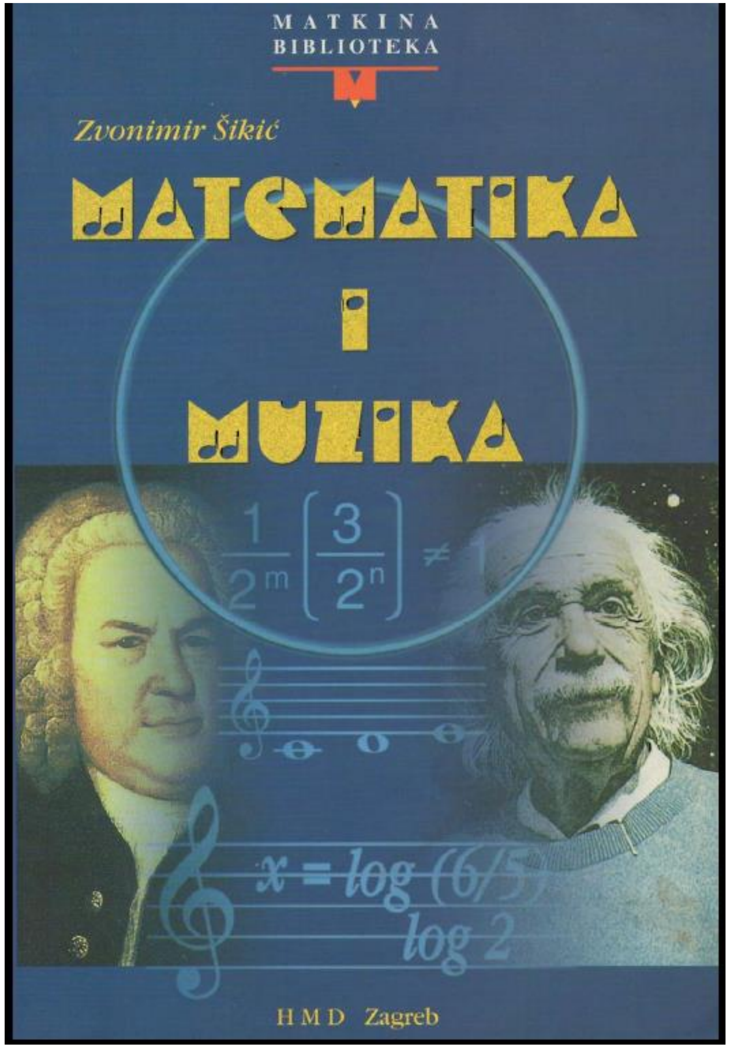
DVANAEST VELIČANSTVENIH

Zvonimir Šikić

Matematika i muzika, Hrvatsko matematičko društvo, 1999.

(uz Ščekićev „Glazbeni dodatak“ Profil, 2013.)


MATKINA
BIBLIOTEKA
Zvonimir Šikić
MATEMATIKA
I
MUZIKA
$x = \frac{\log(6/5)}{\log 2}$
HMD Zagreb


Matematika
i muzika
Zvonimir Šikić
Zoran Šćekić
PROFIL

FREKVENCIJA	1	4/3	3/2	2
TON	C	F	G	c

INTERVAL

4/3 kvarta

3/2 kvinta

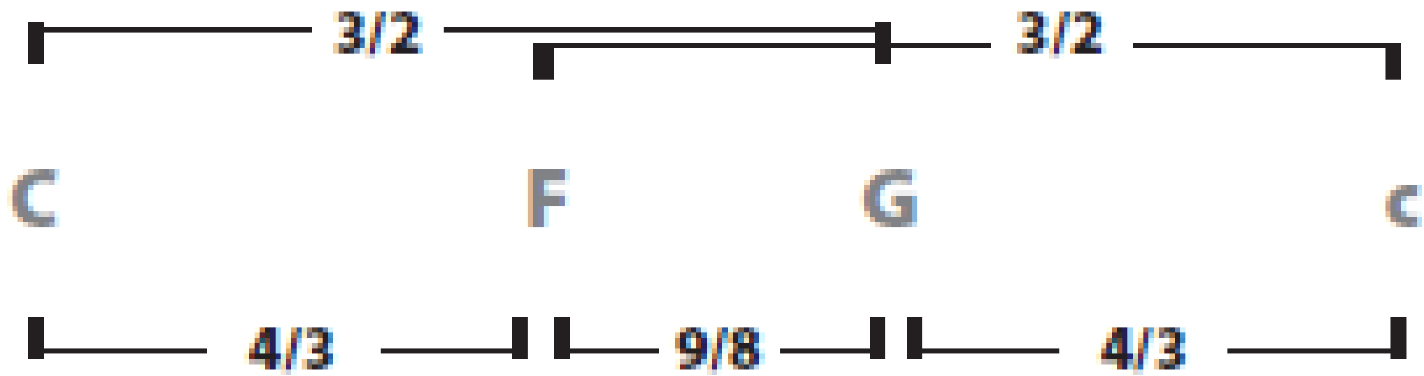
2/1 oktava

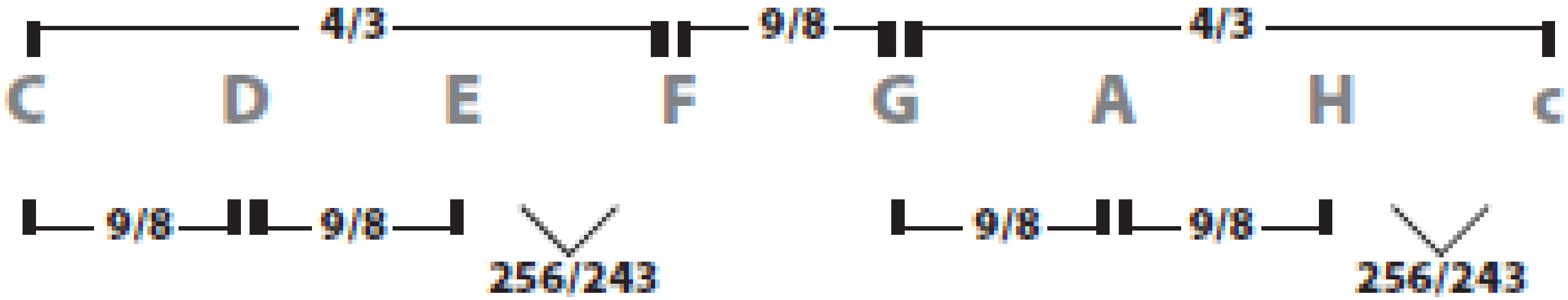
c/F = 2/(4/3) = 3/2   c je kvinta na F

c/G = 2/(3/2) = 4/3   c je kvarta na G

G/F = (3/2)/(4/3) = 9/8 (204 c)

Interval od F do G, veličina kojeg je 9/8, zove se **cijeli ton** ili velika sekunda.



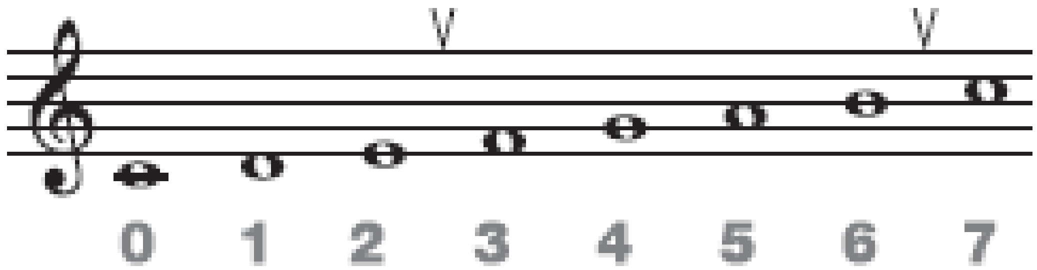


EF = Hc = $(4/3)/(9/8)^2$ = 256/243 je (dijatonski) **poluton.** (90 cent)

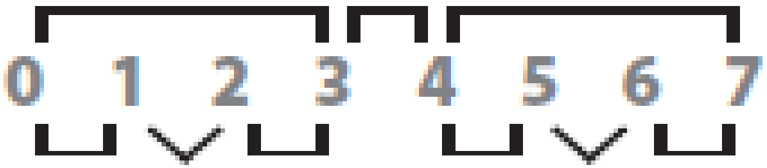
Za ovako definirane tonove i polutonove imamo da su dva polutona manja od jednog cijelog tona:

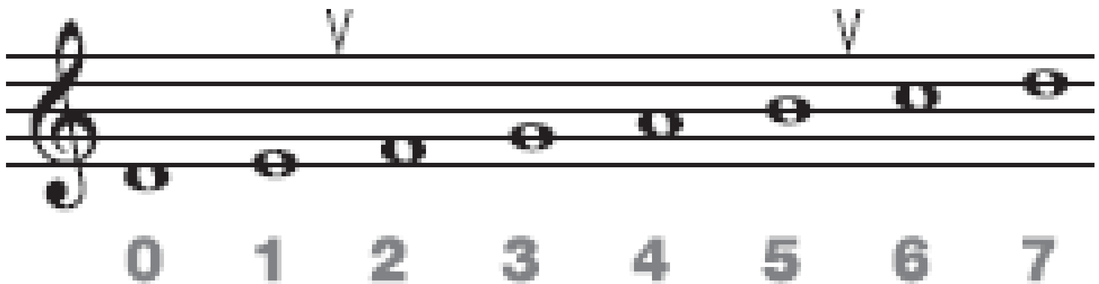
$(256/243)^2 = 1.110 < 1.125 = 9/8$. (90+104 cent)

JONSKI MODUS (dur)



