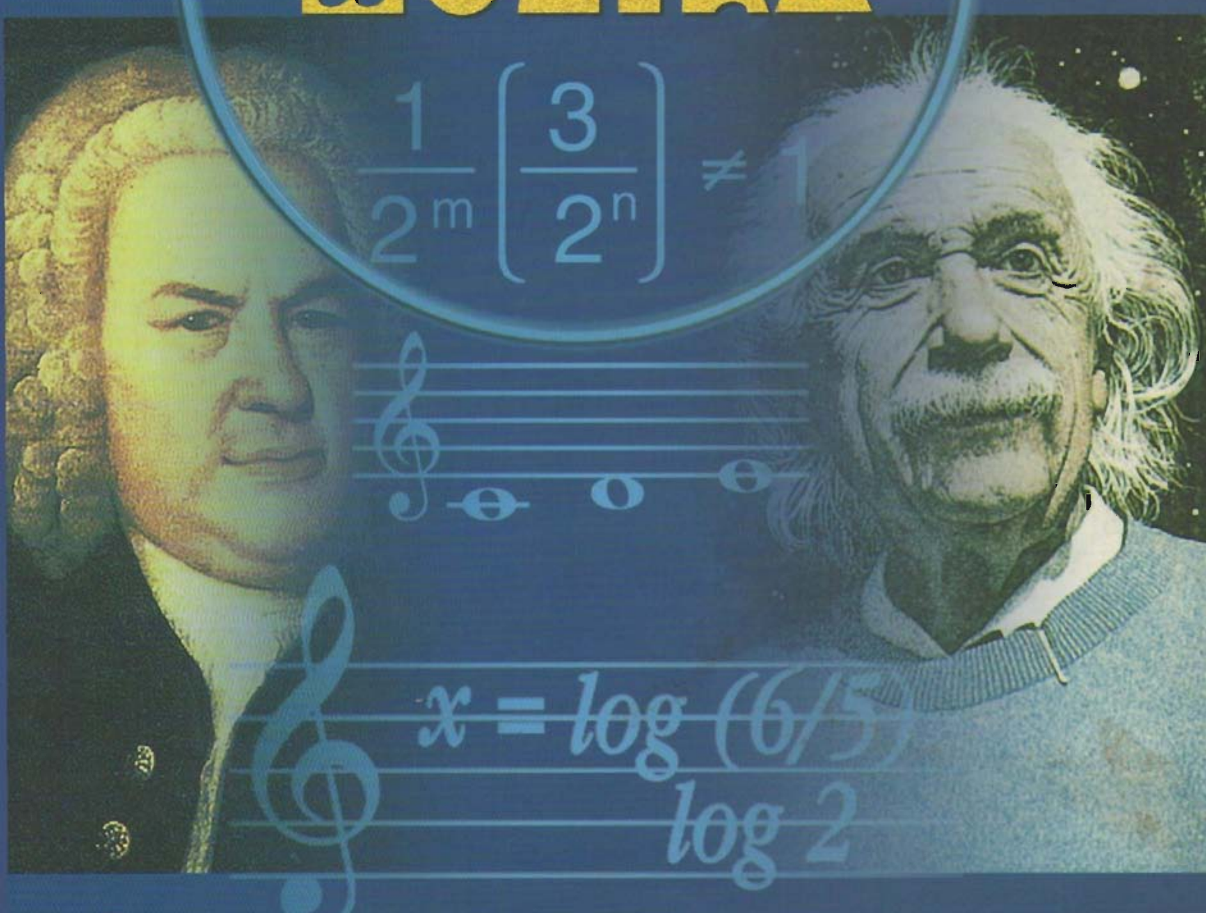
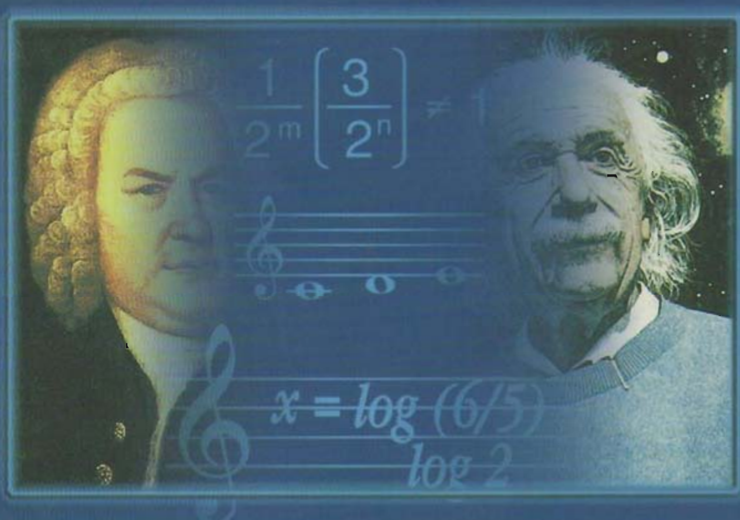
MATKINA
BIBLIOTEKA

Zvonimir Šikić

MATEMATIKA I MUZIKA



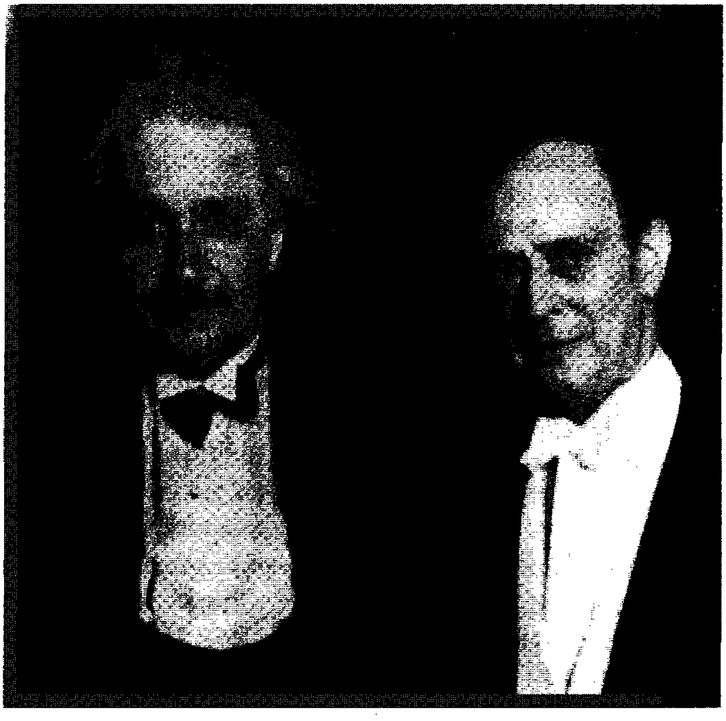
HMD Zagreb



ISBN 953-97339-1-X
9 789539 733917

Zvonimir Šikić

MATEMATIKA I MUZIKA



HMD, Zagreb 1999.

MATKINA
BIBLIOTEKA

Glavni urednik:
Ivan Ivanšić

Urednik:
Petar Mladinić

Recenzenti:
Mirko Polonijo
Milko Pravdić
Zlatko Tanodi

Lektorica:
Vesna Muhoberac

Korektorica:
Renata Svedrec

Naslovnicu opremila:
Sanja Boljević

Nakladnik:
Hrvatsko matematičko društvo, Zagreb

CIP - Katalogizacija u publikaciji
Nacionalna i sveučilišna knjižnica, Zagreb

UDK 51:78

ŠIKIĆ, Zvonimir
Matematika i muzika / Zvonimir Šikić. - Zagreb: Hrvatsko matematičko društvo, 1999. - 96 stranica. : ilustr.; 24 cm. - (Matkina biblioteka)

ISBN 953 - 97339 - 1 - X

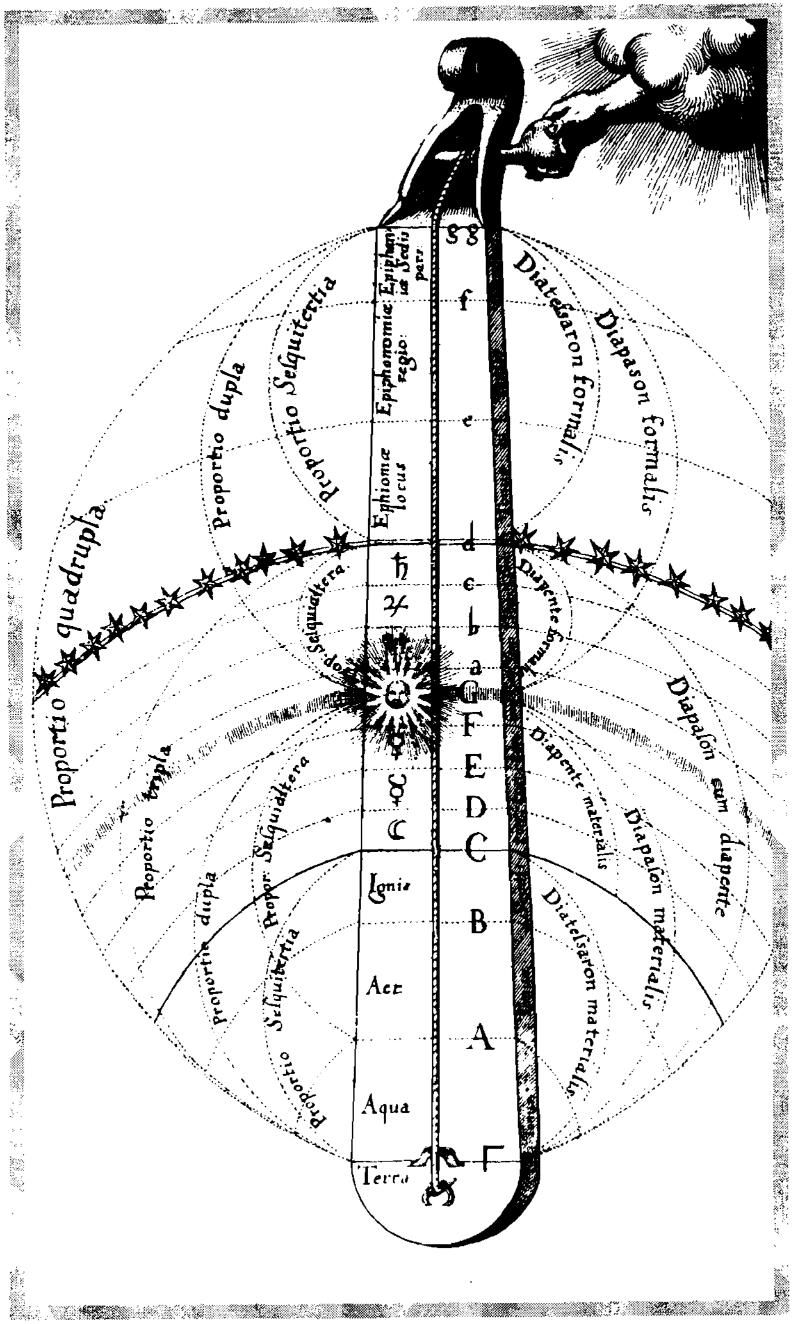
990402025

Slog i prijelom: ***Alegra d.o.o.***, Zagreb

Tisak: ***Tiskara Kasanić***, Zagreb

Sadržaj:

HARMONIJA SVIJETA



1. HARMONIJA SVIJETA

Keplerova *De harmonice mundi* jedan je od najljepših izdanaka velike tradicije zapadnoga mišljenja što ga je začeo **Pitagora**. O čemu je riječ? Pokušajte, ako možete, zamisliti svijet u kojem sve ima smisla. Svijet u kojem na Zemlji oko nas, kao i na nebu iznad nas, vlada savršeni red. Sve što vidite i čujete, sve što znate, sve što uopće jest, samo je aspekt jedne i sveobuhvatne harmonije svijeta, kojom je sve raspoređeno u idealne matematičke odnose. To je Pitagorina temeljna ideja; harmonija koju čujemo, harmonija koju vidimo, kao i svaka druga harmonija, zapravo je matematička harmonija. Tu Pitagorinu ostavštinu naslijedili su **Platon, Kepler, Galileo, Newton, Einstein** i mnogi drugi. Njezin je doprinos našoj civilizaciji ogroman[1]. Koestler ga opisuje uporabljujući jednu muzičku metaforu[2]:

Pozornica u 6. st. pr.Kr. prikazuje scenu orkestra koji se ugađa. Svaki svirač zadubljen je u svoj instrument, gluh za nezgrapne zvuke ostalih. Slijedi dramatična tišina. Maestro dolazi na scenu, triput lupne dirigentskim štapićem i iz kaosa izranja harmonija. Maestro je ***Pitagora*** *sa Samosa, čiji je utjecaj na ideje, pa dakle i na sudbinu čovječanstva, vjerojatno veći od utjecaja bilo kojeg pojedinca prije ili poslije njega.*

Aristotel, koji nije bio Pitagorin sljedbenik, opisuje njegove ideje u svojoj *Metafizici*, posebno ukazujući na to da one izviru iz veze matematike i muzike[3]:

Pitagorejci su se posvetili matematici. Promicali su je i u njoj su odgajani, pa nije neobično da su njezina načela držali načelima svih stvari. Utvrdili su da se svojstva i omjeri muzičkih intervala mogu izraziti brojem, pa se činilo da se i sve ostale stvari mogu izraziti brojem. Činilo se da su brojevi počela svih stvari, te da je cijelo nebo jedna muzička skala, jedan omjer brojeva.

Kao da čitamo Keplera iz *Harmonije svijeta*:

Nebeska gibanja nisu drugo do jedna vječna polifonija, koju opažamo umom a ne uhom.

Nakon ovih jezgrovitih i slikovitih skica pokušat ćemo manje metaforičnim jezikom opisati tko je bio Pitagora i što su bile njegove ideje, posebno one koje muziku povezuju s matematikom.

Pitagora je, kao sin draguljara **Mnesarha**, rođen početkom 6 st. pr. Kr. na otoku Samosu smještenom uz maloazijsku obalu Egejskog mora. U Egiptu je naučio geometriju, a bio je i prvi stranac uveden u tajne egipatske vjere. U Fenikiji je učio o “brojevima i omjerima”. Poduku iz astronomije dobio je u Kaldeji, glavnom središtu antičke astronomije. Jedan rani biograf tvrdi da je u Kaldeji[4] učio zajedno sa

Zaratustrom *"koji ga je očistio od prljavštine prijašnjeg života"*. Uvjeti života na Samosu, pod upravom tiranina **Polikrata**, nisu odgovarali školovanom čovjeku, pa je Pitagora s obitelji emigrirao na krajnje zapadne granice grčkog svijeta, u *Magna Graeciau* (današnja južna Italija). Tu je dobro primljen i uskoro je svojom strastvenom rječitošću skupio tisuće sljedbenika. (Bio je toliko uvjerljiv da je tiranin **Simikus**, vladar sicilijanskog grada Kentoripe, nakon njegova govora o slobodi abdicirao i podijelio svoju imovinu građanima.) Na kraju se Pitagora smjestio na krajnjem jugu današnje Italije, u Krotonu, gdje je osnovao svoju Akademiju tzv. ***Pitagorino bratstvo***. Postao je prototip filozofa-kralja nekih 150 godina prije Platonova uvođenja toga pojma u političku filozofiju. Pred kraj života postao je žrtvom političke konspiracije, te su on i njegovi sljedbenici prognani iz Krotona. Umro je stotinjak milja od Krotona, 497. godine pr. Kr. Njegovi su sljedbenici proganjani, ali je *maestrova* riječ ipak sačuvana kako bi postala temeljem *platonizma* i moderne znanosti[1]. Prema **Porfiriju**:

S pitagorejcima umrlo je i njihovo znanje koje su oni do tada tajili (osim nekoliko opskurnih stvari što su ponavljane bez razumijevanja). Pitagora za sobom nije ostavio knjigâ; samo male iskre teško shvatljivog znanja sačuvale su se među onim sljedbenicima, poput ***Lizija i Arhipe****, koji su se dovoljno daleko raspršili. Oni su u osamljenosti i tuzi izbjegavali ljudske zajednice. Ipak, u strahu da se ime filozofije potpuno ne zatre (što bi moglo izazvati bijes bogova), sastavili su sažetke i komentare Pitagorine mudrosti. Svaki je sljedbenik imao svoju vlastitu kolekciju koju je na kraju života ostavljao na brigu svojoj ženi, sinovima ili kćerima. Ova obveza prenošenja znanja unutar obitelji sačuvala se dugo vremena.*

Ono što se prenosilo bila je Pitagorina *matematička* filozofija. Već u **Talesovo** vrijeme grčki su mislioci empirijsko egipatsko *zemljo-mjerstvo* preoblikovali u racionalnu *geo-metriju*, otkrivši na taj način matematiku u današnjem smislu te riječi[5]. Zašto je došlo do te preobrazbe? Odgovor je jednostavan. Zbog izvjesnosti racionalnoga. Mjereći kutove osjetilima dostupnog materijalnog trokuta možda ćemo ustanoviti kako je njihov zbroj približno 180°, ali izvjesni matematički **dokaz** da je zbroj kutova u svakom trokutu točno 180° odnosi se na samo razumu dostupne trokute. Oni leže u samo razumu dostupnim dvodimenzionalnim ravninama, omeđeni su samo razumu dostupnim jednodimenzionalnim dužinama, koje se spajaju u samo razumu dostupnim nuldimenzionalnim vrhovima, tvoreći samo razumu dostupne kutove. Izvjesnost, kojoj je grčko mišljenje tako strasno težilo, ostvarena je utemeljenjem matematike kao racionalne spoznaje, kojoj predmet istraživanja nije materijalni svijet osjetilnoga iskustva, nego je to svijet samo razumu dostupnih ideja.

Pitagora je otišao korak dalje shvativši kako istinska stvarnost nije u neograničenom i neuređenom načelu materije, nego je u stalno ograničavajućem i zato uređujućem načelu matematičke forme. Izvor ove izrazito matematičke filozofije otkriven je u muzici. Njezin sustav reda i ljepote izgrađen je na suglasjima oktave, kvinte i kvarte, koji se iz kaotičnog kontinuuma uhu dostupnih intervala izdvajaju svojom jednostavnom matematičkom formom. (Interval oktave ostvaruje se titranjem žica kojima duljine stoje u omjeru 2:1, interval kvinte ostvaruje se omjerom 3:2, a interval kvarte omjerom 4:3.[6]) No, ako je načelo glazbenog reda i ljepote matematička forma (matematička harmonija), nije li onda i prirodni red, sa svojom nedvojbenom ljepotom, također svediv na neko slično ili čak identično načelo? Pitagorin je odgovor potvrdan. Priroda je svemir, tj. red i ljepota, a njegovo je načelo broj. (Često mistificirana Pitagorina formula: "*Sve je broj*", znači samo to da je matematika ključ za razumijevanje svega ili, bliže današnjem izražavanju, da je matematika temelj svake znanosti. Taj Pitagorin uvid koji potječe iz najranijeg djetinjstva znanosti i filozofije još i danas upravlja znanošću kao njezino vrhunsko načelo; usp. [5] i [1].) Ovdje se prvi put pojavljuje i pojam muzičkog univerzuma; muzika je broj i svemir je broj, dakle, svemir je muzika.

Pitagora je razlikovao tri vrste muzike. Uporabljujemo li latinsku terminologiju njegovih sljedbenika, to su *musica instrumentalis* (uobičajena muzika glasovira, trube itd); *musica humana* (stalna iako nečujna muzika svakoga pojedinca, u kojoj su posebno značajna suglasja ili pak nesuglasja duha i tijela); te *musica mundana*, svemirska muzika koja nastaje okretanjem nebeskih sfera (pa je zato poznata i kao muzika sfera). Unatoč našem izrazitom razlikovanju ovih područja, za Pitagoru su sve tri muzike jedna te ista muzika. Truba i svemir mogu odsvirati doslovno istu ljestvicu, jer je to stvar čiste matematike. Te se muzike ne razlikuju više od poligona što ih mogu činiti bore nekog ljudskog dlana, konstelacija određenih zvijezda na nebeskom svodu ili melodijska linija neke glazbene teme. Vječna, matematička ideja jest poligon i sve su njegove pojavnosti zapravo iste.

Imamo li to na umu lakše ćemo shvatiti Pitagorine metode liječenja. *Musica instrumentalis* i *musica humana* samo su pojavni oblici iste istine. Zvuci lire zato izazivaju iste vibracije i u "ljudskim instrumentima", što na ljude može djelovati loše ili dobro. Naprimjer, slušanje glazbe skladane u frigijskoj ljestvici može izazvati nasilje, ali ono se može i odagnati prijelazom na umirujući spondejski ritam. Sjetimo li se bitnoga jedinstva *musicae instrumentalis* i *musicae humanae* možda možemo razumjeti Keplerovo pitanje iz podnaslova *Harmonije svijeta*:

Koji planeti u nebeskoj harmoniji pjevaju sopran i alt, a koji tenor i bas?

Možda će nam gotovo neshvatljivi odgovor[7], koji nalazimo u samoj knjizi, sada biti nešto manje stran:

Merkur je sopran, Zemlja i Venera su altovi, Mars je tenor, a Saturn i Jupiter su basovi.

Ipak, Pitagorin najtrajniji doprinos teoriji muzike već je spomenuto otkriće da su konsonantni intervali oktave, kvinte i kvarte određeni jednostavnim aritmetičkim omjerima 1:2, 2:3 i 3:4.[8] Prema predaji, Pitagora je prolazeći kraj kovačnice čuo konsonantne intervale kvarte, kvinte i oktave proizvedene udarcima različitih čekića o nakovanj. Istraživši tu pojavu ustanovio je da se težine čekića, koji proizvode tonove raspoređene u tim intervalima, odnose kao 4:3, 3:2 i 2:1. Nastavljajući eksperimente s lirom i monokordom (jednožičanim glazbalom) ustanovio je da isto vrijedi i za duljine žica.

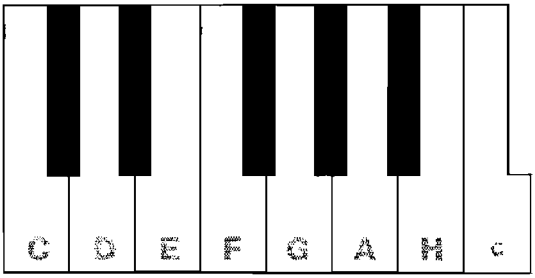
(**Vincenzo Galilei**, otac **Galilea Galileia**, pokazao je 1589. da priča o čekićima ne može biti istinita, jer se težine čekića moraju odnositi kao kvadrati duljina monokorda da bi proizveli iste intervale[9)]. Dakle, kvartu, kvintu i oktavu proizvode čekići s omjerima težina $4^2:3^2:2^2:1^2$. Vincenzo je ustvrdio da isti omjeri vrijede i za težine utega kojima se opterećuje jedna te ista žica, kao i za promjere različitih žica iste vrste; što je sve točno. Također je ustvrdio da se isti intervali postižu na puhačkim instrumentima, ako se odgovarajući obujmi stupacâ zraka u cijevima glazbala nalaze u omjeru 4:3:2:1, tj. ako su duljine stupaca u kubnom omjeru $4^3:3^3:2^3:1^3$. To nije točno, jer visina tona ovisi samo o duljini stupca, a ne o njegovu obujmu.)

Iz Pitagorina osnovnog uvida izrasta jedna cijela teorija muzike i sva naša daljnja razmatranja.

INTERVALI I SKALE

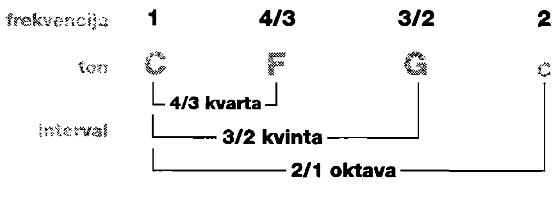
2. INTERVALI I SKALE

Pojam intervala i iz njega izvedeni pojam skale (tj. ljestvice) iznimno su važni u teoriji muzike, a ključni su i za razumijevanje njezina povijesnog razvoja. Najbolji uvod u oba pojma jest da zamislimo segment glasovirskih tipki koji sadrži po jednu tipičnu grupu od dvije i tri crne tipke unutar 8 bijelih, a periodično se ponavlja:



Niz od 8 "bijelih" tonova C, D, E, F, G, A, H, c (tzv. dijatonska skala) svima je dobro poznata dur ljestvica; u ovom slučaju C-dur. Interval **oktave**, od C do c, sadrži **osam** bijelih tonova. Interval **kvinte**, od C do G, sadrži **pet** "bijelih" tonova. Interval **kvarte**, od C do F, sadrži **četiri** "bijela" tona. No, kako se uopće došlo do "bijele" dur ljestvice?

Kada bi glasovirska C i c žica bile iste vrste, prva bi morala biti dvostruko dulja od druge. No, vidjeli smo (sjetite se Vicenza Galileia) da se isti interval može realizirati na različite načine. Ono što je zajedničko svakoj realizaciji je to da c-žica titra dvostruko brže od C-žice. Dakle, uz dogovor da je brzina titranja (tzv. frekvencija) tona C jedinična, slijedi C = 1, F = 4/3, G = 3/2 i c = 2. Veličina intervala koji razapinju dva tona jednaka je omjeru njihovih frekvencija, što je prikazano sljedećom tablicom:



Budući da je **veličina intervala koji razapinju bilo koja dva tona jednaka omjeru njihovih frekvencija,** lako je izračunati veličine svih intervala koje razapinju: C - *osnovni ton* ili *tonika*, F - *kvarta* ili *subdominanta*, G - *kvinta* ili *dominanta* i c - *oktava,* koja je i sama *tonika.* (Ton koji je za interval kvarte udaljen od osnovnog tona zove se kvartom na tom tonu, dakle, F je kvarta na C. Isto vrijedi za kvinte, oktave itd.)

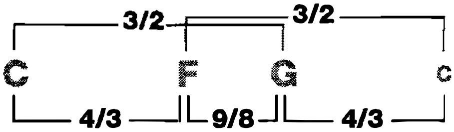
c/F = 2/(4/3) = 3/2 tj. c je kvinta na F.

c/G = 2/(3/2) = 4/3 tj. c je kvarta na G.

G/F = (3/2)/(4/3) = 9/8.

Interval od F do G, duljina kojeg je 9/8, zove se **cijeli ton** ili velika sekunda.

Dakle, kvarta i kvinta čine sljedeću razdiobu oktave:



Ako još donju kvartu od C do F, te gornju kvartu od G do c, razdijelimo cijelim tonovima duljine 9/8, dobit ćemo još po dva tona u svakoj od njih:

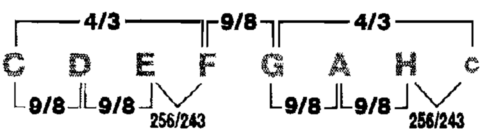
D/C = 9/8, tj. zbog C = 1, D = 9/8.

