji učestvuju u PP10-2 imaju vrednosti: $\Pi_j \approx 0.030636$ i $\Pi_k \approx 0.969364$ (videti Excel tabelu, kolone HT i HU, polja 24).

4.5.10 Naredni u redosledu je PP11-2 koji ćemo da formiramo dodavanjem akcije sa oznakom MSFT na PP10-2. Domen PP11-2 je [0.0001246; 0.0002572]. Vrednosti povrata i varijanse, dobijene kombinovanjem različitih porcija PP10-2 i akcije MSFT (videti Excel tabela, kolone od HZ do ID, polja od 24 do 44). Regresiona kriva glasi (videti Minitab regresija 2 ptr=1):

Var_{11} = 0.000608747 -5.08665 * R_{11} +16714.4 * R_{11} ^2 +0.001221 * R_{11} ^3 -4.73224*R_{11}^4+9650.07*R_{11}^5-8089055*R_{11}^6 (p.f.2.11)

gde:

Var_{11} je varijansa PP11-2

R_{11} je povrat PP11-2

Prvi izvod regresione krive (p.f.2.11) glasi:

Var_{11}' = -5.08665 + 33428.8 * R_{11} +0.003663 * R_{11} ^2 -18.92896 * R_{11} ^3 +48250.35 * R_{11}^4-48534330*R_{11}^5 (d.f.2.11)

Za izračunavanje Intervala vrednosti funkcije prvog izvoda (d.f.2.11), koristimo program Matlab:

>> p = [-48534330 48250.35 -18.92896 0.003663 33428.8 -5.08665];

polyval(p,0.0001246)

Var' = -0.9214

>> p = [-48534330 48250.35 -18.92896 0.003663 33428.8 -5.08665];

polyval(p,0.0002572)

Var' = 3.5112

Očigledno je da sada postoji nepristrasan izbor, stoga biramo ptr=1, odnosno rav=1. Korene jednačine (d.f.2.11) izračunaćemo uz pomoć Matlab programa:

>> p = [-48534330 48250.35 -18.92896 0.003663 33428.8 -6.08665];

r=roots(p)

r =

0.1622 + 0.0000i

0.0002 + 0.1620i

0.0002 - 0.1620i

-0.1618 + 0.0000i

0.0002 + 0.0000i (0.0001821 preciznije)

Porcije PP10-2 i MSFT, koji učestvuju u PP11-2 imaju vrednosti: $\Pi_j \approx 0.566516$ i $\Pi_k \approx 0.433484$ (videti Excel tabelu, kolone IE i IF, polja 24).

4.5.11 Naredni u redosledu je PP12-2 koji ćemo da formiramo dodavanjem akcije sa oznakom XOM na PP11-2. Domen PP12-2 je [0.0001821; 0.0002686]. Vrednosti povrata i varijanse, dobijene kombinovanjem različitih porcija PP11-2 i akcije XOM (videti Excel tabela, kolone od IK do IO, polja od 24 do 44). Regresiona kriva glasi (videti Minitab regresija 2 ptr=1):

Var_{12} = 0.00149548 -11.0824 * R_{12} +22895.3 * R_{12} ^2 -0.0654279 * R_{12} ^3 +215.099*R_{12}^4-375891*R_{12}^5+272817327*R_{12}^6 (p.f.2.12)

gde:

Var_{12} je varijansa PP12-2

R_{12} je povrat PP12-2

Prvi izvod regresione krive (p.f.2.12) glasi:

$Var_{12}' = -11.0824 + 45790.6 * R_{12} -0.1962837 * R_{12}$ ^2 +860.396 * R_{12} ^3 -1879455 * R_{12}^4+1636903962*R_{12}^5 (d.f.2.12)

Za izračunavanje Intervala vrednosti funkcije prvog izvoda (d.f.2.12), koristimo program Matlab:

```
>> p = [1636903962 -1879455.35 860.396 -0.1962837 45790.6 -11.0824];
polyval(p,0.0001821)
Var' = -2.7439
>> p = [1636903962 -1879455.35 860.396 -0.1962837 45790.6 -11.0824];
polyval(p,0.0002686)
Var' = 1.217
```

Očigledno je da i sada postoji nepristrasan izbor, stoga je ptr=1, odnosno rav=1. Korene jednačine (d.f.2.12) izračunaćemo uz pomoć Matlab programa:

```
>> p = [1636903962 -1879455.35 860.396 -0.1962837 45790.6 -12.0824];
r=roots(p)
r =
 0.0516 + 0.0514i
 0.0516 - 0.0514i
-0.0512 + 0.0514i
-0.0512 - 0.0514i
 0.0003 + 0.0000i (0.0002638 preciznije)
```

Porcije PP11-2 i XOM, koji učestvuju u PP12-2 imaju vrednosti: $\Pi_j \approx 0.054775$ i $\Pi_k \approx 0.945225$ (videti Excel tabelu, kolone IP i IQ, polja 24).

4.5.12 Naredni u redosledu je PP13-2 koji ćemo da formiramo dodavanjem akcije sa oznakom CVX na PP12-2. Domen PP13-2 je [0.0002638; 0.0003577]. Vrednosti povrata i varijanse, dobijene kombinovanjem različitih porcija PP12-2 i akcije CVX (videti Excel tabela, kolone od IV do IZ, polja od 24 do 44). Regresiona kriva glasi (videti Minitab regresija 2 ptr=1):

Var_{13} = 0.000916253 -5.50904 * R_{13} +10092 * R_{13} ^2 +0.000222908 * R_{13} ^3 +0.607677*R_{13}^4-2274.44*R_{13}^5+2023759*R_{13}^6 (p.f.2.13)

gde:

Var_{13} je varijansa PP13-2

R_{13} je povrat PP13-2

Prvi izvod regresione krive (p.f.2.13) glasi:

$Var_{13}' = -5.50904 + 20184 * R_{13} +0.000668724 * R_{13}$ ^2 +2.430708 * R_{13} ^3 -11372.2 * R_{13}^4+12142554*R_{13}^5 (d.f.2.13)

Za izračunavanje Intervala vrednosti funkcije prvog izvoda (d.f.2.13), koristimo program Matlab:

```
>> p = [12142554 -11372.2 2.430708 0.000668724 20184 -5.50904];

polyval(p,0.0002638)

Var' = -0.1845

>> p = [12142554 -11372.2 2.430708 0.000668724 20184 -5.50904];

polyval(p,0.0003577)

Var' = 1.7108
```

Očigledno je da i sada postoji nepristrasan izbor, stoga je ptr=1, odnosno rav=1. Korene jednačine (d.f.2.13) izračunaćemo uz pomoć Matlab programa:

```
>> p = [12142554 -11372.2 2.430708 0.000668724 20184 -6.50904];

r=roots(p)

r =

 0.1429 + 0.1428i

 0.1429 - 0.1428i

-0.1426 + 0.1428i

-0.1426 - 0.1428i

 0.0003 + 0.0000i (0.0003225 preciznije)
```

Porcije PP12-2 i CVX, koji učestvuju u PP13-2 imaju vrednosti: $\Pi_j \approx 0.375$ i $\Pi_k \approx 0.625$ (videti Excel tabelu, kolone JA i JB, polja 24).

4.5.13 Naredni u redosledu je PP14-2 koji ćemo da formiramo dodavanjem akcije sa oznakom CAT na PP13-2. Domen PP14-2 je [0.0003225; 0.0003679]. Vrednosti povrata i varijanse, dobijene kombinovanjem različitih porcija PP13-2 i akcije CAT (videti Excel tabela, kolone od JG do JK, polja od 24 do 44). Regresiona kriva glasi (videti Minitab regresija 2 ptr=1):

Var_{14} = 0.0184808 -113.744 * R_{14} +176826 * R_{14} ^2 -33.8715 * R_{14} ^3 +74946.5*R_{14}^4-88368069.9.44*R_{14}^5+43377362589*R_{14}^6 (p.f.2.14)

gde:

Var_{14} je varijansa PP14-2

R_{14} je povrat PP14-2

Prvi izvod regresione krive (p.f.2.14) glasi:

Var_{14}' = -113.744 + 353652 * R_{14} -101.6145 * R_{14} ^2 +299786 * R_{14} ^3 -441840349.5 * R_{14}^4+260264175534*R_{14}^5 (d.f.2.14)

Za izračunavanje Intervala vrednosti funkcije prvog izvoda (d.f.2.14), koristimo program Matlab:

```
>> p = [260264175534 -441840349.5 299786 -101.6145 353652 -113.744];

polyval(p,0.0003225)

Var' = 0.3088

>> p = [260264175534 -441840349.5 299786 -101.6145 353652 -113.744];

polyval(p,0.0003679)

Var' = 16.3646
```

Očigledno je da i sada postoji nepristrasan izbor, stoga je ptr=1, odnosno rav=1. Korene jednačine (d.f.2.14) izračunaćemo uz pomoć Matlab programa:

```
>> p = [260264175534 -441840349.5 299786 -101.6145 353652 -114.744];

r=roots(p)

r =

 0.0245 + 0.0241i

 0.0245 - 0.0241i

-0.0238 + 0.0241i

-0.0238 - 0.0241i

 0.0003 + 0.0000i (0.0003244 preciznije)
```

Porcije PP13-2 i CAT, koji učestvuju u PP14-2 imaju vrednosti: $\Pi_j \approx 0.956938326$ i $\Pi_k \approx 0.043061674$ (videti Excel tabelu, kolone JL i JM, polja 24).

4.5.14 Naredni u redosledu je PP15-2 koji ćemo da formiramo dodavanjem akcije sa oznakom CSCO na PP14-2. Domen PP15-2 je [0.0003244; 0.000488]. Vrednosti povrata i varijanse, dobijene kombinovanjem različitih porcija PP14-2 i akcije CSCO (videti Excel tabela, kolone od JR do JV, polja od 24 do 44). Regresiona kriva glasi (videti Minitab regresija 2 ptr=1):

Var_{15} = 0.00111835 -5.25586 * R_{15} +7384.61 * R_{15} ^2 +0.00695475 * R_{15} ^3 -13.1984*R_{15}^4+13299.3*R_{15}^5-5558755*R_{15}^6 (p.f.2.15)

gde:

Var_{15} je varijansa PP15-2

R_{15} je povrat PP15-2

Prvi izvod regresione krive (p.f.2.15) glasi:

Var_{15}' = -5.25586 + 14769.22 * R_{15} +0.02086425 * R_{15} ^2 -52.7936 * R_{15} ^3 +66496.5 * R_{15}^4-33352530*R_{15}^5 (d.f.2.15)

Za izračunavanje Intervala vrednosti funkcije prvog izvoda (d.f.2.15), koristimo program Matlab:

>> p = [-33352530 66496.5 -52.7936 0.02086425 14769.22 -5.25586];

polyval(p,0.0003244)

Var' = -0.4647

>> p = [-33352530 66496.5 -52.7936 0.02086425 14769.22 -5.25586];

polyval(p,0.000488)

Var' = 1.9515

Očigledno je da i sada postoji nepristrasan izbor, stoga je ptr=1, odnosno rav=1. Korene jednačine (d.f.2.15) izračunaćemo uz pomoć Matlab programa:

>> p = [-33352530 66496.5 -52.7936 0.02086425 14769.22 -6.25586];

r=roots(p)

r =

0.1455 + 0.0000i

0.0004 + 0.1451i

0.0004 - 0.1451i

-0.1447 + 0.0000i

0.0004 + 0.0000i (0.0004236 preciznije)

Porcije PP14-2 i CSCO, koji učestvuju u PP15-2 imaju vrednosti: $\Pi_j \approx 0.3938$ i $\Pi_k \approx 0.6062$ (videti Excel tabelu, kolone JW i JX, polja 24).

4.5.15 Sledeći u redosledu je PP16-2 koji ćemo da formiramo dodavanjem akcije sa oznakom WMT na PP15-2. Domen PP16-2 je [0.0004236; 0.0006202]. Vrednosti povrata i varijanse, dobijene kombinovanjem različitih porcija PP15-2 i akcije WMT (videti Excel tabela, kolone od KC do KG, polja od 24 do 44). Regresiona kriva glasi (videti Minitab regresija 2 ptr=1):

Var_{16} = 0.00185219 -6.19937 * R_{16} +5521.69 * R_{16} ^2 -0.00113767 * R_{16} ^3 +1.59792*R_{16}^4-1192.22*R_{16}^5+369117*R_{16}^6 (p.f.2.16)

gde:

Var_{16} je varijansa PP16-2

R_{16} je povrat PP16-2

Prvi izvod regresione krive (p.f.2.16) glasi:

Var_{16}' = -6.19937 + 11043.38 * R_{16} -0.00341301 * R_{16} ^2 +6.39168 * R_{16} ^3 -5961.1 * R_{16}^4+2214702*R_{16}^5 (d.f.2.16)

Za izračunavanje Intervala vrednosti funkcije prvog izvoda (d.f.2.16), koristimo program Matlab:

```
>> p = [2214702 -5961.1 6.39168 -0.00341301 11043.38 -6.19937];

polyval(p,0.0004236)

Var' = -1.5214

>> p = [2214702 -5961.1 6.39168 -0.00341301 11043.38 -6.19937];

polyval(p,0.0006202)

Var' = 0.6497
```

Očigledno je da ne postoji nepristrasan izbor, stoga biramo ptr=0.625, odnosno rav=1.6. Korene jednačine (d.f.2.16) izračunaćemo uz pomoć Matlab programa:

```
>> p = [2214702 -5961.1 6.39168 -0.00341301 11043.38 -6.82437];

r=roots(p)

r =

 0.1884 + 0.1879i

 0.1884 - 0.1879i

-0.1874 + 0.1879i

-0.1874 - 0.1879i

 0.0006 + 0.0000i (0.000618 preciznije)
```

Porcije PP15-2 i WMT, koji učestvuju u PP16-2 imaju vrednosti: $\Pi_j \approx 0.0113937$ i $\Pi_k \approx 0.9886063$ (videti Excel tabelu, kolone KH i KI, polja 24).