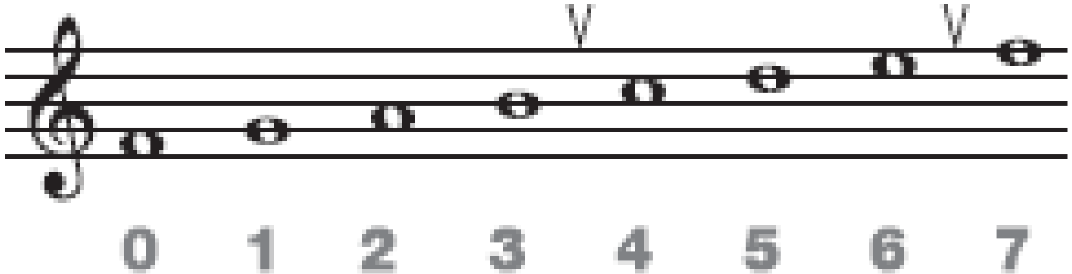
DORSKI MODUS



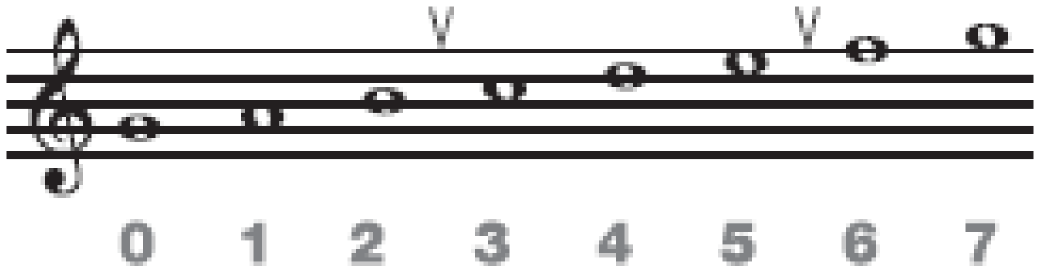


FRIGIJSKI MODUS

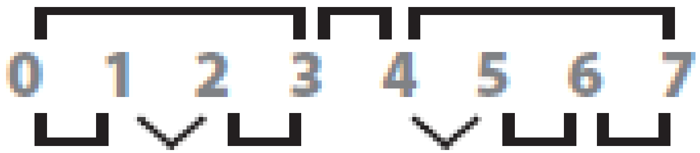
LIDIJSKI MODUS

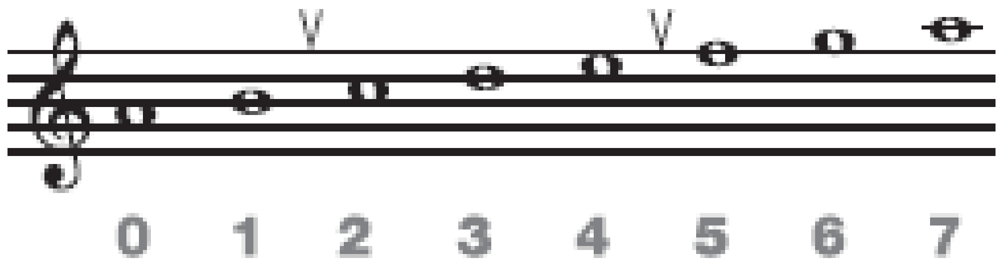


MIKSOLIDIJSKI MODUS



EOLSKI MODUS (prirodni mol)





“Bijeli” lokrijski modus iz H ne sadrži kvintu, pa se ne upotrebljava.

Twinkle Twinkle Little Star in 7 Modes

https://www.youtube.com/watch?v=Hn7Enbdd6vI

The Modes Ranked by Brightness

https://www.youtube.com/watch?v=jNY_ZCUBmcA

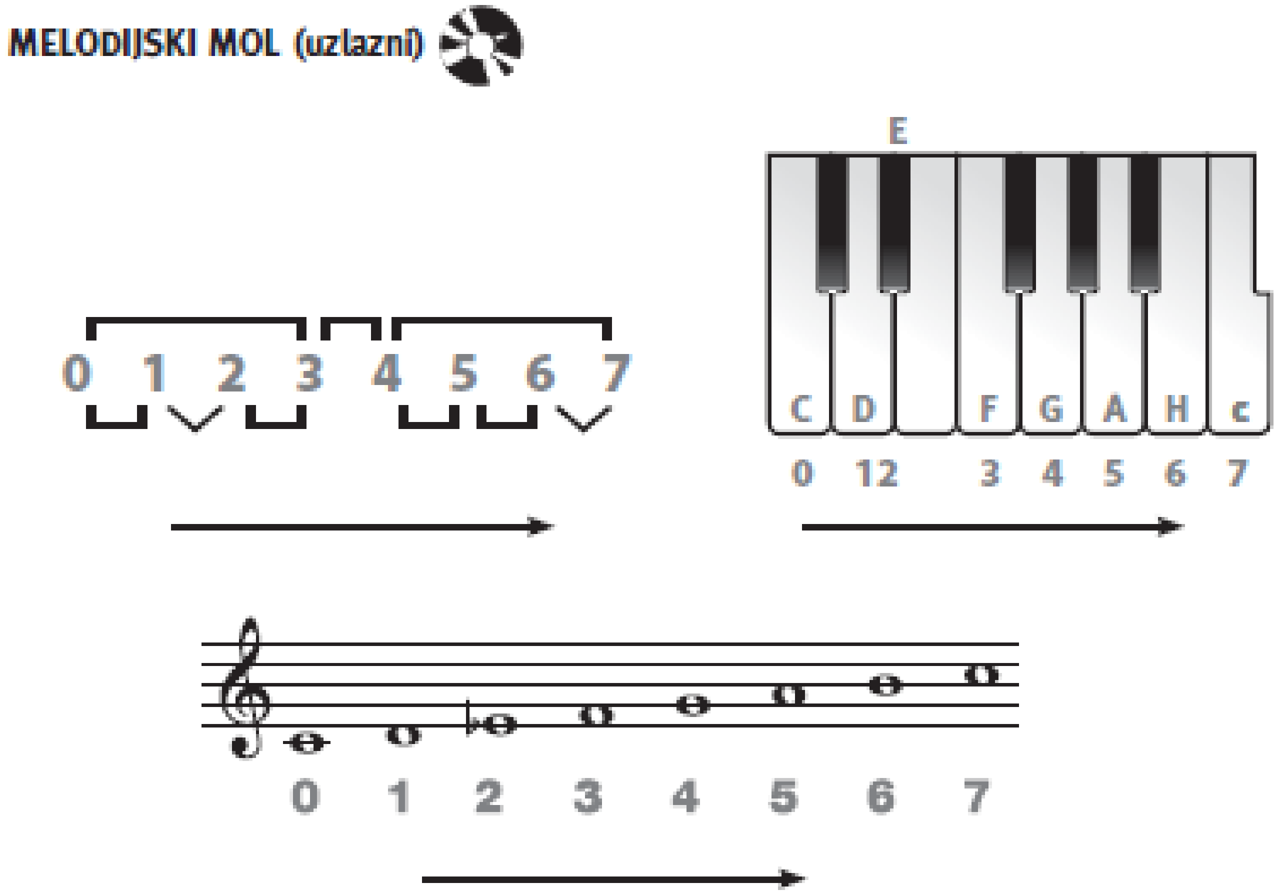
1 Beatles song, 7 modes

https://www.youtube.com/watch?v=roFVo0ePOZw

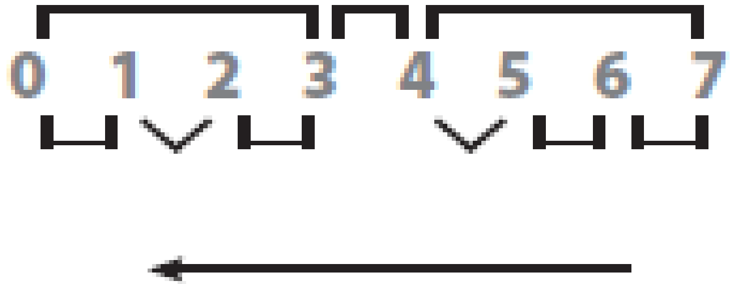
Happy Birthday! (In All 7 Modes)

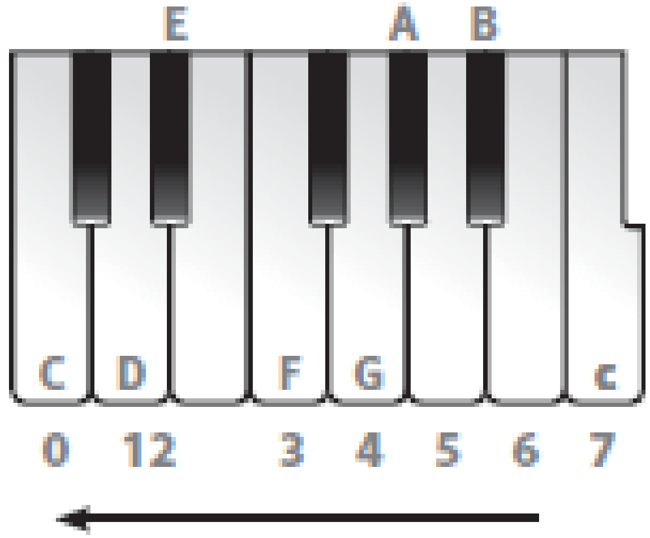
https://www.youtube.com/watch?v=oKk28uJm6Mc

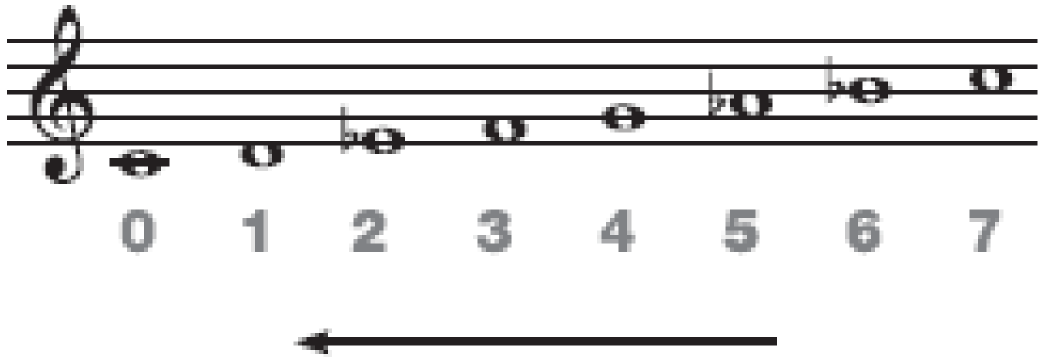
Naravno, oktava se može podijeliti i skalama koje nisu “bijele“.