E/D = 9/8, tj. zbog D = 9/8, E = 81/64.

A/G = 9/8, tj. zbog G = 3/2, A = 27/16.

H/A = 9/8, tj. zbog A = 27/16, H = 243/128.

Tako dolazimo do sljedeće razdiobe oktave:



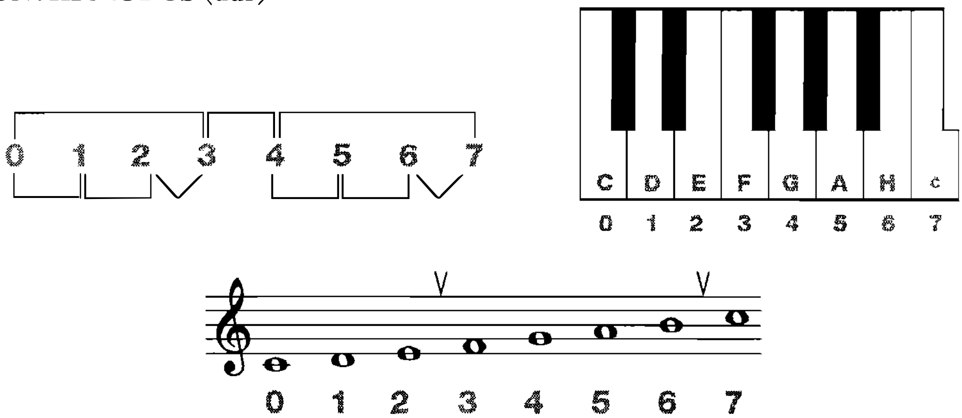
Interval od E do F, odnosno njemu jednaki interval od H do c, ima duljinu 256/243 (jer je $(4/3)/(9/8)^2 = 256/243$) i zove se (dijatonski) **poluton**.

Ovako dobiveni cijeli tonovi i polutonovi nažalost imaju loše svojstvo da su dva polutona manja od jednog cijelog tona:

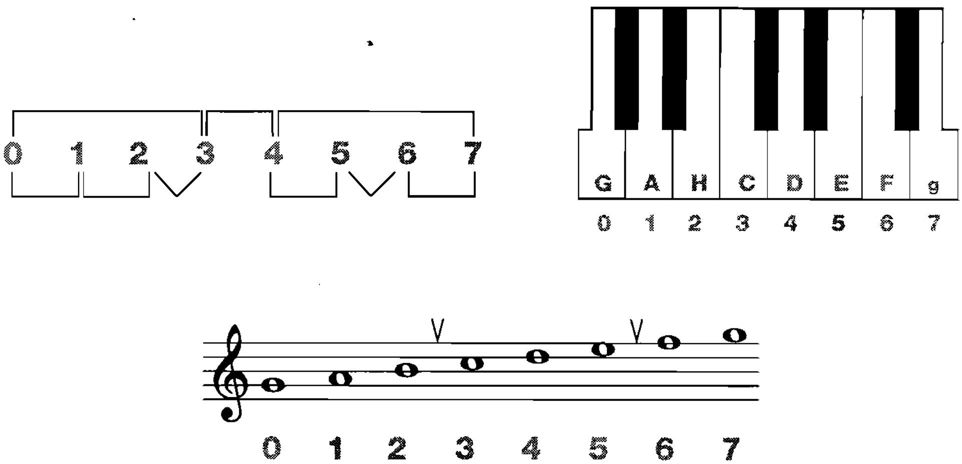
$$(256/243)^2 = 1.110 < 1.125 = 9/8.$$

Taj je problem[1] moguće riješiti samo uz određene kompromise, o čemu će još biti riječi. Zasad spomenimo da se oktava (odnosno njezine dvije kvarte od tonike do subdominante i od dominante do tonike) može podijeliti i na druge načine, tzv. *moduse* ili *modalne skale*. Grci su poznavali i rabili sljedeće modalne skale (od kojih se svaka može odsvirati na bijelim tipkama glasovira, polazeći od različitog osnovnog tona):

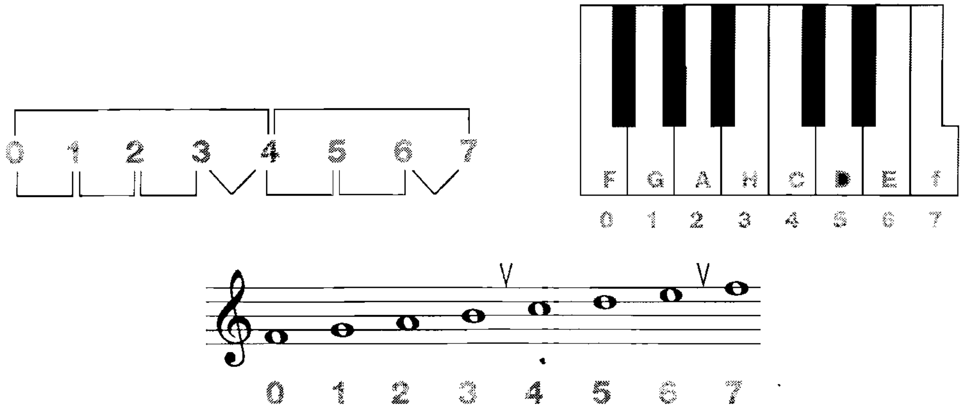
JONSKI MODUS (dur)



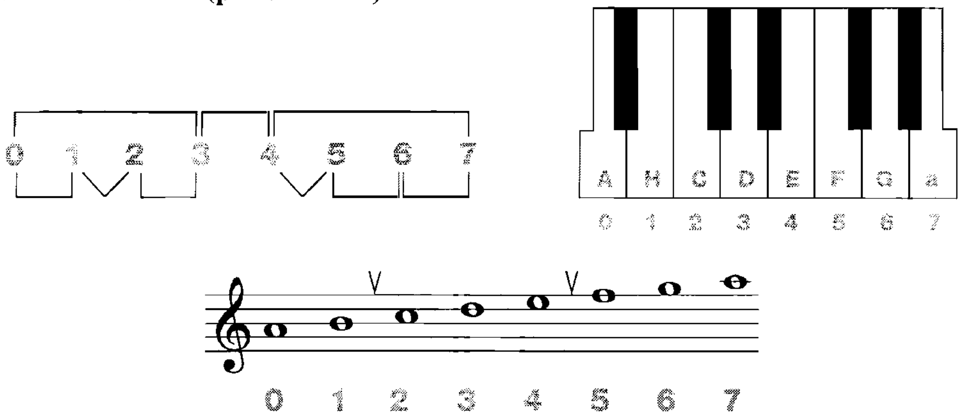
MIKSOLIDIJSKI MODUS



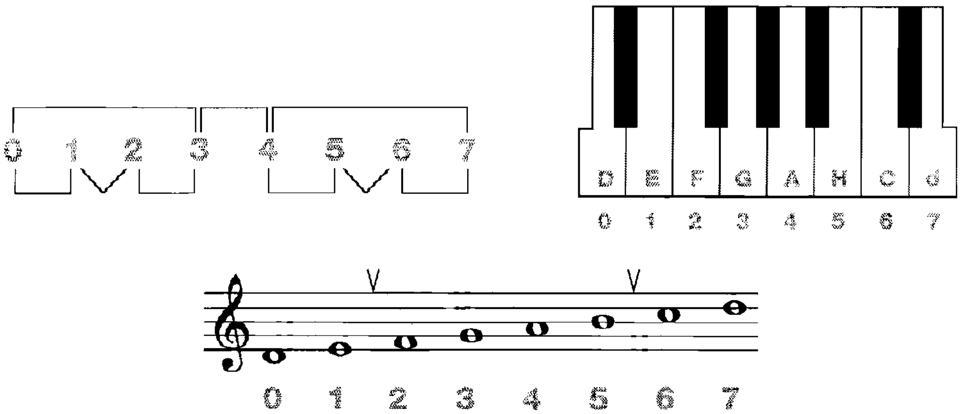
LIDIJSKI MODUS



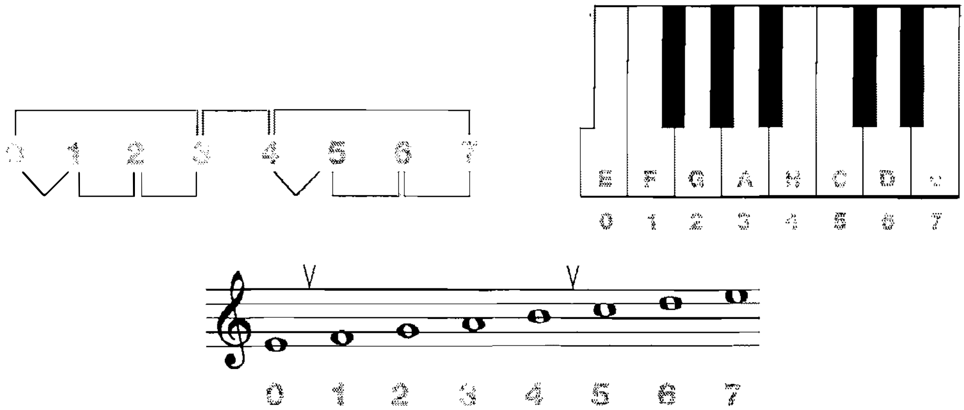
EOLSKI MODUS (prirodni mol)



DORSKI MODUS



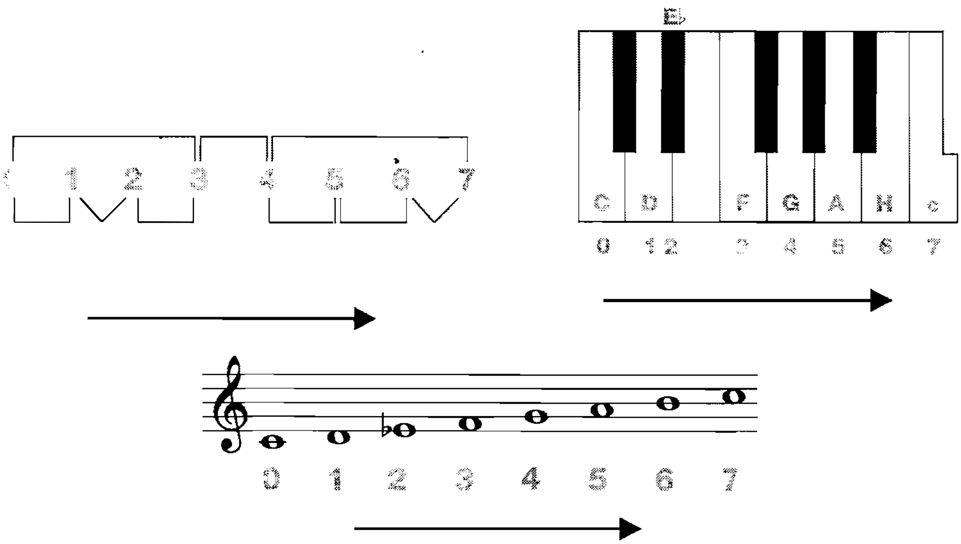
FRIGIJSKI MODUS



Uočite da nismo naveli tzv. *lokrijski modus* koji (po bijelim tipkama) počinje iz H. To samo ukazuje na značaj kvinte u razdiobi oktave. Naime, "bijela" skala iz H ne sadrži kvintu, pa se zato ne uporabljuje. Uočite također da lidijska skala nema kvarte (tj. ima povišenu kvartu)[2].

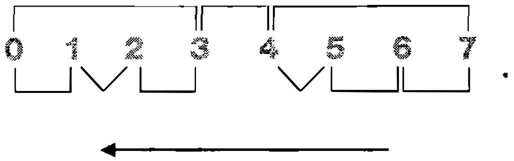
Naravno, oktava se može podijeliti i skalama koje nisu "bijele". Naprimjer, uzlazni[3] melodijski mol ima sljedeću strukturu (dolje pokazujemo kako se melodijski C-mol može uzlazno odsvirati na glasoviru).

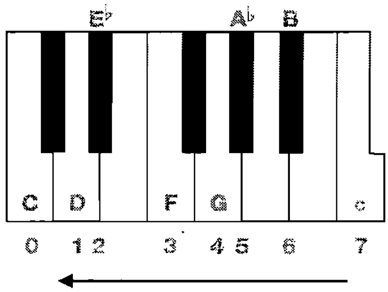
MELODIJSKI MOL (uzlazni)

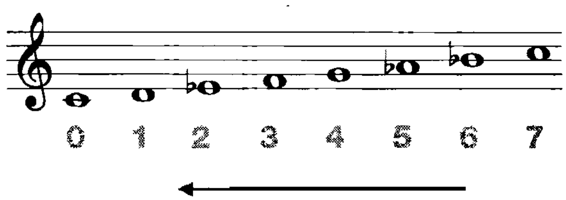


Silazni melodijski mol izgleda kao i prirodni mol (na slici pokazujemo kako se melodijski C-mol može silazno odsvirati na glasoviru):

MELODIJSKI MOL (silazni)



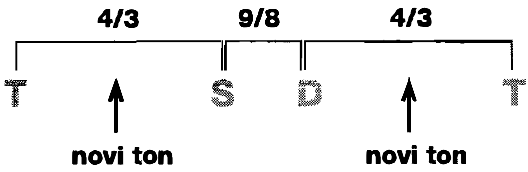




Sve dosadašnje skale dijelile su oktavu na 7 intervala, pomoću 7 tonova. Takve su skale *septatonske*. Tonove *septatonske* skale označili smo brojevima 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 i 7, gdje su 0 i 7 tonike. Standardno je označivanje 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 i 8. Brojevi 1 i 8 (naši 0 i 7) oznake su za tonike *primu* i *oktavu*; broj 2 (naš 1) za *sekundu*; broj 3 (naš 2) za *tercu*, broj 4 (naš 3) za *kvartu*, broj 5 (naš 4) za *kvintu*, broj 6 (naš 5) za *sekstu* i broj 7 (naš 6) za *septimu*. Nazivi tonova očito slijede standardne oznake, ali svi relevantni računi u vezi s tonovima *septatonske* skale slijede "kružnu" aritmetiku *mod* 7, u kojoj je neusporedivo lakše računati s našim oznakama. Naprimjer, međusobno inverzni intervali, *sekunda* 1 i *septima* 6, *terca* 2 i *seksta* 5 te *kvarta* 3 i *kvinta* 4, zaista su međusobno inverzni u "kružnoj" aritmetici[4)] *mod* 7:

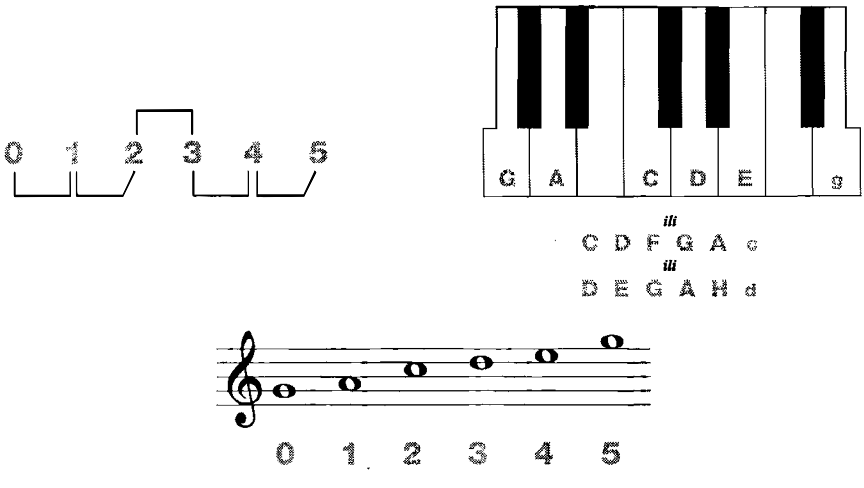
$$-1 = 6\ (mod\ 7),\quad -2 = 5\ (mod\ 7),\quad -3 = 4\ (mod\ 7).$$

Osim *septatonskih* skala često se rabe i *pentatonske* skale koje oktavu dijele na 5 intervala, pomoću 5 tonova, te *sekstatonske* skale koje je dijele na 6 intervala, pomoću 6 tonova. *Pentatonske* skale možemo dobiti podjelom donje i gornje kvarte cijelog raspona oktave s još po jednim dodatnim tonom. Dakle, dodatni se tonovi smještaju između tonike i subdominante, te između dominante i tonike koja je za oktavu viša:

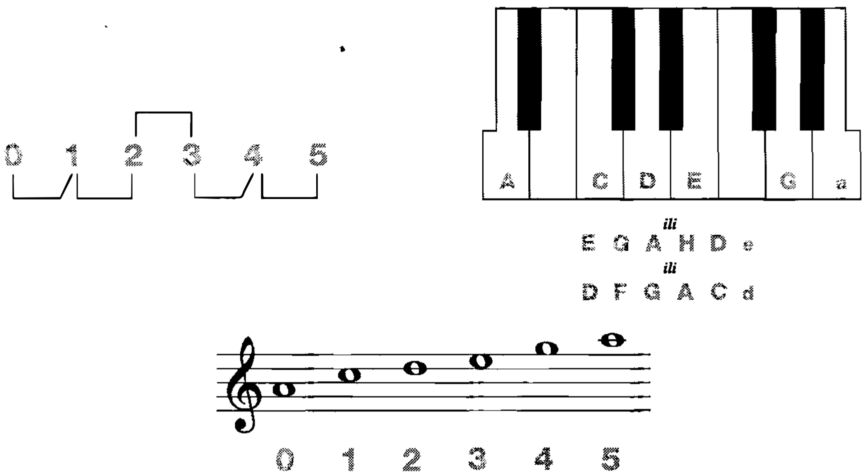


Četiri matematičke mogućnosti su: (1) po jedan cijeli ton na početku svake kvarte, (2) po jedan cijeli ton na kraju svake kvarte, (3) jedan cijeli ton na početku donje, te jedan cijeli ton na kraju gornje kvarte, (4) jedan cijeli ton na kraju donje, te jedan cijeli ton na početku gornje kvarte. U shematskim prikazima ovih skala rabimo simbol za interval od jednog i pol tona.

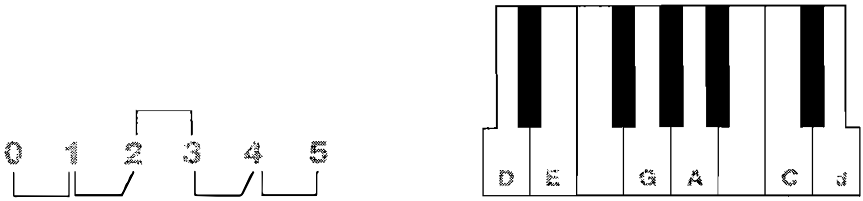
(1)

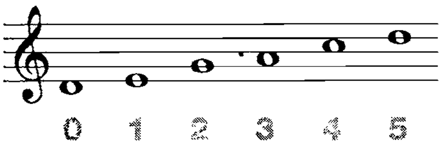


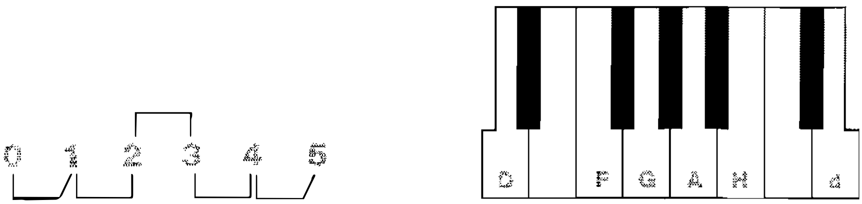
(2)

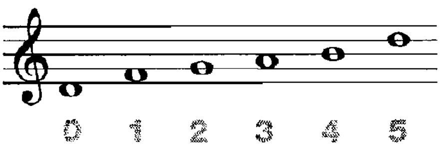


(3)



ili
G A C D F g
ili
A H D E G a

(4)





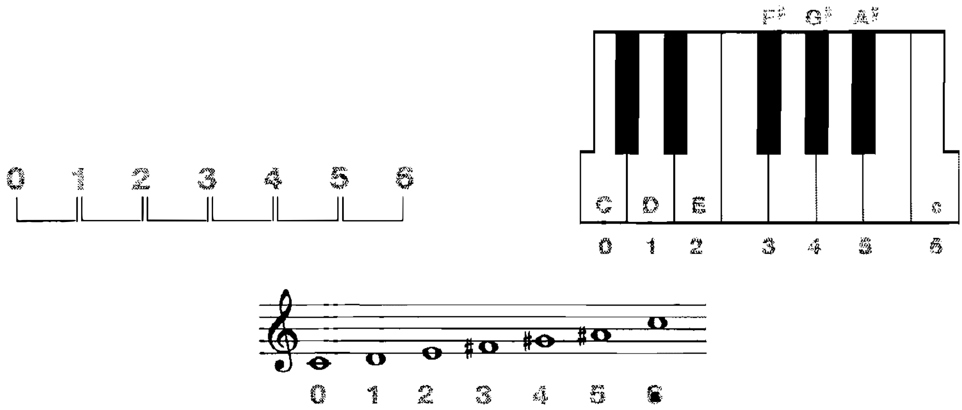
Iako se termin *pentatonska* skala može uporabiti za bilo koju razdiobu oktave s 5 tonova (u tekstu smo se ograničili samo na one koje čuvaju kvartu i kvintu), u Europi se taj termin rabi za reducirane septatonske skale iz kojih su izostavljeni "polutonovi" F i H. Dakle, za sljedeće "bijele" skale:

C D E G A c
(3) .... D E G A C d
E G A C D e
(1) .... G A C D E g
(2) .... A C D E G a

Uočite da prva od tih skala nema kvarte (C-F), dok treća nema kvinte (E-H). Ostale su realizacije prijašnjih *pentatonskih* skala (1), (2) i (3). Skale (4) nema u ovom "europskom" popisu.

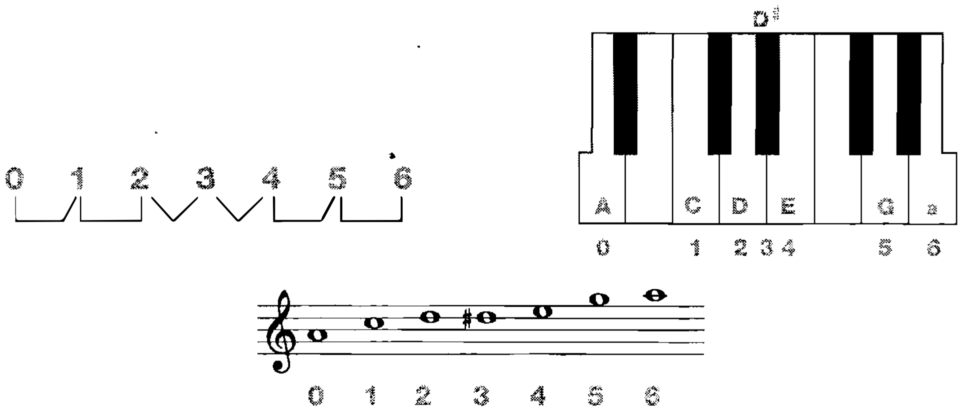
Od *sekstatonskih* skala najjednostavnija je *cjelotonska* skala koja oktavu dijeli na 6 cijelih tonova:

CJELOTONSKA SKALA

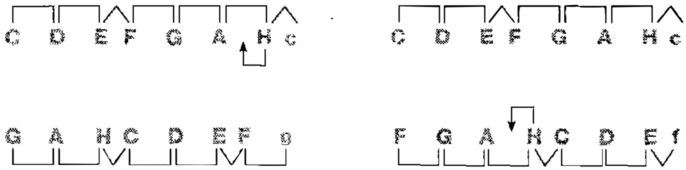


Nešto je neobičnija *blues* skala, koja po jedan ton smješta u donju i gornju kvartu, kao i pentatonska skala (2), ali ima i 6. ton smješten između kvarte i kvinte:

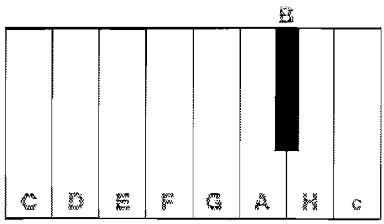
BLUES SKALA



Povijest i rasprostranjenost ovih skala složene su. Dijatonska podjela oktave (na "bijele" tonove), koja je dovela do septatonskih modusa seže do Pitagorina vremena. Uporaba lire i orgulja, koje je oko 300. g. pr.Kr. izumio **Ktesibije** iz Aleksandrije[5)], a u kojima je glavni ton u oba slučaja bio D, dovela je do prevlasti dorskoga modusa u glazbenoj antici. U ranom srednjem vijeku, u okviru *scholae cantorum*, kršćanska crkva nastavlja tradiciju *monofonije* (izvođenja samo jedne melodijske linije) u svim antičkim modusima. **Grgurova**[6] reforma ove škole dovest će do *gregorijanskog korala* koji je i danas prepoznatljiv po svojoj uporabi antičkih modusa. **Guido** iz Arezza u 10. stoljeću uvodi notno crtovlje i mnemotehniku *ut*, *re*, *mi*, *fa*, *sol*, *la*, *ti*[7] koja i laicima omogućava lako kretanje kroz različite moduse, pravilnim odabirom početne točke (kao u našim glasovirskim prikazima s C, D, ... umjesto *do*, *re*, ...). Na prijelazu iz 10. u 11. stoljeće, još za Guidova života, počinju eksperimenti s *polifonijom*; istovremenim izvođenjem više melodijskih linija. Glasovi se najprije slažu u paralelnom gibanju, tako da jedan izvodi svoju melodiju dok ga drugi prati, istovremeno izvodeći tu istu melodiju za kvartu ili kvintu niže. Dakle, tonovima prvoga glasa: C D E F G A H c, odgovaraju tonovi drugoga glasa: G A H C D E F g (koji su za kvartu niži) ili F G A H C D E f (koji su za kvintu niži).



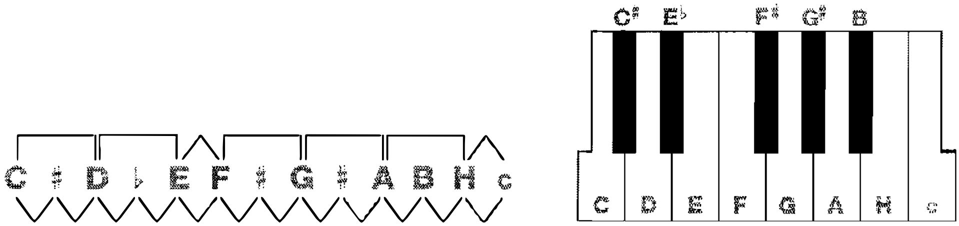
Glasovi su stalno udaljeni za kvartu (2.5 cijela tona), odnosno kvintu (3.5 cijela tona), osim kada istodobno pjevaju *tritonus* H/F (3 cijela tona). *Tritonus* je izrazito disonantan, a teško ga je i otpjevati. Zato bi pri susretu tonova H i F uvijek dolazilo do nesigurnosti koja se mogla otkloniti snižavanjem tona H za jedan poluton[8]. Tako su stari modusi prošireni notom B, a u klavijature je umetnuta prva crna tipka (usp. [5]). To je neko vrijeme bila jedina snižena nota i jedina crna tipka.



