Jovo
Jarić

Mehanika Kontinuuma

GK

Dr Jovo Jarić
Profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Beogradu

MEHANIKA KONTINUUMA

IRO „Građevinska knjiga"
Beograd, 1988.

Recenzenti:

Dr MILAN PLAVŠIĆ, profesor Univerziteta
Dr SLAVKO ĐURIĆ, profesor Univerziteta

ISBN 86-395-0081-9
Za IRO „GRAĐEVINSKA KNJIGA"

MILAN VIŠNJIĆ, glavni urednik — direktor
MILICA DODIĆ, odgovorni urednik
OLGA VASILJEVIĆ, urednik
JOVO KARADŽIĆ, tehnički urednik
DUBRAVKA JURELA-KOVAČEVIĆ, lektor
DRAGOMIR LAZIN, korektor

Tiraž: 1.000 primeraka

Štampa: „MINERVA" — Subotica

PREDGOVOR

Nagli razvoj mehanike kontinuuma početkom 40-tih godina ovog veka uslovio je da se već 1947. godine organizuje nastava iz ove oblasti mehanike na studijskoj grupi za matematiku Prirodno-matematičkog fakulteta u Beogradu. Nastavu iz predmeta *Mehanika neprekidnih sredina* prvi je držao Prof. dr Tatomir P. Anđelić. Po formiranju studijske grupe za mehaniku 1952. godine uvodi se, 1961. godine, na poslediplomskim studijama predmet *Teorijski osnovi mehanike kontinuuma* koji su predavali prof. dr Tatomir P. Anđelić i prof. dr Rastko Stojanović. Na redovnim studijama studijske grupe za mehaniku nastava iz predmeta *Mehanika kontinuuma* uvodi se 1971. godine i drži je prof. dr Rastko Stojanović a od 1972. godine prof. dr Milan Plavšić. Od 1974. godine nastavu iz ovoga predmeta u kontinuitetu drži autor ove knjige.

Ova knjiga je rezultat dugogodišnjih predavanja, koja je autor držao iz predmeta *Mehanika kontinuuma* za studente *Grupe za mehaniku, Instituta za mehaniku* na *Prirodno-matematičkom fakultetu u Beogradu,* kao i naučnih aktivnosti autora u toj oblasti. Pisana je sa osnovnim ciljem — uvođenje u osnove mehanike kontinuuma na način koji čitaocu omogućuje praćenje literature iz ove oblasti mehanike na savremenom nivou. Pri tom su, kao osnovna orijentacija, poslužile dve monografije, obe sadržane u *Enciclopedia of Physics:*

1. *The Clasical Field Theories — C. Truesdell and R. A. Toupin* i

2. *The Non-Linear Field Theories of Mechanics — C. Truesdell and W. Noll,* u daljem, skraćeno. *CFT* i *NLFTM,* respektivno.

Autor se nada da će ova knjiga korisno poslužiti ne samo studentima mehanike na Prirodno-matematičkom fakultetu nego i svima onima koji se u okviru svoje naučne delatnosti, na poslediplomskim studijama i drugi način bave problemima mehanike kontinuuma.

Knjiga se sastoji iz deset poglavlja koja se odnose na fizičke osnove, deformaciju, kretanje, napon, energiju i deformaciju konstitutivne jednačine, elastične materijale, termoelastične i hiperelastične materijale, neke klase prostih fluida i dodatak. Na kraju skoro svakog odeljka dat je određen broj zadataka, kao vežbanje, kojim se ilustruje teorijski deo odeljka. Njihovo samostalno rešavanje omogućuje čitaocu da sagleda do kog stepena je ovladao pređenim gradivom. Dodatak se odnosi na osnove tenzorskog računa, tenzorske funkcije i Pfafove jednačine koje su izložene na način kako se koriste u knjizi a sve u cilju celovitosti izlaganja.

Posebne teškoće pojavile su se pri obeležavanju velikog broja raznorodnih geometrijskih i fizičkih veličina. Samo u izuzetnim slučajevima nije mogla da se izbegne istovetnost obeležavanja, ali i tada je iz konteksta jasno o kojoj veličini je reč.

Pripremajući ovu knjigu autor je imao veliku pomoć od svojih studenata i kolega. Njihova podrška i poverenje bili su najveći stimulans autoru da istraje. Bez toga ove knjige ne bi bilo i autor im se od sveg srca zahvaljuje. Među one koji su u kontinuitetu pratili rad, davali sugestije i čvrsto zastupali svoje stavove u diskusijama navodim moje mlade kolege Dr Zorana Golubovića i Savu Nakićenovića. Prof. dr Marko Leko je svojim primedbama doprinosio preciziranju pojmova i jasnoći stavova. Prof. Dr Predrag Cvetković, Dr Dragoslav Kuzmanović i Mr Aleksandar Sedmak su pregledali pojedine glave, uputili korisne primedbe i sugestije.

Posebnu zahvalnost dugujem prof. Dr Milanu Plavšiću kao i prof. Dr Slavku Đuriću na uloženom trudu pri recenziji knjige. Koristim ovu priliku da se zahvalim prof. Dr Vlatku Brčiću na podršci da se ova knjiga štampa. Osoblje „Građevinske knjige" iz Beograda i štamparija „Minerva" iz Subotice uložili su mnogo truda, volje i razumevanja kako bi knjiga izašla iz štampe što bolje opremljena i što pre, posebno, kada se ima u vidu težina sloga.

Autoru je jasno da, i pored svih nastojanja da do toga ne dođe, mogu postojati određeni propusti i greške. Unapred je zahvalan svima onima koji mu na njih ukažu.

Beograd, Novembar 1987. god. A u t o r

SADRŽAJ

strana

strana

UVOD

Mehanika kontinuuma, s obzirom na predmet svog izučavanja, predstavlja nadgradnju racionalne mehanike ili mehanike konačnog sistema materijalnih tačaka i krutih tela. Mehanika kontinuuma je deo mehanike koji izučava deformabilna tela, tj. tela kod kojih se, u opštem slučaju, rastojanja između čestica tela menjaju; ona izučava deformaciju, naponsko stanje i tečenje realnih tela, tj. čvrstih tela, tečnosti i gasova.

Osnovna pretpostavka od koje se polazi u mehanici kontinuuma je da je materija neprekidno raspoređena u telu. Ova pretpostavka je sadržana i u nazivu predmeta. Kako su realna tela, sa fizičkog stanovišta, korpuskularne prirode to mehanika kontinuuma ne izučava realna tela neposredno, nego njihove modele, kojima se pripisuju određena fizička svojstva realnih tela.

Pretpostavka o neprekidnom rasporedu materije u telu čini, sa teorijskog stanovišta, mehaniku kontinuuma teorijom polja, u smislu da su veličine koje karakterišu telo neprekidne funkcije položaja i vremena. Polja mogu biti pomeranje, gustina, sila, energija itd. Kao teorija polja, mehanika kontinuuma ima svoj jezik izražavanja — tenzorski račun. Zaista, tenzorski račun je prirodni jezik teorije mehanike kontinuuma. Posebno naglašavamo: kao što je bilo koji jezik više nego njegova gramatika, tako je isto i jezik tenzorske analize više od samog obeležavanja, i kao što govor čoveka odiše njegovim načinom mišljenja, tako isto tenzorski račun otelotvoruje misao, ideju. U našem slučaju to je ideja da „fizička" suština ostaje ista, mada njen matematički opis može da se menja. Odatle sledi da mora postojati relacija između dva matematička opisa koja se odnose na istu bit, na istu suštinu, i ta relacija određuje jeziku njegov karakter. Zbog toga se mora imati uvek na umu razlika između tenzora, kao matematičkog objekta koji predstavlja fizičku suštinu, i komponenata tenzora koje imaju puni smisao samo onda kada se zna o kom koordinatnom sistemu je reč.

U najvećem delu mehanike kontinuuma, pored *neprekidnosti*, uvode se još dve dodatne pretpostavke o prirodi materijala: homogenost i izotropnost. Jasno je da su ove tri pretpostavke međusobno nezavisne.

Za materijal kažemo da je *homogen* ako poseduje identičke osobine u svim česticama. Za materijale koji nisu homogeni kažemo da su *nehomogeni*.

Materijal je *izotropan* u odnosu na neku svoju osobinu ako je ona ista u svim pravcima. Za materijale koji nisu izotropni kažemo da su *anizotropni*.

Teorija mehanike kontinuuma se logički može podeliti na tri dela:

1. *Opšti principi* primenljivi na sve vrste neprekidnih sredina. To su opšti zakoni konzervacije i balansa pojedinih fizičkih veličina koji važe za sva tela. Ti zakoni su:

a) zakon konzervacije mase,

b) balans količine kretanja,

c) balans momenta količine kretanja,

d) prvi zakon termodinamike ili zakon balansa energije i

e) drugi zakon termodinamike ili princip entropije.

2. *Konstitutivne jednačine* koje karakterišu pojedine materijale i njihova reagovanja na spoljne efekte sa stanovišta strukture materijala. Osnovni principi važe za sve materijale, nezavisno od njihove strukture. Zbog toga njihovi matematički izrazi nisu dovoljni da bi bilo jednoznačno određeno ponašanje materijala pri dejstvu spoljnih efekata koji se matematički definišu kao granični i početni uslovi. U cilju uzimanja u obzir strukture (konstitucije) raznih materijala, koja karakteriše ponašanje materijala, dužni smo da odredimo dodatne jednačine koje nazivamo konstitutivnim. Drugačije rečeno, osobine materijala se uzimaju u obzir preko odgovarajućih konstitutivnih jednačina za svaki materijal sa konstitutivnim promenljivim ograničenim na domen njihove definisanosti. I dok su osnovni principi zajednički za čvrsta tela, fluide, viskoelastične materijale i materijale drugih fizičkih osobina, njihove konstitutivne jednačine se bitno razlikuju. Domen definisanosti konstitutivnih promenljivih određen je odgovarajućim fizičkim osobinama materijala. Teorija konstitutivnih jednačina zasnovana je na odgovarajućim fizičkim istinama i zahtevima. Na toj osnovi ona se dalje razvija kao matematička teorija. S obzirom da su materijali, za koje se određuju konstitutivne jednačine, predstavljeni svojim matematičkim modelima, konstitutivne jednačine definišu idealan materijal.

3. *Specijalne teorije* svakog idealnog materijala su zasnovane na opštim principima i konstitutivnim jednačinama tog materijala. Takve teorije su: teorija elastičnosti, mehanika fluida, teorija plastičnosti i druge. Svaki od njih, s obzirom na značaj i primenu, predstavlja oblast od zasebnog interesa.

U daljem izlaganju držaćemo se ove podele, kojoj prethode geometrijska i kinematička osnova mehanike deformabilnih tela. Fenomeni koje ćemo izučavati su nerelativistički, a prostor fizičkih događaja je trodimenzionalni euklidski prostor E_3.

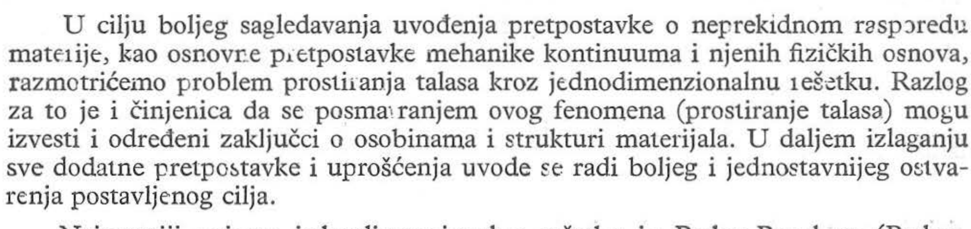
Napominjemo da se mehanika kontinuuma oslanja na rezultate drugih grana fizike, prvenstveno statističke mehanike, s obzirom da najveći deo instrumenata meri srednje statističke vrednosti, koje karakterišu fizičke pojave. Njen pristup je direktan pri ispitivanju fizičkih pojava, pri čemu na svoj način uzima u obzir uticaj mikrostrukture materijala na makroskopske pojave. Ovo mehaniku kontinuuma čini posebnom naučnom disciplinom, koja zajedno sa drugim disciplinama, kao što su kvantna fizika, atomska fizika, termodinamika, kristalografija itd., dovodi do potpunijeg sagledavanja suštine procesa u materiji.

I FIZIČKE OSNOVE

1. PROSTIRANJE TALASA KROZ JEDNODIMENZIONALNU REŠETKU

U cilju boljeg sagledavanja uvođenja pretpostavke o neprekidnom rasporedu materije, kao osnovne pretpostavke mehanike kontinuuma i njenih fizičkih osnova, razmotrićemo problem prostiranja talasa kroz jednodimenzionalnu rešetku. Razlog za to je i činjenica da se posmatranjem ovog fenomena (prostiranje talasa) mogu izvesti i određeni zaključci o osobinama i strukturi materijala. U daljem izlaganju sve dodatne pretpostavke i uprošćenja uvode se radi boljeg i jednostavnijeg ostvarenja postavljenog cilja.

Najprostiji primer jednodimenzionalne rešetke je Baden-Pauel-ov (Baden-Powell) model kod koga su materijalne tačke jednakih masa uniformno raspoređene duž prave linije. Ako orijentisanu pravu (osu) duž koje su raspoređene materijalne tačke jednakih masa m, obeležimo sa x a sa d periodu rešetke (rastojanje između susednih tačaka u položaju ravnoteže), onda je položaj n-te tačke u položaju ravnoteže u odnosu na tačku uzetu za koordinatni početak (sl. 1 a), određenu izrazom $X_n = nd$. Pretpostavimo da je iz bilo kog razloga tačka M_0 pobuđena da harmonijski osciluje oko svog ravnotežnog položaja duž ose x. S obzirom da su tačke bile u položaju stabilne ravnoteže i da su sile sistema elastične sile uzajam-



Sl. 1

nog dejstva susednih materijalnih tačaka, poremećaj koji je izazvao oscilovanje tačke M_0 preneće se i na sve tačke rešetke. Prenošenje poremećaja duž rešetke obrazuje pojavu koju nazivamo talas.

Ako se pomeranje tačaka rešetke vrši u istom pravcu u kome se poremećaj prenosi, talas je longitudinalan. Pri prostiranju transverzalnog talasa, pravac prostiranja talasa je upravan na pravac pomeranja tačaka. Za naša razmatranja nije bitan tip talasa, a zaključci koje budemo izveli, biće opšteg karaktera. Zbog toga, bez gubljenja u opštosti, dalje razmatramo longitudinalne talase.

Položaj tačke M_n, do koje se poremećaj preneo, biće određen sa

$$x_n = X_n + u_n \tag{1.1}$$

gde smo sa u_n označili pomeranje tačke M_n u odnosu na ravnotežni položaj X_n (sl. 1b). S obzirom na uvedene pretpostavke, jednačina oscilovanja tačke M_n je

$$\ddot{u}_n + \omega^2 u_n = 0, \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \tag{1.2}$$

gde je ω kružna frekvencija.

Rešenje diferencijalne jednačine (1.2) tražimo u obliku

$$u_n = Ae^{i(\omega t + \alpha_n)}, \tag{1.3}$$

koji je vrlo pogodan za dalja ispitivanja, pri čemu smo sa A, ω i α_n obeležili amplitudu, kružnu frekvenciju i fazno pomeranje oscilacija (u tački M_n u odnosu na druge tačke rešetke) respektivno. Realni deo jednačine (1.3) predstavlja stvarno rešenje fizičkog problema.

Pomeranje tačke M_0 u bilo kom trenutku t, s obzirom na (1.3), biće određeno izrazom

$$u_0 = Ae^{i\omega t}$$

dok je pomeranje tačke M_n određeno sa

$$u_n = Ae^{i\omega\left(t - \frac{nd}{v}\right)}, \tag{1.4}$$

odakle sledi da fazno pomeranje α_n tačke M_n u odnosu na pomeranje tačke M_0 iznosi $\alpha_n = -\dfrac{nd}{v}$. Ako se zna da su brzina prostiranja talasa v, kružna frekvencija ω, frekvencija učestanosti ν, talasna dužina λ i talasni broj a vezani relacijama

$$v = \lambda\nu, \qquad \omega = 2\pi\nu, \qquad a = \frac{1}{\lambda}, \tag{1.5}$$

onda se (1.4) može izraziti u obliku

$$u_n = Ae^{i(\omega t - kn)} = Ae^{2\pi i(\nu t - and)}, \tag{1.6}$$

gde je $k = 2\pi ad$. Tako uvedena veličina k predstavlja promenu u fazi između pomeranja tačke M_n i susedne tačke M_{n+1}

$$u_{n+1} = u_n e^{-i\kappa}$$

i određena je do na 2π.

Isto rešenje problema, tj. ista pomeranja dobijamo za

$$\begin{aligned} &k \text{ ili } k' = k + 2p\pi \quad \text{i} \\ &a \text{ ili } a' = a + \frac{p}{d}, \end{aligned} \tag{1.7}$$

za svako p iz skupa celih brojeva, što se odmah vidi iz (1.6) i iz činjenice da je

$$e^{-ikn} = e^{-i(k+2m\pi)n}.$$

Jednačine fizičkog problema (1.2) moraju davati iste vrednosti za ω ili ν za svako ekvivalentno k ili k', što znači da su kružna frekvencija ω ili frekvencija učestanosti ν periodične funkcije k ili a

$$\begin{aligned} &\omega = f(k) \text{ periode } 2\pi \text{ po } k = 2\pi a d \\ &\nu = \varphi(a) \text{ periode } \frac{1}{d} \text{ po } a. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Ovo je opšta i direktna posledica diskretnosti strukture jednodimenzione rešetke. S obzirom na periodičnost njene strukture dovoljno je diskutovati osobine funkcija f i φ u intervalu po jedne njihove periode. Najbolji izbor ovih intervala je

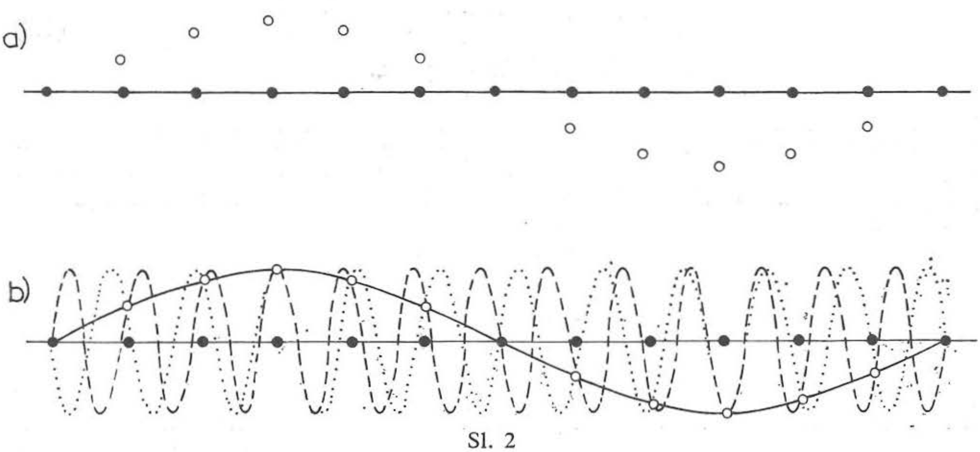
$$\begin{aligned} &-\pi \leqslant k \leqslant \pi \\ &-\frac{1}{2d} \leqslant a \leqslant \frac{1}{2d} \end{aligned} \tag{1.9}$$

pošto se talas uvek prostire na isti način u oba smera. To znači da ove funkcije imaju dodatnu osobinu, tj., da su parne funkcije svojih argumenata. Pozitivno k znači prostiranje talasa u smeru x-ose, a negativno k prostiranje talasa u suprotnom smeru. Ako je k_0 pozitivan broj u intervalu (1.9) koji nazivamo osnovnim intervalom, talas se prostire u smeru x-ose. Isto važi i za $k_0 + 2\pi$, ali je zato $k_0 - 2\pi$ negativno i određuje talas koji se prostire u suprotnom smeru. Prema tome, neodređenost u pogledu prostiranja talasa nije samo u veličinama vrednosti a i k, nego i u smeru prostiranja talasa. Ograničenje na osnovne intervale (1.9) znači

$$\lambda = \frac{1}{|a|} \geqslant 2d, \tag{1.10}$$

iz čega se jasno vidi da je najmanja talasna dužina jednaka dvostrukom rastojanju između čestica i odgovora nekoj kritičnoj frekvenciji ν_{kr} koja je karakteristika strukture.

Fizička neodređenost u pogledu prostiranja talasa, koja proizilazi iz neodređenosti vrednosti k i a, ogleda se u neodređenosti talasne dužine i smera prostiranja talasa. Iz (1.5_3) jasno sledi da ekvivalentnim vrednostima a i a' odgovaraju različite talasne dužine: λ i λ'. Uzimajući sve moguće vrednosti dobijamo sve moguće talasne dužine λ' talasa koji se mogu prostirati kroz rešetku i koji jednako dobro mogu da opisuju kretanje tačaka rešetke. Periodičnost ν kao funkcije a znači da za datu funkciju talasna dužina nije potpuno određena. Neodređenost talasne dužine dovodi do neodređenosti smera prostiranja talasa. Fizički smisao svega iznetog može se potpuno razumeti na osnovu slike 2. Ravnotežni položaji tačaka obeleženi su punim tačkama, dok su njihovi položaji u nekom trenutku poremećaja označeni kružićima (sl. 2a). Kretanje tačaka jednako dobro opisuju tri navedena talasa koji se razlikuju ne samo po talasnoj dužini, već i po smeru prostiranja. Talas označen neprekidnom linijom odgovara vrednosti a u osnovnom intervalu $(1.9)_2$. Iz slike se vidi da je za taj talas $\lambda = 12d$. Kriva naznačena isprekidanom linijom odgovara talasnom broju $a + \frac{1}{d}$ za koji je $\lambda = \frac{12d}{13}$, a tačkasta linija odgovara talasu čiji je talasni broj $a - \frac{1}{d}$, a talasna dužina $\frac{12d}{11}$. Odmah se vidi da se, za dato kretanje tačaka, prva dva talasa prostiru u istom smeru, a treći u suprotnom.



Sl. 2

U slučaju da je struktura rešetke neprekidna, bilo bi $d = 0$, a osnovni interval talasnog broja

$$-\infty < a < \infty$$

s obzirom na $(1.9)_2$. Iz $(1.8)_2$ sledi da tada frekvencija nije periodična funkcija talasnog broja i da je za datu frekvenciju talasna dužina potpuno jednoznačno određena. Postojao bi samo jedan talas koji bi odgovarao datom kretanju tačaka date rešetke. Zaista, kroz poremećene položaje tačaka, neprekidno raspoređenih duž x-ose, moguće je povući samo jednu neprekidnu liniju koja reprezentuje prostiranje talasa. Takva situacija nastaje kada se prostiranje talasa posmatra sa stanovišta makrostrukture jednodimenzionalne rešetke. U tom slučaju ima smisla govoriti o talasu samo sa stanovišta makro pojave. Talasna dužina takvog talasa je mnogo veća od rastojanja d između susednih materijalnih tačaka rešetke. Za takve talase je $a \neq 0$, ali je vrlo malo, što neposredno sledi iz $(1.5)_3$. Slučaj $a = 0$ odgovara beskonačnoj talasnoj dužini, kada se rešetka kao celina pomera tako da se rastojanja između njenih tačaka ne menjaju i frekvencija je nula. To je slučaj krutog pomeranja rešetke.

Prema tome, pretpostavka o neprekidnom rasporedu materije eliminiše svaku neodređenost u pogledu prostiranja talasa, kako u pogledu njegove talasne dužine, tako i u pogledu smera njegovog prostiranja.

2. RAZMATRANJE JEDNAČINA KRETANJA JEDNODIMENZIONALNE REŠETKE

Model rešetke koju ćemo razmatrati dat je u prethodnom odeljku. Pomeranje n-te tačke obeležavamo sa u_n tako da je položaj M_n u nekom trenutku t, x_n, dat sa (1.1). Za razliku od rešetke Buden-Pauela sada pretpostavljamo interakciju između svih tačaka rešetke. Ako položaj $n+q$-te tačke u odnosu na n-tu tačku obeležimo sa $r_{n,n+q}$, iz (1.1) sledi da je

$$r_{n,n+q} = x_{n+q} - x_n = qd + u_{n+q} - u_n \tag{2.1}$$

gde su n i q iz skupa celih brojeva; $r_{n,n+q}$ može da bude i pozitivno i negativno. Energija interakcije između dve tačke se izražava kao potencijalna funkcija koja zavisi samo od rastojanja između tačaka

$$U(r) = U(|x_{n+q} - x_n|). \tag{2.2}$$

Ukupna potencijalna energija rešetke data je sa

$$U = \sum_n \sum_{q>0} U(|x_{n+q} - x_n|) \tag{2.3}$$

gde je q iz skupa prirodnih brojeva čime je obezbeđeno da se interakcija između datog para tačaka uzima samo jedanput. Do iste funkcije moglo se doći uzimanjem sume za sve vrednosti q iz skupa celih brojeva, ali deleći tako dobijeni izraz sa dva. Međutim, gornje ograničenje q ima za prednost pozitivnu vrednost $x_{n+q} - x_n$ tako da se znak apsolutne vrednosti u (2.3) može ispustiti. Za mala pomeranja u_n u odnosu na d može se U razviti u Tejlorov (Taylor) red

$$U(x_{n+q} - x_n) = U(qd) + (u_{n+q} - u_n)\, U'(qd) + \frac{1}{2}(u_{n+q} - u_n)^2\, U''(qd) + \dots$$

gde su

$$U'(qd) = \left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)_{r=qd}, \qquad U''(qd) = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}\right)_{r=qd}, \dots$$

Zamenom gornjeg izraza u (2.3) dobijamo

$$U = \text{Const.} + \sum_n \sum_{q>0} \left[(u_{n+q} - u_n)\, U'(qd) + \frac{1}{2}(u_{n+q} - u_n)^2\, U''(qd) + \dots\right], \tag{2.4}$$

gde je

$$\text{Const.} = \sum_n \sum_{q>0} U(qd) = n \sum_{q>0} U(qd).$$

Sila koja deluje na p-tu tačku rešetke, kao potencijalna sila, dobija se kao parcijalni izvod potencijalne energije po pomeranju ove tačke sa promenjenim znakom

$$F_p = -\frac{\partial U}{\partial u_p}.$$

Pomeranje u_p javlja se u (2.4) u dva slučaja: kada je $n = p$ i $n + q = p$. Za sve ostale vrednosti n i q u (2.4) javljaju se članovi koji ne sadrže u_p. Zbog toga je

$$F_p = -\frac{\partial U}{\partial u_p} = -\frac{\partial}{\partial u_p}\sum_n \sum_{q>0}\Big[(u_{n+q} - u_n)\, U'(qd) + \frac{1}{2}(u_{n+q} - u_n)^2\, U''(qd) +$$

$$+ \ldots\Big] = -\frac{\partial}{\partial u_p}\sum_{q>0}\Big[(u_{p+q} - u_p)\, U'(qd) + \frac{1}{2}(u_{p+q} - u_p)^2\, U''(qd) + \ldots$$

$$\ldots + (u_p - u_{p-q})\, U'(qd) + \frac{1}{2}(u_p - u_{p-q})^2\, U''(qd) + \ldots\Big] =$$

$$= -\sum_{q>0}[- U'(qd) - (u_{p+q} - u_p)\, U''(qd) + \ldots + U'(qd) +$$

$$+ (u_p - u_{p-q})\, U''(qd) + \ldots],$$

ili, konačno

$$F_p = \sum_{q>0} U''(qd)\,(u_{p+q} + u_{p-q} - 2u_p) + \ldots \tag{2.5}$$

Diferencijalna jednačina kretanja tačke M_p je

$$m\ddot{u}_p = F_p. \tag{2.6}$$

Rešenje ove diferencijalne jednačine, u opštem slučaju, se ne može naći u konačnom obliku s obzirom na (2.5). Izraz (2.5) se znatno uprošćava ako pretpostavimo da je uticaj članova $u_{n+q} - u_n$ stepena većeg od dva zanemarljiv u (2.4). Tada je

$$F_p = \sum_{q>0} U''(qd)\,(u_{p+q} + u_{p-q} - 2u_p), \tag{2.7}$$

tj. linearna funkcija pomeranja svih tačaka rešetke. U tom slučaju pretpostavljamo rešenje diferencijalne jednačine (2.6) u obliku

$$u_p = Ae^{2\pi i(\nu t - apd)}. \tag{2.8}$$

Tada je

$$\begin{aligned} u_{p+m} + u_{p-m} - 2u_p &= Ae^{2\pi i(\nu t - apd)}\,(e^{-2\pi i m d a} + e^{2\pi i m d a} - 2) = \\ &= -2u_p\,(1 - \cos 2\pi amd) = \\ &= -4u_p \sin^2 \pi amd, \\ \ddot{u}_p &= -4\pi^2\nu^2 u_p. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Smenom ovih izraza u (2.6) dobijamo

$$m\pi^2\nu^2 = \sum_{s>0} U''(sd)\sin^2 \pi asd =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{s>0} U''(sd)\,(1 - \cos 2\pi asd). \tag{2.10}$$

Jednačina (2.10) predstavlja frekventnu jednačinu. Iz (2.10) se odmah vidi da je ν periodična funkcija a i da ima periodu $\frac{1}{d}$, jer je

$$\nu^2\left(a+\frac{1}{d}\right)=\nu^2(a). \tag{2.11}$$

Frekvencija ν mora biti pozitivna.

S obzirom na prirodu sila interakcije, fizički je sasvim opravdano pretpostaviti da njihovo dejstvo opada sa rastojanjem. U slučaju kada se interakcija između materijalnih tačaka rešetke ograniči na susedne materijalne tačke, (2.10) postaje

$$m\pi^2\nu^2=U''\sin^2\pi ad, \qquad U''=U''(d). \tag{2.12}$$

Fazna brzina rešetke u tom slučaju iznosi

$$V=\frac{|\nu|}{a}=\sqrt{\frac{U''}{m}}\frac{|\sin\pi ad|}{|\pi a|}=d\sqrt{\frac{U''}{m}}\frac{|\sin\pi ad|}{|\pi ad|}. \tag{2.13}$$

Iz (2.13) se vidi da je, u najprostijem slučaju, fazna brzina V funkcija talasnog broja a. Za takve sredine se kaže da su sredine sa disperzijom, a za talase da se prostiru sa disperzijom. U slučaju prostiranja talasa beskonačne talasne dužine, frekvencija je proporcionalna talasnom broju a, što sledi iz (2.12). U tom slučaju fazna brzina V je konstantna i ne zavisi od talasnog broja. Talasi se prostiru konstantnom brzinom i bez disperzije. Sa opadanjem talasne dužine pojavljuje se i uticaj disperzije. To znači da je, u slučaju kontinuuma, disperzija mala.

Na osnovu izloženog sledi zaključak:

Rezultati mehanike kontinuuma su relevantni samo kod pojava koje su obuhvaćene velikim talasnim dužinama i malim disperzijama.

Proučavanje takvih pojava i jeste predmet mehanike kontinuuma. Postojanje oblasti u kojima se teorija mehanike kontinuuma ne može primeniti ni u kom slučaju, ne umanjuje njen značaj u oblastima svoje primene. Time je samo određeno mesto mehanike kontinuuma i njena povezanost sa drugim naučnim disciplinama koje ispituju ponašanje materijalnih sredina.

II DEFORMACIJA

1. TELO. KONFIGURACIJA

Mehanika kontinuuma ne proučava realna tela neposredno. Ona razmatra matematičke modele realnih tela (koje ćemo dalje zvati tela) a kojima se pripisuju određene fizičke osobine realnih tela. Jedna od osobina realnih tela je da zauzimaju oblast prostora E_3. Radi definisanosti kažemo:

> ***Telo*** $\mathcal{B}$ *je skup elemenata, koje nazivamo čestice, a koje se nalazi u obostrano jednoznačnoj korespodenciji sa tačkama* $\boldsymbol{x}$ *u oblasti* R *prostora* E_3. ***Čestica*** X *tela* $\mathcal{B}$ *je osnovni pojam u mehanici kontinuuma kojim se ističe da je materija neprekidno raspoređena u telu, pa prema tome nema značenje materijalne tačke u smislu Njutnove (Newton) mehanike.*

Obostrano jednoznačna korespodencija između čestica X tela $\mathcal{B}$ i tačaka $\boldsymbol{x}$ oblasti R u E_3 ostvaruje se preslikavanjem χ tako da je

$$\boldsymbol{x} = \chi(X), \qquad X = \chi^{-1}(\boldsymbol{x}), \tag{1.1}$$

gde je χ^{-1} inverzno preslikavanje od χ. Tačka $\boldsymbol{x} = \chi(X)$ se naziva *položaj* čestice X, koji ona zauzima u R; $X = \chi^{-1}(\boldsymbol{x})$ je čestica tela $\mathcal{B}$ koja zauzima položaj $\boldsymbol{x}$.

Za preslikavanje χ, kojim se precizira položaj svake čestice tela $\mathcal{B}$ u R kažemo da određuje *konfigraciju tela* $\chi(\mathcal{B})$. Očigledno je $\chi(\mathcal{B}) = R$.

Konfiguracija tela se menja pri kretanju tela. Iako nijedna od mogućih konfiguracija tela ne predstavlja njegovo bitno svojstvo, fizička razmatranja tela se mogu vršiti samo u odnosu na neku njegovu konfiguraciju. Za mnoge naše potrebe pogodno je da se izabere jedna potpuno određena konfiguracija, recimo $\varkappa(\mathcal{B}) = B$ u E_3, identifikujući čestice tela $\mathcal{B}$ sa njihovim položajem u B, tako da je

$$\boldsymbol{X} = \varkappa(X), \qquad X = \varkappa^{-1}(\boldsymbol{X}), \qquad X \in \mathcal{B}, \qquad \boldsymbol{X} \in B. \tag{1.2}$$

Tako izabranu konfiguraciju nazivamo *referentna konfiguracija*.

Za neku drugu referentnu konfiguraciju $\bar{\varkappa}(\mathcal{B})$ biće

$$\bar{\boldsymbol{X}} = \bar{\varkappa}(X), \qquad X = \bar{\varkappa}^{-1}(\bar{\boldsymbol{X}}). \tag{1.3}$$

Iz (1.2) i (1.3) sledi da je

$$\begin{aligned} \bar{\boldsymbol{X}} &= \bar{\varkappa}(X) = \bar{\varkappa}[\varkappa^{-1}(\boldsymbol{X})] \equiv \bar{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{X}), \\ \boldsymbol{X} &= \boldsymbol{X}(\bar{\boldsymbol{X}}) \end{aligned} \tag{1.4}$$

čime je određena veza između dve konfiguracije pri preslikavanju $\varkappa \to \bar{\varkappa}$.

Referentna konfiguracija može biti bilo koja konfiguracija tela u odnosu na koju posmatramo njegovo ponašanje. U slučaju da se za referentnu konfiguraciju bira konfiguracija tela u početnom trenutku, kažemo da je reč o *početnoj konfiguraciji*. Konfiguracija tela u posmatranom trenutku naziva se *trenutna konfiguracija*.

Vrlo često ćemo dalje, u slučaju kada se zna o kom telu je reč, umesto njegove konfiguracije $\chi(\mathcal{B})$ pisati samo χ; u tom slučaju se pod $\varkappa$ podrazumeva njegova referentna konfiguracija $\varkappa(\mathcal{B})$.

Kretanje tela $\mathcal{B}$ je jednoparametarska familija konfiguracija χ_t. Realni parametar t je vreme. Tada je

$$\boldsymbol{x} = \chi_t(X) = \chi(X, t). \tag{1.5}$$

Saglasno sa usvojenom terminologijom $\boldsymbol{x} = \chi(X, t)$ je položaj čestice X tela u trenutku t. U odnosu na referentnu konfiguraciju $\varkappa$ biće

$$\boldsymbol{x} = \chi(X, t) = \chi[\varkappa^{-1}(\boldsymbol{X}), t] \equiv \boldsymbol{x}(\boldsymbol{X}, t). \tag{1.6}$$

Kada želimo da naglasimo konfiguraciju $\varkappa$, u odnosu na koju se posmatra kretanje, pišemo

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_{\varkappa}(\mathbf{X}, t). \tag{1.7}$$

2. ZAJEDNIČKI KOORDINATNI SISTEM

Zahtev da je prostor fizičkih događaja euklidski trodimenzioni povlači za sobom egzistenciju pravouglog Dekartovog (Descartes-Cartesus) koordinatnog sistema, u odnosu na koji se može odrediti položaj bilo koje tačke u E_3. Dekartov sistem pravouglih koordinata karakteriše E_3 i kao takav je privilegovan u odnosu na druge dopustive koordinatne sisteme u E_3 sa stanovišta geometrije prostora. U daljem izlaganju, od beskonačno mnogo međusobno ravnopravnih Dekartovih koordinatnih sistema, biramo jedan, i to jednom za uvek, i nazivamo ga *zajednički koordinatni sistem*. Koordinate tačke u odnosu na tako izabrani koordinatni sistem obeležavaćemo sa Z^K ili z^k, $(k, K = 1, 2, 3)$. Za pojedine koordinate pisaćemo

$$X = Z^1,\ Y = Z^2,\ Z = Z^3 \quad \text{ili} \quad x = z^1,\ y = z^2,\ z = z^3. \tag{2.1}$$

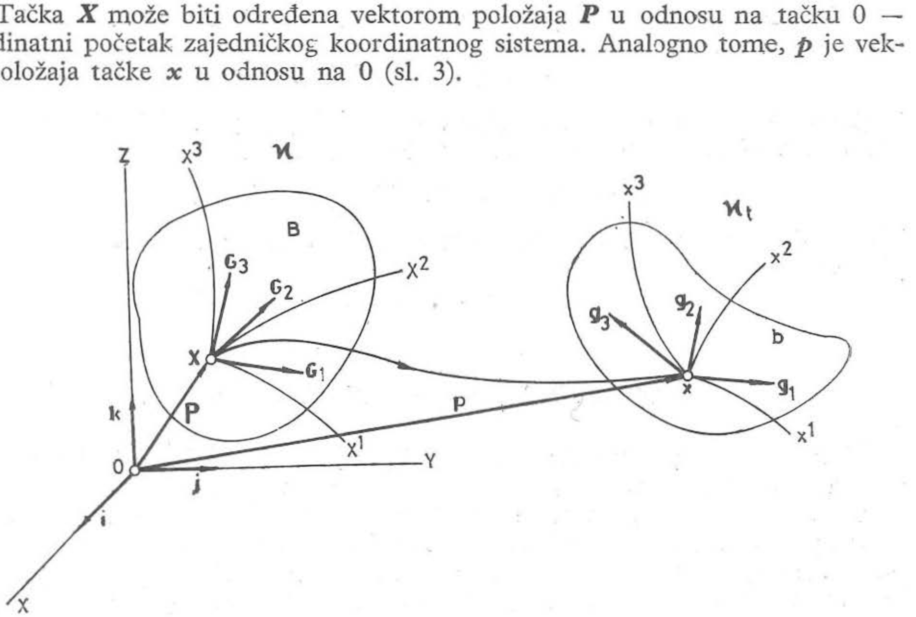
3. KOORDINATNI SISTEMI. DUALNOST

Za opisivanje kretanja materijalnog kontinuuma često je pogodnije koristiti druge koordinatne sisteme, dopustive u E_3. Na primer: ako telo oblika pravouglog paralelepipeda postane kružni cilindar posle deformacije, tada je sistem Dekartovih koordinata pogodan sistem koordinata za nedeformisani paralelepiped, dok je za kružni cilindar pogodniji sistem polarnih cilindarskih koordinata. Na istom primeru se može izvesti zaključak da je nezavisan izbor koordinatnih sistema u nedeformisanoj i deformisanoj konfiguraciji najpogodniji za opisivanje materijalnog kontinuuma. Izbor ovih koordinatnih sistema zavisi od konkretnog problema, kao što je bio slučaj u navedenom primeru.

Za najveći deo potreba pretpostavićemo da je referentna konfiguracija početna konfiguracija, određena oblašću B u E_3, koju telo zauzima u početnom trenutku t_0. Oblast B ima zapreminu V i površ S. Tačka $\boldsymbol{X}$ u B, koja određuje položaj čestice X u B, je određena krivolinijskim koordinatama X^K ($K = 1, 2, 3$). Koordinate X^K (ili Z^K) identifikuju česticu u početnoj konfiguraciji, zbog čega ih nazivamo *materijalne* ili *Lagranžove* (Lagrange) *koordinate* čestice X.

U trenutku t, posle deformacije, čestice tela zauzimaju neku oblast b u E_3, koja ima zapreminu v i graničnu površ $\mathscr{S}$. Čestica X tela $\mathscr{B}$ zauzima položaj $\boldsymbol{x}$ u b. Tačka $\boldsymbol{x}$ je određena novim sistemom krivolinijskih koordinata x^k ($k = 1, 2, 3$) u b. Koordinate x^k (ili z^k) određuju položaj čestice u trenutku t zbog čega ih nazivamo *prostorne* ili *Ojlerove* (Euler) *koordinate.*

Tačka $\boldsymbol{X}$ može biti određena vektorom položaja $\boldsymbol{P}$ u odnosu na tačku 0 — koordinatni početak zajedničkog koordinatnog sistema. Analogno tome, $\boldsymbol{p}$ je vektor položaja tačke $\boldsymbol{x}$ u odnosu na 0 (sl. 3).



Sl. 3

S obzirom na činjenicu da X^K i Z^K određuju koordinate iste tačke $\boldsymbol{X}$, sledi da moraju postojati relacije oblika

$$X^K = X^K(Z^L), \qquad Z^K = Z^K(X^L), \tag{3.1}$$

koje predstavljaju transformacije koordinata tačke $\boldsymbol{X}$ pri prelasku sa jednog sistema koordinata na drugi. Na isti način zaključujemo da su

$$x^k = x^k(z^l), \qquad z^k = z^k(x^l) \tag{3.2}$$

odgovarajuće transformacije koordinata tačke $\boldsymbol{x}$. Koordinatne transformacije (3.1) i (3.2) su definisane za sve tačke u B i b respektivno. Proizvoljnost i nezavisnost izbora sistema koordinata X^K i x^k dovodi do zaključka da bi tako izvedena teorija trebalo da bude kovarijantna pri opštoj koordinatnoj transformaciji

$$\bar{X}^K = \bar{X}^K(X^L), \qquad \bar{x}^k = \bar{x}^k(x^l). \tag{3.3}$$

Transformacije (3.3) ujedno ukazuju da ćemo se u daljem izlaganju neminovno susretati sa dvostrukim tenzorskim poljima.

U cilju veće preglednosti i ekonomičnijeg pisanja odgovarajućih izraza koristićemo se simetričnim formalizmom obeležavanja odgovarajućih veličina definisanih u $\boldsymbol{x}$ i $\boldsymbol{X}$, a koji je nezavisan od izbora koordinata. Sve veličine koje se odnose na $\boldsymbol{X}$ obeležavaćemo velikim slovima. Veličine u $\boldsymbol{x}$ obeležavaćemo malim slovima.

Dualnost. Često će biti preciziran postupak za određivanje nekih veličina, recimo $T^{K\ldots Mk\ldots m}_{N\ldots Pn\ldots p}$ preko informacija u tačkama $\boldsymbol{X}$ i $\boldsymbol{x}$. Ako se, zadržavajući postupak, striktno izmeni uloga tačaka $\boldsymbol{X}$ i $\boldsymbol{x}$, dobićemo veličinu $t^{k\ldots mK\ldots M}_{n\ldots pN\ldots P}$, saglasno sa usvojenim načinom obeležavanja. Tako usvojeni način obeležavanja u ovim slučajevima dovodi nas do *principa dualnosti*:

U svakoj datoj jednačini velika i mala slova se mogu izmeniti.

Pri korišćenju ovog principa izmena mora biti izvršena kako na indeksima (slovima) koji određuju komponente veličine, tako i na slovima kojima se označavaju odgovarajuće veličine, kao što je na prethodnom primeru pokazano. Veličine određene na ovaj način ne predstavljaju, u opštem slučaju, dva matematička opisa iste geometrijske ili fizičke realnosti. Kao očigledan primer mogu da posluže vektori položaja tačaka $\boldsymbol{X}$ i $\boldsymbol{x}$

$$\boldsymbol{P} = P^K \boldsymbol{G}_K = Z^K \boldsymbol{e}_K \qquad \boldsymbol{p} = p^k \boldsymbol{g}_k = z^k \boldsymbol{e}_k, \tag{3.4}$$

gde su

$$\boldsymbol{G}_K \overset{\text{def.}}{=\!=} \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial X^K} \quad \text{i} \quad \boldsymbol{g}_k \overset{\text{def.}}{=\!=} \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial x^k}$$

bazni vektori u $\boldsymbol{X}$ i $\boldsymbol{x}$ respektivno (sl. 3) i gde se, saglasno sa Ajnštajnovom (Einstein) konvencijom, koju dalje koristimo, vrši sabiranje po ponovljenim indeksima. Jasno je da su P^K i p^k kontravarijantne koordinate vektora položaja dve različite tačke prostora E_3.

Drugi primer primene principa dualnosti se odnosi na linijske elemente u $\boldsymbol{X}$ i $\boldsymbol{x}$

$$dS^2 = G_{KL}\, dX^K\, dX^L, \qquad ds^2 = g_{kl}\, dx^k\, dx^l, \tag{3.5}$$

gde su

$$G_{KL} = \boldsymbol{G}_K \cdot \boldsymbol{G}_L \quad \text{i} \quad g_{kl} = \boldsymbol{g}_k \cdot \boldsymbol{g}_l$$

komponente istog metričkog tenzora $\boldsymbol{I}$ u E_3 s obzirom na to da su $\boldsymbol{X}$ i $\boldsymbol{x}$ tačke istog prostora.

Navedimo da je veza između komponenata metričkog tenzora $\boldsymbol{I}$ u $\boldsymbol{X}$, između materijalnih koordinata X^K i Z^K, i u $\boldsymbol{x}$, između prostornih koordinata x^k i z^k, data relacijama

$$G_{KL} = \delta_{PQ} \frac{\partial Z^P}{\partial X^K} \frac{\partial Z^Q}{\partial X^L}, \qquad g_{kl} = \delta_{pq} \frac{\partial z^p}{\partial x^k} \frac{\partial z^q}{\partial x^l} \tag{3.6}$$

gde su δ_{KL} i δ_{kl} komponente osnovnog metričnog tenzora u odnosu na Z^K i z^k respektivno.

Dalji primeri na koje se primenjuje princip dualnosti biće posebno naglašeni.

4. DEFORMACIJA. AKSIOMA NEPREKIDNOSTI

Svaka čestica X tela $\mathcal{B}$ u procesu kretanja prelazi iz početnog položaja $\boldsymbol{X}(Z^K)$ u B u odgovarajući položaj $\boldsymbol{x}\ (z^k)$ u b saglasno jednačinama kretanja

$$z^k = z^k\,(Z^K; t). \tag{4.1}$$

Prema tome, jednačine (4.1) predstavljaju punktualnu (tačkastu) transformaciju tačaka B na b. Ovu transformaciju nazivamo i *deformacijom.*

Uslov da različitim česticama tela $\mathcal{B}$ odgovaraju različiti položaji u B ili b, povlači za sobom egzistenciju inverzne transformacije (4.1) izražene u obliku

$$Z^K = Z^K\,(z^k; t). \tag{4.2}$$

Na taj način dolazimo do *aksiome neprekidnosti*:

Za sve tačke u B i b, izuzev konačnog broja singularnih tačaka, linija i površi, deformacija (4.1) i njena inverzna (4.2) su jednoznačne i diferencijabilne funkcije svojih argumenata do reda koji nam treba.

Sa fizičkog stanovišta ova aksioma izražava stav o *neuništivosti materije*:

Ne postoji pozitivna i konačna zapremina koja se deformiše u nulu ili beskonačno veliku zapreminu.

Prema tome, deformacija (4.1) prevodi svaku oblast u oblast, površ u površ i krivu u krivu. Time se u suštini izražava *princip neprobojnosti materije*:

Jedan deo materije nikad se ne preklapa sa drugim.

Relacije (4.2), koje su inverzne u odnosu na jednačine kretanja (4.1), postoje u B ako i samo ako je

$$J \stackrel{\text{def.}}{=} \left| \frac{\partial z^k}{\partial Z^K} \right| \neq 0 \tag{4.3}$$

za svako $\boldsymbol{X}$ u B. Ovo tvrđenje se zasniva na dobro poznatoj teoremi o implicitnim funkcijama. Bez gubljenja u opštosti mi pretpostavljamo da je

$$0 < J < \infty. \tag{4.4}$$

U odnosu na krivolinijske sisteme X^K i x^k jednačine kretanja (4.1) i njene inverzne (4.2) glase

$$x^k = x^k\,(X^K, t) \qquad X^K = X^K\,(x^k, t). \tag{4.5}$$

Zaista, koristeći (4.1) i $(3.1)_2$ u $(3.2)_1$ dobijamo

$$x^k = x^k\,[z^l\,(Z^L, t)] = x^k\,(Z^L, t) = x^k\,[Z^L\,(X^K), t] = x^k\,(X^K, t).$$

Na isti način se može pokazati da $(4.5)_2$ sledi iz $(3.1)_1$, (4.2) i $(3.2)_2$. Takođe, jakobijan

$$j \stackrel{\text{def.}}{=} \left| \frac{\partial x^k}{\partial X^K} \right| \tag{4.6}$$

i J vezani su relacijom

$$J = \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{G}} j \tag{4.7}$$

jer je

$$J = \left| \frac{\partial z^k}{\partial Z^K} \right| = \left| \frac{\partial z^k}{\partial x^l} \frac{\partial x^l}{\partial X^L} \frac{\partial X^L}{\partial Z^K} \right| = \left| \frac{\partial z^k}{\partial x^l} \right| \left| \frac{\partial x^l}{\partial X^K} \right| \left| \frac{\partial X^L}{\partial Z^L} \right| = \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{G}} j$$

pri čemu smo koristili $(3.2)_2$, $(4.5)_1$, $(3.1)_1$, $(3.6)_{1,2}$ i gde smo sa G i g obeležili

$$G = \det G_{KL} = | G_{KL} | = \left| \frac{\partial Z^K}{\partial X^L} \right|^2, \qquad g = \det g_{kl} = | g_{kl} | = \left| \frac{\partial z^k}{\partial x^l} \right|^2.$$

Iz (4.7) i (4.4) sledi da je

$$0 < j < \infty \tag{4.8}$$

s obzirom na pozitivnu definitnost tenzora g_{kl} i G_{KL} u b i B respektivno.