4.5.16 Sledeći u redosledu je PP17-2 koji ćemo da formiramo dodavanjem akcije sa oznakom DIS na PP16-2. Domen PP17-2 je [0.000618; 0.0007783]. Vrednosti povrata i varijanse, dobijene kombinovanjem različitih porcija PP16-2 i akcije DIS (videti Excel tabela, kolone od KN do KR, polja od 24 do 44). Regresiona kriva glasi (videti Minitab regresija 2 ptr=1):

Var_{17} = 0.00318809 -9.14573 * R_{17} +6791.43 * R_{17} ^2 -0.0131935 * R_{17} ^3 +14.6906*R_{17}^4-8691.79*R_{17}^5+2134927*R_{17}^6 (p.f.2.17)

gde:

Var_{17} je varijansa PP17-2

R_{17} je povrat PP17-2

Prvi izvod regresione krive (p.f.2.17) glasi:

Var_{17}' = -9.14573 + 13582.86 * R_{17} -0.0395805 * R_{17} ^2 +58.762 * R_{17} ^3 -43458.95 * R_{17}^4+12809562*R_{17}^5 (d.f.2.17)

Za izračunavanje Intervala vrednosti funkcije prvog izvoda (d.f.2.17), koristimo program Matlab:

>> p = [12809562 -43458.95 58.762 -0.0395805 13582.86 -9.14573];

polyval(p,0.000618)

Var' = -0.7515

>> p = [12809562 -43458.95 58.762 -0.0395805 13582.86 -9.14573];

polyval(p,0.0007783)

Var' = 1.4258

Jasno je da postoji nepristrasan izbor, stoga je ptr=1, odnosno rav=1. Korene jednačine (d.f.2.17) pri uslovu ptr=1, izračunaćemo uz pomoć Matlab programa:

>> p = [12809562 -43458.95 58.762 -0.0395805 13582.86 -10.14573];

r=roots(p)

r =

0.1283 + 0.1276i

0.1283 - 0.1276i

-0.1269 + 0.1276i

-0.1269 - 0.1276i

0.0007 + 0.0000i (0.0007469 preciznije)

Porcije PP16-2 i DIS, koji učestvuju u PP17-2 imaju vrednosti: $\Pi_j \approx 0.19557$ i $\Pi_k \approx 0.80443$ (videti Excel tabelu, kolone KS i KT, polja 24).

4.5.17 Sledeći u redosledu je PP18-2 koji ćemo da formiramo dodavanjem akcije sa oznakom BA na PP17-2. Domen PP18-2 je [0.0007469; 0.0008254]. Vrednosti povrata i varijanse, dobijene kombinovanjem različitih porcija PP17-2 i akcije BA (videti Excel tabela, kolone od KY do LC, polja od 24 do 44). Regresiona kriva glasi (videti Minitab regresija 2 ptr=1):

$$Var_{18} = 0.0355191 - 93.3168 * R_{18} + 61529.8 * R_{18}\text{^}2 - 26.6985 * R_{18}\text{^}3 + 25156.9 * R_{18}\text{^}4 - 12638583.79 * R_{18}\text{^}5 + 2644858899 * R_{18}\text{^}6 \qquad \text{(p.f.2.18)}$$

gde:

Var_{18} je varijansa PP18-2

R_{18} je povrat PP18-2

Prvi izvod regresione krive (p.f.2.18) glasi:

$$Var_{18}' = -93.3168 + 123059.6 * R_{18} - 80.0955 * R_{18}\text{^}2 + 100627.6 * R_{18}\text{^}3 - 63192915 * R_{18}\text{^}4 + 15869153394 * R_{18}\text{^}5 \qquad \text{(d.f.2.18)}$$

Za izračunavanje Intervala vrednosti funkcije prvog izvoda (d.f.2.18), koristimo program Matlab:

```
>> p = [15869153394 -63192915 100627.6 -80.0955 123059.6 -93.3168];

polyval(p,0.0007469)

Var' = -1.4036

>> p = [15869153394 -63192915 100627.6 -80.0955 123059.6 -93.3168];

polyval(p,0.0008254)

Var' = 8.2566
```

Jasno je da i u ovom slučaju postoji nepristrasan izbor, stoga je ptr=1, odnosno rav=1. Korene jednačine (d.f.2.18) pri uslovu ptr=1, izračunaćemo uz pomoć Matlab programa:

```
>> p = [15869153394 -63192915 100627.6 -80.0955 123059.6 -94.3168];

r=roots(p)

r =

 0.0381 + 0.0373i

 0.0381 - 0.0373i

-0.0365 + 0.0373i
```

-0.0365 - 0.0373i

0.0008 + 0.0000i (0.0007664 preciznije)

Porcije PP17-2 i BA, koji učestvuju u PP18-2 imaju vrednosti: $\Pi_j \approx 0.7511847$ i $\Pi_k \approx 0.2488153$ (videti Excel tabelu, kolone LD i LE, polja 24).

4.5.18 Sledeći u redosledu je PP19-2 koji ćemo da formiramo dodavanjem akcije sa oznakom AXP na PP18-2. Domen PP19-2 je [0.0007664; 0.0008647]. Vrednosti povrata i varijanse, dobijene kombinovanjem različitih porcija PP18-2 i akcije AXP (videti Excel tabela, kolone od LJ do LN, polja od 24 do 44). Regresiona kriva glasi (videti Minitab regresija 2 ptr =1):

$$Var_{19} = 0.00863904 - 21.262 * R_{19} + 13276.4 * R_{19}\text{^}2 + 5.55751 * R_{19}\text{^}3 - 5124.92 * R_{19}\text{^}4 + 2519950 * R_{19}\text{^}5 - 516160267 * R_{19}\text{^}6 \quad \text{(p.f.2.19)}$$

gde:

Var_{19} je varijansa PP19-2

R_{19} je povrat PP19-2

Prvi izvod regresione krive (p.f.2.19) glasi:

$$Var_{19}' = -21.262 + 26552.8 * R_{19} + 16.67253 * R_{19}\text{^}2 - 20499.68 * R_{19}\text{^}3 + 12599750 * R_{19}\text{^}4 - 3096961602 * R_{19}\text{^}5 \quad \text{(d.f.2.19)}$$

Za izračunavanje Intervala vrednosti funkcije prvog izvoda (d.f.2.19), koristimo program Matlab:

```
>> p = [-3096961602 12599750 -20499.68 16.67253 26552.8 -21.262];

polyval(p,0.0007664)

Var' = -0.9119

>> p = [-3096961602 12599750 -20499.68 16.67253 26552.8 -21.262];

polyval(p,0.0008647)

Var' = 1.6982
```

Jasno je da i u ovom slučaju postoji nepristrasan izbor, stoga je ptr=1, odnosno rav =1. Korene jednačine (d.f.2.19) pri uslovu ptr=1, izračunaćemo uz pomoć Matlab programa:

```
>> p = [-3096961602 12599750 -20499.68 16.67253 26552.8 -22.262];

r=roots(p)

r =

 0.0549 + 0.0000i

 0.0008 + 0.0541i
```

0.0008 - 0.0541i

-0.0533 + 0.0000i

0.0008 + 0.0000i (0.0008384 preciznije)

Porcije PP18-2 i AXP, koji učestvuju u PP19-2 imaju vrednosti: $\Pi_j \approx 0.2675$ i $\Pi_k \approx 0.7325$ (videti Excel tabelu, kolone LO i LP, polja 24).

4.5.19 Sledeći u redosledu je PP20-2 koji ćemo da formiramo dodavanjem akcije sa oznakom INTC na PP19-2. Domen PP20-2 je [0.0008384; 0.0009161]. Vrednosti povrata i varijanse, dobijene kombinovanjem različitih porcija PP19-2 i akcije INTC (videti Excel tabela, kolone od LU do LY, polja od 24 do 44). Regresiona kriva glasi (videti Minitab regresija 2 ptr =1):

Var_{20} = 0.0390876 -92.2939 * R_{20} +54682 * R_{20} ^2 -257.528 * R_{20} ^3 +220442*R_{20}^4-100618275*R_{20}^5+19132073111*R_{20}^6 (p.f.2.20)

gde:

Var_{20} je varijansa PP20-2

R_{20} je povrat PP20-2

Prvi izvod regresione krive (p.f.2.20) glasi:

Var_{20}' = -92.2939 + 109364 * R_{20} -772.584 * R_{20} ^2 +881768 * R_{20} ^3 -503091375 * R_{20}^4+114792438666*R_{20}^5 (d.f.2.20)

Za izračunavanje Intervala vrednosti funkcije prvog izvoda (d.f.2.20), koristimo program Matlab:

>> p = [114792438666 -503091375 881768 -772.584 109364 -92.2939];

polyval(p,0.0008384)

Var' = -0.6033

>> p = [114792438666 -503091375 881768 -772.584 109364 -92.2939];

polyval(p,0.0009161)

Var' = 7.8942

Očigledno je da i u ovom slučaju postoji nepristrasan izbor, stoga je ptr =1, odnosno rav =1. Korene jednačine (d.f.2.20) pri uslovu ptr=1, izračunaćemo uz pomoć Matlab programa:

>> p = [114792438666 -503091375 881768 -772.584 109364 -93.2939];

r=roots(p)

r =

0.0230 + 0.0221i

0.0230 - 0.0221i

-0.0212 + 0.0221i

-0.0212 - 0.0221i

0.0009 + 0.0000i (0.0008531 preciznije)

Porcije PP19-2 i INTC, koji učestvuju u PP20-2 imaju vrednosti: $\Pi_j \approx 0.8113256$ i $\Pi_k \approx 0.1886744$ (videti Excel tabelu, kolone LZ i MA, polja 24).

4.5.20 Sledeći u redosledu je PP21-2 koji ćemo da formiramo dodavanjem akcije sa oznakom UNH na PP20-2. Domen PP21-2 je [0.0008531; 0.0011379]. Vrednosti povrata i varijanse, dobijene kombinovanjem različitih porcija PP20-2 i akcije UNH (videti Excel tabela, kolone od MF do MJ, polja od 24 do 44). Regresiona kriva glasi (videti Minitab regresija 2 ptr=1):

Var_{21} = 0.00161314 -3.23677 * R_{21} +1781.05 * R_{21} ^2 +0.0000822338 * R_{21} ^3 -0.130776*R_{21}^4+80.0834*R_{21}^5-17965.4*R_{21}^6 (p.f.2.21)

gde:

Var_{21} je varijansa PP21-2

R_{21} je povrat PP21-2

Prvi izvod regresione krive (p.f.2.21) glasi:

Var_{21}' = -3.23677 + 3562.1 * R_{21} +0.0002467014 * R_{21} ^2 -0.523104 * R_{21} ^3 +400.417 * R_{21}^4-107792*R_{21}^5 (d.f.2.21)

Za izračunavanje Intervala vrednosti funkcije prvog izvoda (d.f.2.21), koristimo program Matlab:

```
>> p = [-107792 400.417 -0.523104 0.0002467014 3562.1 -3.23677];

polyval(p,0.0008531)

Var' = -0.1979

>> p = [-107792 400.417 -0.523104 0.0002467014 3562.1 -3.23677];

polyval(p,0.0011379)

Var' = 0.8165
```

Očigledno je da u ovom slučaju ne postoji nepristrasan izbor, stoga biramo ptr=0.8, odnosno rav=1.25. Korene jednačine (d.f.2.21) pri uslovu ptr=0.8, izračunaćemo uz pomoć Matlab programa:

```
>> p = [-107792 400.417 -0.523104 0.0002467014 3562.1 -4.03677];

r=roots(p)

r =
```

0.4270 + 0.0000i

0.0006 + 0.4264i

0.0006 - 0.4264i

-0.4257 + 0.0000i

0.0011 + 0.0000i (0.0011333 preciznije)

Porcije PP20-2 i UNH, koji učestvuju u PP21-2 imaju vrednosti: $\Pi_j \approx 0.01630618$ i $\Pi_k \approx 0.98369382$ (videti Excel tabelu, kolone MK i ML, polja 24).

4.5.21 Sledeći u redosledu je PP22-2 koji ćemo da formiramo dodavanjem akcije sa oznakom JNJ na PP21-2. Domen PP22-2 je [0.0011333; 0.0014681]. Vrednosti povrata i varijanse, dobijene kombinovanjem različitih porcija PP21-2 i akcije JNJ (videti Excel tabela, kolone od MQ do MU, polja od 24 do 44). Regresiona kriva glasi (videti Minitab regresija 2 ptr =1):

Var_{22} = 0.00343711 -4.70366 * R_{22} +1655.24 * R_{22} ^2 +0.00394307 * R_{22} ^3 - 2.26784*R_{22}^4+693.841*R_{22}^5-88220.1*R_{22}^6 (p.f.2.22)

gde:

Var_{22} je varijansa PP22-2

R_{22} je povrat PP22-2

Prvi izvod regresione krive (p.f.2.22) glasi:

Var_{22}' = -4.70366 + 3310.48 * R_{22} +0.01182921 * R_{22} ^2 -9.07136 * R_{22} ^3 +3469.205 * R_{22}^4- 529320.6*R_{22}^5 (d.f.2.22)

Za izračunavanje Intervala vrednosti funkcije prvog izvoda (d.f.2.22), koristimo program Matlab:

```
>> p = [-529320.6 3469.205 -9.07136 0.01182921 3310.48 -4.70366];

polyval(p,0.0011333)

Var' = -0.9519

>> p = [-529320.6 3469.205 -9.07136 0.01182921 3310.48 -4.70366];

polyval(p,0.0014681)

Var' = 0.1565
```

Očigledno je da i u ovom slučaju ne postoji nepristrasan izbor, stoga biramo ptr =0.15, odnosno rav=6.666. Korene jednačine (d.f.2.22) pri uslovu ptr =0.15, izračunaćemo uz pomoć Matlab programa:

```
>> p = [-529320.6 3469.205 -9.07136 0.01182921 3310.48 -4.85366];

r=roots(p)
```

r =

0.2825 + 0.0000i

0.0013 + 0.2812i

0.0013 - 0.2812i

-0.2799 + 0.0000i

0.0015 + 0.0000i (0.0014662 preciznije)

Porcije PP21-2 i JNJ, koji učestvuju u PP22-2 imaju vrednosti: $\Pi_j \approx 0.0058244$ i $\Pi_k \approx 0.9941756$ (videti EXCEL tabelu, kolone MV i MW, polja 24).