Možemo primijetiti da pomak iz H u B u prvom glasu ukida vođicu. Zato se boljim rješenjem čini pomak iz F u $F^{\#}$ u drugom glasu. Taj pomak otklanja disonantni tritonus, a ne ukida vođicu. Naravno, nove note B i $F^{\#}$ prirodno vode prema novim kvintama:

$$E^{b} \leftarrow B, \qquad F^{\#} \rightarrow C^{\#} \rightarrow G^{\#}.$$

Tako je oktava konačno podijeljena na 12 polutonova[9], a klavijature su dobile još po 4 crne tipke unutar oktava:



Naravno, ovaj proces nije neposredno doveo do "polutonskog" skladanja u tako dobivenoj *dodekatonskoj* (tzv. *kromatskoj*) skali. (To će se dogoditi tek u našem, 20. stoljeću.) U tom smislu polutonska razdioba još dugo nije postala skalom. Ona je samo omogućavala *polifonsko* skladanje u starim *septatonskim* modusima, jer se u njoj svaka stara skala mogla vezati uz bilo koji ton kao toniku (drugim riječima, nova je razdioba omogućavala *transpozicije*). Time su također otvorena vrata *harmonijskom* skladanju, koje zapravo nema jasne granice s *polifonskim*, budući da je vertikalni, istovremeni aspekt *polifonije*, zapravo *harmonija*. Naprimjer:

1. glas	c	G	G	G	c	c	c	H	c	d	e	e	...
2. glas	c	H	c	d	e	e	e	g	g	g	g	f	...
3. glas	e	g	g	g	g	f	e	d	c	A	c	c	...

polifonija

harmonija

Protezanjem glazbe u dvije dimenzije[10] stvoren je ogroman broj mogućnosti. U cijeloj je Europi u 16. st. bilo toliko velikih skladatelja da cijeli jedan život nije dovoljan za upoznavanje čak i dijela njihova opusa. (Studenti *polifonije*, tj. *kontrapunkta*, još i danas uče iz tog nepresušnog vrela.) Kao rezultat tog nebrojenog niza eksperimenata sa svim tradicionalnim modusima, početkom 17. st. izdvojio se jedan: *jonski*. To je današnji *dur*. Ostali su modusi polako nestajali, osim modificirane varijante *eolskog*, koja je današnji *mol*. Za oba preživjela modusa karakteristična je *velika septima*, tzv. *vođica*, koja je samo pola tona udaljena od tonike i time se iznimno naglašava kao mjesto razrješenja svoje disonantne napetosti. Zaljubljenost *vođice* u *toniku* glavna je karakteristika preživjelih modusa[11]. Od baroka do romantike oni su neprijeporno vladali zapadnom *tonalnom*, što zapravo znači *toničkom*, glazbom.

Skladatelji s početka 20. st. suočavaju se s novim dvojbama. **Wagnerova**, *Unendliche Melodie*, koja je zapravo melodija bez toničkog kraja, i njoj odgovarajući "lutajući" akordi, doveli su tonalnu glazbu do samih granica tonalnosti (tj. toničnosti). Wagnerovi neposredni sljedbenici više nisu zadovoljni starim sustavom *tonaliteta* (tj.

tonika) i njihovih odnosa. Oni su u potrazi za novim skalama bez izražene tonike. **Debussy** sklada u cjelotonskoj ljestvici bez izražene tonike, što njegovoj muzici daje smirenu, gotovo onostranu kvalitetu. Istu je skalu gotovo redovito rabio velikan *jazza* **Thelonius Monk**, i ona je još uvijek iznimno popularna u mnogim *jazz* krugovima. **Schönberg** i većina koncertnih skladatelja 20. st. uporabljuju kromatsku skalu, s efektima često stranima nenaviknutu uhu.

Međutim, zamjetan je i povratak tradicionalnim septatonskim modusima, koji su dovoljno stari i dovoljno zaboravljeni da se uvijek mogu pojaviti kao svjež i nov zvuk. Kao zvuk starih, gotovo primitivnih vremena, ili kao bezvremenski zvuk gregorijanskih korala. **Sibelius** nas, na početku svoje *6. simfonije*, odvodi u stare finske šume uporabljujući dorski modus. **Debussy**, **Hindemith** i **Stravinski** često rabe njegovu sniženu septimu (odsustvo vođice[12)]) kako bi postigli efekt svečanog, gotovo formalnog dorskog A-MEN (koji je cjelotonski C-D).

Isti efekt postiže se i frigijskim modusom. Njegova je dodatna karakteristika tužni i orijentalni prizvuk njegova polutonskog početka (E-F). Zato ga **Rimski-Korsakov** rabi u svojoj *Šeherezadi* (ali i **Brahms** u polaganom stavku svoje *4. simfonije*). Puno je "tužne" španjolske, ciganske i židovske glazbe skladano u frigijskom modusu (npr. **Lisztova** *2. mađarska*, zapravo ciganska, *rapsodija*).

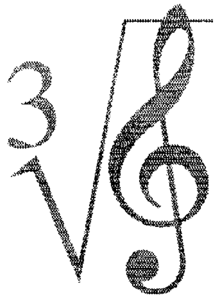
Povišena kvarta lidijskog modusa djeluje kao pogrešan ton u običnom duru, gotovo šaljivo. Duhoviti **Prokofjev** baš će zato često rabiti lidijski modus. Inače je taj modus karakterističan za poljsku glazbu; kako za narodnu, tako i za **Chopinove** poloneze i mazurke. Polonezu iz 3. čina *Borisa Godunova* **Musorgski** je napisao u lidijskom modusu.

Miksolidijski modus je "dur sa sniženom septimom", tj. "dur bez vođice". To ga je činilo dovoljno neobičnim i novim da mu omogući ulazak u mnoge klasike *rock-and-rolla* (**Kinks**: *You really got me;* **Beatles**: *Norwegian wood,* itd.).

Pentatonska skala C D E G A c (tzv. "crna" skala koja se, polazeći iz F$^{\#}$, može odsvirati na crnim tipkama kao F$^{\#}$ G$^{\#}$ B C$^{\#}$ D$^{\#}$) rabi se u narodnoj glazbi širom svijeta. Preberete li nekoliko puta (u *arpeggiu*) pentatonski niz C D E G A c, u mislima će vam se pojaviti barem jedan od hitova zabavne glazbe (zabavna industrija zaradila je velike novce na ovih 5 nota). To je najčešća skala zabavne glazbe, koja problem *tritonusa* H/F rješava izbacivanjem nota H i F iz septatonske skale: C D E ~~F~~ G A ~~H~~ c. Mogli bismo je zato nazvati minimalističkim rješenjem za polifonsko i harmonijsko skladanje .

I na kraju ovog prikaza mogućih razdioba oktave u skalu tonova (s odgovarajućom raspodjelom intervala) spomenimo još i jednu manje poznatu, **Bowersovu**[13)] analizu harmonijske vrijednosti takvih razdioba. Bowers svakom intervalu duljine n-polutonova pridružuje harmonijski indeks $K(n)$, koji na, donekle upitan način mjeri njegovu disonantnost:

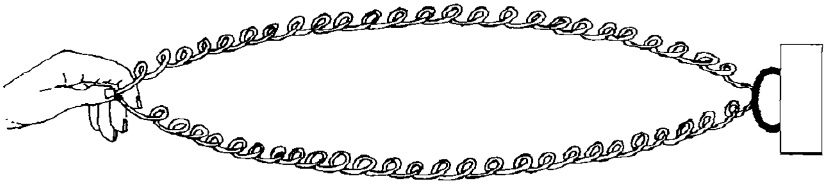
n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$K(n)$	30	18	10	8	5	64	5	8	10	18	30

Uočite da kvarta, $n = 5$ polutonova, i kvinta $n = 7$ polutonova, imaju isti indeks disonantnosti. Svaka je skala konačni niz tonova od tonike 0 do tonike 12 i u njoj se može realizirati konačni broj intervala. Naprimjer, septatonska skala je odabir šest takvih tonova od mogućih 11, i u njoj se može realizirati 21 interval (brojeći intervale s različitim počecima kao različite). Harmonijska je vrijednost skale zbroj harmonijskih indeksa svih njezinih intervala, podijeljen brojem tih intervala. Na primjer, za dur je taj zbroj 308, što podijeljeno s 21 daje harmonijsku vrijednost 14.7. Tu harmonijsku vrijednost imaju i svi tradicionalni modusi, budući da imaju iste intervale kao i dur. Najlošija septatonska skala ima harmonijsku vrijednost 22.1. Europske pentatonske skale imaju harmonijsku vrijednost 13, cjelotonska 23.2, a kromatska 18.7. Jednom finijom (i također upitnom) analizom Bowers je zaključio kako najveću harmonijsku vrijednost imaju dorska skala i dur, s laganom prevagom dorske skale. *Dakle, anđeli su pjevali na dorski način.*[13)]

HARMONIJA OBOJENOGA TONA

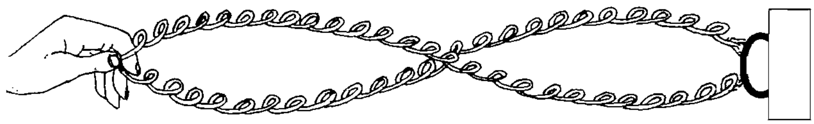
3. HARMONIJA OBOJENOGA TONA

Pitagora je formulirao *zakon malih brojeva*, ali ga nije objasnio. Saznali smo da su dva tona konsonantna ako im frekvencije stoje u omjeru malih (prirodnih) brojeva, ali nismo saznali *zašto* je to tako.

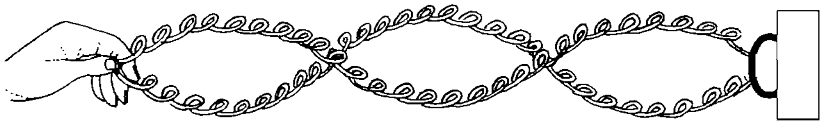
Zamislite (ili provedite) sljedeći eksperiment. Lagano rastegnite savitljivu telefonsku žicu, pa je zanjišite ravnomjernim pokretima ruke tako da titra lijevo-desno, tvoreći jedan val:



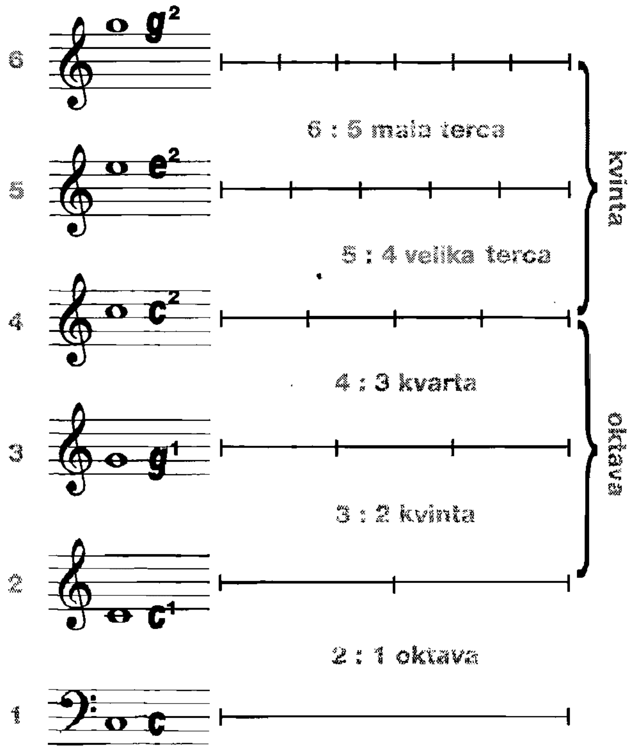
To ćete postići tek pri određenom broju titraja u sekundi, što znači - tek pri određenoj frekvenciji.[1] Ako povećate frekvenciju (tj. broj titraja), val će se razbiti, a žica će se početi opirati ruci. No, u jednom trenutku opet će početi s ravnomjernim titranjem, tvoreći sada dva vala. To će se dogoditi kada se početna frekvencija udvostruči ("raspolovljena" žica ima dvostruku frekvenciju, u skladu s Pitagorinim razmišljanjima):



Ako frekvenciju utrostručimo, dobit ćemo tri vala (što je već teže postići s običnom telefonskom žicom):



Da je frekvencija titranja jednoga vala bila 131 Hz, mi bismo tu vibraciju (tj. titranje) čuli kao ton c. Frekvencija dvostrukoga vala bila bi tada 262 Hz i tu bismo vibraciju čuli kao za oktavu viši ton c^1. Frekvencija trostrukoga vala bila bi 393 Hz i tu bismo vibraciju čuli kao ton g^1. Četverostruki val proizveo bi c^2, peterostruki e^2, a šesterostruki g^2. To možemo prikazati sljedećom shemom:



Odsviramo li simultano ovih šest tonova, čut ćemo *akord* vrlo blizak našem uhu. Naime, on sadrži *trozvuk* c + e + g koji je temelj zapadne harmonije[2)]. Odsviramo li istih šest tonova simultano, ali sada tako da intenzitet tonova opada od c prema g^2, čut ćemo jedan bogati i puni c, u kojemu nećemo ni prepoznati ostale tonove. Upravo tako zvuče naša glazbala. Njihove vibracije, osim temeljne frekvencije koja određuje visinu tona, uvijek sadrže i više frekvencije (dvostruku, trostruku, ...) u sve slabijem intenzitetu. Razdioba intenziteta tih viših frekvencija (tzv. *viših harmonika* ili *alikvotnih tonova*) zapravo određuje boju tona i po njoj se zvuk violine razlikuje od zvuka glasovira, zvuk glasovira od zvuka oboe, itd. Kada bismo čuli samo temeljnu frekvenciju (*jednostavni* ili *sinusni* ton), to bi zvučalo umjetno, prazno, bez obujma. Nijedno glazbalo ne proizvodi takve tonove. (Oni se mogu proizvesti elektronički.) *Alikvotni tonovi* jednog jedinog, ali bogatog tona (npr. violine ili glasovira), tvore čitavu skalu tonova. Zbog toga je **Schönberg** u svojem slavnom tekstu o harmoniji iz 1911. godine napisao da je skala analiza jednoga tona, a akord sinteza tona, tj. kolaps njegovih alikvotnih tonova u jedinstveni zvuk.

Jedno od objašnjenja Pitagorina zakona konsonantnosti, poznato još od 16. st, a koje nalazimo i u muzičkim raspravama **Galilea Galileia**, poziva se na poklapanja viših harmonika. Promotrimo ton frekvencije v i za oktavu viši ton frekvencije 2v. Ovo su njihove više harmonike, koje proizlaze iz temeljnih frekvencija:

osnovni ton:	v	2v	3v	4v	5v	6v	7v	8v
oktava:		2v		4v		6v		8v

Vidimo da oktava zapravo i nema svojih frekvencija. Sve njezine frekvencije ujedno su i frekvencije osnovnoga tona v. To doživljavamo kao potpuno suglasje (konsonantnost). Ono je toliko da često ne razlikujemo oktavu od osnovnoga tona.

Promotrimo sada više harmonike tona v i njegove kvinte (3/2) v:

osnovni ton:	v		2v		3v		4v		5v		6v		7v
kvinta:		$\frac{3}{2}$v			3v			$\frac{9}{2}$v			6v		

Vidimo da kvinta ima polovicu svojih frekvencija ((3/2)v, (9/2)v, ...), dok ih polovicu dijeli s osnovnim tonom (3v, 6v,...). Mogli bismo reći da se tu radi o "pola potpunoga suglasja".

Osnovni ton v i njegova kvarta (4/3)v imaju sljedeću razdiobu viših harmonika:

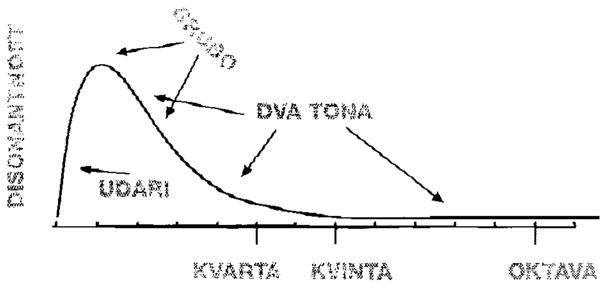
osnovni ton:	v			2v			3v			4v			5v	
kvarta:		$\frac{4}{3}$v				$\frac{8}{3}$v				4v				$\frac{16}{3}$v

Kvarta ima dvije trećine svojih frekvencija ((4/3)v, (8/3)v, (16/3)v, (20/3)v, ...), dok jednu trećinu dijeli s osnovnim tonom (4v, 8v, ...). Tu se radi o "trećini potpunoga suglasja" s osnovnim tonom. Na isti bi se način pokazalo da terca ima "četvrtinu potpunoga suglasja" s osnovnim tonom, mala terca "petinu", itd.

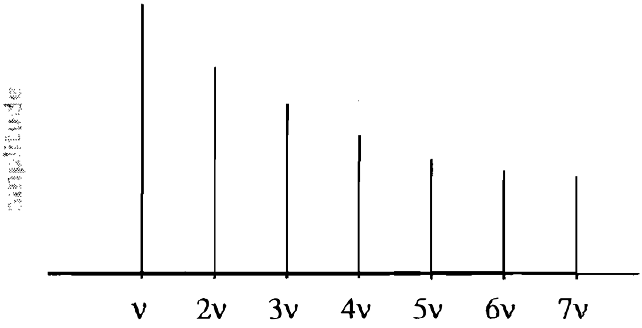
Poklapanja viših harmonika dobro objašnjavaju Pitagorin zakon: što "malobrojniji" omjer, to veće suglasje. Nažalost, to objašnjenje ne vrijedi. Što bismo, na primjer, mogli reći o suglasju jednostavnih tonova koji uopće nemaju viših harmonika? Budući da nemaju zajedničkih frekvencija, svi bi jednostavni tonovi trebali biti jednako disonantni.

Helmholtz je prije više od sto godina (u knjizi *On the Sensation of Tones*) ponudio objašnjenje konsonantnosti koje se zasniva na fenomenu rezonantnih udara. Kada dva tona imaju gotovo iste frekvencije, njihovo simultano izvođenje dovodi do (rezonantne) interferencije koja ritmički pojačava i smanjuje intenzitet složenoga zvuka. Pojačanja doživljavamo kao zvučne udare. Kako se frekvencije tonova približavaju, udari postaju sve sporiji, a potpuno iščezavaju kada se frekvencije izjednače (tim se fenomenom redovito koriste ugađači glasovira). Spore udare doživljavamo kao ugodni *vibrato*, ali brži djeluju grubo i neugodno. **Helmholtz** je pretpostavljao da je disonanca dvaju tonova posljedica udara što ih stvaraju bliske frekvencije njihovih viših harmonika. Konsonantnost je jednostavno odsutnost ovih disonantnih udara. No to bi značilo da su dva dovoljno udaljena jednostavna tona (npr. osnovni ton i njegova septima) konsonantni.*

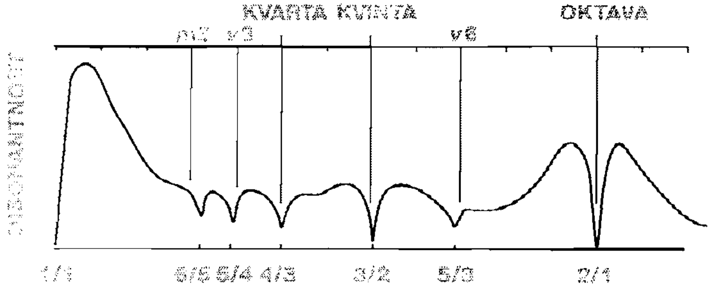
U novije je vrijeme taj problem istražen eksperimentalno. **Plomp i Levelt**[3] generirali su parove jednostavnih tonova tražeći od slušača procjenu njihove disonantnosti. Varijacije u apsolutnim procjenama bile su uočljive, ali je raspored procjena uvijek bio isti. Disonantnost dvaju tonova iste frekvencije, tj. disonantnost unisonih tonova, bila je nula. Kako je interval rastao, tako je rasla i disonantnost, dok nije postigla maksimum (oko male sekunde). Zatim je, s daljnjim rastom intervala, disonantnost opadala nikada ne postižući vrijednost nula od koje je krenula. Sljedeći graf prikazuje krivulju disonantnosti prosječnoga slušatelja. Najviše iznenađuje što se klasični intervali konsonantnosti, kao što su oktava i kvinta, zapravo ne ističu svojom konsonantnošću. Oni nisu minimumi na krivulji disonantnosti jednostavnih tonova.



Naša tradicionalna glazbala proizvode tonove specifične boje, koji nemaju samo jednu frekvenciju, nego čitav spektar frekvencija. Vidjeli smo da žičana glazbala, a slično je i s ostalima, najčešće proizvode *harmonijske tonove*, spektar kojih osim temeljne frekvencije ν sadrži i njezine cjelobrojne višekratnike 2ν, 3ν, 4ν, ..., u sve slabijem intenzitetu (tj. sa sve manjim *amplitudama*). Jedan tipični (obojeni) ton može imati sljedeći spektar:



Ako se po dva tona ovakve razdiobe frekvencija (tj. ovakve boje) odsviraju u različitim intervalima, disonantnost svakog od tih intervala može se izračunati tako da se zbroje disonantnosti po svim frekvencijama spektra. Provedemo li taj račun za gornji spektar, dobit ćemo sljedeću krivulju disonantnosti za ton tako zadane boje:



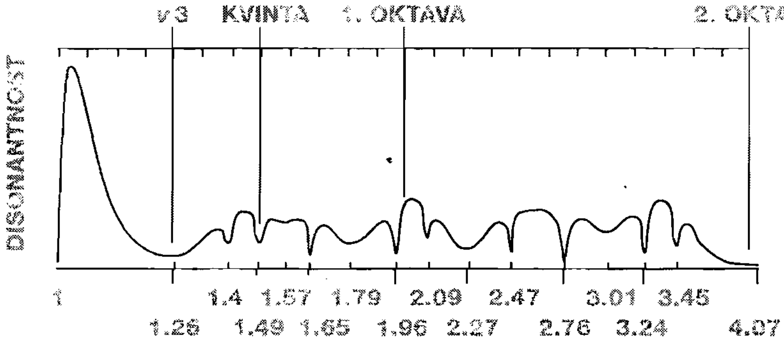
Uočimo da krivulja disonantnosti obojenoga tona ima minimume u klasičnim muzičkim intervalima[4]. To konačno objašnjava Pitagorin zakon i uobičajenu glazbenu praksu.

Važno je primijetiti da ova (predočena) analiza pokazuje kako svaki spektar (svaka boja tona) određuje skalu tonova u kojima se realiziraju minimalne disonantnosti. To je skala u kojoj glazbalo s tom bojom tona zvuči najkonsonantnije. Parafrazirajući **Schönberga** mogli bismo reći da je skala analiza objenoga tona. Za većinu zapadnih glazbala to je skala sa standardnim Pitagorinim intervalima.

Naravno, ova analiza otvara i druge mogućnosti. Ona pokazje kako se za zvuk bilo koje boje, dakle za zvuk bilo kojeg glazbala, može odrediti skala u kojoj to glazbalo zvuči najkonsonantnije. Ako to glazbalo nema harmonijsku razdiobu alikvotnih tonova, njegova skala neće biti "Pitagorina". Na primjer, ksilofon i slični instrumenti proizvode tonove vibracijom pločica sa slobodnim krajevima (za razliku od žica ili cijevi dosad razmatranih glazbala, koje imaju fiksne krajeve). Matematičkim se metodama može pokazati[5] da pločica sa slobodnim krajevima, koja vibrira s temeljnom frekvencijom ν, vibrira i sa sljedećim višim frekvencijama:

ν, 2.758ν, 5.406ν, 8.936ν, 13.35ν, 18.65ν, 24.82ν, ...

Ranije opisanim računom nalazi se sljedeća krivulja disonantnosti za takve "ksilofonske" tonove:

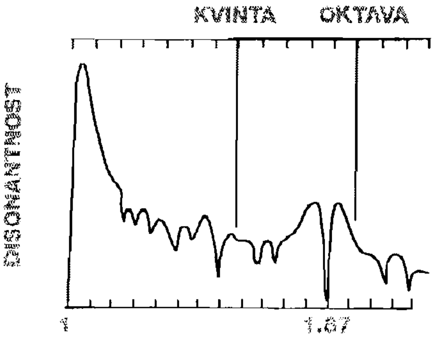


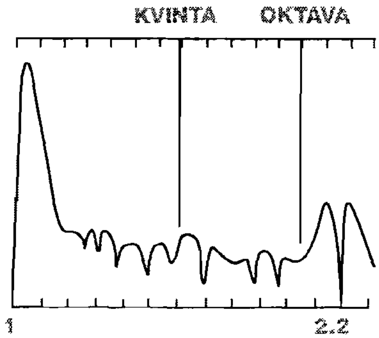
Čini se da ksilofon nije baš najbolje usklađen s kromatskom skalom (no u tome možda i jest njegova zanimljivost). Slično vrijedi za zvona i mnoge druge udaraljke.

Slymaker, Mathews i **Pierce**[6] istraživali su boje zvuka s temeljnom frekvencijom ν i višim frekvencijama oblika:

$$\nu_j = \nu A^{\log_2 j}$$

Kada je A = 2, radi se o uobičajenoj harmonijskoj razdiobi viših frekvencija, $\nu_j = \nu j$, karakterističnoj za naša standardna glazbala. Kada je A < 2, frekvencije su u odnosu na taj standard raspoređene gušće, a kada je A > 2, raspoređene su rjeđe. Krivulje disonantnosti za A = 1.87 i A = 2.2 izgledaju ovako:



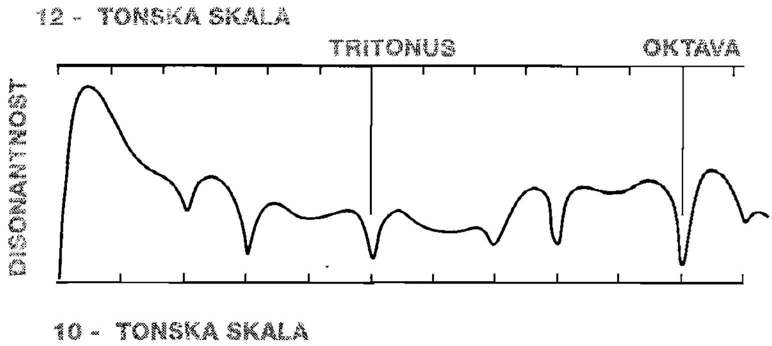


Najuočljivija je odsutnost oktave 2v (osim za A = 2) kao konsonantnog intervala. Njezinu ulogu preuzima pseudooktava, kojoj je frekvencija Av. Krivulje čuvaju osnovni oblik harmonijske krivulje, samo su u odnosu na nju stegnute ili rastegnute, pa možemo govoriti i o pseudokvintama, pseudokvartama, itd. To znači da se muzička teorija i praksa ovakvih rastegnutih (rijetkih) ili stegnutih (gustih) tonova čuva ako se izvodi u prikladno rastegnutim, odnosno stegnutim skalama.