Jednačine kretanja $(4.5)_1$ omogućuju novu interpretaciju koordinata X^K. U nekom potpuno određenom trenutku t relacije (4.5), s obzirom na (4.8), možemo posmatrati kao koordinatnu transformaciju položaja $\boldsymbol{x}$ čestice X tela $\mathcal{B}$ u b. U tom slučaju se X^K razmatraju kao koordinatne linije u b. Tako definisane koordinatne linije u b su materijalne linije u smislu da su sastavljene od istih čestica tela od kojih su sastavljene i materijalne koordinate X^K u B. Kako relacija (4.8) važi za svako t, to nam omogućuje da X^K u b tumačimo kao materijalne linije u svakom trenutku. Ovakav sistem koordinata je vezan za telo i menja se u zavisnosti od deformacije tela. Zbog toga se naziva *konvektivni ili prevučeni koordinatni sistem.* Razume se da položaj ovih koordinata u prostoru zavisi od izbora konfiguracije tela. U početnoj konfiguraciji sistemi materijalnih i konvektivnih koordinata se poklapaju. U specijalnom slučaju, kada se za prostorne koordinate x^k uzmu konvektivne koordinate X^K, biće

$$x^k = \delta^k_K X^K \tag{4.9}$$

gde je δ^k_K Kronekerov (Kronecker) δ-simbol.

Iz (4.9) se izvodi zaključak:

> *Brojne vrednosti koordinata položaja čestica tela u procesu deformacije ne menjaju se u odnosu na konvektivne koordinate.*

Napomenimo da se konvektivni koordinatni sistem koristio i u mehanici krutog tela. To je pokretni koordinatni sistem koji je kruto vezan za telo i kreće se zajedno sa telom.

5. GRADIJENTI DEFORMACIJE

Uočimo dve bliske čestice tela X_1 i X_2 u $\boldsymbol{X}_1$ i $\boldsymbol{X}_2$ u B. Položaj tačke $\boldsymbol{X}_2$ u odnosu na $\boldsymbol{X}_1$ određen je vektorom položaja $d\boldsymbol{X}\,(dX^K)$. U procesu kretanja, ove čestice se prevode u $\boldsymbol{x}_1$ i $\boldsymbol{x}_2$ u b, tako da je

$$x_2^k - x_1^k = x^k_{;K}\, dX^K + 0\,(|\, d\boldsymbol{X}\,|^2), \tag{5.1}$$

s obzirom na jednačine kretanja (4.5) i aksiomu neprekidnosti. Za dovoljno bliske tačke u B biće bliske i njihove odgovarajuće tačke u b tako da možemo staviti da je $x_2^k - x_1^k = dx^k$. U tom slučaju (5.1) postaje

$$dx^k = x^k_{;K}\, dX^K. \tag{5.2}$$

Veličinu

$$x^k_{;K} = x^k_{,K} \overset{\text{def.}}{=} \frac{\partial x^k}{\partial X^K} \tag{5.3}$$

nazivamo *materijalni gradijent deformacije*. Ova veličina igra fundamentalnu ulogu u analizi lokalnih osobina deformacije. Njoj dualna veličina je *prostorni gradijent deformacije*

$$X^K_{;k} = X^K_{,k} \overset{\text{def.}}{=} \frac{\partial X^K}{\partial x^k}. \tag{5.4}$$

Iz (5.3) i (5.4) neposredno sledi

$$x^k_{;K}\, X^K_{;l} = \delta^k_l, \qquad X^K_{;k}\, x^k_{;L} = \delta^K_L, \tag{5.5}$$

tj. gradijenti deformacije definisani sa (5.3) i (5.4) su inverzni. Lako je pokazati da je

$$X^K_{;k} = \frac{1}{2j}\, \delta^{KLM}_{klm}\, x^l_{;L}\, x^m_{;M}, \tag{5.6}$$

$$\frac{\partial j}{\partial x^k_{;K}} = j X^K_{;k}, \tag{5.7}$$

$$\frac{\partial j^{-1} x^k_{;K}}{\partial x^k} = 0. \tag{5.8}$$

Gradijenti deformacije su dvostruka tenzorska polja. Simbol „ ; " označava totalni kovarijantni izvod dvostrukog tenzorskog polja, za razliku od simbola „ , " kojim se označava parcijalni kovarijantni izvod iste veličine. U slučaju gradijenata deformacije totalni i parcijalni kovarijantni izvodi se poklapaju. Osnovni pojmovi dvostrukih tenzorskih polja dati su u Dodatku.

Za dovoljno glatke deformacije veća tačnost može biti postignuta ako se (5.1) zameni sa

$$x_2^k - x_1^k = x^k_{;K}\, dX^K + \frac{1}{2}\, \frac{\partial^2 x^k}{\partial X^K\, \partial X^M}\, dX^K dX^M + 0\,(|d\mathbf{X}|^3)$$

ili razvijanjem u red višeg stepena. U tom slučaju gradijent deformacije (5.3) nije dovoljan za potpunu analizu deformacije. Za tačnije opisivanje deformacije potrebne su i veličine:

$$x^k_{;KL}, \qquad x^k_{;KLM} \;\ldots \tag{5.9}$$

koje nazivamo gradijent deformacije drugog reda, gradijent deformacije trećeg reda, ... respektivno. Veličinu $x^k_{;K}$ tada nazivamo gradijent deformacije prvog reda. Sve ove veličine su dvostruka tenzorska polja. Njima dualne veličine, sa tenzorskog stanovišta takođe dvostruka tenzorska polja, su

$$X^K_{;kl}, \qquad X^K_{;klm} \;\ldots \tag{5.10}$$

Samo između gradijenata deformacije prvog reda postoje relacije oblika (5.5).

Napomenimo da se u literaturi za materijalni gradijent deformacije koristi oznaka $\boldsymbol{F}$, tj.

$$\boldsymbol{F} = x^k_{;K}\, \boldsymbol{g}_k \otimes \boldsymbol{G}^K. \tag{5.11}$$

Saglasno tom načinu obeležavanja

$$\boldsymbol{F}^{-1} = X^K_{;k}\, \boldsymbol{G}_K \otimes \boldsymbol{g}^k \tag{5.12}$$

predstavlja prostorni gradijent deformacije.

Ako koristimo ovaj način obeležavanja (5.5) možemo pisati u obliku

$$\boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^{-1} = \boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{F} = \boldsymbol{I}. \tag{5.13}$$

I druge relacije se mogu na sličan način izraziti preko $\boldsymbol{F}$.

Na gradijent deformacije, kao regularni tenzor, možemo primeniti teoremu o polarnoj dekompoziciji (videti Dodatak)

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{V}\boldsymbol{R} \tag{5.14}$$

gde su: $\boldsymbol{R}$ ortogonalan, a $\boldsymbol{U}$ i $\boldsymbol{V}$ simetrični i pozitivno definitni tenzori. Na osnovu iste teoreme, $(5.14)_1$ se naziva desna, a $(5.14)_2$ leva dekompozicija tenzora $\boldsymbol{F}$. U mehanici kontinuuma se tenzori $\boldsymbol{U}$ i $\boldsymbol{V}$ nazivaju *desni i levi tenzor izduženja*, respektivno. Kako je $\det \boldsymbol{F} > 0$, što se vidi iz (4.8), sledi da je

$$\boldsymbol{R}\boldsymbol{R}^T = \boldsymbol{R}^T\boldsymbol{R} = \boldsymbol{I}, \qquad \det \boldsymbol{R} = 1. \tag{5.15}$$

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{U}^{-1} = \boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{F}$$

i da $\boldsymbol{R}$ predstavlja rotaciju. Dalje je lako pokazati da je

$$\boldsymbol{U}^2 = \boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F}, \qquad \boldsymbol{V}^2 = \boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^T \tag{5.16}$$

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{U}\boldsymbol{R}^T.$$

O tenzorima $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{V}$ i $\boldsymbol{R}$ biće više reči u odeljcima u kojima se razmatra deformacija i rotacija.

Vežbanja

1. Pokazati da je: a) $(JX^K_{;k})_{;K} = 0$, b) $(J^{-1}x^k_{;K})_{;k} = 0$.
2. Odrediti $X^K_{;kl}$ preko $x^k_{;KL}$ i odgovarajućeg gradijenta prvog reda.
3. Pokazati da je
$$\frac{\partial x^k_{;M}}{\partial X^K_{;m}} = -\, x^k_{;K}\, x^m_{;M}.$$
4. Dokazati da važi (5.8): a) neposrednim diferenciranjem b) korišćenjem relacije
$$j^{-1}\, x^k_{;K} = \frac{1}{2}\, \delta^{klm}_{KLM}\, X^L_{;l}\, X^M_{;m}.$$
5. Dokazati da je
$$\frac{\partial j X^K_{;k}}{\partial X^K} = 0.$$

6. VEKTOR POMERANJA. OPERATOR PARALELNOG POMERANJA

Pomeranje čestice X tela $\mathcal{B}$ iz položaja $\boldsymbol{X}$ u B, u položaj $\boldsymbol{x}$ u b, određeno je vektorom

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{p} - \boldsymbol{P}, \tag{6.1}$$

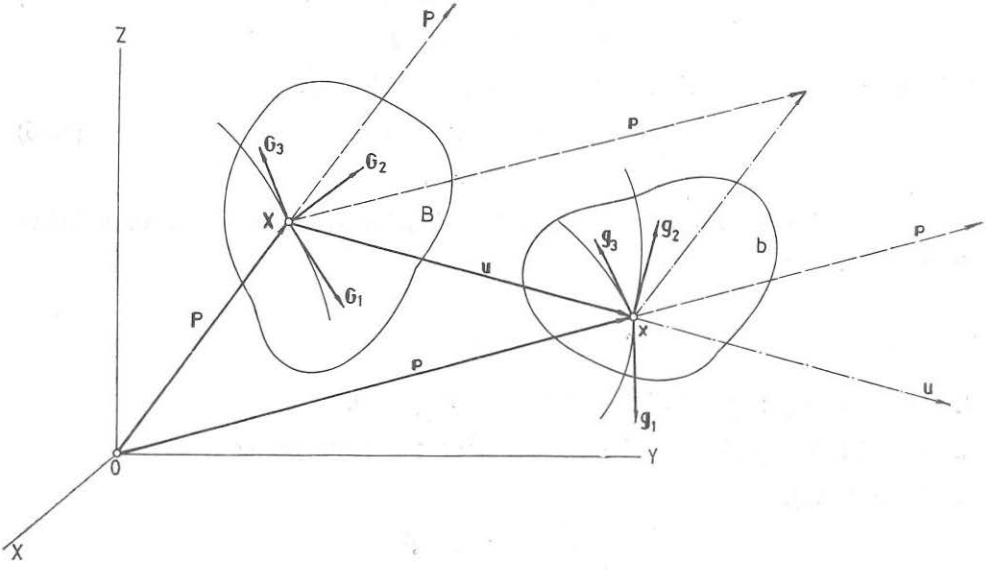
koji nazivamo *vektorom pomeranja* (sl. 4). Vektori pomeranja svih čestica tela određuju polje vektora pomeranja nad B u E_3. Komponente vektora $\boldsymbol{u}$, u odnosu na Dekartov sistem koordinata su

$$u^k = z^k - \delta^k_K Z^K. \tag{6.2}$$

gde je δ^k_K Kronekerov δ-simbol. U odnosu na takav sistem koordinata, komponente vektora $\boldsymbol{u}$ obeležavaćemo sa u_x, u_y i u_z. Saglasno ranijem dogovoru o načinu obeležavanja koordinata tačaka u odnosu na Dekartov sistem koordinata, iz (6.2) sledi

$$u_x = x - X, \qquad u_y = y - Y, \qquad u_z = z - Z. \tag{6.3}$$

Određivanje komponenata vektora $\boldsymbol{u}$ u odnosu na neki drugi dopustivi (u opštem slučaju krivolinijski) sistem koordinata zahteva uvođenje novog sistema veličina kojima se definiše operator paralelnog pomeranja.



Sl. 4

Poznato je iz tenzorskog računa da je upoređivanje i izvođenje operacija nad veličinama, određenim svojim komponentama u odnosu na dopustivi koordinatni sistem datog prostora, moguće samo ako se te veličine dovedu u istu tačku prostora. Dovođenje veličina u neku zajedničku tačku prostora vezano je za paralelno pomeranje veličina u datom prostoru. Prostori kod kojih paralelno pomeranje veličina ne zavisi od puta pomeranja nazivaju se *prostori apsolutnog paralelizma.*

Svi euklidski prostori, pa i E_3, su prostori apsolutnog paralelizma. Prema tome, za određivanje komponenata vektora $\boldsymbol{u}$ u odnosu na koordinatni sistem X^K u B ili x^k u b potrebno je sve veličine u (6.1) dovesti u tačku $\boldsymbol{X}$ ili $\boldsymbol{x}$ respektivno (sl.4).

Tako je

$$\boldsymbol{u} = u^k \boldsymbol{g}_k = u^K \boldsymbol{G}_K \tag{6.4}$$

gde su u^k komponente vektora $\boldsymbol{u}$ u $\boldsymbol{x}$ u odnosu na x^k, a u^K komponente istog vektora u $\boldsymbol{X}$ u odnosu na X^K. Veza između u^k i u^K može se odrediti pomoću recipročnih vektora $\boldsymbol{g}^k$ ili $\boldsymbol{G}^K$ definisanih sa

$$\boldsymbol{g}_k \cdot \boldsymbol{g}^l = \delta^l_k, \qquad \boldsymbol{G}_K \cdot \boldsymbol{G}^L = \delta^L_K. \tag{6.5}$$

Iz (6.4) i (6.5) sledi

$$u^k = g^k_K u^K, \qquad u^K = g^K_k u^k, \tag{6.6}$$

gde je

$$g^k_K (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{x}) \stackrel{\text{def.}}{=} \boldsymbol{G}_K (\boldsymbol{X}) \cdot \boldsymbol{g}^k (\boldsymbol{x}), \qquad g^K_k (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{X}) \stackrel{\text{def.}}{=} \boldsymbol{g}_k (\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{G}^K (\boldsymbol{X}). \tag{6.7}$$

Iz $(6.6)_1$ se vidi da veličine g^k_K određuju komponente vektora $\boldsymbol{u}$ u $\boldsymbol{x}$ preko njegovih komponenata u $\boldsymbol{X}$ pri paralelnom pomeranju $\boldsymbol{u}$ iz $\boldsymbol{X}$ u $\boldsymbol{x}$, tj. g^k_K prevode u^K u u^k pri paralelnom pomeranju $\boldsymbol{u}$ iz $\boldsymbol{X}$ u $\boldsymbol{x}$. Zato se ove veličine i nazivaju *operator paralelnog pomeranja* ili *euklidski operator paralelnog pomeranja*. Iz definicije samog operatora (6.7) sledi da su g^k_K i g^K_k dvostruka tenzorska polja. Poznato je da je

$$\boldsymbol{g}_k = g_{kl} \boldsymbol{g}^l, \qquad \boldsymbol{g}^k = g^{kl} \boldsymbol{g}_l \tag{6.8}$$

$$\boldsymbol{G}_K = G_{KL} \boldsymbol{G}^L, \qquad \boldsymbol{G}^K = G^{KL} \boldsymbol{G}_L \tag{6.9}$$

$$g_{kl}\, g^{lm} = \delta^m_k, \qquad G_{KL}\, G^{LM} = \delta^M_K, \tag{6.10}$$

gde su g^{kl} i G^{KL} kontravarijantne komponente metričkog tenzora. Dalje, iz (3.4) sledi

$$\boldsymbol{g}_k = \frac{\partial z^l}{\partial x^k} \boldsymbol{e}_l, \qquad \boldsymbol{G}_K = \frac{\partial Z^L}{\partial X^K} \boldsymbol{e}_L. \tag{6.11}$$

Ako se iskoristi $(6.8)_2$ i $(6.9)_1$ u (6.7) dobićemo

$$g^k_K = g^{kl} G_{KL} g^L_l \tag{6.12}$$

tj. g^k_K i g^K_k su pridružene veličine i kao takve predstavljaju isti operator paralelnog pomeranja. I veličine

$$g_{kK} (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{X}) = \boldsymbol{g}_k (\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{G}_K (\boldsymbol{X}) = \delta_{qQ} \frac{\partial z^q}{\partial x^k} \frac{\partial Z^Q}{\partial X^K} \tag{6.13}$$

su pridružene veličinama (6.7). Za njihovo izvođenje koristili smo (6.11) kao i činjenicu da je $\boldsymbol{e}_k \cdot \boldsymbol{e}_K = \delta_{kK}$, gde je δ_{kK} Kronekerov δ-simbol.

Za bilo koju tenzorsku veličinu $T^{K \ldots Lk \ldots l}_{M \ldots Nm \ldots n}$ važi, na primer:

$$T^{K \ldots Lk \ldots l}_{M \ldots Nm \ldots n}\, g^P_l\, g^N_q = T^{K \ldots Lk \ldots P}_{M \ldots qm \ldots n} \tag{6.14}$$

pri paralelnom pomeranju ove veličine po odgovarajućim indeksima. Na osnovu svega izloženog možemo izvesti niz relacija između pridruženih veličina g^K_k, g^k_K, g_{kK} i g^{kK}. Ako se $(6.6)_2$ zameni u $(6.6)_1$ dobićemo

$$u^k = g^k_K g^K_l u^l = \delta^k_l u^l.$$

Ove relacije važe za svako u^l, tj. za svako vektorsko polje, odakle sledi da mora biti

$$g^k_K g^K_l = \delta^k_l. \tag{6.15}$$

Lako je pokazati da je i

$$g^k_K g^L_k = \delta^L_K. \tag{6.16}$$

Iz (6.15) i (6.16) neposredno dobijamo

$$g^{kK} g_{lK} = \delta^k_l, \qquad g_{kK} g^{kL} = \delta^L_K. \tag{6.17}$$

Relacije (6.15), (6.16) i (6.17) pokazuju da su odgovarajuće veličine u tim izrazima međusobno inverzne.

Iz (6.15) sledi njoj ekvivalentna relacija

$$G_{KL} g^K_k g^L_l = g_{kl} \tag{6.18}$$

kojom se izražava ranije izneta činjenica da su g_{kl} i G_{KL} komponente istog metričkog tenzora u dvema različitim tačkama $\boldsymbol{x}$ i $\boldsymbol{X}$ prostora izražene u odnosu na dva sistema koordinata.

Ako se izraz

$$\frac{\partial \boldsymbol{g}_k}{\partial x^l} = \begin{Bmatrix} m \\ kl \end{Bmatrix} \boldsymbol{g}_m \tag{6.19}$$

skalarno pomnoži sa $\boldsymbol{G}^K$ i uzme u obzir da je $\dfrac{\partial \mathbf{G}^K}{\partial x^l} = 0$ kao i $(6.7)_2$ dobijamo

$$g^K_{k,l} = \frac{\partial g^K_k}{\partial x^l} - \begin{Bmatrix} m \\ kl \end{Bmatrix} g^K_m = 0. \tag{6.20}$$

Na sličan način se može pokazati da je i $g^K_{k,L} = 0$. Znači: operator paralelnog pomeranja je kovarijantno konstantan. Kao posledica njegove kovarijantne konstantnosti sledi

$$g^K_{k;l} = 0, \qquad g^K_{k;L} = 0, \tag{6.21}$$

tj. totalni kovarijantni izvodi operatora paralelnog pomeranja su jednaki nuli.

S obzirom na ove osobine operatora paralelnog pomeranja, operacije kovarijantnog diferenciranja i paralelnog pomeranja su komutativne, tj.

$$T^{K\ldots Lk\ldots l}_{M\ldots Nm\ldots n;r}\, g^m_R = (T^{K\ldots Lk\ldots l}_{M\ldots Nm\ldots n}\, g^m_R)_{;r}. \tag{6.22}$$

Međutim, u opštem slučaju je

$$T^{\cdots\cdots}_{\cdots\cdots;r}\, g^r_R \neq T^{\cdots\cdots}_{\cdots\cdots;R}. \tag{6.23}$$

Isti zaključci važe i za parcijalni kovarijantni izvod.

U odnosu na sistem Dekartovih koordinata je

$$g^k_K = \delta^k_K, \qquad g^K_k = \delta^K_k, \tag{6.24}$$

jer je $\boldsymbol{e}_k \cdot \boldsymbol{e}_K = \delta^k_K$, $\boldsymbol{e}_k = \boldsymbol{e}^k$ i $\boldsymbol{e}_K = \boldsymbol{e}^K$. U tom slučaju su komponente operatora paralelnog pomeranja iste u svim tačkama prostora. U odnosu na takav sistem koordinata komponente vektora se ne menjaju pri paralelnom pomeranju što sledi iz (6.6) i (6.24).

Vektori položaja $\boldsymbol{P}$ i $\boldsymbol{p}$ mogu se, na osnovu (6.4), pretstaviti u obliku

$$\boldsymbol{P} = P^k \boldsymbol{g}_k = P^K \boldsymbol{G}_K, \qquad \boldsymbol{p} = p^k \boldsymbol{g}_k = p^K \boldsymbol{G}_K, \tag{6.25}$$

gde je, prema (6.6),

$$P^k = g^k_K P^K, \qquad p^K = g^K_k p^k. \tag{6.26}$$

Pomoću (6.4), (6.25) i (6.26) može se (6.1) napisati u komponentalnom obliku

$$u^K = p^K - P^K = g^K_k p^k - P^K, \tag{6.27}$$

$$u^k = p^k - P^k = p^k - g^k_K P^K = g^k_K u^K, \tag{6.28}$$

u tačkama $\boldsymbol{X}$ i $\boldsymbol{x}$ respektivno. U odnosu na Dekartov sistem koordinata ove relacije postaju (6.2).

Ako se $(6.25)_2$ diferencira po X^L dobićemo

$$\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial X^L} = P^K_{,L} \boldsymbol{G}_K = \boldsymbol{G}_L$$

s obzirom na definicije baznih vektora $\boldsymbol{G}_K$ i kovarijantnog izvoda. Iz ove jednakosti dobijamo da je

$$P^K_{;L} = P^K_{,L} = \delta^K_L. \tag{6.29}$$

Na isti način iz $(6.25)_3$ sledi

$$p^k_{;l} = p^k_{,l} = \delta^k_l. \tag{6.30}$$

Koristeći (6.29) i (6.30) lako se pokazuje da je

$$P^K_{;k} = P^K_{;L} X^L_{;k} = X^K_{;k}, \qquad p^k_{;K} = p^k_{;l} x^l_{;K} = x^k_{;K}. \tag{6.31}$$

Jednakosti (6.27) i (6.28) mogu se napisati u ekvivalentnim oblicima

$$p^k = g^k_L (P^L + u^L), \qquad P^K = g^K_l (p^l - u^l), \tag{6.32}$$

iz kojih diferenciranjem dobijamo

$$x^k_{;K} = g^k_L (\delta^L_K + u^L_{;K}), \qquad X^K_{;k} = g^K_l (\delta^l_k - u^l_{;k}), \tag{6.33}$$

pri čemu smo koristili (6.29), (6.30) i (6.31).

Pomoću $(6.33)_1$ može se (5.2) napisati u obliku

$$dx^k = g^k_L (\delta^L_K + u^L_{;K})\, dX^K = g^{kL} (G_{LK} + u_{L;K})\, dX^K. \tag{6.34}$$

Iz (5.2) i (5.5) sledi da je $dX^K = X^K_{;k}\, dx^k$. Ova relacija, pomoću $(6.33)_2$, postaje

$$dX^K = g^K_l (\delta^l_k - u^l_{;k})\, dx^k = g^{Kl} (g_{lk} - u_{l;k})\, dx^k. \tag{6.35}$$

Veličine $u^K_{;L}$ i $u^k_{;l}$ nazivamo *gradijentima vektora pomeranja* i vezane su sa odgovarajućim gradijentima deformacije relacijama (6.33). Važno je uočiti da $u^K_{;L}$ i $u^k_{;l}$ nisu komponente paralelno pomerenih tenzorskih polja što je bio slučaj sa komponentama u^K i u^k.

Vežbanja

1. Odrediti g^k_K, g^K_k i g^{Kk} u razvijenom obliku slično izrazu (6.13) za g_{kK}.
2. Izvesti (6.15), (6.16) i (6.17) koristeći rezultate prethodnog zadatka i (6.13).

3. Izvesti (6.20) na drugi način.
4. Izračunati: a) $P^K_{,k}$; b) $P^K_{;k}$. Na tako dobijene rezultate primeniti princip dualnosti i dati tumačenje dobijenih izraza.
5. Prodiskutovati: $X^K_{;k} g^k_L$ i $x^k_{;K} g^K_l$ sa stanovišta (6.23).
6. Odrediti $u^K_{;L}$ preko $u^k_{;l}$ i pokazati da ove veličine ne predstavljaju komponente istog tenzorskog polja. Uočiti važnost (6.23) u dobijanju ovih relacija.
7. Odrediti $\boldsymbol{g}_k$ preko $\boldsymbol{G}_K$. Šta su koeficijenti razlaganja?
8. Iz (6.23) odrediti gradijente vektora pomeranja preko odgovarajućih gradijenata deformacije.
9. Izvesti (6.29) i (6.30) na drugi način.
10. Pokazati da je $\det g^K_k = \sqrt{\dfrac{g}{G}}$. Dalje, pokazati da je $\boldsymbol{F}=x^k_{;K} g^K_l \, \boldsymbol{g}_k \otimes \boldsymbol{g}^l$ u odnosu na $\boldsymbol{x}$ i $\det \boldsymbol{F} = \det (x^k_{;K} g^K_l) = J$.

7. TENZORI DEFORMACIJE

Već je u uvodu bilo istaknuto da se pri deformaciji tela rastojanja između njegovih čestica, u opštem slučaju, menjaju. Razlika između rastojanja bilo koje dve čestice tela pre i posle deformacije je mera deformacije. Ako je ta razlika jednaka nuli za sve tačke tela, tada nema deformacije, tj. telo se ponaša kao kruto. Znači, da bi znali da li se telo u datom slučaju deformiše ili se ponaša kao kruto, potrebno je uporediti rastojanja čestica tela u procesu kretanja. Kvadrati linijskih elemenata, koji se sastoje od istih čestica, u B i b dati su sa (3.5). Ove veličine možemo uporediti samo ako ih dovedemo u istu tačku prostora, kao što je ranije bilo rečeno. S obzirom na to da su u pitanju skalarne veličine, navedeni zahtev biće ispunjen bez korišćenja operatora paralelnog pomeranja. Kako rezultat poređenja ne zavisi od izbora tačke u prostoru, poželjno je birati one tačke u kojima se ove skalarne veličine na najpogodniji način izražavaju kao funkcije istih promenljivih. U našem slučaju biće to baš tačke $\boldsymbol{X}$ i $\boldsymbol{x}$, ako se uzme u obzir (3.5) i (5.2) kao i njoj inverzna relacija. Smenom (5.2) i njoj inverzne relacije $dX^K = X^K_{;k} dx^k$ u (3.5) dobijamo

$$ds^2 = g_{kl}(\boldsymbol{x})\, dx^k dx^l = C_{KL}(\boldsymbol{X}, t)\, dX^K dX^L, \tag{7.1}$$

$$dS^2 = c_{kl}(\boldsymbol{x}, t)\, dx^k dx^l = G_{KL}(\boldsymbol{X})\, dX^K dX^L, \tag{7.2}$$

gde su

$$C_{KL}(\boldsymbol{X}, t) = g_{kl}(\boldsymbol{x})\, x^k_{;K} x^l_{;L}, \quad c_{kl}(\boldsymbol{x}, t) = G_{KL}(\boldsymbol{X})\, X^K_{;k} X^L_{;l} \tag{7.3}$$

i nazivamo ih respektivno: *Grinov* (Green) *tenzor deformacije* i *Košijev* (Cauchy) *tenzor deformacije*. Tenzori C_{KL} i c_{kl} se nazivaju i *desni Koši-Grinov* (Cauchy-Green) tenzor deformacije i *levi Koši-Grinov* tenzor deformacije, respektivno. Iz (7.1) i (7.2) sledi da su oba ova tenzora simetrična i pozitivno definitna. Ako se X^K razmatraju kao konvektivne koordinate, tada se C_{KL} može interpretirati kao metrički tenzor u b. U početnoj konfiguraciji, u trenutku t_0, C_{KL} postaje G_{KL}. Analogna interpretacija može se dati i za tenzor c_{kl}; metrički tenzor $G_{KL}(\boldsymbol{X})$ se transformiše u procesu kretanja u $c_{kl}(\boldsymbol{x}, t)$.

Veličine inverzne veličinama određene svojim komponentama (7.3) su definisane sa

$$C_{KL}\overset{-1}{C}{}^{LM} = \delta^M_K, \quad c_{kl}\overset{-1}{c}{}^{lm} = \delta^m_k. \tag{7.4}$$

Lako je pokazati, pomoću (7.4) i (5.5) da je

$$\overset{-1}{C}{}^{KL} = g^{kl}X^K_{;k}X^L_{;l}, \quad \overset{-1}{c}{}^{kl} = G^{KL}x^k_{;K}x^l_{;L}. \tag{7.6}$$

Iz (7.3) i (7.5) sledi

$$C^K_L \neq \overset{-1}{C}{}^K_L, \tag{7.6}$$

jer je

$$C^K_L = x^{k;K}x_{k;L}, \quad \overset{-1}{C}{}^K_L = X^{K;k}X_{L;k}. \tag{7.7}$$

Na isti način se može pokazati da je

$$c^k_l \neq \overset{-1}{c}{}^k_l \tag{7.8}$$

gde je

$$c^k_l = X^{K;k}X_{K;l}, \quad \overset{-1}{c}{}^k_l = x^{k;K}x_{l;K}. \tag{7.9}$$

Upoređivanje rastojanja između materijalnih linijskih elemenata pre i posle deformacije moguće je izvesti s obzirom na (7.1) i (7.2). U tom slučaju u izrazu $ds - dS$ javljaće se kvadratni koreni desnih strana (7.1) i (7.2). Iz tih razloga, a bez uticaja na fizička razmatranja, mi definišemo $ds^2 - dS^2$ kao pogodniju meru deformacije. Pomoću (7.1) i (7.2) dobijamo

$$ds^2 - dS^2 = 2E_{KL}(\boldsymbol{X}, t)\, dX^K dX^L = 2e_{kl}(\boldsymbol{x}, t)\, dx^k dx^l \tag{7.10}$$

gde su

$$2E_{KL} = C_{KL}(\boldsymbol{X}, t) - G_{KL}(\boldsymbol{X}), \quad 2e_{kl} = g_{kl}(\boldsymbol{x}) - c_{kl}(\boldsymbol{x}, t). \tag{7.11}$$

Simetrični tenzori E_{KL} i e_{kl} nazivaju se respektivno: *Lagranžov* (Lagrange) i *Ojlerov* (Euler) *tenzor relativne deformacije*.

Relacije (7.11) mogu se izraziti preko gradijenata vektora pomeranja ako se iskoriste izrazi (7.3), (6.33) i (6.18). Tako dobijamo

$$\begin{aligned} 2E_{KL} &= u_{K;L} + u_{L;K} + u_{M;K}u^M_{;L} \\ 2e_{kl} &= u_{k;l} + u_{l;k} - u_{m;k}u^m_{;l}. \end{aligned} \tag{7.12}$$

Iz (7.10) i (5.2) sledi

$$E_{KL} = e_{kl}x^k_{;K}x^l_{;L}, \quad e_{kl} = E_{KL}X^K_{;k}X^L_{;l}. \tag{7.13}$$

Napomenimo da slične relacije između tenzora C_{KL} i c_{kl} ne postoje.

U cilju objašnjenja terminologije označimo, kao što je uobičajeno u literaturi, sa $\boldsymbol{C}$ i $\boldsymbol{B}^{-1}$ desni i levi Koši-Grinov tenzor deformacije, respektivno. Saglasno sa (5.10), (5.11), (5.14), $(7.3)_1$ i $(7.4)_2$ biće

$$\begin{aligned} \boldsymbol{C} &= \boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F} = \boldsymbol{U}^2 \\ \boldsymbol{B} &= \boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^T = \boldsymbol{V}^2. \end{aligned} \tag{7.14}$$

To ujedno i opravdava naziv ovih tenzora s obzirom da se tenzori $\boldsymbol{U}$ i $\boldsymbol{V}$ nazivaju *desni* i *levi tenzori izduženja*, respektivno.

Iz (7.14) i (5.16) vidi se da je

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{C}\boldsymbol{R}^T. \tag{7.15}$$

Ako, dalje, uvedemo oznake $\boldsymbol{E}$ i $\boldsymbol{e}$ za Lagranžov i Ojlerov tenzor relativne deformacije, onda iz (7.11) i (7.13), respektivno, sledi

$$2\boldsymbol{E} = \boldsymbol{C} - \boldsymbol{I}, \quad 2\boldsymbol{e} = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{B}^{-1} \tag{7.16}$$

i

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{F}^T\boldsymbol{e}\boldsymbol{F}, \quad \boldsymbol{e} = (\boldsymbol{F}^{-1})^T \boldsymbol{E}\boldsymbol{F}^{-1}. \tag{7.17}$$

Vežbanja

1. Odrediti (7.12) u odnosu na Dekartov sistem koordinata.
2. Izračunati fizičke komponente E_{Kl} i e_{kl} u odnosu na:
   a) cilindarski polarni koordinatni sistem;
   b) sferni koordinatni sistem.
3. Pokazati da je

$$c^k_m = -\frac{\partial X^{K;k}}{\partial x^{m;K}}, \quad \overset{-1}{c^k_m} = -\frac{\partial x^{k;K}}{\partial X^{K;m}}.$$

4. Izračunati fizičke komponente tenzora $u_{K;L}$ u odnosu na cilindarski polarni i sferni koordinatni sistem.

7a. KRUTO POMERANJE

Kažemo da je telo podvrgnuto krutom pomeranju ako se rastojanja između čestica tela ne menjaju u procesu kretanja, tj. ako je $ds^2 - dS^2 = 0$ za sve čestice tela. Iz (7.10) sledi da je tada

$$E_{KL} = 0 \ \text{ ili } \ e_{kl} = 0 \tag{7a.1}$$

potreban i dovoljan uslov da bi deformacija bila kruto pomeranje. Ekvivalentni uslovi uslovima (7a.1) su, prema (7.11),

$$C_{KL} = G_{KL} \ \text{ ili } \ c_{kl} = g_{kl}. \tag{7a.2}$$

Na osnovu (7a.1) dobijamo odgovarajuće uslove koje moraju zadovoljavati gradijenti pomeranja u slučaju krutog pomeranja, tj.

$$\begin{aligned} u_{K;L} + u_{L;K} + u_{M;K}u^M_{;L} &= 0, \\ u_{k;l} + u_{l;k} - u_{m;k}u^m_{;l} &= 0. \end{aligned} \tag{7a.3}$$

Cilj našeg daljeg izlaganja jeste da se (7a.3) dobiju iz jednačina krutog kretanja tela.

Poznato je da jednačine kretanja pri krutom pomeranju, u odnosu na Dekartove koordinate, glase

$$z^k = z^k(Z^K; t) = Q^k_K(t)\, Z^K + b^k(t), \quad \delta_{kl} Q^k_L Q^l_K = \delta_{KL}, \quad |Q^k_K| = 1, \tag{7a.4}$$

gde vektor $\boldsymbol{b}(b^k)$ definiše translaciju, a ortogonalna matrica $\boldsymbol{Q} = \{Q^k_K\}$ rotaciju tela pri krutom pomeranju. Vektor pomeranja prema (6.2) i (7a.4) je

$$u^k = (Q^k_K - \delta^k_K)\, Z^K + b^k. \tag{7a.5}$$

Ako se ovaj izraz diferencira dobićemo

$$u^k_{;K} = Q^k_K - \delta^k_K,$$

pri čemu smo vodili računa da su Q^k_K i b^k funkcije samo vremena. Ove relacije se mogu napisati u ekvivalentnom obliku

$$Q^k_K = \delta^k_K + u^k_{;K}. \tag{7a.6}$$

Smenom (7a.6) u (7a.4)$_2$ dobijamo

$$\delta_{kl}(\delta^k_K + u^k_{;K})(\delta^l_L + u^l_{;L}) = \delta_{KL}.$$

Ako se uzme u obzir da su δ_{KL} i δ^k_K osnovni metrički tenzor i operator paralelnog pomeranja respektivno u odnosu na Dekartov sistem koordinata, i relacije koje postoje između njih, onda se ove relacije svode na

$$u_{K;L} + u_{L;K} + u_{M;K} u^M_{;L} = 0, \tag*{(7a.3)$_1$}$$

tj. ako se telo kruto pomera, onda gradijent pomeranja mora zadovoljavati (7a.3)$_1$.

Obrnuto, ako se telo kreće tako da gradijenti pomeranja zadovoljavaju (7a.3)$_1$ onda se telo kruto pomera, tj. u tom slučaju jednačine njegovog kretanja su (7a.4).

Pokažimo to. U tom cilju diferencirajmo (7a.3)$_1$. Tako dobijamo

$$u_{K;LM} + u_{L;MK} + u_{P;KM} u^P_{;L} + u_{P;K} u^P_{;LM} = 0. \tag{7a.7}$$

Cikličkom permutacijom indeksa K, L i M iz ovih izraza dobijamo

$$u_{L;MK} + u_{M;LK} + u_{P;LK} u^P_{;M} + u_{P;L} u^P_{;MK} = 0, \tag{7a.8}$$

$$u_{M;KL} + u_{K;ML} + u_{P;ML} u^P_{;K} + u_{P;M} u^P_{;KL} = 0. \tag{7a.9}$$

Ako se (7a.9) i (7a.7) saberu i od tako dobijenog rezultata oduzme (7a.8), dobićemo

$$(\delta^P_K + u^P_{;K})\, u_{P;LM} = 0. \tag{7a.10}$$

Kako je $|\delta^P_K + u^P_{;K}| \neq 0$, s obzirom na (4.8) i (6.33)$_1$, iz (7a.10) sledi

$$u_{P;LM} = 0 \quad \text{ili} \quad u^K_{;LM} = 0. \tag{7a.11}$$

Ovim relacijama je ekvivalentna relacija

$$u^k_{;KL} = 0 \tag{7a.12}$$

prema (6.22). Integracijom (7a.12) dobijamo

$$u^k = C^k_K(t)\, Z^K + C^k(t), \quad u^k_{;K} = C^k_K(t). \tag{7a.13}$$

Smenom ovih izraza u (6.2) imamo

$$z^k = (\delta^k_K + C^k_K)\, Z^K + C^k. \tag{7a.14}$$

Ako beležimo sa

$$Q^k_K = \delta^k_K + C^k_K, \quad b^k = C^k, \tag{7a.15}$$

tada (7a.14) postaje potpuno identičnog oblika kao i $(7a.4)_1$. Međutim,

$$\begin{aligned}\delta_{kl} Q^k_K Q^l_L &= \delta_{kl} (\delta^k_K + \delta^k_K)(\delta^l_L + C^l_L) \\ &= \delta_{KL} + \delta_{KL} (C^k_K \delta^l_L + \delta^k_K C^l_L) + \delta_{kl} C^k_K C^l_L \\ &= \delta_{KL} + \delta_{kl} (u^k_{;K} \delta^l_L + \delta^k_K u^l_{;L}) + \delta_{kl} u^k_{;K} u^l_{;L} \\ &= \delta_{KL},\end{aligned}$$

jer je

$$\delta_{kl} (u^k_{;K} \delta^l_L + \delta^k_K u^l_{;L}) + \delta_{kl} u^k_{;K} u^l_{;L} = u_{K;L} + u_{L;K} + u_{M;K} u^M_{;L} = 0$$

s obzirom na (7a.13) i osobine operatora paralelnog pomeranja. To znači da su Q^k_K, definisani sa $(7a.15)_1$, elementi ortogonalne matrice, i da se jednačine (7a.14) ne svode samo po obliku na $(7a.4)_1$ već zaista predstavljaju *jednačine krutog pomeranja tela*. Time je dokaz završen.

Vežbanje

1. Dokazati da su $(7a.3)_2$ potrebni i dovoljni uslovi da bi kretanje tela bilo kruto pomeranje.

8. TENZORI INFINITEZIMALNE DEFORMACIJE I ROTACIJE

Poznato je da se svaki tenzor drugog reda može jednoznačno predstavljati svojim simetričnim i antisimetričnim delom. Gradijenti pomeranja $u_{K;L}$ i $u_{k;l}$ su tenzori drugog reda i na osnovu prethodnog mogu se predstaviti u obliku

$$u_{K;L} = \bar{E}_{KL} + \bar{R}_{KL}, \quad u_{k;l} = \bar{e}_{kl} + \bar{r}_{kl} \tag{8.1}$$

gde su

$$\bar{E}_{KL} = u_{(K;L)}, \quad \bar{R}_{KL} = u_{[K;L]}, \quad \bar{e}_{kl} = u_{(k;l)}, \quad \bar{r}_{kl} = u_{[k;l]} \tag{8.2}$$

i gde smo sa ( ) označili simetričan deo, a sa [ ] antisimetričan deo gradijenta pomeranja. Ova konvencija označavanja simetričnog i antisimetričnog dela tenzora sa malom i srednjom zagradom, respektivno, po indeksima obuhvaćenim zagradama, ubuduće će važiti za bilo koju tenzorsku veličinu.

Tenzori $\bar{E}_{KL}$ i $\bar{e}_{kl}$ se nazivaju tenzori infinitezimalne deformacije; $\bar{R}_{KL}$ i $\bar{r}_{kl}$ su tenzori infinitezimalne rotacije. Pomoću (8.2) može se (7.12) napisati u obliku

$$\begin{aligned}E_{KL} &= \bar{E}_{KL} + \frac{1}{2} (\bar{E}_{MK} + \bar{R}_{MK})(\bar{E}^M_L + \bar{R}^M_L) \\ e_{kl} &= \bar{e}_{kl} + \frac{1}{2} (\bar{e}_{mk} + \bar{r}_{mk})(\bar{e}^m_l + \bar{r}^m_l).\end{aligned} \tag{8.3}$$

Iz ovih izraza sledi: tenzori infinitezimalne deformacije su linearni delovi tenzora relativne deformacije. U slučaju kada su gradijenti pomeranja mali, prema (7.12) i (8.3), dobijamo

$$E_{KL} \approx \bar{E}_{KL}, \quad e_{kl} = \bar{e}_{kl} \tag{8.4}$$

što je i uslovilo naziv tenzora $\bar{E}_{KL}$ i $\bar{e}_{kl}$. Za tenzore infinitezimalne rotacije ovo objašnjenje će biti dato kasnije.

Važno je uočiti da tenzori $\bar{E}_{KL}$ i $\bar{e}_{kl}$ postoje i pri konačnim deformacijama, ali tada su samo simetrični delovi odgovarajućih gradijenata pomeranja. U tom slučaju, iz (8.3), zaključujemo da $\bar{e}_{kl} = 0$ ne povlači $e_{kl} = 0$, tj. iščezavanje infinitezimalne deformacije nije dovoljno za kruto pomeranje tela. Primetimo da za konačne deformacije tenzori E_{KL} i e_{kl} nisu mere deformacije. Njihova geometrijska interpretacija je vezana za merenje izduženja u datim pravcima. Ako sa $L_{(N)}$ obeležimo izduženje ili elongaciju u pravcu $\boldsymbol{N}$, biće po definiciji

$$L_{(N)} = \frac{dx_K N^N}{|d\boldsymbol{X}|} - 1, \tag{8.5}$$

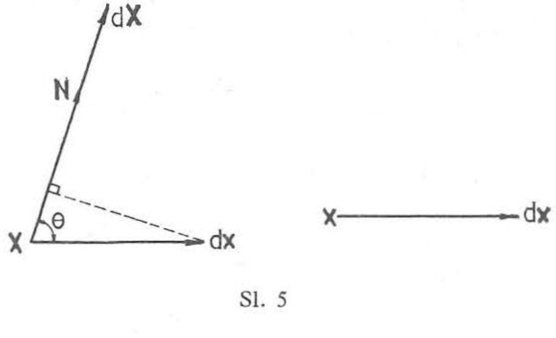
gde smo obeležili sa: $d\boldsymbol{X}$ materijalni linijski element u $\boldsymbol{X}$ koji posle deformacije prelazi u materijalni element $d\boldsymbol{x}$ u $\boldsymbol{x}$. Ako se uzme u obzir da je

$$N^K = \frac{dX^K}{|d\boldsymbol{X}|}, \quad G_{KL} N^K N^L = 1, \quad dx_K = g_{Kk} dx^k, \tag{8.6}$$

onda, s obzirom na $(6.33)_2$, $(8.2)_1$ i $(8.2)_2$ izraz (8.5) postaje oblika

$$L_{(N)} = \bar{E}_{KL} N^K N^L, \tag{8.7}$$

tj. normalna komponenta $\bar{E}_{KL}$ za pravac $\boldsymbol{N}$ je izduženje u tom pravcu. Dualan rezultat važi za e_{kl} (sl. 5).



Sl. 5

Za specijalne slučajeve deformacija izrazi u (8.3) se znatno uprošćuju. Ovi slučajevi zaslužuju posebnu pažnju i biće posebno razmatrani.

9. ANALIZA DEFORMACIJE

Poznato je da se dužina materijalnih linijskih elemenata i njihovi pravci u prostoru menjaju u procesu deformacije. Materijalni linijski element $d\boldsymbol{X}$ u $\boldsymbol{X}$ se deformiše u materijalni element $d\boldsymbol{x}$ u $\boldsymbol{x}$. Kako je (5.2) linearno i homogeno po dX^K

količnik dužina $|d\boldsymbol{x}|/|d\boldsymbol{X}| = ds/dS$ je nezavisan od prvobitne dužine $|d\boldsymbol{X}|$ i za date gradijente pomeranja je funkcija samo pravca $d\boldsymbol{X}$ (sl. 5).

Mi definišemo *izduženje* $\lambda_{(N)}$ *za pravac* $\boldsymbol{N}$ sa

$$\lambda_{(N)} = \frac{ds}{dS}. \tag{9.1}$$

Dogovoreno je da se za izduženje $\lambda_{(N)}$ za dati pravac ne definiše njemu dualni pojam, tj.

$$\lambda_{(N)} = \lambda_{(n)}. \tag{9.2}$$

Dalje ćemo koristiti oznake $\lambda_{(N)}$ ili $\lambda_{(n)}$ da bi naznačili eksplicitno pravac za koji se računa izduženje u tački $\boldsymbol{X}$ ili $\boldsymbol{x}$, respektivno.

Pomoću $(7.1)_2$ i $(8.6)_1$ može se (9.1) napisati kao

$$\lambda^2_{(N)} = C_{KL}N^K N^L, \tag{9.3}$$

tj. normalna komponenta C_{KL} u pravcu $\boldsymbol{N}$ je kvadrat izduženja za dati pravac. Lako se pokazuje da je

$$\lambda^2_{(n)} = \frac{1}{\sqrt{c_{kl}n^k n^l}} \tag{9.4}$$

gde je

$$n^k = \frac{dx^k}{|d\boldsymbol{x}|} = \frac{dx^k}{ds}, \quad g_{kl}n^k n^l = 1. \tag{9.5}$$

Iz (9.1) se vidi da $\lambda_{(N)}$ predstavlja odnos dužina materijalnog linijskog elementa posle i pre deformacije.

Relativni odnos ovih veličina se naziva *specifično izduženje* ili *dilatacija* za pravac $\boldsymbol{N}$ (odnosno $\boldsymbol{n}$) i definiše se sa

$$E_{(N)} = e_{(n)} = \frac{ds - dS}{dS} = \lambda_{(N)} - 1. \tag{9.6}$$

Pomoću (9.3), $(7.11)_1$ i $(8.6)_1$ može se (9.6) napisati u obliku

$$E_{(N)} = \sqrt{1 + 2E_{KL}N^K N^L} - 1. \tag{9.7}$$

Ako je $2E_{KL}N^K N^L \ll 1$, može se (9.7) razviti u red tako da dobijamo

$$E_{(N)} \approx E_{KL}N^K N^L, \tag{9.8}$$

tj. normalna komponenta E_{KL}, pod uslovom da je $2E_{KL}N^K N^L \ll 1$, je dilatacija u datom pravcu. Slične relacije važe i za e_{kl}. Ako se za pravac $\boldsymbol{N}$ uzme pravac Dekartovih osa, onda se lako pokazuje, pomoću (9.3), (9.4) i (9.7), da je

$$\lambda^2_{(K)} = C_{KK}, \quad E_{(K)} \approx E_{KK}, \quad \lambda^{-2}_{(k)} = c_{kk}, \quad e_{(k)} \approx e_{kk} \tag{9.9}$$

za K-tu, odnosno k-tu osu Dekartovih sistema koordinata u $\boldsymbol{X}$ i $\boldsymbol{x}$, respektivno.

U procesu deformacije, u opštem slučaju, telo se menja po obliku, što nije rezultat samo izduženja ili dilatacije materijalnih linijskih elemenata.