4.5.22 Sledeći u redosledu je PP23-2 koji ćemo da formiramo dodavanjem akcije sa oznakom VZ na PP22-2. Domen PP23-2 je [0.0014662; 0.0015031]. Vrednosti povrata i varijanse, dobijene kombinovanjem različitih porcija PP22-2 i akcije VZ (videti Excel tabela, kolone od NB do NF, polja od 24 do 44). Regresiona kriva glasi (videti Minitab regresija 2 ptr=1):

Var_{23} = 0.23394 -317.0018 * R_{23} +107603.85 * R_{23} ^2 -235228.9 * R_{23} ^3 +118576000*R_{23}^4-31878000000*R_{23}^5+3570770000000*R_{23}^6 (p.f.2.23)

gde:

Var_{23} je varijansa PP23-2

R_{23} je povrat PP23-2

Prvi izvod regresione krive (p.f.2.23) glasi:

Var_{23}' = -317.0018 + 215207.7 * R_{23} -705686.7 * R_{23} ^2 +474304451.576 * R_{23} ^3 -159390015160.75*R_{23}^4+21424646009358.6*R_{23}^5 (d.f.2.23)

Za izračunavanje Intervala vrednosti funkcije prvog izvoda (d.f.2.23), koristimo program Matlab:

>> p = [21424646009358 -159390015160.75 474304451.576 -705686.7 215207.7 -317.0018];

polyval(p,0.0014662)

Var' = -2.0778

>> p = [21424646009358 -159390015160.75 474304451.576 -705686.7 215207.7 -317.0018];

polyval(p,0.0015031)

Var' = 5.844

Očigledno je da u ovom slučaju postoji nepristrasan izbor, stoga je ptr=1, odnosno rav=1. Korene jednačine (d.f.2.23) pri uslovu ptr=1, izračunaćemo uz pomoć Matlab programa:

>> p = [21424646009358 -159390015160.75 474304451.576 -705686.7 215207.7 -318.0018];

r=roots(p)

r =

0.0086 + 0.0071i

0.0086 - 0.0071i

-0.0056 + 0.0071i

-0.0056 - 0.0071i

0.0015 + 0.0000i (0.0014805 preciznije)

Porcije PP22-2 i VZ, koji učestvuju u PP23-2 imaju vrednosti: $\Pi_j \approx 0.6114905$ i $\Pi_k \approx 0.3885095$ (videti Excel tabelu, kolone NG i NH, polja 24).

4.5.23 Sledeći u redosledu je PP24-2 koji ćemo da formiramo dodavanjem akcije sa oznakom KO na PP23-2. Domen PP24-2 je [0.0014805; 0.0017054]. Vrednosti povrata i varijanse, dobijene kombinovanjem različitih porcija PP23-2 i akcije KO (videti Excel tabela, kolone od NM do NQ, polja od 24 do 44). Regresiona kriva glasi (videti Minitab regresija 2 ptr=1):

Var_{24} = 0.00210157 -2.5354 * R_{24} +795.351 * R_{24} ^2 +0.0221179 * R_{24} ^3 -10.3209*R_{24}^4+2568.88*R_{24}^5-266456*R_{24}^6 (p.f.2.24)

gde:

Var_{24} je varijansa PP24-2

R_{24} je povrat PP24-2

Prvi izvod regresione krive (p.f.2.24) glasi:

Var_{24}' = -2.5354 + 1590.702 * R_{24} +0.0663537 * R_{24} ^2 -41.2836 * R_{24} ^3 +12844.4*R_{24}^4-1598736*R_{24}^5 (d.f.2.24)

Za izračunavanje Intervala vrednosti funkcije prvog izvoda (d.f.2.24), koristimo program Matlab:

>> p = [-1598736 12844.4 -41.2836 0.0663537 1590.702 -2.5354];

polyval(p,0.0014805)

Var' = -0.1804

>> p = [-1598736 12844.4 -41.2836 0.0663537 1590.702 -2.5354];

polyval(p,0.0017054)

Var' = 0.1774

Očigledno je da u ovom slučaju ne postoji nepristrasan izbor, stoga biramo ptr =0.17, odnosno rav=5.882353. Korene jednačine (d.f.2.24) pri uslovu ptr =0.17, izračunaćemo uz pomoć Matlab programa:

>> p = [-1598736 12844.4 -41.2836 0.0663537 1590.702 -2.7054];

r = roots(p)

r =

0.1792 + 0.0000i

0.0016 + 0.1776i

0.0016 - 0.1776i

-0.1760 + 0.0000i

0.0017 + 0.0000i (0.0017008 preciznije)

Porcije PP23-2 i KO, koji učestvuju u PP24-2 imaju vrednosti: $\Pi_j \approx 0.0206314$ i $\Pi_k \approx 0.9793686$ (videti Excel tabelu, kolone NR i NS, polja 24).

4.5.24 Sledeći u redosledu je PP25-2 koji ćemo da formiramo dodavanjem akcije sa oznakom PFE na PP24-2. Domen PP25-2 je [0.0017008; 0.0017695]. Vrednosti povrata i varijanse, dobijene kombinovanjem različitih porcija PP24-2 i akcije PFE (videti Excel tabela, kolone od NX do OB, polja od 24 do 44). Regresiona kriva glasi (videti Minitab regresija 2 ptr=1):

$$Var_{25} = 0.106989 -124.446 * R_{25} +36214.2 * R_{25}\,\hat{}2 +205.422 * R_{25}\,\hat{}3 - 88121*R_{25}\,\hat{}4+20164840.83*R_{25}\,\hat{}5-1923031321.14*R_{25}\,\hat{}6 \quad \text{(p.f.2.25)}$$

gde:

Var_{25} je varijansa PP25-2

R_{25} je povrat PP25-2

Prvi izvod regresione krive (p.f.2.25) glasi:

$$Var_{25}' = -124.446 + 72428.4 * R_{25} +616.266 * R_{25}\,\hat{}2 -352484 * R_{25}\,\hat{}3 +100824204.15*R_{25}\,\hat{}4- 11538187926.84*R_{25}\,\hat{}5 \quad \text{(d.f.2.25)}$$

Za izračunavanje Intervala vrednosti funkcije prvog izvoda (d.f.2.25), koristimo program Matlab:

```
>> p = [-11538187926.84 100824204.15 -352484 616.266 72428.4 -124.446];

polyval(p,0.0017008)

Var' = -1.259

>> p = [-11538187926.84 100824204.15 -352484 616.266 72428.4 -124.446];

polyval(p,0.0017695)

Var' = 3.7168
```

Očigledno je da u ovom slučaju postoji nepristrasan izbor, stoga je ptr =1, odnosno rav =1. Korene jednačine (d.f.2.25) pri uslovu ptr =1, izračunaćemo uz pomoć Matlab programa:

```
>> p = [-11538187926.84 100824204.15 -352484 616.266 72428.4 -125.446];

r=roots(p)

r =
 0.0518 + 0.0000i
```

0.0018 + 0.0501i

0.0018 - 0.0501i

-0.0483 + 0.0000i

0.0017 + 0.0000i (0.001732 preciznije)

Porcije PP24-2 i PFE, koji učestvuju u PP25-2 imaju vrednosti: $\Pi_j \approx 0.546$ i $\Pi_k \approx 0.454$ (videti Excel tabelu, kolone OC i OD, polja 24).

4.5.25 Sledeći u redosledu je PP26-2 koji ćemo da formiramo dodavanjem akcije sa oznakom PG na PP25-2. Domen PP26-2 je [0.001732; 0.0020127]. Vrednosti povrata i varijanse, dobijene kombinovanjem različitih porcija PP25-2 i akcije PG (videti Excel tabela, kolone od OI do OM, polja od 24 do 44). Regresiona kriva glasi (videti Minitab regresija 2 ptr =1):

Var_{26} = 0.00589453 -6.56052 * R_{26} +1851.54 * R_{26} ^2 -0.0303545 * R_{26} ^3 +12.3021*R_{26}^4-2656.22*R_{26}^5+238715.33*R_{26}^6 (p.f.2.26)

gde:

Var_{26} je varijansa PP26-2

R_{26} je povrat PP26-2

Prvi izvod regresione krive (p.f.2.26) glasi:

Var_{26}' = -6.56052 + 3703.08 * R_{26} -0.0910635 * R_{26} ^2 +49.2084 * R_{26} ^3 -13281.1*R_{26}^4+1432291.98*R_{26}^5 (d.f.2.26)

Za izračunavanje Intervala vrednosti funkcije prvog izvoda (d.f.2.26), koristimo program Matlab:

>> p = [1432291.98 -13281.1 49.2084 -0.0910635 3703.08 -6.56052];

polyval(p,0.001732)

Var' = -0.1468

>> p = [1432291.98 -13281.1 49.2084 -0.0910635 3703.08 -6.56052];

polyval(p,0.0020127)

Var' = 0.8927

Očigledno je da u ovom slučaju ne postoji nepristrasan izbor, stoga biramo ptr =0.85, odnosno rav=1.176470588. Korene jednačine (d.f.2.26) pri uslovu ptr =0.85, izračunaćemo uz pomoć Matlab programa:

>> p = [1432291.98 -13281.1 49.2084 -0.0910635 3703.08 -7.41052];

r = roots(p)

r =

0.1613 + 0.1594i

0.1613 - 0.1594i

-0.1576 + 0.1594i

-0.1576 - 0.1594i

0.0020 + 0.0000i (0.0020012 preciznije)

Porcije PP25-2 i PG, koji učestvuju u PP26-2 imaju vrednosti: $\Pi_j \approx 0.04105$ i $\Pi_k \approx 0.95895$ (videti Excel tabelu, kolone ON i OO, polja 24).

4.5.26 Sledeći u redosledu je PP27-2 koji ćemo da formiramo dodavanjem akcije sa oznakom MCD na PP26-2. Domen PP27-2 je [0.0020012; 0.0022619]. Vrednosti povrata i varijanse, dobijene kombinovanjem različitih porcija PP26-2 i akcije MCD (videti Excel tabela, kolone od OT do OX, polja od 24 do 44). Regresiona kriva glasi (videti Minitab regresija 2 ptr=1):

Var_{27} = 0.0176169 -16.4484 * R_{27} +3865.45 * R_{27} ^2 -1.09258 * R_{27} ^3 +383.178*R_{27}^4-71651*R_{27}^5+5580977.38*R_{27}^6 (p.f.2.27)

gde:

Var_{27} je varijansa PP27-2

R_{27} je povrat PP27-2

Prvi izvod regresione krive (p.f.2.27) glasi:

Var_{27}' = -16.4484 + 7730.9 * R_{27} -3.27774 * R_{27} ^2 +1532.712 * R_{27} ^3 -358255*R_{27}^4+33485864.28*R_{27}^5 (d.f.2.27)

Za izračunavanje Intervala vrednosti funkcije prvog izvoda (d.f.2.27), koristimo program Matlab:

>> p = [33485864.28 -358255 1532.712 -3.27774 7730.9 -16.4484];

polyval(p,0.0020012)

Var' = -0.9773

>> p = [33485864.28 -358255 1532.712 -3.27774 7730.9 -16.4484];

polyval(p,0.0022619)

Var' = 1.0381

Očigledno je da u ovom slučaju postoji nepristrasan izbor, stoga je ptr =1, odnosno rav =1. Korene jednačine (d.f.2.27) pri uslovu ptr =1, izračunaćemo uz pomoć Matlab programa:

>> p = [33485864.28 -358255 1532.712 -3.27774 7730.9 -17.4484];

r=roots(p)

r =

0.0893 + 0.0872i

0.0893 - 0.0872i

-0.0851 + 0.0872i

-0.0851 - 0.0872i

0.0023 + 0.0000i (0.002257 preciznije)

Porcije PP26-2 i MCD, koji učestvuju u PP27-2 imaju vrednosti: $\Pi_j \approx 0.018911$ i $\Pi_k \approx 0.981089$ (videti Excel tabelu, kolone OY i OZ, polja 24).