Spomenimo na kraju da je moguć i obratni postupak u kojem polazimo od zadane (proizvoljne) skale, i pronalazimo boju zvuka u kojoj je ta skala konsonantna. Taj je problem matematički bitno teži i rješava se sofisticiranim matematičkim metodama optimizacije[6)], ali je u načelu rješiv. Ako se radi o *jednoliko temperiranoj* skali, u kojoj su svi intervali jednaki (poput "Debusyjeve" cjelotonske ili kromatske polutonske skale), problem je mnogo lakši. Naprimjer, *dekatonska* skala, koja dijeli oktavu na 10 intervala jednake duljine, zvuči konsonantno s tonovima sljedeće boje[7)]:

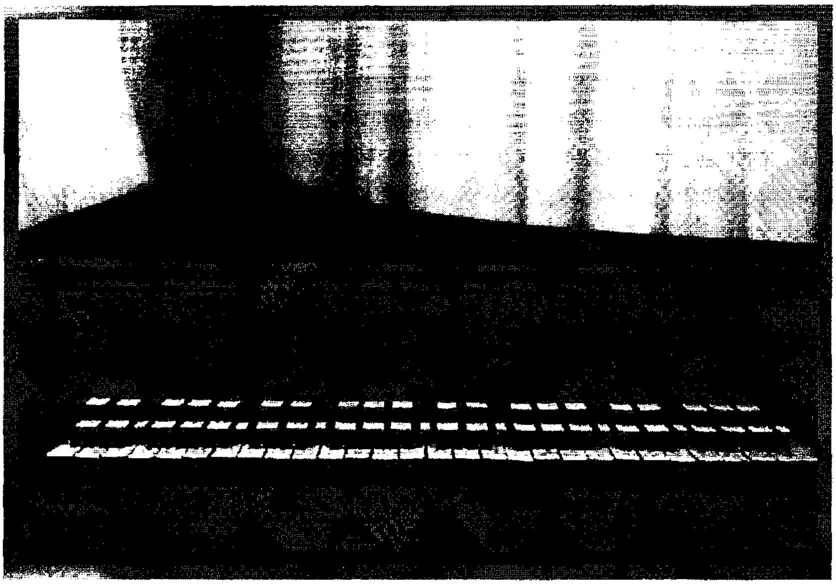
$$v,\ q^{10}v,\ q^{17}v,\ q^{20}v,\ q^{25}v,\ q^{28}v,\ q^{30}v, \ldots$$

gdje je $q = \sqrt[10]{2}$ Krivulja disonantnosti za zvuk te boje izgleda ovako:



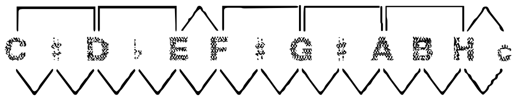
Naravno, tonovi *dekatonske temperirane* skale zvučat će sasvim disonantno na violini ili glasoviru.

JEDNOLIKOST PROTIV TOČNOSTI



4. JEDNOLIKOST PROTIV TOČNOSTI

Vratimo se još jednom osnovnom glazbenom materijalu, koji se sastoji od 12 polutonova *kromatske* skale (i iz kojeg svoj materijal odabiru sve skale obrađene u trećem poglavlju):



Dosad nismo temeljitije proučili problem točne veličine intervala u toj skali.

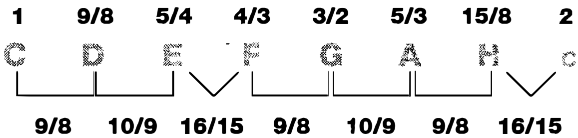
Pitagorin ideal bio bi: osnovni ton C = 1/1, oktava c = 2/1, kvinta G = 3/2, kvarta F = 4/3 i terca E = 5/4. Odavde slijedi:

G/F = (3/2)/(4/3) = 9/8 $\Rightarrow$ D/C = 9/8 tj. D = C ·9/8 = 1 ·9/8 = 9/8,

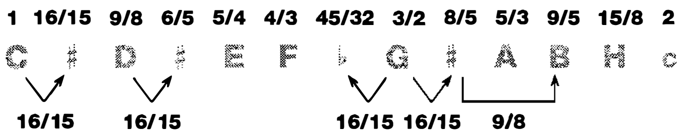
F/E = (4/3)/(5/4) = 16/15 $\Rightarrow$ c/H = 16/15 tj. H = c ·15/16 = 2 ·15/16 = 15/8,

$\Rightarrow$ H/A = 9/8 tj. A = H ·8/9 =(15/8) ·(8/9) = 5/3.

Dakle, za "bijele" tonove imamo sljedeće vrijednosti:



To je skala koju preporuča **Ptolemej**, najveći astronom, ali i veliki antički muzički teoretičar. Uočite da su polutonovi duljine 16/15, dok su cijeli tonovi različitih duljina, 9/8 i 10/9 (naime, D/E = (5/4)/(9/8) = A/G = (5/3)/(3/2) = 10/9). Razbijanjem cijelih tonova na polutonove konačno dolazimo do svih točnih intervala[1] u dvanaestonskoj skali:



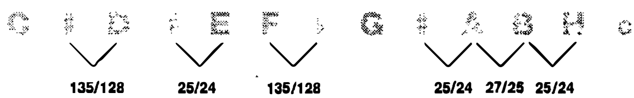
Naime,

$C^{\#} = C \cdot 16/15 = 1 \cdot 16/15 = 16/15$; $D^{\#} = D \cdot 16/15 = (9/8) \cdot (16/15) = 6/5$;

$G^{\#} = G \cdot 16/15 = (3/2) \cdot (16/15) = 8/5$; $G^{b} = G/(16/15) = (3/2)/(16/15) = 45/32$;

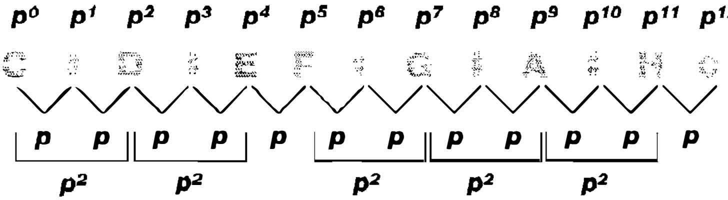
$B = G^{\#} \cdot 9/8 = (8/5) \cdot (9/8) = 9/5$.

Iznosi tako dobivenih polutonova kromatske skale, osim polazne vrijednosti 16/15 = 1.07, imaju još i vrijednosti 25/24 = 1.04, 135/128 = 1.05 i 27/25 = 1.08 (neoznačeni polutonovi imaju početni iznos 16/15, usp. gore.):



Ovi Pitagorini točni intervali dio su tzv. *prirodne intonacije*[2]. Za glazbala koja su ugođena s tako određenim frekvencijama (v, (16/15)v, (9/8)v, (6/5)v, (5/4)v, ...) kaže se da su *ugođena u prirodnoj intonaciji*. Osnovni problem prirodne intonacije jest velik broj različitih polutonova, čak četiri, koji često onemogućava vjerne transpozicije[3]. Taj se problem potpuno rješava jednoliko temperiranom skalom, tj. jednolikim ugađanjem koje preporuča najveći antički muzički teoretičar **Aristoksen**.

Jednoliko temperirana skala razdioba je oktave na 12 jednakih polutonova. Ako polutonski interval označimo s p, radi se o sljedećoj razdiobi:



Naravno, $p^0 = 1$ i $p^{12} = 2$, odakle slijedi $p = \sqrt[12]{2} = 1.06$. Pogodno je udaljenost tona od tonike (npr. p^9) označavati odgovarajućim eksponentom (npr. 9). Time s multiplikativne skale (p^0, p^1, p^2, ...) prelazimo na aditivnu logaritamsku[4] skalu (0, 1, 2, ...). To nam omogućava zbrajanje intervala, umjesto množenja (npr. to da terca i kvinta čine septimu, u logaritamskoj skali nalazimo zbrajanjem, 4 + 7 = 11, a u osnovnoj množenjem, $p^4 \cdot p^7 = p^{11}$).

Za preciznije određenje intervala uvodi se manja jedinica *centila*. Ona je stoti dio polutona, pa ćemo je označiti sa s. Dakle, $s^{100} = p$, odnosno $s^{1200} = p^{12} = 2$, što znači da je $s = \sqrt[1200]{2} = 1.00058$. Naravno, iz $s^{100} = p$ slijedi $s^{200} = p^2$, $s^{300} = p^3$ itd. To znači da u logaritamskoj skali izraženoj u *centilama* (što znači u bazi s) vrijedi:

mala sekunda	= 100 *cent*	kvinta	= 700 *cent*
velika sekunda	= 200 *cent*	mala seksta	= 800 *cent*
mala terca	= 300 *cent*	velika seksta	= 900 *cent*
velika terca	= 400 *cent*	mala septima	= 1000 *cent*
kvarta	= 500 *cent*	velika septima	= 1100 *cent*
tritonus	= 600 *cent*	oktava	= 1200 *cent*

Želimo li neki interval duljine (m/n) izraziti u *centilama*, moramo zapravo izračunati logaritam od m/n u bazi s:

$$\log_s(m/n) = \frac{\log(m/n)}{\log s} = 1200 \cdot \frac{\log(m/n)}{\log 2}.$$

(Naime, $\log_a b = \log a / \log b$, gdje je $\log = \log_{10}$, a $\log s = \log \sqrt[1200]{2} = (1/1200) \log 2$.)[5)] Uz pomoć ove formule točne intervale možemo izraziti u *centilama* i usporediti ih s jednolikima:

16/15	= mala sekunda	= 111.73 *cent*	3/2	= kvinta	= 702.00 *cent*
9/8	= velika sekunda	= 203.91 *cent*	8/5	= mala seksta	= 813.69 *cent*
6/5	= mala terca	= 315.64 *cent*	5/3	= velika seksta	= 884.36 *cent*
5/4	= velika terca	= 386.31 *cent*	9/5	= mala septima	= 1017.60 *cent*
4/3	= kvarta	= 498.00 *cent*	15/8	= velika septima	= 1088.27 *cent*
45/32	= tritonus	= 590.22 *cent*	2/1	= oktava	= 1200.00 *cent*

Kvarte, kvinte i sekunde gotovo su iste u prirodno intoniranoj i jednolikoj skali (odstupanje do 10 centila nije veliko), ali terce, sekste i septime pokazuju veća odstupanja. Očito je da se radi o bitno različitim ugađanjima "istih" tonova.

Glavna prednost prirodne intonacije, njezina točnost (kvinta je 702 *cent,* a ne 700, mala terca je 315.64 *cent,* a ne 300), gubi se pri transponiranju. Usporedite jednoliki pomak iz C u terce E^b i E te u kvintu G, s istim pomacima u prirodnoj intonaciji:

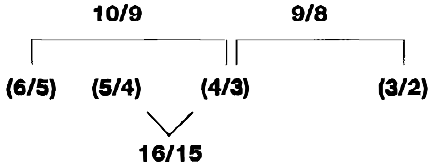
C	♭	D	♭	E	F	♭	G	♭	A	B	H	c	♭	d	♭	e	f	♭	g
0	100	200	300	400	400	600	700	800	900	1000	1100	1200	1300	1400	1500	1600	1700	1800	1900
			0	100	200	300	400	400	600	700	800	900	1000	1100	1200				
				0	100	200	300	400	400	600	700	800	900	1000	1100	1200			
							0	100	200	300	400	400	600	700	800	900	1000	1100	1200

C	♯	D	♯	E	F	♭	G	♯	A	B	H	c	♯	d	♯	e	f	♭	g
0	112	204	316	386	498	590	702	814	884	1018	1088	1200	1312	1404	1516	1586	1698	1790	1802
			0	70	182	274	386	498	568	702	772	884	996	1088	1200				
				0	112	204	316	428	498	632	702	814	926	1018	1130	1200			
							0	112	182	316	386	498	610	702	814	884	996	1088	1200

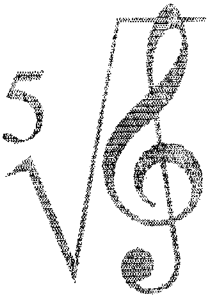
Svi pomaci u jednolikoj skali daju potpuno isti niz polutonova (100, 200, ..., 1200), dok pomaci u prirodno intoniranoj skali imaju 3 pogrješke u kvintnom pomaku, 4 pogrješke u pomaku velike terce i čak 6 pogrješaka u pomaku male terce (pogrješke su u tablici zaokružene). Te pogrješke nisu male. Od 13 zaokruženih, 7 ih odstupa od točnih vrijednosti za 42 *cent*, a 6 za 22 *cent* ("podnošljiva" pogrješka je do 10 *cent*). Pogrješke jednolike razdiobe, koje se ne mijenjaju transponiranjem, iznose od 0 *cent* do 18 *cent*, s prosjekom od točno 10 *cent*.

Polifonijska i harmonijska glazba, od renesanse do romantizma, teško bi podnijela ugađanje koje u njezinim temeljnim trozvucima (tonika - v. terca - kvinta i tonika - m. terca - kvinta) ima tako velike disonance kakve se pojavljuju kod ugađanja prirodnom intonacijom. Antičkoj i srednjovjekovnoj monofoniji to nije smetalo, ali polifonija i harmonija to ne mogu podnijeti, osim kada se sklada dijatonski, te samo s nekim akordima u duru: (na I., IV. i V. stupnju), te s većinom u molu: (na I., III., IV., V. ,VI. i VII. stupnju).[6] Druga je mogućnost da se u skladanje uvede još više točnih intervala, koji bi pri danoj transpoziciji zamijenili pogrješne intervale (sjetimo se[2] **Zarlinove** 16-tonske klavijature i današnjeg mikrotonalnog skladanja).

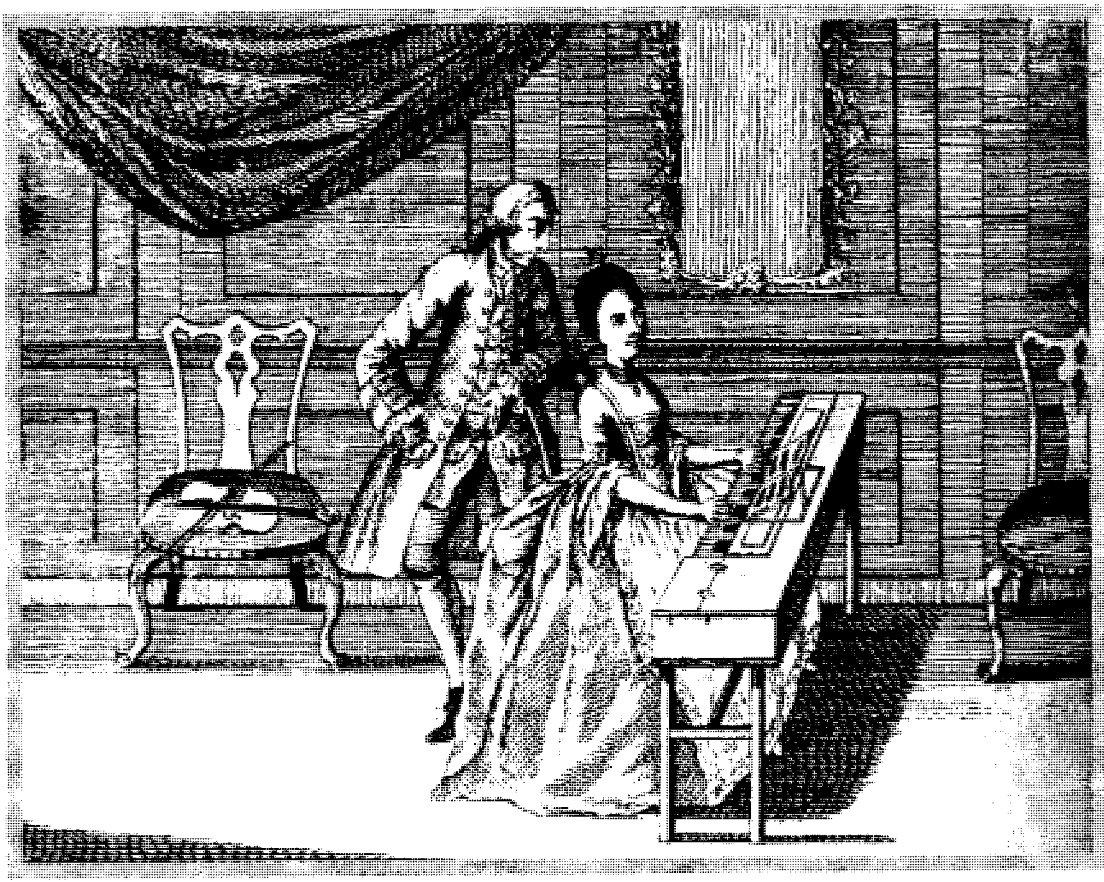
Glazbena povijest nije išla putem upravo iznesene glazbene teorije. Teorijski je opravdano razmišljati o **Ptolemejevim** intervalima 16/15, 9/8, ..., 45/32, ..., 15/8, ali je vrlo nepraktično realizirati ih na konkretnim glazbalima. Tko uostalom može točno otpjevati (ili ugoditi) dvije različite velike sekunde 9/8 i 10/9, malu sekundu 16/15 itd.[7] (Isto vrijedi i za jednolike intervale $\sqrt[12]{2}$, $\sqrt[6]{2}$, $\sqrt[4]{2}$, itd.) Naravno, krenemo li od kvinte 3/2, kvarte 4/3, velike terce 5/4 i male terce 6/5, možemo dobiti sve te intervale (kako smo pokazali na početku poglavlja):



Najlakše je, ipak, otpjevati i prepoznati savršene oktave i kvinte, pa je zato u cijeloj antici i srednjem vijeku standardno ugađanje bilo Pitagorino ugađanje kvintama i oktavama.



PITAGORINO UGAĐANJE



5. PITAGORINO UGAĐANJE

Francuska akademija *Notre Dame* proglasila je u 13. st. da se do točne skale može doći samo nizom savršenih Pitagorinih kvinti, kojih je stalni omjer prema prijašnjem tonu “božanski” omjer 3:2 (3 za Sveto Trojstvo, 2 za razne dualizme; neba i zemlje, duha i tijela, dobra i zla i sl.). Krenemo od tona C = 1 kao tona jedinične frekvencije. Kvintu iznad njega nalazi se G = 3/2. Kvintu iznad G = 3/2 nalazi se d = $(3/2)^2$. Taj ton izlazi izvan oktave koja se proteže od C = 1 do c = 2, pa zato D snizimo za oktavu da bismo dobili D = $(1/2)(3/2)^2$ = 9/8. Kvintu viši je ton A = $(1/2)(3/2)^3$ = 27/16. Kvintu iznad A je e = $(1/2)(3/2)^4$=81/32, koji opet snizimo za oktavu da bismo dobili E = $(1/2)^2(3/2)^4$ = 81/64. Kvintu iznad E je H = $(1/2)^2(3/2)^5$ = 243/128. Tako smo dobili sve “bijele” tonove osim F. Spustimo se za kvintu ispod početnog C = 1 i dobit ćemo F’ = 1/(3/2) = 2/3, pa lako možemo naći za oktavu viši F = 2(2/3) = 4/3. Tako smo kvintama i oktavama ugodili sve “bijele” tonove dijatonske skale:

$$F \leftarrow C \rightarrow G \rightarrow D \rightarrow A \rightarrow E \rightarrow H$$

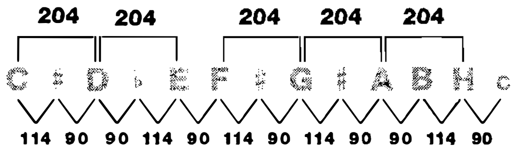
Spustimo se od F još za dvije kvinte i dobit ćemo (uz odgovarajući pomak za oktavu više) B = $2^2(2/3)^2$ = 16/9 i E^b= $2^2(2/3)^3$ = 32/27. Dignimo se od H još za tri kvinte i dobit ćemo (uz odgovarajući pomak za oktavu niže) $F^\#$ = $(1/2)^3(3/2)^6$ = 729/512, $C^\#$ = $(1/2)^4(3/2)^7$ = 2187/2048 i $G^\#$ = $(1/2)^4(3/2)^8$ = 6561/4096. Tako smo ugodili sve tonove kromatske skale:

$$E^b \leftarrow B \leftarrow F \leftarrow C \rightarrow G \rightarrow D \rightarrow A \rightarrow E \rightarrow H \rightarrow F^\# \rightarrow C^\# \rightarrow G^\#$$

To je tzv. *Pitagorino ugađanje*, u ovom slučaju Pitagorino E^b - $G^\#$ ugađanje, jer se od C krećemo do E^b prema dolje i do $G^\#$ prema gore. Dobivene vrijednosti možemo iskazati omjerima ili preglednije u logaritamski izračunatim centilama (vrijednosti u centilama zaokružene su do cjelobrojnih vrijednosti):

C	♯	D	♭	E	F	♯	G	♯	A	B	H	c
1/1	**2187/2048**	**9/8**	**32/27**	**81/64**	**4/3**	**729/512**	**3/2**	**6561/4096**	**27/16**	**16/9**	**243/128**	**2/1**
0	**114**	**204**	**294**	**408**	**498**	**612**	**702**	**792**	**906**	**996**	**1110**	**1200**

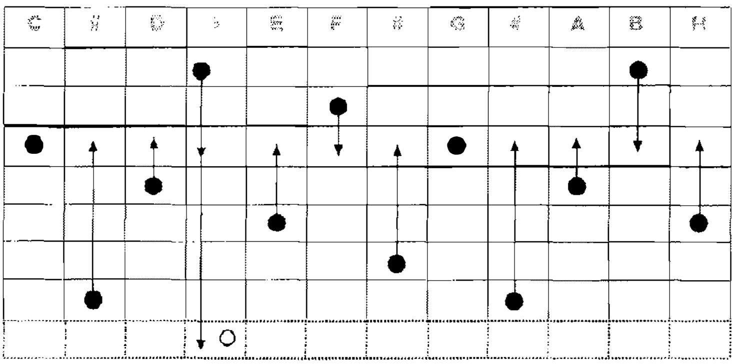
Uočite da polutonovi tako dobivene skale nisu jednaki, oni iznose 114 *cent ili 90 cent. Manji je naš stari poznanik, Pitagorin dijatonski poluton (naime, omjer 256/243 ima 90 cent), dok je veći poznat pod imenom Pitagorin apotom.*



Vidimo da cijeli ton može imati 204 cent ili 180 cent. No, budući da se apotom od 114 cent uvijek pojavljuje između tona X te njegova povišenja X# ili sniženja bX (naravno bH = B), iz toga slijedi da svaki cijeli ton dijatonske "bijele" skale ima 204 cent.

Ovo ugađanje ima jedan veliki nedostatak. Sve kvinte koje smo neposredno ugodili sastoje se od 4 dijatonska polutona i 3 apotoma, 4(90 + 3(114 = 702, i savršene su. Nažalost, kvinta G# - eb, koja je krajnji rezultat našeg ugađanja, a nije neposredno ugođena, sastoji se od 5 dijatonskih polutonova i 2 apotoma, 5(90 + 2(114 = 678, i ne zvuči dobro. Ona se zove vučji interval, jer zvuči kao vučje zavijanje. Isto vrijedi i za kvartu Eb - G#, koja je 3(114 + 2(90 = 522, umjesto savršenih 3(90 + 2(114 = 498. Svako Pitagorino ugađanje imat će ovakve vučje intervale, koje određuju krajnji tonovi u nizu kvinti. (U Eb - G# ugađanju to su intervali Eb - G# i G# - eb.)

Zašto se u Pitagorinom ugađanju pojavljuju vučji intervali? Jednostavno zato što 12 kvinti koje prekrivaju raspon od 7 oktava i pritom "pogađaju" sve tonove kromatske skale to ne rade do kraja točno.



Kada se od $G^\#$ u zadnjoj oktavi dignemo za još jednu kvintu, dolazimo do "praznoga" $D^\#$, koji je za 12 kvinti udaljen od "punoga". Dakle, njihova je udaljenost $(3/2)^{12}$. Podignemo li "puni" E^b za 7 oktava, on se nažalost neće poklopiti s "praznim" $D^\#$ (koji tvori savršenu kvintu s $G^\#$), jer je $2^7 < (3/2)^{12}$. No, to znači da "puni" E^b i $G^\#$ ne tvore savršene, nego vučje intervale. Izraženo u centilama (oktava ih ima 1200, a savršena kvinta 702):

$$7 \cdot 1200 < 12 \cdot 702 \text{ tj. } 7 \cdot 1200 < 12 \cdot 700 + 12 \cdot 2.$$

To znači da se vučji intervali razlikuju od savršenih za 12·2 = 24 *cent* (točnije 23.5 *cent*, jer savršena kvinta ima 701.955... *cent*). Vučja kvarta je za 24 *cent* prevelika, a vučja kvinta za 24 *cent* premala. Interval od 24 *cent*, koji čini te razlike, zove se *Pitagorin zarez*. (Uočite da je on jednak razlici Pitagorinih polutonova od 114 *cent* i 90 *cent*, što nije slučajno.)

Osim po jedne nesavršene kvinte i kvarte, Pitagorino ugađanje generira i terce, koje su sve nesavršene. Velika terca ovoga ugađanja ima duljinu izraženu omjerom 81/64, što se razlikuje od savršenih 5/4 = 80/64. Interval, za koji se razlikuju te velike terce, ima duljinu izraženu omjerom (81/64)/(80/64) = 81/80, ili u centilama 22 *cent* (točnije 21.5). Isti interval razdvaja savršenu malu tercu 6/5 od ugođene 32/27, jer je (6/5)/(32/27) = 81/80. Dakle, ugođena velika terca za 22 *cent* je veća od savršene, dok je ugođena mala terca za 22 *cent* manja od savršene. Njihov zbroj je savršena kvinta (jer se višak i nedostatak od 22 *cent* poništavaju), osim na E^b i $G^\#$ na kojima su gotovo savršene male terce, ali (zato) jednako loše velike. Interval od 22 *cent*, za koji se savršene terce razlikuju od pitagorinski ugođenih, zove se *sintonički zarez*.