Posmatrajmo dva materijalna linijska elementa: $d\boldsymbol{X}_1$ i $d\boldsymbol{X}_2$ u $\boldsymbol{X}$, koji se u $\boldsymbol{x}$ deformišu u elemente $d\boldsymbol{x}_1$ i $d\boldsymbol{x}_2$, respektivno (sl. 6). Jedinični vektori pravaca ovih elemenata su

$$\boldsymbol{N}_\alpha = \frac{d\boldsymbol{X}_\alpha}{|d\boldsymbol{X}_\alpha|}, \quad \boldsymbol{n}_\alpha = \frac{d\boldsymbol{x}_\alpha}{|d\boldsymbol{x}_\alpha|} \quad (\alpha = 1, 2). \tag{9.10}$$

Ako sa $\theta_{(N_1N_2)}$ i $\vartheta_{(n_1n_2)}$ obeležimo uglove koji ovi pravci zaklapaju u $\boldsymbol{X}$ i $\boldsymbol{x}$, tada je

$$\cos\theta_{(N_1N_2)} = \frac{G_{KL}\, dX_1^K\, dX_2^K}{|d\boldsymbol{X}_1|\,|d\boldsymbol{X}_2|} = G_{KL}N_1^K N_2^K \tag{9.11}$$

$$\cos\vartheta_{(n_1n_2)} = \frac{g_{kl}dx_1^k dx_2^k}{|d\boldsymbol{x}_1|\,|d\boldsymbol{x}_2|} = \frac{C_{KL}N_1^K N_2^L}{\lambda_{(N_1)}\,\lambda_{(N_2)}} \tag{9.12}$$

na osnovu (9.10), (5.2), (7.3) i (9.1).

Smicanje u ravni, koja je određena sa $\boldsymbol{N}_1$ i $\boldsymbol{N}_2$, definiše se razlikom uglova koji obrazuju materijalni linijski elementi ravni pre i posle deformacije, tj.

$$\Gamma_{(N_1N_2)} = \gamma_{(n_1n_2)} = \theta_{(N_1N_2)} - \vartheta_{(n_1n_2)}. \tag{9.13}$$

Napominjemo da se ovim načinom obeležavanja ističe samo izbor predstavljanja date veličine u odnosu na materijalni ili prostorni sistem koordinata u tačkama $\boldsymbol{X}$ i $\boldsymbol{x}$ respektivno, ali ne i dualna reprezentacija. Prema tome, smicanje pravaca $\boldsymbol{N}_1$ i $\boldsymbol{N}_2$ je promena njihovog relativnog položaja pre i posle deformacije.

Iz (9.13) i (9.12) dobijamo

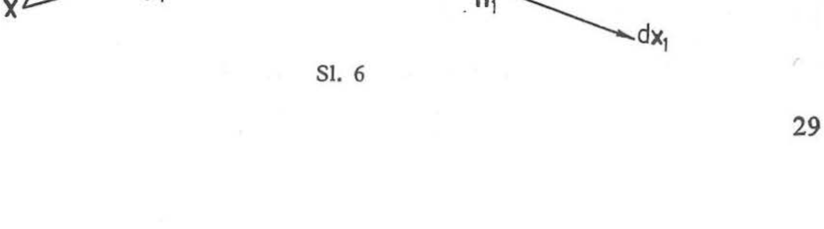
$$\sin\gamma_{(N_1N_2)} = H\sin\theta_{(N_1N_2)} - \sqrt{1 - H^2}\cos\theta_{(N_1N_2)},$$

gde je $H = \cos\vartheta_{(n_1n_2)}$.

Za ortogonalne pravce, tj. za $\cos\theta_{(N_1N_2)} = 0$, biće

$$\sin\Gamma_{(N_1N_2)} = H = \frac{1}{\lambda_{(N_1)}\,\lambda_{(N_2)}} C_{KL}N_1^K N_2^L, \tag{9.14}$$

odakle sledi: za ortogonalne pravce $C_{KL}N_1^K N_2^L = 0$ predstavlja potreban i dovoljan uslov da nema smicanja u tim pravcima.



Sl. 6

U slučaju da su $\boldsymbol{N}$ pravci Z^K i Z^L $(K \neq L)$ osa Dekartovog koordinatnog sistema, biće $N_\alpha^M = \delta_\alpha^M$ $(\alpha = M, L)$. Koristeći $(9.9)_1$, iz $(9.14)_1$ sledi da je

$$\sin \gamma_{(KL)} = H = \frac{C_{KL}}{\sqrt{C_{KK} C_{LL}}}. \tag{9.15}$$

Ova jednakost može se pomoću $(9.9)_1$, (9.6) i $(7.11)_1$ napisati u obliku

$$\sin \gamma_{(KL)} = \frac{\delta_{KL} + 2E_{KL}}{(1 + E_{(K)})(1 + E_{(L)})}$$

ili

$$2E_{KL} = (1 + E_{(K)})(1 + E_{(L)}) \sin \gamma_{(KL)}, \quad (K \neq L). \tag{9.16}$$

Kada su dilatacije $E_{(K)}$ i $E_{(L)}$ male u odnosu na jedinicu, (9.16) postaje

$$2E_{KL} \approx \sin \gamma_{(KL)}, \quad (K \neq L). \tag{9.17}$$

Za vrlo mala smicanja može se pisati $\sin \gamma_{(KL)} \approx \gamma_{(KL)}$ tako da (9.17) glasi

$$2E_{KL} \approx \gamma_{(KL)}, \quad (K \neq L), \tag{9.18}$$

tj. u slučaju infinitezimalnih deformacija smicanje je jednako dvostrukoj vrednosti odgovarajućih smičućih komponenata tenzora relativne deformacije.

Na isti način se može pokazati da je smicanje za pravce z^k i z^l

$$\sin \gamma_{(kl)} = -\frac{c_{kl}}{\sqrt{c_{kk} c_{ll}}}, \quad (k \neq l). \tag{9.19}$$

Za male dilatacije i mala smicanja (9.19) postaje

$$\gamma_{(kl)} \approx 2e_{kl}, \quad (k \neq l). \tag{9.20}$$

Izrazi (9.15) i (9.19) su opštijeg karaktera i važe i za sisteme ortogonalnih krivolinijskih koordinata X^K i x^k respektivno, tj. (9.15) određuje smicanja između pravaca koordinatnih linija X^K i X^L, $(K \neq L)$ u $\boldsymbol{X}$, a (9.19) smicanje između pravaca koordinatnih linija x^k i x^l, $(k \neq l)$ u $\boldsymbol{x}$.

Dosadašnje izlaganje o analizi deformacije vezano je za definiciju određenih veličina koje karakterišu deformaciju. U izvedenim izrazima, pomoću kojih se ove veličine određuju, jasno se vidi uloga i značaj tenzora deformacije: C_{KL}, c_{kl}, E_{KL} i e_{kl}. Veličine koje karakterišu deformaciju mere se pomoću ovih tenzora. Zato se ovi tenzori i nazivaju merama deformacije. Tenzori C_{KL} i E_{KL} su mere deformacije u $\boldsymbol{X}$; tenzori c_{kl} i e_{kl} u $\boldsymbol{x}$. Gradijenti deformacije $x^k_{;K}$ su veličine koje mere deformaciju u $\boldsymbol{X}$ i $\boldsymbol{x}$, s obzirom na (5.5). Slične relacije ne postoje između tenzora C_{KL} i c_{kl}. Između tenzora E_{KL} i e_{kl} postoje relacije (7.13), ali preko gradijenata deformacije. Zato su gradijenti deformacije fundamentalne veličine za analizu lokalnih osobina deformacije.

Moguće je u analizi deformacije koristiti i druge mere deformacije. Za pojedine probleme posebne mere deformacije mogu se pokazati vrlo pogodne. Takve mere deformacije, u opštem slučaju, ne moraju biti pogodne za druge vrste problema. Navedene mere deformacije C_{KL} i c_{kl} su opšteg karaktera. Međutim, nisu jedinstvene. Na osnovu *teoreme o ekvivalenciji*: svaka jednoznačno invertibilna izotropna tenzorska funkcija drugog reda od c_{kl} je mera deformacije u $\boldsymbol{x}$; od C_{KL}

u $\boldsymbol{X}$. Tako određene mere deformacije su ekvivalentne sa c_{kl}, tj. sa C_{KL}. Mere deformacije ne moraju biti tenzorskog karaktera. Takve mere ne pružaju nikakvu prednost, ali često dovode do konfuzije. Izrazi, koji su izvedeni za izduženje, dilataciju i smicanje, ne samo da ističu ulogu tenzora deformacija C_{KL}, c_{kl}, E_{KL} i e_{kl}, nego nam omogućuju i njihovu geometrijsku interpretaciju. Njihove normalne komponente se odnose na izduženje i dilataciju, a smičuće na smicanje. U slučaju konačnih deformacija same smičuće komponente nisu dovoljne da se odredi smicanje, što se jasno vidi iz (9.12). Na osnovu ovih geometrijskih razmatranja, zaključujemo da će deformacija biti kruto pomeranje ako su dilatacija i smicanje za sve pravce u svim tačkama tela jednaki nuli. U tom slučaju, iz izraza za dilataciju i smicanje, ponovo dobijamo relacije (7a.1) i (7a.2).

Napomena. Za bilo koji simetričan tenzor $\boldsymbol{A}$ u matematičkoj literaturi usvojena je sledeća terminologija:

— skalar $a_{kl}m^k m^l$, gde je $\boldsymbol{m}$ jedinični vektor, naziva se *normalna komponenta tenzora* $\boldsymbol{A}$ za pravac $\boldsymbol{m}$.

— skalar $a_{kl}m^k n^l$, gde su $\boldsymbol{m}$ i $\boldsymbol{n}$ jedinični vektori ($\boldsymbol{m} \neq \boldsymbol{n}$), naziva se *smičuća komponenta tenzora* $\boldsymbol{A}$ za pravce $\boldsymbol{m}$ i $\boldsymbol{n}$. Ako su $\boldsymbol{m}$ i $\boldsymbol{n}$ međusobno upravni vektori, onda se $a_{kl}m^k n^l$ naziva *ortogonalna smičuća komponenta tenzora* $\boldsymbol{A}$.

S obzirom na geometrijsko značenje tenzora deformacije, u inženjerskoj literaturi na našem jeziku, uobičajeno je da se smičuće komponente tenzora deformacije nazivaju *klizanje*, za razliku od odgovarajućih komponenata tenzora napona (o čemu će kasnije biti više reči), koje se nazivaju *smičući naponi*.

10. ELIPSOIDI DEFORMACIJE I GLAVNA IZDUŽENJA

a) Geometrijski prilaz

Kažemo da nam je poznato stanje deformacije tela ako znamo dilataciju i smicanje za sve moguće pravce svake čestice tela. Stanje lokalne deformacije u okolini tačke $\boldsymbol{X}$ ili $\boldsymbol{x}$ je polazni osnov pri tom razmatranju, i u cilju njenog boljeg i jasnijeg sagledavanja koristićemo geometrijski prilaz Košija, koji se može primeniti na svaki simetričan tenzor drugog reda.

Infinitezimalna sfera u $\boldsymbol{X}$ data je sa

$$G_{KL}dX^K dX^L = dS^2 = K^2. \tag{10.1}$$

Deformacijom tela, određenom sa $(4.5)_1$, ova sfera se prevodi u površ u tački $\boldsymbol{x}$.

$$c_{kl}dx^k dx^l = dS^2 = K^2. \tag{10.2}$$

S obzirom na pozitivnu definitnost c_{kl}, površ drugog reda (10.2) je elipsoid i naziva se *materijalni elipsoid deformacije*. Primenom principa dualnosti infinitezimalna sfera u $\boldsymbol{x}$

$$g_{kl}dx^k dx^l = ds^2 = k^2 \tag{10.3}$$

prevodi se, inverznim preslikavanjem $(4.5)_2$, u kvadratnu površ

$$C_{KL}dX^K dX^L = ds^2 = k^2, \tag{10.4}$$

koja se naziva *prostorni elipsoid deformacije*.

Da bismo imali jasniju predstavu kako se pojedini linijski elementi infinitezimalne sfere (10.1) prevode u odgovarajuće elemente materijalnog elipsoida deformacije (10.2), uočimo dva upravna linijska elementa $d\boldsymbol{X}_1$ i $d\boldsymbol{X}_2$ u $\boldsymbol{X}$ tako da je

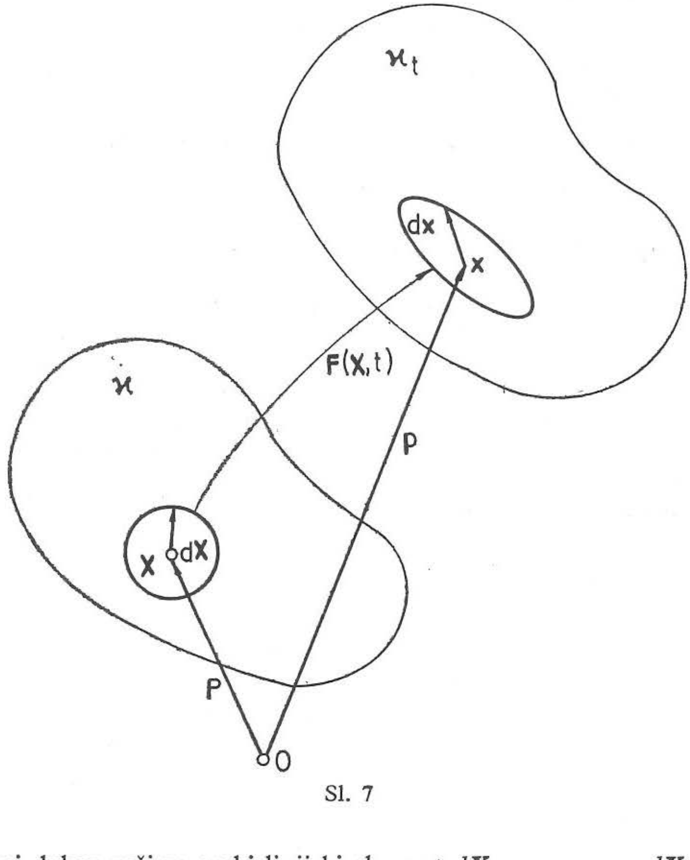
$$G_{KL} dX_1^K dX_2^L = 0. \tag{10.5}$$

Njima odgovarajući linijski elementi su $d\boldsymbol{x}_1$ i $d\boldsymbol{x}_2$, pri čemu je $dX_\alpha^K = X_{;k}^K dx_\alpha^k$ $(\alpha = 1, 2)$. U $\boldsymbol{x}$ relacije (10.5) i $(7.3)_2$ daju

$$c_{kl} dx_1^k dx_2^l = 0, \tag{10.6}$$

koja tvrdi da je gradijent vektor $2c_{kl} dx_1^k$ elipsoida deformacije u kraju vektora dx_1^k upravan na vektor dx_2^k (sl. 8), a što predstavlja ujedno dokaz *Košijeve fundamentalne teoreme*:

> *Normalni poluprečnici infinitezimalne sfere u* $\boldsymbol{X}$ *se deformišu u konjugovane poluprečnike materijalnog elipsoida u* $\boldsymbol{x}$.



Sl. 7

Izvedeni dokaz važi za svaki linijski element $d\boldsymbol{X}_2$ upravan na $d\boldsymbol{X}_1$. Skup svih takvih elemenata definiše ravan upravnu na $d\boldsymbol{X}_1$. Pri deformaciji svaki od tih elemenata prelazi u konjugovani poluprečnik elipsoida deformacije na osnovu izvedenog dokaza. Prema tome, Košijeva teorema može se izraziti u ekvivalentnom obliku:

*Svaki linijski element i njegova upravna ravan infinitezimalne sfere u **X** deformišu se u linijski element i njegovu konjugovanu ravan elipsoida deformacije u **x**.*

Poznato je da elipsoid ima najmanje tri konjugovana poluprečnika koji su međusobno upravni i koji definišu glavne ose elipsoida. Na osnovu Košijeve teoreme sledi:

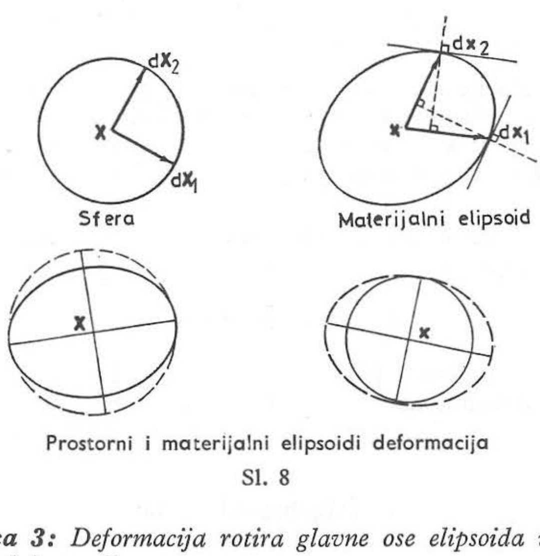
posledica 1: *U **X** postoje najmanje tri uzajamno upravna poluprečnika infinitezimalne sfere koji ostaju upravni i posle deformacije i obrazuju glavne ose elipsoida deformacije u **x**.*

Drukčije rečeno, međusobni položaj ovih poluprečnika ne menja se deformacijom. Ali tada, prema (9.19), važi

posledica 2: *U odnosu na glavne ose elipsoida deformacije mešovite komponente c_{kl} $(k \neq l)$ su jednake nuli.*

Isto se može pokazati i za e_{kl} $(k \neq l)$.

Sve što je do sada rečeno važi i za prostorni elipsoid deformacije, s obzirom na njegovu dualnost u odnosu na materijalni elipsoid deformacije. U tom slučaju uloge pravaca se menjaju, tj. glavne ose materijalnog elipsoida deformacije u **x** definišu pravce tri upravna poluprečnika infinitezimalne sfere u **x**, a odgovarajući pravci tri upravna poluprečnika infinitezimalne sfere u **X** definišu glavne ose prostornog elipsoida deformacije u **X** (sl. 8). Odavde sledi nova posledica Košijeve teoreme,



Prostorni i materijalni elipsoidi deformacija

Sl. 8

posledica 3: *Deformacija rotira glavne ose elipsoida u **X** u glavne ose elipsoida deformacije u **x**.*

Tačnost ove posledice zasniva se na pretpostavci da su dužine glavnih osa elipsoida deformacije u **x** različite, pa prema tome da su glavne ose elipsoida jednoznačno definisane. U slučaju da su dve glavne ose elipsoida deformacije u $\boldsymbol{x}$ jednakih dužina, površ (10.2) je obrtni elipsoid deformacije. U tom slučaju u $\boldsymbol{X}$ postoji ravan upravna na pravac, koji posle deformacije u $\boldsymbol{x}$ određuje osu rotacije obrtnog elipsoida deformacije. U toj ravni bilo koja dva upravna pravca u $\boldsymbol{X}$ određuju glavne ose elipsoida deformacije. Treća osa je osa rotacije.

Kada su dužine sve tri ose materijalnog elipsoida deformacije jednake, elipsoid postaje sfera. Tada bilo koji sistem od tri međusobno upravna pravca definiše glavne ose.

Glavne ose elipsoida deformacije u $\boldsymbol{x}$ i $\boldsymbol{X}$ se nazivaju i *glavni pravci deformacije*. Prema tome, u svakoj tački postoji najmanje tri glavna pravca deformacije. Razlog za ovaj naziv je sledeći:

— poluprečnici infinitezimalne sfere u $\boldsymbol{X}$ deformišu se u poluprečnike elipsoida u $\boldsymbol{x}$. Odnos njihovih dužina je izduženje $\lambda_{(N)}$, saglasno definiciji izduženja za dati pravac. Izduženja za razne pravce u $\boldsymbol{X}$ se menjaju kao rastojanja od $\boldsymbol{x}$ do odgovarajućih tačaka na površi elipsoida deformacije. Prema tome, izduženja su raspoređena simetrično oko glavnih osa.

Izduženja u pravcima glavnih osa elipsoida deformacije su karakteristična, zbog čega se ovi pravci nazivaju glavni pravci deformacije.

Na osnovu toga može se izvesti zaključak da su izduženja proporcionalna poluprečnicima elipsoida deformacije. Kako se dužine glavnih osa elipsoida mogu urediti po veličini, na osnovu iznetog sledi *II Košijeva fundamentalna teorema:*

> *U bilo kojoj tački* $\boldsymbol{X}$ *postoji najmanje jedan skup od tri međusobno upravna pravca tako da izduženje za jedan nije manje od izduženja za bilo koji drugi pravac izduženja, za drugi nije veće od izduženja za bilo koji drugi pravac i izduženje za treći je minimax. Ako ih uredimo po veličini tako da je* $\lambda_{(1)} \geqslant \lambda_{(2)} \geqslant \lambda_{(3)}$, *onda je njihov odnos* $\lambda_{(1)} : \lambda_{(2)} : \lambda_{(3)}$ *isti kao i dužine odgovarajućih osa elipsoida.*

Izduženja za glavne ose elipsoida se nazivaju *glavna izduženja*. Glavna izduženja su najvažnije veličine vezane za deformaciju. Poznavanje položaja glavnih pravaca deformacije, u $\boldsymbol{x}$ ili $\boldsymbol{X}$, i veličina tri glavna izduženja omogućuje nam konstrukciju elipsoida deformacije, pa prema tome i izduženja uopšte kao funkcije pravca.

Dilatacije koje odgovaraju glavnim izduženjima nazivaju se *glavne dilatacije*. U specijalnom slučaju kada su glavna izduženja u $\boldsymbol{X}$

$$\lambda_{(\alpha)} = 1, \quad (\alpha = 1, 2, 3) \tag{10.7}$$

deformacija je lokalno kruto pomeranje. Odavde sledi zaključak: (10.7) predstavlja potrebne i dovoljne uslove da bi deformacija bila lokalno kruta. Ako (10.7) važi za svaku tačku, tada je deformacija tela kruto pomeranje. Važi i obrnuto.

b) Algebarski prilaz

Problem određivanja glavnih izduženja se svodi na određivanje glavnih pravaca deformacije. Izduženja za glavne pravce deformacije imaju ekstremne vrednosti. Nalaženje pravaca za koje

$$\lambda^2_{(N)} = C_{KL} N^K N^L \tag{9.3}$$

ima ekstremne vrednosti svodi se na određivanje vezanog ekstremuma $\lambda^2_{(N)}$, jer je

$$N^K = \frac{dX^K}{dS}, \quad G_{KL}N^K N^L = 1. \tag{8.6}$$

Pogodan metod za njegovo određivanje je Lagranžov metod množitelja veze, na osnovu koga je

$$\frac{\partial \lambda^2_{(N)}}{\partial N^M} = \frac{\partial}{\partial N^M} [C_{KL}N^K N^L - C(C_{KL}N^K N^L - 1)] = 0, \tag{10.8}$$

gde je C — Lagranžov neodređeni množitelj veze $(8.6)_2$. Iz (10.8) se dobija

$$(C_{KL} - CG_{KL})\, N^L = 0, \tag{10.9}$$

koja predstavlja sistem tri linearne i homogene jednačine po N^L. Ovom sistemu jednačina odgovara ekvivalentan sistem

$$(C^K_L - C\delta^K_L)\, N^L = 0, \tag{10.10}$$

koji je pogodniji za rešavanje. Netrivijalno rešenje ovih jednačina postoji samo ako je determinanta sistema jednaka nuli, tj.

$$|C^K_L - C\delta^K_L| = 0. \tag{10.11}$$

Ova jednačina, poznata pod imenom *karakteristična jednačina*, u razvijenom obliku glasi:

$$C^3 - I_C C^2 + II_C C - III_C = 0, \tag{10.12}$$

gde su

$$I_C = C^K_K, \quad II_C = \frac{1}{2!}\,\delta^{KM}_{LN}\, C^L_K C^N_M, \quad III_C = \det\|C^L_K\| = \frac{1}{3!}\,\delta^{KMP}_{LNQ}\, C^L_K C^N_M C^Q_P \tag{10.13}$$

prva, druga i treća glavna invarijanta tenzora deformacije C^L_K, a δ^{KM}_{LN} i δ^{KMP}_{LNQ} generalisani Kronekerovi δ-simboli. Rešenja karakteristične jednačine C_α ($\alpha = 1, 2, 3$) se nazivaju *karakteristični brojevi*. Svakom karakterističnom broju odgovara *karakteristični pravac* N^K. Različitim karakterističnim brojevima odgovaraju različiti karakteristični pravci. S obzirom na činjenicu da je C_{KL} simetrično, realno i pozitivno definitno, važe sledeće teoreme:

Teorema 1: *Karakteristični brojevi su realni.*

Dokaz:

Pretpostavimo obrnuto, tj. da postoji bar jedan karakterističan broj, recimo C_1, koji nije realan. Tada je C_1 kompleksan broj i može se pisati

$$C_1 = A + iB, \qquad i = \sqrt{-1}.$$

Njemu odgovarajući karakteristični pravac je N^K_1, koji prema (10.9) predstavlja rešenje sistema jednačina

$$(C_{KL} - C_1 G_{KL})\, N^L_1 = 0.$$

S obzirom na C_1 i komponente pravca N^K_1 biće kompleksni brojevi, tj.

$$N^K_1 = P^K + iQ^K.$$

Smenom ovih izraza i C_1 u gornjem sistemu jednačina i izjednačavajući sa nulom njen realni i imaginarni deo, dobijamo

$$(C_{KL} - AG_{KL}) P^L + BG_{KL}Q^L = 0,$$
$$(C_{KL} - AG_{KL}) Q^L - BG_{KL}P^L = 0.$$

Ako se prvi sistem jednačina pomnoži sa Q^K, a drugi sa P^K i tako dobijeni izraz oduzmu jedan od drugog dobićemo

$$B (G_{KL}P^K P^L + G_{KL}Q^K Q^L) = 0,$$

tj. $B = 0$ s obzirom na simetričnost i pozitivnu definitnost tenzora C_{KL} i G_{KL}. Ali tada je C realan broj. □

Teorema 2: *Različitim karakterističnim brojevima odgovaraju međusobno upravni karakteristični pravci.*

Dokaz:

Neka su C_1 i C_2 različiti karakteristični brojevi kojima odgovaraju karakteristični pravci $\boldsymbol{N}_1$ i $\boldsymbol{N}_2$, respektivno. Ovi pravci zadovoljavaju odgovarajuće sisteme jednačina

$$(C_{KL} - C_1 G_{KL}) N_1^L = 0, \quad (C_{KL} - C_2 G_{KL}) N_2^L = 0.$$

Množeći prvi sistem jednačina sa N_2^K a drugi N_1^K, i od drugog oduzimajući prvi, dobijamo

$$(C_1 - C_2) G_{KL} N_1^K N_2^L = 0.$$

Kako je $C_1 - C_2 \neq 0$, sledi

$$G_{KL} N_1^K N_2^L = 0. \ \square$$

Teorema 3: *Karakteristični brojevi* C_α $(\alpha = 1, 2, 3)$ *su pozitivni.*

Dokaz:

Ova osobina karakterističnih brojeva je posledica pozitivne definitnosti tenzora C_{KL} i G_{KL}. Zaista, iz (10.9) sledi

$$C_\alpha = \frac{C_{KL} N_\alpha^K N_\alpha^L}{G_{KL} N_\alpha^K N_\alpha^L} = C_{KL} N_\alpha^K N_\alpha^\alpha > 0$$

s obzirom na navedene osobine ovih tenzora. □

Napominjemo da navedene teoreme važe za bilo koja dva simetrična, realna i pozitivno definitna tenzora.

Ako se za koordinatne pravce u $\boldsymbol{X}$ uzmu karakteristični pravci, tada je

$$N_\alpha^K = \delta_\alpha^K$$

a

$$C_\alpha^K = C_\alpha \delta_\alpha^K \tag{10.14}$$

s obzirom na (10.10). Znači, u odnosu na glavne pravce deformacije (jer su karakteristični pravci traženi glavni pravci deformacije) normalne komponente tenzora deformacije su karakteristični brojevi, a smičuće su jednaki nuli (posledica 2).

U cilju izvođenja *dokaza posledice 3* posmatrajmo ortonormiran sistem vektora n_α, koji određuje glavne pravce deformacije u $\boldsymbol{x}$, tako da je

$$c^k_l n^l_\alpha = c_\alpha n^k_\alpha \quad \text{ili} \quad c_{kl} n^l_\alpha = c_\alpha g_{kl} n^l_\alpha, \tag{10.15}$$
$$g_{kl} n^k_\alpha n^l_\beta = \delta_{\alpha\beta}, \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3).$$

Njemu odgovarajući sistem jediničnih vektora u $\boldsymbol{X}$ definisan je sa

$$N^K_\alpha = \frac{X^K_{;k} n^k_\alpha}{\sqrt{c_\alpha}} \tag{10.16}$$

Dokazaćemo: 1. da je ovaj sistem vektora ortonormiran i 2. da određuje glavne pravce deformacije u $\boldsymbol{X}$, tj. da je rešenje sistema (10.9).

Zaista,

$$G_{KL} N^K_\alpha N^L_\beta = G_{KL} X^K_{;k} X^L_{;l} n^k_\alpha n^l_\beta \frac{1}{\sqrt{c_\alpha c_\beta}} =$$
$$= c_{kl} n^k_\alpha n^l_\beta \frac{1}{\sqrt{c_\alpha c_\beta}} = c_\alpha g_{kl} n^k_\alpha n^l_\beta \frac{1}{\sqrt{c_\alpha c_\beta}} = \delta_{\alpha\beta} \tag{10.17}$$

s obzirom na (10.16), $(7.3)_2$ i $(10.15)_2$. Za dokazivanje dela 2. polazimo od izraza

$$C_{KL} N^L_\alpha = \frac{1}{\sqrt{c_\alpha}} g_{kl} x^k_{;K} x^l_{;L} X^L_{;m} n^m_\alpha = \frac{1}{\sqrt{c_\alpha}} g_{kl} x^k_{;K} n^l_\alpha =$$
$$= \frac{c_{kl} n^l_\alpha x^k_{;K}}{c_\alpha \sqrt{c_\alpha}} = \frac{G_{PL} X^P_{;k} X^L_{;l} x^k_{;K} n^l_\alpha}{c_\alpha \sqrt{c_\alpha}} =$$
$$= \frac{G_{KL} X^L_{;l} n^l_\alpha}{c_\alpha \sqrt{c_\alpha}} = \frac{G_{KL} N^L_\alpha}{c_\alpha} \tag{10.18}$$

gde smo koristili (10.16), (7.3) i (10.15). Iz (10.17) i (10.18) sledi dokaz posledice 3. Upoređujući (10.18) sa (10.9) zaključujemo:

Odgovarajući karakteristični brojevi tenzora deformacija C_{KL} i c_{kl} su recipročni, tj.

$$C_\alpha = \frac{1}{c_\alpha}. \tag{10.19}$$

Na osnovu navedenih teorema i dokaza posledice 3 proizilazi i dokaz posledice 1. Dokaz I Košijeve teoreme se zasniva na (10.14), jer se jednačina površi drugog reda (10.2), u odnosu na glavne pravce deformacije, može napisati u obliku

$$ds^2 = k^2 = C_{KL} dX^K dX^L = \sum_\alpha C_\alpha (dX^\alpha)^2 \tag{10.20}$$

što predstavlja kanonski oblik elipsoida, s obzirom na pozitivne vrednosti karakterističnih brojeva C_α. Veličine glavnih poluosa elipsoida su određene izrazima

$$a_\alpha = \frac{ds}{\sqrt{C_\alpha}} = \frac{k}{\sqrt{C_\alpha}}. \tag{10.21}$$

Na isti način se dolazi do odgovarajućih izraza za veličine koje određuju materijalni elipsoid deformacije (10.1). Na osnovu (10.14) i dualnosti materijalnog i prostornog elipsoida deformacije može se zaključiti da karakteristične vrednosti C_α i c_α jednoznačno određuju dužine poluosa elipsoida deformacija u $\boldsymbol{X}$ i $\boldsymbol{x}$ respektivno. Dužine poluosa elipsoida u $\boldsymbol{X}$ su recipročne vrednosti poluosa u $\boldsymbol{x}$, jer su odgovarajući karakteristični brojevi recipročni. Prema tome:

Elipsoid deformacije u $\boldsymbol{X}$ postaje obrtni elipsoid ili sfera ako, i samo ako, elipsoid deformacije u $\boldsymbol{x}$ postane obrtni elipsoid ili sfera.

Karakteristični brojevi C_α i c_α imaju i svoju fizičku interpretaciju. Ona je zasnovana na izrazima

$$\lambda_\alpha^2 = C_\alpha = \frac{1}{c_\alpha} = C_{KL} N_\alpha^K N_\alpha^L \tag{10.22}$$

i glasi:

Karakteristični brojevi C_α su kvadrati glavnih izduženja.

Ako sa E i e obeležimo karakteristične brojeve tenzora relativnih deformacija E_{KL} i e_{kl}, respektivno, onda odgovarajući sistemi jednačina glase

$$(E_{KL} - EG_{KL})\, N^L = 0, \quad (e_{kl} - eg_{kl})\, n^l = 0. \tag{10.23}$$

Koristeći (7.11), (10.9) i (10.15) sledi

$$2E = C - 1, \quad 2e = 1 - c. \tag{10.24}$$

Ove relacije imaju fundamentalnu ulogu pri određivanju glavnih invarijanata tenzora deformacija i uspostavljanja međusobnih veza. Na osnovu iste analize sledi:

Glavni pravci tenzora C_{KL} i E_{KL} su isti. Isto se može zaključiti i za tenzore c_{kl} i e_{kl}.

Vežbanja

1. Dokazati (10.19) koristeći (10.15), (10.9) i (7.3).

2. Ako sa $\overset{-1}{c}$ i $\overset{-1}{C}$ obeležimo karakteristične vrednosti tenzora $\overset{-1}{c}_{kl}$ i $\overset{-1}{C}_{KL}$ pokazati da je

$$\overset{-1}{c}_\alpha = (c_\alpha)^{-1}, \quad \overset{-1}{C}_\alpha = (C_\alpha)^{-1}.$$

3. Neka je $\boldsymbol{N}$ jedinični vektor u $\boldsymbol{X}$. Njegove komponente u odnosu na Dekartov sistem koordinata, čije su ose glavni pravci deformacije, su $\cos(\boldsymbol{N}\alpha)$. Sa $(\boldsymbol{N}\alpha)$ su označeni uglovi između $\boldsymbol{N}$ i α-te glavne ose. Pokazati da je

$$\lambda_{(\boldsymbol{N})}^2 = \sum_{\alpha=1}^{3} \lambda_\alpha^2 \cos^2(\boldsymbol{N}\alpha)$$

$$\lambda_{(\boldsymbol{n})}^2 = \frac{1}{\displaystyle\sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\cos^2(\boldsymbol{n}\alpha)}{\lambda_\alpha^2}}$$

gde je $\boldsymbol{n}$ jedinični vektor pravca deformisanog linijskog elementa u $\boldsymbol{x}$.

4. Pokazati da je $-\boldsymbol{u}$ vektor dualan vektoru pomeranja $\boldsymbol{u}$.
5. Koristeći se prethodnim zadatkom pokazati da su E_{KL} i $-e_{kl}$ dualni tenzori. Na osnovi toga pokazati da su (10.24) međusobno dualne relacije.
6. Koristeći (10.19) i dualnost odgovarajućih tenzora deformacija izvesti relacije zadatka 2.
7. U trodimenzionalnom prostoru broj nezavisnih invarijanata tenzora drugog reda nije veći od tri. Dokazati.

11. GLAVNE INVARIJANTE TENZORA DEFORMACIJE

Veličine koje se ne menjaju pri koordinatnoj transformaciji su invarijante transformacije. Pošto ne zavise od koordinatne transformacije one određuju suštinsko svojstvo datog sistema kojim je invarijanta definisana. Ova svojstva u našem slučaju vezana su za fizičku stranu problema i kao takva imaju svoju fizičku interpretaciju.

Takvo svojstvo imaju dužine materijalnih linijskih elemenata. Prema tome, C_α, I_C, II_C i III_C su invarijante transformacije što neposredno sledi iz njihove fizičke interpretacije (10.22) i relacija

$$\begin{aligned} I_C &= C_1 + C_2 + C_3 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = (1 + E_{(1)})^2 + (1 + E_{(2)})^2 + (1 + E_{(3)})^2. \\ II_C &= C_1C_2 + C_2C_3 + C_3C_1 = \lambda_1^2\lambda_2^2 + \lambda_2^2\lambda_3^2 + \lambda_3^2\lambda_1^2 = \\ &= (1 + E_{(1)})^2 (1 + E_{(2)})^2 + (1 + E_{(2)})^2 (1 + E_{(3)})^2 + \\ &+ (1 + E_{(3)})^2 (1 + E_{(1)})^2 \\ III_C &= C_1C_2C_3 = \lambda_1^2\lambda_2^2\lambda_3^2 = (1 + E_{(1)})^2 (1 + E_{(2)})^2 (1 + E_{(3)})^2, \end{aligned} \tag{11.1}$$

pri čemu smo koristili (10.13), (10.14) i (9.6).

Nije teško pokazati da važi

$$\begin{aligned} I_C &= I_{c^{-1}}, & I_c &= I_{C^{-1}}, \\ II_C &= II_{c^{-1}}, & II_c &= II_{C^{-1}}, \\ III_C &= III_{c^{-1}}, & III_c &= III_{C^{-1}}. \end{aligned} \tag{11.2}$$

Iz ovih relacija i (10.19) slede *fundamentalne identičnosti*

$$I_c = \frac{II_C}{III_C}, \quad II_c = \frac{I_C}{III_C}, \quad III_c = \frac{1}{III_C} \tag{11.3}$$

Kako je $0 < \lambda_\alpha < \infty$, iz (11.1), (11.2) i (11.3) sledi

$$0 < I,\ II,\ III < \infty \tag{11.4}$$

što važi za glavne invarijante bilo kog tenzora deformacije C_{KL}, c_{kl}, $\overset{-1}{C}_{KL}$ ili c_{kl}^{-1}. Međutim, pošto glavne invarijante jednoznačno određuju vrednosti karakterističnih brojeva, a s obzirom na to da su ona rešenja odgovarajuće karakteristične jednačine, možemo zaključiti:

Za date vrednosti I_C, II_C i III_C, koje zadovoljavaju (11.4) i za date glavne pravce u $\boldsymbol{X}$, tenzor C_{KL} je jednoznačno određen. U specijalnom slučaju

$$I_C = II_C = 3, \quad III_C = 1 \tag{11.5}$$

predstavlja potrebne i dovoljne uslove da bi deformacija bila kruto pomeranje.

Ako se mešoviti tenzor deformacije C^K_L napiše u obliku

$$C^K_L = G^{KM} g_{kl} x^k_{;M} x^l_{;L}$$

s obzirom na $(7.3)_1$, tada je

$$III_C = \det C^K_L = (\det G^{KM})(\det g_{kl})(\det x^l_{;L})^2 = \frac{g}{G} j^2 = J^2. \tag{11.6}$$

Pri izvođenju ovog izraza koristili smo $(10.13)_3$, (4.7) i poznato pravilo matričnog računa: determinanta proizvoda matrica jednaka je proizvodu determinanti matrica. Uloga i značaj (11.6), tj. III_C može se bolje sagledati u daljoj analizi deformacije površinskih i zapreminskih materijalnih elemenata tela.

Glavne invarijante tenzora relativne deformacije E_{KL} su definisane izrazima

$$I_E = E_1 + E_2 + E_3, \quad II_E = E_1E_2 + E_2E_3 + E_3E_1, \quad III_E = E_1E_2E_3 \tag{11.7}$$

i vezane su sa invarijantama (11.1) tenzora C_{KL} relacijama

$$\begin{aligned} I_C &= 3 + 2I_E, \quad 2I_E = -3 + I_C \\ II_C &= 3 + 4I_E + 4II_E, \quad 4II_E = 3 - 2I_C + II_C \\ III_C &= 1 + 2I_E + 4II_C + 8III_E, \quad 8III_E = -1 + I_C - II_C + III_C. \end{aligned} \tag{11.8}$$

Koristeći princip dualnosti iz (11.8) neposredno sledi

$$I_c = 3 - 2I_e, \quad II_c = 3 - 4I_e + 4II_e, \quad III_c = 1 - 2I_e + 4II_e - 8III_e, \tag{11.9}$$

gde su I_e, II_e i III_e glavne invarijante tenzora relativne deformacije e_{kl}.

Vežbanja

1. Pokazati da je $\overset{-2}{c^k_l} = \overset{-1}{c^k_m}\overset{-1}{c^m_l} = C^{KL} x^k_{;K} x_{l;L}$.

2. Polazeći od stava da svaka matrica drugog reda zadovoljava svoj karakteristični polinom, izvesti Fingerovu (Finger) identičnost

$$III_c C^{KM} x^k_{;K} x_{m;M} = c^k_m - I_c \delta^k_m + II_c \overset{-1}{c^k_m}.$$

3. Svaki tenzor drugog reda $a^k{}_l$ ima glavne invarijante I_a, II_a i III_a definisane sa (10.13), i momentne invarijante $\bar{I}_a$, $\overline{II}_a$ i $\overline{III}_a$ definisane izrazima

$$\bar{I}_a = a^k{}_k, \quad \overline{II}_a = a^k{}_m a^m{}_k, \quad \overline{III}_a = a^k{}_l a^l{}_m a^m{}_k.$$

Pokazati da između momentnih i glavnih invarijanata postoje relacije

$$\bar{I}_a = I_a, \quad \overline{II}_a = I_a^2 - 2II_a, \quad \overline{III}_a = I_a^3 - 3I_aII_a + 3III_a,$$

$$2II_a = I_a^2 - \overline{I}\overline{I}_a, \quad III_a = \frac{1}{6} I_a^3 - \frac{1}{2} I_a\overline{II}_a + \frac{1}{3} \overline{III}_a.$$

4. Pokazati da je

$$\frac{\partial I_a}{\partial a^k{}_m} = \delta_k^m, \quad \frac{\partial II_a}{\partial a^k{}_m} = I_a\delta_k^m - a^m{}_k, \quad \frac{\partial \overline{II}_a}{\partial a^k{}_m} = 2a^m{}_k,$$

$$\frac{\partial III_a}{\partial a^k{}_m} = a^m{}_l a^l{}_k - I_a a^m{}_k + II_a\delta_k^m = III_a \overset{-1}{a^m{}_k}, \quad \frac{\partial \overline{III}_a}{\partial a^k{}_m} = 3a^m{}_l\, a^l{}_k.$$

5. U nekim slučajevima korisno je izraziti glavne invarijante tenzora deformacije C_{KL} preko elementarnih simetričnih funkcija glavnih dilatacija $I_{(E)}$, $II_{(E)}$ $III_{(E)}$ definisanih sa

$$I_{(E)} = E_{(1)} + E_{(2)} + E_{(3)}, \quad II_{(E)} = E_{(1)}E_{(2)} + E_{(2)}E_{(3)} + E_{(3)}E_{(1)}$$

$$III_{(E)} = E_{(1)}E_{(2)}E_{(3)}.$$

Pokazati da je

$$I_C - 3 = 2I_{(E)} + I_{(E)}^2 - 2II_{(E)},$$

$$II_C - 3 = 4I_{(E)} + 2I_{(E)}^2 + 2I_{(E)}II_{(E)} - 6III_{(E)} + II_{(E)}^2 - 2I_{(E)}III_{(E)},$$

$$\sqrt{III_C} - 1 = I_{(E)} + II_{(E)} + III_{(E)}.$$

12. ROTACIJA

U procesu deformacije linijski materijalni element $d\boldsymbol{X}$ u $\boldsymbol{X}$ prelazi u materijalni element $d\boldsymbol{x}$ u $\boldsymbol{x}$ (sl. 5). U opštem slučaju $d\boldsymbol{X}$ i $d\boldsymbol{x}$ se razlikuju kako po intenzitetu tako i po pravcu. Ugao θ, za koji je element $d\boldsymbol{X}$ rotirao pri deformaciji, može se izračunati iz izraza

$$\cos\theta = \frac{d\boldsymbol{X} \cdot d\boldsymbol{x}}{dXdx} = G_{KL}g_l^L N^K n^l = g_{kl}g^l{}_L n^k N^L \tag{12.1}$$

s obzirom na (8.6), (9.5) i ulogu operatora paralelnog pomeranja. Koristeći (5.2), (9.1), (9.2) kao i činjenicu da je $|d\boldsymbol{X}| = dS$ i $|d\boldsymbol{x}| = ds$, lako je pokazati da je

$$n^k = \frac{1}{\lambda_{(N)}} x^k_{;K}N^K, \quad N^K = \lambda_{(n)}X^K_{;k}n^k. \tag{12.2}$$

Tada se (12.1) može napisati u obliku

$$\cos\theta = \frac{1}{\lambda_{(N)}} G_{KL}g_l^L x^l_{;M}N^K N^M = g_{kl}g^l{}_L X^L_{;m}n^k n^m \lambda_{(n)}. \tag{12.3}$$

Za glavne pravce deformacije $\boldsymbol{n}_\alpha$, iz (12.3), (10.22) i (10.19), dobijamo

$$\cos\theta_\alpha = (c_\alpha)^{-\frac{3}{2}} c_{kl} g^l{}_L X^L{}_{;m} n^k_\alpha n^m_\alpha. \qquad (12.3)_a$$

Na osnovu *posledice 3* Košijeve teoreme sledi:

Kada su bilo koja dva ugla θ_α jednaki nuli i treći je jednak nuli.

Takvo stanje deformacije nazivamo *čista deformacija*. Prema tome, u stanju čiste deformacije glavne ose materijalnog i prostornog elipsoida deformacije su međusobno paralelne. Međutim, ovaj zaključak ne važi, u opštem slučaju, za pravce materijalnih linijskih elemenata koji nisu u pravcima glavnih osa.

Mera rotacije(12.3) ne pruža mogućnost interpretacije tenzora infinitezimalne rotacije $\bar{R}_{KL}$, ili r_{kl} definisanih sa $(8.2)_2$ i $(8.2)_4$. Novožilovova (Новожилов В. В) mera za srednju rotaciju je daleko pogodnija i zato ćemo je detaljnije proučiti.

Neka je $\boldsymbol{N}_Z$ jedinični vektor pravca materijalnog linijskog elementa $d\boldsymbol{X}$ u ravni XY u $\boldsymbol{X}$. Posle deformacije pravac odgovarajućeg deformisanog linijskog elementa $d\boldsymbol{x}$ u $\boldsymbol{x}$ je određen jediničnim vektorom $\boldsymbol{n}$. Posle paralelnog prenošenja u $\boldsymbol{X}$ moguće je odrediti njegovu projekciju u ravni XY koju ćemo obeležiti sa $\boldsymbol{n}_Z$ (sl. 9). Obeležimo sa Φ ugao koji zaklapa $\boldsymbol{N}$ sa X osom, a sa θ_Z ugao između $\boldsymbol{N}_Z$ i $\boldsymbol{n}_Z$. Iz izraza

$$\operatorname{tg}(\Phi+\theta_Z) = \frac{\operatorname{tg}\Phi + \operatorname{tg}\theta_Z}{1-\operatorname{tg}\Phi\operatorname{tg}\theta} = \frac{dy}{dx}\frac{\dfrac{\partial y}{\partial X}dX + \dfrac{\partial y}{\partial Y}dY}{\dfrac{\partial x}{\partial X}dX + \dfrac{\partial x}{\partial Y}dY}$$

smenom: $dX = dS\cos\Phi$ i $dY = dS\sin\Phi$, dobijamo

$$\operatorname{tg}\theta_Z = \frac{\dfrac{\partial y}{\partial X}\cos^2\Phi + \left(\dfrac{\partial y}{\partial Y} - \dfrac{\partial x}{\partial X}\right)\sin\Phi\cos\Phi - \dfrac{\partial x}{\partial Y}\sin^2\Phi}{\dfrac{\partial x}{\partial X}\cos^2\Phi + \dfrac{\partial y}{\partial Y}\sin^2\Phi + \left(\dfrac{\partial y}{\partial X} + \dfrac{\partial x}{\partial Y}\right)\sin\Phi\cos\Phi} = \qquad (12.4)$$

$$= \frac{-\bar{R}_{xy} + \bar{E}_{xy}\cos 2\Phi + \dfrac{1}{2}(\bar{E}_{yy} - \bar{E}_{xx})\sin 2\Phi}{1 + \dfrac{1}{2}(\bar{E}_{xx} + \bar{E}_{yy}) - \dfrac{1}{2}(\bar{E}_{yy} - \bar{E}_{xx})\cos 2\Phi + \bar{E}_{xy}\sin 2\Phi}.$$

Pri izvođenju ovog izraza koristili smo (6.3) i $(8.2)_{1,2}$. Ovaj izraz je periodična funkcija po Φ sa periodom π. θ_Z je jednoznačno definisano kao ugao u intervalu $0 \leqslant \theta_Z \leqslant \pi$ izuzev: $\theta_Z = 0$ i $\theta_Z = \pi$ kao neodređenih veličina.

Novožilov je definisao kao meru rotacije srednju vrednost (12.4) svih materijalnih linijskih elemenata u ravni XY u X, tj.