4.5.27 Sledeći u redosledu je PP28-2 koji ćemo da formiramo dodavanjem akcije sa oznakom MRK na PP27-2. Domen PP28-2 je [0.002257; 0.0024992]. Vrednosti povrata i varijanse, dobijene kombinovanjem različitih porcija PP27-2 i akcije MRK (videti Excel tabela, kolone od PE do PI, polja od 24 do 44). Regresiona kriva glasi (videti Minitab regresija 2 ptr=1):

Var_{28} = 0.0201316 -16.5861 * R_{28} +3432.79 * R_{28} ^2 -0.214964 * R_{28} ^3 +65.8254*R_{28}^4-10745.5*R_{28}^5+730574.58*R_{28}^6 (p.f.2.28)

gde:

Var_{28} je varijansa PP28-2

R_{28} je povrat PP28-2

Prvi izvod regresione krive (p.f.2.28) glasi:

Var_{28}' = -16.5861 + 6865.58 * R_{28} -0.644892 * R_{28} ^2 +263.3016 * R_{28} ^3 -53727.5*R_{28}^4+4383447.48*R_{28}^5 (d.f.2.28)

Za izračunavanje Intervala vrednosti funkcije prvog izvoda (d.f.2.28), koristimo program Matlab:

>> p = [4383447.48 -53727.5 263.3016 -0.644892 6865.58 -16.5861];

polyval(p,0.002257)

Var' = -1.0905

>> p = [4383447.48 -53727.5 263.3016 -0.644892 6865.58 -16.5861];

polyval(p,0.0024992)

Var' = 0.5724

Očigledno je da u ovom slučaju ne postoji nepristrasan izbor, stoga biramo ptr=0.55, odnosno rav=1.818181. Korene jednačine (d.f.2.28) pri uslovu ptr=0.55, izračunaćemo uz pomoć Matlab programa:

>> p = [4383447.48 -53727.5 263.3016 -0.644892 6865.58 -17.1361];

r=roots(p)

r =

0.1431 + 0.1407i

0.1431 - 0.1407i

-0.1382 + 0.1407i

-0.1382 - 0.1407i

0.0025 + 0.0000i (0.002496 preciznije)

Porcije PP27-2 i MRK, koji učestvuju u PP28-2 imaju vrednosti: $\Pi_j \approx 0.01344344$ i $\Pi_k \approx 0.98655656$ (videti Excel tabelu, kolone PJ i PK, polja 24).

4.5.28 Poslednji u redosledu je PP29-2 koji ćemo da formiramo dodavanjem akcije sa oznakom WBA na PP28-2. Domen PP29-2 je [0.002496; 0.0038495]. Vrednosti povrata i varijanse, dobijene su kombinovanjem različitih porcija PP28-2 i akcije WBA (videti Excel tabela, kolone od PP do PT, polja od 24 do 44). Regresiona kriva glasi (videti Minitab regresija 2 ptr=1):

Var_{29} = 0.000574813 -0.323809 * R_{29} +56.5541 * R_{29} ^2 +0.00000013264 * R_{29} ^3 - 0.000025302*R_{29}^4+0.00244613*R_{29}^5-0.0916553*R_{29}^6 (p.f.2.29)

gde:

Var_{29} je varijansa PP29-2

R_{29} je povrat PP29-2

Prvi izvod regresione krive (p.f.2.29) glasi:

Var_{29}' = -0.323809 + 113.1082 * R_{29} +0.00000039792 * R_{29} ^2 -0.000101208 * R_{29} ^3 +0.01223065*R_{29}^4-0.5499318*R_{29}^5 (d.f.2.29)

Za izračunavanje intervala vrednosti funkcije prvog izvoda (d.f.2.29), koristimo program Matlab:

>> p = [-0.5499318 0.01223065 -0.000101208 0.00000039792 113.1082 -0.323809];

polyval(p,0.002496)

Var' = -0.0415

>> p = [-0.5499318 0.01223065 -0.000101208 0.00000039792 113.1082 -0.323809];

polyval(p,0.0038495)

Var' = 0.1116

Minimum funkcije (p.f.2.29) izračunaćemo uz pomoć programa Matlab uz uslov ptr =0, sledi:

>> p = [-0.5499318 0.01223065 -0.000101208 0.00000039792 113.1082 -0.323809];

r=roots(p)

r =

3.7919 + 0.0000i

0.0048 + 3.7870i

0.0048 - 3.7870i

-3.7822 + 0.0000i

0.0029 + 0.0000i (0.002862825153247 preciznije)

Kada vrednost (0.002862825153247) uvrstimo u regresionu jednačinu (p.f.2.29) dobijamo vrednost varijanse regresione funkcije (p.f.2.29) u tački u kojoj ona ima minimum, odnosno u toj tački portfolio predstavljen jednačinom (p.f.2.29) ima najnižu vrednost varijanse koja iznosi (Var_{29min} =0.000111308725). Porcije PP28-2 i WBA, koji učestvuju u PP29-2, u tački minimuma regresione funkcije (p.f.2.29), imaju vrednosti: $\Pi_j \approx 0.728976727$ i $\Pi_k \approx 0.271023273$ (videti Excel tabelu, kolone PU i PV, polja 24).

Tangentu na krivu (p.f.2.29) postavićemo iz tačke sa koordinatama (0.0000561349;0) koja predstavlja prinos na nerizičnu hartiju od vrednosti. Koristićemo jednačinu (t.e.6), odakle sledi:

$-Var_{29}$=(-0.323809 + 113.1082 * R_{29} +0.00000039792 * R_{29} ^2 -0.000101208 * R_{29} ^3 +0.01223065*R_{29}^4-0.5499318*R_{29}^5)*(0.0000561349-R_{29})

nakon sređivanja sledi:

$-Var_{29}$= -0.000018177 +0.330158317 * R_{29} -113.1082 * R_{29} ^2 -0.0000004036013 * R_{29} ^3 +0.0001018945663*R_{29}^4-0.0122615203666*R_{29}^5+0.5499318*R_{29}^6

kada poslednju jednačinu saberemo sa jednačinom (p.f.2.29), dobijamo:

0= 0.000556636 +0.006349317 * R_{29} -56.5541 * R_{29} ^2 -0.000000271 * R_{29} ^3 +0.0000765925663*R_{29}^4-0.0098153903666*R_{29}^5+0.4582765*R_{29}^6

Korene ove jednačine pronaćićemo uz pomoć programa Matlab:

>> p = [0.4582765 -0.0098153903666 0.0000765925663 -0.000000271 -56.5541 0.006349317 0.000556636];

r=roots(p)

r =

3.3383 + 0.0000i

0.0053 + 3.3330i

0.0053 - 3.3330i

-3.3277 + 0.0000i

0.0032 + 0.0000i (0.00319391934937 preciznije)

-0.0031 + 0.0000i

Kada vrednost povrata (0.00319391934937) uvrstimo u regresionu jednačinu (p.f.2.29) dobijamo vrednost Var=0.00011751. Koristili smo program Matlab:

>> p = [-0.0916553 0.00244613 -0.000025302 0.00000013264 56.5541 -0.323809 0.000574813];

polyval(p,0.00319391934937)

Kada identičnu vrednost povrata (0.00319391934937) uvrstimo u jednačinu prvog izvoda (d.f.2.29) dobijamo vrednost prvog izvoda regresione funkcije u tački tangiranja. Koristimo program Matlab:

```
>> p = [-0.5499318 0.01223065 -0.000101208 0.00000039792 113.1082 -0.323809];

polyval(p,0.00319391934937)
```

Var' = 0.0374 (0.0374494685542635 preciznije)

Dakle, vrednost sklonosti ka riziku u tački tangiranja je ptr=0.0374, odnosno vrednost averzije prema riziku u istoj tački je rav=26.737968.

Postavimo sada jednačinu tangente. Iz jednačine (t.e.6) sledi:

Y-0.00011751=0.0374494685542635(X-0.00319392)

odakle nakon sređivanja sledi:

Y=0.03744947*X-0.0000021 (t.7)

Sada možemo da formulišemo i dokažemo drugu pomoćnu teoremu koja glasi:

Teorema egzistencije višestrukih tangentnih portfolija

"*U zavisnosti od različitih sklonosti prema riziku, investitorima će biti dostupni različiti tangentni portfoliji"*.

Dokaz:

A) pretpostavimo suprotno da iskaz 'p' nije tačan, odnosno da važi: ukoliko investitori imaju jednaku sklonost ka riziku (npr. ptr=0), biće im dostupni različiti tangentni portfoliji.

Dokazivanje ćemo izvesti metodom svođenja na apsurd. Naime, ukoliko bi prethodna tvrdnja bila tačna to bi značilo da da bi investitorima sa nultom sklonošću ka riziku bili dostupni portfoliji najvišeg ranga (kao i njihove tangente) koji imaju različite jednačine. U prethodno obrađenim slučajevima to bi bile jednačine (p.f.1.29) i (p.f.2.29). S obzirom na to da se jednačina (p.f.1.29) dobija isključivo kao konačni rezultat iterativnog postupka ređanja parcijalnih portfolija sa nultom (ili bliskoj nuli) sklonošću ka riziku, dok se jednačina (p.f.2.29) isključivo dobija kao rezultat iterativnog postupka ređanja parcijalnih portfolija sa nenultom (po pretpostavci ptr=1) sklonošću ka riziku, posledica toga bio bi zaključak da je nemoguće da se kao konačni rezultat dobije regresiona jednačina portfolija (p.f.2.29) ukoliko investitori imaju nultu sklonost ka riziku, odnosno (ptr=0). Samim tim je nemoguće da se dobije i tangentni portfolio čija je jednačina (t.7) koji je povučen iz tačke R_{rf} na regresionu krivu (p.f.2.29). Ovim je dakle, dokazana apsurdnost prethodnog stava A).

Dokažimo sada teoremu i iz suprotnog smera.

B) pretpostavimo suprotno da iskaz 'q' nije tačan, odnosno da važi: investorima sa različitom sklonošću ka riziku biće dostupan isti tangentni portfolio.

Dokazivanje takođe izvodimo metodom svođenja na apsurd. Naime, ukoliko bi ova tvrdnja bila tačna to bi značilo da bi investitorima koji imaju nultu i nenultu sklonost ka riziku, kao konačni rezultat iterativnog postupka ređanja parcijalnih portfolija bio dostupan portfolio najvišeg ranga čija je jednačina (p.f.1.29). Identično prethodnom, važi, da se jednačina (p.f.1.29) isključivo dobija kao konačni rezultat iterativnog postupka ređanja parcijalnih portfolija sa nultom (ili bliskoj nuli) sklonošću ka riziku, dok se jednačina (p.f.2.29) isključivo dobija kao rezultat iterativnog postupka ređanja parcijalnih portfolija sa nenultom (po pretpostavci ptr=1) sklonošću ka riziku. Stoga, izvodimo zaključak da je nemoguće da se dobije regresiona jednačina (p.f.1.29) ukoliko investitori imaju nenultu sklonost ka riziku, kao što je nemoguće da se dobije regresiona jednačina (p.f.2.29) ukoliko investitori imaju nultu sklonost ka riziku. Identično važi i za jednačine tangenti (t.5) i (t.7) ovih regresionih jednačina. Samim tim je prethodna tvrdnja B) svedena na apsurd. Ovim je dokazano da teorema važi u formi u kojoj je data.

Teorema je, kao iskaz ekvivalencije, na neposredan način dokazana u tačkama 4.3 Parcijalni portfolio višeg ranga i 4.5 Egzistencija višestrukih tangentnih portfolija (problem dva investitora koji imaju suprotne sklonosti ka riziku).

Dikusija i finansijske posledice pomoćne teoreme egzistencije višestrukih tangentnih portfolija: dakle, dokazali smo pomoćnu teoremu egzistencije višestrukih tangentnih portfolija u oba smera, smatrajuči je iskazom ekvivalencije. Dokazano je da ukoliko postoje investitori sa sklonošću ka riziku koja je značajno veća od '0' (po pretpostavci ptr =1), oni će biti suočeni sa regresionom krivom, a koja kriva predstavlja portfolio najvišeg ranga, čiji se povrat i varijansa bitno razlikuju od povrata i varijanse kojima su izloženi investitori sa nultom sklonošću ka riziku. Samim tim, bitno će se razlikovati i povrati i varijanse, koji su uslovljeni jednačinama tangenti na regresione krive ((t.5) i (t.7)), koje predstavljaju linearne efikasne skupove portfolija kojima su izloženi ovi investitori sa nenultim sklonostima ka riziku. Dakle, investitori čija je sklonost ka riziku, po pretpostavci jednaka '1' ne samo što će biti suočeni sa lancem parcijalnih portfolija koji se bitno razlikuje od onog sa kojim se suočavaju investitori, sa unapred definisanom, nultom sklonošću ka riziku, već će biti suočeni i sa različitim tangentnim portfolijima, koji su posledica različitih jednačina tangenti, a samim tim i različitim nivoima prosečnog povrata i varijanse linearnih portfolija, koji su definisani tangentama, a koji su kombinacija rizčne i nerizične aktive. Dakle, da bi bila definisana algebarska forma regresione krive najvišeg ranga, koja sama po sebi predstavlja portfolio najvišeg ranga, neophodno je da budu unapred definisane sklonosti ka riziku (averzije prema riziku) svakog pojedinačnog investitora. Samo u tom slučaju, unapred definisanih sklonosti ka riziku, moguće je da se odrede algebarski oblici regresionih krivih koje će da predstavljaju njima odgovarajuće portfolije najvišeg ranga. Dakle, sklonost ka riziku, svakog investitora, je inherentna (nerazdvojiva) od skupa mogućih portfolija definisanih regresionim krivama.

POGLAVLJE 5.

U ovom poglavlju uvodimo najpre temu izbora rizičnog portfolija, koju determinišemo sa teoremom odabira rizičnog portfolija. Teoremu ćemo dokazati kao iskaz ekvivalencije.

U drugoj tački poglavlja uvodimo pojam optimizacije tangentnog portfolija u kojoj ćemo da uporedimo jednačine tangenti (t.5) i (t.7), odnosno nivoe povrata i varijansi linearnih efikasnih skupova koje ove tangente predstavljaju.

5.1 Izbor rizičnog portfolija

Formulisaćemo, konačno, osnovnu teoremu istraživanja, koja glasi:

Teorema odabira rizičnog portfolija

"*Bez obzira na sklonost prema riziku racionalan investitor će uvek izabrati dostupan tangentni portfolio*".