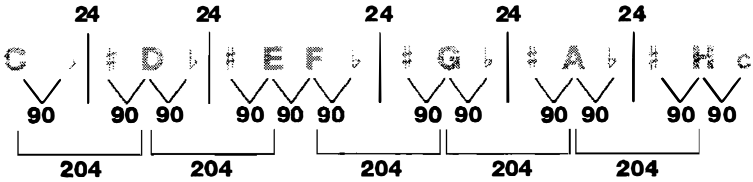
Sintonički zarez karakterističan je za sve terce u Pitagorinom sustavu ugađanja, dok je *Pitagorin zarez* karakteristika samo jedne vučje kvinte i samo jedne vučje kvarte. Zato je Pitagorino ugađanje posebno pogodno za izvođenje glazbe u kojoj su kvarte i kvinte dominantna sazvučja (uz nužno izbjegavanje vučjih E^b i $G^\#$) i u kojem terce čine disonantni element. Takva je gotička polifonija, sa svojim aktivno disonantnim tercama, savršenim kvintama i kvartama, te malim dijatonskim polutonom (od svega 90 *cent*) za efektne kadence. Naravno, harmonija trozvukā baziranih na tercama i kvintama, koja se pojavljuje u 15. st. i vlada zapadnom glazbom sve do danas, ne može podnijeti *sintonički zarez* i njegove loše terce. Zato će glazbenici od renesanse do romantizma rabiti nova ugađanja, koja eliminiraju *sintonički zarez*. (O njima će biti riječi u sljedećem poglavlju.) Ovdje spomenimo još samo to da Pitagorinim G^b - H ugađanjem, koje rabi sljedeći niz kvinti:

$$G^b \leftarrow D^b \leftarrow A^b \leftarrow E^b \leftarrow H^b \leftarrow F \leftarrow C \rightarrow G \rightarrow D \rightarrow A \rightarrow E \rightarrow H,$$

te F - $A^\#$ ugađanjem, koje rabi niz:

$$F \leftarrow C \rightarrow G \rightarrow D \rightarrow A \rightarrow E \rightarrow H \rightarrow F^\# \rightarrow C^\# \rightarrow G^\# \rightarrow D^\# \rightarrow A^\#,$$

dobivamo ukupno 17 tonova uz pomoć kojih možemo izvoditi i savršene terce:



Ovakva 17-tonska skala poznata je od 15. st, a postojale su i klavijature koje su je realizirale s dvostrukim crnim tipkama (za izvođenje sniženih tonova ^{b} i povišenih #, identičnih u jednolikoj skali, ali ne i u Pitogorinoj).

Na kraju ovog poglavlja dajemo i matematičku analizu Pitagorinog ugađanja kojom dolazimo do dubljeg razumijevanja njegovih polutonova, njegovih zareza i njihove distribucije. Krenemo najprije od jednolikog ugađanja izraženog u stotinama centila, koje radi kratkoće nazovimo unusima (1 un = 100 cent). Izraženi u unusima tonovi jednolike skale imaju vrijednosti 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 i 11. Zapravo, takvo bismo ugađanje mogli realizirati tako da se od osnovnog tona 0 dižemo u koracima od po 1 un:

$$0 \to 1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5 \to 6 \to 7 \to 8 \to 9 \to 10 \to 11$$

Naravno, rijetke su uši koje mogu točno odrediti 1 *un* (tj. 100 *cent*). Lakše je odrediti jednoliki kvintni pomak od 7 *un*, te se dizati u kvintama (uz spuštanja za odgovarajući broj oktava, tj. za odgovarajući broj blokova od po 12 *un*):

$$\begin{array}{cccccccccccc} & (14) & (21) & (28) & (35) & (42) & (49) & (56) & (63) & (70) & (77) & \\ 0 \to 7 & \to 2 & \to 9 & \to 4 & \to 11 & \to 6 & \to 1 & \to 8 & \to 3 & \to 10 & \to 5 & \end{array}$$

No, većina ljudi zapravo može odrediti samo savršenu kvintu, od "*7 unusa plus još mali x*" (x = 1.96... *cent* = 0.0196... *un*). Zato uobičajeno Pitagorino ugađanje kvintama zapravo izgleda ovako:

$$\begin{array}{cccccccccccc} & (14+2x) & (21+3x) & (28+4x) & (35+5x) & (42+6x) & (49+7x) & (56+8x) & (63+9x) & (70+10x) & (77+11x) \\ 0 \to 7+x & \to 2+2x & \to 9+3x & \to 4+4x & \to 11+5x & \to 6+6x & \to 1+7x & \to 8+8x & \to 3+9x & \to 10+10x & \to 5+11x \end{array}$$

a dobivena skala i njezini polutonovi izgledaju ovako:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 0 & (1+7x) & (2+2x) & (3+9x) & (4+4x) & (5+11x) & (6+6x) & (7+x) & (8+8x) & (9+3x) & (10+10x) & (11+5x) & 12 \\ (1+7x) & (1-5x) & (1+7x) & (1-5x) & (1+7x) & (1-5x) & (1-5x) & (1+7x) & (1-5x) & (1+7x) & (1-5x) & (1-5x) & \end{array}$$

Uočite da se u skali pojavljuju samo dvije vrste polutnova $(1 + 7x)$ i $(1 - 5x)$, te da je njihova razlika $12x$.

To vrijedi i u općem slučaju[1]. Zamislimo da smo oktavu podijelili jednoliko na N jedinica i tako dobili tonove 0, 1, 2, ..., $N-2$, $N-1$. Ako je $n < N$ i ako su n i N relativno prosti, onda je $\{0, 1, 2, ..., N-1\} = \{0n, 1n, 2n, ..., (N-1)n\}$, modulo N. To znači da n-ugađanje:

$$0 \to n \to 2n \to \ldots \to (N-2)n \to (N-1)n$$

daje sve tonove naše jednolike N-skale, s "polutonovima" duljine 1. Pitagorino $(n+x)$ - ugađanje (uz $Nx < 1$) izgleda ovako:

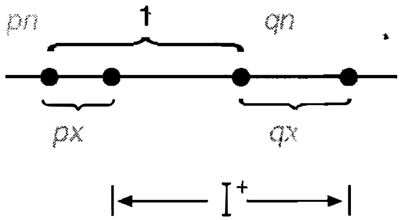
$$0 \to (n+x) \to (2n+2x) \to \ldots \to [(N-2)n + (N-2)x] \to [(N-1)n + (N-1)x].$$

Ono daje N tonova, koji se ne poklapaju s jednolikima, i koji čine "polutonove" različitih duljina. Izračunat ćemo njihove duljine.

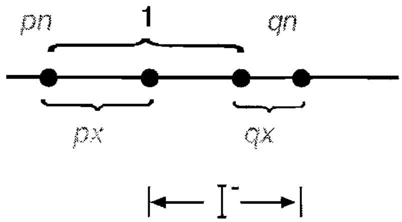
Neka su pn i qn, svedeni na osnovnu oktavu, susjedni tonovi. Možemo pretpostaviti da je ton izveden iz qn viši. Tada je $pn + 1 \equiv qn$ $(mod\ N)$. Ta dva jednolika tona određuju interval veličine 1. Odgovarajući Pitagorini tonovi pomaknuti su za px, odnosno qx, i imaju veličine $I^+ = 1 + (q - p)x$, ako je $q > p$, odnosno $I^- = 1 - (p - q)x$, ako je $q < p$ (vidi slike):

$$\boxed{pn + 1 \equiv qn \ (\mathrm{mod}\ N)}$$

$\boxed{p < q}$



$\boxed{p > q}$



$qn - pn \equiv 1$ (mod N)

$(q-p)n \equiv 1$ (mod N)

$(q-p) \equiv n^{-1}$ (mod N)

$\boxed{I^+ = 1 + (n^{-1})x}$

$pn - qn \equiv -1$ (mod N)

$(p-q)n \equiv -1$ (mod N)

$(p-q) \equiv -n^{-1}$ (mod N)

$\boxed{I^- = 1 - (-n^{-1})x}$

Brojevi N i n su relativno prosti, pa zato postoji n^{-1}, modulo od N. U uokvirenim izrazima pretpostavlja se da su (n^{-1}) i $(-n^{-1})$ iz osnovnog skupa ostatka 0, 1, ..., $N-1$ (jer su p i q iz tog skupa)[2)]. Dakle, i u općem Pitagorinom ugađanju postoje točno dva osnovna intervala. Veći možemo zvati *apotomom*, a manji *polutonom*, analogno sa standardnim dvanaestonskim Pitagorinim ugađanjem. Njihova je razlika[2)]:

$$I^+ - I^- = 1 + (n^{-1})x - 1 + (-n^{-1})x = (n^{-1} + (-n^{-1}))x = Nx.$$

Tu razliku i u općem slučaju možemo zvati *Pitagorinim zarezom*, jer je to i sada iznos za koji se krajevi $(n + x)$-ugađanja razlikuju od temeljnog koraka ugađanja $(n + x)$. Drugim riječima, "vučji intervali" između 0 i $[(N-1)n + (N-1)x]$, svedeni na istu oktavu, razlikuju se od "savršenog" intervala (n + x) za Pitagorin zarez Nx.

Ovo opće razmatranje svodi se na naše konkretno ugađanje kvintama, tako da se uzme: $N = 12$, $n = 7$ i $x = 0.02$.

Odavde slijedi

$$n^{-1} = 7, \text{ jer je } 7 \cdot 7 \equiv 1 \pmod{12}.$$

Nadalje, iz $n^{-1} = 7$ slijedi

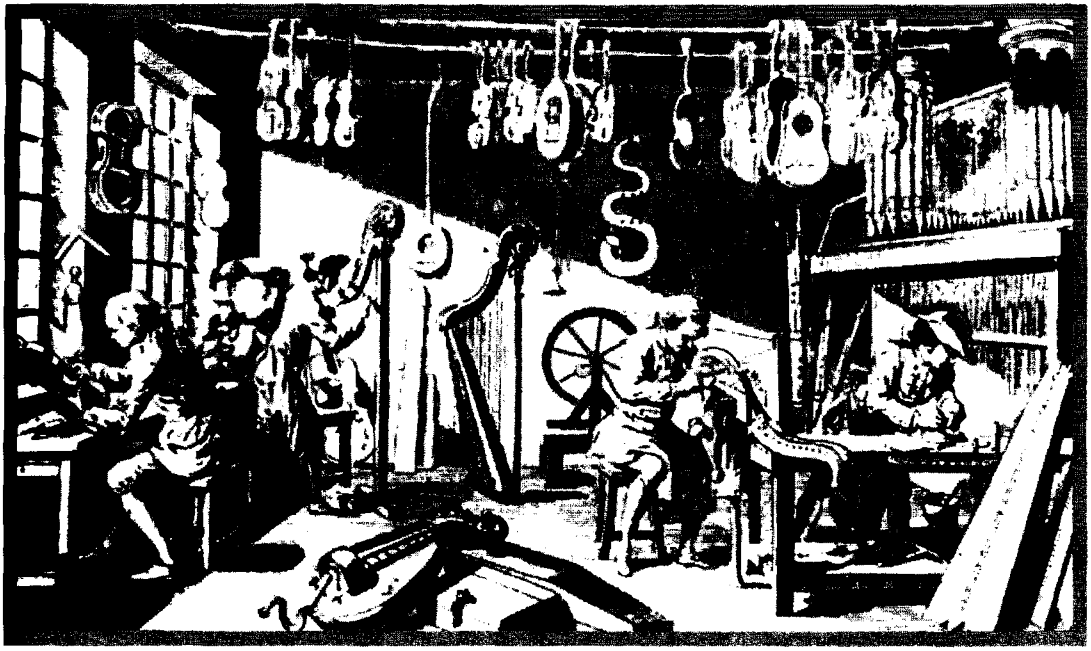
$$-n^{-1} = 5, \text{ jer je } 7 + 5 \equiv 0 \pmod{12}.$$

Dakle,

$$I^+ = 1 + (n^{-1})x = 1 + 7 \cdot 0.02 = 1.14,$$
$$I^- = 1 - (-n^{-1})x = 1 - 5 \cdot 0.02 = 0.9,$$

i to su dobro poznati *Pitagorin apotom* od 114 *cent* i *dijatonski poluton* od 90 *cent*. Naravno, Pitagorin je zarez $Nx = 12 \cdot 0.02 = 0.24$, što čini dobro poznata 24 *cent*.

DOBRO TEMPERIRANI GLASOVIR I JEDNOLIKA [illegible]



6. DOBRO TEMPERIRANI GLASOVIR I JEDNOLIKA LUTNJA

Često možemo čuti ili pročitati da je **J. S. Bach** svoju zbirku preludija i fuga *Wohltemperiertes Klavier* napisao u sva 24 dur i mol tonaliteta, kako bi pokazao sve prednosti *jednolikog temperiranja*, te da je od tog vremena sva velika glazba, od **Mozarta** i **Beethovena** sve do naših dana, pisana za jednoliko temperirane izvedbe. To nije istina[1]. Niti je Bach rabio jednoliko temperiranje, niti su Mozart, Beethoven i ostali velikani pisali za 12 jednoliko raspoređenih visina unutar oktave. Jednoliko temperiranje uglavnom je fenomen 20. stoljeća. Ono je u načelu poznato već **Aristoksenu** i o njemu se u Europi raspravlja još od 16. st, ali se ono ne rabi jer, prema tada općem mišljenju, ne zvuči lijepo. Tek smo u 19. st. svjedoci postupnih pomaka prema široj uporabi jednolikog temperiranja. (Uostalom, prije 1917. nije ni postojala metoda koja bi omogućila precizno jednoliko ugađanje.)

Bach je, naravno, bio zainteresiran za ugađanje koje će mu omogućiti pristup svim tonalitetima i osloboditi ga more vučjih intervala. On je nenadmašeni majstor kontrapunkta i sigurno ga je iritirala diskrepanca savršenog trozvuka II^5_3 u njegovim mislima i njegove vučje realizacije na *čembalu* ispred njega.[2] Zato je i bio oduševljen novim *dobro temperiranim* ugađanjem, koje ga je riješilo ove more i kojem je posvetio svoj *Wohltemperiertes Klavier*. Međutim, to ugađanje nije bilo jednoliko. Ono se katkada zvalo *jednakim*, ali ne zbog jednolike raspodjele njegovih 12 visina unutar oktave, nego zato što je stvorilo jednake mogućnosti pristupa svim tonalitetima. Sami su se tonaliteti donekle razlikovali[3] i Bach je napisao svoj *Wohltemperiertes Klavier* u sva 24 dur i mol tonaliteta baš zato da bi istražio te razlike[4], a ne zato što ih nije bilo.

Što su dakle *temperirane* skale i po čemu se *dobro temperiranje* i druga povijesna ugađanja razlikuju od današnjeg, *jednolikog temperiranja*? *Temperiranje* podrazumijeva namjerno odstupanje od savršenih intervala, od svih (kao u jednolikom temperiranju) ili samo od nekih. Naprimjer, Pitagorino ugađanje jest *temperiranje* u kojem odustajemo od savršenih terci i seksti, kako bismo sačuvali savršene kvinte i kvarte. *Temperiranje* je nužnost koja proizlazi iz procjepa koji razdvaja *točnost* od *podatnosti*. Prirodna intonacija, sa svojim točnim intervalima, nije podatna za transponiranje, moduliranje i harmonizaciju (usp. 4. poglavlje). Kako bismo je učinili podatnijom, moramo je temperirati. Time gubimo točnost, što znači konsonantnost, i u krajnjoj liniji ljepotu. S druge strane, podatnost temperiranih skala omogućava harmonizaciju, što znači puninu i bogatstvo zvuka, te još više ljepote.

Početkom 15. st. sve se veći značaj počinje pridavati tercama, pa glazbenici rane renesanse traže nova ugađanja koja bi imala što više što savršenijih terci. Do kraja stoljeća ustalilo se jedno takvo ugađanje, koje će ostati standardom sve do 18. st., i koje već 1482. nalazimo dokumentirano u **Bartolomea Ramosa**. To je *srednjotonsko temperiranje*. (Paralelno se razmišljalo o *dobrom i jednolikom temperiranju*, ali u to je vrijeme prevladalo srednjotonsko.) Naime, harmonija trozvuka koja od renesanse vlada zapadnom glazbom (usp. 4. poglavlje) dovodi do uvijek istog pitanja: *Koje kvinte (kvarte) i-ili terce (sekste) treba temperirati i za koliko?* Srednjotonsko temperiranje renesanse i baroka odgovara: *Po svaku cijenu ostvarimo što više savršenih terci, čak ako to vodi i k osjetnom narušavanju kvinti, uz pojavu nekoliko vučjih itervala.* Dobro temperiranje, koje će vladati od polovice 18. do kraja 19. st. odgovara: *Postignimo spektar trozvučnih boja, koji se kreće od savršenih terci (i nesavršenih kvinti) do savršenih kvinti (i nesavršenih terci), ali tako da su svi intervali izvedivi, tj. tako da ne dopustimo vučje intervale.* Naše jednoliko temperiranje nudi demokratski odgovor: *Temperirajmo sve terce i kvinte pomalo, ali tako da su svi trozvuci međusobno jednaki.*

Krenimo sa *srednjotonskim temperiranjem*, najuspješnijim europskim ugađanjem koje je živjelo gotovo 400 godina[5]. U njemu je, rekli smo, važnije sačuvati savršene terce nego savršene kvinte. (Za to postoje i akustički razlozi. Naime, dva tona u nesavršenoj terci zbog svoje blizine stvaraju neugodnije udare nego dva udaljenija tona u nesavršenoj kvinti. Dakle, budući da u trozvuku nešto mora biti nesavršeno, bolje je da to bude kvinta nego terca.) Pitagorinim koracima nakon četiri točne kvinte dolazimo do nesavršene terce, koja odstupa od savršene za *sintonički zarez*, tj. za 22 *cent* (usp. prijašnje poglavlje):

$$\begin{array}{ccccccccc} & 702 & & 702 & & 702 & & 702 & \\ C & \rightarrow & G & \rightarrow & D & \rightarrow & A & \rightarrow & E \\ 0 & & 702 & & 204 & & 904 & & 408=386+22 \end{array}$$

Želimo li kvintnim ugađanjem doći do savršene terce, nužno je svaku od 4 točne kvinte skratiti za 22 : 4 = 5.5 *cent*[6]. Prva četiri koraka tako temperiranog ugađanja sada izgledaju ovako:

$$\begin{array}{ccccccccc} & 696.5 & & 696.5 & & 696.5 & & 696.5 & \\ C & \rightarrow & G & \rightarrow & D & \rightarrow & A & \rightarrow & E \\ 0 & & 696.5 & & 193 & & 889.5 & & 386 \end{array}$$

Dobivena je terca savršena (omjer 5/4 ima 386 *cent*). Srednji ton D točno je u sredini između osnovnog tona C i velike terce E (386 : 2 = 193), pa se zato ovo ugađanje zove *srednjotonsko*. Provedeno do kraja ono izgleda ovako (uz k = 696.5):

$$E^{\flat} \xleftarrow{k} B \xleftarrow{k} F \xleftarrow{k} C \xrightarrow{k} G \xrightarrow{k} D \xrightarrow{k} A \xrightarrow{k} E \xrightarrow{k} H \xrightarrow{k} F^{\#} \xrightarrow{k} C^{\#} \xrightarrow{k} G^{\#}$$

Dobivene vrijednosti svih tonova (u osnovnoj oktavi) dajemo u posebnoj tablici:

C	#	D	b	E	F	#	G	#	A	B	H	c
0	75.5	193	310.5	386	503.5	579	696.5	772	889.5	1007	1082.5	1200

Srednjotonsko ugađanje zapravo je naše poopćeno Pitagorino ugađanje (usp. kraj prijašnjeg poglavlja), uz $N = 12$, $n = 7$ i $x = 696.5 - 700 = -0.035$. Dakle,

$I^+ = 1 + 7(-0.035) = 0.755 = 75.5$ *cent*, $I^- = 1 - 5(-0.035) = 1.175 = 117.5$ *cent*

pa je $Nx = I^+ - I^- = -42$ *cent*. Veliki dijatonski poluton od 117.5 *cent* i mali apotom od 75.5 *cent*[7] razlikuju se za 42 *cent*, što je ujedno i "Pitagorin zarez" srednjotonskog temperiranja. Za toliko se vučja kvinta $G^\#$ - e^b (loših 738.5 *cent*) razlikuje od ugađajuće kvinte (prihvatljivih 696.5 *cent*). Uostalom, pogledajmo kako izgledaju svi osnovni trijadski intervali (tj. sve terce i kvinte) u srednjotonskom sustavu:

NA	M. TERCA	V. TERCA	KVINTA
C	E^b 310.5	E 386	G 696.5
$C^\#$	E 310.5	F 428	$G^\#$ 696.5
D	F 310.5	$F^\#$ 386	A 696.5
E^b	$F^\#$ 268.5	G 386	B 696.5
E	G 310.5	$G^\#$ 386	H 696.5
F	$G^\#$ 268.5	A 386	C 696.5
$F^\#$	A 310.5	B 428	$C^\#$ 696.5
G	B 310.5	H 386	D 696.5
$G^\#$	H 310.5	C 428	E^b 738.5
A	C 310.5	$C^\#$ 386	E 696.5
B	$C^\#$ 268.5	D 386	F 696.5
H	D 310.5	E^b 428	$F^\#$ 696.5

Durski trozvuk, najčešći akord europske glazbe od 1500. do 1900., čine osnovni ton, velika terca i kvinta: 0 + 4 + 7. Velike terce od 386 *cent* savršene su i zvuče izvrsno. Takvih imamo 8. Preostale 4 imaju 428 *cent* i zvuče loše: AUAUAUAUAU... Kvinte od 696.5 *cent* nisu savršene, ali su dobre, pogotovo ako se između njih i osnovnog tona umetne savršena terca[8]. Dakle, srednjotonski sustav daje nam 8 uporabljivih durskih trozvuka na: C, D, E^b, E, F, G, A i B[9]. Molski trozvuk čine osnovni ton, mala terca i kvinta: 0 + 3 + 7. Male terce od 310.5 *cent* nisu savršene (6/5 je 315.64 *cent*), ali su podnošljive. Dakle, prihvatljivi su molski trozvuci na C, C#, D, E, F#, G, A i H (G# otpada zbog neprihvatljive vučje kvinte). Ovih 16 trozvuka, 8 durskih i 8 molskih, čine harmonijski rječnik renesansne i rane barokne glazbe.

Očiti nedostatak srednjotonskog ugađanja njegova je vučja kvinta (s odgovarajućom vučjom kvartom), te po četiri neuporabljiva durska i molska trozvuka uz po osam uporabljivih. To, naravno, ograničava i transpozicije. Da bi se riješio taj problem, u razdoblju od 1680. do 1890. (što je razdoblje dura i mola u europskoj glazbi), razvijena je cijela porodica *dobrih temperiranja*, to jest temperiranja koja eliminiraju vučje intervale i omogućavaju sasvim slobodne transpozicije i modulacije.

Rješenje što je pronašao **Andreas Werckmeister**, ali i mnogi drugi, svodilo se na to da se neke kvinte za različite iznose suze, neke da se ostave točnima, a sve skupa ide za time da ukupna suženja ponište Pitagorin zarez, i time ukinu vučje intervale. Na primjer, kvinte između "bijelih" tonova F, C, G , D, A, E i H temperiramo za 1/6 Pitagorina zareza, tj. za 24 : 6 = 4 *cent*, dok one između "crnih" tonova F#, C#, G#, B i E^b ostavimo netemperirane, što znači točke:

E♭ ← B ← F ← C → G → D → A → E → H → F# → C# → G#

702 cent **698 cent** **702 cent**

Tako dolazimo do sljedeće *dobro temperirane skale* (sa šest različitih "polutonova"):

C	#	D	♭	E	F	#	G	#	A	B	H	c
0	**94**	**196**	**298**	**392**	**502**	**592**	**698**	**796**	**894**	**1000**	**1090**	**1200**

94 102 102 94 110 90 106 98 98 106 90 110

196 196 196 196 196

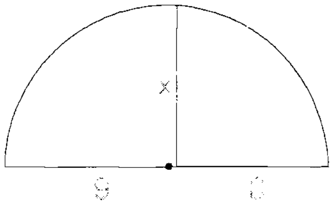
To je "bijela" aproksimacija srednjotonskog ugađanja (s točnim "bijelim" tercama) nadopunjena "crnim" Pitagorinim ugađanjem (s točnim "crnim" kvintama). S obzirom na to da ovo temperiranje čuva osnovne karakteristike srednjotonskog ugađanja u "bijelom" dijatonskom području, a uz to nema vučjih intervala, mogli bismo ga zvati dobrim srednjotonskim temperiranjem.[10] Svi su njegovi trozvuci prihvatljivi (tj. dobri), ali su međusobno različiti, što cijeli sustav čini "obojenim sustavom tonaliteta":

NA	M. TERCA	V. TERCA	KVINTA
C	E♭ 298	E 392	G 698
C#	E 298	F 408	G# 702
D	F 306	F# 396	A 698
E♭	F# 294	G 400	B 702
E	G 306	G# 404	H 698
F	G# 294	A 392	C 698
F#	A 302	B 408	C# 702
G	B 302	H 392	D 698
G#	H 294	C 404	E♭ 702
A	C 306	C# 400	E 698
B	C# 294	D 396	F 702
H	D 306	E♭ 408	F# 702

Što se tiče *podatnosti*, dobro temperiranje raspršuje velike vučje pogrješke srednjotonskog i Pitagorinog ugađanja u niz malih nepreciznosti. Ova se *podatnost* pretvara u *ljepotu* tako što skladateljima (i izvođačima) nudi tonalnu paletu razlika koje otvaraju novu dimenziju ekspresivnosti. Upravo tu dimenziju istražuje J. S. Bach u 24 "obojena tonaliteta" svojeg *Wohltemperiertes Klavier*. U 19. st. glazbenici su često raspravljali o bojama različitih tonaliteta (npr. je li D dur crven). Muzičari "jednolikog" 20. st. odbacili su takve rasprave kao romantične besmislice. No danas već mnogi tvrde da se u glazbi 19. st. uistinu čuju razlike u boji ako se ona izvodi u dobrom temperiranju koje, nasuprot našem jednolikom, razlikuje svoje tonalitete. Možda i nije nemoguće zamisliti da su Mozart i Beethoven skladali imajući na umu određenu boju iz palete dobro temperiranih[11)] tonaliteta, te da mi propuštamo poneke nijanse njihove glazbe homogenizirajući je našim jednolikim temperiranjem[12)].