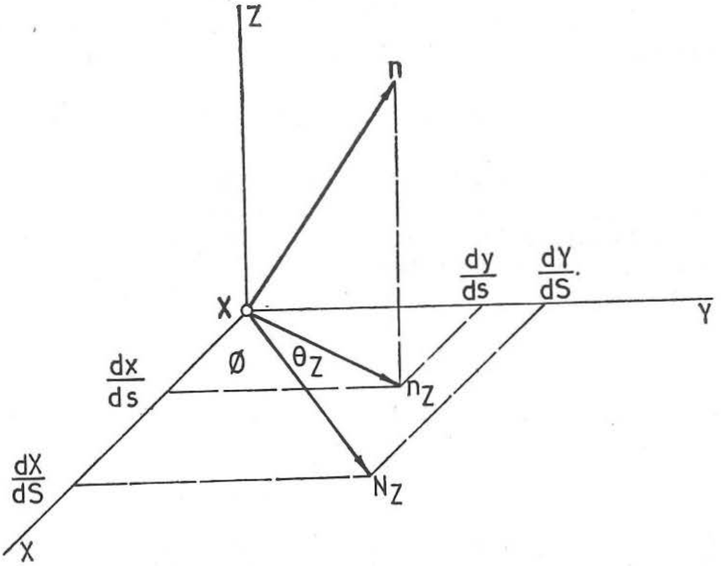
$$\langle\operatorname{tg}\theta_Z\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\operatorname{tg}\theta_Z(\Phi)\,d\Phi. \qquad (12.5)$$

Integracijom ovog izraza dobijamo

$$\langle \operatorname{tg} \theta_z \rangle = -\frac{XY}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\Phi}{1+\frac{1}{2}(\bar{E}_{xx}+\bar{E}_{yy})-\frac{1}{2}(\bar{E}_{xx}-\bar{E}_{yy})\cos 2\Phi+\bar{E}_{xy}\sin 2\Phi} =$$

$$= \frac{-\bar{R}_{xy}}{\sqrt{(1+\bar{E}_{xx})(1+\bar{E}_{yy})-\bar{E}_{xy}^2}} \tag{12.6}$$

Ova formula pokazuje da je $\bar{R}_{KL}$ mera srednje rotacije koje trpe elementi u ravni koordinatnih osa Z^K i Z^L.



Sl. 9

Izraz (12.6) može se formulisati u invarijantnom obliku. Neka je $X^3 = \text{const.}$ površ u $\boldsymbol{X}$ i neka su X^1 i X^2 koordinate na toj površi. Ako se posmatraju samo koordinatne transformacije površinskih koordinata, onda se (12.4) može izraziti u obliku

$$\operatorname{tg} \theta_{X^3} = \frac{-R_{12}+\varepsilon_{KM}N^K\bar{E}^M_P N^P}{1+\bar{E}_{KM}N^M N^M} \tag{12.7}$$

a (12.6) u obliku

$$\langle \operatorname{tg} \theta_{X^3} \rangle = -\frac{\bar{R}_{12}}{\sqrt{1+I_3\bar{E}+II_3\bar{E}}} \tag{12.8}$$

pri čemu neki indeksi uzimaju vrednosti 1 i 2 i gde je ε_{KM} Ričijev tenzor alternacije. Invarijante $I_3\bar{E}$ i $II_3\bar{E}$ se dobijaju iz tenzora E_{KL} kada su $K, L = 1, 2$. Na isti način se dobijaju i srednje rotacije $\operatorname{tg} \theta_{X^1}$ i $\operatorname{tg} \theta_{X^2}$ materijalnih linijskih elemenata u ravnima X^2, X^3 i X^3, X^1 respektivno. S obzirom na invarijantnost ovih izraza potpuno je opravdan naziv: *tenzor srednje rotacije* za tenzor $\bar{R}_{KL}$ u slučaju konačnih deformacija. S obzirom na tenzorski karakter $\bar{R}_{KL}$ možemo zaključiti da ako je $\bar{R}_{KL} = 0$ u jednom koordinatnom sistemu, biće i u svim dopustivim koordinatnim sistemima. Dalje iz (12.8) sledi da ako je srednja rotacija elemenata u tri upravne ravni kroz $\boldsymbol{X}$ jednaka 0 ili π radijana, onda je srednja rotacija elemenata u bilo kojoj ravni kroz $\boldsymbol{X}$ takođe 0 ili π radijana.

Na osnovu ovoga može se zaključiti da je $\bar{R}_{KL}$ zaista mera srednje rotacije, ali ne i mera rotacije samih elemenata. Kao ilustracija ovog zaključka može poslužiti sledeći primer: za krutu rotaciju $x = -X$, $y = -Y$, $z = Z$ tenzor $\bar{R}_{KL}$ je nula tenzor.

Tenzor $\bar{R}_{KL}$ je nula tenzor ako i samo ako je

$$u_K = U_{;K} \tag{12.9}$$

što neposredno sledi iz $(8.2)_2$. Deformaciju za koju je $\bar{R}_{KL} = 0$ zvaćemo *potencijalna deformacija*. Napominjemo još i to da se $\bar{R}_{KL}$, kao antisimetričan tenzor drugog reda, može zameniti aksijalnim vektorom $\bar{\boldsymbol{R}}$, tako da je

$$\bar{\boldsymbol{R}} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \boldsymbol{u} \quad \text{ili} \quad \bar{R}_K = \frac{1}{2} \varepsilon_{KLM} u^{M;L} = \frac{1}{2} \varepsilon_{KLM} \bar{R}^{ML}. \tag{12.10}$$

Za opisivanje lokalne rotacije datog pravca definišemo poseban tenzor rotacije. U tom cilju posmatramo pravce glavnih osa elipsoida deformacija u $\boldsymbol{X}$ i $\boldsymbol{x}$, koji su definisani ortonormiranim sistemima vektora $\boldsymbol{N}_\alpha$ i $\boldsymbol{n}_\alpha$, respektivno. Ako paralelno prenesemo $\boldsymbol{N}_\alpha$ u $\boldsymbol{x}$ (sl. 10), tada je, s obzirom na Posledicu 3 moguće odrediti ortogonalan tenzor $R^k{}_l$, koji paralelno pomereni sistem vektora $\boldsymbol{N}_\alpha$ u $\boldsymbol{x}$ rotira u $\boldsymbol{n}_\alpha$, tako da je

$$\begin{aligned} n^k_\alpha &= R^k{}_l g^l_K N^K_\alpha = R^k{}_K N^K_\alpha, \\ N^K_\alpha &= g^K_l \overset{-1}{R}{}^l{}_k n^k_\alpha = \overset{-1}{R}{}^K{}_k n^k_\alpha, \end{aligned} \tag{12.11}$$

gde je

$$R^k{}_K = R^k{}_l g^l_K, \quad \overset{-1}{R}{}^K{}_k = g^K_l \overset{-1}{R}{}^l{}_k. \tag{12.12}$$

Tenzor $\boldsymbol{R}$ $\{R^k{}_K\}$ definiše translaciju određenu operatorom paralelnog pomeranja g^k_K i rotaciju određenu tenzorom $R^k{}_l$. Ako sa $\boldsymbol{N}^\alpha$ i $\boldsymbol{n}^\alpha$ obeležimo recipročne vektore sistemima $\boldsymbol{N}_\alpha$ i $\boldsymbol{n}_\alpha$, koji su međusobno vezani relacijama

$$N^K_\alpha N^\alpha_L = \delta^K_L, \quad n^k_\alpha n^\alpha_l = \delta^k_l, \tag{12.13}$$

tada se iz (12.11) i (12.13) dobija

$$R^k{}_K = n^k_\alpha N^\alpha_K, \quad \overset{-1}{R}{}^K{}_k = N^K_\alpha n^\alpha_k. \tag{12.14}$$

Iz (12.11) se vidi da su tenzori $R^k{}_K$ i $\overset{-1}{R}{}^K{}_k$ dualni. Na osnovu definicije operatora paralelnog pomeranja (6.7) sledi da su g^k_K i g^K_k dualni. Ako napišemo $R^k{}_K = g^k_L R^L{}_K$, tada $(12.11)_1$ se može izraziti u obliku

$$n^k_\alpha = g^k_L R^L{}_K N^K_\alpha. \tag{12.15}$$

Upoređujući (12.15) sa $(12.11)_2$ zaključujemo da su $R^L{}_K$ i $\overset{-1}{R}{}^l{}_k$ takođe dualni. Geometrijski je ovaj zaključak potpuno očigledan: $R^K{}_L$ rotira $\boldsymbol{N}_\alpha$ u $\boldsymbol{n}_\alpha$ u $\boldsymbol{X}$, a $\overset{-1}{R}{}^k{}_l$ definiše inverznu operaciju u $\boldsymbol{x}$, tj. rotira $\boldsymbol{n}_\alpha$ u $\boldsymbol{N}_\alpha$ u $\boldsymbol{x}$. Na isti način se tumači dualnost tenzora $R^k{}_l$ i $\overset{-1}{R}{}^K{}_L$, ako se zna da je $\overset{-1}{R}{}^K{}_k = \overset{-1}{R}{}^K{}_L g^L_k$ i

$$N^K_\alpha = \overset{-1}{R}{}^K{}_L g^L_k n^k_\alpha. \tag{12.16}$$

Za rotaciju recipročnih trijedara imamo

$$n^\alpha_K = R_k{}^K N^\alpha_K, \quad N^\alpha_K = R^k{}_K n^\alpha_k, \quad R_k{}^K = G^{KL} g_{kl} R^l{}_L. \tag{12.16a}$$

Iz (12.15) i (12.16) sledi

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{I}$$

što *predstavlja potreban i dovoljan uslov za čistu deformaciju.* U komponentalnom obliku on glasi

$$R^K{}_L = \delta^K_L, \quad R_{KL} = G_{KL}, \quad R^k{}_K = g^k_K \text{ itd.}$$

Za objašnjenje naziva infinitezimalni tenzor rotacije za tenzor $\bar{R}_{KL}$ koristićemo formulu koja se izražava ***Fingerovom teoremom:***

n-ti stepeni Košijevog i Grinovog tenzora deformacije su vezani relacijama

$$\overset{-n}{c}{}^k_l = \overset{n}{R}{}^k{}_K \overset{-1}{C}{}^K_L R^L{}_l, \quad \overset{-n}{C}{}^K_L = \overset{-1}{R}{}^K{}_k \overset{n}{c}{}^k_l R^l{}_L. \tag{12.17}$$

Dokaz:

Matrica elementa C_{KL} je regularna. Tada važi

$$\overset{-n}{C}{}^K_L N^L_\alpha = \overset{-n}{(C_\alpha)} N^K_\alpha. \tag{12.18}$$

Koristeći $(12.13)_1$ iz (12.18) dobijamo

$$\overset{-n}{C}{}^K_L = \sum_\alpha (C_\alpha)^{-n} N^K_\alpha N^\alpha_L. \tag{12.19}$$

Njoj dualna relacija je

$$\overset{n}{c}{}^k_l = \sum_\alpha (c_\alpha)^n n^k_\alpha n^\alpha_l. \tag{12.20}$$

Ako se uzme u obzir (10.19), $(12.11)_2$, $(12.16)_3$ i (12.20) iz (12.19) sledi

$$\overset{-n}{C}{}^K_L = \sum_\alpha \overset{-1}{R}{}^K{}_k (c_\alpha)^n n^k_\alpha n^\alpha_l R^l{}_L = \overset{-1}{R}{}^K{}_k \overset{n}{c}{}^k_l R^l{}_L. \square$$

Na isti način se dokazuje i $(12.17)_1$.

Na osnovu formule (12.17) može se dokazati ***stav:***

Gradijenti deformacije, Košijev i Grinov tenzor deformacije su vezani relacijama

$$x^k_{;K} = R^k{}_L \overset{\frac{1}{2}}{C}{}^L_K = R^l_K \overset{-\frac{1}{2}}{c}{}^k_l \tag{12.21}$$

$$X^K_{;k} = \overset{-1}{R}{}^K{}_l \overset{\frac{1}{2}}{c}{}^l_k = \overset{-1}{R}{}^L{}_k \overset{-\frac{1}{2}}{C}{}^K_L. \tag{12.22}$$

Dokaz:

Iz (10.16) se pomoću $(12.13)_2$, dobija

$$X^K_{;k} = \sum_\alpha (c_\alpha)^{\frac{1}{2}} N^K_\alpha n^\alpha_k,$$

ili

$$X^K_{;k} = \sum_{\alpha} (c_\alpha)^{\frac{1}{2}} \overset{-1}{R^K}{}_l n^l_\alpha n^\alpha_k = \overset{-1}{R^K}{}_l \overset{\frac{1}{2}}{c^l_k}$$

s obzirom na $(12.11)_1$ i (12.20) za $n = 1/2$. Relacija $(12.22)_2$ se dobija iz polaznog izraza i korišćenjem (10.19), $(12.14)_2$, $(12.13)_1$ i (12.19) za $n = -1/2$. Izrazi (12.21) i (12.22) su dualni. Tačnost jednih povlači i tačnost drugih relacija. □

Stav iskazan relacijom (12.21) sledi neposredno iz (5.14) i (7.14). U odnosu na takav način obeležavanja glasi

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{R}\overset{\frac{1}{2}}{\boldsymbol{C}} = \overset{\frac{1}{2}}{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{R}. \qquad (12.21)_a$$

Očigledno da inverzna relacija ove relacije predstavlja (12.22).

Kao posledica ovog stava i $(6.33)_1$ sledi

$$u_{K;L} = R_{KM}\overset{\frac{1}{2}}{C^M_L} - G_{KL} = R_K{}^M \overset{\frac{1}{2}}{C}_{ML} - G_{KL}. \qquad (12.23)$$

Iz ovog izraza neposredno se dobija

$$\bar{E}_{KL} = R_{(K}{}^M \overset{\frac{1}{2}}{C}_{ML)} - G_{KL}, \quad \bar{R}_{KL} = R_{[K}{}^M \overset{\frac{1}{2}}{C}_{ML]}. \qquad (12.24)$$

Za dalju analizu veze između tenzora R_{KL} i $\bar{R}_{KL}$ pogodniji je izraz

$$R^k{}_K = x^k_{;M} \overset{-\frac{1}{2}}{C^M_K}, \qquad (12.25)$$

koji neposredno sledi iz $(12.21)_1$,

Na osnovu $(6.33)_1$, $(8.2)_{1,2}$ i činjenice da je $R^k{}_K = g^k_L R^L{}_K$ može se (12.25) napisati u ekvivalentnom obliku

$$R_{KM} = (G_{KP} + \bar{E}_{KP} + \bar{R}_{KP}) \overset{-\frac{1}{2}}{C^P_M}. \qquad (12.26)$$

Ako su gradijenti pomeranja male veličine, može se $\overset{-\frac{1}{2}}{C^P_M}$, pomoću $(7.11)_1$, predstaviti u obliku reda

$$\overset{-\frac{1}{2}}{C^P_M} = (\delta^P_M + 2E^P_M)^{-\frac{1}{2}} = \delta^P_M - E^P_M + \ldots$$

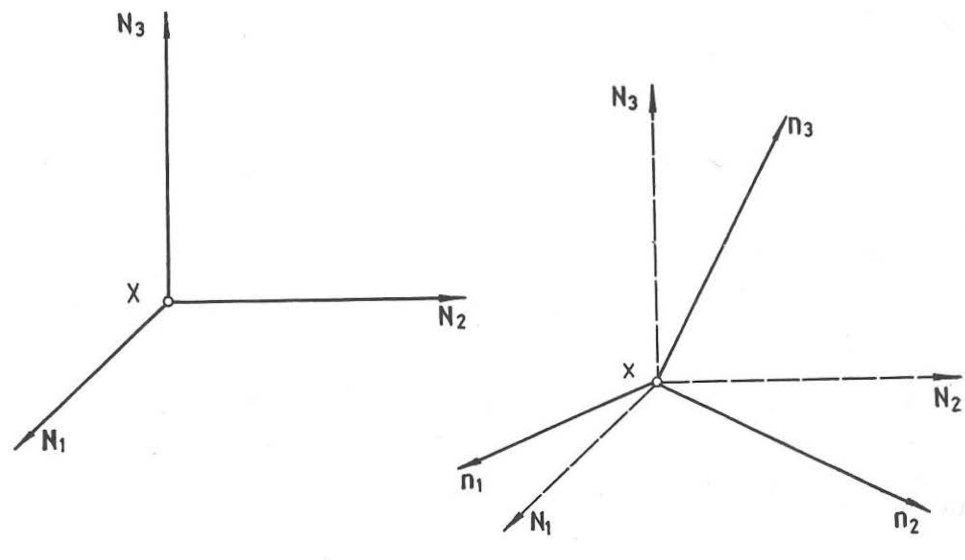
Smenom ovog izraza u (12.25) i zanemarujući infinitezimale višeg reda, dobijamo

$$R_{KM} \approx G_{KM} + \bar{R}_{KM}, \qquad (12.27)$$

tj. *u slučaju infinitezimalnih deformacija rotacija je određena tenzorom* $\bar{R}_{KM}$. Otuda i naziv tenzor infinitezimalne rotacije za $\bar{R}_{KM}$ kada su u pitanju infinitezimalne deformacije.

Na isti način se može izvesti zaključak i za tenzor infinitezimalne rotacije $\bar{r}_{kl}$ u slučaju infinitezimalnih deformacija, tj.

$$R_{km} \approx g_{km} + \bar{r}_{km}; \quad \bar{R}_{KM} \approx g^k_K g^m_M \bar{r}_{km}. \tag{12.28}$$



Sl. 10

Vežbanja

1. Izvesti (12.28) iz (12.27) koristeći princip dualnosti.
2. Pokazati da izduženje za dati pravac λ, izduženje u pravcu L, rotacija θ i dilatacija E zadovoljavaju relacije

$$L = \lambda \cos \theta - 1 = E \cos \theta - 2 \sin^2 \frac{1}{2} \theta.$$

3. Na osnovu Ojlerove teoreme svaka rotacija oko tačke može biti razmatrana kao rotacija oko neke ose kroz tačku. Na taj način se rotacija karakteriše jediničnim vektorom ose A^K i uglom rotacije θ oko ose. Pokazati da se tenzor rotacije $R^K{}_M$ može predstaviti u obliku

$$R^K{}_M = \delta^K_M \cos \theta + (1 - \cos \theta) A^K A_M + \varepsilon^K{}_{MP} A^P \sin \theta.$$

4. Na osnovu prethodnog zadatka pokazati da je

$$R^K{}_M A^M = A^K, \quad R^K{}_K = R^k{}_k = 1 + 2 \cos \theta, \quad R_{[KM]} = \varepsilon_{KMP} A^P \sin \theta.$$

5. Pokazati da su

$$R^K{}_K = 0, \quad R_{[KM]} = 0, \quad \theta = 0,$$

međusobno ekvivalentni izrazi kojima se izražavaju potrebni i dovoljni uslovi za čistu deformaciju.

6. Pokazati da su dve sukcesivne (uzastopne) rotacije oko tačke ekvivalentne jednoj rotaciji.

7. Deformacija se naziva *konformna* ako očuvava uglove između materijalnih krivih linija. Dokazati da je u tom slučaju

$$\boldsymbol{F} = \alpha \boldsymbol{R},$$

gde je skalar $\alpha \neq 0$.

13. FUNDAMENTALNA TEOREMA

Do sada izložena analiza deformacije može se sažeto izraziti pomoću *fundamentalne teoreme:*

> *Deformacija bilo kog linijskog elementa u tački može biti razmotrena kao rezultat translacije, rotacije glavnih osa elipsoida deformacije i glavnih izduženja.*

Ova teorema neposredno sledi iz Košijeve teoreme i njenih posledica.

Translacija, rotacija i izduženje mogu biti primenjene po bilo kom redosledu, ali njihove tenzorske mere nisu nezavisne od redosleda primene. Analitički dokaz fundamentalne teoreme sledi iz (5.2) i (12.21), jer je

$$dx^k = g^k_L R^L{}_M \overset{\frac{1}{2}}{C}{}^M_K \, dX^K = \overset{-\frac{1}{2}}{c}{}^k_l \, R^l{}_m g^m_K dX^K, \tag{13.1}$$

gde g^k_K, R^K_L i C_{KL} definišu translaciju, rotaciju i deformaciju, respektivno. Dualan izraz ovome je

$$dX^K = g^K_l \overset{-1}{R}{}^l{}_m \, \overset{\frac{1}{2}}{c}{}^m_k \, dx^k = \overset{-\frac{1}{2}}{C}{}^K_L \, R^L{}_M \, g^M_k dx^k. \tag{13.2}$$

Izraz $(13.1)_2$ može se rastaviti na sastavne delove, koji su definisani pojedinim operacijama, čije je geometrijsko tumačenje na slici 11:

1. $dx^k_{(T)} = g^k_K dX^K = dX^k$,

predstavlja krutu translaciju elementa $d\boldsymbol{X}$ iz $\boldsymbol{X}$ u $\boldsymbol{x}$;

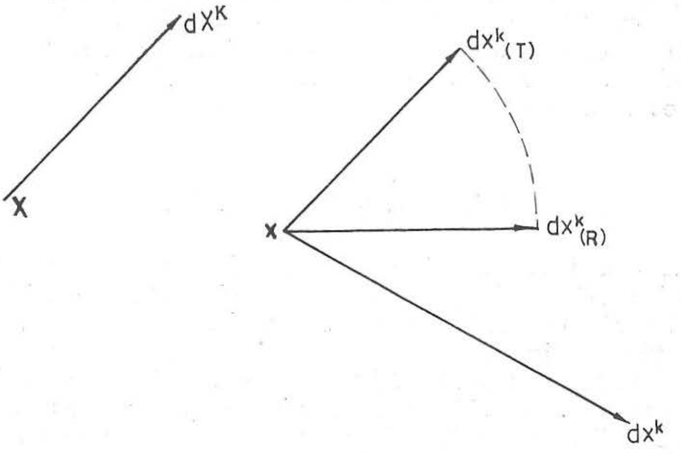
2. $dx^k_{(R)} = R^k{}_l dx^l_{(T)}$,

predstavlja krutu rotaciju $dx^k_{(T)}$ u $\boldsymbol{x}$;

3. $dx^k = \overset{-\frac{1}{2}}{c}{}^k_l \, dx^l_{(R)}$,

predstavlja deformaciju $dx^l_{(R)}$ u $\boldsymbol{x}$.

Važno je uočiti da ako i samo ako $d\boldsymbol{X}$ definiše glavne pravce deformacije, deformacija elementa $dx^k_{(R)}$, definisana tenzorom c_{kl}, neće sadržati dodatnu rotaciju.



Sl. 11

Polazeći od $(13.1)_2$ može se deformacija materijalnog linijskog elementa $\boldsymbol{dX}$ rastaviti na sledeće sastavne delove (sl. 12):

1. $dX^K_{(D)} = \overset{\frac{1}{2}}{C}{}^M_K \, dX^K$,

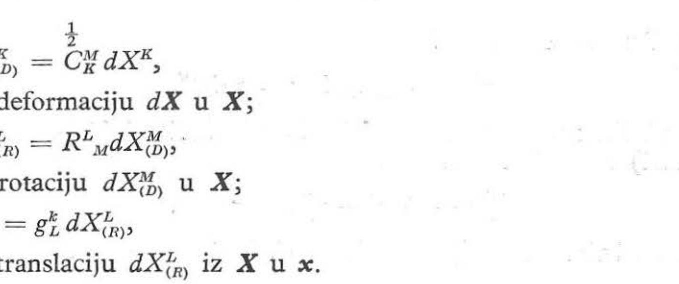
predstavlja deformaciju $\boldsymbol{dX}$ u $\boldsymbol{X}$;

2. $dX^L_{(R)} = R^L{}_M dX^M_{(D)}$,

predstavlja rotaciju $dX^M_{(D)}$ u $\boldsymbol{X}$;

3. $dx^k = g^k_L \, dX^L_{(R)}$,

predstavlja translaciju $dX^L_{(R)}$ iz $\boldsymbol{X}$ u $\boldsymbol{x}$.



Sl. 12

Na isti način može se izvršiti rastavljanje (13.2) na elementarna, međusobno nezavisna kretanja izražena fundamentalnom teoremom. Međutim, redosled ovih operacija je striktno određen datim matematičkim izrazom (13.2). Isto važi i za (13.1).

Ako se uoče svi materijalni linijski elementi $\boldsymbol{dX}$ u $\boldsymbol{X}$ istog intenziteta i na svaki od njih primeni fundamentalna teorema, onda se proces dekompozicije može izraziti na sledeći način: a) infinitezimalna sfera sa centrom u $\boldsymbol{X}$ se translatorno pomeri u $\boldsymbol{x}$; b) tako translatorno pomerena sfera se kruto rotira u $\boldsymbol{x}$ sve dok se ne poklope pravci tri upravna poluprečnika sfere, koji određuju pravce glavnih osa elipsoida deformacije u $\boldsymbol{X}$, sa glavnim pravcima elipsoida deformacije u $\boldsymbol{x}$; c) rotirana sfera se deformiše tako da se samo elementi u pravcima glavnih osa deformišu bez dodatne rotacije.

14. INVARIJANTNI PRAVCI

Videli smo da se u slučaju čiste deformacije izražene uslovom (12.17), glavni pravci elipsoida deformacije dovode do poklapanja bez rotacije. U tom slučaju glavni pravci ostaju očuvani i kažemo da su invarijantni u odnosu na čistu deformaciju. Međutim, u opštem slučaju poznato je da glavni pravci elipsoida deformacije nisu invarijantni. Nas interesuje opšti slučaj i problem invarijantnih pravaca razmotrićemo sa tog stanovišta. Kratko rečeno: interesuje nas da li u opštem slučaju deformacije postoji neki invarijantni pravac. Odgovor na ovo pitanje sadržan je u ***teoremi Kelvina i Tajta*** (*Kelvin i Tait*):

Za bilo kakvu deformaciju najmanje jedan pravac ostaje invarijantan.

Dokaz:

Za invarijantne pravce važi

$$g^K_k dx^k = g^K_k x^k_{;L} dX^L = a\, dX^K, \tag{14.1}$$

gde je a koeficijent proporcionalnosti i gde smo koristili (5.2). Pomoću $(6.33)_1$ može se (14.1) izraziti u ekvivalentnom obliku

$$[(a-1)\,\delta^K_L - u^K_{;L}]\, dX^L = 0.$$

Egzistencija netrivijalnog rešenja ovog sistema jednačina po dX^L izražava se uslovom

$$|(a-1)\,\delta^K_L - u^K_{;L}| = 0. \tag{14.2}$$

U razvijenom obliku (14.2) predstavlja kubnu jednačinu po a. S obzirom na činjenicu da su koeficijenti ove jednačine realni, sledi zaključak da je bar jedan njen koren realan. Realnom karakterističnom korenu $a \neq 0$, s obzirom na (4.8), odgovara realan karakterističan vektor aX^K, koji definiše traženi invarijantni pravac.

Ako sa D obeležimo diskriminantu karakteristične jednačine (1.42), tada važi

1. *za* $D > 0$ *postoje tri i samo tri invarijantna pravca,*
2. *za* $D < 0$ *postoji jedan i samo jedan invarijantni pravac,*
3. *za* $D = 0$ *postoje jedan, dva, tri ili beskonačno mnogo invarijantnih pravaca.*

Važno je napomenuti da u slučaju $D > 0$ tri invarijantna pravca ne moraju biti međusobno upravna, jer matrica elemenata $u^K_{;L}$ nije simetrična.

Koristeći (8.1) može se (14.2) napisati u obliku

$$|(a-1)\,\delta^K_L - \bar{E}^K_L - \bar{R}^K{}_L| = 0. \tag{14.3}$$

Za $\bar{R}^K{}_L = 0$ jednačina (14.3) postaje karakteristična jednačina tenzora $\bar{E}^K_L$, koji je simetričan. Za simetričan tenzor, poznato je, uvek postoji najmanje jedan sistem od tri međusobno upravna karakteristična vektora. U ovom slučaju karakteristični vektori definišu invarijantne pravce, koji su ujedno glavni pravci izduženja u tom pravcu, a glavni pravci deformacije se deformišu u same sebe. Prema tome,

egzistencija tri međusobno upravna invarijantna pravca predstavlja potreban i dovoljan uslov da se glavni pravci deformacije deformišu u sami sebe.

Ekvivalentno ovome je

potreban i dovoljan uslov da se glavni pravci deformacije deformišu u sami sebe jeste da se glavni pravci deformacije poklapaju sa glavnim pravcima izduženja u tim pravcima.

Uočimo da je $\bar{R}^K{}_L = 0$ potreban uslov za čistu deformaciju, ali nije i dovoljan. Zaista, moguće je da u (14.1) bude $a < 0$, tj., invarijantnost pravca sadrži u sebi mogućnost promene prvobitnog smera invarijantnog pravca materijalnog linijskog elementa dX^K i znači rotaciju prvobitnog smera za ugao π.

Prema tome, $\bar{R}^K{}_L = 0$ predstavlja potreban i dovoljan uslov da glavni pravci deformacije budu invarijantni *kao linije*.

Vežbanja

1. Ako je $A = a - 1$ pokazati da se (14.2) može napisati u obliku

$$A^3 - I_{\bar{E}+\bar{R}}A^2 + II_{\bar{E}+\bar{R}}A - III_{\bar{E}+\bar{R}} = 0,$$

gde su $I_{\bar{E}+\bar{R}}$, $II_{\bar{E}+\bar{R}}$ i $III_{\bar{E}+\bar{R}}$ glavne invarijante tenzora $\bar{E}^K_L + \bar{R}^K{}_L$.

2. Za potencijalnu deformaciju je

a) $\overset{\frac{1}{2}}{C}_{KM} = \overset{-1}{R}_K{}^P \overset{\frac{1}{2}}{C}_{PQ} R_M{}^Q$;

b) $E^K_M = \bar{E}^K_M + \dfrac{1}{2}\bar{E}^{KP}\bar{E}_{PM}$.

Dokazati.

15. ELEMENTI POVRŠI I ZAPREMINE

U početnoj konfiguraciji materijalna površ S tela B može biti predstavljena u obliku

$$X^K = X^K(U; V) \tag{15.1}$$

gde su U i V koordinatne linije površi ili Gausovi (Gauss) parametri. Element površi dA_K definisan je vektorima

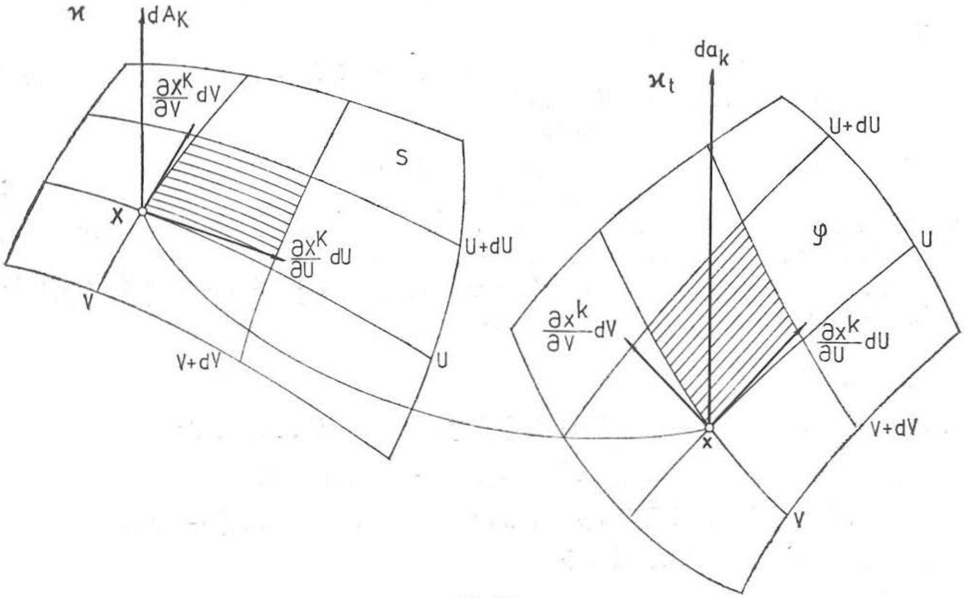
$$d_U X^K = \frac{\partial X^K}{\partial U} dU \text{ i } d_V X^K = \frac{\partial X^K}{\partial V} dV, \tag{15.2}$$

koji su tangentni vektori koordinatnih linija $V = \text{const}$ i $U = \text{const}$, respektivno, (sl. 13), tako da je

$$dA_K = \varepsilon_{KLM} d_U X^L d_V X^M = \varepsilon_{KLM} \frac{\partial X^L}{\partial U} \frac{\partial X^M}{\partial V} dU dV. \tag{15.3}$$

U trenutnoj konfiguraciji geometrijsko mesto položaja materijalne površi S definiše površ $\mathcal{S}$ čiji je analitički oblik određen jednačinama

$$x^k = x^k\,[X^K(U, V), t] = x^k(U, V; t). \tag{15.4}$$



Sl. 13

Element površi dA_K se deformiše u element da_k, određen vektorima

$$\begin{aligned} d_U x^k &= \frac{\partial x^k}{\partial U}\,dU = x^k_{;K}\frac{\partial X^K}{\partial U}\,dU \text{ i} \\ d_V x^k &= \frac{\partial x^k}{\partial V}\,dV = x^k_{;K}\frac{\partial X^K}{\partial V}\,dV, \end{aligned} \tag{15.5}$$

tako da je

$$da_k = \varepsilon_{klm} d_U x^l d_V x^m = \varepsilon_{klm} x^l_{;L} x^m_{;M} \frac{\partial X^L}{\partial U}\frac{\partial X^M}{\partial V}\,dUdV. \tag{15.6}$$

Kako je $\varepsilon_{klm} = \sqrt{g}\,e_{klm}$ i

$$e_{klm} x^l_{;L} x^m_{;M} = |x^p_{;P}|\,e_{KLM} X^K_{;k} = \frac{j}{\sqrt{G}}\,\varepsilon_{KLM} X^K_{;k} \tag{15.7}$$

s obzirom na (4.6) i na činjenicu da je $e_{KLM} = \dfrac{1}{\sqrt{G}}\,\varepsilon_{KLM}$, tada (15.6) postaje oblika

$$da_k = \sqrt{\frac{g}{G}}\,j\varepsilon_{KLM} X^K_{;k}\frac{\partial X^L}{\partial U}\frac{\partial X^M}{\partial V}\,dU\,dV,$$

ili, pomoću (15.3) i (4.7),

$$da_k = JX^K_{;k}dA_K. \tag{15.8}$$

Ovaj izraz predstavlja vezu između odgovarajućih elemenata površi u početnoj i trenutnoj konfiguraciji, a koji su sastavljeni od istih čestica tela $\mathcal{B}$. Na osnovu njega se može odrediti relacija između površina elemenata površi ako se pođe od izraza

$$(da)^2 = g^{kl}da_kda_l = J^2g^{kl}X^K_{;k}X^L_{;l}dA_KdA_L,$$

koji pomoću (11.6) i (7.5) postaje oblika

$$(da)^2 = III_C\overset{-1}{C}{}^{KL}dA_KdA_L. \tag{15.9}$$

Upoređujući ovaj izraz sa $(7.1)_2$, koji možemo napisati u obliku $dS^2 = C^{KL}dX_KdX_L$, vidimo da *u odnosu na merenje promene površine tenzor* $III_C\overset{-1}{C}{}^{KL}$ *igra istu ulogu kao tenzor* C^{KL} *u odnosu na merenje promene dužine.* Princip dualnosti omogućuje nam analogno tumačenje za $III_c\overset{-1}{c}{}^{kl}$. Na osnovu istog principa sledi

$$dA_K = J^{-1}x^k_{;K}da_k, \quad (dA)^2 = III_c\overset{-1}{c}{}^{kl}da_kda_l \tag{15.10}$$

dualno izrazima (15.8) i (15.9), respektivno.

Dualnost između dužina i površina sugeriše konstrukciju elipsoida koji je određen tenzorima $III_C\overset{-1}{C}{}^{KL}$ i $III_c\overset{-1}{c}{}^{kl}$ u cilju očiglednog sagledavanja promene površine elemenata površi u procesu deformacije. Teoreme odeljka 10 imaju svoje dualno tumačenje u odnosu na tenzore koji definišu ove elipsoide.

U cilju određivanja promene zapremine tela, koja nastaje deformacijom tela, uočimo takav materijalni zapreminski element u početnoj konfiguraciji čije su ivice dX^K_α u $\boldsymbol{X}$, tako da je

$$dX^K_\alpha = X^K_{;k}dx^k_\alpha, \quad (\alpha = 1, 2, 3). \tag{15.11}$$

Tada je, s obzirom na (15.7) i (4.6),

$$dV = \varepsilon_{KLM}dX^K_1dX^L_2dX^M_3 = \sqrt{G}\, e_{KLM}X^K_{;k}X^L_{;l}X^M_{;m}dx^k_1dx^l_2dx^m_3 =$$

$$= \sqrt{G}\,|X^P_{;p}|\, e_{klm}dx^k_1dx^l_2dx^m_3 = \sqrt{\frac{G}{g}}\,j^{-1}\,dv,$$

gde je element zapremine dv definisan izrazom

$$dv = \varepsilon_{klm}dx^k_1dx^l_2dx^m_3$$

i predstavlja materijalni element zapremine dV posle deformacije (sl. 14). Na osnovu (4.7) i (11.6) može se napisati konačno da je

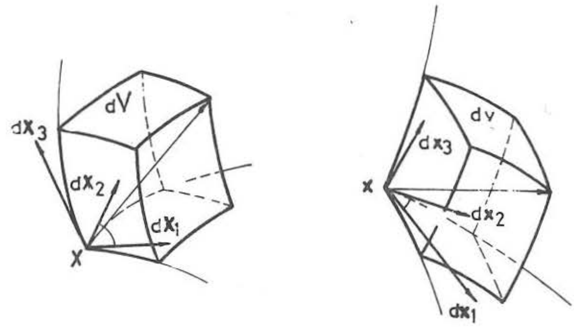
$$dv = JdV = \sqrt{III_C}\,dV \tag{15.12}$$

čime je određena veza između materijalnog zapreminskog elementa dV i elementa dv u koji se dV prevodi deformacijom. Ovaj izraz, kao i (15.9) i (15.10) pokazuju ulogu i značaj III_C u merenju promena materijalnih elemenata površi i zapremina pri deformaciji. Iz (15.12) sledi da je

$$\frac{dv}{dV} = \sqrt{III_C} = \frac{1}{\sqrt{III_c}} = (1 + 2I_E + 4II_E + 8III_E)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= (1 - 2I_e + 4II_e - 8III_e)^{-\frac{1}{2}}, \tag{15.13}$$

s obzirom na $(11.3)_3$, $(11.8)_5$ i $(11.9)_3$.



Sl. 14

16. USLOVI KOMPATIBILNOSTI

U E_3 tenzor relativne deformacije E_{KL} ima šest nezavisnih komponenti i izražava se preko komponenata vektora pomeranja u^K kao

$$2E_{KL} = u_{K;L} + u_{L;K} + u_{M;K}u^M_{;L}. \tag{7.12)$_1$ $$

Ovaj izraz predstavlja sistem od šest nelinearnih parcijalnih diferencijalnih jednačina prvog reda po komponentama pomeranja i ne zadaje nikakve teškoće ako je polje pomeranja poznato. Za dato polje pomeranja odgovarajući tenzor relativne deformacije E_{KL} se nalazi vrlo jednostavno: nađu se odgovarajuće komponente gradijenta pomeranja i zamene u $(7.12)_1$. Ovaj postupak za određivanje tenzora relativne deformacije E_{KL} dovodi do zaključka:

Bilo koje tri diferencijabilne funkcije mogu se uzeti za komponente vektora pomeranja u^K.

Međutim, obrnut zaključak ne važi, tj. bilo koji sistem od šest neprekidnih i diferencijabilnih funkcija ne može biti uzet za komponente tenzora relativne deformacije E_{KL}. Zaista, sistem od šest jednačina $(7.12)_1$ po tri, u ovom slučaju, nepoznate funkcije u^K je preodređen i kao takav, u opštem slučaju, ne određuje u^K ako su E_{KL} proizvoljno uzete funkcije. Prema tome, za egzistenciju jednoznačnog rešenja u^K funkcije E_{KL} moraju zadovoljiti određene uslove. Problem određivanja u^K za dato polje tenzora E_{KL} svodi se na integraciju sistema jednačina $(7.12)_1$. *Uslovi integrabilnosti ovog sistema, koje E_{KL} mora zadovoljiti da bi sistem dopustio jednoznačno rešenje po u^K, nazivaju se uslovi kompatibilnosti.* Principijelno ovi uslovi se dobijaju eliminacijom u^K iz $(7.21)_1$.

Fizičko tumačenje uslova kompatibilnosti može biti dato na sledeći način: zamislimo da je neprekidno telo $\mathcal{B}$ isečeno na male paralelopipede u početnoj konfiguraciji $\varkappa$, (sl. 14), i da je svaki takav delić deformisan. U opštem slučaju, deformisani delići se ne mogu složiti bez dodatne deformacije tako da čine neprekidno telo $\mathcal{B}$ u $\varkappa_t$. Međutim, ako je deformacija svakog delića saglasna sa deformacijom svojih susednih delića, tj. kompatibilna, onda se oni mogu složiti u $\varkappa_t$ Tada je polje pomeranja jednoznačno određeno i u^K su neprekidne i diferencijabilne funkcije položaja. S obzirom na egzistenciju polja pomeranja tenzor E_{KL} zadovoljava u tom slučaju uslove kompatibilnosti.

I. Sistem nelinearnih diferencijalnih jednačina $(7.12)_1$ vrlo je složen za računanje. Zato ćemo se prvo zadržati na slučaju infinitezimalnih deformacija, kada je

$$|u^K_{;L}| \ll 1, \tag{16.1}$$

tj. kada je gradijent pomeranja vrlo mala veličina. Tada $(7.12)_1$ postaje

$$E_{KL} = u_{(K;L)} = \bar{E}_{KL} = \frac{1}{2}(u_{K;L} + u_{L;K}) \tag{16.2}$$

s obzirom na $(8.2)_1$. Sistem jednačina (16.2) je linearan sistem parcijalnih diferencijalnih jednačina.

Ako se (16.2) dva puta kovarijantno diferencira, dobićemo

$$\bar{E}_{KL;MN} = \frac{1}{2}(u_{K;LMN} + u_{L;KMN}). \tag{16.3}$$

Kako je u E_3 operacija diferenciranja komutativna u odnosu na redosled promenljivih po kojima se vrši diferenciranje, tj. važi

$$u_{K;LMN} = u_{K;LNM} = u_{K;MLN} = \ldots,$$

tada je lako pokazati da je $\varepsilon^{IKM}u_{L;KMN} = 0$. Na osnovu ovoga izraza u (16.3) moguće je izvršiti eliminaciju komponenata vektora pomeranja tako da je

$$\varepsilon^{IKM}\varepsilon^{JLN}\bar{E}_{KL;MN} = 0 \tag{16.4}$$

što predstavlja tražene *uslove kompatibilnosti* koje tenzor relativne deformacije mora da zadovolji u slučaju infinitezimalnih deformacija. Ako se (16.4) komponuje sa $\varepsilon_{IPR}\varepsilon_{JQS}$, dobija se (16.4) u razvijenom obliku

$$\delta^{KM}_{PR}\,\delta^{LN}_{QS}\,\bar{E}_{KL,MN} = \bar{E}_{PQ,RS} + \bar{E}_{RS,PQ} - \bar{E}_{PS,RQ} - \bar{E}_{RQ,PS} = 0, \tag{16.4a}$$

gde je δ^{KM}_{PR} generalisani Kronekerov delta sistem.

Tenzor

$$\eta^{IJ} \stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon^{IKM}\,\varepsilon^{JLN}\,\bar{E}_{KL;MN} \tag{16.5}$$

naziva se *tenzor inkompatibilnosti*. Ovaj tenzor je simetričan i kao takav ima šest nezavisnih komponenata. Upoređujući (16.5) i (16.4) možemo zaključiti: uslovi kompatibilnosti (16.4) su zadovoljeni ako i samo ako je

$$\eta^{IJ} = 0. \tag{16.6}$$

Odavde odmah sledi da broj nezavisnih jednačina, koje tenzor relativne deformacije E_{KL} mora da zadovolji kada je deformacija kompatibilna, iznosi šest. Međutim, podvlačimo odmah da su ove jednačine *funkcionalno zavisne*, jer iz (16.4) dobijamo

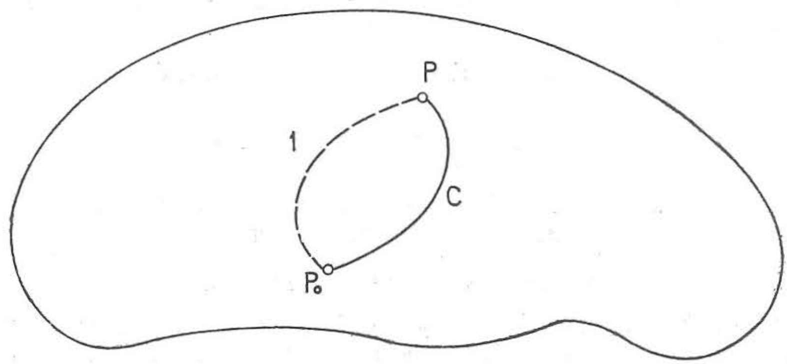
$$\varepsilon^{IKM} \varepsilon^{JLN} \bar{E}_{KL;MNJ} = 0 \tag{16.7}$$

s obzirom na osobinu antisimetričnosti tenzora ε^{JLN} i simetričnosti tenzora $\bar{E}_{KL;MNJ}$ po indeksima diferenciranja M, N i J. Ove tri identičnosti su poznate kao Bjankijeve (Bianchi) identičnosti u Rimanovoj geometriji. Prema tome, broj funkcionalno nezavisnih jednačina iznosi samo tri.

Teorema: *Uslovi kompatibilnosti su potrebni i dovoljni uslovi egzistencije polja pomeranja, jednoznačnog u jednostruko povezanom telu.*

Dokaz teoreme izvešćemo za slučaj infinitezimalnih deformacija. Ne gubeći ništa u opštosti izvešćemo dokaz teoreme u odnosu na Dekartov sistem koordinata jer egzistencija polja pomeranja u jednom koordinatnom sistemu povlači njegovu egzistenciju u odnosu na bilo koji sistem dopustivih koordinata u E_3.

Neka je $P_0\,(Z_K^0)$ tačka tela $\mathcal{B}$ u kojoj su pomeranje u_K^0 i rotacija $\bar{R}_{KL}^0$ zadati. Pomeranje u_K^P u bilo kojoj tački $P\,(Z_K^P)$ može biti određeno pomoću krivolinijskog integrala duž glatke krive C u telu koja spaja P_0 sa P (sl. 15).



Sl. 15

Tada je

$$\begin{aligned} u_J^P &= u_J^0 + \int_C du_J = u_J^0 + \int_C u_{J,K} dZ_K = \\ &= u_J^0 + \int_C \bar{E}_{JK}\, dZ_K + \int_C \bar{R}_{JK}\, dZ_K. \end{aligned} \tag{16.8}$$

gde smo sa „ ," naznačili parcijalni izvod po odgovarajućoj koordinati i gde smo koristili $(8.1)_1$. Po ponovljenim indeksima se vrši sabiranje u (16.8), pri čemu položaj indeksa ne igra nikakvu ulogu s obzirom na to da je koordinarni sistem Dekartov. Ako se u poslednjem integralu dZ_K zameni sa $d\,(Z_K - Z_K^P)$, gde je Z_K^P konstanta pri integraciji, i izvrši parcijalna integracija dobićemo

$$\begin{aligned} \int_{C(P_0,P)} \bar{R}_{JK} dZ_K &= \int_{C(P_0,P)} \bar{R}_{JK}\, d\,(Z_K - Z_K^P) = \\ &= (Z_K^P - Z_K^0)\, \bar{R}_{JK}^0 - \int_{C(P_0,P)} (Z_K - Z_K^P)\, \bar{R}_{JK,M} dZ_M. \end{aligned}$$

Kako je

$$\bar{R}_{JK,M} = \frac{1}{2}(u_{J,K} - u_{K,J})_{,M} = \frac{1}{2}(u_{J,KM} - u_{K,JM} + u_{M,JK} - u_{M,JK}) =$$

$$= -\frac{1}{2}(u_{K,M} + u_{M,K})_{,J} + \frac{1}{2}(u_{M,J} + u_{J,M})_{,K} = \bar{E}_{MJ,K} - \bar{E}_{KM,J},$$

biće

$$\int_{C(P_0,P)} \bar{R}_{JK} dZ_K = (Z_K^P - Z_K^0)\bar{R}_{JK} - \int_{C(P_0,P)} (Z_K - Z_K^P)(\bar{E}_{MJ,K} - \bar{E}_{KM,J})\, dZ_M.$$

Smenom ovog integrala u (16.8) konačno dobijamo

$$u_J^P = u_J^0 + (Z_K^P - Z_K^0)\bar{R}_{JK}^0 + \int_{C(P_0,P)} F_{JM} dZ_M, \tag{16.9}$$

gde je

$$F_{JM} = \bar{E}_{JM} + (Z_K^P - Z_K)(\bar{E}_{MJ,K} - \bar{E}_{KM,J}). \tag{16.10}$$

Ako pomeranje treba da bude jednoznačna funkcija koordinata tačke, tada krivolinijski integral u (16.9) mora biti nezavisan od puta integracije koji spaja tačke P_0 i P. To znači da $F_{JM}dZ_M$ mora biti totalni potencijal nekih funkcija položaja H_J. Prema tome, potreban i dovoljan uslov da ovaj krivolinijski integral ne zavisi od puta integracije u jednostruko povezanoj oblasti je

$$F_{JM,N} - F_{JN,M} = 0. \tag{16.11}$$

Iz (16.10) se lako pokazuje da je

$$F_{JM,N} = \bar{E}_{JM,N} - \delta_{KN}(\bar{E}_{MJ,K} - \bar{E}_{KM,J}) + (Z_K^P - Z_K)(\bar{E}_{MJ,KN} - \bar{E}_{KM,JN})$$

$$= \bar{E}_{NM,J} + (Z_K^P - Z_K)(\bar{E}_{MJ,KN} - \bar{E}_{KM,JN}).$$

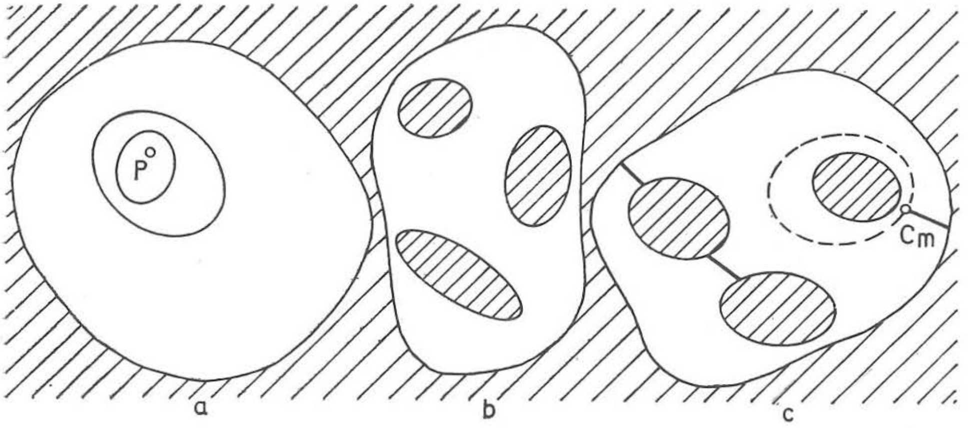
Zamenom mesta indeksima M i N u ovom izrazu dobijamo $F_{JN,M}$. Zamenom ovih izraza u (16.11) sledi njemu ekvivalentan izraz

$$(Z_K^P - Z_K)(\bar{E}_{MJ,KN} - \bar{E}_{KM,JN} - \bar{E}_{NJ,KM} + \bar{E}_{KN,JM}) = 0.$$

Izraz u zagradi predstavlja uslove kompatibilnosti (16.4)a. Prema tome, uslovi (16.11) će biti zadovoljeni ako su uslovi kompatibilnosti zadovoljeni.