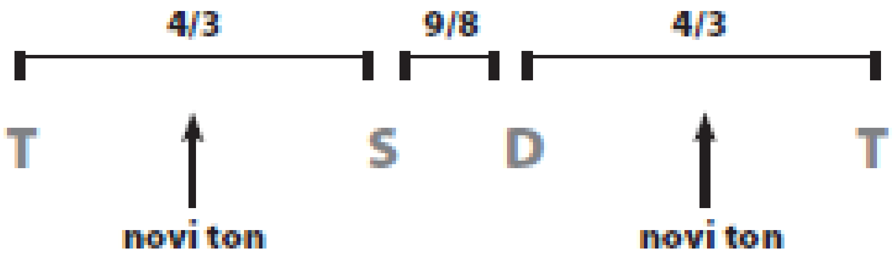
MELODIJSKI MOL (silazni)

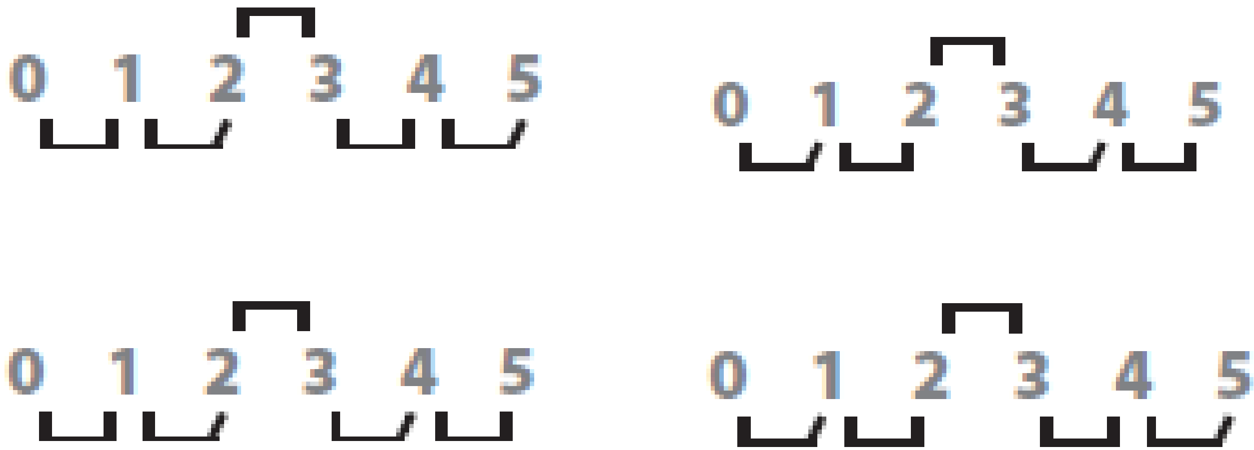


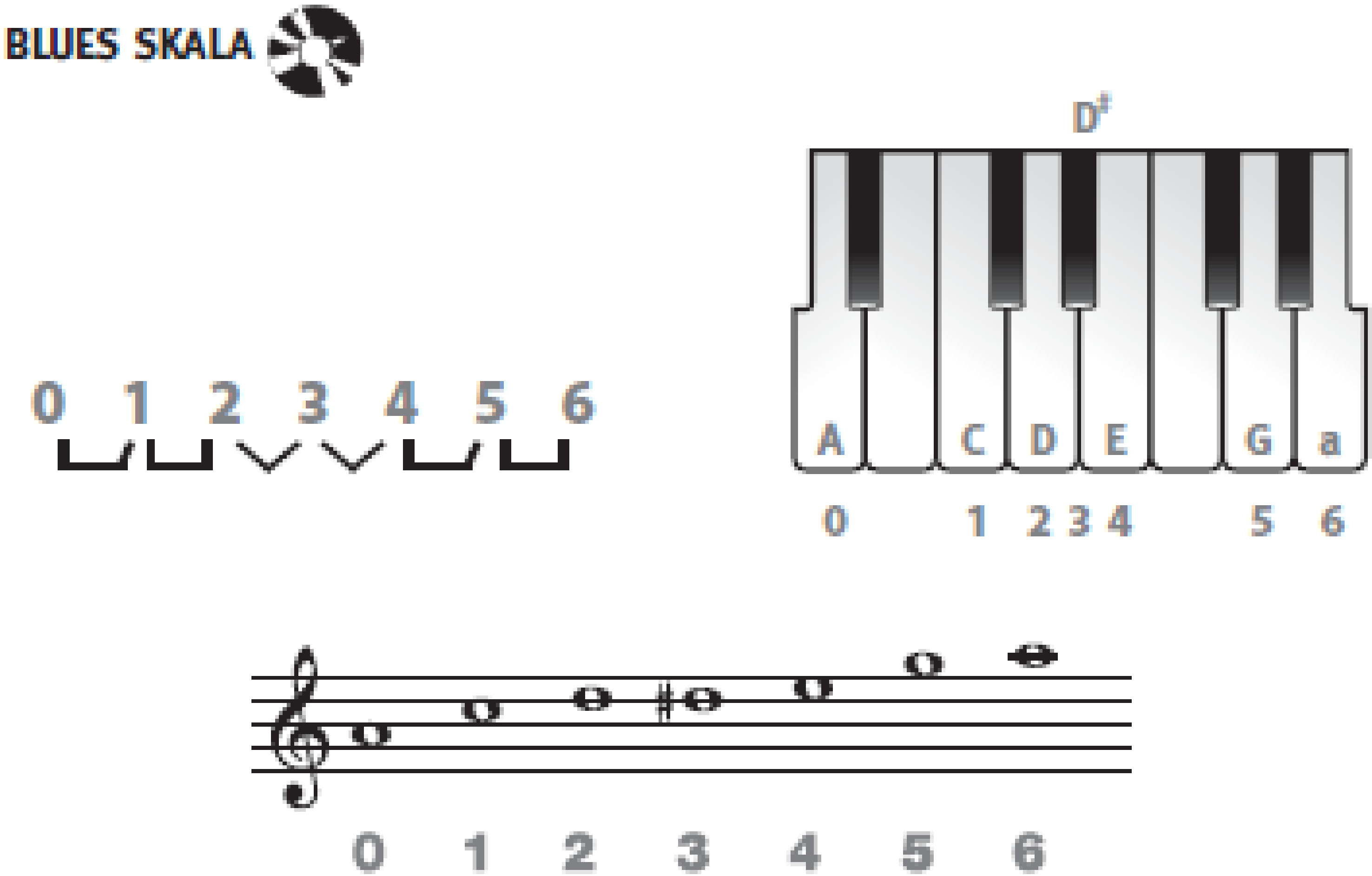




Pentatonske skale

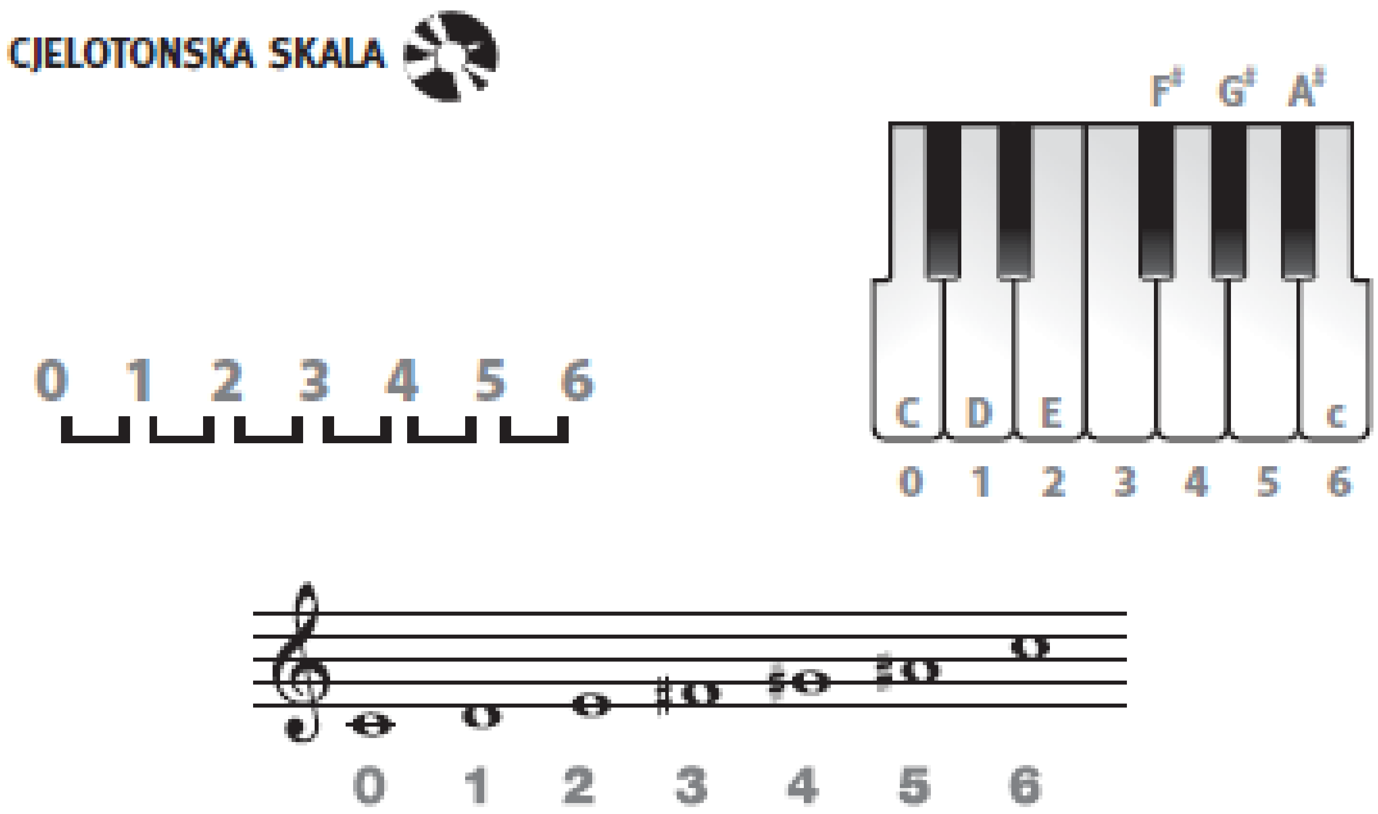






https://www.piano-keyboard-guide.com/piano-blues-scales.html

1.59

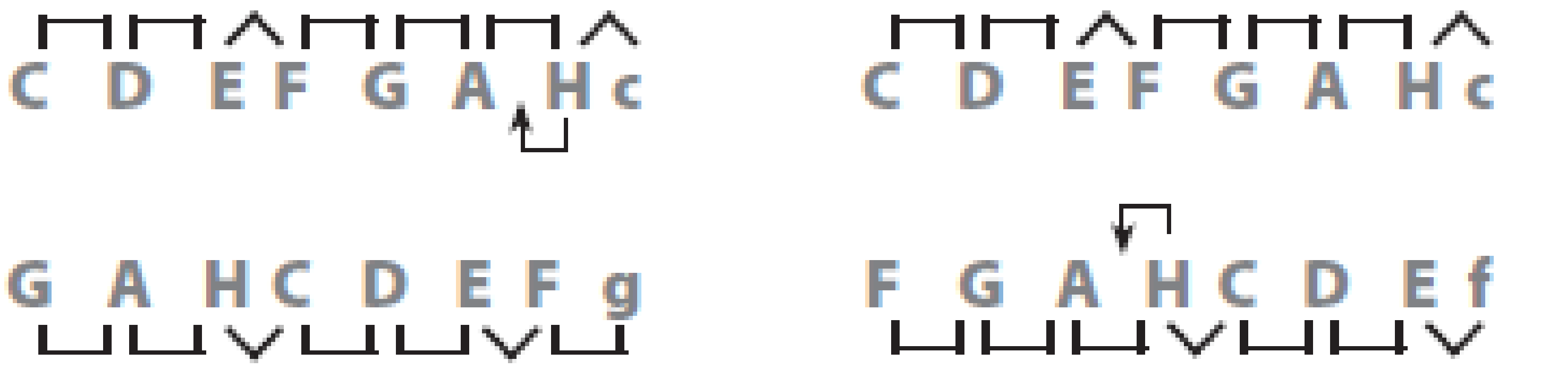


https://hellomusictheory.com/learn/whole-tone-scale/ 4.35 5.29

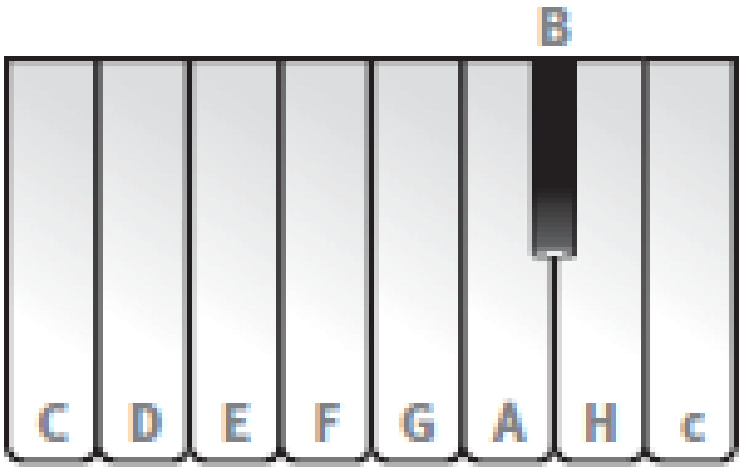
Songs to recognise different scales by ear

https://www.youtube.com/watch?v=Al1Smeh4usc

Na prijelazu iz 10. u 11. stoljeće počinju eksperimenti s *polifonijom*. Prvi glas izvodi melodiju, a drugi ga prati za kvartu ili kvintu više.



Tritonus FH (3 cijela tona, a ne 3.5 odnosno 2.5) izrazito je disonantan i teško ga je i otpjevati. Ta se teškoća otklanjala snižavanjem tona H za jedan poluton. Tako je uveden B i prva crna tipka na klavijaturi.

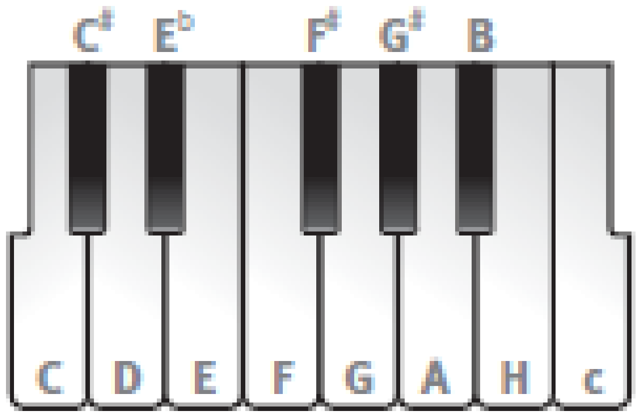


Pomak iz H u B u prvom glasu ukida vođicu. Zato je bolje rješenje pomak iz F u F# u drugom glasu, jer otklanja tritonus i ne ukida vođicu.