U svojoj težnji k neograničenim transpozicijama, dobro temperirane skale sve su se više približavale jednolikoj skali, koja je u 20. st. nadvladala sve druge. Na primjer, tonovi prikazane dobro temperirane skale odstupaju od jednolikih tonova za najviše 10 *cent*. S druge strane, jednoliko temperiranje staro je koliko i srednjotonsko. Još od 14. st. predložen je dizajn orgulja u kojem se između dvije cjelotonske cijevi, s omjerom 9 : 8 = 18 : 16, umeće treća cijev u omjeru 18 : 17 : 16. Prve dvije definiraju cijeli ton od 204 *cent*, koji je trećom podijeljen na dva polutona od 99 *cent* i 105 *cent*. Poluton od 99 *cent* gotovo je identičan jednolikom polutonu od 100 *cent* (100 *cent* odgovara omjeru 1800 : 1699, dok 99 *cent* odgovara omjeru 18 : 17). Ovakva podjela cijeloga tona zvala se *aritmetičkom*, jer je 17 aritmetička sredina između 16 i 18.

Početkom 16. st. **Henricus Grammateus** predlaže *geometrijsku* podjelu $9 : x : 8$, u kojoj je x određen jednakošću $9 : x = x : 8$, i koja cijeli ton $9 : 8$ dijeli na dva jednaka polutona. Naravno, x je geometrijska sredina između 8 i 9 (x je $\sqrt{72}$ ili 102 *cent*) i ima sljedeću geometrijsku konstrukciju:



Nijedan od ova dva prijedloga ne predviđa odbacivanje dijatonskog polutona od 90 *cent* (s Pitagorinim omjerom 256 : 243). Drugim riječima, "*aritmetička*" i "*geometrijska*" skala približavaju se jednolikoj, uz zamjetnije odmake (za 8 odnosno 10 *cent*) na terci E i vodici H[13].

"ARITMETIČKA" SKALA

0	99	204	303	408	498	597	702	801	906	1005	1110	1200
C	[illegible]	D	[illegible]	E	F	[illegible]	G	[illegible]	A	B	H	C

99 105 99 105 90 99 105 99 105 99 105 90

204 204 204 204 204

"GEOMETRIJSKA" SKALA

0	102	204	306	408	498	600	702	804	906	1008	1110	1200
C	[illegible]	D	[illegible]	E	F	[illegible]	G	[illegible]	A	B	H	C

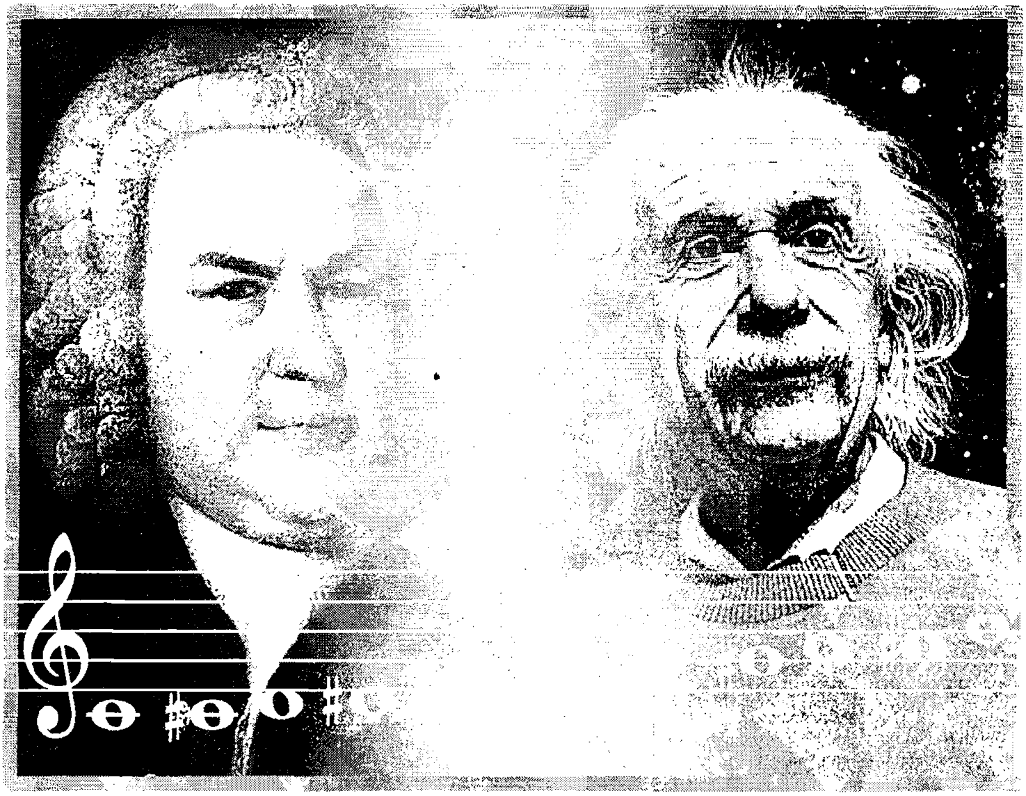
102 102 102 102 90 102 102 102 102 102 102 90

204 204 204 204 204

No, u 16. st. ključni pomak prema jednolikom ugađanju nisu učinili glazbeni teoretičari nego graditelji lutnji i drugih glazbala s prečicama poput današnje gitare. Na vratu takva glazbala dvije susjedne prečice određuju isti poluton na svim žicama, pa on ne može biti malo dijatonski (90 *cent*), malo kromatski (102 *cent*) itd. Graditelji su na sreću rano uočili da je za raspodjelu prečica najbolji "aritmetički" interval s omjerom 18 : 17 (koji ima 99 *cent*), jer on ponovljen 12 puta daje nešto sasvim blizu oktavi, što se uz male preinake lako može pretvoriti u točnu oktavu. Naime, 99 *cent* se malim preinakama lako može pretvoriti u 100 *cent* i time se zapravo dobiva jednolika skala. Polovicom 16. st. mnogi glazbeni teoretičari razumiju da su glazbala s prečicama zapravo *jednoliko ugođena*, što ih razlikuje od gudača i glasova koji pjevaju u *prirodnoj intonaciji* i glazbala s klavijaturama *ugođenih srednjotonski*.

Giacomo Gorzanis, virtuoz na lutnji, napisao je 1567. godine zbriku od 24 plesne svite, po dvije sa središtem na svakom mjestu jednolike dvanaestonske skale (jedanput "molski" s finalnom malom tercom i jedanput "durski" s finalnom velikom tercom). Za razliku od Bachova *Dobro temperiranog glasovira*, ova zbirka za "*jednoliko temperiranu lutnju*" uistinu demonstrira transpozicijske mogućnosti jednolikog temperiranja. Već se 1588. **Roselli** u svojoj raspravi o "sfernoj muzici" zalaže za jednoliko ugađanje kao univerzalno ugađanje svih glazbala i glasova, koje će omogućiti slobodna transponiranja, ali i kombiniranja različitih glazbala i glasova u zajedničkim izvedbama. To je do kraja prihvaćeno tek u našem stoljeću, prije svega zato što glazbala s klavijaturama nije tako jednostavno ugoditi jednoliko, kao što je to slučaj u glazbalima s prečicama, a i zato što su se mnogi opirali "netočnom" jednolikom ugađanju.

DVANAEST
VELIČANSTVENIH



7. DVANAEST VELIČANSTVENIH

Zašto oktava sadrži 12 polutonova? Vidjeli smo da pentatonske, sekstatonske i septatonske skale izabiru svoje tonove iz temeljne dodekatonske raspodjele, ali susreli smo se i s #*b*-raspodjelom koja ima 17 tonova u oktavi (vidi 5. poglavlje). Mikrotonski skladatelji 20. st. rabe skalu s 41 mikrotonom pa i s mnogim drugim brojevima, no prevlast veličanstvenih 12 još je uvijek neupitna. Ima li kakvih racionalnih razloga kojima bismo mogli objasniti ovu nadmoć dodekatonske raspodjele?

Pitagorini točni intervali 1:2:3:4:5:6 prirodno vode dvanaestonskoj raspodjeli oktave, ali mogu dovesti i do sedamnaestonske (usp. 4. poglavlje). Razmislimo zato još jednom kako bismo došli do osnovnog tonskog materijala, polazeći od toga da prednost dajemo Pitagorinim malim omjerima. Odaberimo prvi ton koji želimo u našoj glazbi i njegovu frekvenciju promatrajmo kao jediničnu. Unatoč Jobimovoj *Samba por una nota sô,* jedna nota nije dovoljna. U skladu s Pitagorom dodajmo našem jediničnom tonu sve one tonove koji su za određeni broj oktava ispod i iznad njega. U području frekvencija koje čujemo (od 20 Hz do 20 000 Hz) to je najviše 10 oktava. Naprimjer:

$$2^{-5} \leftarrow 2^{-4} \leftarrow 2^{-3} \leftarrow 2^{-2} \leftarrow 2^{-1} \leftarrow 1 \rightarrow 2^{1} \rightarrow 2^{2} \rightarrow 2^{3} \rightarrow 2^{4} \rightarrow 2^{5}$$

Rijetki su glasovi koji se mogu kretati izvan raspona od dvije oktave, što znači da su im zasad na raspolaganju najviše tri tona, koja osim toga zvuče isto. Zato ćemo, u skladu s Pitagorom, našem notnom materijalu dodati još kvinte i njima odgovarajuće oktave:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
\cdots & \frac{1}{2^2}\left(\frac{3}{2}\right)^{-2} & \leftarrow & \frac{1}{2^2}\left(\frac{3}{2}\right)^{-1} & \leftarrow & \frac{1}{2^2} & \rightarrow & \frac{1}{2^2}\left(\frac{3}{2}\right) & \rightarrow & \frac{1}{2^2}\left(\frac{3}{2}\right)^{2} & \rightarrow & \frac{1}{2^2}\left(\frac{3}{2}\right)^{3} & \cdots \\
\cdots & \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{-2} & \leftarrow & \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{-1} & \leftarrow & \frac{1}{2} & \rightarrow & \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right) & \rightarrow & \frac{1}{2^2}\left(\frac{3}{2}\right)^{2} & \rightarrow & \frac{1}{2^2}\left(\frac{3}{2}\right)^{3} & \cdots \\
\cdots & \left(\frac{3}{2}\right)^{-2} & \leftarrow & \left(\frac{3}{2}\right)^{-1} & \leftarrow & 1 & \rightarrow & \left(\frac{3}{2}\right) & \rightarrow & \left(\frac{3}{2}\right)^{2} & \rightarrow & \left(\frac{3}{2}\right)^{3} & \cdots \\
\cdots & 2\left(\frac{3}{2}\right)^{-2} & \leftarrow & 2\left(\frac{3}{2}\right)^{-1} & \leftarrow & 2 & \rightarrow & 2\left(\frac{3}{2}\right) & \rightarrow & 2\left(\frac{3}{2}\right)^{2} & \rightarrow & 2\left(\frac{3}{2}\right)^{3} & \cdots \\
\cdots & 2^2\left(\frac{3}{2}\right)^{-2} & \leftarrow & 2^2\left(\frac{3}{2}\right)^{-1} & \leftarrow & 2^2 & \rightarrow & 2^2\left(\frac{3}{2}\right) & \rightarrow & 2^2\left(\frac{3}{2}\right)^{2} & \rightarrow & 2^2\left(\frac{3}{2}\right)^{3} & \cdots \\
 & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots & & \vdots &
\end{array}$$

Na taj način dolazimo do beskonačno mnogo tonova, unutar svake oktave, koji su zadani omjerom oblika:

$$\frac{1}{2^m}\left(\frac{3}{2}\right)^n \qquad m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Za svaki eksponent n imamo po jedan novi ton, koji se pomoću eksponenata m pomiče za m oktava niže ili više. Budući da se nijedan od tih tonova ne poklapa s osnovnim tonom,

$$\frac{1}{2^m}\left(\frac{3}{2}\right)^n \neq 1, \quad \text{jer je} \quad 3^n \neq 2^{m+n},$$

naš postupak stalno generira nove tonove.

Glazba s beskonačno mnogo nota jednako je nemoguća kao i ona sa samo jednom, pa postupak generiranja moramo negdje zaustaviti. Prirodno je stati pri n-tom tonu ako se on, vraćen u osnovnu oktavu, približno poklapa s osnovnim tonom (budući da je točno poklapanje nemoguće). Naprimjer, za 7. i 12. ton imamo sljedeće aproksimacije:

$$\frac{1}{2^4}\left(\frac{3}{2}\right)^7 = 1.068 \approx 1, \qquad \frac{1}{2^7}\left(\frac{3}{2}\right)^{12} = 1.014 \approx 1.$$

Prva je dosta loša, i zapravo znači poistovjećivanje Pitagorinog tona $C^\#$ s osnovnim tonom C, dok je druga bitno bolja i svodi se na Pitagorino poistovjećivanje tonova E^b i $D^\#$ (usp. tabelu kvintnih pomaka u 5. poglavlju).

U jednolikom temperiranju ove dvije aproksimacije imaju sljedeće značanje. Prva aproksimacija:

$$\frac{1}{2^4}\left(\frac{3}{2}\right)^7 \approx 1, \qquad \text{to jest} \qquad \frac{3}{2} \approx 2^{4/7}$$

znači da je kvinta 3/2, u jednolikoj skali sa 7 tonova, aproksimirana četvrtim tonom, $2^{4/7} = 1.486 \approx 1.5 = 3/2$. Druga aproksimacija:

$$\frac{1}{2^7}\left(\frac{3}{2}\right)^{12} \approx 1, \qquad \text{to jest} \qquad \frac{3}{2} \approx 2^{7/12}$$

znači da je kvinta 3/2, u jednolikoj skali s 12 polutonova, aproksimirana sedmim polutonom, $2^{7/12} = 1.498 \approx 1.5 = 3/2$. Očito je da 1.498 bolje aproksimira 1.5 nego što to čini 1.486. Nameće se, međutim, pitanje nije li u jednolikoj skali s n tonova kvinta još bolje aproksimirana m-tim tonom za neki drugi broj jednolikih tonova n i neki drugi redni broj kvinte m.

Matematički, problem se svodi na izračunavanje razlomka m/n koji što bolje aproksimira broj x zadan zahtjevom:

$$\frac{3}{2}=2^x \quad \text{tj. } x=\log_2\frac{3}{2}=\frac{\log(3/2)}{\log 2}$$

Budući da je broj $x = \log(3/2)/\log 2$ iracionalan, ne postoji razlomak m/n takav da je $x = m/n$. Iracionalni broj x moguće je aproksimirati samo razlomkom, a teorija verižnih razlomaka pokazuje nam kako je to moguće učiniti na najbolji način[1].

Verižni je razlomak "razlomak" oblika:

$$q_0+\cfrac{1}{q_1+\cfrac{1}{q_2+\cfrac{1}{q_3+\cfrac{1}{q_4+\cdots}}}}$$

gdje su q_0, q_1, q_2, ... prirodni brojevi, koje zovemo količnika tog verižnog razlomka, a on se jednostavnije zapisuje ovako:

$$[q_0,\ q_1,\ q_2,\ q_3,\ q_4,\ \ldots].$$

Ako verižni razlomak ima konačno mnogo količnicima q_i, onda je on uistinu razlomak, tj. racionalan je broj. Naprimjer,

$$[0,1,1,2]=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\frac{3}{2}}}=\cfrac{1}{1+\frac{2}{3}}=\cfrac{1}{\frac{5}{3}}=\frac{3}{5}.$$

Ako verižni razlomak ima beskonačno mnogo količnika q_i, onda je on iracionalan broj. Vrijedi i obrat. Svaki realni broj može se izraziti u obliku verižnog razlomka, racionalni u konačnom obliku, a iracionalni u beskonačnom. Naprimjer,

$$\frac{7}{12}=0+\cfrac{1}{\frac{12}{7}}=0+\cfrac{1}{1+\frac{5}{7}}=0+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\frac{7}{5}}}=0+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\frac{2}{5}}}=$$

$$=0+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\frac{5}{2}}}}=0+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\frac{1}{2}}}}=[0,1,1,2].$$

U sljedećem primjeru važno je uočiti da je:
$\sqrt{2}-1=\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)\,/\,\left(\sqrt{2}+1\right)=1\,/\,\left(\sqrt{2}+1\right)$.

$$\sqrt{2}=1+\left(\sqrt{2}-1\right)=1+\frac{1}{\sqrt{2}+1}=1+\frac{1}{2+\left(\sqrt{2}-1\right)}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\sqrt{2}+1}}=$$

$$=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\left(\sqrt{2}-1\right)}}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\sqrt{2}+1}}}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+(\sqrt{2}-1)}}}=$$

$$=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\ddots}}}}=\left[1,2,2,2,2,\ldots\right].$$

Ako realni broj x prikažemo u obliku verižnog razlomka (konačnog ili beskonačnog):

$$x=[q_0,q_1,q_2,q_3,\ldots],$$

onda su početni komadi tog verižnog razlomka, razlomci:

$$x_0=[q_0]=q_0,\quad x_1=[q_0,q_1]=\frac{m_1}{n_1},\quad x_2=[q_0,q_1,q_2]=\frac{m_2}{n_2},\ldots$$

$$x_k=[q_0,q_1,q_2,\ldots,q_k]=\frac{m_k}{n_k},\ldots.$$

Oni su najbolje racionalne aproksimacije broja x, uz njihovu veličinu nazivnika (za koji držimo da je dokraja skraćen brojnikom). To znači da neki razlomak m/n bolje aproksimira broj x no što to čini razlomak $x_k = m_k/n_k$, samo ako je $n > n_k$. Naprimjer, početni komadi beskonačnog verižnog razlomka koji prikazuje iracionalni broj $\sqrt{2}$:

$$x=\sqrt{2}=[1,2,2,2,\ldots],$$

sljedeći su razlomci:

$$x_0 = \left[1\right] = \frac{1}{1}, \quad x_1 = \left[1,\ 2\right] = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, \quad x_2 = \left[1,\ 2,\ 2\right] = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}} = \frac{7}{5}, \dots$$

To preglednije zapisujemo ovako:

$$\begin{array}{ccccccc} & x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & \dots & \\ x = [& 1, & 2, & 2, & 2, & \dots &] \\ & \frac{1}{1} & \frac{3}{2} & \frac{7}{5} & \frac{17}{12} & \dots & \end{array}$$

Dakle, 7/5 je najbolja aproksimacija od $\sqrt{2}$ s nazivnikom do 5, a 17/12 je najbolja s nazivnikom do 12. Naravno, moguće je da s nazivnikom između 5 i 12 postoji aproksimacija bolja od 7/5 i lošija od 17/12. Ona mora biti između [1, 2, 2] = 7/5 i [1, 2, 2, 2] = 17/12, a iz teorije verižnih razlomaka slijedi da je jedini kandidat za takvu aproksimaciju [1, 2, 2, 1] = 10/7. Budući da je 10/7 lošija aproksimacija od 7/5 (što se lako može provjeriti na računalu), iz toga slijedi da je 17/12 prva bolja aproksimacija za $\sqrt{2}$, poslije 7/5.

Općenito, ako između $x_{k-1} = [q_0, q_1, \dots, q_{k-1}]$ i $x_k = [q_0, q_1, \dots, q_{k-1}, q_k]$ postoje aproksimacije od x, bolje od x_{k-1} i lošije od x_k, one su sigurno oblika:

$$[q_0, q_1, \dots, q_{k-1}, 1]$$
$$[q_0, q_1, \dots, q_{k-1}, 2]$$
$$[q_0, q_1, \dots, q_{k-1}, 3]$$
$$\dots$$
$$[q_0, q_1, \dots, q_{k-1}, q_k - 1].$$

Ove rezultate iz teorije verižnih razlomaka sada možemo primijeniti na rješenje našeg problema optimalnog broja tonova u oktavi. Pokazali smo da se on sveo na nalaženje razlomaka koji najbolje aproksimiraju $x = \log(3/2) / \log 2$. Taj broj najprije treba izraziti u obliku verižnog razlomka:

$$\frac{\log(3/2)}{\log 2} = 0 + \frac{1}{\frac{\log 2}{\log(3/2)}} = 0 + \frac{1}{\frac{\log(3/2)(2/3)2}{\log(3/2)}} = 0 + \frac{1}{\frac{\log(3/2) + \log\left((2/3)\cdot 2\right)}{\log(3/2)}} =$$

$$=0+\cfrac{1}{1+\cfrac{\log(4/3)}{\log(3/2)}}=0+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{\log(3/2)}{\log(4/3)}}}=0+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{\log(4/3)(3/4)(3/2)}{\log(4/3)}}}=$$

$$=0+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{\log(9/8)}{\log(4/3)}}}=0+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{\log(4/3)}{\log(9/8)}}}}$$

$$=0+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{\log(9/8)^2(8/9)^2(4/3)}{\log(9/8)}}}}=0+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{1}{2+\cdots}}}}.$$

Dakle,

$$x=\frac{\log(3/2)}{\log 2}=[0,\ 1,\ 1,\ 2,\ \ldots].$$

Nastavljajući postupak, dobili bismo:

$$x=[0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 3,\ 1,\ 5,\ \ldots].$$

Aproksimacije x_0, x_1, x_2, . . . izgledaju ovako:

$$\begin{array}{lcccccccccl} & x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & \ldots & \\ x= & [\,0, & 1, & 1, & 2, & 2, & 3, & 1, & 5, & \ldots &] \\ & \frac{0}{1} & \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{3}{5} & \frac{7}{12} & \frac{24}{41} & \frac{31}{53} & \frac{179}{306} & \ldots & \end{array}$$

Između x_2 i x_3, te x_3 i x_4 moguća je još po jedna aproksimacija, zapisana ispod x_3, odnosno x_4. Između x_4 i x_5 moguće su dvije aproksimacije, zapisane ispod x_5, itd.:

$$\begin{array}{rcccccccc}
 & x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \ \ldots \\
x = & [\,0, & 1, & 1, & 2, & 2, & 3, & 1, & 5, \ \ldots] \\
 & \frac{0}{1} & \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{3}{5} & \frac{7}{12} & \frac{24}{41} & \frac{31}{53} & \frac{179}{306} \ \ldots \\
 & & & & \frac{2}{3} & \frac{4}{7} & \frac{17}{29} & & \vdots \\
 & & & & & & \xcancel{\frac{10}{17}} & & \vdots
\end{array}$$

Na računalu se može provjeriti da je 10/17 lošija aproksimacija od 7/12, pa je zato odbačena. Dakle, najbolje aproksimacije broja x, do njihove veličine nazivnika, jesu:

$$\frac{2}{3} \quad \frac{3}{5} \quad \frac{4}{7} \quad \frac{7}{12} \quad \frac{17}{29} \quad \frac{24}{41} \quad \frac{31}{53}, \ \ldots .$$

Aproksimacija 24/41 znači da oktavu treba podijeliti na 41 jednaki mikroton, s tim da je 24. ton kvinta. Iznos je te kvinte izvrsnih $2^{24/41} = 1.5004$. Nedostatak je ove podjele to što se 41 ton u oktavi, za svaku izvedbu osim elektronske, pokazuje potpuno neprikladnim. Isto vrijedi i za 29 tonova u oktavi (sa 17. tonom kao kvintom). Kao jedini optimum preostaje nam 12 tonova u oktavi sa 7. tonom kao kvintom, budući da 4/7, a pogotovo 3/5 i 2/3, daju loše kvinte. Naime, $2^{4/7} = 1.486$ je omjer kojem odgovara 686 *cent*, što je dosta loša kvinta (17 *cent* udaljena od savršene), dok je $2^{7/12} = 1.498$ omjer kojem odgovara izvrsnih 700 *cent* (svega 2 *cent* udaljenih od savršene kvinte). Možemo zaključiti da jednolika skala s korektnim kvintama i pristupačnim brojem tonova može imati jedino 12 polutonova. To je teorijski nužni izbor, do kojeg je glazbena praksa došla i bez teorije. Naravno, mogli bismo se pitati što je optimalna jednolika skala koja, uz pristupačni broj polutonova, želi korektne kvarte. Problem se matematički svodi na verižne aproksimacije broja:

$$x = \frac{\log(4/3)}{\log 2} = [\,0,\ 2,\ 2,\ 2,\ \ldots]$$

$$\begin{array}{cccc}
\frac{0}{1} & \frac{1}{2} & \frac{2}{5} & \frac{5}{12} \\
 & & & \frac{3}{7}
\end{array}$$

Opet uočavamo 5/12 kao najbolju aproksimaciju, s pristupačnim brojem polutonova. No, to je ona ista raspodjela koju smo dobili uz zahtjev za korektnim kvintama. U njoj je kvarta peta od 12 polutonova, dok je kvinta sedma. Želimo li korektne terce, dobit ćemo nešto drukčije rezultate. Naime za veliku i malu tercu imamo sljedeće verižne aproksimacije:

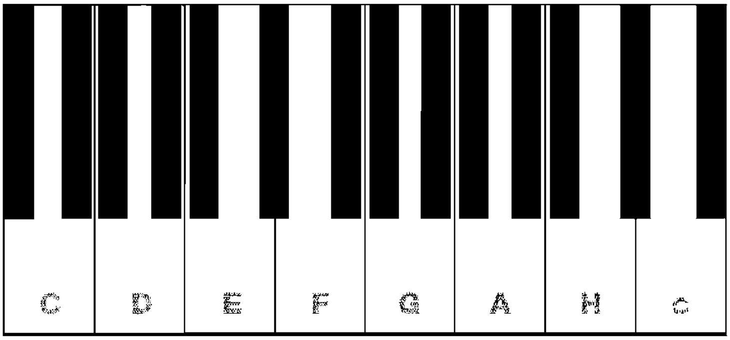
$$x = \frac{\log(5/4)}{\log 2} = [\,0,\ 3,\ 9,\ \ldots]$$

$$\begin{array}{ccc}
\frac{0}{1} & \frac{1}{3} & \frac{9}{28} \\
 & \frac{1}{2} & \frac{8}{25} \\
 & \frac{1}{1} & \frac{7}{22} \\
 & & \frac{6}{19} \\
 & & \cancel{\frac{5}{16}} \\
 & & \cancel{\frac{4}{13}} \\
 & & \cancel{\frac{3}{10}} \\
 & & \cancel{\frac{2}{7}}
\end{array}$$

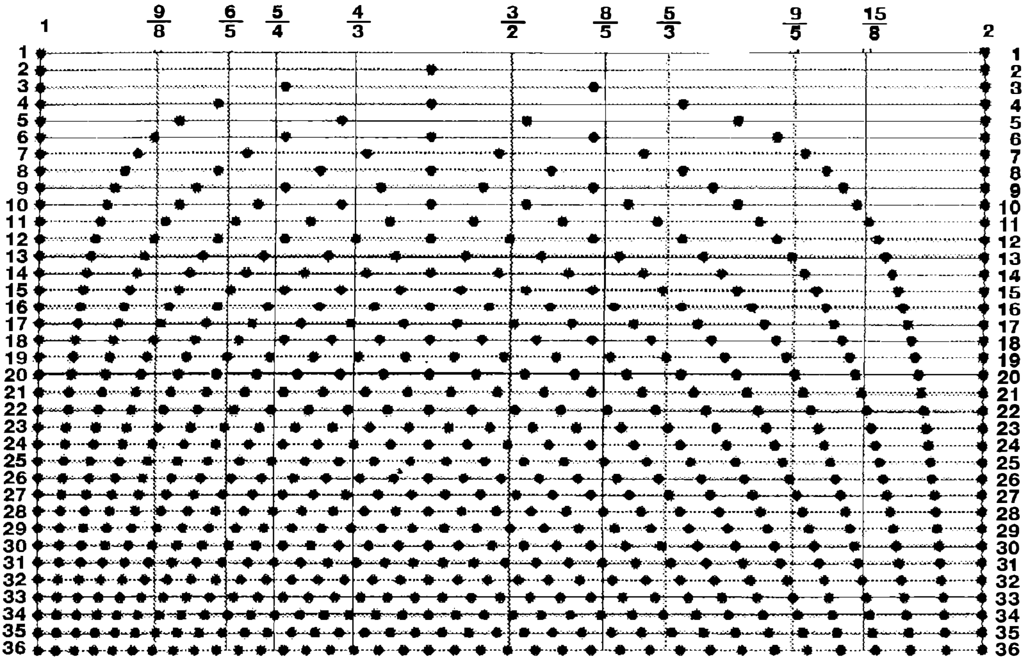
$$x = \frac{\log(6/5)}{\log 2} = [\,0,\ 3,\ 1,\ 4,\ \ldots]$$

$$\begin{array}{cccc}
\frac{0}{1} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{5}{19} \\
 & \frac{1}{2} & & \frac{4}{15} \\
 & \frac{1}{1} & & \frac{3}{11} \\
 & & & \cancel{\frac{2}{7}}
\end{array}$$

Najbolja podjela oktave, za korektne velike terce i pristupačan broj tonova, jest podjela na 19 polutonova, uz veliku tercu kao šesti poluton. Moglo bi se razmišljati i o 22, 25 ili 28 polutonova ali oni neće biti povoljni za male terce. Naime, za male terce oktavu je najbolje podijeliti na 11, 15 ili 19 polutonova. S obzirom na to da velike terce preferiraju 19 polutonova, devetnaestonska skala definitivno je najbolja skala za terce. U takvoj skali izvrsna mala terca bila bi peti ton, izvrsna velika terca šesti ton, podnošljiva kvinta (od 695 *cent*) jedanaesti ton i podnošljiva kvarta (od 505 *cent*) osmi ton. Takvu je skalu moguće realizirati na uobičajenim klavijaturama podjelom crnih tipki na dvije, te umetanjem po jedne nove crne tipke između E i F, te H i c (12 + 5 + 2 = 19).