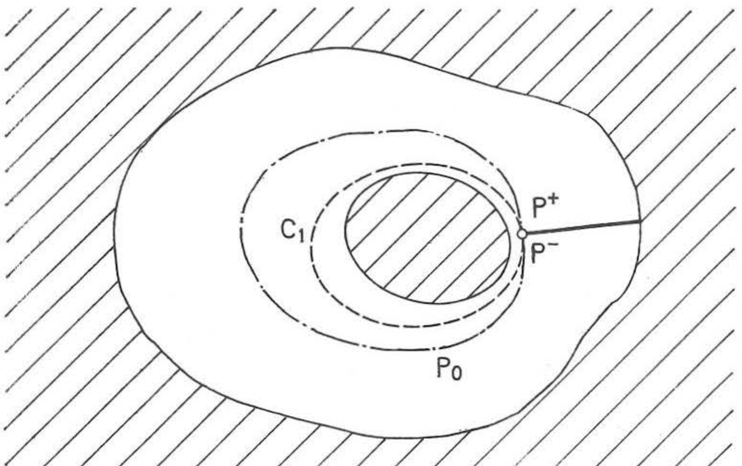
Važi i obrnuto. Zaista, ako su uslovi (16.11) zadovoljeni, polje pomeranja u jednostruko povezanoj oblasti je jednoznačno određeno. Međutim, tada su i uslovi kompatibilnosti zadovoljeni što neposredno sledi iz prethodnog izraza, koji mora u tom slučaju, da važi za proizvoljan izbor $Z_K^P - Z_K$. Time smo ujedno i dokazali, da zadovoljenje uslova kompatibilnosti (16.4) ili (16.4)a predstavlja potreban i dovoljan uslov egzistencije jednoznačnog polja pomeranja u jednostruko povezanoj oblasti. □

Za višestruko povezanu oblast uslovi kompatibilnosti (16.4) su potrebni, ali nisu više dovoljni. U tom slučaju moraju biti zadovoljeni i neki dodatni uslovi. Poznato je da je neka oblast jednostruko povezana ako se bilo koja prosta zatvorena kriva linija u oblasti može dovesti do na tačku oblasti, a da pri tome ne izlazi izvan date oblasti (sl. 16a). U protivnom data oblast je višestruko povezana (sl. 16b).



Sl. 16

Neka $m+1$-struko povezana oblast može biti pretvorena u jednostruko povezanu oblast pomoću m preseka (sl. 16c). Pri svakom od tih preseka može se nacrtati m nezavisnih krivih $C_1, C_2, \ldots, C_m$ takvih da svaka od njih počinje sa jedne strane preseka, a završava sa druge strane istog preseka (sl. 16c). Na (sl. 17) prikazana je dvostruko povezana oblast za koju ćemo izvesti tražene dodatne uslove.



Sl. 17

Posle izvedenog preseka ova oblast postaje jednostruko povezana. Obeležimo dve strane preseka sa (+) i (—), tako da su tačke P^+ i P^- sa suprotnih strana preseka. Krivolinijski integrali

$$H_J^+ = \int_{P_0}^{P+} F_{JM} dZ_M \quad \text{i} \quad H_J^- = \int_{P_0}^{P-} F_{JM} dZ_M$$

duž krivih linija integracije u tako stvorenoj jednostruko povezanoj oblasti su jednoznačno određeni. Međutim, vrednosti ovih integrala ne moraju biti jednake, jer se P^+ i P^- nalaze sa suprotnih strana preseka. Vrednost, recimo, prvog integrala neće se promeniti ako se integracija vrši duž bilo koje druge krive linije u jednostruko povezanoj oblasti koja spaja tačke P_0 i P^+ Takva je linija $P_0P^-C_1P^+$ pa je

$$H_J^+ = \int_{P_0}^{P^+} + \int_{P_0}^{P^-} + \int_{C_1(P^-,P^+)}$$

ili

$$H_J^+ - H_J^- = \int_{C_1(P^-,P^+)} F_{JM} dZ_M \tag{16.12}$$

Za proizvoljno izabranu tačku P^+, jer je P^- kao suprotna tački P^+ izborom P^- jednoznačno određena, iz (16.12) sledi

$$H_J^+ = H_J^-, \tag{16.13}$$

ako je

$$\int_{C_1(P^-,P^+)} F_{JM} dZ_M = 0, \tag{16.14}$$

za glatku krivu C_1 u, presekom stvorenoj, jednostruko povezanoj oblasti koja spaja P^- i P^+. Izraz (16.14) predstavlja dodatni uslov, koji zajedno sa uslovima kompatibilnosti (16.4), predstavlja potrebne i dovoljne uslove egzistencije jednoznačnog polja pomeranja u dvostruko povezanom telu. U slučaju da je telo $m + 1$-struko povezano može se istim postupkom pokazati da uslovi (16.14), u tom slučaju, postaju

$$\int_{C_1} F_{JM} dZ_M = \int_{C_2} F_{JM} dZ_M = \ldots = \int_{C_m} F_{JM} dZ_M = 0, \tag{16.15}$$

gde je F_{JM} definisano sa (16.10) i gde su $C_1, C_2, \ldots, C_m$ proizvoljne glatke krive koje spajaju suprotne tačke odgovarajućih preseka (sl. 16 pod c i sl. 17). Time smo dokazali da uslovi kompatibilnosti (16.4) i dodatni uslovi (16.15) predstavljaju potrebne i dovoljne uslove za egzistenciju jednoznačnog polja pomeranja u $m + 1$-struko povezanom telu.

Međutim, ovi uslovi ne obezbeđuju jedinstvenost polja pomeranja u telu za dati tenzor deformacije $\bar{E}_{KL}$, ako nisu zadati pomeranje i rotacija u nekoj čestici P_0 tela. Drukčije rečeno, samo pomoću tenzora relativne deformacije nismo u stanju da odredimo u potpunosti polje pomeranja. To je i potpuno razumljivo ako se zna da komponente tenzora $\bar{E}_{KL}$ određuju relativne položaje tačaka u telu i da svakom krutom kretanju tela odgovara nula tenzor relativne deformacije. Prema tome, samo pomoću tenzora relativne deformacije polje pomeranja je određeno do na kruto kretanje tela. Prema tome, u (16.9) u_J^0 i $\bar{R}_{JK}^0$ su one veličine koje određuju kruto kretanje tela i to translaciju i rotaciju tela respektivno.

U odnosu na Dekartov sistem koordinata uslovi kompatibilnosti glase

$$\eta_{33} = \frac{\partial^2 \bar{E}_{XX}}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 \bar{E}_{YY}}{\partial X^2} - 2\frac{\partial^2 \bar{E}_{XY}}{\partial X \partial Y} = 0,$$

$$\eta_{11} = \frac{\partial^2 \bar{E}_{YY}}{\partial Z^2} + \frac{\partial^2 \bar{E}_{ZZ}}{\partial Y^2} - 2\frac{\partial^2 \bar{E}_{YZ}}{\partial Y \partial Z} = 0,$$

$$\eta_{22} = \frac{\partial^2 \bar{E}_{ZZ}}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \bar{E}_{XX}}{\partial Z^2} - 2\frac{\partial^2 \bar{E}_{ZX}}{\partial Z \partial X} = 0,$$

$$\eta_{23} = -\frac{\partial^2 \bar{E}_{XX}}{\partial Y \partial Z} + \frac{\partial}{\partial X}\left(-\frac{\partial \bar{E}_{YZ}}{\partial X} + \frac{\partial \bar{E}_{ZX}}{\partial Y} + \frac{\partial \bar{E}_{XY}}{\partial Z}\right) = 0, \tag{16.16}$$

$$\eta_{31} = -\frac{\partial^2 \bar{E}_{YY}}{\partial Z \partial X} + \frac{\partial}{\partial Y}\left(\frac{\partial \bar{E}_{YZ}}{\partial X} + \frac{\partial \bar{E}_{ZX}}{\partial Y} - \frac{\partial \bar{E}_{XY}}{\partial Z}\right) = 0,$$

$$\eta_{12} = -\frac{\partial^2 E_{ZZ}}{\partial Y \partial X} + \frac{\partial}{\partial Z}\left(\frac{\partial \bar{E}_{YZ}}{\partial X} + \frac{\partial \bar{E}_{ZX}}{\partial Y} - \frac{\partial \bar{E}_{XY}}{\partial Z}\right) = 0.$$

U konkretnim zadacima u kojima se traži da se, za dati tenzor E_{KL}, odredi polje pomeranja prethodno se moraju proveriti uslovi kompatibilnosti. Dalji postupak je integracija sistema parcijalnih diferencijalnih jednačina (16.2) koji ćemo ilustrovati na sledećem primeru:

Za dati tenzor relativne infinitezimalne deformacije

$$\{\bar{E}_{KL}\} = k \begin{Bmatrix} \frac{Y}{R} & 0 & 0 \\ 0 & -\nu\frac{Y}{R} & 0 \\ 0 & 0 & -\nu\frac{Y}{R} \end{Bmatrix} \tag{16.17}$$

odrediti polje pomeranja, gde je k infinitezimalna konstanta. Imajući u vidu njenu ulogu, dalje o njoj nećemo voditi računa.

S obzirom na linearnu zavisnost $\bar{E}_{KL}$ od nezavisno promenljive Y odmah se vidi da su uslovi kompatibilnosti (16.16) zadovoljeni. Može se pokazati da on predstavlja tenzor relativne deformacije pri čistom savijanju štapa kružnog poprečnog preseka poluprečnika R. Osa štapa je uzeta za X-osu, a savijanje se izvodi spregovima koji deluju u ravni XY na krajevima štapa. Iz (16.17), (16.2) i (6.3) dobijamo

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u_X}{\partial X} = \frac{Y}{R} \qquad && \frac{\partial u_X}{\partial Y} + \frac{\partial u_Y}{\partial X} = 0 \\ &\frac{\partial u_Y}{\partial Y} = -\nu\frac{Y}{R} && \frac{\partial u_Y}{\partial Z} + \frac{\partial u_Z}{\partial Y} = 0 \\ &\frac{\partial u_Z}{\partial Z} = -\nu\frac{Y}{R} && \frac{\partial u_Z}{\partial X} + \frac{\partial u_X}{\partial Z} = 0. \end{aligned} \tag{16.18}$$

Prvi način. Iz ovog sistema parcijalnih diferencijalnih jednačina određujemo komponente pomeranja u_X, u_Y i u_Z na taj način što formiramo odgovarajuće parcijalne diferencijalne jednačine za svaku komponentu. Drukčije rečeno, potrebno je da za, recimo komponentu u_X, znamo $\frac{\partial u_X}{\partial X}$, $\frac{\partial u_X}{\partial Y}$, i $\frac{\partial u_X}{\partial Z}$. Prvi od ovih izvoda dat je eksplicitno sa $(16.18)_1$. Za određivanje drugog člana formiramo njemu odgovarajući sistem jednačina po $\frac{\partial}{\partial X}\frac{\partial u_X}{\partial Y}$, $\frac{\partial}{\partial Y}\frac{\partial u_X}{\partial Y}$ i $\frac{\partial}{\partial Z}\frac{\partial u_X}{\partial Y}$.

Tako je

$$\frac{\partial}{\partial X}\frac{\partial u_X}{\partial Y}=\frac{\partial}{\partial Y}\frac{\partial u_X}{\partial X}=\frac{1}{R} \tag{a}$$

s obzirom na $(16.18)_1$. Diferencirajući $(16.18)_2$ po Y dobijamo

$$\frac{\partial}{\partial Y}\frac{\partial u_X}{\partial Y}=-\frac{\partial}{\partial Y}\frac{\partial u_Y}{\partial X}=-\frac{\partial}{\partial X}\frac{\partial u_Y}{\partial Y}=0, \tag{b}$$

gde smo koristili $(16.18)_3$. Ako se dalje $(16.18)_6$ diferencira po Y, a $(16.18)_2$ po Z i tako dobijeni izrazi saberu, dobićemo

$$2\frac{\partial}{\partial Z}\frac{\partial u_X}{\partial Y}+\frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{\partial u_Y}{\partial Z}+\frac{\partial u_Z}{\partial Y}\right)=0,$$

ili, prema $(16.18)_4$

$$\frac{\partial}{\partial Z}\frac{\partial u_X}{\partial Y}=0, \tag{c}$$

čime je i kompletiran traženi sistem jednačina za $\partial u_X/\partial Y$. Iz (b) i (c) se vidi da je $\partial u_X/\partial Y$ nezavisno od Y i Z. Integracijom (a) dobijamo

$$\frac{\partial u_X}{\partial Y}=\frac{X}{R}+A, \tag{16.19}$$

gde je A integraciona konstanta. Član $\partial u_X/\partial Z$ odredićemo na sličan način iz njemu odgovarajućeg sistema jednačina po $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u_X}{\partial Z}$, $\frac{\partial}{\partial Y}\frac{\partial u_X}{\partial Z}$ i $\frac{\partial}{\partial Z}\frac{\partial u_X}{\partial Z}$. Ako se uzme u obzir $(16.18)_1$, (16.19), $(16.18)_5$ i $(16.18)_6$, lako je videti da je

$$\frac{\partial}{\partial X}\frac{\partial u_X}{\partial Z}=\frac{\partial}{\partial Z}\frac{\partial u_X}{\partial X}=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial Y}\frac{\partial u_X}{\partial Z}=\frac{\partial}{\partial Z}\frac{\partial u_X}{\partial Y}=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial Z}\frac{\partial u_X}{\partial Z}=-\frac{\partial}{\partial Z}\frac{\partial u_Z}{\partial X}=-\frac{\partial}{\partial X}\frac{\partial u_Z}{\partial Z}=0,$$

tj.

$$\frac{\partial u_X}{\partial Z}=B, \tag{16.20}$$

gde je B proizvoljna konstanta. Parcijalne diferencijalne jednačine $(16.18)_1$, (16.19) i (16.20) su traženi sistem jednačina za određivanje u_X. Integracijom $(16.18)_1$ dobijamo

$$u_X = \frac{XY}{R} + r(Y, Z), \tag{d}$$

gde je $r(Y, Z)$ kao integraciona konstanta proizvoljna funkcija Y i Z. Smenom ovog izraza u (16.19) sledi da je

$$\frac{X}{R} + \frac{\partial r}{\partial Y} = \frac{X}{R} + A \text{ ili } \frac{\partial r}{\partial Y} = A,$$

odakle se integracijom dobija

$$r = AY + t(Z),$$

gde je $t(Z)$ integraciona konstanta i kao takva proizvoljna funkcija od Z. Tada (d) postaje

$$u_X = \frac{XY}{R} + AY + t(Z). \tag{e}$$

Iz (e) i (16.20) se vidi da je

$$\frac{dt}{dZ} = B \quad \text{ili} \quad t = BZ + C,$$

gde je C integraciona konstanta. Tada (e) daje konačno

$$u_X = \frac{XY}{R} + AY + BZ + C. \tag{16.21}$$

Za određivanje komponente pomeranja u_Y postupak se ponavlja. Međutim, odgovarajući sistem parcijalnih diferencijalnih jednačina po $\partial u_Y/\partial X$, $\partial u_Y/\partial Y$ i $\partial u_Y/\partial Z$ se sada, na osnovu prethodnih rezultata, daleko lakše nalazi. Tako je

$$\frac{\partial u_Y}{\partial X} = -\frac{\partial u_X}{\partial Y} = -\frac{X}{R} - A, \tag{16.22}$$

s obzirom na $(16.18)_2$ i (16.19). Drugi član traženog sistema dat je sa $(16.18)_3$. Za $\partial u_Y/\partial Z$ odgovarajući sistem diferencijalnih jednačina je po

$$\frac{\partial}{\partial X}\frac{\partial u_Y}{\partial Z}, \quad \frac{\partial}{\partial Y}\frac{\partial u_Y}{\partial Z} \text{ i } \frac{\partial}{\partial Z}\frac{\partial u_Y}{\partial Z}.$$

Iz (16.22), $(16.18)_3$, $(16.18)_4$ i $(16.18)_5$ sledi da je

$$\frac{\partial}{\partial X}\frac{\partial u_Y}{\partial Z} = \frac{\partial}{\partial Z}\frac{\partial u_Y}{\partial X} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial Y}\frac{\partial u_Y}{\partial Z} = \frac{\partial}{\partial Z}\frac{\partial u_Y}{\partial Y} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial Z}\frac{\partial u_Y}{\partial Z} = -\frac{\partial}{\partial Z}\frac{\partial u_Z}{\partial Y} = -\frac{\partial}{\partial Y}\frac{\partial u_Y}{\partial Z} = \nu\frac{1}{R}.$$

Iz ovog sistema jednačina se vidi da je $\partial u_Y / \partial Z$ funkcija samo od Z. Integracijom poslednje jednačine dobijamo

$$\frac{\partial u_Y}{\partial Z} = \nu \frac{Z}{R} + D, \tag{16.23}$$

gde je D integraciona konstanta. Ako se jednačina (16.22), koja zajedno sa jednačinama $(16.18)_3$ i (16.23) određuje u_y, integrali dobićemo

$$u_Y = -\frac{X^2}{2R} - AX + \varphi(Y, Z), \tag{f}$$

gde je $\varphi(Y, Z)$ proizvoljna funkcija svojih argumenata. Smenom (f) u $(16.18)_3$ imamo da je

$$\frac{\partial \varphi}{\partial Y} = -\nu \frac{Y}{R}.$$

Rešenje ove jednačine je

$$\varphi = -\nu \frac{Y^2}{2R} + \psi(Z),$$

gde $\psi(Z)$ proizvoljna funkcija od Z. Smenom ovog izraza u (f) u_y postaje oblika

$$u_Y = -\frac{X^2}{2R} - AX - \nu \frac{Y^2}{2R} + \psi(Z). \tag{g}$$

Iz (g) i (16.23) sledi diferencijalna jednačina

$$\frac{d\psi}{dZ} = \nu \frac{Z}{R} + D,$$

čije rešenje glasi

$$\psi = \nu \frac{Z^2}{2R} + DZ + E,$$

gde je E integraciona konstanta. Pomoću ovog izraza može se konačno (g) pisati u sređenom obliku

$$u_Y = -\frac{1}{2R}[X^2 + \nu(Y^2 - Z^2)] - AX + DZ + E. \tag{16.24}$$

Na osnovu izvedenih rezultata odgovarajući sistem parcijalnih diferencijalnih jednačina za određivanje u_z glasi

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_Y}{\partial X} &= -\frac{\partial u_X}{\partial Z} = -B, \\ \frac{\partial u_Z}{\partial Y} &= -\frac{\partial u_Y}{\partial Z} = -\nu \frac{Z}{R} - D, \\ \frac{\partial u_Z}{\partial Z} &= -\nu \frac{Y}{R}. \end{aligned} \tag{h}$$

gde smo koristili $(16.18)_{1,4,6}$, (16.20) i (16.23). Integracijom prve jednačine dobijamo

$$u_Z = -BX + \alpha\,(Y, Z), \tag{i}$$

gde je $\alpha\,(Y, Z)$ proizvoljna i za sada neodređena funkcija svojih argumenata. Odgovarajuća diferencijalna jednačina za njeno određivanje dobija se iz (i) i $(\mathrm{h})_2$ i glasi

$$\frac{\partial\alpha}{\partial Y} = -\nu\frac{Z}{R} - D.$$

Njeno rešenje je

$$\alpha = -\nu\frac{YZ}{R} + \beta\,(Z) - DY,$$

gde je $\beta\,(Z)$ sada proizvoljna funkcija od Z. Sada je moguće pisati (i) u obliku

$$u_Z = -\nu\frac{YZ}{R} + \beta\,(Z) - BX - DY. \tag{j}$$

Diferencijalna jednačina za određivanje $\beta\,(Z)$ sledi iz (j) i $(\mathrm{h})_3$ i glasi

$$\frac{d\beta}{dZ} = 0,$$

čije rešenje ima oblik

$$\beta = F,$$

gde je F integraciona konstanta. Tada se (j) može pisati u konačnom obliku

$$u_z = -\nu\frac{YZ}{R} - BX - DY + F. \tag{16.25}$$

Izrazi (16.21), (16.24) i (16.25) određuju komponente polja pomeranja u jednostruko povezanom telu za tenzor relativne deformacije $\bar{E}_{KL}$, koji je dat sa (16.17).

Drugi način. Jedan od načina je vezan za korišćenje formula (16.9) i (16.10) kojima je dato polje pomeranja. U izvesnom smislu moglo bi se očekivati da njihovo korišćenje olakšava nalaženje polja pomeranja, jer se ceo postupak svodi na jednu integraciju. Međutim, to nije uvek slučaj jer ovaj način, kao i prethodni, ima svoje dobre strane kao i mane. To ćemo i ilustrovati na datom primeru.

Pokazali smo da su uslovi kompatibilnosti identički zadovoljeni, ili ekvivalentno tome da je $F_{JM}dZ_M$ totalni diferencijal nekih funkcija H_J, tj. da je $H_{J,M} = F_{JM}$. U tom slučaju je

$$\int_{C(P_0,P)} F_{JM}dZ_M = \int_{P_0}^{P} dH_J = H_J^P - H_J^0,$$

gde smo sa H_J^P i H_J^0 označili vrednost funkcija H_J u tačkama P i P_0 respektivno. Smenom ovog izraza u (16.9) dobijamo traženo polje pomeranja u obliku

$$u_J^P = u_J^0 + (Z_K^P - Z_K^0)\,R_{JK}^0 + H_J^P - H_J^0. \tag{16.26}$$

Ceo naš zadatak se sada svodi na nalaženje funkcija H_J. Pri tome polazimo od njima odgovarajućeg sistema diferencijalnih jednačina

$$H_{J,M}=\frac{\partial H_J}{\partial Z_M}=F_{JM}=\bar{E}_{JM}+(Z_K^P-Z_K)(\bar{E}_{MJ,K}-\bar{E}_{KM,J}). \tag{k}$$

U našem konkretnom primeru vidi se, na osnovu (16.17), da je $\bar{E}_{KL}$ funkcija samo od $Y=Z_2$ i da je $\bar{E}_{KL}=0$ za $K\neq L$. Na osnovu toga je lako pokazati da su sve komponente tenzora $\bar{E}_{J,MK}$ jednake nuli izuzev sledeće tri:

$$\bar{E}_{11,2}=\frac{\partial\bar{E}_{XX}}{\partial Y}=\frac{1}{R},\quad \bar{E}_{22,2}=\frac{\partial\bar{E}_{YY}}{\partial Y}=-\nu\frac{1}{R},\quad E_{33,2}=\frac{\partial\bar{E}_{ZZ}}{\partial Y}=-\nu\frac{1}{R}. \tag{l}$$

Smenom ovih vrednosti u (k) nalazimo za H_1 sistem jednačina

$$H_{1,1}=\frac{\partial H_1}{\partial X}=\frac{Y^P}{R},\quad H_{1,2}=\frac{\partial H_1}{\partial Y}=0,\quad H_{1,3}=\frac{\partial H_1}{\partial Z}=0,$$

koje integracijom daju

$$H_1=\frac{Y^PX}{R}+M,$$

ili

$$H_1^P-H_1^O=\frac{X^PY^P}{R}-\frac{X^O}{R}Y^P.$$

Integraciona konstanta M u ovom izrazu nestaje i to će biti slučaj i dalje kada se traži razlika $H_J^P-H_J^O$ za svako $J=1,2,3$. Zato ove integracione konstante dalje nećemo ni pisati. Ako se (16.26) napiše u obliku

$$u_J^P=H_J^P-H_J^O+R_{JK}^OZ_K^P+C_J,\quad C_J=u_J^O-R_{JK}^OZ_K^O, \tag{16.27}$$

koji je za dalja korišćenja pogodniji, onda se na osnovi izvedenih rezultata može pisati

$$u_X^P=\frac{X^PY^P}{R}+\left(R_{XY}^O-\frac{X^O}{R}\right)Y^P+R_{XZ}^OZ^P+C_1, \tag{m}$$

gde smo koristili konvenciju obeležavanja pojedinih Dekartovih koordinata Z^K kao i komponenata pomeranja u odnosu na ovaj koordinatni sistem (vidi odeljak 6) i gde su R_{12}^O, R_{23}^O i R_{31}^O obeleženi sa R_{XY}^O, R_{YZ}^O i R_{ZX}^O respektivno.

Iz (k), (l) i (16.17) se nalazi sistem jednačina za H_2:

$$H_{2,1}=\frac{\partial H_2}{\partial X}=\frac{X}{R}-\frac{X^P}{R};\quad H_{2,2}=\frac{\partial H_2}{\partial Y}=-\nu\frac{Y}{R},\quad H_{2,3}=\frac{\partial H_2}{\partial Z}=\nu\frac{Z^P}{R}-\nu\frac{Z}{R}.$$

Integracijom prve jednačine sistema dobijamo

$$H_2=\frac{X^2}{2R}-\frac{X^P}{R}X+p(Y,Z),$$

gde je $p(Y, Z)$ proizvoljna funkcija svojih argumenata. Iz ovog izraza i druge jednačine sistema sledi da je

$$\frac{\partial p}{\partial Y} = -\nu \frac{Y}{R},$$

odakle se integracijom dobija

$$p = -\nu \frac{Y^2}{2R} + q(Z),$$

gde je $q(Z)$ proizvoljna funkcija svoga argumenta. Tada je

$$H_2 = \frac{X^2}{2R} - \frac{X^P}{R} X - \nu \frac{Y^2}{2R} + q(Z).$$

Iz ovog izraza i treće jednačine sistema, kojim je određeno H_2, dobijamo da je

$$\frac{dq}{dZ} = \nu \frac{Z^P}{R} - \nu \frac{Z}{R},$$

čije rešenje glasi

$$q = \nu \frac{Z^P}{R} Z - \nu \frac{Z^2}{2R}.$$

Znači da je

$$H_2 = \frac{X^2}{2R} - \frac{X^P}{R} X - \nu \frac{Y^2}{2R} - \nu \frac{Z^2}{2R} + \nu \frac{Z^P}{R} Z.$$

Ako se sada izračunaju vrednosti ove funkcije u tačkama P i P_0, tj. ako se odrede H_2^P i H_2^O, tada je lako pokazati da je

$$u_Y^O = -\frac{1}{2R} \{(X^P)^2 + \nu [(Y^P)^2 - (Z^P)^2]\} - \left(R_{RY}^O - \frac{X^O}{R}\right) X^P +$$

$$+ \left(R_{YZ}^O - \nu \frac{Z^O}{R}\right) Z^P + C_2 - \frac{1}{2R} \{(X^O)^2 - \nu [(y^O)^2 - (Z^O)^2]\},$$

što neposredno sledi iz (16.27) za $J = 2$.

Za H_3 odgovarajući sistem jednačina je

$$H_{3,1} = \frac{\partial H_3}{\partial X} = 0, \quad H_{3,2} = \frac{\partial H_3}{\partial Y} = 0, \quad H_{3,3} = \frac{\partial H_3}{\partial Z} = -\nu \frac{Y^P}{R}.$$

Iz prve dve jednačine ovog sistema se vidi da H_3 ne zavisi od X i Y, a integracijom treće se dobija

$$H_3 = -\nu \frac{Y^P}{R} Z.$$

Lako je videti da je

$$H_3^P - H_3^O = -\nu \frac{Y^P Z^P}{R} + \nu \frac{Z^O}{R} Y^P.$$

Smenom ovog izraza u (16.27), za $J = 3$, sledi

$$u_Z^P = -\nu \frac{Y^P Z^P}{R} - R_{XZ}^O X^P - \left(R_{YZ}^O - \nu \frac{Z^O}{R}\right) Y^P + C_3. \qquad \text{(o)}$$

Izrazi (m), (n) i (o) određuju komponente traženog polja pomeranja. Upoređujući ove izraze sa (16.21), (16.24) i (16.25) na'azimo vezu između konstanti ovih izraza, tj.

$$A = R_{XY}^O - \frac{X^O}{R}, \quad B = R_{XZ}^O, \quad C = C_1, \quad D = R_{YZ}^O - \nu \frac{Z^O}{R},$$

$$E = C_2 - \frac{1}{2R} \{(X^O)^2 - \nu [(Y^O)^2 + (Z^O)^2]\}, \quad F = C_3,$$

gde je C_J $(J = 1, 2, 3)$ dato sa $(16.27)_2$. I u jednom i u drugom slučaju, očigledno je, ukupan broj nezavisnih konstanti je šest. Određivanje ovih konstanti vezano je za određene granične uslove. U našim problemima ovi uslovi uvek imaju fizički smisao pa je sa tog stanovišta interpretacija konstanti bitno vezana za fizičku stranu problema. Ako su granični uslovi dati preko pomeranja u_K^O i rotacije R_{KL}^O, definisanih u tački tela P_O, onda drugi metod ima izvesnu prednost u pogledu određivanja polja pomeranja. Sa matematičkog stanovišta prvi metod se češće koristi.

Međutim, to ne znači da su ova dva metoda i jedina. Postoje i drugi metodi, ali ih mi nećemo navoditi, s obzirom na predmet našeg izučavanja, mada je njihovo poznavanje sasvim poželjno.

II. Problem određivanja polja pomeranja u slučaju konačnih deformacija je daleko složeniji. Sa matematičkog stanovišta problem se svodi na integraciju sistema nelinearnih parcijalnih diferencijalnih jednačina (7.12). U tom slučaju izvođenje uslova kompatibilnosti na do sada izloženi način, tj. eliminacijom komponenata pomeranja, je vrlo složen postupak i kao takav nepraktičan. Tada se koristi drugi postupak, koji je geometrijskog karaktera. U suštini problem se svodi na određivanje jednačina kretanja $(4.5)_1$ za zadati tenzor relativne deformacije ili ekvivalentno tome, za zadati tenzor deformacije C_{KL} s obzirom na $(7.11)_1$. Iz (6.1) se odmah vidi da je položajem $\boldsymbol{x}$ (ili $\boldsymbol{p}$) bilo koje čestice tela, u datom trenutku vremena, jednoznačno određeno polje pomeranja. Važi i obrnuto. U odnosu na Dekartove koordinate ovi zaključci su jasno izraženi sa (6.2). Prema tome, uslovi kompatibilnosti ili uslovi integrabilnosti koje moraju zadovoljavati tenzori E_{KL} i C_{KL}, da bi postojalo jednoznačno polje pomeranja ili jednoznačno kretanje, su međusobno ekvivalentni.

Jednačine

$$C_{KL} = g_{kl} x^k_{;K} x^l_{;L}, \qquad (7.3)$$

su onaj polazni sistem jednačina iz koga, za dati tenzor deformacije C_{KL}, određujemo kretanje tela. Iz ovog sistema se dobija

$$\frac{\partial x^k}{\partial X^K} = x^k_{;K}, \qquad (16.28)$$

$$\frac{\partial}{\partial X^L} x^k_{;K} = \overset{\boldsymbol{C}}{\begin{Bmatrix} M \\ K\,L \end{Bmatrix}} x^k_{;M} - \overset{\boldsymbol{g}}{\begin{Bmatrix} k \\ l\,m \end{Bmatrix}} x^l_{;L}\, x^m_{;K}, \qquad (16.29)$$

koji definišu sisteme parcijalnih diferencijalnih jednačina po x^k i $x^k_{;K}$ i gde su $\overset{g}{\begin{Bmatrix} m \\ k\,l \end{Bmatrix}}$ $\overset{C}{\begin{Bmatrix} M \\ K\,L \end{Bmatrix}}$ Kristofelovi (Christofell) simboli u odnosu na tenzore g_{kl} i C_{KL} respektivno. Naš problem se sada svodi na nalaženje dvanaest funkcija

$$x^k = x^k(X^K, t) \quad \text{i} \quad x^k_{;K} = x^k_{;K}(X^K, t),$$

koje zadovoljavaju ove sisteme parcijalnih diferencijalnih jednačina i takođe šest konačnih jednačina (7.3), koje ćemo pisati u ekvivalentnom obliku

$$C_{KL} - g_{kl} x^k_{;K} x^l_{;L} = 0. \tag{7.3$_a$}$$

Uslovi integrabilnosti sistema jednačina (16.28) su

$$\frac{\partial}{\partial X^L} \frac{\partial x^k}{\partial X^K} = \frac{\partial}{\partial X^K} \frac{\partial x^k}{\partial X^L}$$

i identički su zadovoljeni s obzirom na (16.29). Za (16.29) ovi uslovi su

$$\frac{\partial}{\partial X^M} \frac{\partial}{\partial X^L} x^k_{;K} = \frac{\partial}{\partial X^L} \frac{\partial}{\partial X^M} x^k_{;K}$$

i, pomoću (16.29), mogu se pisati u obliku

$$\overset{C}{R}_{KLMN} = \overset{g}{R}_{klmn} x^k_{;K} x^l_{;L} x^m_{;M} x^n_{;N},$$

gde su $\overset{C}{R}_{KLMN}$ i $\overset{g}{R}_{klmn}$ Riman-Kristofelovi tenzori definisani u odnosu na tenzore C_{KL} i g_{kl} respektivno. S obzirom na to da je g_{kl} osnovni metrički tenzor E_3 i da je tada

$$\overset{g}{R}_{klmn} = 0$$

ovi uslovi integrabilnosti se mogu napisati u obliku

$$\overset{C}{R}_{KLMN} = 0. \tag{16.30}$$

To su ujedno i traženi uslovi kompatibilnosti koje mora zadovoljavati tenzor deformacije C_{KL}.

Važno je uočiti da sistem jednačina (16.29) sledi, na način kako je dobijen, ne samo iz (7.3), nego i iz njemu proširenog sistema

$$C_{KL} = g_{kl} x^k_{;K} x^l_{;L} + A_{KL}$$

gde su A_{KL} proizvoljne konstante. Zato je za bilo koje rešenje sistema (16.28) i (16.29) leva strana (7.3)$_a$ neka konstantna vrednost. Ako se početne vrednosti izaberu tako da bude zadovoljeno (7.3)$_a$ i nađeno rešenje će, za te početne uslove, zadovoljavati (7.3)$_a$. To nameće šest uslova na konstantne integracije. Kako je ukupan broj konstanti integracije sistema (16.28) i (16.29) dvanaest, tada je, s obzirom na prethodno navedenih šest uslova, samo šest od njih potpuno proizvoljno. Pri tome se podrazumeva da su uslovi integrabilnosti (16.30) identički zadovoljeni, što je ekvivalentno zahtevu da telo $\mathcal{B}$, koje se u početnom trenutku t_0 nalazilo u E_3, mora i posle deformacije nalaziti u E_3.

Sa geometrijskog stanovišta uslovi integrabilnosti (16.30) su vezani za metrička svojstva tenzora C_{KL}. Prema dobro poznatoj Rimanovoj teoremi neki simetričan tenzor B_{KL} je metrički tenzor euklidskog prostora ako i samo ako je pozitivno definitan, a njegov, Riman-Kristofelov tenzor $\overset{B}{R}_{KLMN}$, identički jednak nuli. Tenzor C_{KL} je simetričan i pozitivno definitan s obzirom na $(7.1)_2$. Iz istog izraza se vidi da se pomoću njega meri rastojanje, tj. on je metrički tenzor u E_3. Tada, na osnovu navedene Rimanove teoreme, njegov Riman-Kristofelov tenzor $\overset{C}{R}_{KLMN}$ mora biti identički jednak nuli. Prema tome, šest proizvoljno izabranih neprekidnih i diferencijabilnih funkcija $F_{KL}(X^M; t)$, $F_{KL} = F_{LK}$, možemo uzeti za komponente tenzora deformacije, tj.

$$C_{KL} = F_{KL}(X^M; t)$$

ako, i samo ako, je tako dati tenzor C_{KL} pozitivno definitan, a njegov Riman-Kristofelov tenzor $\overset{C}{R}_{KLMN}$ ili $\overset{E}{R}_{KLMN}$ (što je isto) identički jednak nuli. U protivnom, za tako zadati tenzor deformacija nije kompatibilna, ili: deformacija je inkopatibilna. U tom slučaju polje pomeranja nije jednoznačno određeno.

S obzirom na dualnost tenzora C_{KL} i c_{kl} sledi i dualnost uslova kompatibilnosti (16.30), koji tada glasi

$$\overset{c}{R}_{klmn} = 0. \tag{16.31}$$

U razvijenom obliku Riman-Kristofelov tenzor može biti dat sa nekoliko ekvivalentnih izraza. Tako je

$$\begin{aligned}
\overset{c}{R}_{kmpq} &= c_{kr}\left[\frac{\partial}{\partial x^p}\begin{Bmatrix} r \\ m\ q\end{Bmatrix} - \frac{\partial}{\partial x^q}\begin{Bmatrix} r \\ m\ p\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} s \\ m\ q\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} r \\ s\ p\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} s \\ m\ p\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} r \\ s\ q\end{Bmatrix}\right] = \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 c_{kq}}{\partial x^m \partial x^p} - \frac{\partial^2 c_{kp}}{\partial x^m \partial x^q} + \frac{\partial^2 c_{mp}}{\partial x^k \partial x^q} - \frac{\partial^2 c_{mq}}{\partial x^k \partial x^p}\right] + \\
&+ c_{rs}\left[\begin{Bmatrix} r \\ k\ q\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} s \\ m\ p\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} r \\ k\ p\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} s \\ m\ q\end{Bmatrix}\right] = \\
&= -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 c_{rs}}{\partial x^t \partial x^u}\delta^{rt}_{km}\delta^{su}_{pq} + c_{rs}\left[\begin{Bmatrix} r \\ k\ q\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} s \\ m\ p\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} r \\ k\ p\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} s \\ m\ q\end{Bmatrix}\right] = \\
&= \frac{\partial\,[mq, k]}{\partial x^p} - \frac{\partial\,[mp, k]}{\partial x^q} + \begin{Bmatrix} r \\ k\ q\end{Bmatrix}[mp, r] - \begin{Bmatrix} r \\ k\ p\end{Bmatrix}[mq, r],
\end{aligned} \tag{16.32}$$

gde su Kristofelovi simboli prve i druge vrste izračunati u odnosu na c_{kl}. Na osnovu principa dualnosti iz (16.32) dobijamo odgovarajuće izraze za Riman-Kristofelov tenzor $\overset{C}{R}_{KMPQ}$. Iz (6.32) se vidi da je

$$\overset{c}{R}_{kmpq} = -\overset{c}{R}_{mkpq} = -\overset{c}{R}_{kmqp} = \overset{c}{R}_{pqkm}$$

$$\overset{c}{R}_{kmpq} + \overset{c}{R}_{kpqm} + \overset{c}{R}_{kqmp} = 0. \tag{16.33}$$

Uzimajući u obzir ove osobine Riman-Kristofelovog tenzora može se pokazati da je u E_3 ukupan broj njegovih nezavisnih komponenti šest. Te komponente su

$$\overset{c}{R}_{1212}, \overset{c}{R}_{1213}, \overset{c}{R}_{1223}, \overset{c}{R}_{1313}, \overset{c}{R}_{1323}, \overset{c}{R}_{2323}. \tag{16.34}$$

Međutim, s obzirom na to da tenzor $\overset{c}{R}_{klmn}$ zadovoljava Bjankijevu (Bianchi) identičnost

$$\overset{c}{R}_{kmpq,r} + \overset{c}{R}_{kmqr,p} + \overset{c}{R}_{kmrp,q} = 0 \tag{16.35}$$

napred navedenih šest komponenata nisu funkcionalno nezavisne.

U odnosu na tenzor relativne deformacije E_{KL} uslovi kompatibilnosti (16.32) mogu se pisati u ekvivalentnom obliku

$$\begin{aligned} &E_{KM,PQ} + E_{PQ,KM} - E_{KP,MQ} - E_{MQ,KP} + \\ &+ \overset{-1}{C}{}^{RS}\,[(E_{MR,K} + E_{KR,M} - E_{KM,R})(E_{PS,Q} + E_{QS,P} - E_{PQ,S}) - \\ &- (E_{MR,Q} + E_{QR,M} - E_{MQ,R})(E_{PS,K} + E_{KS,P} - E_{PK,S})] = 0. \end{aligned} \tag{16.36}$$

U slučaju infinitezimalnih deformacija uslovi kompatibilnosti dati sa $(16.4)_a$ neposredno slede iz (16.36) kada se poslednja dva reda (16.36) zanemare kao infinitezimale višeg reda.

S obzirom na ekvivalentnost uslova kompatibilnosti (16.36) i (16.30) i na to da tenzor E_{KL} definiše relativni položaj materijalnih tačaka tela zaključujemo: jednačinama (16.28) i (16.29) određen je položaj tela u prostoru do na kruto kretanje. Ta neodređenost položaja tela ogleda se u šest nezavisnih konstanti integracije. Za zadate početne uslove ove konstante su jednoznačno određene čime je i položaj tela u prostoru u trenutku t jednoznačno određen.

U slučaju kada je deformacija ravna, o čemu će kasnije biti više reči, biće

$$x^\alpha = x^\alpha(X^\Gamma_{,}t), \quad z = Z = x^3 = X^3, \quad (\alpha, \Gamma = 1, 2). \tag{16.37}$$

Tada je prostor naših fizičkih događaja euklidski dvodimenzionalni prostor E_2, a

$$u^\alpha = u^\alpha(X^\Gamma_{,}t), \quad u^3 = 0,$$

s obzirom na (16.37) i (6.1). U tom slučaju je, prema (7.12),

$$E_{\Gamma\Lambda} = E_{\Gamma\Lambda}(X^\Delta_{,}t), \quad (\Gamma, \Lambda, \Delta = 1, 2), \tag{16.38}$$

dok su sve ostale komponente tenzora relativne deformacije jednake nuli. Iz $(7.11)_1$ se dobija da je

$$C_{\Gamma\Lambda} = C_{\Gamma\Lambda}(X^\Delta_{,}t), \quad C_{3\Gamma} = C_{\Gamma 3} = 0, \quad C_{33} = 1, \tag{16.39}$$

jer je tada $G_{3\Gamma} = G_{\Gamma 3} = 0$, $G_{33} = 1$ s obzirom na $(16.37)_2$. Uslovi kompatibilnosti se tada svode na svega jednu jednačinu i to

$$\overset{C}{R}_{1212} = 0, \tag{16.40}$$

dok su sve ostale nezavisne komponente, date sa (16.34), identički jednake nuli.

U slučaju da su ravne deformacije infinitezimalne, traženi uslov kompatibilnosti se dobija iz $(16.4)_a$ i u razvijenom obliku glasi

$$\bar{E}_{11,22} + \bar{E}_{22,11} - 2\bar{E}_{12,12} = 0. \tag{16.41}$$

U odnosu na Dekartove koordinate ovaj uslov kompatibilnosti postaje

$$\frac{\partial^2 \bar{E}_{XX}}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 \bar{E}_{YY}}{\partial X^2} - 2\frac{\partial^2 \bar{E}_{XY}}{\partial X \partial Y} = 0. \tag{16.42}$$

Do sada je bilo reči samo o kompatibilnim deformacijama.

Radi potpunijeg sagledavanja fizičkih problema vezanih za deformaciju tela smatramo nužnim da kažemo, makar informativno, nekoliko reči o deformacijama koje nisu kompatibilne i koje zbog toga nazivamo: inkompatibilne deformacije. U tom slučaju, već je ranije bilo rečeno, polje pomeranja nije jednoznačno definisano. Kratko rečeno: u slučaju inkompatibilnih deformacija polje pomeranja je višeznačno ili prekidno. Samim po sebi se razume da tada uslovi kompatibilnosti izraženi relacijama (16.4) ili (16.6), u slučaju infinitezimalnih deformacija, ili (16.30), u slučaju konačnih deformacija, nisu zadovoljeni. Zato se tenzori η^{IJ} i $\overset{C}{R}_{KLMN}$, kojima se izražavaju ovi uslovi, i nazivaju *tenzori inkompatibilnosti* za infinitezimalne i konačne deformacije, respektivno.

Problemi inkompatibilnih deformacija su od velikog značaja u praksi. Takvi problemi su vezani za termičke napone, za probleme dislokacija, probleme početnih napona i druge značajne probleme. U poslednje vreme ovim problemima se poklanja velika pažnja i sa teorijskog stanovišta. Formirane su i posebne naučne discipline koje se bave ispitivanjem pojedinih uzroka inkompatibilnosti. Takva je, na primer, teorija dislokacija. U okviru takvih teorija, posebnih naučnih disciplina, inkompatibilne deformacije se posebno izučavaju.

Vežbanja

1. Pokazati da je za jedan od navedena dva tenzora deformacije infinitezimalna deformacija kompatibilna. Za taj tenzor odrediti polje pomeranja ako su u $P_0(0, 0, 0)$ pomeranje u_O^K i rotacija R_{KL}^O jednaki nuli.

   U datim izrazima

   $$\text{a)}\quad \bar{E}_{XX} = k\frac{X^2 + Y^2}{c^2}, \quad \bar{E}_{YY} = k\frac{Y^2}{c^2}, \quad \bar{E}_{XY} = k\frac{XY}{c^2}$$

   $$\text{b)}\quad \bar{E}_{XX} = k\frac{Z(X^2 + Y^2)}{c^3}, \quad \bar{E}_{YY} = k\frac{Y^2 Z}{c^3}, \quad \bar{E}_{XY} = k\frac{XYZ}{c^3},$$

   $$\bar{E}_{XZ} = \bar{E}_{YZ} = \bar{E}_{ZZ} = 0,$$

   c je konstanta sa dimenzijom dužine, a k infinitezimalna konstanta.

2. Za tenzor infinitezimalne deformacije

   $$\bar{E}_{XX} = kXY, \quad \bar{E}_{YY} = -\nu kXY, \quad \bar{E}_{XY} = \frac{k}{2}(1 + \nu)(c^2 - Y^2),$$

   gde su ν, k i c konstante, odrediti polje pomeranja.

3. Pokazati da stanje deformacije definisano tenzorom

$$\bar{E}_{XX} = k(X^2 + Y^2), \quad \bar{E}_{YY} = k(Y^2 + Z^2), \quad \bar{E}_{XY} = cXYZ,$$
$$\bar{E}_{XZ} = \bar{E}_{YZ} = \bar{E}_{ZZ} = 0,$$

gde su k i c konstante, nije moguće za neprekidno telo.

4. Čvrsto telo se nehomogeno zagreva do temperature $T(X, Y, Z)$. Ako se pretpostavi da se svaki element tela slobodno (bez ograničenja) termički širi, onda je

$$\bar{E}_{XX} = \bar{E}_{YY} = \bar{E}_{ZZ} = \alpha T, \quad \bar{E}_{XY} = \bar{E}_{YZ} = \bar{E}_{ZX} = 0,$$

gde je konstanta α koeficijent termičkog širenja. Pokazati da je to moguće samo tada kada je T linearna funkcija svojih argumenata, tj. kada je $T = aX + bY + CZ + d$, gde su a, b, c i d konstante.

5. Za dati tenzor relativne infinitezimalne deformacije

$$\bar{E}_{XX} = k(5 + X^2 + Y^2 + X^4 + Y^4),$$
$$\bar{E}_{YY} = k(6 + 3X^2 + 3Y^2 + X^4 + Y^4), \quad \bar{E}_{XY} = \bar{E}_{YZ} = \bar{E}_{ZX} = 0,$$
$$\bar{E}_{ZZ} = k[10 + 4XY(X^2 + Y^2 + 2)],$$

pokazati da su uslovi kompatibilnosti zadovoljeni. Naći polje pomeranja ako su pomeranje i rotacija u koordinatnom početku jednaki nuli.

6. Izabrati bilo koje tri neprekidne i diferencijabilne funkcije X, Y, Z i t za komponente pomeranja. Za tako izabrano polje pomeranja odrediti tenzor relativne infinitezimalne deformacije $\bar{E}_{KL}$. Poznato je da su uslovi kompatibilnosti za tako dobijeni tenzor $\bar{E}_{KL}$ identički zadovoljeni.

   Smatrajući da je poznat samo tenzor $\bar{E}_{KL}$ odrediti polje pomeranja za tako određeni tenzor i uporediti ga sa izabranim poljem pomeranja.

   Kada će ova dva polja pomeranja biti identički jednaka?