Naravno, nove note B i F# prirodno vode prema novim kvintama:

$$E^{\flat} \leftarrow B, F^{\sharp} \rightarrow C^{\sharp} \rightarrow G^{\sharp}$$

Tako je oktava konačno podijeljena na 12 polutonova, a klavijature su dobile još po 4 crne tipke unutar oktave



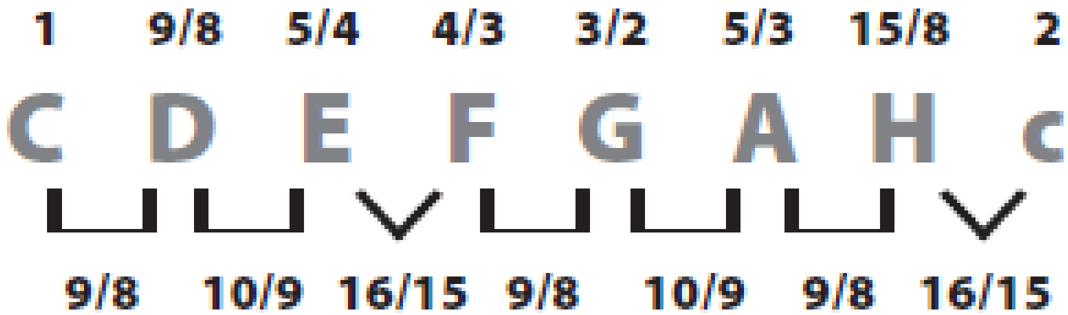
Ta razdioba nije postala skalom (sredstvom skladanja) do 20. stoljeća.

Ona je omogućila *polifonsko* skladanje u *septatonskim* modusima i otvorila vrata *harmonijskom* skladanju, (koje nema jasne granice s *polifonskim*).

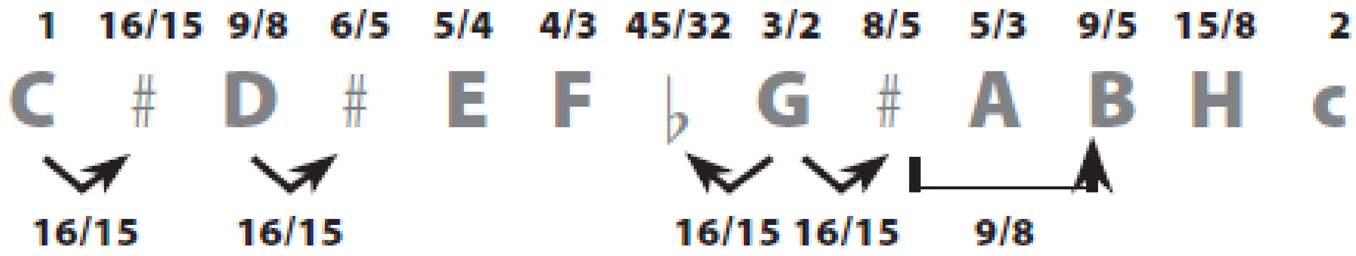
Do sada nismo uzimali u obzir tercu, E = 5/4:

$$G/F = (3/2)/(4/3) = 9/8 \qquad F/E = (4/3)/(5/4) = 16/15$$

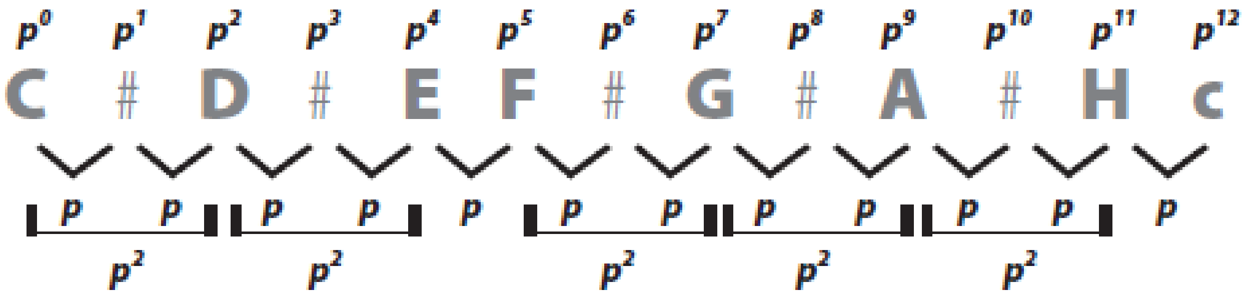
$$D/C = 9/8 \qquad E/D = (5/4)/(9/8) = 10/9$$



Tu skalu preporuča Ptolemej, najveći antički astronom. Polutonovi su duljine 16/15 (112), dok su cijeli tonovi različitih duljina, 9/8 (204) i 10/9 (182)



(Omjeri su omjeri najmanjih brojeva. Ali 71,92,133)



$p = 2^{1/12} \approx 1.06$. Udaljenost tona od tonike označavamo eksponentom.