Jednolike skale, kojima oktave sadrže od 1 do 36 tonova, prikazane su sljedećim grafom. Uočite da najviše gotovo točnih konsonantnosti sadrže 12-tonska i 19-tonska skala, kao što je to i pokazala naša matematička analiza.



DODATAK

1. KRUŽNA ARITMETIKA

Pogledajmo kako se nižu dani u tjednu, polazeći od nedjelje kao nultoga dana:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	...
Ne	Po	Ut	Sr	Če	Pe	Su	Ne	Po	Ut	Sr	Če	Pe	Su	Ne	Po	Ut	Sr	...

Nastavljanjem ovoga niza našli bismo, naprimjer:

$$23 \equiv \text{Ut}, \quad 75 \equiv \text{Pe}, \quad 165 \equiv \text{Če}, \ldots$$

Kako smo došli do posljednje jednakosti?
Dijeljenje:

$$165 : 7 = 23$$
$$25$$
$$4$$

pokazuje da 165. dan slijedi poslije 23 puna tjedna i još 4 dana. To znači da je 165. dan isti kao i 4. dan, tj. četvrtak.

Označimo li dane u tjednu brojevima:
Ne = 0, Po = 1, Ut = 2, Sr = 3, Če = 4, Pe = 5, Su = 6,
dobit ćemo sljedeći niz:

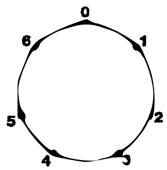
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	...
0	1	2	3	4	5	6	0	1	2	3	4	5	6	0	1	2	3	...

i sljedeće jednakosti:

$$23 \equiv 2,\ 75 \equiv 5,\ 165 \equiv 4, \ldots$$

Naravno, ove jednakosti vrijede samo u "kružnoj" aritmetici, u kojoj se poslije svakih 7 brojeva (0, 1, 2, 3, 4, 5 i 6) opet ponavljaju isti ti brojevi. Zato se te jednakosti točnije zapisuju ovako:

$$23 \equiv 2 \pmod 7,$$
$$75 \equiv 5 \pmod 7,$$
$$165 \equiv 4 \pmod 7,$$



Općenito, za cijele brojeve a i b, vrijedi:

$a \equiv b$ (mod 7), čita se: "a je kongruentan b modulo 7" ako a i b imaju isti ostatak pri dijeljenju sa 7. Izraženo formulom:

$$a \equiv b \pmod{7} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 7a_0 + r \\ b = 7b_0 + r \end{cases}$$

(a i b imaju isti ostatak r, pri dijeljenju sa 7).

U "kružnoj" aritmetici može se zbrajati i množiti:

$$\begin{array}{c} a \equiv b \pmod{7} \\ \underline{c \equiv d \pmod{7}} \\ a + c \equiv b + d \pmod{7} \end{array} \qquad \begin{array}{c} a \equiv b \pmod{7} \\ \underline{c \equiv d \pmod{7}} \\ ac \equiv bd \pmod{7} \end{array}$$

Naime, ako a i b imaju isti ostatak r_1, dok c i d imaju isti ostatak r_2 , onda (a + e) i (b + d) imaju isti ostatak ($r_1 + r_2$), a (ac) i (bd) imaju isti ostatak ($r_1 r_2$):

$$\left.\begin{array}{l} a = 7a_0 + r_1 \\ b = 7b_0 + r_1 \\ c = 7c_0 + r_2 \\ d = 7d_0 + r_2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a + c = 7(a_0 + c_0) + (r_1 + r_2) \\ b + d = 7(b_0 + d_0) + (r_1 + r_2) \\ ac = 7(7a_0c_0 + a_0r_2 + c_0r_1) + r_1r_2 \\ bd = 7(7b_0d_0 + b_0r_2 + d_0r_1) + r_1r_2 \end{array}$$

Naprimjer, 87. dan poslije 76. dana je 2. dan, tj. utorak. S druge strane, 87 skupina od 76 dana završava sa 4. danom, tj. sa četvrtkom.

$87 \equiv 3 \pmod{7}$	$87 \equiv 3 \pmod{7}$
$76 \equiv 6 \pmod{7}$	$76 \equiv 6 \pmod{7}$
$87 + 76 \equiv 3 + 6 \pmod{7}$	$87 \cdot 76 \equiv 3 \cdot 6 \pmod{7}$
$9 \equiv 2 \pmod{7}$	$18 \equiv 4 \pmod{7}$

Tablica zbrajanja i množenja u "kružnoj" aritmetici modulo 7 izgleda ovako:

+	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6	0
2	2	3	4	5	6	0	1
3	3	4	5	6	0	1	2
4	4	5	6	0	1	2	3
5	5	6	0	1	2	3	4
6	6	0	1	2	3	4	5

·	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6
2	0	2	4	6	1	3	5
3	0	3	6	2	5	1	4
4	0	4	1	5	2	6	3
5	0	5	3	1	6	4	2
6	0	6	5	4	3	2	1

Može li se oduzimati u "kružnoj" aritmetici modulo 7? Može, naprimjer:

$$1 - 3 \equiv 5 \pmod 7, \quad 3 - 6 \equiv 4 \pmod 7,$$

jer je 3 dana prije 1. dana (tj. ponedjeljka) bio 5. dan (tj. petak), a 6 dana prije 3. dana (tj. srijede) bio je 4. dan (tj. četvrtak). To vidimo i iz tablice zbrajanja. Uoči zaokružene brojeve. Od njih oduzimamo brojeve na početku njihova retka. Rezultat oduzimanja nalazimo na vrhu njihova stupca. Činjenica da se u svakom retku tablice zbrajanja nalaze svi "kružni" brojevi 0, 1, 2, 3, 4, 5, i 6 (točno jednom) osigurava da se u "kružnoj" aritmetici mogu (jednoznačno) obaviti sva oduzimanja. Lako je provjeriti da to vrijedi u svim "kružnim" aritmetikama, tj. u aritmetici modulo N, za svaki prirodni broj N.

U "kružne" aritmetike zato ne treba uvoditi (nove) negativne brojeve, jer oni su već u njoj. Na primjer, u aritmetici modulo 7:

$$-1 \equiv 0 - 1 \equiv 6 \pmod 7, \; -2 \equiv 0 - 2 \equiv 5 \pmod 7, \; -3 \equiv 0 - 3 \equiv 4 \pmod 7,$$

$$-4 \equiv 0 - 4 \equiv 3 \pmod 7, \; -5 \equiv 0 - 5 \equiv 2 \pmod 7, \; -6 \equiv 0 - 6 \equiv 1 \pmod 7.$$

Može li se dijeliti u "kružnoj" aritmetici modulo 7? Može, naprimjer:

$$3 : 2 \equiv 5 \pmod 7, \qquad 2 : 5 \equiv 6 \pmod 7,$$

jer razdoblje do 3. dana (tj. srijede) možemo podijeliti u dvije skupine od 5 dana:

(0 1 2 3 4) (5 6 0 1 2)

dok razdoblje do 2. dana (tj. do utorka) možemo podijeliti u 5 skupina od 6 dana:

(0 1 2 3 4 5) (6 0 1 2 3 4) (5 6 0 1 2 3) (4 5 6 0 1 2) (3 4 5 6 1 0)

To vidimo i iz tablice množenja. Uočimo zaokružene brojeve. Njih dijelimo s brojevima na početku njihova retka. Rezultat dijeljenja nalazimo na vrhu njihova stupca. Činjenica da se u svakom nenultom retku tablice množenja nalaze svi "kružni" brojevi 0, 1, 2, 3, 4, 5 i 6 (točno jednom) osigurava da se u "kružnoj" aritmetici modulo 7 mogu (jednoznačno) obaviti sva dijeljenja s brojevima različitim od 0. To ne vrijedi u svim "kružnim" aritmetikama. Tablica množenja "kružne" aritmetike modulo 6 izgleda ovako:

·	0	1	2	3	4	5	
0	0	0	0	0	0	0	
1	0	1	2	3	4	5	DA........ 3 : 1 ≡ 3 (mod 6)
2	0	2	4	0	2	4	NE
3	0	3	0	3	0	3	NE........ 3 : 3 ≡ 1 (mod 6)
4	0	4	2	0	4	2	NE
5	0	5	4	3	2	1	DA........ 4 : 5 ≡ 2 (mod 6)

Vidimo da je u "kružnoj" aritmetici modulo 6 moguće dijeljenje brojevima 1 i 5, a nije moguće dijeljenje brojevima 2, 3 i 4.[1] Primijetimo da 1 i 5 nemaju zajedničkih faktora sa 6, tj. oni su relativno prosti sa 6. S druge strane 2, 3 i 4 imaju zajedničke faktore sa 6, tj. oni nisu relativno prosti sa 6. To nije slučajno.

U "kružnoj" aritmetici modulo N možemo dijeliti brojem n, samo ako su N i n relativno prosti. To slijedi iz činjenice da inverzni broj n^{-1} (tj. $1/n$) postoji samo ako su N i n relativno prosti.

Naime, iz Eudoksovog postupka[2] za nalaženje najveće zajedničke mjere od n i N, koja je najveći zajednički faktor od n i N i označava se s (n, N), slijedi da postoje cjelobrojni p i q takvi da je:

$$(n, N) = q\,N + p\,n.$$

No, to znači da (n, N) pri dijeljenju s N ima ostatak $p\,n$:

$$(n, N) \equiv p\,n \pmod N.$$

Ako su n i N relativno prosti, tj. $(n, N) = 1$, onda slijedi:

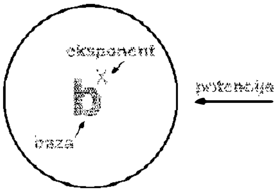
$$p\,n \equiv 1 \pmod N, \text{ tj. } p = n^{-1},$$

što znači da je p traženi inverz n^{-1}.

Ovu činjenicu, s kojom završavamo naš prikaz "kružne" aritmetike, iskoristili smo u analizi općih Pitagorinih ugađanja kojima smo se bavili u 5. poglavlju.

2. POTENCIJE I LOGARITMI

Potenciranje je jedna od najvažnijih matematičkih operacija. Provodi se tako da se baza b potencira eksponentom x. Rezultat je potencija:



Ako je eksponent x prirodni broj, potenciranje je opetovano množenje, naprimjer:

$$b^3 = b \cdot b \cdot b.$$

Suprotni predznak u eksponentu potencije znači recipročnu potenciju:

$$b^{-x} = \frac{1}{b^x}, \text{ dakle, } \left(\frac{a}{b}\right)^{-x} = \left(\frac{b}{a}\right)^{x}.$$

Naprimjer, $5^{-2} = 1/5^2 = 1/25$ i $(3/5)^{-2} = (5/3)^2 = 25/9$.

Ako je eksponent 0, potencija je 1 bez obzira na bazu:

$$b^0 = 1.$$

Ako je eksponent racionalan broj m/n, onda potenciranje definiramo:

$$b^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{b}\right)^m.$$

(Pretpostavljamo da je $b > 0$ i $b^{\frac{m}{n}} > 0$.)

Pravila za potenciranje s istom bazom slijede neposredno iz navedenih definicija. Kada se potencije množe, eksponenti se zbrajaju. Kada se potencije dijele, eksponenti se oduzimaju. Kada se potencija potencira, eksponenti se množe.

$$b^x b^y = b^{x+y}, \qquad \frac{b^x}{b^y} = b^{x-y}, \qquad (b^x)^y = b^{xy}.$$

Iz navedenih definicija slijede i pravila za potenciranje istim eksponentom:

$$(ab)^x = a^x\, b^x, \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}.$$

Poslije ovog kratkog uvoda u potencije prelazimo na logaritme. Eksponent potencije b^x po bazi b zove se logaritmom te potencije po toj bazi. Dakle, logaritam od 25 po bazi 5 je 2, jer je $25 = 5^2$. Logaritam od 64 po bazi 16 je 3/2, jer je $64 = 4^3 = ((16)^{1/2})^3 = 16^{3/2}$.

Ukratko, $\mathbf{log}_b\, y = x$ znači isto što i $b^x = y$.

Bavit ćemo se samo realnim logaritmima i potencijama. Zato baza b ne može biti negativna, jer bismo npr. dobili $(-2)^{1/2} = \sqrt{-2} = i\sqrt{2}$. (Baza ne može biti ni 1, jer bi npr. $\log_1 7 = x$ značilo da je $1^x = 7$, što nije točno ni za jedan broj x.) Zbog istog razloga ne možemo računati logaritam od negativnog broja y (ili od $y = 0$), jer je logaritam eksponent potencije s pozitivnom bazom, koja je i sama pozitivna. Naravno, sami eksponenti x, tj. logaritmi x, mogu biti bilo kakvi: pozitivni, nula ili negativni.

Iz definicije logaritama slijedi: sve što je napisano pomoću logaritama možemo napisati pomoću potencija, i obrnuto: sve što možemo napisati pomoću potencija, možemo i pomoću logaritama.

Eliminacija logaritma

$\mathbf{log}_b\, y = x \Rightarrow y = b^x$

Eliminacija potencije

$b^x = y \Rightarrow x = \mathbf{log}_b\, y$

Naprimjer, $\log_9 x = -3/2$ znači isto što i $x = 9^{-3/2}$, tj. $x = 9^{-3/2} = 1/3^3 = 1/27$.

Budući da su logaritmi eksponenti, pravila za računanje eksponentima mogu se iskazati i kao pravila za računanje logaritmima:

(1) $\log_b (uv) = \log_b u + \log_b v$, (2) $\log_b (u/v) = \log_b u - \log_b v$,

(3) $\log_b(u^p) = p \log_b u$, (4) $\log_b b = 1$, (5) $\log_b 1 = 0$.

Prvo pravilo kaže da je eksponent umnoška potencija jednak zbroju njihovih eksponenata. To je staro pravilo za množenje potencija. Radi se samo o nešto drukčijem zapisu:

$\log_b u = x$ zapišimo kao $u = b^x$,

$\log_b v = y$ zapišimo kao $v = b^y$,

$\log_b (uv) = x + y$ zapišimo kao $uv = b^{x+y}$.

Dakle,

$$\log_b (uv) = \log_b u + \log_b v$$

znači isto što i

$$b^x b^y = b^{x+y}.$$

Vidimo da je (1) naše staro pravilo $b^x b^y = b^{x+y}$ zapisano na drugi način. Isto vrijedi i za ostala pravila logaritmiranja; to su pravila potenciranja zapisana na drugi način[1].

Na kraju ističemo važno pravilo koje povezuje logaritme po različitim bazama (ako je $a, b, c > 0$ i $a, b \neq 1$):

$$\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}.$$

Formula za promjenu baze jednostavna je posljedica pravila (3) o logaritmu potencije. Krenimo, naime, od poznate činjenice: $x = \log_b c$ znači isto što i $b^x = c$. Izračunamo li sada logaritme po bazi a od lijeve i desne strane posljednje jednakosti, lako ćemo izračunati x:

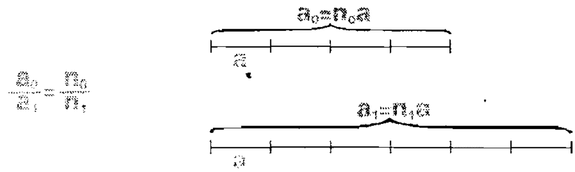
$$\log_a b^x = \log_a c, \quad x \log_a b = \log_a c, \quad x = \frac{\log_a c}{\log_a b}, \text{ dakle, } \log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}.$$

Formula za promjenu baze važna je zato što nam razne tablice i džepna računala najčešće omogućavaju izračunavanje logaritama po samo dvije baze: 10 i e. Broj e približno je 2.7 (točnije 2.718; još točnija vrijednost može se dobiti pritiskom na tipke 1 i e^x na džepnom računalu). Zbog svoje važnosti $\log_{10}$ i $\log_e$ imaju posebna imena: $\log_{10} = \log$ (obični ili dekadski logaritam), $\log_e = \ln$ (prirodni logaritam).

Ovi rezultati, kojima završavamo naš prikaz logaritama, imaju mnogostruke primjene, a jedna od njih je i pretvaranje multiplikativnih mjernih skala u aditivne. Takvu smo pretvorbu uveli u četvrtom poglavlju, kada smo s multiplikativnih *omjera* prešli na aditivne *centile*.

3. EUDOKSOVO MJERENJE I VERIŽNI RAZLOMCI

Izmjeriti veličinu a_0 veličinom a_1 znači naći njihovu zajedničku mjeru a, takvu da je za neke cijele brojeve n_0 i n_1, $a_0 = n_0 a$ i $a_1 = n_1 a$. Tada kažemo da su veličine a_0 i a_1 sumjerljive, jer se njihov omjer može izraziti kao omjer cijelih brojeva (tj. kao racionalni broj) $a_0/a_1 = n_0/n_1$, tj. $a_0=(n_0/n_1)a_1$, odnosno:



Ako veličine a_0 i a_1 nemaju zajedničku mjeru (npr. stranica kvadrata i njegova dijagonala nemaju zajedničku mjeru), onda kažemo da su te dvije veličine nesumjerljive. Njihov se omjer ne može izraziti kao racionalan broj, tj. njihov je omjer iracionalan[1].

Eudoksovo mjerenje jest postupak kojim u konačnom broju koraka nalazimo zajedničku mjeru i omjer dviju sumjerljivih veličina, a koji nikada ne staje ako se primijeni na dvije nesumjerljive veličine. U prvom koraku a_1 se oduzima od a_0 toliko puta koliko je to moguće, tj. dok ne dođemo do ostatka a_2 manjeg od a_1. Ako je to q_0 puta (q_0 je, naravno, cijeli broj), onda imamo:

$$a_0 - q_0 a_1 = a_2 \qquad \text{tj.} \quad a_0 = q_0 a_1 + a_2, \qquad a_1 > a_2.$$

U drugom koraku postupak ponavljamo s a_1 i a_2 (cijeli broj $q_1 \geq 1$, jer je $a_1 > a_2$):

$$a_1 - q_1 a_2 = a_3 \qquad \text{tj.} \quad a_1 = q_1 a_2 + a_3, \qquad a_2 > a_3.$$

Postupak nastavljamo s a_2 i a_3, a_3 i a_4, a_4 i a_5, ..., sve dok ne dođemo do a_k i $a_{k+1} = a$, takvih da je:

$$a_k - q_k a = 0, \qquad \text{tj.} \qquad a_k = q_k a,$$

(cijeli broj $q_k \geq 2$, jer je $a_k > a_{k+1} = a$).

Svi koraci Eudoksova postupka, ako on završava u konačnom broju koraka, izgledaju ovako:

$$
\begin{array}{lll}
a_0 = q_0 a_1 + a_2, & a_1 > a_2 & \\
a_1 = q_1 a_2 + a_3, & a_2 > a_3, & q_1 \geq 1, \\
a_2 = q_2 a_3 + a_4, & a_3 > a_4, & q_2 \geq 1, \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
a_{k-1} = q_{k-1} a_k + a, & a_k > a, & q_{k-1} \geq 1, \\
a_k = q_k a\ , & a_k > a, & q_{k-1} \geq 2.
\end{array}
$$

Odavde odmah slijedi da je a zajednička mjera od a_0 i a_1. Naime, iz posljednje jednadžbe slijedi da je a mjera od a_k. Zatim, iz pretposljednje jednadžbe slijedi da je a mjera od a_{k-1}.

Iz jednadžbe prije nje slijedi da je a mjera od a_{k-2} i tako dalje, sve do druge jednadžbe, iz koje slijedi da je a mjera od a_1, i konačno prve, iz koje slijedi da je a mjera od a_0. Ukratko, ako Eudoksovo mjerenje veličine a_0 veličinom a_1 završava, onda su te dvije veličine sumjerljive. Naravno, vrijedi i obratno - ako su veličine sumjerljive, Eudoksov postupak sigurno će završiti. Naime, ako je $a_0 = n_0 a$ i $a_1 = n_1 a$, za neke cjelobrojne n_0 i n_1 (te neku zajedničku mjeru a), onda je:

$$
\begin{array}{ll}
n_0 = q_0 n_1 + n_2, & n_1 > n_2, \\
n_1 = q_1 n_2 + n_3, & n_2 > n_3, \\
n_2 = q_2 n_3 + n_4, & n_3 > n_4, \\
\vdots & \vdots
\end{array}
$$

pa postupak mora završiti jer je $n_1 > n_2 > n_3 > n_4 > \ldots$ strogo opadajući niz prirodnih brojeva, koji je nužno konačan.

Ponovimo još jednom. Ako je Eudoksovo mjerenje veličine a_0 veličinom a_1 konačno (tj. završava u konačnom broju koraka), onda su te veličine sumjerljive i njihov omjer a_0/a_1 racionalan je broj. Ako je mjerenje beskonačno (tj. ako ne završava u konačnom broju koraka), onda su te veličine nesumjerljive i njihov omjer a_0/a_1 iracionalan je broj. U konačnom slučaju rezultate mjerenja možemo zapisati ovako:

$$\begin{array}{lll}
\dfrac{a_0}{a_1} = q_0 + \dfrac{q_2}{q_1}, & a_1 > a_2, & \\
\dfrac{a_1}{a_2} = q_1 + \dfrac{q_3}{q_2}, & a_2 > a_3, & q_1 \geq 1, \\
\dfrac{a_2}{a_3} = q_2 + \dfrac{q_4}{q_3}, & a_3 > a_4, & q_2 \geq 1, \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\dfrac{a_{k-1}}{a_k} = q_{k-1} + \dfrac{a}{a_k}, & a_k > a, & q_{k-1} \geq 1, \\
\dfrac{a_k}{a} = q_k, & & q_k \geq 2,
\end{array}$$

pa iz toga slijedi:

$$\frac{a_0}{a_1} = q_0 + \frac{1}{\frac{a_1}{a_2}} = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{\frac{a_2}{a_3}}} = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{\frac{a_3}{a_4}}}} =$$

$$= q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{\ddots}{q_{k-1} + \cfrac{1}{q_k}}}} = \left[q_0, q_1, q_2, \ldots, q_{k-1}, q_k\right].$$

U beskonačnom slučaju, rezultati mjerenja (kojih sada ima beskonačno):

$$\begin{array}{ll}
\dfrac{a_0}{a_1} = q_0 + \dfrac{a_2}{a_1}, & a_1 > a_2, \\
\dfrac{a_1}{a_2} = q_1 + \dfrac{a_3}{a_2}, & a_2 > a_3, \\
\dfrac{a_2}{a_3} = q_2 + \dfrac{a_4}{a_3}, & a_3 > a_4, \\
\vdots & \vdots
\end{array}$$

daju beskonačni verižni razlomak:

$$\frac{a_0}{a_1}=q_0+\cfrac{1}{\cfrac{a_1}{a_2}}=q_0+\cfrac{1}{q_1+\cfrac{1}{\cfrac{a_2}{a_3}}}=q_0+\cfrac{1}{q_1+\cfrac{1}{q_2+\cfrac{1}{\cfrac{a_3}{a_4}}}}=$$

$$=q_0+\cfrac{1}{q_1+\cfrac{1}{q_2+\ddots}}=\left[q_0,q_1,q_2,q_3,\ldots\right].$$

Vidimo da su količnici verižnog razlomka, jednakog omjeru a_0/a_1, u oba slučaja direktni rezultati Eudoksova mjerenja veličine a_0 veličinom a_1. Ako je omjer a_0/a_1 racionalan broj, radi se o konačnom verižnom razlomku, a ako je a_0/a_1 iracionalan, radi se o beskonačnom verižnom razlomku.