7. Ako se X^K posmatraju kao konvektivne koordinate, onda je sa (4.5) definisana koordinatna transformacija u E_3. Tada je C_{KL} osnovni metrički tenzor u $\varkappa_t$ u E_3 u odnosu na konvektivne koordinate X^K. Kao takav ima osobinu da diže i spušta indekse komponenata datih tenzorskih veličina. Zaista, ako je $\boldsymbol{v}$ neki vektor onda je

a) $$v^K = v^k X^K_{;k},$$

gde su v^K i v^k komponente vektora $\boldsymbol{v}$ u odnosu na koordinate X^K i x^k respektivno i gde je $X^K_{;k}$ dato sa (5.4). Kovarijantne koordinate vektora $\boldsymbol{v}$ u odnosu na x^k su $v_k = g_{kl}v^l$. Pitanje glasi: da li su njegove kovarijantne koordinate u odnosu na X^K (kao konvektivne koordinate) date sa $v_K = C_{KL}v^L$? Da bi to dokazali potrebno je i dovoljno pokazati da je sa v_K određen vektor $\boldsymbol{v}$, tj. da v_K zadovoljava određeni zakon transformacije koji povezuje komponente vektora $\boldsymbol{v}$ u dva koordinatna sistema. Ako se pođe od tog izraza i iskoristi a) dobićemo

b) $$v_K = C_{KL}v^L = C_{KL}v^l X^L_{;l} = g_{kl}x^k_{;K}v^l = v_k x^k_{;K},$$

gde smo koristili $(7.3)_1$ i (5.3). Izraz b) predstavlja zakon transformacije između koordinata vektora $\boldsymbol{v}$ definisanih u odnosu na X^K i x^k respektivno. Iz b) se neposredno vidi, na način kako je definisano v_K, da C_{KL} ima osobinu spuštanja indeksa.

Pokazati da C^{KL} ima osobinu dizanja indeksa.

U slučaju da su X^K materijalne koordinate, tenzor C_{KL} nema ovo svojstvo. Pokazati to na tenzoru prvog reda.

8. Izraziti uslove kompatibilnosti $(16.4)_a$ u odnosu na:

a) sferne polarne koordinate

b) cilindarske polarne koordinate.

9. Neka je

$$\bar{E}_{XX} = a + b(X^2 + Y^2) + X^4 + Y^4, \quad \bar{E}_{YY} = \alpha + \beta(X^2 + Y^2) + X^4 + Y^4,$$

$$\bar{E}_{XY} = A + BXY(X^2 + Y^2 - c^2), \quad \bar{E}_{YZ} = \bar{E}_{ZX} = \bar{E}_{ZZ} = 0,$$

gde su a, b, c, α, β, A i B konstante. Pokazati da je deformacija kompatibilna ako je

$$B = 2, \quad b + \beta + 2c^2 = 0.$$

Za taj slučaj odrediti polje pomeranja.

10. Ako E_{KL} zadovoljava uslove kompatibilnosti i ako je ${}^0u_K$ bilo koje rešenje sistema $\bar{E}_{KL} = u_{(K,L)}$, tada najopštije rešenje ovog sistema glassi

$$u_K = {}^0u_K + P^M\bar{R}_{MK} + B_K$$

gde su: P^M bilo koji vektor koji zadovoljava uslov da je $P^M_{;L} = \delta^M_L$, $\bar{R}_{MK}$ bilo koji antisimetričan tenzor takav da je $\bar{R}_{MK;L} = 0$ i $B_{K;L} = 0$. Dokazati.

Napomena: Ovim opštim izrazom se izražava stav da je pomeranje, koje odgovara datom tenzoru relativne deformacije, određeno do na kruto kretanje.

11. Neka je tenzor infinitezimalne deformacije za jednostruko povezano telo

$$\bar{E}_{KL} = A_{KLMN}Z^MZ^N,$$

gde su A_{KLMN} konstante. Kakve uslove moraju zadovoljavati ove konstante da bi uslovi kompatibilnosti bili zadovoljeni? Odrediti za taj slučaj polje pomeranja.

12. Za šuplji cilindar, čija je osa z-osa, moguće dvodimenzijsko polje infinitezimalne deformacije dato je sa

$$\bar{e}_{11} = \frac{A}{2\mu}\frac{x}{r^2}\left(1 - \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu}\frac{2y^2}{r^2}\right), \quad \bar{e}_{12} = \frac{A(\lambda + \mu)}{\mu(\lambda + 2\mu)}\frac{yx^2}{r^4},$$

$$\bar{e}_{22} = \frac{A}{2(\lambda + 2\mu)}\frac{x}{r^2}\left(1 - \frac{\lambda + \mu}{\mu}\frac{x^2 - y^2}{r^2}\right)$$

gde su A, λ i μ konstante.

a) Da li dato polje deformacije zadovoljava uslove kompatibilnosti?

b) Odrediti polje pomeranja, pod uslovom da dati tenzor deformacije zadovoljava uslove kompatibilnosti.

c) Da li je tako određeno polje pomeranja jednoznačno i neprekidno? Ako ne, pod kojim uslovima je jednoznačno?

17. NEKI PRIMERI DEFORMACIJE

Razmotrimo neke primere deformacije, koji nam, zbog svoje proste geometrijske interpretacije, omogućavaju jasno sagledavanje prirode lokalne deformacije. U prvom redu to su:

I Deformacije koje su rezultat ograničenja na pomeranja nezavisno od oblika tela u referentnoj konfiguraciji.

Ovoj klasi deformacije pripadaju kruto pomeranje (odeljci 7a, 9, 11), čista deformacija (odeljak 12), potencijalna deformacija (odeljak 12) i izohorična deformacija.

Izohorične deformacije. Deformacije pri kojima se zapreminski element ne menja nazivamo izohorične deformacije. Potreban i dovoljan uslov da bi deformacija bila izohorična dat je jednom od relacija

$$J = 1, \quad III_{\boldsymbol{c}} = 1, \quad III_{\boldsymbol{c}}^{-1} = 1, \quad 1 - 2I_{\boldsymbol{e}} + 4II_{\boldsymbol{e}} - 8III_{\boldsymbol{e}} = 1, \ldots \tag{17.1}$$

koje slede iz (15.12), (15.13) ...

Na osnovu $(17.1)_2$ i teoreme o reprezentaciji izotropnih funkcija (vidi Dodatak) sledi da je izotropna skalarna funkcija od $\boldsymbol{c}$ funkcija njegovih invarijanti $I_{\boldsymbol{c}}$ i $II_{\boldsymbol{c}}$. Ove invarijante zadovoljavaju relacije

$$I_{\boldsymbol{c}} = II_{\boldsymbol{C}}, \quad II_{\boldsymbol{c}} = I_{\boldsymbol{C}}. \tag{17.2}$$

II Deformacije koje su određene pomeranjem u odnosu na referentnu konfiguraciju.

Homogena deformacija je definisana afinom homogenom transformacijom

$$z^k = A^k_K Z^K, \quad \boldsymbol{z} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{Z} \tag{17.3}$$

u odnosu na referentnu konfiguraciju. Matrica $\boldsymbol{A}$ je regularna i konstantna. Deformacija (17.3) prevodi prave linije u prave, elipse (uključujući krug kao specijalni slučaj) u elipse, a elipsoide u elipsoide. Izborom vrednosti $\boldsymbol{A}$ dolazimo do specijalnih deformacija od kojih navodimo neke.

Uniformna dilatacija. Homogena deformacija pri kojoj su glavna izduženja jednaka, recimo λ, naziva se uniformna dilatacija. Za takvu deformaciju je

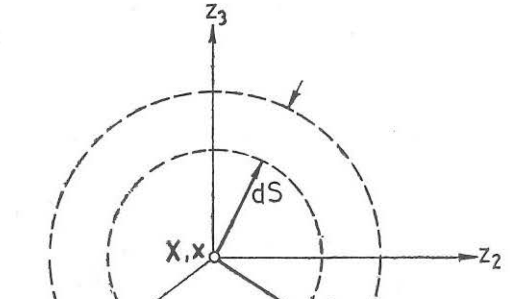
$$\boldsymbol{A} = \lambda \boldsymbol{I}, \quad \boldsymbol{c} = \overset{-1}{\boldsymbol{C}} = \frac{1}{\lambda^2}\boldsymbol{I}, \quad \boldsymbol{C} = \overset{-1}{\boldsymbol{c}} = \lambda^2 \boldsymbol{I}, \tag{17.4}$$

gde je $0 < \lambda < \infty$.

Prostorni elipsoid (10.4) postaje sfera

$$\lambda^2 (dX^2 + dY^2 + dZ^2) = k^2,$$

tj. uniformna dilatacija deformiše sferu u sferu. Kada je $\lambda > 1$ reč je o uniformnom širenju; za uniformno sabijanje (kompresiju) je $0 < \lambda < 1$.



Sl. 18

Prosto izduženje. Homogena deformacija pri kojoj su dva glavna izduženja jednaka, naziva se prosto izduženje. Tada je

$$\boldsymbol{A} = \begin{Bmatrix} B\lambda & 0 & 0 \\ 0 & B\lambda & 0 \\ 0 & 0 & B\lambda \end{Bmatrix}, \qquad \begin{matrix} 0 < B < \infty \\ 0 < \lambda < \infty \end{matrix}, \qquad B \neq 1$$

$$\boldsymbol{c} = \overset{-1}{\boldsymbol{C}} = \begin{Bmatrix} \dfrac{1}{B^2\lambda^2} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{B^2\lambda^2} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{B^2\lambda^2} \end{Bmatrix}, \tag{17.5}$$

$$\overset{-1}{\boldsymbol{c}} = \boldsymbol{C} = \begin{Bmatrix} B^2\lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & B^2\lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & B^2\lambda^2 \end{Bmatrix}.$$

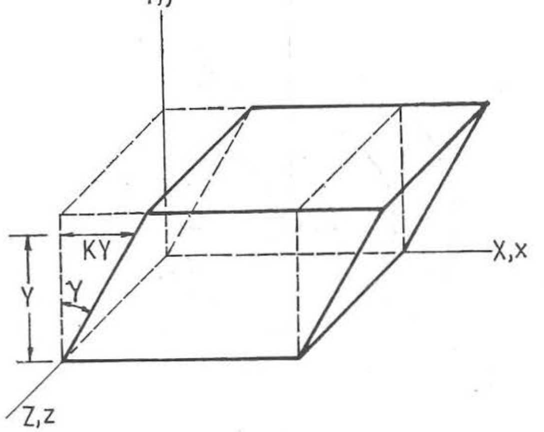
Prosto smicanje. Homogena deformacija za koju je

$$x = X + KY, \quad y = Y, \quad z = Z \tag{17.6}$$

naziva se prosto smicanje. Prosto smicanje rotira kruto ravni $X = \text{const}$ oko linije preseka ovih ravni sa ravni $Y = 0$ za ugao smicanja γ koji se određuje iz izraza

$$\gamma = \operatorname{arc\,tg} K. \tag{17.7}$$

Pri tome ravni $Y = \text{const}$ i $Z = \text{const}$ ostaju nepromenjene. Prosto smicanje može biti ilustrovano špilom karata u obliku paralelepipeda koji prelazi u kosi paralelepiped u pravcu X-ose (sl. 19).



Sl. 19

U slučaju prostog smicanja je

$$\boldsymbol{A} = \begin{Bmatrix} 1 & K & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix} \tag{17.8}$$

$$\boldsymbol{c} = \begin{Bmatrix} 1 & -K & 0 \\ -K & 1+K^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix},$$

$$\boldsymbol{C} = \begin{Bmatrix} 1 & K & 0 \\ K & 1+K^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix}, \tag{17.9}$$

$$I_{\boldsymbol{C}} = II_{\boldsymbol{C}} = 3 + K^2, \quad III_{\boldsymbol{C}} = 1. \tag{17.10}$$

Iz $(17.10)_3$ sledi da je prosto smicanje izohorična deformacija.

Karakteristične vrednosti tenzora $\boldsymbol{C}$ i $\boldsymbol{c}$ su 1, λ_1^2 i λ_2^2, gde je

$$\begin{aligned} \lambda_1^2 &= 1 + \frac{1}{2}K^2 + K\sqrt{1 + \frac{1}{4}K^2} \\ \lambda_2^2 &= \frac{1}{\lambda_1^2} = 1 + \frac{1}{2}K^2 - K\sqrt{1 + \frac{1}{4}K^2}. \end{aligned} \tag{17.11}$$

Njima odgovarajući karakteristični jedinični vektori su:

Za tenzor $\boldsymbol{C}$

$$\boldsymbol{N}_{1,2} = \frac{\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}\left(\frac{1}{2}K + \sqrt{1 + \frac{1}{4}K^2}\right)}{\sqrt{2 + \frac{1}{2}K^2 + K\sqrt{1 + \frac{1}{4}K^2}}}, \quad \boldsymbol{N}_3 = \boldsymbol{k} \tag{17.12}$$

Za tenzor $\boldsymbol{c}$

$$\boldsymbol{n}_{1,2} = \frac{\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}\left(-\frac{1}{2}K \pm \sqrt{1 + \frac{1}{4}K^2}\right)}{\sqrt{2 + \frac{1}{2}K^2 \mp \sqrt{1 + \frac{1}{4}K^2}}}, \quad \boldsymbol{n}_3 = \boldsymbol{k} \tag{17.13}$$

Napomenimo još da je tenzor rotacije

$$\boldsymbol{R} = \begin{Bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{4}K^2}} & \dfrac{\frac{1}{2}K}{\sqrt{1 + \frac{1}{4}K^2}} & 0 \\ \dfrac{-\frac{1}{2}K}{\sqrt{1 + \frac{1}{4}K^2}} & \dfrac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{4}K^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix}. \tag{17.14}$$

18. MALE DEFORMACIJE

Klasična linearna teorija elastičnosti se zasniva na pretpostavci da je deformacija tela mala. Takva teorija elastičnosti na zadovoljavajući način razmatra npr. probleme deformacije metala.

S obzirom da su male deformacije aproksimacija konačnih deformacija mi ćemo se ovde zadržati samo na nekim aproksimacijama i njihovim najvažnijim rezultatima.

Mala glavna izduženja. Po definiciji $E_{(\alpha)}$ su mali i s obzirom na $(9.9)_{2,4}$ i (9.16)

$$\begin{aligned} E_{KK} &\approx E_{(K)} \approx e_{kk} \approx e_{(k)}, \\ 2E_{KL} &\approx [1 + E_{(K)} + E_{(L)}] \sin \gamma_{(KL)}. \end{aligned} \tag{18.1}$$

Za funkcionalne identičnosti tenzora $\boldsymbol{E}$ i $\boldsymbol{e}$ tada važi

$$I_E \approx I_e, \quad II_E \approx II_e, \quad III_E \approx III_e. \tag{18.2}$$

Takođe je

$$C^{\pm\frac{1}{2}} \approx I + \overline{E}, \tag{18.3}$$

što neposredno sledi iz $(7.16)_1$. Koristeći (18.3), kao i (12.24) i (12.26) dobijamo

$$\begin{aligned}\bar{E}_{KM} &\approx R_{(KM)} + R_{(K}{}^{P}E_{M)P} - G_{KM},\\ \overline{R}_{KM} &\approx R_{[KM]} + R_{[K}{}^{P}E_{M]P},\\ R^{K}{}_{M} &\approx \delta^{K}{}_{M} + \overline{R}^{K}{}_{M} + \bar{E}^{K}{}_{M} - E^{K}{}_{M} - E^{P}{}_{M}u^{K}_{;P}.\end{aligned}$$

U slučaju kada se zanemare kvadratni članovi sledi da je

$$\begin{aligned}\overline{R}_{KM} &\approx R_{[KM]},\\ \bar{E}_{KM} &\approx R_{(KM)} - G_{KM},\\ R^{K}{}_{M} &\approx \delta^{K}{}_{M} + u^{K}_{;M}.\end{aligned} \tag{18.5}$$

Iz $(11.8)_5$ se pokazuje da je

$$III_C \approx 1 + I_E. \tag{18.6}$$

Tada iz (15.12), (18.6) i $(18.2)_1$ dobijamo

$$\frac{dv - dV}{dV} \approx I_E \approx I_e. \tag{18.7}$$

Mala rotacija. Kada je rotacija θ za svaki linijski element mala, pisaćemo tg $\theta_Z \approx$ $\approx \theta_Z$. Tada (12.6) postaje

$$\theta_z \approx \frac{-\overline{R}_{XY}}{\sqrt{(1 + \bar{E}_{XX})(1 + \bar{E}_{YY}) - \bar{E}^2_{XY}}}. \tag{18.8}$$

Kako slične relacije važe i za θ_X i θ_Y sledi da je $\overline{\boldsymbol{R}}$ malo kada je rotacija mala. U tom slučaju tenzor relativne deformacije E_{KL} može da se aproksimira izrazom

$$E_{KL} \approx \bar{E}_{KL} + \frac{1}{2}(\bar{E}_{MK}\bar{E}^{M}_{L} + \bar{E}_{MK}\overline{R}^{M}{}_{L} + \overline{R}_{MK}\bar{E}^{M}{}_{L}), \tag{18.9}$$

što neposredno sledi iz $(8.3)_1$.

Mala izduženja i male rotacije. U slučaju kada su i $\bar{E}_{KL}$ i $\overline{R}_{KL}$ male veličine kažemo da je reč o malim izduženjima i malim rotacijama. Tada (18.8) i (18.9) postaju

$$\theta_z \approx -\overline{R}_{XY}, \tag{18.10}$$

$$E_{KL} \approx \bar{E}_{KL} + \frac{1}{2}(\bar{E}_{MK}\overline{R}^{M}{}_{L} + \overline{R}_{MK}\bar{E}^{M}{}_{L}). \tag{18.11}$$

Mali gradijenti pomeranja. Ako su izduženja i rotacije male sledi da su i gradijenti pomeranja $u_{K,L}$ mali. Obrnuto ne mora da važi, tj. ne moraju izduženja i rotacija biti jednako male veličine u slučaju malih gradijenata pomeranja. Pretpostavljajući da je $u_{K,L}$ malo sledi da je

$$\boldsymbol{E} \approx \overline{\boldsymbol{E}}, \quad \boldsymbol{e} \approx \bar{\boldsymbol{e}}, \tag{18.12}$$

što neposredno sledi iz (8.3). Takođe je

$$R^K{}_M \approx \delta^K{}_M + \bar{R}^K{}_M. \tag{12.27}$$

Dalje, kako je

$$\begin{aligned} u^K_{;M} &= (g^K_k u^k)_{;M} = g^K_k u^k_{;m} x^m_{;M} \\ &= g^K_k g^m_P (\delta^P_M + u^P_{;M}) u^k_{;m} \end{aligned} \tag{18.13}$$

s obzirom na $(6.33)_1$, sledi da je $u^k_{;m}$ malo kada je $u^K_{;M}$ malo, i obrnuto. Tada se (18.13) svodi na oblik

$$u^K_{;M} \approx g^K_k g^m_M u^k_{;m}. \tag{18.14}$$

Kao posledica toga važi

$$\bar{R}_{KM} = g^k_K g^m_M \bar{r}_{km}, \quad \bar{E}_{KM} \approx g^k_K g^m_M \bar{e}_{km}. \tag{18.15}$$

Iz (18.14) se može zaključiti:

Kada su gradijenti deformacije mali $u_{k;m}$ i $u_{K;M}$ su komponente istog tenzora u $\boldsymbol{x}$ i $\boldsymbol{X}$, respektivno.

Analogan zaključak se može izvesti iz (18.15) za tenzore $\bar{R}_{KM}$ i $\bar{r}_{km}$, kao i $\bar{E}_{KM}$ i $\bar{e}_{km}$.

Ovi zaključci su specijalan slučaj opštijeg slučaja koji se odnosi na zamenu izvoda po X^K izvodom po x^k bilo koje tenzorske funkcije f. Zaista, u opštem slučaju je

$$f_{;K} = f_{k;} x^k_{;K} = f_{;k} g^k_L (\delta^L_K + u^L_{;K}). \tag{18.16}$$

Ovaj izraz se svodi na

$$f_{;k} \approx g^k_K f_{;k} \tag{18.17}$$

u slučaju kada su gradijenti pomeranja mali. Ukratko rečeno:

Ako su gradijenti pomeranja mali onda su $f_{;K}$ i $f_{;k}$ komponente iste veličine u $\boldsymbol{X}$ i $\boldsymbol{x}$.

U slučaju malih gradijenata pomeranja važi *princip superpozicije* za uzastopne deformacije i rotacije. S obzirom na značaj ovog principa razmotrimo ga detaljno u slučaju uzastopnih deformacija, prvo iz $\boldsymbol{X}$ u χ, a zatim iz χ u $\boldsymbol{x}$. Tada je, s obzirom na $(7.3)_1$

$$\begin{aligned} C_{KL} &= g_{kl} x^k_{;K} x^l_{;L} = g_{kl} x^k_{;\alpha} x^l_{;\beta} \chi^\alpha_{;K} \chi^\beta_{;L} \\ &= {}_2C_{\alpha\beta} \chi^\alpha_{;K} \chi^\beta_{;L}, \end{aligned} \tag{18.18}$$

gde je $\chi^\alpha_{;K} = \dfrac{\partial \chi^\alpha}{\partial X^K}$ i ${}_2\boldsymbol{C}$ — Grinov (Grin) tenzor deformacije iz $\boldsymbol{X}$ u $\boldsymbol{x}$. Ovaj izraz se, pomoću $(7.11)_1$, može napisati u obliku

$$\begin{aligned} C_{KL} &= (g_{\alpha\beta} + 2\,{}_2E_{\alpha\beta})\, \chi^\alpha_{;K} \chi^\beta_{;L} \\ &= {}_1C_{KL} + 2\,{}_2E_{\alpha\beta} \chi^\alpha_{;K} \chi^\beta_{;L}, \end{aligned} \tag{18.19}$$

gde je ${}_1\boldsymbol{C}$ — Grinov tenzor deformacije iz $\boldsymbol{X}$ u χ.

Ponovo koristeći $(7.11)_1$ iz ovog izraza dobijamo

$$E_{KL} \approx {}_1E_{KL} + 2\,{}_2E_{\alpha\beta}\chi^{\alpha}_{;K}\chi^{\beta}_{;L}$$

$$\approx {}_1E_{KL} + 2\,{}_2\bar{E}_{\alpha\beta}\chi^{\alpha}_{;K}\chi^{\beta}_{;L}$$

u slučaju malih gradijenata pomeranja iz χ u $\boldsymbol{x}$.

Ako su gradijenti pomeranja iz $\boldsymbol{X}$ u χ takođe mali, onda je

$$E_{KL} \approx \bar{E}_{KL} = {}_1\bar{E}_{KL} + {}_2\bar{E}_{KL} + 2\,{}_1u_{\alpha;(K}\,{}_2\bar{E}^{\alpha}_{L)}.$$

Konačno, ako su gradijenti pomeranja u oba slučaja mali, sledi da je

$$E_{KL} \approx \bar{E}_{KL} \approx {}_1E_{KL} + {}_2E_{KL} \approx {}_1\bar{E}_{KL} + {}_2\bar{E}_{KL}. \tag{18.20}$$

Na sličan način se pokazuje da važi analogan izraz za rotacije. Kratko rečeno: u odnosu na zajednički sistem izduženja, smicanja i rotacije koje odgovaraju uzastopnim pomeranjima čiji su gradijenti mali mogu biti dobijeni sabiranjem izduženja, smicanja i rotacija koje odgovaraju svakom od pomeranja.

Mala pomeranja. U ovom slučaju, u odnosu na zajednički sistem, je

$$f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{X}), \tag{18.21}$$

tj. za malo pomeranje bilo koja neprekidna funkcija od $\boldsymbol{x}$ može biti predstavljena kao ista funkcija od $\boldsymbol{X}$.

Posebno navodimo da je

$$g^k_K = \delta^k_K. \tag{18.22}$$

Prema tome, ako su i pomeranja i gradijenti pomeranja mali onda je

$$\frac{\partial f}{\partial X^K} \approx \frac{\partial f}{\partial x^k}\,\delta^k_K. \tag{18.23}$$

Saglasno sa napred navedenim rezultatima može se odmah zaključiti da su tenzori deformacije i rotacije u $\boldsymbol{X}$ numerički jednaki istim komponentama odgovarajućih tenzora u $\boldsymbol{x}$. Isto važi za elongaciju.

III KRETANJE

1. BRZINA

Do sada smo posmatrali dve konfiguracije $\varkappa$ i $\varkappa_t$ tela $\mathcal{B}$ koje ono zauzima u dva potpuno određena trenutka vremena t_0 i t $(t > t_0)$ i izučavali odgovarajuće veličine koje karakterišu deformaciju. Pri tome se nije uzimala u obzir promena ovih i drugih veličina u toku kretanja, tj. u funkciji vremena. Kraće rečeno do sada smo izučavali geometrijske ali ne i kinematičke veličine tela.

Jedna od osnovnih kinematičkih veličina je promena položaja čestice u jedinici vremena, koju nazivamo *brzina čestice* X i obeležavamo je sa $\boldsymbol{v}$. Kako X^K identifikuje česticu X, o kojoj je reč, to je X^K za uočenu česticu jednom za svagda određeno i ne menja se pri kretanju čestice. Čestica X određena sa X^K, u toku kretanja zauzima položaje $\boldsymbol{x}$ u prostoru koji su određeni vektorom položaja $\boldsymbol{p}$, tako da je u svakom trenutku vremena

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}). \tag{1.1}$$

gde je

$$x^k = x^k(X^K, t) \tag{1.2}$$

konačna jednačina kretanja materijalne čestice X i kao takva, neprekidna i diferencijabilna funkcija t. Tada je

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \dot{\boldsymbol{p}} \tag{1.3}$$

ili, s obzirom na (1.2) i činjenicu da je $\boldsymbol{g}_k = \dfrac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial x^k}$

$$v^k = \left.\frac{\partial x^k(X^K, t)}{\partial t}\right|_{X=\mathrm{const.}} = \dot{x}^k(X^K, t). \tag{1.4}$$

Za neku drugu česticu tela biće i druge vrednosti materijalnih koordinata X^K koje je identifikuju. Brzina ove čestice biće određena sa (1.4) ali za njenu vrednost

X^K. Neprekidnom promenom X^K u B određuje se brzina svake čestice tela $\mathcal{B}$. U tom slučaju (1.4) definiše polje brzine tela, datog u odnosu na promenljive X^K i t.

Isto polje se može izraziti i u odnosu na promenljive x^k i t ako se eliminiše X^K iz (1.4) pomoću $(2.4.5)_2$. Tada je

$$v^k = v^k(\boldsymbol{x}, t) = \dot{x}^k [\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}, t), t]. \tag{1.5}$$

Za veličine izražene preko skupa promenljivih (X^K, t) kažemo da su date u Lagranžovom ili materijalnom obliku, a izražene preko skupa promenljivih (x^k, t) u Ojlerovom ili prostornom obliku. Prema tome, v^k dato sa (1.5) predstavlja prostorni ili Ojlerov, a sa (1.4) materijalni ili Lagranžov opis polja brzine.

Tačka u kojoj je $\boldsymbol{v} = 0$ zove se *zaustavna tačka.*

Kretanje u kome se polje brzina ne menja po vremenu u bilo kojoj tački prostora $\boldsymbol{x}$ nazivamo *stacionarnim.* U tom slučaju je

$$v^k = \dot{x}^k(\boldsymbol{x}). \tag{1.6}$$

Uopšte, bilo koju veličinu koja je funkcija samo položaja zvaćemo *stacionarnom.*

Ako

$$V^\alpha = \dot{x}^\alpha (x^\beta, t), \quad \dot{x}^3 = 0, \quad (\alpha, \beta = 1, 2) \tag{1.7}$$

važi za neki Dekartov sistem koordinata, onda je polje *brzina ravansko.* Ako (1.7) važi za neki cilindarsko polarni koordinatni sistem, gde je x^3 ugao, tada je polje *rotaciono simetrično.* Za kretanje se kaže da je ravansko ako je polje brzina ravansko, a rotaciono simetrično ako je polje brzina rotaciono simetrično. Pri ravanskom kretanju $x^3 =$ const. reprezentuje familiju ravnih površi, a pri rotacionom kretanju familiju koaksijalnih površi. U oba slučaja dovoljno je ispitati kretanje u jednoj ravni, recimo ravni $x^3 = 0$, koju ćemo zvati ravan kretanja. Potpuna slika kretanja se dobija za ravansko kretanje translacijom ravni kretanja u pravcu svoje normale, a za rotaciono simetrično kretanje rotacijom ravni kretanja oko svoje ose.

Ako (1.7) važi u odnosu na neki sistem krivolinijskih koordinata, gde je $x^3 = 0$ neka zakrivljena površ, a x^α krivolinijske koordinate te površi, onda za kretanje kažemo da je *dvodimenzijsko.* Slika trodimenzijskog kretanja u okolini površi $x^3 = 0$ se dobija izborom koordinatnog sistema u kome $x^3 =$ const. predstavlja površi paralelne sa $x^3 = 0$, a $x^\alpha =$ const. površi koje opisuju normale na $x^3 = 0$ duž njenih koordinatnih linija x^α.

2. PUTANJE, STRUJNE LINIJE I IZVORNE (STREAK) LINIJE

Krivu liniju

$$x^k = x^k (X^K, t), \quad X^K = \text{const.} \tag{2.1}$$

nazivamo *putanjom* materijalne čestice X. Ona određuje položaj čestice X u prostoru u svakom trenutku t. Njena diferencijalna jednačina data je sa

$$\frac{dx^k}{dt} = v^k (x^k, t). \tag{2.2}$$

Za početne uslove (da kriva prolazi kroz tačku $\boldsymbol{X}(X^K)$, početni položaj čestice X u trenutku $t = t_0$) daje jednoznačno rešenje.

Uočimo u nekom trenutku $t =$ const. vektorsko polje $\boldsymbol{v}$. Liniju koja u svakoj tački ima tangentu kolinearnu sa vektorom brzine čestice, koja se na njoj u tom trenutku nalazi, nazivamo *strujnom linijom*. Njena diferencijalna jednačina glasi

$$\frac{dx^k}{d\sigma} = v^k(x^k, t), \quad t = \text{const.} \tag{2.3}$$

gde je σ parametar krive, proizvoljne prirode, i ne mora biti vreme. Rešenje ovog sistema diferencijalnih jednačina određuje strujnu liniju za dato t i menjaće se od trenutka do trenutka.

Izvorna (streak) *linija* kroz fiksnu tačku $\boldsymbol{x}$ u trenutku t je geometrijsko mesto položaja svih čestica u trenutku t koje u bilo koje vreme (nezavisno od toga da li u prošlosti ili budućnosti) zauzimaju položaj $\boldsymbol{x}$. Prema tome, materijalna čestica X je na izvornoj liniji ako zauzima u nekom trenutku τ položaj $\boldsymbol{x}$, tj. ako je

$$x^k = x^k(\boldsymbol{X}, \tau) \quad X^K = X^K(\boldsymbol{x}, \tau). \tag{2.4}$$

U trenutku t ona će zauzimati položaj ξ u prostoru tako da je

$$\xi^k = \xi^k(\boldsymbol{X}, t), \tag{2.5}$$

ili, s obzirom na $(2.4)_2$,

$$\xi^k = \xi^k[X^K(x^l, \tau), t], \tag{2.6}$$

što predstavlja analitički oblik izvorne linije. Kada je kretanje stacionarno sve tri krive linije se poklapaju. Za nestacionarno kretanje krive linije se u opštem slučaju međusobno razlikuju.

Navedimo primer koji ilustruje ove tri linije. Pretpostavimo da se nalazimo na mostu ispod koga protiče reka. Posmatrajmo površ vode. Ako na njoj uočimo neku česticu i pratimo pogledom njeno kretanje — dobijamo putanju čestice. Ako pak, pogledom obuhvatimo površ vode slika kretanja će se trenutno izmeniti. Da smo u tom trenutku napravili fotografiju, uočili bismo linije strujanja vode koje nazivamo strujnim linijama. Da smo u jednoj fiksnoj tački na površi vode u toku izvesnog vremena sipali crvenu uljanu boju rastvorenu u lanenom ulju, koja se ne meša sa vodom, uočili bismo liniju koju nazivamo izvorna linija.

Vežbanja

1. Za dato ravansko kretanje

$$v^1 = \frac{x}{1+t}, \quad v^2 = y, \quad v^3 = 0,$$

pokazati da su pitanje, strujne linije i izvorne linije određene, respektivno, sledećim izrazima

$$y = Ye^{\frac{x-X}{x}}, \quad z = Z,$$

$$y = \left(\frac{x}{a}\right)^{1+t}, \quad z = c,$$

$$\xi^1 = \frac{x(1+t)}{1+\tau}, \quad \xi^2 = ye^{t-\tau}, \quad \xi^3 = z.$$

U ravni $z = 0$ nacrtati dijagrame ovih krivih linija i proučiti ih.

2. Ravansko kretanje zadato je poljem brzine

$$\text{a)}\ \dot{x} = -V\left[1 - \frac{c^2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}\right], \quad \dot{y} = -2Vc^2\frac{xy}{(x^2+y^2)^4}, \quad \dot{z} = 0,$$

$$\text{b)}\ \dot{x} = -\frac{c}{4\pi}\frac{x^2}{y(x^2 + y^2)}, \quad \dot{y} = \frac{c}{4\pi}\frac{y^2}{x(x^2 + y^2)}, \quad \dot{z} = 0.$$

V i c su konstante.

Odrediti strujne linije.

3. Za ravansko kretanje zadate su strujne linije izrazima

$$x = \Phi + e^{\varphi}\cos\psi, \quad y = \psi + e^{\varphi}\sin\psi, \quad \dot{z} = 0.$$

Nacrtati strujne linije i odrediti polje brzina.

4. Za ravansko kretanje određeno poljem brzine

$$\dot{x} = \frac{x}{1+t}, \quad \dot{y} = \frac{y}{1+2t}, \quad \dot{z} = 0,$$

odrediti putanje, strujne linije i izvorne linije. U ravni nacrtati dijagrame ovih linija i proučiti ih.

5. Za ravansko kretanje, određeno poljem brzine u odnosu na cilindarski koordinatni sistem (r, θ, z)

$$\dot{r} = -V\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)\cos\theta, \quad r\dot{\theta} = V\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right)\sin\theta, \quad \dot{z} = 0,$$

gde su V i a konstantne veličine, odrediti strujne linije i putanje.

3. MATERIJALNI IZVOD PO VREMENU

Za dalje izvođenje koristićemo pojam materijalnog izvoda po vremenu ili kratko — materijalni izvod — koji ćemo obeležavati sa $\frac{D}{Dt}$ ili $(\dot{\overline{\ \ }})$. Materijalni izvod neke tenzorske veličine definiše se kao izvod te veličine pod uslovom da se materijalne koordinate posmatraju kao konstante. Primer takvog izvoda je dat sa (1.4). Za neko dvostruko tenzorsko polje

$$T^{K\ldots Lj\ldots l}_{M\ldots Nm\ldots n}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{X}, t)$$

materijalni izvod glasi

$$\frac{D}{Dt}(T^{K\ldots L\,j\ldots l}_{M\ldots Nm\ldots n}) = \dot{\overline{T^{K\ldots Lj\ldots l}_{M\ldots Nm\ldots n}}} = \dot{T}^{\cdots}_{\cdots} = \frac{\partial T^{\cdots}_{\cdots}}{\partial t} + T^{\cdots}_{\ldots,k}\,\dot{x}^k, \tag{3.1}$$

gde se operacija parcijalnog diferenciranja po vremenu $\frac{\partial}{\partial t}$ izvodi pod uslovom da se $\boldsymbol{x}$ i $\boldsymbol{X}$ posmatraju kao konstantne veličine. U (3.1) $\dot{x}^k$ se smatra poznatim jer se u protivnom ne može odrediti materijalni izvod posmatrane veličine. Dalje, mi pretpostavljamo da su $\boldsymbol{x}$ i $\boldsymbol{X}$ vezani relacijama (2.4.5), a $\dot{x}^k$ dato sa (1.4). Ako se posmatrana tenzorska veličina izrazi u prostornom obliku $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}, t)$, onda (3.1) glasi

$$\frac{D(T_{\cdots}^{\cdots})}{Dt} = \frac{\partial T_{\cdots}^{\cdots}}{\partial t} + T_{\cdots,k}^{\cdots}\dot{x}^k, \tag{3.2}$$

gde je

$$\frac{\partial T_{\cdots}^{\cdots}}{\partial t} = \left.\frac{\partial T_{\cdots}^{\cdots}(\boldsymbol{x}, t)}{\partial t}\right|_{\boldsymbol{x}=\mathrm{cont.}} \tag{3.3}$$

Sa fizičkog stanovišta može se dati sledeća interpretacija materijalnog izvoda: to je ona promena veličine $T_{\cdots}^{\cdots}$ po vremenu, koju uočava posmatrač koji se kreće zajedno sa česticom a koja se identifikuje svojim materijalnim koordinatama X^K. Ova promena se, s obzirom na (3.2), sastoji iz dva dela. Prvi deo, određen sa (3.3), predstavlja *lokalnu promenu* po vremenu uočene veličine u fiksnoj tački $\boldsymbol{x}$ prostora, koja određuje trenutni položaj čestice u trenutku t, i nju uočava posmatrač u $\boldsymbol{x}$. Drugi deo u (3.3), $T_{\cdots,k}^{\cdots}\dot{x}^k$, naziva se *konvekcija* $T_{\cdots}^{\cdots}$ i određuje promenu uočene veličine pri promeni položaja u prostoru materijalne čestice X.

Lako je pokazati da pravila običnog diferenciranja zbira i proizvoda ostaju očuvana i za materijalni izvod.

Kako je

$$\dot{g}_{kl} = 0, \tag{3.4}$$

što neposredno sledi iz kovarijantne konstantnosti osnovnog metričkog tenzora, njegove stacionarnosti i (3.2), može se zaključiti da je operacija materijalnog izvoda komutativna sa operacijom dizanja ili spuštanja indeksa i kontrakcije.

Znajući da je

$$\frac{\partial}{\partial t}(T_{\cdots,k}^{\cdots}) = \left(\frac{\partial T_{\cdots}^{\cdots}}{\partial t}\right)_{,k} \tag{3.5}$$

i koristeći (3.1) može se pokazati da važe sledeća pravila komutacije

$$\frac{D}{Dt}(T_{\cdots,k}^{\cdots}) - \left(\frac{DT_{\cdots}^{\cdots}}{Dt}\right)_{,k} = -T_{\cdots,l}^{\cdots}x^l_{,k}, \tag{3.6}$$

$$\dot{T}_{\cdots;K}^{\cdots} = \overline{T_{\cdots;K}^{\cdots}}^{\boldsymbol{\cdot}}. \tag{3.7}$$

Napomena:

U slučaju direktne notacije materijalni izvod je totalni izvod po vremenu tenzorske veličine pri fiksnom $\boldsymbol{X}$. Tako je, za vektorsko polje

$$\boldsymbol{f} = f^k(\boldsymbol{x}, t)\,\boldsymbol{g}_k(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{X}, t),$$

$$\frac{d\boldsymbol{f}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}(f^k\boldsymbol{g}_k) + \frac{\partial}{\partial x^l}(f^k\boldsymbol{g}_k) = \left(\frac{\partial f^k}{\partial t} + f^k_{,l}\,\dot{x}^l\right)\boldsymbol{g}_k = \frac{Df^k}{Dt}\boldsymbol{g}_k.$$

U daljem tekstu ćemo uvek imati na umu da se $\dfrac{d}{dt}$ koristi za materijalni izvod tenzorske veličine pri direktnoj notaciji, a $\dfrac{D}{Dt}$ pri njenoj komponentalnoj reprezentaciji.

Vežbanja

1. Dokazati (3.6) i (3.7).
2. Dokazati da je za stacionarno kretanje

$$\frac{\partial}{\partial t}(\dot{T}\because)=\overline{\left(\frac{\partial T\because}{\partial t}\right)}.$$

3. Neka je $\boldsymbol{T} = T^K_{\ k}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{x}, t)\, \boldsymbol{G}_K(\boldsymbol{X}) \otimes \boldsymbol{g}^k(\boldsymbol{x})$ neka veličina određena dvostrukim tenzorskim poljem $T^K_{\ k}$. Sa $\otimes$ smo označili dijadski proizvod baznih vektora $\boldsymbol{G}_K$ i $\boldsymbol{g}^k$. Pokazati da je

$$\frac{d\boldsymbol{T}}{dt}=\frac{DT^K_{\ k}}{Dt}\boldsymbol{G}_K\otimes\boldsymbol{g}^k.$$

4. U prethodnom zadatku razmotriti slučajeve kada je $T^K_{\ k}$
   a) funkcija samo $\boldsymbol{X}$ i t
   b) funkcija samo $\boldsymbol{x}$ i t.
5. Pokazati da je

$$\dot{g}^k_K=\frac{Dg^k_K}{Dt}=0.$$

4. MATERIJALNE POVRŠI I VEKTORSKE LINIJE

Površ i kriva određuju dvodimenzionalnu i jednodimenzionalnu mnogostrukost u prostoru. Uopšte, za mnogostrukost koja se sastoji od materijalnih čestica, kaže se da je materijalna.

Za poznato kretanje tela $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(X, t)$, materijalna površ definisana u $\varkappa$ sa

$$X^K = X^K(U, V), \tag{4.1}$$

zauzima neki položaj u $\varkappa_t$ određen sa

$$x^k = x^k[X^K(U, V), t]. \tag{4.2}$$

Implicitan oblik ovde date parametarske reprezentacije materijalne površi glasi

$$F(X^K)=0 \text{ u } \varkappa, \tag{4.3}$$

i

$$f(\boldsymbol{x}, t)=f[\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}, t)]=0 \text{ u } \varkappa_t \tag{4.4}$$

i dobija se iz (4.1), odnosno (4.2), eliminacijom Gausovih parametara U i V.

Na analogan način se definiše materijalna linija sa

$$X^K = X^K(S) \text{ u } \varkappa, \tag{4.5}$$

i

$$x^k = x^k[X^K(S), t] \text{ u } \varkappa_t. \tag{4.6}$$

Materijalna površ, odnosno linija, određuje geometrijsko mesto položaja istih materijalnih čestica tela pri kretanju.

U daljem tekstu ćemo se baviti određivanjem potrebnih i dovoljnih uslova da bi neka površ, odnosno linija, bila materijalna.

Lagranžova teorema. *Potreban i dovoljan uslov da površ*

$$f(\boldsymbol{x}, t) = 0 \tag{4.7}$$

bude materijalna jeste

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial t} + \dot{\boldsymbol{x}} \operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial t} + f_{,k} \dot{x}^k = 0. \tag{4.8}$$

Dokaz:

U trenutku t uočimo na površi $\mathcal{S}(t)$ materijalnu česticu X. Tada $\boldsymbol{x}$, koje određuje položaj X u t, zadovoljava jednačinu (4.7). U sledećem trenutku, $t + dt$, čestica X i površ $\mathcal{S}$ zauzeće druge položaje u prostoru i, u opštem slučaju, čestica X ne mora da leži na $\mathcal{S}(t + dt)$. Promena funkcije $f = f(\boldsymbol{x}, t)$, koju proučava posmatrač na čestici X, određena je materijalnim izvodom

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial t} + f_{,k} \dot{x}^k. \tag{4.9}$$

Tačka $\boldsymbol{x}$, u kojoj se čestica X nalazila u trenutku t, nalazi se na $\mathcal{S}(t)$ u svakom trenutku vremena t, pa i u $t + dt$, i za tu tačku (4.7) je identički zadovoljeno za svako t. Ako sa u^k obeležimo komponente njene brzine, koja se u opštem slučaju razlikuje od brzine $\dot{x}^k$ čestice X, onda iz (4.7) dobijamo da je

$$\frac{\partial f}{\partial t} + f_{,k} u^k = 0. \tag{4.10}$$

Koristeći (4.10) možemo (4.9) napisati u obliku

$$\dot{f} = (\dot{x}^k - u^k) f_{,k},$$

ili

$$\dot{f} = (\dot{x}_n - u_n) \sqrt{f_{,k} f^{,k}}, \tag{4.11}$$

gde su $\dot{x}_n$ i u_n normalne komponente brzina čestice X i tačke $\boldsymbol{x}$ površi $\mathcal{S}(t)$ u kojoj se nalazi u trenutku t, respektivno, date izrazima

$$\dot{x}_n = \dot{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{n} = \frac{\dot{x}^k f_{,k}}{\sqrt{f_{,l} f^{,l}}} \quad u_n = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} = \frac{u^k f_{,k}}{\sqrt{f_{,l} f^{,l}}}, \tag{4.12}$$

gde je $\boldsymbol{n}$-jedinični vektor spoljne normale površi $\mathcal{S}$. Pomoću (4.10) može se $(4.12)_2$ izraziti u obliku

$$u_n = -\frac{\partial f}{\partial t} \frac{1}{\sqrt{f_{,k} f^{,k}}} \tag{4.13}$$

koji određuje u_n u potpunosti preko (4.7) i naziva se *brzina pomeranja površi* $\mathcal{S}(t)$. Na osnovu (4.11) možemo zaključiti da je $\dot{f}$, u tački površi $f(x, t) = 0$, proporcionalno brzini, relativno u odnosu na površ, čestice koja se trenutno nalazi na površi. Prema tome, ako se površ sastoji od istih čestica, tj. ako je površ $\mathcal{S}(t)$ materijalna površ, mora biti $\dot{x}_n = u_n$ i $\dot{f} = 0$. Znači, (4.8) je potreban uslov.

Pokažimo da je i dovoljan uslov. Neka važi (4.8). Tada ovoj parcijalnoj diferencijalnoj jednačini prvog reda odgovara sistem diferencijalnih jednačina, tzv. karakteristika

$$dt = \frac{dx^1}{x^1} = \frac{dx^2}{x^2} = \frac{dx^3}{x^3}, \tag{4.14}$$

čije rešenje pišemo u obliku

$$X^K(\boldsymbol{x}, t) = C^K, \tag{4.15}$$

gde su $C^K = \text{const.}$ i kao takve identifikuju česticu. Rešenje parcijalne diferencijalne jednačine, na osnovu teorije parcijalnih diferencijalnih jednačina prvog reda, predstavlja svaka proizvoljna funkcija ovih konstanti, tj. $f = \psi(X^K)$. Ako su vrednosti X^K takve da je $\psi(X^K) = 0$ tada je na osnovu (4.15)

$$f(\boldsymbol{x}, t) = \psi[\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}, t)] = 0. \tag{4.16}$$

Drukčije rečeno: ako je čestica jednom na površi $f(\boldsymbol{x}, t) = 0$, ona će ostati na toj površi sve vreme kretanja, tj. ta površ je materijalna. □

Neka je, po definiciji,

$$u = u_n - \dot{x}_n. \tag{4.17}$$

Tako definisana veličina u se naziva *lokalna brzina prostiranja površi* i sa fizičkog stanovišta predstavlja normalnu brzinu prostiranja površi $f(\boldsymbol{x}, t) = 0$ u odnosu na čestice koje se na njoj nalaze. Tada (4.11) možemo izraziti u obliku $\dot{f} = -u\sqrt{f_{,k}f^{,k}}$. U tom slučaju *Lagranžova teorema* glasi:

> $u = 0$ *predstavlja potreban i dovoljan uslov da bi površ* $f(\boldsymbol{x}, t) = 0$ *bila materijalna.*

Posledica Lagranžove teoreme:

— Da bi kriva linija, data jednačinama $f(\boldsymbol{x}, t) = 0$ i $\varphi(\boldsymbol{x}, t) = 0$, bila materijalna dovoljno je, ali ne i potrebno, da je $\dot{f} = 0$ i $\dot{\varphi} = 0$.

Isti problem razmotrićemo posmatrajući neko vektorsko polje $\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}, t)$ i njemu odgovarajuće vektorske linije, tj. linije koje u svakoj svojoj tački u nekom trenutku imaju tangentu kolinearnu sa vektorom $\boldsymbol{q}$ u toj tački, u tom trenutku.

Prema definiciji, jednačina vektorske linije polja $\boldsymbol{q}$ je

$$\frac{\partial x^k}{\partial L} = a q^k, \tag{4.18}$$

gde je a neka skalarna funkcija, L parametar krive, ili

$$\varepsilon_{klm} q^l \frac{\partial x^m}{\partial L} = 0. \tag{4.19}$$

Vektorska linija polja $\boldsymbol{q}$ će se menjati, u opštem slučaju, od trenutka do trenutka, jer je uočeno vektorsko polje nestacionarno.

Kriterijum Helmholc-Zoravskog (Helmholz-Zorawski) glasi:

— *Potreban i dovoljan uslov da vektorska linija polja bude materijalna jeste*

$$\varepsilon_{klm} q^l (\dot{q}^m - \dot{x}^m_{,p} q^p) = 0. \tag{4.20}$$

Uslov (4.20) je potreban. Zaista, neka je vektorska linija polja $\boldsymbol{q}$ materijalna i neka je X neka čestica koja se za sve vreme kretanja nalazi na vektorskoj liniji. Tada materijalni izvod (4.18) daje

$$\overline{\left(\frac{\partial x^k}{\partial L}\right)}^{\boldsymbol{\cdot}} = \dot{a} q^k + a \dot{q}^k. \tag{4.21}$$

Kako je

$$\overline{\left(\frac{\partial x^k}{\partial L}\right)}^{\boldsymbol{\cdot}} = \frac{\partial \dot{x}^k}{\partial L} = \dot{x}^k_{,p} \frac{\partial x^p}{\partial L} = a \dot{x}^k_{,p} q^p, \tag{4.22}$$

s obzirom na (3.7) i (4.18), može se (4.21) napisati u obliku

$$a (\dot{q}^m - \dot{x}^m_{,p} q^p) = \dot{a} q^m. \tag{4.23}$$

Ako se (4.23) komponuje sa $\varepsilon_{klm} q^l$ i iskoristi činjenica da je $\varepsilon_{klm} q^l q^m = 0$ dobiće se posle skraćivanja sa a (4.20).

Uslov je i dovoljan. Neka za vektorske linije polja q^k, date sa (4.18) ili (4.19), važi (4.20). Koristeći (4.22) i (4.18) može se (4.20), posle izvesnog računanja, napisati u obliku

$$\overline{\left(e_{klm} q^l \frac{\partial x^m}{\partial L}\right)}^{\boldsymbol{\cdot}} = 0. \ \square \tag{4.24}$$

To znači, da ako je neka čestica X u nekom trenutku, recimo t_0, bila na vektorskoj liniji polja $\boldsymbol{q}$, prema tome X^K u t_0 zadovoljava (4.19), X će biti na vektorskoj liniji uočenog polja i u svakom trenutku t, s obzirom na (4.24). Znači, vektorske linije polja $\boldsymbol{q}$ su materijalne linije.