Drugim rečima ova teorema može da se formuliše na sledeći način: Pri bilo kojoj (svakoj) sklonosti ka riziku racionalan investitor će uvek izabrati dostupan tangentni portfolio. Implicitno se dakle, uvodi egzistencija sklonosti ka riziku svakog pojedinačnog investitora.

Dokaz:

A) pretpostavimo suprotno da iskaz 'p' nije tačan, odnosno da važi: bez ikakvog znanja o sklonosti ka riziku investitor će uvek birati dostupan tangentni portfolio.

Dokazivanje ćemo izvesti metodom svođenja na apsurd. Kao što je prethodno opisano u tačkama 4.3 Parcijalni portfolio višeg ranga i 4.5 Egzistencija višestrukih tangentnih portfolija (problem dva investitora koji imaju suprotne sklonosti ka riziku) pre nego što započne iterativni postupak ređanja parcijalnih portfolija da bi se kao krajnji rezultat dobio portfolio najvišeg ranga, pretpostavlja se potpuna determinacija sklonosti ka riziku svakog pojedinačnog investitora. Naime, investitori čija je sklonost ka riziku nulta, kao konačni rezultat iterativnog postupka mogu da dobiju portfolio opisan regresionom jednačinom (p.f.1.29), dok investitori čija je sklonost ka riziku jedinična (nenulta), kao konačni rezultat iterativnog postupka mogu da dobiju portfolio opisan regresionom jednačinom (p.f.2.29). Samim tim prethodna tvrdnja A) da bez ikakvog znanja o sklonosti ka riziku pojedinačnih investitora može da se izabere dostupan tangentni portfolio je neodrživa iz razloga što bez strogo determinisane sklonosti ka riziku ne može da postoji ni konačna regresiona jednačina portfolija najvišeg ranga, koja je posledica strogo determinisanog iterativnog postupka ređanja parcijalnih portfolija.

Dakle, tvrdnja A) je svedena na apsurd, te stoga teorema važi u smeru u kojem je formulisana. S obzirom da je reč o iskazu ekvivalencije, odnosno, teorema mora da važi i u suprotnom smeru, dakle, ukoliko bi bila formulisana kao: "Racionalan investitor će uvek izabrati dostupan tangentni portfolio bez obzira na sklonost prema riziku", dokažimo sada teoremu i iz suprotnog smera.

B) pretpostavimo suprotno da iskaz 'q' nije tačan, odnosno da važi: racionalan investitor će izabrati neki drugi portfolio, bez obzira na sklonost ka riziku.

Dokazivanje ćemo i u ovom slučaju izvesti metodom svođenja na apsurd. Naime, ukoliko investitori izaberu neki drugi portfolio koji pripada efikasnim skupovima portfolija najvišeg ranga opisanih regresionim jednačinama (p.f.1.29) i (p.f.2.29) i koji ne leži na tangentama opisanim jednačinama (t.5) i (t.7) postavlja se pitanje da li je takav njihov izbor racionalan. S obzirom da tangenta, sama po sebi, dozvoljava da portfoliji rizične aktive, kombinovani sa nerizičnim prinosom imaju značajno niži nivo rizika, merenog varijansom, za identičan nivo povrata (ili viši nivo povrata za identičan nivo varijanse) od portfolija rizične aktive koji se nalaze na efikasnom skupu, zaključujemo da prethodna tvrdnja B) da će racionalan investitor da izabere neki drugi portfolio, bez obzira na sklonost ka riziku, nije održiva iz razloga što će svaki investitor uvek da izabere kombinaciju rizičnog portfolija koji ima: viši nivo povrata za isti nivo rizika ili niži nivo varijanse za isti nivo povrata, u odnosu na neki drugi rizični portfolio. Dakle, ovim je dokazano da teorema važi u formi u kojoj je data. Teorema je, kao iskaz ekvivalencije, na neposredan način dokazana u tačkama 4.3 Parcijalni portfolio višeg ranga i 4.4 Tangentni portfolio najvišeg ranga i tržišna linija kapitala.

Diskusija i finansijske posledice teoreme odabira rizičnog portfolija: dakle, dokazali smo osnovnu teoremu istraživanja sprovedenog u ovoj disertaciji iz koje možemo da izvedemo zaključak da će investitori koji imaju unapred definisane sklonosti ka riziku, a koje sklonosti se međusobno razlikuju, uvek da izaberu kombinaciju rizične aktive koja je determinisana kao tangentni portfolio. Tangentni portfolio, međutim, može da postoji isključivo u slučaju, ako postoji regresiona kriva (koja je uvek posledica iterativnog postupka ređanja partitivnih portfolija do portfolija najvišeg ranga) i tačka u izabranom koordinatnom sistemu (u ovom slučaju povrat-varijansa), koja ne pripada regresionoj krivoj (specifično tačka koja leži na apscisi, dakle, sa nultom varijansom) iz koje se tangenta povlači na pomenutu krivu, čime se i definiše pomenuti tangentni portfolio. Ovakvo rešenje predstavlja optimalnu kombinaciju rizične i nerizične aktive koje će u bilo kojoj tački tangente da ima niži nivo varijanse pri istom nivou povrata rizičnog portfolija i viši nivo povrata pri istom nivou varijanse rizičnog portfolija. Dakle, investitori će uvek da izaberu njima dostupan tangentni portfolio rizične aktive bez obzira na unapred definisane sklonosti ka riziku svakog od njih.

5.2 Optimalni tangentni portfolio

S obzirom da regresiona jednačina portfolija najvišeg ranga u slučaju investitora sa nultom sklonošću ka riziku glasi:

Var_{29} = 0.000145289 -0.0845825 * R_{29} +23.3946 * R_{29} ^2 +0.0000000126906 * R_{29} ^3 - 0.00000412688 * R_{29} ^4 +0.00069451 * R_{29} ^5 -0.0474143 * R_{29} ^6 (p.f.1.29) odnosno da tačka u kojoj regresiona kriva (p.f.1.29) dostiže minimum ima koordinate M_{29} (0.0018077;0.000068838),

dok regresiona kriva u slučaju investitora čija je sklonost ka riziku veća od '0', odnosno po uslovu koji smo prethodno usvojili sklonost ka riziku je jednaka '1', (gde je takav uslov moguć) glasi:

Var_{29} = 0.000574813 -0.323809 * R_{29} +56.5541 * R_{29} ^2 +0.00000013264 * R_{29} ^3 - 0.000025302*R_{29}^4+0.00244613*R_{29}^5-0.0916553*R_{29}^6 (p.f.2.29)

sa minimumom u tački čije su koordinate M_{29-2}(0.00286282515 3247;0.000111308725).

S obzirom da jednačine tangenti na regresione krive u slučajevima opisanih investitora glase:

Y = 0.032755*X -0.0000018403339 (t.5)

i

Y=0.03744947*X-0.0000021 (t.7)

odnosno,

koordinate tačaka u kojima tangente dodiruju regresione krive su:

T_{29} (0.00250778;0.000080302)

i

T_{29-2} (0.00319392;0.00011751)

respektivno, postavlja se pitanje koji od ovih investitora postupa racionalnije, odnosno koji je izbor sa aspekta povrata i varijanse povrata optimalan. Optimalnost izbora tangentnog portfolija pokazaćemo na sledeći način. Naime, ukoliko vrednost povrata tangentnog portfolija iz drugog slučaja investiranja, uvrstimo u jednačinu tangente (t.5), prvog slučaja investiranja, dobijamo sledeći rezultat:

Y = 0.032755*0.00319392 -0.0000018403339 = <u>0.0001027765157</u>

S obzirom da je dobijeni rezultat manji od vrednosti varijanse povrata u tački T_{29-2}, dakle, 0.0001027765157 < 0.00011751, možemo da zaključimo da je varijansa u drugom slučaju investiranja veća od varijanse u prvom slučaju investiranja za isti nivo povrata. Do identičnog zaključka došli bismo ukoliko posmatramo prve izvode tangenti (t.5) i (t.7). Naime, prvi izvod tangente (t.5) je konstanta i iznosi: Y'= 0.032755, dok je prvi izvod tangente (t.7), takođe konstanta i iznosi: Y'= 0.03744947. S obzirom na činjenicu da je 0.03744947 > 0.032755 i shodno jednačini (t.e.11) jasno je da je priraštaj varijanse u drugom slučaju investiranja veći od priraštaja varijanse u prvom slučaju investiranja, za isti iznos priraštaja povrata. Dakle, priraštaj varijanse biće niži u slučaju investitora čija je sklonost ka riziku jednaka '0'. Dakle, bez obzira što u drugom slučaju investiranja tangentni portfolio ima viši nivo povrata od tangentnog portfolija u prvom slučaju investiranja (sa nultom sklonošću ka riziku), optimalni izbor investiranja je onaj u kome se postiže niža varijansa za isti nivo povrata, što i jeste slučaj investiranja kada investitori imaju nultu sklonost ka riziku.

POGLAVLJE 6.

U ovom poglavlju prvo uvodimo pojam linije indiferencije, koja predstavlja tangentu na regresionu krivu u tački u kojoj je prvi izvod regresione krive jednak '1' a zatim u drugoj tački pojam efekat diversifikacije koji se postiže uvođenjem u portfolio sve više članova koje su hartije od vrednosti sa sopstvenim karakteristikama prosečnih povrata i varijansi povrata.

6.1 Linija indiferencije

Prethodno smo već utvrdili da prvi izvod regresione funkcije (p.f.1.29) na domenu regresione funkcije, ne može da ima vrednost '1' (videti Poglavlje 4, tačka 4.3, stavka 4.3.28). Međutim, iz teorijskih razloga analiziraćemo upravo taj slučaj, na način što ćemo da izvršimo ekstrapolaciju regresione krive (p.f.1.29). Ukoliko vrednost argumenta (R_{29} = 0.023180189041199245), za koju je, vrednost prvog izvoda funkcije (p.f.1.29) jednak '1', uvrstimo u jednačinu (p.f.1.29), onda dobijamo vrednost varijanse regresione funkcije. Koristićemo program Matlab:

```
>> p = [-0.0474143 0.00069451 -0.00000412688 0.0000000126906 23.3946 -0.0845825 0.000145289];

polyval(p,0.023180189041199245)
```

Var_{29} = 0.010755

Dakle, u tački u kojoj je prvi izvod regresione funkcije (p.f.1.29) jednak '1' vrednosti argumenta i funkcije predstavljaju uređen par (0.023180189041199245;0.010755). Obeležimo ovu tačku sa T_{29}^1. Postavimo sada tangentu iz tačke koja leži na 'x' osi čije su koordinate (0.0000561349;0) na regresionu krivu (p.f.1.29) koja će da dodiruje regresionu krivu upravo u tački T_{29}^1 (videti Matlab Grafik 9.). Na grafiku je crvenom bojom označen deo regresione krive koji ne pripada efikasnom skupu, zelenom bojom je označen efikasni skup regresione krive, a crnom bojom je označen deo krive koji ne pripada domenu, ali koji je analiziran iz teorijskih razloga. Bez obzira dakle, što prvi izvod ne dostiže vrednost '1' na domenu regresione krive (p.f.1.29), on u opštem slučaju postoji i iz tog razloga je ovde i analiziran. Matematički postupak dobijanja jednačine tangente na regresionu krivu (p.f.1.29) je sledeći:

Y -0.010755 = 1*(X -0.023180189041199245)

odakle sledi

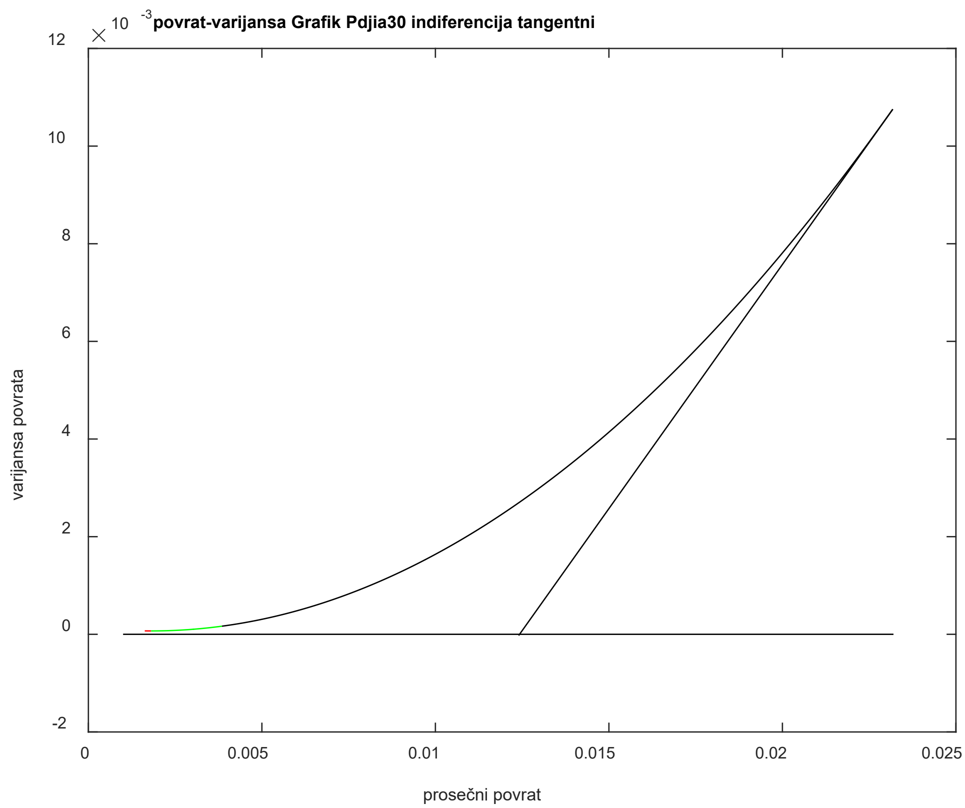
Y =X -0.0124251890411992 (t.8)

Iz jednačine (t.8) jasno sledi da je prirast argumenta funkcije identičan prirastu same funkcije. Ovo je posledica toga što je prvi izvod jednačine (t.8) jednak '1'. Dakle, duž celokupne linije

definisane funkcijom (t.8), sklonost ka riziku i averzija prema riziku su identični i iznose '1',

odnosno (*ptr* = *rav* =1). S obzirom da su prirast argumenta i prirast funkcije identični duž celokupne linije definisane jednačinom (t.8), investitori su u potpunosti indeferentni koju će kombinaciju nerizičnog prinosa i tangentnog portfolija da izaberu. Stoga, ovako definisana linija nije ništa drugo nego *linija indiferencije* investitora u odnosu na izbor kombinacije nerizičnog prinosa i rizičnog portfolija. Dakle, linija indiferencije predstavlja tangentu koja dodiruje regresionu krivu u tački u kojoj je prvi izvod regresione krive jednak '1'.