Dakle, svaki realni broj x može se prikazati u obliku verižnog razlomka koji je konačan ako je x racionalan, a beskonačan ako je x iracionalan[2]:

$$x=[q_0,q_1,q_2,q_3,\ldots].$$

Taj je prikaz jedinstven, jer su količnici q_i jednoznačno određeni Eudoksovim postupkom[3]. Brojevi

$$x=[q_0],\quad x_1=[q_0,q_1],\quad x_2=[q_0,q_1,q_2],\ldots$$

racionalne su aproksimacije broja x. Njihovi su iznosi:

$$x_0=\frac{m_0}{n_0}=\frac{q_0}{1},\quad x_1=\frac{m_1}{n_1}=\frac{q_1q_0+1}{q_1},\quad x_2=\frac{m_2}{n_2}=\frac{q_2\left(q_1q_0+1\right)+q_0}{q_2q_1+1},\ldots.$$

Uvedemo li "brojeve" $x_{-1}=\dfrac{m_{-1}}{n_{-1}}=\dfrac{1}{0}$ i $x_{-2}=\dfrac{m_{-2}}{n_{-2}}=\dfrac{0}{1}$, vidimo da vrijedi:

$$\frac{m_0}{n_0}=\frac{q_0m_{-1}+m_{-2}}{q_0n_{-1}+n_{-2}},\quad \frac{m_1}{n_1}=\frac{q_1m_0+m_{-1}}{q_1n_0+n_{-1}},\quad \frac{m_2}{n_2}=\frac{q_2m_1+m_0}{q_2n_1+n_0}.$$

To vrijedi i za sve daljnje aproksimacije:

$$x_k = \frac{m_k}{n_k} = \frac{q_k m_{k-1} + m_{k-2}}{q_k n_{k-1} + n_{k-2}},$$

što se lako može dokazati indukcijom. Pretpostavimo, naime, da navedena formula vrijedi za k i dokažimo da onda vrijedi i za $k + 1$:

$$x_{k+1} = \frac{m_k}{n_k} = \left[q_0, \ldots, q_k, q_{k+1}\right] = \left[q_0, \ldots, q_k + \frac{1}{q_{k+1}}\right]^{4)} = \text{(po pretpostavci indukcije)} =$$

$$= \frac{\left(q_k + \left(1/q_{k+1}\right)\right)m_{k-1} + m_{k-2}}{\left(q_k + \left(1/q_{k+1}\right)\right)n_{k-1} + n_{k-2}} = \frac{q_{k+1}\left(q_k m_{k-1} + m_{k-2}\right) + m_{k-1}}{q_{k+1}\left(q_k n_{k-1} + n_{k-2}\right) + n_{k-1}} =$$

$$= \text{(po pretpostavci indukcije)} = \frac{q_{k+1} m_k + m_{k-1}}{q_{k+1} n_k + n_{k-1}}.$$

Uočimo kako odavde slijedi da su m_k i n_k uzlazni nizovi:

$$m_0 < m_1 < m_2 < \ldots \quad n_0 < n_1 < n_2 < \ldots .$$

Promotrimo jedan konkretni broj $x = [2, 1, 2, 3, 1, 2, \ldots]$ i njegove racionalne aproksimacije $x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \ldots$.

$$\begin{array}{cccccccc} & & x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \ \ldots \\ & & [2, & 1, & 2, & 3, & 1, & 2, \ \ldots] \\ \frac{0}{1} & \frac{1}{0} & \frac{2}{1} & \frac{3}{1} & \frac{8}{3} & \frac{27}{10} & \frac{35}{13} & \frac{97}{36} \ \ldots \end{array}$$

Lako se može provjeriti da vrijedi:

$$\frac{2}{1} < \frac{8}{3} < \frac{35}{13} < \ldots < x < \ldots < \frac{97}{36} < \frac{27}{10} < \frac{3}{1}$$

$$x_0 < x_2 < x_4 < \ldots < x < \ldots < x_5 < x_3 < x_1.$$

To vrijedi za svaki $x = [q_0, q_1, q_2, \ldots]$ i njegove aproksimacija $x_0, x_1, x_2, \ldots$. Parne aproksimacije $x_0, x_2, x_4, \ldots$ približavaju se broju x uzlazno, a neparne $x_1, x_3, x_5, \ldots$ silazno. I to se lako može dokazati.

Najprije uočimo da za svaki k vrijedi:

$$m_{k-1}n_k - m_k n_{k-1} = \begin{vmatrix} m_{k-1} & m_k \\ n_{k-1} & n_k \end{vmatrix} = (-1)^k .$$

Naime, prva determinanta koju dobivamo za $k = -1$ očito ima tu vrijednost:

$$\begin{vmatrix} m_{-2} & m_{-1} \\ n_{-2} & n_{-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 = (-1)^{-1} .$$

Budući da se svaka sljedeća determinanta dobiva iz prijašnje pomoću elementarnih operacija sa stupcima (što ne mijenja vrijednost determinante), uz dodatnu permutaciju stupaca (što mijenja predznak determinante), slijedi da vrijednosti naših determinanti alterniraju između 1 i -1, tj. da su one oblika $(-1)^k$.

Odavde dalje slijedi:

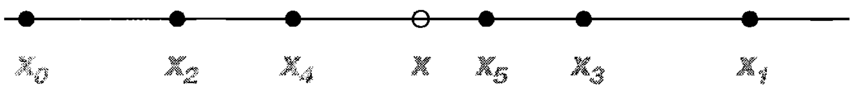
$$x_{k-1} - x_k = \frac{m_{k-1}}{n_{k-1}} - \frac{m_k}{n_k} = \frac{m_{k-1}n_k - m_k n_{k-1}}{n_{k-1}n_k} = \frac{(-1)^k}{n_{k-1}n_k} .$$

što uz činjenicu da je niz n_k strogo uzlazan znači da je :

$$x_0 < x_2 < x_4 < \ldots < x < \ldots < x_5 < x_3 < x_1 .$$

No, to smo i trebali dokazati.

Prikazano na brojevnom pravcu, približavanje verižnih aproksimacija broja x samom tom broju izgleda ovako:



Svaka parna aproksimacija bolja je od prijašnje parne i svaka neparna bolja je od prijašnje neparne. To smo dokazali. Međutim, na našem je crtežu svaka aproksimacija bolja od one prije nje (parne ili neparne). To je također točno i slijedi iz strogoga rasta niza n_k i nejednakosti

$$\frac{1}{n_k n_{k+2}} < |x - x_k| < \frac{1}{n_k n_{k+1}},$$

koju ćemo sada dokazati.

Za $x = [q_0, q_1, \ldots]$, uvedimo oznaku $\xi_k = [q_k, q_{k+1}, \ldots]$, uz koju lako vidimo da vrijede identiteti $x = [q_0, \ldots, q_k, \xi_{k+1}]$ i $x = (\xi_{k+1} m_k + m_{k-1})/(\xi_{k+1} n_k + n_{k-1})$[4]. Dalje slijedi:

$$|x - x_k| = \left|x - \frac{m_k}{n_k}\right| = \left|\frac{\xi_{k+1} m_k + m_{k-1}}{\xi_{k+1} n_k + n_{k-1}} - \frac{m_k}{n_k}\right| = \frac{|m_{k-1} n_k - m_k n_{k-1}|}{n_k(\xi_{k+1} n_k + n_{k-1})} = \frac{1}{n_k(\xi_{k+1} n_k + n_{k-1})}.$$

Međutim, $\xi_{k+1} = [q_{k+1}, q_{k+2}, \ldots] < q_{k+1} + 1$, odakle slijedi:

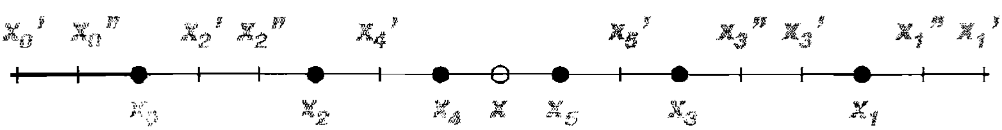
$$\xi_{k+1} n_k + n_{k-1} < (q_{k+1} + 1) n_k + n_{k-1} = (q_{k+1} n_k + n_{k-1}) + n_k = n_{k+1} + n_k \leq q_{k+2} n_{k+1} + n_k = n_{k+2}.$$

Uvrstimo li to u prijašnju jednakost, dobit ćemo:

$$|x - x_k| > \frac{1}{n_k n_{k+2}},$$

što je lijeva od dvije nejednakosti koje smo željeli dokazati. Slično se dokazuje i desna. Dakle, naš je crtež korektan. Često ga je korisno proširiti i sljedećim, novim aproksimacijama broja $x = [q_0, q_1, q_2, \ldots]$:

	stare	nove
$x_0' = 1$,	$x_0'' = 2, \ldots$	$x_0 = [q_0]$
$x_1' = [q_0, 1]$,	$x_1'' = [q_0, 2], \ldots$	$x_1 = [q_0, q_1]$
$x_2' = [q_0, q_1, 1]$,	$x_2'' = [q_0, q_1, 2], \ldots$	$x_2 = [q_0, q_1, q_2]$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$



Ucrtani poredak novih aproksimacija neposredna je posljedica njihove definicije. Uočite da su x_k', x_k'', . . lošije aproksimacije od x_k, ali mogu (iako ne moraju) biti bolje od x_{k-1}.

Aproksimacije $x_k = [q_0, \ldots, q_k] = m_k/n_k$ najbolje su racionalne aproksimacije broja $x = [q_0, q_1, \ldots]$, u sljedećem smislu:

$$\left|x - \frac{m}{n}\right| < \left|x - \frac{m_k}{n_k}\right| \Rightarrow n > n_k.$$

Iskazano riječima, m_k/n_k najbolja je racionalna aproksimacija broja x, uz tu veličinu nazivnika. Naime, m/n je bolja aproksimacija samo ako je $n > n_k$. To pokazujemo dokazujući implikaciju

$$|nx - m| < |n_k x - m_k| \Rightarrow n > n_k,$$

iz koje neposredno slijedi već navedena implikacija.

Uočimo najprije da sustav jednadžbi

$$n_k u + n_{k+1} v = n, \quad m_k u + m_{k+1} v = m,$$

ima jedinstvena cjelobrojna rješenja u i v, jer determinanta tog sustava ima vrijednost ± 1. Polazeći od pretpostavke $|nx - m| < |n_k x - m_k|$ dokazat ćemo da su u i v pozitivni cijeli brojevi, pa će iz prve jednadžbe sustava odmah slijediti da je $n > n_k$ i time će naša implikacija biti dokazana.

Dakle, preostaje nam dokazati

$$|nx - m| < |n_k x - m_k| \Rightarrow u, v > 0.$$

Iz jednadžbi koje određuju u i v slijedi:

$$|nx - m| = |(n_k u + n_{k+1} v)x - (m_k u + m_{k+1} v)| = |u(n_k x - m_k) + v(n_{k+1} x - m_{k+1})|.$$

Dakle, naša je pretpostavka:

$$|u(n_k x - m_k) + v(n_{k+1} x - m_{k+1})| < |n_k x - m_k|.$$

Budući da $(n_k x - m_k)$ i $(n_{k+1} x - m_{k+1})$ imaju suprotne predznake (jer se m_k/n_k i m_{k+1}/n_{k+1} nalaze s različitih strana od x, kao parna, odnosno neparna aproksimacija), onda je prijašnja nejednakost moguća samo ako u i v imaju iste predznake. To pak znači da su oba pozitivna, jer iz

$$n_k u + n_{k+1} v = n \text{ (uz } n_k, n_{k+1}, n > 0)$$

slijedi da oba ne mogu biti negativni.

Zaključimo što smo sve saznali o racionalnim aproksimacijama realnog broja $x = [q_0, q_1, q_2, \ldots]$.

S nazivnikom do n_k, njegova najbolja aproksimacija jest:

$$x_k = [q_0, \ldots, q_k] = m_k/n_k.$$

Njegova najbolja aproksimacija s nazivnikom do n_{k+1} jest:

$$x_{k+1} = [q_0, \ldots, q_k, q_{k+1}] = m_{k+1}/n_{k+1}.$$

S nazivnikom do n, gdje je $n_k < n < n_{k+1}$, najbolja aproksimacija je x_k ili neka od x'_{k+1}, x''_{k+1}, . . . (x_k treba usporediti s tih $q_{k+1} - 1$ brojeva i vidjeti je li neki od njih bolja aproksimacija od x_k).

Ovi rezultati, kojima završavamo naš prikaz teorije verižnih razlomaka, imaju mnogostruke primjene, a jedna od zanimljivih je optimizacija jednolikih skala, kojom smo se bavili u sedmom poglavlju.

FUSNOTE

1. HARMONIJA SVIJETA

1) O značaju Pitagorina učenja za nastanak novovjekovne znanosti više u: Zvonimir Šikić, *O matematizaciji prirodnih znanosti*, Ruđer 2, str. 40-43.
2) Arthur Koestler, *The Sleepwalkers*, Penguin, 1964.
3) Danas, zahvaljujući romantičnom shvaćanju muzike, ta veza više nije tako očigledna. Više o tome u: Jamie James, *The music of the spheres*, Springer, 1993.
4) Mi zapadnjaci Pitagoru i ostale antičke velikane obično smještamo u zapadnu tradiciju. Međutim, opreka Istok-Zapad gubi smisao na sredozemnoj obali Male Azije, s intelektualnim korijenima u Egiptu i Kaldeji (Babilonu).
5) Detaljnije o tome u: *Zvonimir* Šikić, Filzofija matematike, Školska knjig*a, 1995*.
6) *Sljedeći omjeri 5/4 i 6/5 ostvaruju intervale velike i male terce.*
7) Više o tome u knjizi citiranoj u 3).
8) Inače, brojevi 1, 2, 3 i 4 čine tetraktis, najvažniji Pitagorin simbol, koji između ostalog utjelovljuje "sveti" broj 10:

O
O O
O O O
O O O O

9) Priča je upitna i zato što se puno više čuju vibracije nakovnja nego čekića, a o težini čekića ovise visine tonova što ih proizvode čekići (te samo intenzitet uvijek istoga tona što ga proizvodi nakovanj).

2. INTERVALI I SKALE

1) Ova podjela oktave dovodi i do toga da interval terce, koja se (npr.) proteže od C do E (za razliku od male terce koja se /npr./ proteže od A do c), ima vrijednost: $E/C = (9/8)^2 = 81/64 = 1.266$. No, to znači da je taj interval dulji od Pitagorine terce, duljina koje bi trebala biti $5/4 = 1.250$. Isto vrijedi i za malu tercu $c/A = (256/243)(9/8) = 1.227$, u odnosu na Pitagorinu, duljina koje bi trebala biti $6/5 = 1.200$.
2) Razdioba na cijele tonove i polutonove, ispod naših shema, standardna je. Grublja razdioba, iznad naših shema, okuplja grupe cijelih i polutonova, i nije standardna. Ipak mislimo da ona dobro odražava glazbeni doživljaj grupiranja tonova u skali. (Uočite da se lidijska skala i po tome izdvaja od ostalih.)
3) Kada se melodija piše u molu, obično se uzlazna skala uporabljuje za uzlazne nizove nota, a silazna za silazne.
4) Vidi dodatno poglavlje *Kružna aritmetika*
5) Prve su orgulje stigle u srednjovjekovnu Europu kao poklon bizantskoga cara kralju Pipinu 755. g. Taj se poklon držao toliko čudesnim da je u redovničkim kronikama zapisan kao glavni, a često i jedini događaj u toj godini. Pipinov unuk Louis, sin Karla Velikog, prvog cara Svetoga rimskoga carstva, dao je "u bizantskom stilu" izgraditi prve zapadne orgulje, kao statusni simbol nove velike sile. Nažalost, zapadne orgulje još dugo nisu imale klavijature, nego se svaka nota svirala izvlačenjem odgovarajućeg drvenog zasuna. Tek će se oko 1200. ove nezgrapne operacije prebaciti na klavijaturu, najprije samo "bijelih" nota.
6) Grgur Veliki, rimski biskup, papa i svetac (umro 604.).
7) *Ti* je kasniji dodatak, kao i pretvaranje Guidovog *ut* u naš *do*.

8) Nesigurnost se može otkloniti i tako da glasovi prilaze disonantnom intervalu s različitih strana u malim koracima. Takvim *kontrarnim* gibanjem može se, bez pjevačkih poteškoća, doći do izvedbe bilo kojeg disonantnog intervala. Ovo je otkriće imalo značajne posljedice za *polifonijsko* skladanje. Počevši od njega, polifonijske melodijske linije (*cantus* i *discantus*) oslobođene su paralelizma i postaju sve nezavisnije tijekom sljedećih šesto godina.

9) Mi danas $s^\flat$ možemo sniziti ili $s^\#$ povisiti bilo koju notu, no u renesansnoj polifoniji, u skladu s opisanim povijesnim razvojem, B i $E^\flat$ bile su jedine snižene note, a $F^\#$, $C^\#$ i $G^\#$ jedine povišene (iako je u jednolikoj i većini temperiranih skala $B = A^\#$, $F^\# = G^\flat$, itd.).

10) To je ekskluzivno europsko otkriće, koje nigdje drugdje nije samoniklo.

11) Lidijska skala, koja još jedina od tradicionalnih modusa ima vodicu, nije dovoljno "dobra" jer nema kvarte.

12) Mogli bismo reći da je dorski modus "mol bez vodice".

13) Bowers, J. F. *In which key did the angels sing?*, The mathematical Gazette, 1995.

3. HARMONIJA OBOJENOGA TONA

1) Jedan titraj u sekundi je 1 Hz (Hertz). Sto titraja u sekundi je 100 Hz, itd.

2) Trozvuci nad tonikom I^5_3 i dominantom V^5_3 polovi su muzičke drame i zapravo su oni tonika i dominanta. Inače, akorde bi najbolje bilo zapisivati u polutonskoj skali. Tada bismo imali sljedeće zapise: $I^5_3 = 0 + 4 + 7$, $V^5_3 = 5 + 8 + 12$.
Neki standardni četverotonski akordi bili bi:
Dur = 0 + 4 + 7 + 12, Mol = 0 + 3 + 7 + 12, Dur 7 = 0 + 4 + 7 + 11, Mol 7 = 0 + 3 + 7 + 10, itd.

3) Plomp, R. & Levelt, W. *Tonal Consonance and Critical Bandwidth*, Journal of Acoustical Society of America, 38, 1965.

4) Ako je osnovni ton D, minimumi su u D, F, $F^\#$, G, A, H i d. To je naša pentatonska ljestvica (4), iz prijašnjeg poglavlja, proširena tercom $F^\#$.

5) Tu, nažalost, nema jednostavne demonstracije kao s telefonskom žicom fiksnih krajeva. Tamo smo **vidjeli** da se valovi (što znači i frekvencije) umnažaju u jednostavnom nizu prirodnih brojeva: 1 val, 2 vala, 3 vala, ...

6) Više o tome i svemu čime smo se bavili u ovom poglavlju može se naći u: Sethares, W. A., *Tuning timbre spectrum scale*, Springer, 1998.

7) Zvuk bilo koje boje može se sintetizirati na modernim sintesajzerima.

4. JEDNOLIKOST PROTIV TOČNOSTI

1) Ovo je samo jedna od mnogih "točnih" razdioba. Umjesto "točnog" pomaka iz D u $D^\#$ za 16/15, mogli smo se "točno" pomaknuti iz E u $E^\flat$, za 16/15, itd. Točnost se ovdje odnosi samo na konsonantne intervale: oktavu 2/1, kvintu 3/2, kvartu 4/3, veliku tercu 5/4, malu tercu 6/5 i sekstu 5/3. (Naša je razdioba "najtočnija" jer su omjeri pridruženi njezinim polutonovima omjeri najmanjih mogućih brojeva.)

2) Prirodna intonacija često uključuje i dodatne intervale. Naprimjer, *Zarllinov čembalo* (iz 16. st.) imao je i tipke za $-D = 10/9$, $-E^\flat = 32/27$, $-F^\# = 25/18$ i $-B = 16/9$. Mikrotonalni kompozitori 20. st., koji rabe prirodnu intonaciju, uvode još cijeli niz točnih tonova (tj. tonova oblika m/n, gdje su m i n "mali" prirodni brojevi).

3) "Točnotonski" kompozitori (iz 16. i 20. st.) to drže prednošću, a ne nedostatkom. Vidi u[7] usporedbu jednoliko temperiranog i prirodno intoniranog zvuka.

4) Skala je logaritamska, jer je dobivena logaritmiranjem osnovne skale po bazi p: $\log_p p^k = k$. Više o logaritmima u dodatku *Potencije i logaritmi*.

5) Vidi *Potencije i logaritmi*.

6) Poredamo li "bijeli" dio "prirodne" tablice tako da se trozvuci pojavljuju u vertikali, lako ćemo vidjeti da su baš to trozvuci koji ne sadrže (u tablicama zaokružene) pogrješke:

	I	II	III	IV	V	VI	VII
na C	0	204	386	498	702	884	1088
na E	0	204	428	498	702	926	1130
na G	0	182	386	498	702	884	1088

	I	II	III	IV	V	VI	VII
na C	0	204	386	498	702	884	1088
na D♯	0	182	386	498	702	884	1088
na G	0	182	386	498	702	884	1088

7) S današnjim frekvenciometrima to više nije problem. Možda baš zato prirodna intonacija opet nalazi sljedbenike. Eksperimentirajući sa slušateljima nenaviklima na prirodnu intonaciju (a takvi smo danas skoro svi), ustanovljeno je da ista glazba zvuči tužno i melankolično, kada se izvede u točnoj intonaciji, a sretno i veselo, kada se izvede u jednolikoj. "Jednolikost" izaziva uzbuđenje i nervozu, intenzivna je i aktivna. "Točnost" smiruje, čak izaziva depresiju, spora je i pasivna (sljedbenici "točnosti" depresivni efekt tumače kao apstinentsku krizu neurotičnih ovisnika o "jednolikosti"). "Jednolikost" je bezbojna, siva i siromašna. "Točnost" je obojena, bogata i puna. (Zar smo zaista toliko toga izgubili od renesanse do danas?)

5. PITAGORINO UGAĐANJE

1) Razmatranja do kraja ovog poglavlja pretpostavljaju poznavanje "kružne" aritmetike, koja je navedena u dodatku *Kružna aritmetika.*
2) Uočite da je $1 - (-n^{-1})x \neq 1 + (n^{-1})x$, jer prvi minus pripada aritmetici realnih brojeva (kao i množenje s x), dok drugi minus pripada aritmetici modulo N (kao i invertiranje od n).

6. DOBRO TEMPERIRANI GLASOVIR I JEDNOLIKA LUTNJA

1) Prema Jorgensenu (*Tuning, Michigen State University Press,* 1991.), ova se neistina provlači literaturom od 1893. g., kada je objavljena u autoritativnom *Grove Musical Dictionary.*
2) Usporedi [6] u 4. poglavlju.
3) Vidjeli smo da se u jednolikoj skali oni ne razlikuju (usp. [6] u 4. poglavlju).
4) Nažalost, današnje "jednolike" izvedbe to onemogućavaju. (Utješno je možda to što većina ljudi te razlike nije čula ni u izvornim izvedbama.)
5) Ponegdje čak i dulje. Engleske su orgulje srednjotonski ugađene još kroz cijelo 19. st. Nijedno zapadno ugađanje nema tako dugu povijest.
6) Sintonički zarez točnije iznosi 21.52 *cent*, pa točnije izračunato kraćenje kvinte iznosi 21.52 : 4 = 5.38 *cent.* Zbog ovog skraćenja kvinte, za 1/4 sintoničkog zareza, ovo se srednjotonsko ugađanje preciznije zove "srednjotonsko ugađanje 1/4 zareza". Inače, postojala su i srednjotonska ugađanja "1/6 zareza" i "2/7 zareza", koja su imala lošije terce, ali zato nisu imala tako izrazitu vučju kvintu kakvu ima srednjotonsko ugađanje "1/4 zareza" (vidi dalje). Primijetimo da jednoliko temperiranje možemo intepretirati i kao srednjotonsko ugađanje "1/11 zareza", jer je 1/11 sintoničkog zareza 1/12 Pitagorina.
7) Veliki dijatonski poluton 1^{-} = 117.5 *cent* bio je neprihvatljiv renesansnim glazbenicima, s još uvijek gotičkom sklonošću prema malom dijatonskom polutonu 1^{-} = 90 *cent* (usp. prošlo poglavlje). Više o tome u: M. Lindley, *Pythagorean Intonation and the Rise of the Triad, Royal Musical Association Research Chronicle*, 1980.

8) Neke teorije to povezuju s europskom glazbenom tradicijom da se kvinta uvijek dopunjava tercom.

9) Kvintakorde I., IV. i V. stupnja možemo rabiti u C, D, F, G, A ili B duru, što i jesu standardni tonaliteti renesansne i rane barokne glazbe.

10) "Crnu" aproksimaciju srednjotonskog ugađanja, nadopunjenu pitagorinskim "bijelim":

E♭ ← B ← F ← C → G → D → A → E → H → F# → C# → G#

698 *cent* **702 *cent*** **698 *cent***

0	106	204	302	408	498	608	702	804	906	1000	1110	1200
C	#	D	[illegible]	E	F	#	G	#	A	B	H	C

106 98 98 106 90 110 94 102 102 94 110 90

204 204 204 204 204

mogli bismo nazvati *dobrim Pitagorinim temperiranjem*, jer nema vučjih intervala, a u "bijelom" dijatonskom području čuva osnovne karakteristike Pitagorinog ugađanja. (To je, prema **Jorgensenu**, ugađanje **T. Younga** iz 1799.)

11) Ovdje termin *dobro temperiranje* rabimo u (inače uobičajenom) užem smislu. Dakle, to nije samo temperiranje koje nema vučjih intervala (u tom smislu i jednoliko je dobro), nego je to i temperiranje s različito "obojenim" tonalitetima.

1) Od 90.-ih napravljene su mnoge snimke dobro temperiranih izvedbi. Tako je prije nekoliko godina izdan CD, *Dobro temperirani Beethoven*, s pijanistom **E. Kathanom** i ugođačem **E. Footeom**, na kojem su snimljene *Waldstein*, *Patetična* i *Mondschein* sonata. Također se sve više rane glazbe izvodi i snima u prirodnoj intonaciji.

13) To vodicu čini posebno aktivnom, pa se prijelaz na nižu vodicu držao jednim od većih problema svakog jednolikijeg temperiranja.

7. DVANAEST VELIČANSTVENIH

1) Detaljnije o verižnim razlomcima u dodatku *Eudoksovo mjerenje i verižni razlomci*.

DODATAK

1. KRUŽNA ARITMETIKA

1) Naravno, dijeljenje brojem 0 nikada nije moguće.

2) Vidi dodatak *Eudoksovo mjerenje i verižni razlomci*

2. POTENCIJE I LOGARITMI

1) Izvod ostalih pravila, te još detaljniji prikaz potencija i logaritama može se naći u knjizi Zvonimira Šikića, *Matematika za II. razred srednje škole*, Profil, 1998.

3. EUDOKSOVO MJERENJE I VERIŽNI RAZLOMCI

1) Pretpostavljamo da su veličine *usporedive*, tj. da opetovanim pribrajanjem manje veličine samoj sebi možemo premašiti veću. Ako to nije moguće, veličine uopće nemaju konačni omjer (ni racionalan, ni iracionalan).

2) Za negativne je brojeve $q_0 < 0$, dok je za pozitivne $q_0 \geq 0$. Naravno, za $i > 0$ uvijek vrijedi $q_i \geq 1$.

3) Pod uvjetom da je zadnji količnik, u slučaju konačnog postupka, veći od 1 (usp. gore).

4) Dokaz provodimo za poopćene verižne razlomke količnici kojih mogu biti pozitivni *realni* brojevi.