Time s multiplikativne skale prelazimo na aditivnu logaritamsku skalu.

Za preciznije određenje intervala uvodi se manja jedinica *centila*. Ona je stoti dio polutona, pa je $s = 2^{1/1200} \approx 1.00058$. Dakle, $\log_s (p^n) = 100n$

mala sekunda	= 100 *cent*	kvinta	= 700 *cent*
velika sekunda	= 200 *cent*	mala seksta	= 800 *cent*
mala terca	= 300 *cent*	velika seksta	= 900 *cent*
velika terca	= 400 *cent*	mala septima	= 1000 *cent*
kvarta	= 500 *cent*	velika septima	= 1100 *cent*
tritonus	= 600 *cent*	oktava	= 1200 *cent*

Za proizvoljne intervale imamo $\log_s (m/n)$, što daje

16/15	= mala sekunda	=	111.73 *cent*	3/2	= kvinta	=	702.00 *cent*
9/8	= velika sekunda	=	203.91 *cent*	8/5	= mala seksta	=	813.69 *cent*
6/5	= mala terca	=	315.64 *cent*	5/3	= velika seksta	=	884.36 *cent*
5/4	= velika terca	=	386.31 *cent*	9/5	= mala septima	=	1017.60 *cent*
4/3	= kvarta	=	498.00 *cent*	15/8	= velika septima	=	1088.27 *cent*
45/32	= tritonus	=	590.22 *cent*	2/1	= oktava	=	1200.00 *cent*

Radi o različitim ugađanjima "istih" tonova. Kvarte, kvinte i sekunde gotovo su iste, ali terce, sekste i septime pokazuju veća odstupanja.

Glavna prednost prirodne intonacije, njezina točnost (kvinta je 702 *cent*, a ne 700, mala terca je 315.64 *cent*, a ne 300), gubi se pri transponiranju.

C	♭	D	♭	E	F	♭	G	♭	A	B	H	c	♭	d	♭	e	f	♭	g
0	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000	1100	1200	1300	1400	1500	1600	1700	1800	1900
			0	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000	1100	1200				
				0	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000	1100	1200			
							0	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000	1100	1200

C	#	D	#	E	F	♭	G	#	A	B	H	c	#	d	#	e	f	♭	g
0	112	204	316	386	498	590	702	814	884	1018	1088	1200	1312	1404	1516	1586	1698	1790	1902
			0	70	182	274	386	498	568	702	772	884	996	1088	1200				
				0	112	204	316	428	498	632	702	814	926	1018	1130	1200			
							0	112	182	316	386	498	610	702	814	884	996	1088	1200

Glazbena povijest nije išla putem glazbene teorije. Teorijski je opravdano razmišljati o Ptolemejevim intervalima, ali ih je teško realizirati na konkretnim glazbalima. Tko može točno otpjevati (ili ugoditi) dvije različite velike sekunde 9/8 i 10/9, malu sekundu 16/15 itd. ili $2^{1/12}$, $2^{2/12}$, $2^{3/12}$ itd.

Najlakše je, ipak, otpjevati i prepoznati savršene oktave i kvinte, pa je zato u cijeloj antici i srednjem vijeku standardno ugađanje bilo Pitagorino ugađanje kvintama i oktavama.

S današnjim frekvenciometrima to više nije problem. Možda baš zato prirodna intonacija opet nalazi sljedbenike.

Eksperimentirajući sa slušateljima nenaviklima na prirodnu intonaciju, ustanovljeno je da im ista glazba zvuči tužno i melankolično, kada se izvede u točnoj intonaciji, a sretno i veselo, kada se izvede u jednolikoj.

“Jednolikost” izaziva uzbuđenje i nervozu, intenzivna je i aktivna.
“Točnost” smiruje, čak izaziva depresiju.

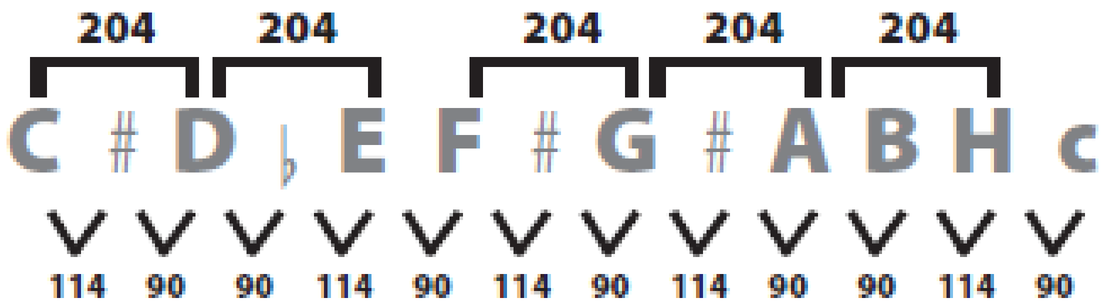
Depresivni efekt je apstinentska kriza neurotičnih ovisnika o “jednolikosti”.

“Jednolikost” je bezbojna, siva. “Točnost” je obojena, bogata i puna.

Pitagorino Es - Gis ugađanje izgleda ovako:

$$E^{\flat} \leftarrow B \leftarrow F \leftarrow C \rightarrow G \rightarrow D \rightarrow A \rightarrow E \rightarrow H \rightarrow F^{\#} \rightarrow C^{\#} \rightarrow G^{\#}$$

C	#	D	♭	E	F	#	G	#	A	B	H	c
1/1	2187/2048	9/8	32/27	81/64	4/3	729/512	3/2	6561/4096	27/16	16/9	243/128	2/1
0	114	204	294	408	498	612	702	792	906	996	1110	1200



Sve kvinte koje smo neposredno ugodili sastoje se od 4 dijatonska polutona i 3 apotoma, $4x90 + 3x114 = 702$, i savršene su. Zadnja vučja kvinta s 5 dijatona i 2 apotoma, $5x90 + 2x114 = 678$ ne zvuči dobro.

I za zadnju kvartu je $3x114 + 2x90 = 522$, a ne $3x90 + 2x114 = 498$.

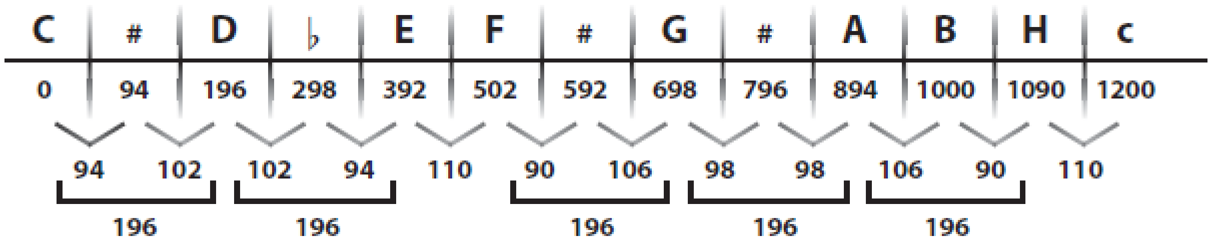
Radi se o tome da 12 kvinti ne prekriva **točno** 7 oktava.

$$\mathbf{7 \times 1200 < 12 \times 700 + 12 \times 2}$$

Vučja kvarta je za 24 *centa* prevelika, a vučja kvinta za 24 *centa* premala. Interval od 24 *centa* zove se *Pitagorin zarez*. Uočite da je on jednak razlici apotoma od 114 *centa* i dijatona od 90 *centa*, što nije slučajno.

(Generalized Pythagorean Comma, *Art & Science 2011,* 169 – 174, 2014.)

Srednjetonsko ugađanje:



NA	M. TERCA		V. TERCA		KVINTA	
C	E♭	298	E	392	G	698
C#	E	298	F	408	G#	702
D	F	306	F#	396	A	698
E♭	F#	294	G	400	B	702
E	G	306	G#	404	H	698
F	G#	294	A	392	C	698
F#	A	302	B	408	C#	702
G	B	302	H	392	D	698
G#	H	294	C	404	E♭	702
A	C	306	C#	400	E	698
B	C#	294	D	396	F	702
H	D	306	E♭	408	F#	702

Zašto oktava sadrži 12 polutonova?

Čak i pentatonske, sekstatonske i septatonske skale izabiru svoje tonove iz temeljne dodekatonske raspodjele.

Postoje i raspodjele koje imaju 17 tonova u oktavi (v. 5 . MM). Mikro tonski skladatelji 20. st. rabe skalu s 41 mikro tonom pa i s mnogim drugim brojevima.