Grafik 9. Linija indiferencije



6.2 Efekat diversifikacije (geometrijski i algebarski pristup)

Najpre u razmatranje uvodimo pojam nesistematski (idiosinkratski) rizik hartije od vrednosti, koji je specifičan za svaku pojedinačnu kompaniju i ne zavisi od opštih ekonomskih ili političkih uslova koji deluju na hartije od vrednosti na sistemski način, kao što su monetarni i poreski sistem ili globalna cena nafte (Van Horne, 2001). S obzirom da je ovaj tip rizika svojstven svakoj pojedinačnoj kompaniji na njega mogu da utiču faktori, kao što su štrajkovi, novonastala konkurencija ili uvođenje nove tehnologije, koji deluju gotovo isključivo na pojedine kompanije (Van Horne, 2001). Međutim, postupkom diversifikacije nesistematski rizik može značajno da se redukuje na taj način što u portfolio uvodimo sve više i više pojedinačnih hartija od vrednosti. Sistematski rizik je jedan od najvažnijih problema koji se javljaju u finansijskim sistemima. U pokušaju da odgovore na taj problem, mnogi istraživači koriste metode mašinskog učenja u cilju obrade sve veće količine podataka koji dolaze sa finansijskog tržišta (Kou et al, 2019).

geometrijski pristup

U ovom radu je razmatran portfolio koji je sastavljen od akcija koje su predstavljene indeksom DJIA. S obzirom da dnevni povrati svake pojedinačne akcije variraju oko neke vrednosti, morali smo da izračunamo srednju vrednost povrata kao meru centralne tendencije i varijansu povrata kao meru odstupanja (Sharpe, Alexander and Bailey, 1998). Nakon toga su sve pojedinačne hartije od vrednosti poređane po rastućem redosledu njihovih prosečnih povrata i onda je formiran lanac od partitivnih portfolija na način koji je opisan u tačkama 3.3 i 3.4, 3. Poglavlja. Iz analize članova lanca partitivnih portfolija, može jasno da se uoči koliko svaka pojedinačna akcija doprinosi riziku portfolija koji se nalazi na najvišem rangu (videti Matlab Grafik 5. vs. Grafik 6.).

S obzirom da smo na početku analize pretpostavili da je reč o investitoru koji je nesklon riziku, uveli smo objektivni kriterijum minimum varijanse za izbor partitivnog portfolija i na taj način smo snižavali varijansu, članova lanca partitivnih portfolija, u svim slučajevima u kojima je to bilo moguće. Međutim, iz razloga visoke koreliranosti povrata nekih iteracija u lancu partitivnih portfolija dešavalo se da ne postoji minimum varijanse pojedinih partitivnih portfolija, kao objektivni kriterijum za izbor (videti Excel tabelu, kolone HK, HV, IG, JN, JY, LF). Posledica nepostojanja minimuma varijanse morala je da bude, pristrasan izbor pojedinih partitivnih portfolija u lancu, što je samo po sebi za posledicu imalo neznatan rast varijanse u tim iteracijama. Dakle, suočili smo se sa činjenicom da nije nužno da svaka hartija od vrednosti koja je uključena u portfolio, doprinosi snižavanju njegovog rizika merenog varijansom povrata. U konačnom slučaju portfolija najvišeg ranga, varijansa kao mera rizika svedena je na najnižu moguću meru čime je i ostvarena redukcija nesistematskog rizika postupkom diversifikacije, odnosno uvođenjem u portfolio sve više hartija od vrednosti iz izabranog skupa označenog sa DJIA.

algebarski pristup

S obzirom da smo već izračunali vrednosti povrata i varijanse portfolija Pdjia30 u tački u kojoj dostiže minimalnu vrednost varijanse (videti Poglavlje 4, tačka 4.3, stavka 4.3.28,) čije su koordinate $M_{29}(0.0018077;0.000068838)$, smatraćemo da upravo u toj tački navedeni portfolio dostiže i nivo sistemskog (neizbežnog) rizika, koji ni sa kakvim daljim operacijama nad portfolijom ne može da se smanjuje. Dakle, u tački M_{29} na portfolio Pdjia30 deluje isključivo sistematski rizik koji je posledica opštih uslova (monetarnih i fiskalnih) koji deluju podjednako na sve tržišne sudionike i koji daljim procesom diversifikacije ne može da se smanjuje.

Nesistematski deo rizika definisan je kao razlika između ukupnog (totalnog) rizika koji deluje na svaku pojedinačnu hartiju od vrednosti i sistematskog rizika portfolija u kojem se nalaze navedene hartije od vrednosti, odnosno algebarski može da se izrazi na sledeći način:

$$\rho_{spec} = \rho_{tot} - \rho_{sis} \qquad \text{(t.e.13)}$$

gde je

ρ_{spec} nesistematski (specifični) deo rizika svojstven svakoj pojedinačnoj hartiji od vrednosti

ρ_{tot} ukupni (totalni) rizik koji deluje na sve hartije od vrednosti (ali ne podjednako)

ρ_{sis} sistematski deo rizika koji podjednako deluje na sve hartije od vrednosti i (koji ne može da se diversifikuje)

Prethodno smo, takođe, izračunali i vrednosti varijansi (kojima merimo rizik) svake pojedinačne hartije od vrednosti koja ulazi u portfolio koji smo označili sa (Pdjia30) (videti Excel tabelu). S obzirom da vrednost varijanse akcije sa oznakom GS iznosi (0.0003437), smatramo da ta vrednost predstavlja ukupni (totalni) rizik koji deluje na ovu hartiju od vrednosti kada se ona analizira samostalno. Dakle, u slučaju da imamo investiciju u pojedinačnu hartiju od vrednosti (GS), tada bismo bili izloženi totalnom riziku koji iznosi (0.0003437). Međutim, ukoliko investiramo u svih 30 (trideset) akcija koje su obuhvaćene indeksom DJIA30 onda ćemo biti izloženi riziku koji iznosi (0.000068838) i koji dalje nije moguće da se smanji iz razloga što predstavlja minimum varijanse portfolija Pdjia30. Dakle, sistematski deo rizika predstavlja minimum portfolija Pdjia30. Sada je jednostavno da se izračuna nesistematski (specifični) deo rizika akcije (GS) korišćenjem jednačine (t.e.13). Dakle, biće: $\rho(GS)=Var(GS)-Var_{29}=$ 0.0003437 -0.000068838=0.000274862, odnosno nesistematski deo rizika akcije (GS), u oznaci $\rho(GS)=\underline{0.000274862}$.

Sledi pregled nesistematskih (specifičnih) rizika svih ostalih akcija uključenih u indeks DJIA30:

$\rho(AAPL)=Var(AAPL)-Var_{29}=0.0004939-0.000068838=\underline{0.000425062}$

$\rho(DWDP)=Var(DWDP)-Var_{29}=0.0003228-0.000068838=\underline{0.000253962}$

$\rho(IBM)=Var(IBM)-Var_{29}=0.0003328-0.000068838=\underline{0.000263962}$

$\rho(HD)=Var(HD)-Var_{29}=0.0002377-0.000068838=\underline{0.000168862}$

$\rho(UTX)=Var(UTX)-Var_{29}=0.0002447-0.000068838=\underline{0.000175862}$

$\rho(JPM)=Var(JPM)-Var_{29}=0.0001682-0.000068838=\underline{0.000099362}$

$\rho(NKE)=Var(NKE)-Var_{29}=0.0003031-0.000068838=\underline{0.000234262}$

$\rho(TRV)=Var(TRV)-Var_{29}=0.0001752-0.000068838=\underline{0.000106362}$

$\rho(V)=Var(V)-Var_{29}=0.0003818-0.000068838=\underline{0.000312962}$

$\rho(MMM)=Var(MMM)-Var_{29}=0.0002409-0.000068838=\underline{0.000172062}$

$\rho(MSFT)=Var(MSFT)-Var_{29}=0.0004061-0.000068838=\underline{0.000337262}$

$\rho(XOM)=Var(XOM)-Var_{29}=0.0001705-0.000068838=\underline{0.000101662}$

$\rho(CVX)=Var(CVX)-Var_{29}=0.0002369-0.000068838=\underline{0.000168062}$

$\rho(CAT)=Var(CAT)-Var_{29}=0.0005684-0.000068838=\underline{0.000499562}$

$\rho(CSCO)=Var(CSCO)-Var_{29}=0.000312-0.000068838=\underline{0.000243162}$

$\rho(WMT)=Var(WMT)-Var_{29}=0.0001313-0.000068838=\underline{0.000062462}$

$\rho(DIS)=Var(DIS)-Var_{29}=0.0001838-0.000068838=\underline{0.000114962}$

$\rho(BA)=Var(BA)-Var_{29}=0.000415-0.000068838=\underline{0.000346162}$

$\rho(AXP)=Var(AXP)-Var_{29}=0.0001806-0.000068838=\underline{0.000111762}$

$\rho(INTC)=Var(INTC)-Var_{29}=0.0004285-0.000068838=\underline{0.000359662}$

$\rho(UNH)=Var(UNH)-Var_{29}=0.0002362-0.000068838=\underline{0.000167362}$

$\rho(JNJ)=Var(JNJ)-Var_{29}=0.0000993-0.000068838=\underline{0.000030462}$

$\rho(VZ)=Var(VZ)-Var_{29}=0.0001686-0.000068838=\underline{0.000099762}$

$\rho(KO)=Var(KO)-Var_{29}=0.0000909-0.000068838=\underline{0.000022062}$

$\rho(PFE)=Var(PFE)-Var_{29}=0.0001746-0.000068838=\underline{0.000105762}$

$\rho(PG)=Var(PG)-Var_{29}=0.0001907-0.000068838=\underline{0.000121862}$

$\rho(MCD)=Var(MCD)-Var_{29}=0.0001886-0.000068838=\underline{0.000119762}$

$\rho(MRK)=Var(MRK)-Var_{29}=0.0001207-0.000068838=\underline{0.000051862}$

$\rho(WBA)=Var(WBA)-Var_{29}=0.0001664-0.000068838=\underline{0.000097562}$

Ukoliko jednačinu (t.e.13) napišemo u obliku:

$\rho_{tot} - \rho_{spec} = \rho_{sis}$

možemo da izvedemo zaključak da je procesom diversifikacije, ulaganjem u portfolio, specifični (nesistematski) rizik, svojstven svakoj pojedinačnoj hartiji od vrednosti, eliminisan do nivoa na kome preostaje isključivo sistematski rizik koji je uslovljen opštim tržišnim uslovima i čije dalje smanjenje, u ovom slučaju portfolija, definisanog indeksom DJIA30, nije moguće. Dakle, procesom diversifikacije postignut je najniži mogući rizik, kojem je izložen dati portfolio hartija od vrednosti.

ZAKLJUČAK

U zaključnim razmatranjima se najpre porede vrednosti prosečnog povrata i varijanse povrata u slučajevima investiranja kada investitori imaju različite sklonosti ka riziku (averzije prema riziku), nakon čega se dobijeni rezultati za povrat i varijansu porede sa rezultatima dobijenim uz pomoć postojećih metodologija. U drugoj tački zaključnog razmatranja se poredi efikasnost metodologije primenjene u ovoj disertaciji sa postojećim metodologijama koje su predlagali Markowitz i Sharpe. U trećoj i četvrtoj tački iznose se zaključci u vezi sa centralnom temom disertacije, odnosno o problemu odvajanja rizične aktive predstavljene tangentnim portfoliom od aktive koja donosi nerizični prinos. U poslednjoj petoj tački zaključnog razmatranja raspravlja se o ponuđenoj arhitekturi otvorenog portfolija i poređenju modela selekcije portfolija dobijenog pristupom u ovoj disertaciji sa nekim od ostalih mogućih pristupa. Metodologijom primenjenom u disertaciji postignuto je sledeće:

1. U slučaju investitora sa nultom (ili bliskoj nuli) sklonošću ka riziku, povrat portfolija, sastavljenog od svih hartija od vrednosti koje su uključene u DJIA indeks, u tački M_{29}, u kojoj regresiona funkcija (p.f.1.29) dostiže minimum, iznosi: (R_{29}= 0.0018077) dok varijansa povrata u istoj tački iznosi: (Var_{29}= 0.000068838). Nasuprot ovome, u slučaju investitora sa nenultom (jediničnom) sklonošću ka riziku, povrat identičnog portfolija u tački $M_{29\text{-}2}$, u kojoj regresiona funkcija (p.f.2.29) dostiže minimum, iznosi: ($R_{29\text{-}2}$= 0.002862825) dok varijansa povrata u istoj tački iznosi: ($Var_{29\text{-}2}$= 0.000111308725).