Koristeći (3.12) za vektorsko polje $\boldsymbol{q}$ uslov Helmholc-Zoravskog (4.20) može se izraziti u ekvivalentnom obliku

$$\boldsymbol{q} \times \left[\frac{\partial \boldsymbol{q}}{\partial t} + \operatorname{rot}(\boldsymbol{q} \times \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{v} \operatorname{div} \boldsymbol{q}\right] = 0. \tag{4.25}$$

Na osnovu definicije vektorske i strujne linije može se kazati:

— Strujne linije su vektorske linije polja brzine $\boldsymbol{v}$. Neka je $q^k = \dot{x}^k$. Tada prema (4.25)

$$\boldsymbol{v} \times \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = 0, \tag{4.26}$$

ili ekvivalentno, $\dfrac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = c(x, t)\, \boldsymbol{v}$, predstavlja potreban i dovoljan uslov da strujne linije budu materijalne. Kretanje u kome je (4.26) zadovoljeno naziva se kretanje sa stacionarnim strujnim linijama. Na osnovu toga sledi teorema:

Strujne linije i putanje se poklapaju ako i samo ako su stacionarne.

Vežbanje

1. Izvesti (4.25)

5. MATERIJALNI IZVOD ELEMENATA LUKA, POVRŠINE I ZAPREMINE

Elementi luka, površine i zapremine su one veličine koje karakterišu deformaciju. Upoređujući odgovarajuće elemente u početnoj i trenutnoj konfiguraciji tela dolazimo do geometrijske predstave o deformaciji. Promena ovih materijalnih elemenata u vremenu, koja nastaje pri kretanju tela $\mathcal{B}$, karakteriše se njihovim materijalnim izvodom.

Osnovna lema:

— *Materijalni izvod gradijenta deformacije dat je sa*

$$\dot{\overline{x^k_{,K}}} = \dot{\overline{x^k_{;K}}} = \dot{x}^k_{;K} = \dot{x}^k_{,m} x^m_{,K}. \tag{5.1}$$

Dokaz sledi neposredno iz (3.7) i (2.5.3).

Može se dokazati (5.1) i polazeći od (3.1). Tada je

$$\begin{aligned}
\dot{\overline{x^k_{;K}}} &= \frac{\partial (x^k_{;K})}{\partial t} + (x^k_{;K})_{,l}\dot{x}^l \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial x^k}{\partial X^K}\right) + \left[\frac{\partial}{\partial x^l}\left(\frac{\partial x^k}{\partial X^K}\right) + x^m_{,K}\begin{Bmatrix} k \\ ml \end{Bmatrix}\right]\dot{x}^l \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial x^k}{\partial X^K}\right) + \frac{\partial}{\partial x^l}\left(\frac{\partial x^k}{\partial X^K}\right)\dot{x}^l + \begin{Bmatrix} k \\ ml \end{Bmatrix} x^m_{,K}\dot{x}^l \\
&= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x^k}{\partial X^K}\right) + \begin{Bmatrix} k \\ ml \end{Bmatrix} x^m_{,K}\dot{x}^l \\
&= \left(\frac{\partial \dot{x}^k}{\partial x^m} + \begin{Bmatrix} k \\ ml \end{Bmatrix}\dot{x}^l\right) x^m_{,K} \\
&= \dot{x}^k_{,m} x^m_{,K},
\end{aligned}$$

gde smo koristili komutativnost operacija $\dfrac{d}{dt}$ i $\dfrac{\partial}{\partial X^K}$.

Polazeći od identičnosti $x^k_{;K}X^K_{;m} = \delta^k_m$ i koristeći (5.1) lako je dokazati da je

$$\dot{\overline{X^K_{;k}}} = -X^K_{;m}\dot{x}^m_{,k}. \tag{5.2}$$

Iz (2.5.2) i (5.1) neposredno sledi da je

$$\overline{(dx^k)}^{\boldsymbol{\cdot}} = \overline{(x^k_{;K})}^{\boldsymbol{\cdot}}\, dX^K = \dot{x}^k_{,m} x^m_{;K} dX^K = \dot{x}^k_{,m} dx^m. \tag{5.3}$$

Teorema 1.

Materijalni izvod kvadrata elementa luka dat je sa

$$\dot{\overline{ds^2}} = 2d_{kl} dx^k dx^l, \tag{5.4}$$

gde je

$$d_{kl} = \dot{x}_{(k,l)} = \frac{1}{2}(\dot{x}_{k,l} + \dot{x}_{l,k}) \tag{5.5}$$

i naziva se ***tenzor brzine deformacije.***

Dokaz:

Diferencirajući $(2.3.5)_2$ dobijamo da je

$$\begin{aligned}\dot{\overline{ds^2}} &= g_{kl}\dot{\overline{dx^k}} dx^l + g_{kl} dx^k \dot{\overline{dx^l}} \\ &= g_{kl}\dot{x}^k_{,m} dx^m dx^l + g_{kl} dx^k \dot{x}^l_{,m} dx^m \\ &= (\dot{x}_{k,m} + \dot{x}_{m,k})\, dx^k dx^m \\ &= 2d_{km} dx^k dx^m,\end{aligned}$$

gde smo koristili (3.4), (5.3) i (5.5). □

Iz $(2.7.1)_2$ i $(2.7.10)_1$ odmah se vidi da je

$$\dot{\overline{ds^2}} = \dot{\overline{C_{KL}}} dX^K dX^L = 2\dot{E}_{KL} dX^K dX^L \tag{5.6}$$

Upoređujući ove izraze sa materijalnim opisom (5.4)

$$\dot{\overline{ds^2}} = 2d_{kl} x^k_{;K} x^l_{;L} dX^K X^L, \tag{5.7}$$

koji se dobija korišćenjem (2.5.2) i (5.4), sledi da je

$$\dot{E}_{KL} = \frac{1}{2}\dot{C}_{KL} = d_{kl} x^k_{;K} x^l_{;L}. \tag{5.8}$$

Sada smo u stanju da dokažemo da važi:

Teorema 2.

Kretanje je kruto ako i samo ako je $d_{kl} = 0$.

Dokaz: Zaista, ako je kretanje tela kruto, onda je po definiciji, rastojanje između bilo koje dve čestice tog tela stalno, tj. $\dot{\overline{ds^2}} = 0$ za proizvoljno dx^k. Tada je prema (5.4) $d_{kl} = 0$.

Obrnuto, ako je $d_{kl} = 0$ onda je $\dot{\overline{ds^2}} = 0$ i $ds^2 = \text{const}$, tj. kretanje je kruto. □

Jednačine oblika $d_{kl} = 0$ poznate su u diferencijalnoj geometriji kao Kilingove (Killing) jednačine.

Za materijalni izvod elementa površi i zapremine potrebno je odrediti materijalni izvod $j = \det \|x^k_{;K}\|$.

Koristeći pravilo o diferenciranju determinante i (5.1) sledi da je

$$\dot{\overline{j}} = \dot{\overline{x^k_{;K}}} = jX^K_{k;}\dot{\overline{x^k_{;K}}} = j\dot{x}^k_{;K} = jI_d, \tag{5.9}$$

gde je

$$I_d = \dot{x}^k_{,k} = \operatorname{div} \dot{\boldsymbol{x}} \tag{5.10}$$

prva invarijanta tenzora brzine deformacije d_{kl}. Kako je $\dot{G} = 0$ i $\dot{g} = 0$, s obzirom na (3.1) i (3.4), odmah se vidi iz (5.9), i (2.4.7) da je

$$\dot{J} = J\dot{x}^k_{,k} = JI_d = J \operatorname{div} \dot{\boldsymbol{x}}. \tag{5.11}$$

Teorema 3.

Materijalni izvod elementa površi je

$$\dot{\overline{da_k}} = \dot{x}^m_{,m} da_k - \dot{x}^m_{,k} da_m. \tag{5.12}$$

Dokaz:

Neposrednim diferenciranjem (2.15.8) dobija se:

$$\begin{aligned}
\dot{\overline{da_k}} &= \dot{\overline{(JX^K_{;k} dA_K)}} = \dot{J}X^K_{;k} dA_K + J\dot{\overline{X^K_{;k}}} dA_K \\
&= J\dot{x}^m_{,m} X^K_{,k} dA_K - \dot{x}^m_{,k} J X^K_{;m} dA_K \\
&= \dot{x}^m_{,m} da_k - \dot{x}^m_{,k} da_m,
\end{aligned}$$

pri čemu smo koristili (5.11), (5.2) i (2.15.8). □

Teorema 4.

Materijalni izvod elementa zapremine dat je sa

$$\dot{\overline{dv}} = \dot{x}^k_{,k} dv = I_d dv \tag{5.13}$$

Dokaz sledi neposredno iz $(2.15.12)_1$ i (5.11). □

Posledica teoreme 4. Kretanje je izohorično ako i samo ako je polje brzina solenoidno, tj.

$$I_d = \dot{x}^k_{,k} = \operatorname{div} \dot{\boldsymbol{x}} = 0. \tag{5.14}$$

Vežbanja

1. Pokazati da je za stacionarno kretanje

$$\frac{D^2 J}{Dt^2} = J \operatorname{div} (\dot{\boldsymbol{x}} \operatorname{div} \dot{\boldsymbol{x}}) = J (\dot{x}^k_{,k} \dot{x}^l)_{,l}$$

i naći slične izraze za izvode višeg reda.

2. Kretanje je izohorično ako i samo ako je fluks (protok) brzine kroz zatvorenu površ $\mathscr{S}$ jednak nuli, tj.

$$\oint_{\mathscr{S}} \dot{x}^k da_k = 0$$

Dokazati.

3. Za kruto kretanje ($d_{kl} = 0$) polje brzina je dato sa

$$\dot{z}_k = \omega_{kl} z_l + c_k$$

gde su $\omega_{kl} = -\omega_{lk}$ i c_k funkcije samo vremena. Dokazati.

4. Pokazati da je:

a) $$\dot{c}_{km} = -2c_{l(k}\dot{x}^k_{,m)};$$

b) $$\dot{e}_{kl} = d_{km} - 2e_{l(k}\dot{x}^l_{,m)}.$$

6. KINEMATIKA KRIVOLINIJSKIH, POVRŠINSKIH I ZAPREMINSKIH INTEGRALA

Neka je ψ neko integrabilno tenzorsko polje.

Definicije:

— ***Krivolinijski integral***

$$\int_l \psi \, dx^k \tag{6.1}$$

nazivamo struja od ψ duž krive l. Kada je l zatvorena kriva linija (6.1) *nazivamo cirkulacijom ψ duž l.*

— ***Površinski integral***

$$\int_a \psi \, da_k \tag{6.2}$$

nazivamo protok ili fluks od ψ kroz površ a.

— ***Zapreminski integral***

$$\int_v \psi \, dv \tag{6.3}$$

nazivamo totalno ili ukupno ψ u zapremini v.

Pod kinematikom ovih integrala podrazumeva se njihova promena u vremenu.

a) Kinematika krivolinijskog integrala

Neka je C materijalna linija. Tada je

$$\frac{D}{Dt}\int_C \psi \, dx^k = \int_C \overline{\psi dx^k}^{\bullet} = \int_C (\dot{\psi} \, dx^k + \psi \, \dot{\overline{dx^k}}) \tag{6.4}$$

s obzirom na (5.3) i činjenicu da granica integracije C ne zavisi od t.

Za prostornu krivu c važi

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_c \psi \, dx^k = \int_c \frac{\partial \psi}{\partial t} dx^k. \tag{6.5}$$

U specijalnom slučaju, kada se za krivu c bira kriva koja određuje položaj materijalne krive C u trenutku t, iz (6.4), (3.2) i $(5.3)_3$ sledi

$$\frac{D}{Dt}\int_C \psi\, dx^k - \frac{\partial}{\partial t}\int_c \psi\, dx^k = \int_c (\psi_{,l}\dot{x}^l dx^k + \psi \dot{x}^k_{,m} dx^m). \tag{6.6}$$

Na osnovu (6.6) može se zaključiti sledeće:

Kretanje čestica, koje obrazuju materijalnu krivu C, je uzrok razlike između (6.4) i (6.5).

b) Kinematika površinskog integrala

Za materijalnu površ S, analogno (6.4), imamo

$$\frac{D}{Dt}\int_S \psi\, da_k = \int_S (\dot{\psi}\, da_k + \psi\, \dot{\overline{da_k}}), \tag{6.7}$$

ili, s obzirom na (5.12),

$$\frac{D}{Dt}\int_S \psi\, da_k = \int_S [\dot{\psi}\, da_k + \psi\,(\dot{x}^m_{,m} da_k - \dot{x}^m_{,k} da_m)]. \tag{6.8}$$

Ako se u (6.8) za ψ uzme vektorsko polje q^k dobijamo

$$\frac{D}{Dt}\int_S q^k da_k = \int_S (\dot{q}^k + \dot{x}^m_{,m} q^k - \dot{x}^k_{,m} q^m)\, da_k, \tag{6.9}$$

na osnovu čega sledi

— ***Kriterijum Zoravskog:*** *Fluks vektora polja* $\boldsymbol{q}$ *kroz svaku materijalnu površ je konstantan po vremenu ako i samo ako je*

$$\dot{q}^k + \dot{x}^m_{,m} q^k - \dot{x}^k_{,m} q^m = 0. \tag{6.10}$$

Kako je

$$\dot{q}^k = \frac{\partial q^k}{\partial t} + q^k_{,m}\dot{x}^m$$

prema (3.2), može se (6.10) napisati u ekvivalentnom obliku

$$\frac{\partial \boldsymbol{q}}{\partial t} + \mathrm{rot}\,(\boldsymbol{q} \times \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{v}\, \mathrm{div}\, \boldsymbol{q} = 0, \tag{6.11}$$

[vidi zadatak (4.1)]. Saglasno (4.25) može se (6.11) protumačiti na sledeći način: da bi fluks vektorskog polja $\boldsymbol{q}$ kroz svaku materijalnu površ bio konstantan po vremenu potrebno je, ali ne i dovoljno, da njegove vektorske linije budu materijalne.

Ako je $\mathcal{S}$ prostorna površ, onda je

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathcal{S}} \psi\, da_k = \int_{\mathcal{S}} \frac{\partial \psi}{\partial t}\, da_k. \tag{6.12}$$

c) Kinematika zapreminskog integrala

Neka je v stacionarna zapremina. Tada je

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_v \psi\, dv = \int_v \frac{\partial \psi}{\partial t}\, dv. \tag{6.13}$$

U slučaju materijalne zapremine V biće

$$\frac{D}{Dt}\int_V \psi\, dv = \int_V \overline{\psi\, dv}^{\,\cdot} = \int_V (\dot{\psi} + \psi \dot{x}^k_{,k})\, dv =$$

$$= \int_V \left[\frac{\partial \psi}{\partial t} + (\psi \dot{x}^k)_{,k}\right] dv = \int_V \frac{\partial \psi}{\partial t}\, dv + \oint_S \psi \dot{x}^k da_k \tag{6.14}$$

s obzirom na teoremu o divergeniciji, $(5.13)_1$ i (3.2).

Sada smo u stanju da dokažemo Rejnoldsovu (Reynolds) teoremu u literaturi poznatu pod imenom

> ***Transportna teorema:*** *Brzina promene ukupnog ψ u materijalnoj zapremini V jednaka je zbiru promene ukupnog ψ u prostornoj zapremini v, koja određuje trenutni položaj V ili položaj V u trenutku t i fluksa $\dot{x}^k$ kroz graničnu površ $\mathscr{S}(t)$ od v.*

Dokaz teoreme sledi iz (6.14) i (6.12) kada se za v izabere položaj V u trenutku t, tj.

$$\frac{D}{Dt}\int_v \psi\, dv = \frac{\partial}{\partial t}\int_v \psi\, dv + \int_{\mathscr{S}(t)} \psi \dot{x}^k\, da_k = \int_v \frac{\partial \psi}{\partial t}\, dv + \oint_{\mathscr{S}} \psi \dot{x}_n\, dv, \tag{6.15}$$

gde $\dot{x}^k$ označava brzinu kretanja granične površi $\mathscr{S}(t)$.□ Ako posmatramo zapreminu $v(t)$ ograničenu sa $\mathscr{S}(t)$, koja se kreće drugom brzinom $u^k(t)$, važiće i dalje (6.15), ali za neke fiktivne čestice koje se kreću brzinom u^k. U tom slučaju se (6.15) piše u obliku

$$\frac{D_u}{Dt}\int_{v(t)} \psi\, dv = \int_v \frac{\partial \psi}{\partial t}\, dv + \oint_{\mathscr{S}} \psi u^k da^k \tag{6.16}$$

čime želimo da naglasimo da je zapremina integracije $v(t)$ materijalna u odnosu na brzinu u^k. Za $u^k = 0$ dobijamo (6.13), a za $u^k = \dot{x}^k$ dobijamo (6.15). Zbog toga (6.16) predstavlja generalisanu Rejnoldsovu teoremu ili generalisanu transportnu teoremu.

Kao ilustraciju generalisane Rejnoldsove teoreme, navodimo sledeći primer. Posmatrajmo promenu zapremine balona po vremenu kada se naduvava. Ovako uočena zapremina nije materijalna jer ne sadrži nepromenjen sistem materijalnih čestica, tj. vazduh. Uduvavanjem vazduha menja se materijalni sistem kao i zapremina balona koji ga obuhvata. Zbog toga promena zapremine balona ne može biti razmatrana kao materijalni izvod po vremenu. Međutim, ništa nas ne sprečava da definišemo neki fiktivan sistem čestica čije kretanje izaziva promenu zapremine balona. Jedino ograničenje, koje namećemo kretanju ovog sistema, a koje je fizički opravdano, odnosi se na brzine čestica na balonu kao granici sistema. Po definiciji, granica tela je površ kroz koju materijal ne prolazi. Zbog toga normalne komponente brzina čestica na granici moraju biti jednake normalnoj komponenti brzine granice sistema. (Vidi odeljak 4). Jasno je da je zapremina balona $v(t)$ sada zapremina fiktivnog sistema čestica ograničenog sa $\mathcal{S}(t)$, koja se kreće nekom brzinom u^k, u opštem slučaju različitim od brzine kretanja materijalnih čestica $\dot{x}^k$. U odnosu na takav fiktivan sistem, promena zapremine balona je materijalni izvod i naznačen je sa $\frac{D_u}{Dt}$ u (6.16).

Vežbanja

1. Pokazati da se (6.10) može napisati u obliku (6.11).
2. Pokazati da je

$$\frac{D}{Dt}\int_V dv = \int_V \operatorname{div} \boldsymbol{v}\, dv = \oint_S \dot{x}^k\, da_k.$$

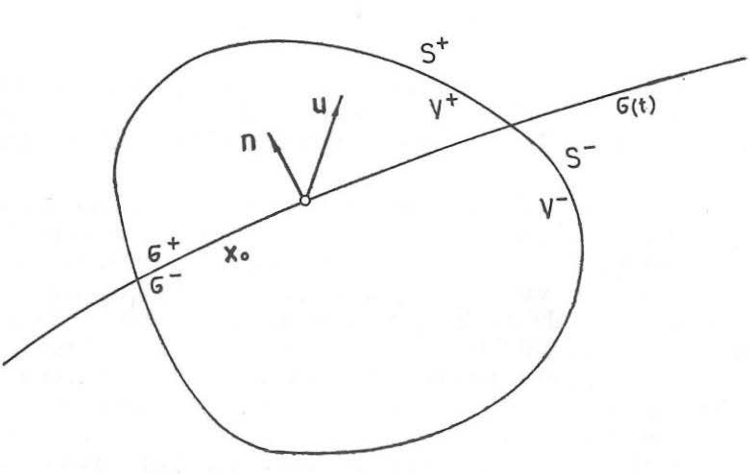
7. TRANSPORTNA TEOREMA ZA OBLAST KOJA SADRŽI SINGULARNU POVRŠ

Neka je V konačna materijalna zapremina i neka je $\sigma(t)$ glatka površ koja deli V u dve oblasti V^+ i V^-. Površ $\sigma(t)$ se može kretati proizvoljnom brzinom $\boldsymbol{u}$ tako da u svakom trenutku deli graničnu površ S od V u dva dela S^+ i S^- (sl. 20). U opštem slučaju oblasti V^+ i V^- kao i površi S^+ i S^- nisu materijalne jer $\sigma(t)$ ne mora biti materijalna površ. Primer takve površi $\sigma(t)$ je front talasa.

Neka je $\psi(x)$ tenzorska funkcija, neprekidna i diferencijabilna u unutrašnjosti V^+ i V^-, i neka teži konačnoj graničnoj vrednosti $\psi^+(\psi^-)$ kada $\boldsymbol{x} \in V^+(V^-)$ teži ka $\boldsymbol{x}_0$ na $\sigma(t)$. U $\boldsymbol{x}_0$, ψ ne mora biti definisano. Skok ψ kroz $\sigma(t)$ u $\boldsymbol{x}_0$ obeležavamo sa

$$[\![\psi]\!] = \psi^+ - \psi^-. \tag{7.1}$$

Definicija: Ako je $[\![\psi]\!] \neq 0$, površ $\sigma(t)$ je singularna u odnosu na ψ.



Sl. 20

Definišimo polje brzina

$$v^+ = \begin{cases} \dot{x} \text{ na } S^+ \\ u \text{ na } \sigma \end{cases} \qquad v^- = \begin{cases} \dot{x} \text{ na } S^- \\ u \text{ na } \sigma \end{cases}. \tag{7.2}$$

Kako je površ $\sigma(t)$ u V zajednička granica V^+ i V^-, saglasno sa (6.16) možemo pisati

$$\frac{D}{Dt}\int_V \psi\, dv = \frac{D_{v^+}}{Dt}\int_{V^+} \psi\, dv + \frac{D_{v^-}}{Dt}\int_{V^-} \psi\, dv. \tag{7.3}$$

Koristeći (7.2) i (6.16), može se svaki član desne strane izraza (7.3) napisati u razvijenom obliku

$$\frac{D_{v^+}}{Dt}\int_{V^+} \psi\, dv = \int_{V^+} \frac{\partial\psi}{\partial t}\, dv + \int_{S^+} \psi \dot{x}^k da_k - \int_\sigma \psi^+ u^k da_k,$$

$$\frac{D_{v^-}}{Dt}\int_{V^-} \psi\, dv = \int_{V^-} \frac{\partial\psi}{\partial t}\, dv + \int_{S^-} \psi \dot{x}^k da_k + \int_\sigma \psi^- u^k da_k.$$

Smenom ovih izraza u (7.3) dobijamo formulu kojom se izražava transportna teorema u oblasti koja sadrži singularnu površ

$$\frac{D}{Dt}\int_V \psi dv = \int_V \frac{\partial\psi}{\partial t}\, dv + \oint_S \psi \dot{x}^k da_k - \int_\sigma [\![\psi u^k]\!]\, da_k. \tag{7.4}$$

Ovaj izraz se može napisati i u kompaktnijem obliku pomoću teoreme o divergenciji ili Grinove (Green) teoreme. Za neko polje $\boldsymbol{V}$ u oblasti V, koja ne sadrži singularnu površ, ona glasi

$$\int_V \operatorname{div} \boldsymbol{v}\, dv = \oint_S \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{a}. \tag{7.5}$$

Za oblast V sa singularnom površi σ važi modifikovana Grinova teorema

$$\int_V \operatorname{div} \boldsymbol{v}\, dv = \oint_S \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{a} - \int_\sigma [\![\boldsymbol{v}]\!]\, d\boldsymbol{a}. \tag{7.6}$$

Da bismo dokazali (7.6), primenimo Grinovu teoremu (7.5) na V^+ i V^- za koje je singularna površ σ oblasti V granična površ, tj.

$$\int_{V^+} \operatorname{div} \boldsymbol{v}\, dv = \oint_{S^+ + \sigma^+} \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{a} = \int_{S^+} \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{a} - \int_\sigma \boldsymbol{v}^+\, d\boldsymbol{a}$$

$$\int_{V^-} \operatorname{div} \boldsymbol{v}\, dv = \oint_{S^- + \sigma^-} \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{a} = \int_{S^-} \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{a} + \int_\sigma \boldsymbol{v}^-\, d\boldsymbol{a}.$$

Napomenimo da smo sa σ^+ i σ^- označili suprotne orijentacije površi σ, što je prikazano na sl. 20. Sabirajući ove izraze i uzimajući u obzir da je

$$\int_V \operatorname{div} \boldsymbol{v}\, dv = \int_{V^+ + V^-} \operatorname{div} \boldsymbol{v}\, dv,$$

kao i (7.1), dobijamo (7.6).

U slučaju kada je $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}^k \otimes \boldsymbol{g}_k$ pogodno je pisati (7.6) u obliku

$$\int_V \operatorname{div} \boldsymbol{v}\, dv = \int_V \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}\, \boldsymbol{v}^k}{\partial x^k} dv = \int_S \boldsymbol{v}^k da_k - \int_\sigma [\![\boldsymbol{v}^k]\!]\, da_k. \tag{7.6a}$$

Pomoću (7.6) može se transportna teorema u oblasti koja sadrži singularnu površ (7.4) napisati u obliku

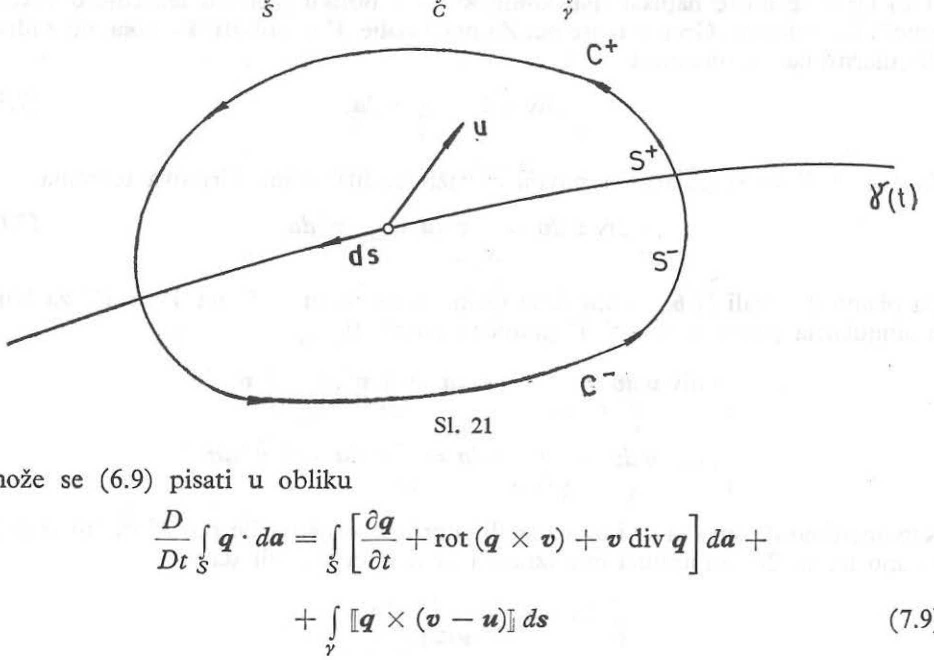
$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_V \psi\, dv &= \int_V \left[\frac{\partial \psi}{\partial t} + \operatorname{div}(\psi \dot{\boldsymbol{x}})\right] dv + \int_\sigma [\![\psi (\dot{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{u})]\!]\, d\boldsymbol{a} \\ &= \int_V \left[\frac{\partial \psi}{\partial t} + (\psi \dot{x}^k)_{,k}\right] dv + \int_\sigma [\![\psi (\dot{x}^k - u^k)]\!]\, da_k \\ &= \int_V \left[\frac{\partial \psi}{\partial t} + (\psi \dot{x}^k)_{,k}\right] dv + \int_\sigma [\![\psi (\dot{x}_n - u_n)]\!]\, da \end{aligned} \tag{7.7}$$

gde su $\dot{x}_n = \dot{x}^k n_k$ i $u_n = u^k n_k$ brzina materijalne čestice koja je trenutno na σ u pravcu njenog jediničnog vektora normale $\boldsymbol{n}$, i brzina pomeranja površi σ, respektivno.

Napomena 1.

Na analogan način može biti razmatran problem konačne materijalne površi S u kojoj se kreće neka singularna kriva linija $\gamma(t)$ nekom brzinom $\boldsymbol{u}$ (sl. 21). U tom slučaju, primenom Stoksove (Stokes) teoreme za površ koja sadrži singularnu krivu

$$\int_S \operatorname{rot} \boldsymbol{q} \cdot d\boldsymbol{a} = \int_C \boldsymbol{q} \cdot d\boldsymbol{s} - \int_\gamma [\![\boldsymbol{q}]\!] \cdot d\boldsymbol{s} \tag{7.8}$$



Sl. 21

može se (6.9) pisati u obliku

$$\frac{D}{Dt} \int_S \boldsymbol{q} \cdot d\boldsymbol{a} = \int_S \left[\frac{\partial \boldsymbol{q}}{\partial t} + \operatorname{rot}(\boldsymbol{q} \times \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{v} \operatorname{div} \boldsymbol{q}\right] d\boldsymbol{a} + \\ + \int_\gamma [\![\boldsymbol{q} \times (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u})]\!]\, d\boldsymbol{s} \tag{7.9}$$

koji se primenjuje u elektromagnetnoj teoriji kontinuuma i teoriji ljuski.

Napomena 2.

Vrlo često je pogodno za analizu izraziti transportnu teoremu u odnosu na referentnu konfiguraciju tela.

Tada površi diskontinuiteta $\sigma(t)$, definisanoj u $\varkappa_t$ u implicitnom obliku

$$f(x^k, t) = 0 \tag{7.10}$$

odgovara, s obzirom na jednačine kretanja $x^k = x^k(X^K, t)$, površ $\Sigma(t)$ u $\varkappa$ definisana sa

$$F(X^K, t) = f[x^k(X^K, t), t] = 0. \tag{7.11}$$

S obzirom na eksplicitnu zavisnost $\Sigma(t)$ od t ona menja svoj položaj u $\varkappa$ u funkciji vremena, tj. kreće se nekom brzinom $\boldsymbol{U}$. Njenu komponentu U_N u pravcu jediničnog vektora spoljne normale $\boldsymbol{N}$ površi $\Sigma(t)$ nazivamo *brzina prostiranja površi* $\Sigma(t)$. Ona je dualna brzini pomeranja u_n površi $\sigma(t)$ i kao takva glasi

$$U_N = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial t}}{\sqrt{F_{,K}F^{,K}}} \tag{7.12}$$

(vidi (3.4.13)).

Površi $\sigma(t)$ i $\Sigma(t)$, definisane sa (7.10) i (7.11), redom, su, sa geometrijskog stanovišta, u opštem slučaju, potpuno različite:

$\sigma(t)$ je u oblasti b — trenutnog položaja čestica tela $\mathcal{B}$;

$\Sigma(t)$ je u oblasti B — referentnog položaja čestica tela $\mathcal{B}$.

S obzirom da se B ne menja u zavisnosti od vremena za razliku od b, $\Sigma(t)$ u B, u opštem slučaju, u različitim trenucima vremena sadrži različite čestice tela $\mathcal{B}$, tj. $\Sigma(t)$ u opštem slučaju nije materijalna površ. Površ Σ je materijalna ako i samo ako je nezavisna od vremena. Kao posledica toga iz (7.12) sledi:

$U_N = 0$ predstavlja potreban i dovoljan uslov da bi površ Σ bila materijalna.

Ponavljajući ceo postupak, kao i u slučaju $\sigma(t)$, ali sada pod uslovom da (7.2) glasi

$$\boldsymbol{V}^+ = \begin{cases} \boldsymbol{O} & S^+ \\ \boldsymbol{U} & \Sigma \end{cases}$$

$$\boldsymbol{V}^- = \begin{cases} \boldsymbol{O} & S^+ \\ \boldsymbol{U} & \Sigma \end{cases}$$

Lako je pokazati da je, za neku funkciju Ψ

$$\frac{D}{Dt}\int_V \Psi\, dV = \int_V \frac{\partial \Psi}{\partial t} dV - \int_\Sigma [\![\Psi U^K]\!]\, dA_K, \tag{7.13}$$

što neposredno sledi iz (7.4) kada se pravilno primeni na $\Sigma(t)$. U tom smislu sada sa dV označavamo element materijalne zapremine V u $\varkappa$, koji deformacijom prelazi u dv i v, respektivno, u $\varkappa_t$.

U cilju poređenja rezultata izraza datih sa (7.4) i (7.13) iskoristimo (2.15.12). Tada je

$$\frac{D}{Dt}\int_V \Psi\,dV = \frac{D}{Dt}\int_v \Psi J^{-1}dv = \frac{D}{Dt}\int_v \psi\,dv \tag{7.14}$$

$$\Psi \equiv J\psi.$$

Iz (7.14) i (7.13) dobijamo

$$\frac{D}{Dt}\int_v \psi\,dv = \frac{D}{Dt}\int_V \Psi\,dV =$$

$$= \int_V \frac{\partial J\psi}{\partial t}dV - \int_\Sigma [\![J\psi U^K]\!]\,dA_K, \tag{7.15}$$

što predstavlja traženi oblik transportne teoreme u odnosu na referentnu konfiguraciju $\varkappa$.

Ova teorema, kao i modifikovani oblik Grinove teoreme (7.6a) koja u odnosu na referentnu konfiguraciju $\varkappa$ za neko polje $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}^K \otimes \boldsymbol{G}_K$ glasi

$$\int_V \operatorname{div}\boldsymbol{V}\,dV = \int_V \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{G}\boldsymbol{V}^K}{\partial X^K}dV = \int_S \boldsymbol{V}^K dA_K - \int_\Sigma [\![\boldsymbol{V}^K]\!]\,dA_K \tag{7.16}$$

biće dalje često korišćena.

Naglasimo još da nije teško pokazati da (7.16) direktno sledi iz (7.6a) pod uslovom da je

$$\boldsymbol{V}^K = JX^K_{;k}\boldsymbol{v}^k. \tag{7.17}$$

Uopšte, kada za polja $\boldsymbol{v}^k$ i $\boldsymbol{V}^K$ važi relacija oblika (7.17) kažemo:

$\boldsymbol{V}^K$ je reprezentacija $\boldsymbol{v}^k$ u odnosu na referentnu konfiguraciju $\varkappa$; ili kratko: $\boldsymbol{V}^K$ je materijalna reprezentacija $\boldsymbol{v}^k$.

Vežbanja

1. Izvesti (7.8).
2. Pokazati da se (6.9) može napisati u obliku

$$\frac{D}{Dt}\int_S \boldsymbol{q}\cdot d\boldsymbol{a} = \int_S \left(\frac{\partial\boldsymbol{q}}{\partial t} + \boldsymbol{v}\operatorname{div}\boldsymbol{q}\right)\cdot d\boldsymbol{a} + \int_C (\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{v})\cdot d\boldsymbol{s}$$

   gde je C granična kriva površi S, a $d\boldsymbol{s}$ njen element luka.
3. Koristeći rezultate prethodna dva zadatka izvesti (7.9).
4. Za materijalnu krivu liniju C koja sadrži tačku diskontinuiteta A, koja se duž krive C kreće nekom brzinom $\boldsymbol{u}$, izvesti transportnu teoremu.
5. Izvesti (7.16) i (7.6a).
6. Napisati (7.8) i (7.9) u odnosu na referentnu konfiguraciju.
7. Pokazati da je za $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}^k \otimes \boldsymbol{g}_k$, gde je

$$\boldsymbol{v} = v^{i\ldots jk}_{p\ldots q}\boldsymbol{g}_i \otimes \ldots \boldsymbol{g}_k \otimes \boldsymbol{g}^p \otimes \ldots \boldsymbol{g}^q,$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{v} = v^{i\ldots jk}_{p\ldots q,k}\boldsymbol{g}_i \otimes \ldots \boldsymbol{g}_j \otimes \boldsymbol{g}^p \otimes \ldots \boldsymbol{g}^q = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}\,\boldsymbol{v}^k}{\partial x^k}.$$

8. TENZOR BRZINE DEFORMACAIJE. TENZOR VRTLOŽNOSTI

Tenzor $\dot{x}_{k,l}$, kao tenzor drugog reda, možemo jednoznačno predstaviti u obliku

$$\dot{x}_{k,l} = \dot{x}_{(k,l)} + \dot{x}_{[k,l]} = d_{kl} + w_{kl}, \tag{8.1}$$

gde su

$$d_{kl} = \dot{x}_{(k,l)} \text{ } \textit{tenzor brzine deformacije } (d_{kl} = d_{lk}) \tag{8.2}$$

$$w_{kl} = \dot{x}_{[k,l]} \text{ } \textit{tenzor vrtložnosti } (w_{kl} = -w_{lk}). \tag{8.3}$$

U trodimenzionalnom prostoru antisimetrični tenzor ima tri nezavisne komponente, pa mu se na jednoznačan način može pridružiti vektor $\boldsymbol{w}$ koji ćemo zvati *vektor vrtložnosti*, tako da je

$$w_k = \varepsilon_{klm} w^{ml} \text{ ili } \boldsymbol{w} = \text{rot } \boldsymbol{v}. \tag{8.4}$$

S obzirom na osobine ε-sistema, lako je pokazati da je

$$w_{kl} = -\frac{1}{2} \varepsilon_{klm} w^m. \tag{8.5}$$

Vektor

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \boldsymbol{v} \text{ ili } \omega_k = \frac{1}{2} \varepsilon_{klm} w^{ml} = \varepsilon_{klm} \dot{x}^{m,l} \tag{8.6}$$

nazivamo *vektor ugaone brzine*. Očigledno je

$$\boldsymbol{w} = 2\boldsymbol{\omega}. \tag{8.7}$$

Fizički smisao komponenata tenzora brzine deformacije d_{kl} se određuje posmatranjem promena po vremenu dužina i relativnih položaja materijalnih linijskih elemenata. U tom cilju, uočavamo dva materijalna elementa dx_1 i dx_2. Tada je

$$\dot{\overline{g_{kl} dx_1^k dx_2^l}} = 2 d_{kl} dx_1^k dx_2^l \tag{8.8}$$

s obzirom na (3.4), (5.3) i (5.5). Za $\boldsymbol{dx}_1 = \boldsymbol{dx}_2 = \boldsymbol{dx}$ (8.8) se svodi na (5.4), tj. možemo pisati

$$d_{(n)} \equiv \frac{\dot{\overline{ds}}}{ds} = d_{kl} n^k n^l. \tag{8.9}$$

Znači, normalna komponenta tenzora brzine deformacije za neki pravac $\boldsymbol{n}$ određuje brzinu promene dužine materijalnih linijskih elemenata tog pravca u odnosu na svoju dužinu. Za Dekartov sistem koordinata biće $n_{(\alpha)}^k = \delta_\alpha^k$ pa je

$$d_{(\alpha)} \equiv d_{\alpha\alpha} \text{ (ne sabirati po } \alpha). \tag{8.10}$$

Ako je $\boldsymbol{dx}_1 \neq \boldsymbol{dx}_2$ i ako je θ ugao koji zaklapaju, onda iz (8.8) i (8.9) dobijamo

$$-\sin\theta\dot{\theta} = 2 d_{kl} n_1^k n_2^l - (d_{(n_1)} + d_{(n_2)}) \cos\theta, \tag{8.11}$$

gde su $n^k_{(\alpha)}$, $(\alpha = 1, 2)$ jedinični vektori uočenih elemenata dati sa (2.9.10$_2$). Za $\theta = 0$ (8.11) se svodi na (8.9). Za ortogonalne pravce $\theta = \frac{\pi}{2}$, biće

$$\frac{1}{2}\,\dot{\theta}_{12} = d_{kl} n_1^k n_2^l, \tag{8.12}$$

tj. smičuća komponenta tenzora brzine deformacije za dva međusobno ortogonalna pravca jednaka je polovini brzine promene pravog ugla koji ta dva pravca zaklapaju. U specijalnom slučaju, za Dekartov sistem koordinata dobijamo da je

$$-\frac{1}{2}\,\dot{\theta}_{\alpha\beta} = d_{\alpha\beta}, \quad (\alpha \neq \beta). \tag{8.13}$$

Kratko rečeno komponente tenzora brzine deformacije određuju promenu po vremenu dužina i relativnih položaja uočenih materijalnih linijskih elemenata i, u odnosu na Dekartov sistem koordinata, glase

$$(d_{kl}) = \begin{bmatrix} d_{(1)} & -\frac{1}{2}\,\dot{\theta}_{(12)} & -\frac{1}{2}\,\dot{\theta}_{(13)} \\ -\frac{1}{2}\,\dot{\theta}_{(21)} & d_{(2)} & -\frac{1}{2}\,\dot{\theta}_{(23)} \\ -\frac{1}{2}\,\dot{\theta}_{(31)} & -\frac{1}{2}\,\dot{\theta}_{(32)} & d_{(3)} \end{bmatrix} \tag{8.14}$$

Za određivanje glavnih pravaca tenzora d_{kl} potrebno je rešiti sistem jednačina

$$(d_{kl} - d g_{kl})\, n^l = 0. \tag{8.15}$$

Po svom obliku ovaj sistem jednačina je identičan sistemu jednačina (2.10.9) koji odgovara tenzoru deformacije C_{KL}. Kako je tenzor d_{kl} simetričan, to i za njega važi sve ono što je dokazano za C_{KL} — kada je u pitanju njegovo simetrično svojstvo.

Da bi odredili fizički smisao vektora $\boldsymbol{\omega}$ odredimo materijalni izvod jediničnog vektora pravca nekog materijalnog linijskog elementa, tj. vektora $n^k = \frac{dx^k}{ds}$. Koristeći (5.3)$_4$ i (8.9) lako je pokazati da je

$$\dot{n}^k = \frac{D}{Dt}\frac{dx^k}{ds} = \frac{\overline{dx^k}^{\,\boldsymbol{\cdot}}}{ds} - \frac{\overline{ds}^{\,\boldsymbol{\cdot}}}{ds^2}\,dx^k = \frac{d\dot{x}^k}{ds} - d_{(n)}\frac{dx^k}{ds} \tag{8.16}$$

ili, s obzirom na (5.3)$_3$ i (8.1)

$$\dot{n}_k = (d_{kl} + w_{kl} - d_{(n)} g_{kl})\, n^l. \tag{8.17}$$

Ako n^k određuje glavni pravac tenzora d_{kl} onda za taj pravac važi (8.15) i $d = d_{(n)}$ tako da je

$$\dot{n}_k = w_{kl} n^l \text{ ili } \dot{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{n}, \tag{8.18}$$

s obzirom na (8.6). Izraz $(8.18)_2$ po svom obliku potpuno je identičan izrazu kojim se određuje brzina rotacije jediničnog vektora $\boldsymbol{n}$ pri krutom kretanju tela. Otuda i naziv vektor ugaone brzine za $\boldsymbol{\omega}$. Međutim, postoji suštinska razlika između ovde definisanog vektora $\boldsymbol{\omega}$ i vektora ugaone brzine $\boldsymbol{\Omega}$ pri krutom kretanju tela. Vektor $\boldsymbol{\Omega}$ je funkcija samo vremena i u datom trenutku je isti za sve tačke tela. Za takvu ugaonu brzinu, (8.18) važi za svako $\boldsymbol{n}$ u svakoj tački tela.

Za određivanje fizičkog smisla tenzora vrtložnosti w_{kl} uočimo u $\boldsymbol{x}$ neki materijalni element $d\boldsymbol{x}$ i neki fiksirani pravac $\boldsymbol{\nu}$. Relativni položaj materijalnog elementa dx^k jediničnog vektora $n^k = dx^k/ds$, u odnosu na ν^k je dat sa

$$\cos\varphi = g_{kl}n^k\nu^l = g_{kl}\frac{dx^k}{ds}\nu^l,$$

čiji materijalni izvod određuje promenu relativnog položaja. Tada je

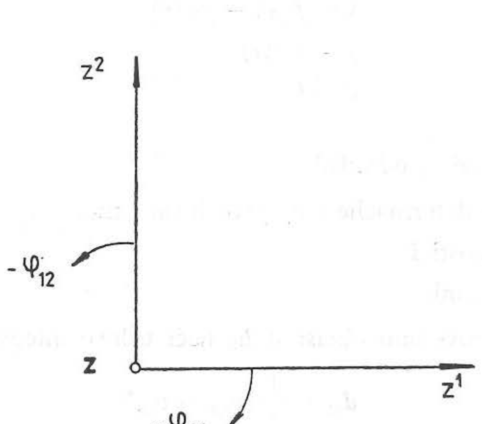
$$-\sin\varphi\dot{\varphi} = \dot{x}_{l,k}n^k\nu^l - d_{(n)}\cos\varphi \tag{8.19}$$

s obzirom na (8.17) i $(5.3)_3$. Za $\varphi = \frac{\pi}{2}$ dobijamo

$$-\dot{\varphi} = \dot{x}_{l,k}n^k\nu^l, \tag{8.20}$$

ili za Dekartove ose, određene jediničnim vektorima n^k i ν^k,

$$-\dot{\varphi}_{kl} = \dot{z}_{l,k} \quad (k \neq l). \tag{8.21}$$



Sl. 22

Iz (8.21) sledi da je

$$2w_{kl} = \dot{\varphi}_{lk} - \dot{\varphi}_{kl}, \tag{8.22}$$

tj. razlika promena u jedinici vremena relativnih položaja dva međusobno upravna pravca određena je dvostrukom vrednošću odgovarajuće komponentete tenzora vrtložnosti.

Navedimo još da je, u cilju sažetog načina pisanja, u literaturi uobičajeno da se za odgovarajuće veličine uvedu sledeće oznake:

$L = \dot{x}_{k,l} g^k \otimes g^l$ — za gradijent brzine

D — za tenzor brzine deformacije

W — za tenzor vrtložnosti

Tada se (8.1—3) može pisati u obliku

$$L = \dot{F} F^{-1} = D + W, \tag{8.23}$$

$$D = \frac{1}{2}(L + L^T), \quad D = D^T, \tag{8.24}$$

$$W = \frac{1}{2}(L - L^T), \quad W = -W^T. \tag{8.25}$$

Vežbanja

1. Za polja brzina data u zadacima 2. i 5. odeljka 2. odrediti
   a) tenzor brzine deformacije,
   b) tenzor vrtložnosti i vektor vrtložnosti,
   c) invarijante tenzora brzine deformacije.

2. Za polje brzine

$$\dot{x} = f(y) - yg(r)$$
$$\dot{y} = xg(r)$$
$$\dot{z} = 0$$

   gde je $r = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$, odrediti
   a) tenzor brzine deformacije i njegove invarijante,
   b) vektor vrtložnosti i
   c) analizirati kretanje.

3. Za jednostruko povezanu oblast u E_3 naći uslove integrabilnosti za

$$d_{kl} = \frac{1}{2}(v_{k,l} + v_{l,k}).$$

4. Ako je $\dot{x} = f(r)\dfrac{y}{r}$, $\dot{y} = -f(r)\dfrac{x}{r}$, $\dot{z} = 0$, $r = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$

   kretanje je stacionarno. Odrediti:
   a) strujne linije,
   b) pokazati da je

$$d_{11} = -d_{22} = F \sin 2\theta, \; d_{12} = -F \cos 2\theta, \; d_{13} = d_{23} = 0$$

gde je $\operatorname{tang} \theta = \frac{y}{x}$ i $F = \frac{1}{2}[f'(r) - f(r)/r]$. Naći glavne vrednosti i odrediti glavne pravce tenzora d_{kl}.

9. UBRZANJE

Za vektorsko polje (1.3) materijalni izvod definiše *ubrzanje*, $\dot{\boldsymbol{v}} = \ddot{x}^k \boldsymbol{g}_k$, materijalne čestice X određene sa X^K. Mi ćemo kazati da je ubrzanje materijalne čestice X promena brzine te čestice po vremenu koju uočava posmatrač, koji se za sve vreme kretanja na njoj nalazi. Prema (3.2) biće

$$\ddot{x}^k = \frac{\partial \dot{x}^k}{\partial t} + \dot{x}^k{}_{,l} \dot{x}^l. \tag{9.1}$$

Neprekidnom promenom (X^K) u B prelazimo preko svih materijalnih čestica tela $\mathcal{B}$ za koje važi (9.1). Prema tome (9.1) određuje polje ubrzanja materijalnih čestica tela u trenutku t.

Ubrzanje se može izraziti i u drugom obliku. Tako je

$$\begin{aligned} \ddot{x}_k &= \frac{\partial \dot{x}_k}{\partial t} + (\dot{x}_{k,l} - \dot{x}_{l,k})\, \dot{x}^l + \dot{x}_{l,k} \dot{x}^l \\ &= \frac{\partial \dot{x}_k}{\partial t} + 2\dot{x}_{[k,l]} \dot{x}^l + \left(\frac{1}{2}\, \dot{\boldsymbol{x}}^2\right)_{,k}, \end{aligned} \tag{9.2}$$

vrlo pogodan oblik za analizu polja ubrzanja. Pomoću (8.5) može se (9.1) izraziti još kompaktnije

$$\dot{\boldsymbol{v}} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{w} \times \boldsymbol{v} + \operatorname{grad}\left(\frac{1}{2} \boldsymbol{v}^2\right). \tag{9.3}$$

Odavde se odmah vidi da je

$$\operatorname{rot} \dot{\boldsymbol{v}} = \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t} + \operatorname{rot}(\boldsymbol{w} \times \boldsymbol{v}), \tag{9.4}$$

gde smo koristili (8.4).

Vežbanja

1. Pokazati da je

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \ddot{\boldsymbol{x}} &= \ddot{x}^k{}_{,k} = \dot{I}_d + \dot{x}^k{}_{,l} \dot{x}^l{}_{,k} = \\ &= \dot{I}_d + I_d^2 - 2II_d - \frac{1}{2} w^2, \end{aligned}$$

gde su I_d i II_d prva i druga invarijanta tenzora d_{kl}, respektivno, a w je intenzitet vektora vrtložnosti $\boldsymbol{w}$.