No prevlast veličanstvenih 12 još je uvijek neupitna.

Ima li ikakvih racionalnih razloga kojima bismo mogli objasniti ovu nadmoć dodekatonske raspodjele?

Pitagorini intervali 1 : 2 : 3 : 4 : 5 prirodno vode 12-tonskoj raspodjeli oktave, ali mogu dovesti i do 17-tonske (v. 4. MM).

Razmislimo još jednom kako bismo došli do tonskog materijala, dajući prednost Pitagorinim malim omjerima.

Odaberimo prvi ton i njegovu frekvenciju kao jediničnu.

U skladu s Pitagorom dodajmo našem jediničnom tonu sve one tonove koji su za određeni broj oktava ispod i iznad njega.

U području frekvencija koje čujemo (od 20 Hz do 20 000 Hz) to je najviše 10 oktava.

$$2^{-5} \leftarrow 2^{-4} \leftarrow 2^{-3} \leftarrow 2^{-2} \leftarrow 2^{-1} \leftarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 2^{2} \rightarrow 2^{3} \rightarrow 2^{4} \rightarrow 2^{5}$$

Rijetki su glasovi koji se mogu kretati izvan raspona od dvije oktave, što znači da su im zasad na raspolaganju najviše tri tona.

Koji osim toga zvuče isto!

Zato ćemo, u skladu s Pitagorom, našem notnom materijalu dodati još i kvinte te njima odgovarajuće oktave:

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
\cdots & \frac{1}{2^2}\left(\frac{3}{2}\right)^{-3} & \leftarrow & \frac{1}{2^2}\left(\frac{3}{2}\right)^{-1} & \leftarrow & \frac{1}{2^2} & \rightarrow & \frac{1}{2^2}\left(\frac{3}{2}\right) & \rightarrow & \frac{1}{2^2}\left(\frac{3}{2}\right)^{2} & \rightarrow & \frac{1}{2^2}\left(\frac{3}{2}\right)^{3} & \cdots \\
\cdots & \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{-3} & \leftarrow & \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{-1} & \leftarrow & \frac{1}{2} & \rightarrow & \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right) & \rightarrow & \frac{1}{2^2}\left(\frac{3}{2}\right)^{2} & \rightarrow & \frac{1}{2^2}\left(\frac{3}{2}\right)^{3} & \cdots \\
\cdots & \left(\frac{3}{2}\right)^{-3} & \leftarrow & \left(\frac{3}{2}\right)^{-1} & \leftarrow & 1 & \rightarrow & \left(\frac{3}{2}\right) & \rightarrow & \left(\frac{3}{2}\right)^{2} & \rightarrow & \left(\frac{3}{2}\right)^{3} & \cdots \\
\cdots & 2\left(\frac{3}{2}\right)^{-3} & \leftarrow & 2\left(\frac{3}{2}\right)^{-1} & \leftarrow & 2 & \rightarrow & 2\left(\frac{3}{2}\right) & \rightarrow & 2\left(\frac{3}{2}\right)^{2} & \rightarrow & 2\left(\frac{3}{2}\right)^{3} & \cdots \\
\cdots & 2^2\left(\frac{3}{2}\right)^{-3} & \leftarrow & 2^2\left(\frac{3}{2}\right)^{-1} & \leftarrow & 2^2 & \rightarrow & 2^2\left(\frac{3}{2}\right) & \rightarrow & 2^2\left(\frac{3}{2}\right)^{2} & \rightarrow & 2^2\left(\frac{3}{2}\right)^{3} & \cdots \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots &
\end{array}
$$

Na taj način dolazimo do beskonačno mnogo tonova, unutar svake oktave, koji su zadani omjerima oblika:

$$\frac{1}{2^m}\left(\frac{3}{2}\right)^n \qquad m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Za svaki eksponent n imamo po jedan novi ton, koji se pomoću eksponenata m pomiče za m oktava niže ili više.

$$\frac{1}{2^m}\left(\frac{3}{2}\right)^n \neq 1 \quad \text{jer je} \quad 3^n \neq 2^{m+n},$$

tj. naš postupak stalno generira nove tonove.

Prirodno je stati na onom tonu koji se, vraćen u osnovnu oktavu, približno poklapa s osnovnim tonom.

Na primjer, za 7. i 12. kvintu imamo sljedeće aproksimacije:

$$\frac{1}{2^4}\left(\frac{3}{2}\right)^7 \approx 1 \quad tj. \quad \frac{3}{2} \approx 2^{\frac{4}{7}} = 1.486 \ \ (686c)$$

$$\frac{1}{2^7}\left(\frac{3}{2}\right)^{12} \approx 1 \quad tj. \quad \frac{3}{2} \approx 2^{\frac{7}{12}} = 1.498 \ \ (700c)$$

To znači da je kvinta 3/2, u skali sa 7 tonova aproksimirana 4. tonom, a u skali s 12 polutonova sa 7. polutonom.

Nameće se pitanje nije li u skali s n tonova kvinta još bolje aproksimirana nekim drugim brojem tonova n i nekim drugim rednim brojem kvinte m.

Matematički, problem se svodi na izračunavanje razlomka m/n koji što bolje aproksimira broj x zadan zahtjevom:

$$\frac{3}{2} = 2^x \quad \text{tj.} \quad x = \log_2 \frac{3}{2} = \frac{\log(3/2)}{\log 2}$$

Budući da je $x = \log (3/2)/\log 2$ iracionalni broj, ne postoji razlomak m/n takav da je $x = m/n$. Iracionalni x moguće je samo aproksimirati razlomkom, a teorija verižnih razlomaka pokazuje nam kako se to može učiniti na najbolji način.

Verižni razlomak je razlomak oblika:

$$q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \cfrac{1}{q_4 + \cfrac{1}{\dots}}}}}$$

gdje su $q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, \dots$ prirodni brojevi, koje zovemo kvocijentima tog verižnog razlomka, a njega jednostavnije zapisujemo ovako:

$$[q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, \dots\ ].$$

Svaki konačni verižni razlomak zadaje racionalni broj:

$$[0,1,1,2]=\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}=\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{1+\frac{2}{3}}=\frac{1}{\frac{5}{3}}=\frac{3}{5}$$

I obratno, svaki racionalni broj zadan je konačnim verižnim razlomkom:

$$\frac{7}{12}=0+\frac{1}{\frac{12}{7}}=0+\frac{1}{1+\frac{5}{7}}=0+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{7}{5}}}=0+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{2}{5}}}=$$

$$=0+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{5}{2}}}}=0+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}}=[0,1,1,2]$$

Svaki iracionalni broj može se izraziti u obliku beskonačnog verižnog razlomka (i obratno):

$$\sqrt{2} = 1 + \left(\sqrt{2} - 1\right) = 1 + \frac{1}{\sqrt{2} + 1} = 1 + \frac{1}{2 + \left(\sqrt{2} - 1\right)} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\sqrt{2} + 1}} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \left(\sqrt{2} - 1\right)}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\sqrt{2} + 1}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \left(\sqrt{2} - 1\right)}}} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \ddots}}}} = [1, 2, 2, 2, 2, \ldots]$$

Ako realni broj x prikažemo u obliku verižnog razlomka

$$x = [q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, \dots \;]$$

onda su početni komadi tog verižnog razlomka, razlomci

$$x_0 = q_0 = \frac{q_0}{1} = \frac{m_0}{n_0} \qquad\qquad x_1 = q_0 + \frac{1}{q_1} = \frac{q_0 q_1 + 1}{q_1} = \frac{m_1}{n_1}$$

$$x_2 = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2}} = \frac{q_2(q_0 q_1 + 1) + q_0}{q_2 q_1 + 1} = \frac{m_2}{n_2} \quad \dots$$

Oni su, za te nazivnike, najbolje racionalne aproksimacije od x.

To znači da je m/n bolja aproksimacija od m_k/n_k samo ako je $n > n_k$.

Na primjer, najbolje racionalne aproksimacije od

$$\sqrt{2} = [1, 2, 2, 2, 2, 2, \dots],$$

su (do veličine njihovih nazivnika)

$$[1] = \frac{1}{1} \quad [1, 2] = \frac{3}{2} \quad [1, 2, 2] = \frac{7}{5} \quad [1, 2, 2, 2] = \frac{17}{12} \quad \text{itd.}$$

To preglednije zapisujemo ovako:

$$\begin{array}{cccc} [1, & 2, & 2, & 2, \dots] \\ \\ \frac{1}{1} & \frac{3}{2} & \frac{7}{5} & \frac{17}{12} \dots \end{array}$$

Osim toga, ako između aproksimacije $[q_0, q_1, q_2]$ i npr. $[q_0, q_1, q_2, 4]$ postoji neka koja je bolja od prve, ona mora biti oblika

$$[q_0, q_1, q_2, 1], [q_0, q_1, q_2, 2] \text{ ili } [q_0, q_1, q_2, 3].$$

Na primjer, između aproksimacija $[1, 2] = \frac{3}{2}$ i $[1, 2, 2] = \frac{7}{5}$ jedina moguća aproksimacija s nazivnikom 3 ili 4, možda bolja od $\frac{3}{2}$, jest $[1, 2, 1] = \frac{4}{3}$.

No, ta je aproksimacija lošija od $\frac{3}{2}$, što znači da boljih aproksimacija od $\frac{3}{2}$, s nazivnikom 3 ili 4, nema.