U slučaju investitora sa nultom (ili bliskoj nuli) sklonošću ka riziku, povrat tangentnog portfolija u tački T_{29}, iznosi: (R_{29}= 0.00250778), dok varijansa povrata u istoj tački, iznosi: (Var_{29}= 0.000080302). Nasuprot ovome, u slučaju investitora sa nenultom (jediničnom) sklonošću ka riziku, povrat identičnog portfolija u tački $T_{29\text{-}2}$, iznosi: ($R_{29\text{-}2}$= 0.00319392) dok varijansa povrata u istoj tački iznosi: ($Var_{29\text{-}2}$= 0.00011751). Odgovarajuće jednačine tangenti su (t.5) i (t.7) respektivno.

Nasuprot ovim, rezultati dobijeni metodologijom koju je predložio Sharpe et al (1998), iznose: povrat tangentnog (proporcije hartija od vrednosti tangentnog portfolija, u stanju ravnoteže, korespondiraju, proporcijama hartija od vrednosti tržišnog portfolija) portfolija je (E(R)= 0.00000693) (videti Excel tabela, polje QW67), dok je varijansa povrata tangentnog portfolija ($D= \sigma^2$= 0.000133) (videti Excel tabela, polje QW69).

Dakle, dobijeni rezultati za povrat i varijansu u slučajevima portfolija sa minimumom varijanse i tangentnog portfolija, dobijenih metodologijom predstavljenom u disertaciji, mnogo su preciznije determinisani nego što je to slučaj sa metodološkim postupkom koji su izneli Sharpe et al (1998) u svom radu, gde proporcije uložene u pojedinačne hartije od vrednosti koje su uključene u tržišni portfolio korespondiraju njihovim relativnim tržišnim vrednostima (videti Excel tabela, kolone QV i QW).

S obzirom na prethodno izloženo, postavljaju se pitanja, ukoliko racionalan investitor nesklon riziku posmatra dobijene rezultate, za koju metodologiju bi se odlučio i koji portfolio bi izabrao. Odgovor na ova pitanja je metodološki jasan. Naime, bila bi izabrana metodologija koja je matematički determinisana u odnosu na proizvoljnu determinaciju, dok bi pri izboru portfolija prednost imao onaj sa boljim odnosom povrat-varijansa. S obzirom da su dobijeni mnogo bolji rezultati za oba parametra, dakle i prosečnog (očekivanog) povrata i varijanse povrata tangentnog portfolija, (u smislu implicitno uvedenih pretpostavki u Markowitzev model o nezasićenosti (eng. "*nonsatiation*") i averzije prema riziku investitora o kojima piše Sharpe et al (1998)), racionalan investitor, nesklon riziku, uvek bi izabrao tangentni portfolio koji je determinisan metodologijom primenjenom u ovom radu.

2. Varijansa portfolija, metodologijom primenjenom u disertaciji, dobijena je izračunavanjem mnogo manje varijabli nego što je to slučaj sa metodologijom koju koriste (Sharpe, Alexander and Bailey, 1998). Naime, za izračunavanje varijanse portfolija u disertaciji bilo je potrebno izračunati: a) varijanse povrata svih hartija od vrednosti uključenih u portfolio, a njih je 30 (trideset); b) zatim je bilo potrebno izračunati varijanse povrata svih partitivnih portfolija, a njih je 29 (dvadeset devet) i konačno c) bilo je potrebno izračunati kovarijanse povrata, prvu, između prve dve hartije od vrednosti u lancu i ostalih 28 (dvadeset osam) kovarijansi povrata, između parcijalnih portfolija i svake naredne hartije od vrednosti u lancu koja je ulazila u portfolio, dakle ukupno 29 (dvadeset devet) kovarijansi povrata.

Porcije svake pojedinačne hartije od vrednosti, uključene u portfolio, u bilo kojoj tački efikasnog skupa portfolija, izračunavaju se tek nakon formiranja efikasnog skupa portfolija. Samim tim, što je u ovom radu veoma eksplicitno pokazano, moguće je izračunati porcije iz jednačina kojima se determiniše povrat portfolija ili varijansa portfolija.

Nasuprot ovome, metodologijom koju su predložili Sharpe et al (1998), potrebno je da se izračunava mnogo više varijabli. Naime, za izračunavanje varijanse 'tržišnog portfolija' potrebno je izračunati 30 (trideset) varijansi svih hartija od vrednosti uključenih u portfolio, identično kao i primenom metodologije u disertaciji. Međutim, da bi se izračunala varijansa portfolija, metodologijom koju su predložili Sharpe et al (1998), potrebno je izračunati i 435 (četiri stotine trideset pet) kovarijansi povrata između svih hartija od vrednosti uključenih u portfolio (videti Excel tabela, kolone od QX do RZ). Porcije svake pojedinačne hartije od vrednosti uključene u portfolio Sharpe et al (1998) izračunavaju unapred, pri tome ih determinišući kao proporcije koje odgovaraju relativnim tržišnim vrednostima svake pojedinačne hartije od vrednosti (videti Excel tabela, kolone QV i QW).

Skupovi mogućih portfolija su uvek predstavljeni krivom linijom regresione funkcije, odnosno polinomom šestog stepena. Dakle, svaki skup mogućih portfolija, a time i svaki efikasni skup portfolija su determinisani algebarskom jednačinom, odnosno polinomijalnom krivom linijom.

3. Kao centralni problem disertacije, formulisan je i dokazan set od tri teoreme koje zajednički predstavljaju problem odvajanja, koji se pripisuje Tobinovom radu iz 1956. godine. Naime, u disertaciji je preispitana tvrdnja da problem izbora rizičnog portfolija može da se odvoji od: a) unapred poznate vrednosti nerizičnog prinosa (koji je neophodni uslov za određivanje koordinata tangentnog (rizičnog) portfolija), i b) unapred poznate sklonosti ka riziku (averzije prema riziku) svakog pojedinačnog investitora. Dakle, da bi se uopšte odredio tangentni portfolio potrebno je da budu ispunjeni uslovi: a) potpuna determinacija algebarske forme regresione krive koja predstavlja skup mogućih portfolija, b) potpuna determinacija koordinata tačke van krive iz kojih se povlači tangenta na krivu i c) potpuna determinacija sklonosti ka riziku (koja je definisana kao vrednost funkcije prvog izvoda regresionih krivih), svakog pojedinačnog investitora. Ukoliko, dakle nije poznata sklonost ka riziku, bilo kojeg investitora, nemoguće je da se odredi algebarska forma regresione krive koja predstavlja skup mogućih portfolija i ukoliko nije determinisana tačka van krive, nemoguće je da se odredi jednačina tangente na regresionu krivu, a samim time ni tangentni portfolio. S obzirom na prethodno izloženo, nemoguće je bilo kakvo odvajanje skupa mogućih portfolija (samim time ni efikasnog skupa) od sklonosti ka riziku (averzije prema riziku) koja predstavlja njegov neophodan uslov postojanja i nerizičnog prinosa koji predstavlja neophodon uslov postojanja tangentnog portfolija. Dalje, s obzirom na činjenicu da je nerizični prinos definisan monetarnom politikom, tangentni portfolio rizične aktive je praktično posledica ne samo sklonosti ka riziku investitora već i monetarne politike, čime se investitorima nameće tangentni portfolio uslovljen sa unapred datim nerizičnim prinosom. Samim time je i prvi izvod tangente, a koji predstavlja sklonost ka riziku linearne forme efikasnog skupa porfolija i koji je konstanta, nametnut investitorima od strane monetarne politike. Dakle kombinacija nerizičnog prinosa i rizičnog tangentnog portfolija, koju može da bira investitor, direktno zavisi od prvog izvoda tangente, odnosno od vrednosti konstante koja, ukoliko je manja od '1', nameće izbor navedene kombinacije, dalje duž tangente, uzajmljivanjem (eng. *“borrowing“*) po nerizičnoj stopi, dok ukoliko je veća od '1', nameće izbor kombinacije, bliže nerizičnom prinosu, pozajmljivanjem (eng. *“lending“*) po nerizičnoj stopi. (Napomena, u slučaju dvočlanog portfolija, problem određivanja tangentnog portfolija svodi se na postojanje koordinata nerizičnog prinosa iz kojih se povlači tangenta na regresionu krivu. Dakle za determinaciju tangentnog dvočlanog portfolija nije potrebna unapred definisana sklonost ka riziku (averzija prema riziku)).

4. Dokazano je da bez obzira na vrednost sklonosti ka riziku, odnosno drugim rečima pri bilo kojoj (ili svakoj) vrednosti vrednosti sklonosti ka riziku racionalan investitor će uvek izabrati tangentni portfolio, iz razloga što kombinovanjem sa nerizičnim prinosom može da ostvari viši nivo povrata uz jednak nivo rizika, merenog varijansom povrata, i niži nivo rizika uz jednak nivo povrata, u zavisnosti od veličine porcija nerizične i rizične aktive. Šta više dokazano je i da optimalni izbor, između mogućih tangentnih portfolija, imaju investitori sa nultom sklonošću ka riziku. Naime, s obzirom da u zavisnosti od nivoa sklonosti ka riziku postoje višestruki tangentni portfoliji, optimalni izbor rizičnog (tangentnog) portfolija (koji direktno zavisi od nivoa sklonosti ka riziku) imaće investitori sa nultom sklonošću ka riziku, jer će povrat na rizičnu aktivu, koji oni ostvaruju, imati niži nivo rizika, merenog varijansom.

5. U disertaciji se na deskriptivan način, dakle upotrebom egzaktnog matematičkog aparata, tretira determinacija i selekcija portfolija. Disertacija je iz razloga sažetog izlaganja ograničena na hartije od vrednosti predstavljene statistički značajnim indeksom DJIA. S obzirom da je u disertaciji na metodološki sasvim jasan način demonstrirana arhitektura otvorenog modela portfolija, moguće je model proširivati sa drugom finansijskom ili realnom aktivom u koju bi bile uključene deonice, obveznice ili nepokretnosti. Stoga, u cilju kompleksnije i šire analize model može da se proširi na skup deonica predstavljen indeksom S&P500 ili nekim drugim indeksom i time da se vrši i poređenje dobijenih rezultata za prosečni (očekivani) povrat i varijansu povrata portfolija, bilo ovim modelom ili nekim drugim modelom kao što je tršišni model, koji je determinisan povratom na vrednost indeksa.

Predmet budućih istraživanja biće preispitivanje modela vrednovanja kapitalne imovine (CAPM) kao i istraživanje u domenu hipoteze efikasnog tržišta.

LITERATURA

1. Arrow, K.J, and Debreu, G. (1954). *Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy*. Econometrica, Jul., 1954, vol. 22, br 3, str. 265-290.

2. Besley, S., Brigham, E.F. (2015). *Poslovne finansije*. Beograd. Data Status.

3. Bilimović, A. (1961). *Elementi više matematike I*. Beograd. NIP Tehnička knjiga.

4. Bilimović, A. (1961). *Elementi više matematike II*. Beograd. NIP Tehnička knjiga.

5. Black, F. (1972). Capital Market Equilibrium with Restricted Borrowing. Journal of Business. 45:3, str. 444-454.

6. Blume, M.E. (1970). Portfolio Theory: A Step Towards Its Practical Application. Journal of Business.

7. Blume, M.E., Friend, I. (1973). *A New Look at the Capital Pricing Model*. The Journal of Finance, vol.28, br 1, str.19-33.

8. Bodie, Z., Kane, A., Marcus, A.J. (2009). *Osnovi investicija* (šesto izdanje). DATA STATUS, Beograd.

9. Brennan, M.J., Xia, Y. (2000). *Stochastic Interest Rates and the Bond-Stock Mix*. European Finance Review 4: 197–210, 2000.

10. Breuer, W., Gürtler, M. (2009). *Two-Fund Separation and HARA Utility Reconsidered*. Elektronska kopija: http://ssrn.com/abstract=659883.

11. Brodie, J., Daubechies, I., De Mol, C., Giannone, D. &Loris, I. (2009). *Sparse and stable Markowitz portfolios*. Proceedings of the National Academy of Sciences, 106(30): 12267–12272.

12. Bruni R., Cesarone F., Scozzari A., Tardella F. (2016). *Real-world datasets for portfolio selection and solutions of some stochastic dominance portfolio models*. Journal Data in Brief. vol. 8, str. 858-862.

13. Buiter, W. H. (2003). *JAMES TOBIN: AN APPRECIATION OF HIS CONTRIBUTION TO ECONOMICS*. Working Paper 9753. http://www.nber.org/papers/w9753. NATIONAL BUREAU OF ECONOMIC RESEARCH. 1050 Massachusetts Avenue. Cambridge, MA 02138.

14. Burda, M., Viploš, Č. (2012). *Makroekonomija* (peto izdanje). Ekonomski fakultet Beograd.

15. Campbell, J.Y., Lo, A.W., and MacKinlay, C.A. (1997). *The Econometrics of Financial Markets* (second edition). Princeton University Press, 41 William street. Princeton, New Jersey

16. Campbell, J.Y., Lettau, M., Malkiel, B.G., Xu, Y. (2001). *Have individual stocks become more volatile? An empirical exploration of idiosyncratic risk*. The Journal of Finance. vol. 56, br. 1, str. 1-43.

17. Chunhacinda, P., Dandapani, K., Hamid, S., Prakash, A. (1997). *Portfolio Selection and Skewness: Evidence from International Stock Markets*, Journal of Banking and Finance, vol. 21, br. 2, str. 143-167.

18. Carlsson, C., Fuller, R., Majlender, P. (2002) *A Possibilistic Approach to Selecting Portfolios with Highest Utility Score,* Fuzzy Sets and Systems, vol. 131, br. 1, str. 13-21.

19. DeMiguel V., Garlappi L., Uppal R. (2007). *Optimal versus naive diversification: How inefficient is the 1/N portfolio strategy?* The Review of Financial Studies, vol. 22, br 5, str. 1915-1953.

20. DeMiguel V., Garlappi L., Nogales F.J., Uppal R. (2009). *A generalized approach to portfolio optimization: Improving performance by constraining portfolio norms.* Management Science, vol. 55, br. 5, str. 798-812.

21. DeMiguel, V., Nogales, F.J. (2009). *Portfolio selection with robust estimation*. Operations Research, vol. 57, br 3, str. 560-577

22. Fama,E.F. (1968). *Risk, Return and Equilibrium: Some Clarifying Comments*. The Journal of Finance, vol. 23, br. 1, str. 29-40.

23. Fama,E.F. (1970). *Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work*. The Journal of Finance, Vol.25, No. 2, Papers and Proceedings of the Twenty-Eighth Annual Meeting of the American Finance Association New York, N. Y. decembar, 28-30, 1969 str. 383-417.

24. Fama, E.F., French, K.R. (1992). *The Cross-Section of Expected Stock Returns*. The Journal of Finance, vol.47, br. 2, str. 427-465.

25. Feeney, G.J., Hamada, K., Hester, D.D., Lepper, S., Phelps, E.S., Royama, S., Rosett, R.N., Tobin, J. (1967). *Risk Aversion and Portfolio Choice*. Cowles Foundation for Research in Economics at Yale University, mon. 19.

26. Friend, I., Blume, M. (1970). Measurement of Portfolio Performance Under Uncertainty. The American Economic Review, vol. 60, br. 4, str. 561-575.

27. Gardner, J. (2019). *Allocating in the presence of dominance: a mean-variance portfolio choice economic experiment*. Gettysburg Economic Review 11(1):4

28. Hasiuke, T., Katagiri, H. (2014). *Risk-Controlled Multiobjective Portfolio Selection Problem Using a Principle of Compromise*. Mathematical Problems in Engineering, str. 7.

29. Jagannathan, R., Ma, T. (2003). Risk Reduction in Large Portfolios: Why Imposing the Wrong Constraints Helps," Journal of Finance, vol. 58, br. 4, str. 1651-1684.

30. Jacobs, Bruce I., Kenneth L. Levy, and Harry M.Markowitz. (2006). *Trimability and Fast Optimization of Long-Short Portfolios*. Financial analysts journal. vol. 62, br. 2, 2006. CFA institute.

31. Jensen, M.C. (1972). *Capital Markets: Theory and Evidence*. The Bell Journal of Economics and Management Science, vol. 3, br. 2, str. 357-398.

32. Karandikar, R L., Tapen, S. (2012). *Modelling in the Spirit of Markowitz Portfolio Theory in a Non-Gaussian World*. Current Science, vol. 103, br. 6, str. 666–72.

33. Klein, R. W., Bawa, V. (1976). The effect of estimation risk on optimal portfolio choice, Journal of Financial Economics, Vol. 3, br. 3, str. 215–231.

34. Kou, G., Chao, X., Peng, Y., Alsaadi, F.E., Herrera-Viedma, E. (2019). MACHINE LEARNING METHODS FOR SYSTEMIC RISK ANALYSIS IN FINANCIAL SECTORS. Technological and Economic Development of Economy. vol. 25, br. 5, str. 716-742.

35. Krugman, P.R., Obstfeld, M. (2009). *Međunarodna ekonomija teorija i politika* (osmo izdanje). DATA STATUS. Beograd

36. Lažetić, N. (1991). *Matematika II/1*. Beograd. Naučna knjiga.

37. Ledoit, O., Wolf, M. (2003). *Improved Estimation of the Covariance Matrix of Stock Returns with an Application to Portfolio Selection.* Journal of Empirical Finance, vol. 10, br. 5, str. 603-621

38. Ledoit, O., Wolf, M. (2004). A Well-Conditioned Estimator for Large-Dimensional Covariance Matrices. Journal of Multivariate Analysis, vol. 88, br. 2, str. 365-411.

39. Levy, H., Sarnat, M. (1971). *Two-Period Portfolio Selection and Investors' Discount Rates*. The Journal of Finance, vol. 26, br. 3, str. 757-761.

40. Lintner, J. (1965). Security Prices, Risk and Maximal Gains from Diversification. The Journal of Finance, vol. 20, br. 4, str. 587-615.

41. Liu, S.C., Wang, S.Y., Qiu, W.H. (2010) *A Mean-Variance-Skewness Model for Portfolio Selection with Transaction Costs,* International Journal of Systems Science, vol. 34, str. 255-262.

42. Lo, A.W. (2007). Efficient Markets Hypothesis. The New Palgrave: A Dictionary of Economics, second edition, New Zork: Palgrave McMillan.

43. Mangram,M.E. (2013). *A simplified perspective of the Markowitz portfolio theory*. Global journal of business research, vol. 7, br. 1, 2013

44. Mankju, G.N. (2008). *Principi ekonomije* (treće izdanje). Ekonomski fakultet Beograd.

45. Mann, P.S. (2009). *Uvod u statistiku* (šesto izdanje). Ekonomski fakultet Beograd.

46. Marić,N. (2002). *Teme iz kvantitativnih metoda*. Beograd: Bane&Co.

47. Marić,N. (2003). *Finansijska matematika*. Beograd: Bane&Co.

48. Markowitz,H.M. (1952). *Portfolio Selection*.The Journal of Finance, vol.7, br. 1, str. 77-91.

49. Markowitz, H.M. (2000). *Mean-Variance Analysis in Portfolio Choice and Capital Markets*. Frank J. Fabozzi Associates New Hope, Pennsylvania. Printing of Revised Reissue with new Chapter 13 in 2000. Izdato prvi put u 1987.

50. Markowitz, H.M., Todd, P., Xu, G. Yamane, Y. (1993) *Computation of Mean-Semivariance Effcient Sets by the Critical Line Algorithm*, Annals of Operational Research 45, str. 307-317.

51. Merton, R.C. (1969*). Lifetime Portfolio Selection under Uncertainty: The Continuous-Time Case*. The Review of Economics and Statistics, vol. 51, br. 3, str. 247-257

52. Merton, C. R. (1972). An Analytic Derivation of the Efficient Portfolio Frontier. The Journal of Financial and Quantitative Analysis, vol. 7, br. 4, str. 1851-1872.

53. Miličić, P.M &Ušćumlić, M.P (1984). *Elementi više matematike 1*. Beograd. Naučna knjiga.

54. Miličić, P.M., Trifunović, M.N. &Ušćumlić, M.P. (1986). *Elementi više matematike 2*. Beograd. Naučna knjiga.

55. Mishkin, F.S. (2006). *Monetarna ekonomija, bankarstvo i finansijska tržišta* (sedmo izdanje). Data status, Beograd.

56. Moskowitz, T.J. (2003) *An Analysis of Covariance Risk and Pricing Anomalies*, Review of Financial Studies, vol. 16, br. 2, str. 417-457

57. Mynbayeva, E., Lamb, J, Zhao, Y. (2021) *Why estimation alone causes Markowitz portfolio selection to fail and what we might do about it*, European Journal of Operational Research, ISSN 0377-2217.

58. Peng, H., Gan, M., Chen, X. (2008) *A Mean-Variance Model for Optimal Portfolio Selection with Transaction Costs*, IFAC Proceedings Volumes, vol. 41, br. 2, str. 1627-1632,

59. Psastor, L., Stambaugh, R. (2000), Comparing asset pricing models: An investment perspective, Journal of Financial Economics, vol. 56, br. 3, str. 335–381.

60. Perold, Andre F. (1984). *Large-scale portfolio optimization*. Management science, vol. 30, br. 10, str. 1143-1160.61. Sharpe,W.F. (1964). *Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Condition of Risk*. The Journal of Finance, vol. 19, br. 3, str. 425-442.

62. Sharpe,W.F. (1965). Risk-Aversion in the Stock Market: Some Empirical Evidence. The Journal of Finance, vol. 20, br 3, str. 416-422.

63. Sharpe,W.F. (1966). *Security Prices, Risk and Maximal Gains from Diversification: Reply*. The Journal of Finance, vol. 21, br. 4, str.743-744.

64. Sharpe,W.F., Alexander,G.J. &Bailey,J.V. (1998). *Investments* (sixth edition). Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall.

65. Ukhov, A. D. (2005). *Expanding The Frontier One Asset at a Time.* Indiana University.

66. Tobin, J. (1956): *Liquidity preference as behavior towards risk*. Cowles Foundation Discussion Paper br. 14.

67. Van Horne,J.C. (2001). *Financial management and policy* (twelfth edition): Prentice-Hall International Editions.

68. Van Horne, J.C., Wachowicz JR., J.M. (2007). *Osnovi finansijskog menadžmenta* (dvanaesto izdanje). DATA STATUS. Beograd

69. Varian, H. (1996). *A Portfolio of Nobel Laureates: Markowitz, Miller and Sharpe*., The Journal of Economic Perspectives, vol 7, br. 1, str. 159-169.

70. Vranić, V. (1965). *Vjerojatnost i statistika*. Zagreb. Tehnička knjiga.

71. Živković, B (2006). *Ekonomski Anali No. 169*. Izdanje Ekonomskog fakulteta u Beogradu. Godina LI, br. 169.

72. Wang, H. (2003). *An Asset Allocation Sub-Puzzle*. Yale University.

Internet reference:

73. 3M company. (2018, decembar). NYSE. Currency in USD. Preuzeto decembar, 07, 2018. sa **https://finance.yahoo.com/quote/MMM/history?p=MMM**

74. American Express Company. (Ibidem).NYSE. Ibidem. **https://finance.yahoo.com/quote/AXP/history?p=AXP**

75. Apple Inc. (Ibidem). NasdaqGS. Ibidem.
https://finance.yahoo.com/quote/AAPL/history?p=AAPL

76. The Boeing Company. (Ibidem). NYSE. Ibidem.
https://finance.yahoo.com/quote/BA/history?p=BA

77. Caterpillar Inc. (Ibidem). NYSE. Ibidem.
https://finance.yahoo.com/quote/CAT/history?p=CAT

78. Chevron Corporation. (Ibidem). NYSE. Ibidem.
https://finance.yahoo.com/quote/CVX/history?p=CVX

79. Cisco Systems, Inc. (Ibidem). NasdaqGS. Ibidem.
https://finance.yahoo.com/quote/CSCO/history?p=CSCO

80. The Coca-Cola Company. (Ibidem). NYSE. Ibidem.
https://finance.yahoo.com/quote/KO/history?p=KO

81. DowDuPont Inc. (Ibidem). Nyse. Ibidem.
https://finance.yahoo.com/quote/DWDP/history?p=DWDP

82. Exxon Mobil Corporation. (Ibidem). Nyse. Ibidem.
https://finance.yahoo.com/quote/XOM/history?p=XOM

83. The Goldman Sachs Group, Inc. (Ibidem). NYSE. Ibidem.
https://finance.yahoo.com/quote/GS/history?p=GS

84. The Home Depot, Inc. (Ibidem). NYSE. Ibidem.
https://finance.yahoo.com/quote/HD/history?p=HD

85. International Business Machines Corporation. (Ibidem). NYSE. Ibidem.
https://finance.yahoo.com/quote/IBM/history?p=IBM

86. Intel Corporation. (Ibidem). NasdaqGS. Ibidem.
https://finance.yahoo.com/quote/INTC/history?p=INTC

87. Johnson & Johnson. (Ibidem). NYSE. Ibidem.
https://finance.yahoo.com/quote/JNJ/history?p=JNJ

88. JPMorgan Chase & Co. (Ibidem). NYSE. Ibidem.
https://finance.yahoo.com/quote/JPM/history?p=JPM

89. McDonald's Corporation. (Ibidem). NYSE. Ibidem.
https://finance.yahoo.com/quote/MCD/history?p=MCD

90. Merck & Co., Inc. (Ibidem). NYSE. Ibidem.
https://finance.yahoo.com/quote/MRK/history?p=MRK

91. Microsoft Corporation. (Ibidem). NasdaqGS. Ibidem.
https://finance.yahoo.com/quote/MSFT/history?p=MSFT

92. NIKE, Inc. (Ibidem). NYSE. Ibidem.
https://finance.yahoo.com/quote/NKE/history?p=NKE

93. Pfizer Inc. (Ibidem). NYSE. Ibidem.
https://finance.yahoo.com/quote/PFE/history?p=PFE

94. The Procter & Gamble Company. (Ibidem). NYSE. Ibidem.
https://finance.yahoo.com/quote/PG/history?p=PG

95. The Travelers Companies, Inc. (Ibidem). NYSE. Ibidem.
https://finance.yahoo.com/quote/TRV/history?p=TRV

96. UnitedHealth Group Incorporated. (Ibidem). NYSE. Ibidem.
https://finance.yahoo.com/quote/UNH/history?p=UNH

97. United Technologies Corporation. (Ibidem). NYSE. Ibidem.
https://finance.yahoo.com/quote/UTX/history?p=UTX

98. Verizon Communications Inc. (Ibidem). NYSE. Ibidem.
https://finance.yahoo.com/quote/VZ/history?p=VZ

99. Visa Inc. (Ibidem). NYSE. Ibidem.
https://finance.yahoo.com/quote/V/history?p=V

100. Walmart Inc. (Ibidem). NYSE. Ibidem.
https://finance.yahoo.com/quote/WMT/history?p=WMT

101. Walgreens Boots Alliance, Inc. (Ibidem). NasdaqGS. Ibidem.
https://finance.yahoo.com/quote/WBA/history?p=WBA

102. The Walt Disney Company. (Ibidem). NYSE. Ibidem.
https://finance.yahoo.com/quote/DIS/history?p=DIS

103. Index Funds and Optimal Portfolios. (2020, jul). Preuzeto jul, 05, 2020. sa
http://www.moneychimp.com/articles/risk/index_investing.htm