Ove rezultate o verižnim razlomcima možemo primijeniti na rješavanje našeg problema optimalnog broja tonova u oktavi.

$$\frac{\log(3/2)}{\log 2} = 0 + \frac{1}{\dfrac{\log 2}{\log(3/2)}} = 0 + \frac{1}{\dfrac{\log(3/2)(2/3)2}{\log(3/2)}} = 0\frac{1}{\dfrac{\log(3/2) + \log((2/3)\cdot 2)}{\log(3/2)}}$$

$$= 0 + \frac{1}{1 + \dfrac{\log(4/3)}{\log(3/2)}} = 0 + \frac{1}{1 + \dfrac{1}{\dfrac{\log(3/2)}{\log(4/3)}}} = 0 + \frac{1}{1 + \dfrac{1}{\dfrac{\log(4/3)(3/4)(3/2)}{\log(4/3)}}} =$$

$$= 0 + \frac{1}{1 + \dfrac{1}{1 + \dfrac{\log(9/8)}{\log(4/3)}}} = 0 + \frac{1}{1 + \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{\dfrac{1}{2 + \ldots}}}}$$

Nastavljajući postupak, dobili bismo:

$$\frac{\log(3/2)}{\log 2} = [0, 1, 1, 2, 2, 3, 1, 5, \dots]$$

Odgovarajuće aproksimacije izgledaju ovako:

$$\begin{array}{ccccccccc}
[0, & 1, & 1, & 2, & 2, & 3, & 1, & 5, & \dots] \\[6pt]
\frac{0}{1} & \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{3}{5} & \frac{7}{12} & \frac{24}{41} & \frac{31}{53} & \frac{179}{306} & \dots \\[6pt]
 & & & \frac{2}{3} & \frac{4}{7} & \frac{17}{29} & & \vdots & \\[6pt]
 & & & & & \cancel{\frac{10}{17}} & & \vdots &
\end{array}$$

Aproksimacija 24/41 znači da oktavu treba podijeliti na 41 mikro ton, s tim da je 24. kvinta. Iznos je te kvinte izvrsnih $2^{24/41} = 1.5004$. Nedostatak te podjele (kao i one na 29 mikro tonova) je to što je 41 mikro ton u oktavi, za svaku izvedbu osim elektronske, potpuno neprikladan. Kvinte 4/7, 3/5 i 2/3, loše su jer $2^{4/7} = 1.486 = 686$ centi, 17 centi daleko od savršene kvinte.

Jedini optimum je 12 polutonova u oktavi sa 7. polutonom kao kvintom. Naime, $2^{7/12} = 1.498 = 700$ centi, 2 centa daleko od savršene kvinte.

Možemo zaključiti da skala s korektnim kvintama i pristupačnim brojem tonova može imati jedino 12 polutonova. To je teorijski nužni izbor, do kojeg je glazbena praksa došla bez teorije.

Mogli bismo se pitati što je optimalna skala koja, uz pristupačni broj tonova, želi korektne kvarte. Problem se matematički svodi na verižne aproksimacije broja :

$$x = \frac{\log(4/3)}{\log 2} = [0,\ \ 2,\ \ 2,\ \ 2,\ \ldots]$$

$$\frac{0}{1} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{2}{5} \quad \frac{5}{12}$$

$$\frac{3}{7}$$

Uočavamo 5/12 kao najbolju aproksimaciju. No, to je ona ista raspodjela koju smo dobili uz zahtjev za korektnim kvintama. U njoj je kvarta 5. a kvinta je 7. od 12 polutonova.

Želimo li korektne terce, imamo:

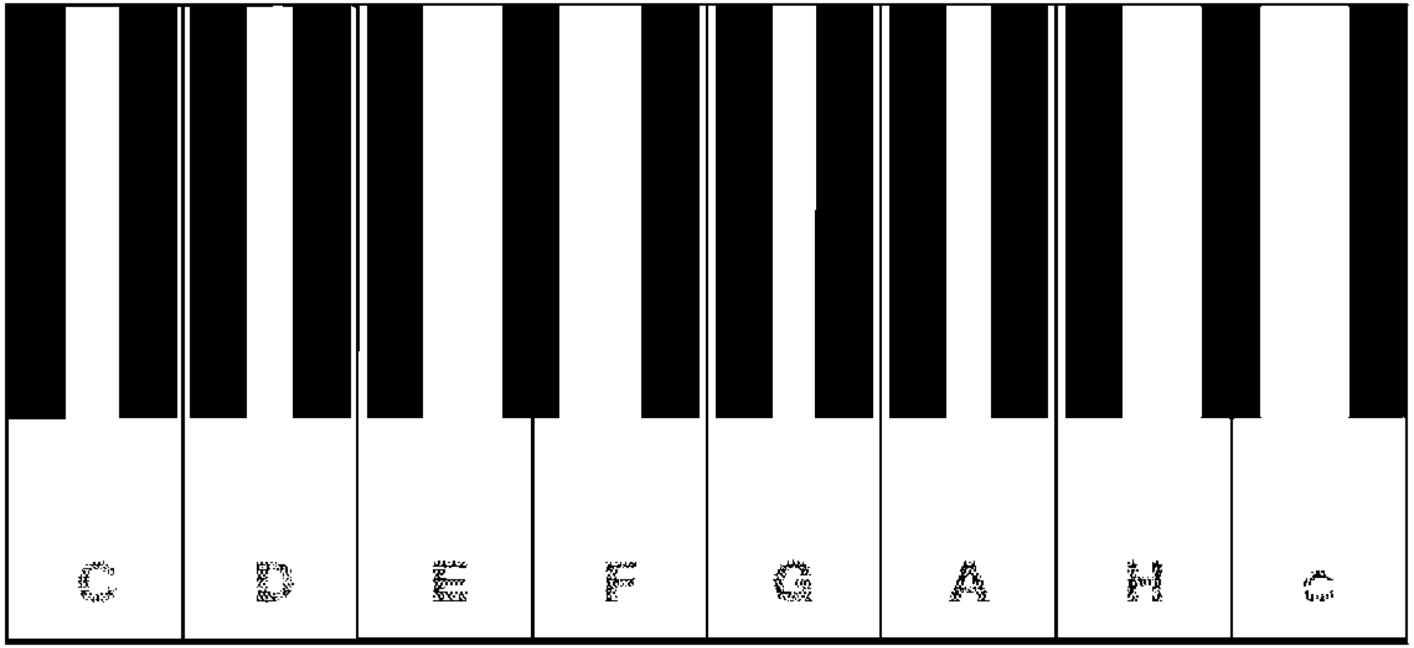
$$x = \frac{\log(5/4)}{\log 2} = [0,\ 3,\ 9, \ldots] \qquad x = \frac{\log(6/5)}{\log 2} = [0,\ 3,\ 1,\ 4, \ldots]$$

$$\begin{array}{ccc} \frac{0}{1} & \frac{1}{3} & \frac{9}{28} \\ & \frac{1}{2} & \frac{8}{25} \\ & \frac{1}{1} & \frac{7}{22} \\ & & \frac{6}{19} \\ & & \cancel{\frac{5}{16}} \\ & & \cancel{\frac{4}{13}} \\ & & \cancel{\frac{3}{10}} \\ & & \cancel{\frac{2}{7}} \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} \frac{0}{1} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{5}{19} \\ & \frac{1}{2} & & \frac{4}{15} \\ & \frac{1}{1} & & \frac{3}{11} \\ & & & \cancel{\frac{2}{7}} \end{array}$$

Najbolja podjela oktave. za korektne velike terce jest podjela na 19 polutonova, uz veliku tercu kao 6. ton . Moglo bi se razmišljati i o 22 , 25 ili 28 polutonova ali oni neće biti povoljni za male terce.

Za male terce oktavu je najbolje podijeliti na 11 , 15 ili 19 polutonova. S obzirom na to da velike terce preferiraju 19 polutonova, 19-tonska skala definitivno je najbolja skala za terce .

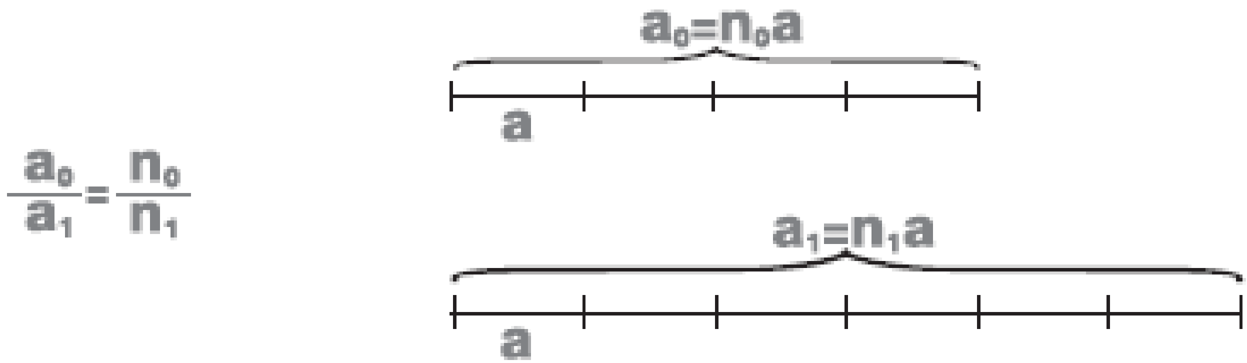
U takvoj skali izvrsna mala terca bila bi 5. poluton, izvrsna velika terca 6. poluton, podnošljiva kvinta (od 695 centi) 11. poluton i podnošljiva kvarta (od 505 centi) 8. poluton. Takvu je skalu moguće realizirati na uobičajenim klavijaturama podjelom crnih tipki na dvije. te umetanjem po jedne nove crne tipke između E i F. te H i c.



Jednolike skale, kojima oktave sadrže od l do 36 tonova, prikazane su sljedećim grafom. Najviše gotovo točnih konsonantnosti sadrže 12-tonska i 19-tonska skala, kao što je to i pokazala naša matematička analiza.

Eudoksovo mjerenje i verižni razlomci

Veličine a_0 i a_1 su sumjerljive ako imaju zajedničku mjeru a i tada je njihov omjer $a_0/a_1 = n_0a/n_1a = n_0/n_1$.



Eudoksovo mjerenje jest postupak kojim u konačnom broju koraka nalazimo zajedničku mjeru i omjer dviju sumjerljivih veličina i koji nikada ne staje ako se primijeni na dvije nesumjerljive veličine.

$$a_0 = q_0 a_1 + a_2 \qquad a_1 > a_2$$

$$a_1 = q_1 a_2 + a_3 \qquad a_2 > a_3$$

$$a_2 = q_2 a_3 + a_4 \qquad a_3 > a_4$$

$$\vdots$$

$$a_k = q_k a \qquad a_k > a \quad q_k > 1$$

Dakle, ako postupak završava onda su veličine sumjerljive.

Vrijedi i obrat, ako su veličine sumjerljive postupak završava:

$$n_0 = q_0 n_1 + n_2 \qquad n_1 > n_2$$

$$n_1 = q_1 n_2 + n_3 \qquad n_2 > n_3$$

$$n_2 = q_2 n_3 + n_4 \qquad n_3 > n_4$$

$$\vdots$$

Dakle, ako je Eudoksovo mjerenje veličine a_0 veličinom a_1 konačno, onda su one sumjerljive i omjer im je racionalan broj. Ako je beskonačno, onda su te veličine nesumjerljive i omjer im je iracionalan broj.

$$\frac{a_0}{a_1} = q_0 + \frac{a_2}{a_1} \qquad a_1 > a_2$$

$$\frac{a_1}{a_2} = q_1 + \frac{a_3}{a_2} \qquad a_2 > a_3$$

$$\frac{a_2}{a_3} = q_2 + \frac{a_4}{a_3} \qquad a_3 > a_4$$

$$\vdots$$

$$\frac{a_0}{a_1} = q_0 + \frac{1}{\frac{a_2}{a_1}} = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{\frac{a_2}{a_1}}} = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{\frac{a_2}{a_1}}}}$$

$$= q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{\dots}}} = [q_0, q_1, q_2, \dots \ ]$$

$$x = [q_0, q_1, q_2, \ldots\ ]$$

$$x_0 = [q_0] \quad x_1 = [q_0, q_1] \quad x_2 = [q_0, q_1, q_2] \quad \ldots$$

$$x_0 = \frac{m_0}{n_0} = \frac{q_0}{1} \quad x_1 = \frac{m_1}{n_1} = \frac{q_0 q_1 + 1}{q_1} \quad x_2 = \frac{m_2}{n_2} = \frac{q_2(q_0 q_1 + 1) + q_0}{q_2 q_1 + 1} \quad \ldots$$

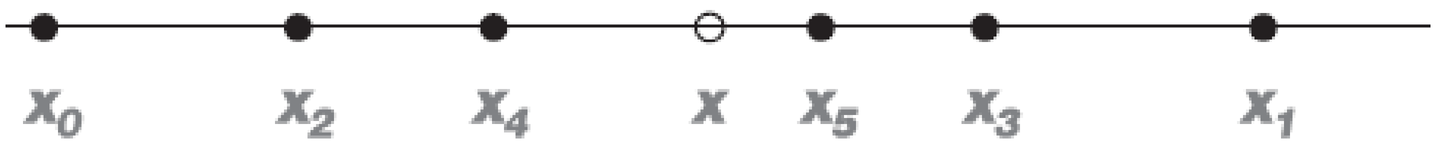
$$x_{-1} = \frac{m_{-1}}{n_{-1}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{0} \qquad x_{-2} = \frac{m_{-2}}{n_{-2}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{0}{1}$$

$$x_k = \frac{m_k}{n_k} = \frac{q_k m_{k-1} + m_{k-2}}{q_k n_{k-1} + n_{k-2}}$$

$$\begin{vmatrix} m_{-2} & m_{-1} \\ n_{-2} & n_{-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{-1} \quad \Longrightarrow$$

$$m_{k-1}n_k - n_{k-1}m_k = \begin{vmatrix} m_{k-1} & m_k \\ n_{k-1} & n_k \end{vmatrix} = (-1)^k$$

$$x_{k-1} - x_k = \frac{m_{k-1}}{n_{k-1}} - \frac{m_k}{n_k} = \frac{m_{k-1}n_k - n_{k-1}m_k}{n_{k-1}n_k} = \frac{(-1)^k}{n_{k-1}n_k}$$



Na primjer za $x = [2\ ,1\ ,2\ ,3\ ,1\ ,2\ , \ldots\ ]$

$$\frac{2}{1} < \frac{8}{3} < \frac{35}{13} < \cdots < x < \cdots \frac{97}{36} < \frac{27}{10} < \frac{3}{1}$$

Svaka je aproksimacija bolja od prethodne (ne samo parne od parnih i neparne od neparnih) jer

$$\frac{1}{n_k n_{k+2}} < |x - x_k| < \frac{1}{n_k n_{k+1}}$$

To dokazujemo koristeći se oznakom

$$x^k = [q_k, q_{k+1}, q_{k+2}, \ldots\ ] \ \text{ za } \ x = [q_0, q_1, q_2, \ldots\ ].$$

$$x = [q_0, q_1, \dots, q_k\,, x^{k+1}\ ] = \frac{x^{k+1}m_k + m_{k-1}}{x^{k+1}n_k + n_{k-1}} \quad \Longrightarrow$$

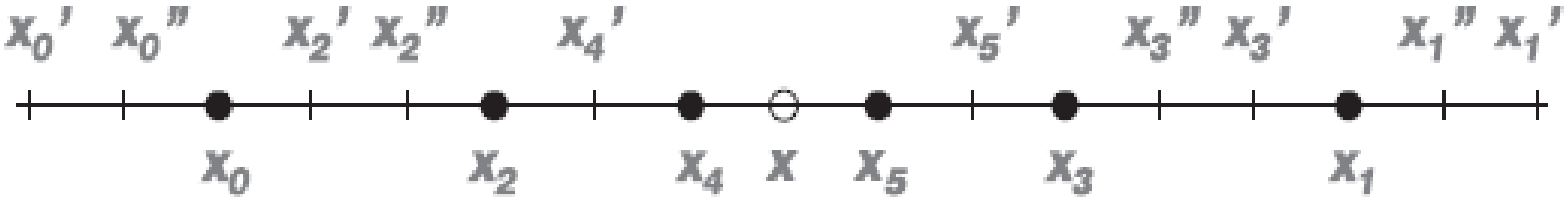
$$|x - x_k| = \left|x - \frac{m_k}{n_k}\right| = \left|\frac{x^{k+1}m_k + m_{k-1}}{x^{k+1}n_k + n_{k-1}} - \frac{m_k}{n_k}\right| =$$

$$\frac{|m_{k-1}n_k - n_{k-1}m_k|}{n_k(x^{k+1}n_k + n_{k-1})} = \frac{1}{n_k(x^{k+1}n_k + n_{k-1})} > \frac{1}{n_k n_{k+2}}$$

$$x^k < q_k + 1 \ \Longrightarrow\ x^{k+1}n_k + n_{k-1} < (q_k + 1)n_k + n_{k-1} =$$

$$q_{k+1}n_k + n_{k-1} + n_k = n_{k+1} + n_k \le q_{k+2}n_{k+1} + n_k = n_{k+2}$$

$$
\begin{array}{lll}
x_0' = 1, & x_0'' = 2,\ldots & x_0 = [q_0] \\
x_1' = [q_0, 1], & x_1'' = [q_0, 2],\ldots & x_1 = [q_0, q_1] \\
x_{12}' = [q_0, q_1, 1], & x_2'' = [q_0, q_1, 2],\ldots & x_2 = [q_0, q_1, q_2] \\
\vdots & \vdots & \vdots
\end{array}
$$



Trebamo dokazati:

$$\left|x - \frac{m}{n}\right| < \left|x - \frac{m_k}{n_k}\right| \Rightarrow n > n_k$$

$$|nx - m| < |n_k x - m_k| \Rightarrow n > n_k$$

Sustav sljedećih jednadžbi ima cjelobrojna rješenja, jer mu je det=1:

$$n_k u + n_{k+1} v = n$$

$$m_k u + m_{k+1} v = m$$

Ako su u i v pozitivna rješenja onda slijedi $n > n_k$ (i $m > m_k$).

Dakle, trebamo dokazati:

$$|nx - m| < |n_k x - m_k| \Longrightarrow u, v > 0.$$

$|nx - m| = |(n_k u + n_{k+1} v)x - (m_k u + m_{k+1} v)| =$

$|(n_k x - m_k)u - (n_{k+1} x - m_{k+1})v| < |n_k x - m_k|$

$(n_k x - m_k)$ i $(n_{k+1} x - m_{k+1})$ imaju suprotne predznake pa je prethodna nejednakost moguća samo ako u i v imaju iste.

No, u i v ne mogu oba biti negativni zbog $n_k u + n_{k+1} v = n$.

Zaključimo:

S nazivnikom do n_k najbolja aproksimacija od $x = [q_0, q_1, \dots\ ]$ je

$$x_k = [q_0, \dots, q_k] = \frac{m_k}{n_k}$$

S nazivnikom do n_{k+1} najbolja aproksimacija od $x = [q_0, q_1, \dots\ ]$ je

$$x_{k+1} = [q_0, \dots, q_{k+1}] = \frac{m_{k+1}}{n_{k+1}}$$

Za $n_k < n < n_{k+1}$ najbolja aproksimacija od $x = [q_0, q_1, \dots\ ]$ je x_k ili (što treba provjeriti) neka od sljedećih

$$x_k' = [q_0, \dots, q_k, 1] \quad x_k'' = [q_0, \dots, q_k, 2] \dots \quad x_k^{\prime\prime\cdots\prime} = [q_0, \dots, q_k, q_{k+1} - 1]$$