2. Ako je kretanje $\boldsymbol{v} = -\operatorname{grad} f$, onda je

$$\dot{\boldsymbol{v}} = -\operatorname{grad}\left[\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2}(\operatorname{grad} f)^2\right].$$

Dokazati.

10. CIRKULACIJA

Prema definiciji, cirkulacija polja $\dot{x}^k$ za neku zatvorenu krivu c je data sa

$$\Gamma = \oint_c \dot{x}_k dx^k. \tag{10.1}$$

Primenom Stoksove teoreme može se (10.1) pisati u obliku

$$\oint_c \dot{x}_k dx^k = \int_{\mathscr{S}} w_k da^k \qquad \oint_c \dot{\boldsymbol{x}} \cdot d\boldsymbol{x} = \int_{\mathscr{S}} \boldsymbol{w} \cdot d\boldsymbol{a} \tag{10.2}$$

tj. cirkulacija brzine duž zatvorene krive linije jednaka je fluksu vektora vrtložnosti kroz bilo koju površ ograničenu tom krivom.

Ako je

$$w_{kl} = 0, \tag{10.3}$$

onda kažemo da je kretanje *bezvrtložno*; u protivnom je vrtložno. Iz (8.3) i (10.3) sledi: kretanje je bezvrtložno ako i samo ako je

$$\dot{x}_k = -f_{,k}. \tag{10.4}$$

Funkcija f se naziva potencijal polja brzine, a u njemu odgovarajuće polje brzina *laminarno*. Za laminarno polje brzina je

$$\int_{\boldsymbol{x}_1}^{\boldsymbol{x}_2} \dot{x}_k dx^k = -\int_{\boldsymbol{x}_1}^{\boldsymbol{x}_2} df = f(\boldsymbol{x}_1) - f(\boldsymbol{x}_2) \tag{10.5}$$

tj. struja laminarnog polja je funkcija samo početne i krajnje tačke, ali ne i krive linije koja ih spaja. Ako je oblast, koju obuhvata zatvorena kriva linija, jednostruko povezana onda je, stavljanjem $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_2$ u (10.5), cirkulacija laminarnog polja nula.

Znači, za jednostruko povezanu oblast važi:

— ***Teorema 1.***

Kretanje je bezvrtložno ako i samo ako je cirkulacija duž svake zatvorene krive linije jednaka nuli.

Promena cirkulacije po vremenu duž materijalne krive linije C određena je materijalnim izvodom (10.2), tj. sa

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \frac{D}{Dt}\oint_C \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{x} = \frac{D}{Dt}\int_S \boldsymbol{w} \cdot d\boldsymbol{a} = \int_S \left[\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t} + \operatorname{rot}(\boldsymbol{w} \times \boldsymbol{v})\right] \cdot d\boldsymbol{a}, \tag{10.6}$$

gde smo koristili (7.18) za $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{w}$, u odsustvu singularne linije γ na S, i činjenicu da je $\operatorname{div} \boldsymbol{w} = 0$.

— ***Teorema 2.***

Cirkulacija duž materijalne linije je stalna ako i samo ako ubrzanje poseduje potencijal.

Zaista, iz (10.6) sledi da je $\frac{D\Gamma}{Dt} = 0$ za svaku materijalnu površ ako i samo ako je

$$\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t} + \operatorname{rot}(\boldsymbol{w} \times \boldsymbol{v}) \equiv \operatorname{rot} \dot{\boldsymbol{v}} = 0, \tag{10.7}$$

s obzirom na (9.4). Međutim, (10.7) će biti zadovoljeno ako i samo ako ubrzanje $\dot{\boldsymbol{v}}$ poseduje potencijal, tj. ako i samo ako je

$$\ddot{x}_k = -\varphi_{,k}, \tag{10.8}$$

gde je φ potencijal ubrzanja.

Vežbanja

1. Bezvrtložno kretanje je izohorično ako i samo ako je $f^{k}_{;k} = 0$, gde je f potencijal brzine.

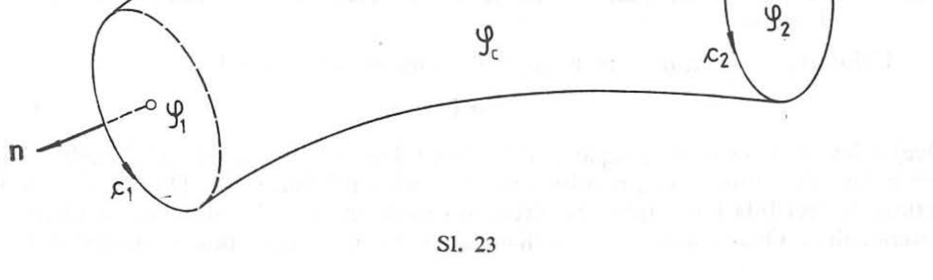
11. VRTLOŽNE LINIJE, POVRŠI I CEVI

Vektorske linije vektora vrtložnosti $\boldsymbol{w}$ nazivamo *vrtložne linije*, njegove vektorske površi — *vrtložnim površima*, a njegove vektorske cevi — *vrtložnim cevima*. Uopšte, vektorska površ nekog vektorskog polja je površ koja u svakoj tački tangira uočeno vektorsko polje. Površ koju obrazuju vektorske linije nekog vektorskog polja, koje prolaze kroz tačke neke zatvorene krive linije, nazivamo *vektorska cev*.

Polje vektora vrtložnosti je *solenoidno*, jer je

$$\operatorname{div} \boldsymbol{w} = \operatorname{div} \operatorname{rot} \boldsymbol{v} = 0. \tag{11.1}$$

Takvo polje ima niz osobina koje ne važe, u opštem slučaju, za polje brzine $\boldsymbol{v}$. Uočimo neku vrtložnu cev ograničenu poprečnim presecima $\mathscr{S}_1$ i $\mathscr{S}_2$ (sl. 23).



Sl. 23

Fluks vektora $\boldsymbol{w}$ kroz $\mathscr{S}_1$, odnosno $\mathscr{S}_2$ uočene cevi, naziva se *jačina vrtloga* u ovim poprečnim presecima.

Prva Helmholcova teorema:

— *Jačina vrtloga je ista za sve poprečne preseke vrtložne cevi.*

Teorema se dokazuje primenom Grinove teoreme (o divergenciji). Tada je s obzirom na (11.1)

$$\int_{\mathscr{S}} \boldsymbol{w} \cdot d\boldsymbol{a} = \int_{v} \operatorname{div} \boldsymbol{w}\, dv \equiv 0, \tag{11.2}$$

gde je površ integracije $\mathscr{S} = \mathscr{S}_1 + \mathscr{S}_c + \mathscr{S}_2$; sa $\mathscr{S}_c$ je označena bočna površ. Kako je po definiciji $\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{n} = 0$ na $\mathscr{S}_c$, iz (11.2) dobijamo da je

$$\int_{\mathscr{S}_1} \boldsymbol{w} \cdot d\boldsymbol{a} = \int_{\mathscr{S}_2} \boldsymbol{w} \cdot d\boldsymbol{a}. \quad \square \tag{11.3}$$

Važna *posledica* ove teoreme je da vrtložne linije ne mogu ni počinjati niti se završavati u bilo kojoj tački unutrašnjosti tela.

Ista teorema se može izraziti i u obliku takozvane ***Kelvinove teoreme:***

— *Cirkulacija duž krivih linija, koje ograničavaju poprečne preseke na strujnoj cevi uzete u istom smeru, jednake su.*

Dokaz sledi neposredno iz (11.3) primenom Stoksove teoreme.

Tada je

$$\int_{c_1} \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{x} = \int_{c_2} \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{x}, \tag{11.4}$$

s obzirom na (8.4). $\square$

Jednačine vrtložnih linija su date sa

$$e_{klm} w^l dx^m = 0, \quad \boldsymbol{w} \times d\boldsymbol{x} = 0. \tag{11.5}$$

Možemo postaviti pitanje: — Kada su vrtložne linije materijalne linije? Odgovor se dobija primenom kriterijuma Helmholc-Zoravskog za $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{w}$. Iz (4.25), (11.1) i (9.4) dobijamo da je

$$\boldsymbol{w} \times \left[\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t} + \operatorname{rot}(\boldsymbol{w} \times \boldsymbol{v})\right] = \boldsymbol{w} \times \operatorname{rot} \dot{\boldsymbol{v}} = 0. \tag{11.6}$$

Za $\boldsymbol{w} = 0$ iz (11.6) sledi:

Potreban i dovoljan uslov da bi vrtložne linije bile materijalne jeste da je ubrzanje potencijalno ili da je vektor vrtložnosti kolinearan sa rotorom ubrzanja.

Uslov (6.11) se za $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{w}$ svodi, s obzirom na (11.1) i (9.4), na oblik

$$\operatorname{rot} \dot{\boldsymbol{v}} = 0. \tag{11.7}$$

Ovaj uslov je vrlo važan i poznat pod imenom Dalamber-Ojlerov (D'Alamber-Euler) uslov. Primenom ovog rezultata na (6.9) možemo kazati: — Da bi jačina svih vrtložnih cevi bila konstantna po vremenu potrebno je i dovoljno da je ubrzanje potencijalno. Ovaj uslov je i dovoljan da bi vrtložne cevi bile materijalne. $\square$

Značaj ovog uslova se ogleda u Teoremi 2 odeljka 10., koja se može izraziti i u ekvivalentnom obliku: — Cirkulacija duž materijalne linije je stalna ako i samo ako je zadovoljen Dalamber-Ojlerov uslov.

Radi definisanosti, takva kretanja ćemo zvati kretanja sa nepromenljivom cirkulacijom, za koja važe dve nove Helmholcove teoreme.

Druga Helmholcova teorema:

— *Pri kretanju sa nepromenjenom cirkulacijom vrtložne linije su materijalne.*

Dokaz teoreme sledi iz (9.7) *i* (11.6).

Treća Helmholcova teorema:

— *Da bi jačina vrtloga bila konstantna pri kretanju, duž neke vrtložne cevi, čije su vrtložne linije materijalne, potrebno je i dovoljno da kretanje bude sa nepromenjenom cirkulacijom.*

Dokaz teoreme sledi direktno iz (10.6).

Na osnovu dokaza ovih teorema vidi se da se radi o novoj formulaciji ranije iznetih teorema ili stavova.

12. MASA

Masa je osnovno svojstvo materije. Obeležavamo je sa m i pripisujemo je svakom materijalnom telu. To je veličina kojom se izražava količina materije u telu i zadovoljava sledeće zahteve:

1. masa tela je jednaka zbiru masa njegovih delova,
2. ne menja se pri kretanju tela, i
3. ne zavisi od dimenzija tela.

Prevedeno na matematički jezik, to znači:

1. da je masa mera,
2. da je invarijantnog karaktera pri kretanju i
3. da njena fizička dimenzija $[M]$ nije zavisna od vremena $[T]$ i dužine $[L]$.

U mehanici kontinuuma materija je neprekidno raspoređena u nekoj oblasti prostora. Takva tela, konačna po svojim dimenzijama, imaju konačnu masu. Zbog toga se konačna masa u kontinuumu pripisuje, ne individualnim česticama, već skupu čestica koje imaju pozitivnu zapreminu. Šta više, masa tela čija zapremina teži nuli takođe teži nuli. U protivnom, na osnovu zahteva 1., i konačna tela bi imala beskonačnu masu ako bi se ona pripisala svakoj materijalnoj čestici tela. Drukčije rečeno: za kontinuum pretpostavljamo da je masa, odnosno mera m, neprekidna funkcija zapremine. Tada se može definisati veličina ϱ, koja se naziva *gustina mase* i koja predstavlja graničnu vrednost izraza

$$\varrho = \lim_{v \to 0} \frac{m(\mathcal{B})}{v(\mathcal{B})}, \quad \dim \varrho = [ML^{-3}], \tag{12.1}$$

gde je $m(\mathcal{B})$ masa tela $\mathcal{B}$ čija je zapremina $v(\mathcal{B})$.

Izraz (12.1) se piše u poznatom matematičkom obliku

$$\varrho = \frac{dm}{dv}. \tag{12.2}$$

Po definiciji, ϱ je apsolutan skalar takav da je

$$0 \leqslant \varrho < \infty \tag{12.3}$$

Tačke u kojima $\varrho \to \infty$ smatramo singularnim i isključujemo iz daljeg razmatranja.

13. ZAKON KONZERVACIJE MASE

Već smo naglasili da je masa aditivna ne-negativna veličina, invarijantna pri kretanju. Za neko telo zapremine v ukupna masa je određena, prema (12.2), izrazom

$$m = \int_v \varrho \, dv. \tag{13.1}$$

i ima istu vrednost u svakom trenutku vremena i u svakoj konfiguraciji koju telo zauzima u prostoru.

Prema tome, *zakon konzervacije* tvrdi:

Ukupna masa tela se ne menja pri kretanju.

Izražen u obliku $m = \text{const.}$ zakon konzervacije mase se naziva *globalni zakon konzervacije* i u ekvivalentnom obliku glasi

$$\int_V \varrho_0 \, dV = \int_v \varrho \, dv, \tag{13.2}$$

gde su ϱ_0 i ϱ gustina u početnoj i trenutnoj konfiguraciji, respektivno. Ako se zapreminski integrali u (13.2) oba izraze u prostornom ili materijalnom opisu, biće

$$\int_V (\varrho_0 - J\varrho) \, dV = 0, \quad \int_v (\varrho - \varrho_0 J^{-1}) \, dv = 0, \tag{13.3}$$

s obzirom na (2.15.12).

Ako globalni zakon konzervacije važi za svaki delić tela dobijamo lokalni zakon konzervacije. Prema (13.3) lokalni zakon konzervacije mase glasi

$$\varrho_0 = \varrho J \quad \text{ili} \quad \varrho = \varrho_0 J^{-1} \tag{13.4}$$

i nazivaju se *materijalne jednačine neprekidnosti.*

Za izohorično kretanje je $\varrho = \varrho_0$, tj. gustina svake čestice ostaje nepromenjena za sve vreme kretanja. Uža klasa kretanja je *homohorično kretanje.* Kažemo: homohorično kretanje, definisano sa $\varrho_0 = \text{const.}$, je izohorično kod koga je gustina uniformna u prostoru i po vremenu.

Prostorne jednačine neprekidnosti ili jednačine kontinuiteta možemo dobiti na više načina. Na primer: materijalni izvod (3.2) daje

$$\frac{D}{Dt} \int_v \varrho dv = 0, \tag{13.5}$$

gde je v materijalna zapremina. U lokalnom obliku (13.5), s obzirom na (6.14), glasi

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + (\varrho \dot{x}^k)_{,k} = 0 \quad \text{ili} \quad \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho \boldsymbol{v}) = 0. \tag{13.6}$$

Ova jednačina je u literaturi poznata i pod imenom *jednačina kontinuiteta*. Isti izraz se mogao dobiti kao materijalni izvod (13.1) odakle sledi da je

$$\dot{\overline{(\varrho dv)}} = 0. \tag{13.7}$$

Na isti način iz (13.4) dobijamo

$$\dot{\overline{\varrho J}} = 0. \tag{13.8}$$

Koristeći (5.13) i (5.10) u ovim izrazima moguće je (13.6) izraziti u sled ećim ekvivalentnim oblicima

$$\dot{\overline{\log \varrho}} + I_d = 0, \quad \dot{\varrho} + \varrho \dot{x}^k_{,k} = 0, \quad \dot{\varrho} + \varrho \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0. \tag{13.9}$$

Kao posledica (13.7) sledi vrlo važna identičnost za materijalnu zapreminu v i i funkciju f neprekidnu i diferencijabilnu na v

$$\frac{D}{Dt}\int_v \varrho f dv = \int_v \varrho \dot{f} dv, \quad \frac{D}{Dt}\int_v f dm = \int_v \dot{f} dm, \tag{13.10}$$

koju ćemo vrlo često koristiti.

Vežbanja

1. Pokazati da važi identičnost

$$\varrho \ddot{x}^k = \frac{\partial}{\partial t}(\varrho \dot{x}^k) + (\varrho \dot{x}^k \dot{x}^l)_{,l}.$$

2. Za dvodimenzionalna i jednodimenzionalna tela gustina se definiše kao masa po jedinici površine i masa po jedinici luka, respektivno. Označimo sa σ gustinu materijalne površi a sa γ gustinu materijalne krive linije. Odrediti odgovarajuće zakone konzervacije mase materijalne površi i materijalne krive.

14. OPŠTI ZAKONI BALANSA

Neka je v materijalna oblast koja sadrži singularnu površ $\sigma(t)$ i neka je ψ bilo koja definisana veličina, neprekidna i diferencijabilna u v izuzev tačaka na $\sigma(t)$. Tada izraz

$$\frac{D}{Dt}\int_v \varrho \psi dv = \oint_{\mathscr{S}} \boldsymbol{\Phi}\, d\boldsymbol{a} + \int_v \varrho p dv, \tag{14.1}$$

nazivamo *opšti zakon balansa*. Veličine $\boldsymbol{\Phi}[\psi]$ i $p[\psi]$ nazivamo fluks ψ kroz granicu $\mathscr{S}$ materijalne oblasti v i specifična proizvodnja ψ u v, respektivno. Sve veličine u (14.1) su ravnopravne među sobom, tako da opšti zakon balansa može poslužiti kao definicija bilo koje od tri veličine $\dot{\psi}$, $\boldsymbol{\Phi}[\psi]$ i $p[\psi]$ preko dve preostale. Takođe, za bilo koje ψ uvek možemo izabrati veličine $\boldsymbol{\Phi}$ i p tako da (14.1) važi. Prema tome možemo reći da se svaka veličina ψ može uravnotežiti.

Pomoću (7.6) i (7.7) možemo (14.1) napisati u ekvivalentnom obliku

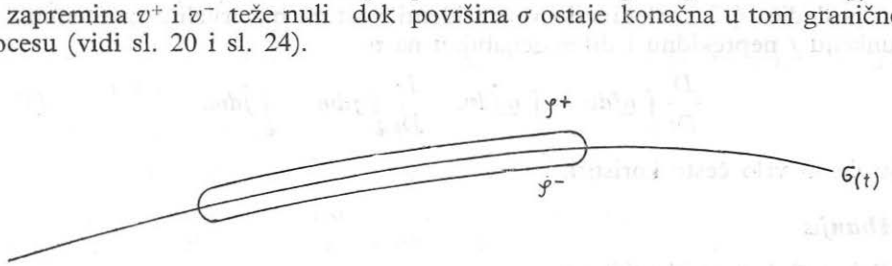
$$\int_v \left\{ \frac{\partial(\varrho\psi)}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho\psi\boldsymbol{v}) - \operatorname{div}\boldsymbol{\Phi} - \varrho p \right\} dv +$$

$$+ \oint_{\sigma(t)} [\![\varrho\psi(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{\Phi}]\!]\, d\boldsymbol{a} = 0;\tag{14.2}$$

$$\int_v \{\varrho\dot{\psi} + \dot{\psi}(\dot{\varrho} + \varrho \operatorname{div}\boldsymbol{v}) - \operatorname{div}\boldsymbol{\Phi} - \varrho p\}\, dv +$$

$$+ \oint_{\sigma(t)} [\![\varrho\psi(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{\Phi}]\!]\, d\boldsymbol{a} = 0.$$

Pretpostavimo da su podintegralne veličine u zapreminskom integralu u okolini $\sigma(t)$ ograničene i da $\varrho\psi$, $\boldsymbol{v}$ i $\boldsymbol{\Phi}$ teže graničnim vrednostima, koje su neprekidne funkcije položaja na svakoj strani $\sigma(t)$. Pretpostavimo dalje da opšti zakon balansa važi za svaki deo tela $\mathcal{B}$. Pod tim pretpostavkama neka $\mathcal{S}^+$ i $\mathcal{S}^-$ teže ka $\sigma(t)$ tako da zapremina v^+ i v^- teže nuli dok površina σ ostaje konačna u tom graničnom procesu (vidi sl. 20 i sl. 24).



Sl. 24

Zapreminski integral u (14.2) tada iščezava i dobijamo da je

$$\int_\sigma [\![\varrho\psi(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{\Phi}]\!]\, d\boldsymbol{a} = 0,$$

ili u lokalnom obliku

$$[\![\varrho\psi(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{\Phi}]\!]\, \boldsymbol{n} = 0 \text{ na } \sigma(t),\tag{14.3}$$

gde je $\boldsymbol{n}$ jedinični vektor normale na σ. Ovaj izraz se naziva *uslov skoka na* $\sigma(t)$. U oblasti koja ne sadrži singularnu površ σ iz (14.2) sledi da je

$$\int_{v-\sigma} \{\varrho\dot{\psi} + \psi(\dot{\varrho} + \varrho \operatorname{div}\boldsymbol{v}) - \operatorname{div}\boldsymbol{\Phi} - \varrho p\}\, dv = 0,$$

ili u lokalnom obliku

$$\varrho\dot{\psi} + \psi(\dot{\varrho} + \varrho \operatorname{div}\boldsymbol{v}) - \operatorname{div}\boldsymbol{\Phi} - \varrho p = 0 \text{ u } V - \sigma,\tag{14.4}$$

gde smo sa $v - \sigma$ naznačili oblast tela koja ne sadrži singularnu površ σ. U specijalnom slučaju kada je $\psi = 1$, $\boldsymbol{\Phi} = 0$ i $p = 0$, (14.1) se svodi na (13.5), koji u slučaju singularne površi daje lokalni zakon konzervacije mase

$$\dot{\varrho} + \varrho \operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0 \text{ u } v - \sigma,\tag{14.5}$$

$$[\![\varrho(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})]\!] \cdot \boldsymbol{n} = 0 \text{ na } \sigma$$

s obzirom na (14.3) i (14.4). Koristeći $(14.5)_1$ u (14.4) možemo konačno napisati lokalni zakon balansa opšteg zakona balansa (14.1) u obliku

$$\begin{aligned} &\varrho\dot{\psi} - \operatorname{div}\boldsymbol{\Phi} - \varrho p = 0 \quad v - \sigma \\ &[\![\varrho\psi(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}) - \boldsymbol{\Phi}]\!]\,\boldsymbol{n} = 0 \quad \sigma. \end{aligned} \tag{14.6}$$

Za $\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\Phi}^k \otimes \boldsymbol{g}_k$ relacije (14.6) možemo pisati u ekvivalentnom obliku

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}\Phi^k}{\partial x^k} + \varrho(p - \dot{\psi}) = 0 \text{ u } v - \sigma, \tag{14.7}$$

$$[\![\boldsymbol{\Phi}^k + \varrho\psi(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v})]\!]\, n_k = 0 \text{ na } \sigma.$$

Kada je za neko ψ, $\boldsymbol{\Phi}[\psi] = 0$ i $p[\psi] = 0$ biće, prema (14.1) i (14.6)

$$\frac{D}{Dt}\int_v \varrho\psi dv = 0, \tag{14.8}$$

ili u lokalnom obliku

$$\dot{\psi} = 0 \text{ u } v - \sigma, \tag{14.9}$$

$$[\![\varrho\psi(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u})]\!]\,\boldsymbol{n} = 0 \text{ na } \sigma.$$

Za takvo ψ kažemo da važi *zakon konzervacije* i da je ukupno $\varrho\psi$ u v očuvano ili konzervisano u toku kretanja. Primer takvog zakona je zakon konzervacije mase. Prema tome možemo kazati: da bi ukupno $\varrho\psi$ bilo konzervisano za svako materijalno v potrebno je i dovoljno da važi (14.8).

Lokalno i globalni zakoni balansa još se u literaturi nazivaju i *diferencijalni* i *integralni zakoni balansa*, respektivno.

Napomena.

Za dalja izlaganja potrebno je izvesti opšti zakon balansa u odnosu na referentnu konfiguraciju. Postoji više načina za njihovo izvođenje od kojih jedan ovde izlažemo.

Polazimo od (14.1) napisanom u njemu ekvivalentnom obliku

$$\frac{D}{Dt}\int_v \varrho\,\psi dv = \int_{\mathscr{S}} \boldsymbol{\Phi}^k\, da_k + \int_v \varrho p dv, \quad \boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\Phi}^k \otimes \boldsymbol{g}_k, \tag{14.10}$$

koji, korišćenjem (13.4), (2.15.8) i definicije materijalne reprezentacije date sa (7.17), postaje

$$\frac{D}{Dt}\int_V \varrho_0\psi dV = \int_S \boldsymbol{\Phi}^K\, dA_K + \int_V \varrho_0 p dV, \tag{14.11}$$

gde je

$$\boldsymbol{\Phi}^K \equiv J X^K_{;k}\boldsymbol{\Phi}^k. \tag{14.12}$$

Za izvođenje lokalnog oblika ovog balansa koristićemo (7.16) i transportnu teoremu u referentnoj konfiguraciji

$$\frac{D}{Dt}\int_V \varrho_0\Psi dV = \int_V \varrho_0\frac{\partial\Psi}{\partial t}dV - \int_\Sigma \varrho_0\,[\![\Psi U^K]\!]\, dA_K, \tag{14.13}$$

koja se dobija iz (7.15) kada se umesto funkcije Ψ uzme $\varrho\Psi$ i iskoristi (13.4).

Tada se (14.11) može napisati kao

$$\int_V \left[\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{G}\Phi^K}{\partial X^K} + \varrho_0 \left(p - \frac{\partial \Psi}{\partial t}\right)\right] dV + \int_S [\![\Phi^K + \varrho_0 \Psi U^K]\!]\, dA_K = 0,$$

ili u lokalnom obliku

$$\begin{gathered} \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{G}\Phi^K}{\partial X^K} + \varrho_0 (p - \dot{\psi}) = 0 \text{ u } V - \Sigma, \\ [\![\Phi^K N_K + \varrho_0 \psi U_N]\!] = 0 \text{ na } \Sigma, \end{gathered} \tag{14.14}$$

gde je, očigledno, brzina prostiranja

$$U_N = U^K N_K. \tag{14.15}$$

Relacije (14.14) izražavaju traženi oblik lokalnog zakona balansa u referentnoj konfiguraciji. Pri tome treba imati u vidu da su tada sve veličine, koje u njemu figurišu, funkcije materijalnih koordinata X^K. Onda $\dfrac{\partial \Psi(\boldsymbol{X}, t)}{\partial t}$ predstavlja materijalni izvod funkcije $\Psi(\boldsymbol{X}, t)$ tako da je

$$\frac{\partial \Psi(\boldsymbol{X}, t)}{\partial t} = \dot{\psi}(\boldsymbol{x}, t),$$

za $\psi(\boldsymbol{x}, t) = \Psi[\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}, t), t]$.

Vežbanja

1. Za materijalnu površ S u kojoj se kreće neka singularna kriva $\gamma(t)$ nekom brzinom $\boldsymbol{u}$ globalni zakon balansa za neku veličinu $\boldsymbol{q}$ glasi

$$\frac{D}{Dt} \int_S \boldsymbol{q}\, da = \int_C \boldsymbol{h}\, da + \int_S r\, da,$$

gde je C granica S. Koristeći (7.17) i (7.6) napisati njegov lokalni zakon balansa.

2. Neka je $\boldsymbol{q} = \sigma \boldsymbol{b}$, gde je σ gustina mase dvodimenzionalnog materijalnog tela. Koristeći rezultate prethodnog zadatka, kao i zadatka 2. odeljak 13., napisati odgovarajuće zakone balansa za dvodimenzionalno telo. Odrediti potrebne i dovoljne uslove da bi neka veličina bila očuvana (konzervisana).

3. Za jednodimenzionalno materijalno telo formulisati globalni zakon balansa i odrediti njegov lokalni oblik.

4. Pokazati da je za $\Phi^K = J X^K_{;k} \Phi^k$,

$$\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{G}\Phi^K}{\partial X^K} = J \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}\Phi^k}{\partial x^k}.$$

5. Pokazati da je za

$$\begin{gathered} \Phi^{K\cdots}_{\cdots} = J X^K_{;k} \Phi^{k\cdots}_{\cdots}, \\ \Phi^{K\cdots}_{\cdots;K} = J \Phi^{k\cdots}_{\cdots;k}. \end{gathered}$$

15. KOLIČINA KRETANJA. MOMENT KOLIČINE KRETANJA

Količina kretanja $\boldsymbol{K}$ materijalnog kontinuuma (tela) sadržanog u oblasti v je definisana sa

$$\boldsymbol{K} = \int_v \boldsymbol{v}\, dm = \int_v \dot{x}^k \boldsymbol{g}_k(\boldsymbol{x})\, dm, \tag{15.1}$$

a moment količine kretanja $\boldsymbol{L}$ u odnosu na koordinatni početak opšteg sistema sa

$$\boldsymbol{L} = \int_v \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{v}\, dm = \int_v e_{klm} p^l \dot{x}^m \boldsymbol{g}^k(\boldsymbol{x})\, dm \tag{15.2}$$

u odnosu na sistem koordinata x^k dopustiv u E_3. U odnosu na takav sistem bazni vektori, $\boldsymbol{g}_k$ odnosno $\boldsymbol{g}^k$, su funkcije položaja i kao takvi nisu konstantni, osim u specijalnom slučaju kada je sistem koordinata Dekartov. Zbog toga bazni vektori ne mogu u opštem slučaju biti izneti ispred znaka integrala. U principu, integracija se onda izvodi na taj način što se polje vektora $\boldsymbol{v}$, odnosno $\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{v}$, koje deluje u v, paralelno pomeri u bilo koju tačku $\boldsymbol{X}$ i onda izvrši sumiranje (integracija). U tom cilju pomnožimo (15.1) i (15.2) sa $G_K(\boldsymbol{X})$. Tada je

$$\begin{aligned} K^K(\boldsymbol{X}, t) &= \int_v \varrho\, g_k^K(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{x})\, \dot{x}^k dv, \\ L_K(\boldsymbol{X}, t) &= \int_v \varrho\, g_K^k(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{x})\, e_{klm} p^l \dot{x}^m dv. \end{aligned} \tag{15.3}$$

Ovako dobijene veličine K^K i L_K imaju tenzorski karakter, što je vrlo jednostavno pokazati. U odnosu na Dekartov sistem koordinata, s obzirom na konstantnost baznih vektora, može se (15.1) i (15.2) odmah pisati u komponentalnom obliku

$$\begin{aligned} K_k &= \int_v \varrho\, \dot{z}_k\, dv, \\ L_k &= \int_v \varrho\, e_{klm} z_l \dot{z}_m dv, \end{aligned} \tag{15.4}$$

za bilo koju tačku u E_3. Isti rezultat sledi iz (15.3) kada je $g_k^K = \delta_k^K$ Kronekerov δ-simbol.

Odavde se vide očigledne prednosti koje nam pruža Dekartov sistem koordinata, kada je u pitanju komponentalna reprezentacija ovde navedenih veličina i njima drugih sličnih izraza. Međutim, treba imati na umu: 1. da nije uvek moguće koristiti Dekartov sistem koordinata (na primer, u slučaju ljuski — koje sa geometrijskog stanovišta predstavljaju Rimanske prostore) i 2. da izrazi u opštem slučaju dati u odnosu na Dekartov sistem koordinata ne garantuju njihov tenzorski karakter. Zbog toga ćemo uvek, kada je to moguće, zadržavati opšti način obeležavanja kao u slučaju (15.1) i (15.2). U slučaju komponentalne reprezentacije izražavaćemo veličine u odnosu na proizvoljni sistem koordinata x^k, dopustiv u E_3. Na taj način je sadržana i njihova reprezentacija u odnosu na Dekartov sistem koordinata kao specijalni slučaj.

Obeležimo sa $\boldsymbol{F}$ i $\boldsymbol{M}$ rezultujuću silu i rezultujući moment u odnosu na koordinatni početak opšteg sistema. Tada zakoni nerelativističke mehanike tvrde *da postoji sistem* u kome je

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{K}=\boldsymbol{F} \quad \text{ili} \quad \frac{D}{Dt}\int_{v}\varrho\, g_{k}^{K}\dot{x}^{k}\,dv=F^{K}, \tag{15.5}$$

koji predstavlja zakon količine kretanja, i

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{L}=\boldsymbol{M} \quad \text{ili} \quad \frac{D}{Dt}\int_{v}\varrho g^{Kk}e_{klm}\,p^{l}x^{m}dv=M^{K}, \tag{15.6}$$

koji predstavlja zakon momenta količine kretanja. Sistem referencije u odnosu na koji važe zakoni (15.5) i (15.6) naziva se *inercijalni*.

Ovi zakoni važe ne samo za telo kao celinu, nego i za svaki njegov merljivi deo, jer je svaki njegov deo takođe telo. Važe nezavisno od izbora momentne tačke. Prema tome, izborom koordinatnog početka za momentnu tačku ne gubi se ništa u opštosti. Poznati i pod imenom Ojlerovi zakoni, oni važe za sve inercijalne sisteme.

IV NAPON

1. ZAPREMINSKE I POVRŠINSKE SILE

Sile, koje deluju na telo, možemo podeliti na *spoljašnje* i *unutrašnje*. Spoljašnje sile su mera dejstva na telo drugih tela, spoljnih u odnosu na posmatrano. Unutrašnje sile su sile uzajamnog dejstva čestica ili delova uočenog tela. Ova podela je opšta i zajednička za sve sile nezavisno od njihove fizičke prirode, tj. nezavisno od toga da li su mehaničkog, električnog, hemijskog ili nekog drugog porekla.

Spoljašnje sile koje deluju na izabrano telo se u mehanici kontinuuma dele na *zapreminske* i *površinske*.

Zapreminske sile deluju na svaki element zapremine i kao takve predstavljaju sile na rastojanju. Pod istim nazivom koristi se i sila po jedinici mase $\boldsymbol{f}$, tako da je ukupna sila određena sa

$$\int_v \boldsymbol{f}\, dm = \int_v \varrho \boldsymbol{f} dv, \tag{1.1}$$

gde je v zapremina uočenog tela. Primeri ovih sila su gravitaciona i elektrostatička sila.

Površinske sile su kontaktne sile i deluju na telo u tačkama njegove granične površi. Neprekidno raspoređena površinska sila po jedinici površine naziva se *površinski napon*. Obeležavaćemo ga sa $\boldsymbol{t}_{(n)}$, čime želimo da naglasimo njegovu zavisnost od orijentacije površi na koju deluje. Ukupna neprekidno raspoređena površinska sila je

$$\oint_{\mathscr{S}} \boldsymbol{t}_{(n)} da. \tag{1.2}$$

Primer takve sile je sila hidrostatičkog pritiska koja deluje na graničnu površ tela potopljenog u tečnost.

Unutrašnje sile za bilo koje dve čestice tela su, na osnovu trećeg Njutnovog zakona — zakona akcije i reakcije — suprotne. Prema tome, rezultanta unutrašnjih sila je nula sila ili, kratko rečeno, unutrašnje sile su u ravnoteži.

U mehanici kontinuuma površinske sile između čestica se pojavljuju kao sile površinskog napona dela tela, zamišljeno izdvojenog od tela. One predstavljaju interakciju ostatka tela na zamišljeno izdvojen njegov deo, a u tačkama granične površi toga dela. O njima će kasnije biti više reči.

Sila koja deluje u tački naziva se *koncentrisana sila*. Prisustvo ovih sila dovodi do teškoća u određivanju lokalnih ili diferencijalnih oblika zakona balansa u napadnoj tački njihovog dejstva. Nadalje mi pretpostavljamo da se lokalni zakoni balansa odnose na tačke u kojima ne deluju koncentrisane sile.

Prema tome, rezultujuća sila $\boldsymbol{F}$, koja deluje na telo, je

$$\boldsymbol{F} = \oint_{\mathscr{S}} \boldsymbol{t}_{(n)}\, da + \int_{v} \boldsymbol{f}\, dm, \tag{1.3}$$

gde smo izostavili koncentrisane sile iz napred navedenih razloga.

2. MOMENT ZAPREMINSKE I POVRŠINSKE SILE. POVRŠINSKI I ZAPREMINSKI SPREG

Moment sile je vektorska veličina i zavisi od izbora momentne tačke. Rezultujući moment nekog sistema sila jednak je vektorskom zbiru momenata svih sila uočenog sistema za istu momentnu tačku.

Za neprekidno telo ovaj sistem sila čine zapreminske i površinske sile. Koncentrisane sile se ne uzimaju u obzir zbog prethodno navedenih razloga.

U odnosu na koordinatni početak, kao momentnu tačku, rezultujući moment ovih sila glasi

$$\oint_{\mathscr{S}} \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{t}_{(n)} da + \int_{v} \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{f} dm, \tag{2.1}$$

gde je v zapremina tela, a $\mathscr{S}$ njegova granična površ u $\boldsymbol{x}_i$. Nadalje se podrazumeva da se moment računa u odnosu na koordinatni početak, jer se svaka tačka u E_3 može uzeti za koordinatni početak nekog zajedničkog sistema.

Analogno zapreminskim i površinskim silama, u mehanici kontinuuma se razmatra dejstvo *zapreminskih* i *površinskih spregova* neprekidno raspoređenih po zapremini i površini tela, respektivno. Zapreminski spreg po jedinici mase obeležavaćemo sa $\boldsymbol{l}$, a površinski spreg po jedinici površine sa $\boldsymbol{m}_{(n)}$, čime smo naznačili njegovu zavisnost od orijentacije površi na koju deluje. *Koncentrisani spreg*, tj. spreg koji deluje u jednoj tački tela, isključujemo iz razmatranja iz istih razloga kao i koncentrisanu silu.

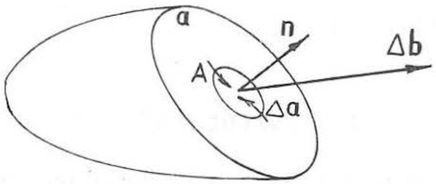
Prema tome, rezultujući spreg koji deluje na telo je određen sa

$$\boldsymbol{M} = \oint_{\mathscr{S}} (\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{t}_{(n)} + \boldsymbol{m}_{(n)})\, da + \int_{v} (\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{t}_{(n)} + \boldsymbol{l})\, dm. \tag{2.2}$$

Mehanika kontinuuma koja ne uzima u obzir egzistenciju površinskih i zapreminskih spregova se naziva *mehanika ne-polarnog kontinuuma*, za razliku od *mehanike polarnog kontinuuma*. U mehanici polarnog kontinuuma rezultujući moment je dat sa (2.2), a u ne-polarnoj sa (2.1). Mi ćemo se nadalje baviti problemima mehanike ne-polarnog kontinuuma.

3. VEKTOR NAPONA

Vektor $\boldsymbol{t}_{(n)}$, tj. vektor površinske sile po jedinici površine, nazivamo vektor napona. Površ za koju određujemo vektor napona može biti granična površ tela ili u telu, kada predstavlja granicu nekog njegovog imaginarnog dela. U ovom drugom slučaju ona razdvaja telo na dva dela koja uzajamno deluju preko tačaka njihove zajedničke granične površi (sl. 25).



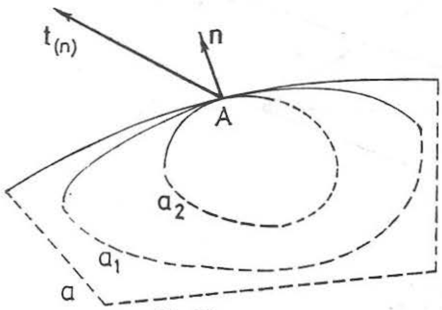
Sl. 25

Zamišljeno izdvojeni deo tela (sl. 25) je izložen dejstvu sila u tačkama svoje granične površi $\boldsymbol{a}$, koje zamenjuje dejstvo ostatka tela.

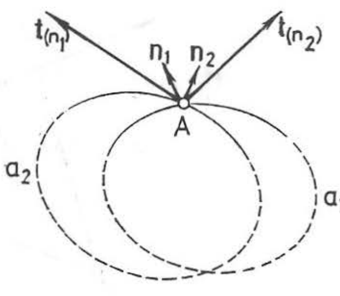
Uočimo površinu Δa na koju deluje sila Δb u tački A. Površinska sila Δb u A je rezultanta svih neprekidno raspoređenih sila na Δa. Odnos $\Delta \boldsymbol{b}/\Delta a$ je vektor koji se od vektora $\Delta \boldsymbol{b}$ razlikuje samo po intenzitetu. Nizu površina $\Delta_1 a$, $\Delta_2 a, \ldots$ izabranom tako da sadrži A i da teži nuli u A, tj. teži ka A ali se ne svodi na liniju, odgovara niz sila $\Delta_1 \boldsymbol{b}, \Delta_2 \boldsymbol{b}, \ldots$ tako da svakom elementu Δa niza površina odgovara različita sila $\Delta \boldsymbol{b}$ koja deluje na tu površ. Ove sile se, u opštem slučaju, razlikuju ne samo po veličini nego i po pravcu. Graničnu vrednost

$$\lim_{\Delta a \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{b}}{\Delta a} = \frac{d\boldsymbol{b}}{da} = \boldsymbol{t}_{(n)} \tag{3.1}$$

koja teži konačnoj vrednosti, nazivamo vektor napona u tački A. Zahtev da ova granična vrednost postoji i da je nezavisna od posebno izabranog niza površina, predstavlja osnovni postulat mehanike kontinuuma. U suštini ovaj postulat je i oštriji: granična vrednost (3.1) nije nezavisna samo od izabranog niza površina, nego je nezavisna i od izabranih površi sve dotle dok u tački ove površi imaju zajedničku normalu $\boldsymbol{n}$ (sl. 26).



Sl. 26



Sl. 27

Ako se kroz A izabere neka površ sa drugim vektorom normale tada će, u opštem slučaju, njen vektor napona biti različit od vektora napona prve površi (sl. 27).

Postojanje vektora napona nam omogućuje da, u ne-polarnoj mehanici kontinuuma, Ojlerove zakone kretanja (15.5) i (15.6) pišemo u obliku

$$\frac{d}{dt}\int_{v} \varrho \boldsymbol{v} dv = \oint_{\mathscr{S}} \boldsymbol{t}_{(n)} da + \int_{v} \varrho \boldsymbol{f} dv, \tag{3.2}$$

$$\frac{d}{dt}\int_{v} \varrho \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{v} dv = \oint_{\mathscr{S}} \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{t}_{(n)} da + \int_{v} \varrho \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{f} dv, \tag{3.3}$$

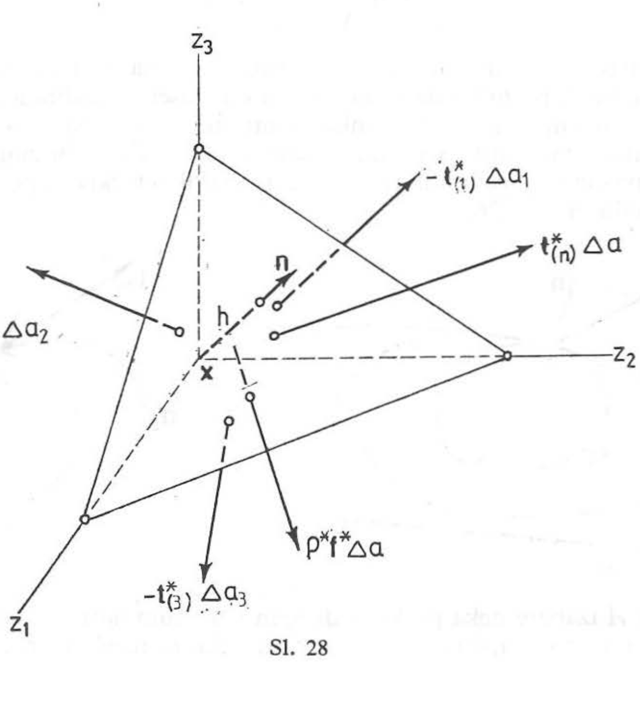
pri čemu smo koristili (1.3) i (2.1).

4. TENZOR NAPONA

Već smo pokazali da vektor napona $\boldsymbol{t}_{(n)}$ u nekoj tački $\boldsymbol{x}$ zavisi od orijentacije površi kroz tu tačku, koja je određena njenim jediničnim vektorom spoljne normale $\boldsymbol{n}$ u toj tački. Kako skup svih jediničnih vektora $\boldsymbol{n}$ u $\boldsymbol{x}$ svojim krajem određuje jediničnu sferu, tj. dvodimenzionalnu površ, zaključujemo da kroz $\boldsymbol{x}$ prolazi beskonačno mnogo površi raznih orijentacija. U opštem slučaju, raznim površima ovog skupa površi kroz $\boldsymbol{x}$ odgovaraju razni vektori napona. Mi ćemo kazati da skup svih $\boldsymbol{t}_{(n)}$ u $\boldsymbol{x}$ određuje naponsko stanje čestice X u $\boldsymbol{x}$. Raznim česticama X odgovaraju razna naponska stanja. Naponsko stanje tela $\mathscr{B}$ je, prema tome, određeno naponskim stanjem svih njegovih čestica. Na osnovu toga pišemo

$$\boldsymbol{t}_{(n)} = \boldsymbol{t}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{n}). \tag{4.1}$$

Zavisnost vektora napona u tački $\boldsymbol{x}$ od spoljne normale $\boldsymbol{n}$ površi koja kroz nju prolazi može biti određena primenom Ojlerovih zakona kretanja (3.2) i (3.3)



Sl. 28

na mali triedar čiji je vrh u tački $\boldsymbol{x}$. Tri strane ovog triedra čine koordinatne ravni u $\boldsymbol{x}$, a četvrta strana je neka površ $\mathscr{S}$. Radi preglednijeg izlaganja, neka koordinatne linije u $\boldsymbol{x}$ budu Dekartove ose i neka površ $\mathscr{S}$ bude ravan A kao štc je na sl. 28.

Za tako određen triedar zapremine Δv, h je njegova visina iz $\boldsymbol{x}$, Δa površina strane čija je spoljna normala $\boldsymbol{n}_k$ $(k = 1, 2, 3)$, Δa_k tri preostale strane koje leže u koordinatnim ravnima i čije su spoljne normale određene sa $-\boldsymbol{e}_k$, gde su jedinični vektori pravaca koordinatnih linija z_k u $\boldsymbol{x}$. Tada (3.3) možemo pisati u obliku

$$\int_{\Delta v} \varrho \dot{\boldsymbol{v}}\, dv = \int_{\Delta a} \boldsymbol{t}_{(n)} da - \int_{\Delta a_k} \boldsymbol{t}_k\, da_k + \int_{v} \varrho \boldsymbol{f}\, dv. \tag{4.2}$$

Sa $-\boldsymbol{t}_k$ smo označili vektor napona u tačkama površine Δa_k vodeći računa da je njena spoljna normala određena sa $-\boldsymbol{e}_k$.

Pretpostavljajući da su $\varrho \dot{\boldsymbol{v}}$ i $\varrho \boldsymbol{f}$ ograničene veličine, da je $\boldsymbol{t}_{(n)}$ neprekidna funkcija $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}$ i $\boldsymbol{n}$, možemo primeniti reoremu o srednjoj vrednosti na (4.2), tako da je

$$\boldsymbol{t}^*_{(n)} \Delta a - \boldsymbol{t}^*_k \Delta a_k + K \Delta \boldsymbol{v} = 0, \tag{4.3}$$

gde su $\boldsymbol{t}^*_{(n)}$ i $\boldsymbol{t}^*_k$ vektori napona koji deluju u nekim tačkama odgovarajućih strana tetraedra, a K ograničena veličina. Kako je

$$\Delta a_k = n_k \Delta a, \quad \Delta v = \frac{1}{3} h \Delta a$$

može se (4.3) napisati kao

$$(\boldsymbol{t}^*_{(n)} - \boldsymbol{t}^*_k n_k)\, \Delta a - \frac{1}{3} h K \Delta a = 0. \tag{4.4}$$

Ako se (4.4) podeli sa Δa i pusti da $h \to 0$, tj. ako površ jedinične normale $\boldsymbol{n}$ teži ka $\boldsymbol{x}$ ne menjajući svoju orijentaciju, onda poslednji član u (4.4) teži nuli, dok vektori u maloj zagradi teže ka svojim vrednostima u $\boldsymbol{x}$, tj.

$$\boldsymbol{t}_{(n)} = \boldsymbol{t}_k n_k\,. \tag{4.5}$$

Vektori napona $\boldsymbol{t}_k$, po definiciji, ne zavise od $\boldsymbol{n}$ (n_k), te prema tome (4.5) daje konačan oblik funkcionalnih zavisnosti $\boldsymbol{t}_{(n)}$ od $\boldsymbol{n}$. U odnosu na bilo koji sistem koordinata, s obzirom na to da je $\boldsymbol{t}_{(n)}$ za datu tačku određene površi invarijantno u odnosu na izbor koordinatnog sistema, (4.5) glasi

$$\boldsymbol{t}_{(n)} = \boldsymbol{t}_k n^k. \tag{4.6}$$

Time se podrazumeva da su $\boldsymbol{t}_k$ vektori napona u tački $\boldsymbol{x}$ odgovarajućih koordinatnih površi proizvoljnih dopustivih koordinatnih linija.

Na taj način smo dokazali ***Košijevu fundamentalnu teoremu:***

— *Vektor napona u tački površi spoljne normale* $\boldsymbol{n}$ *je linearna funkcija vektora napona koji deluju na koordinatne površi u istoj tački, čiji su koeficijenti komponente jediničnog vektora* $\boldsymbol{n}$.

Na osnovu nezavisnosti $\boldsymbol{t}_k$ od $\boldsymbol{n}$ sledi da je

$$\boldsymbol{t}_{(-n)} = -\boldsymbol{t}_{(n)} \tag{4.7}$$

ili

$$\boldsymbol{t}_{(n)} = -\boldsymbol{t}_{(-n)} \tag{4.8}$$

čime je dokazan stav:

— *Vektori napona koji deluju na suprotnim stranama iste površi u datoj tački su suprotni.*

Vektor $\boldsymbol{t}_k$ može se napisati u komponentalnom obliku

$$\boldsymbol{t}_k = t_{lk}\boldsymbol{g}^l, \tag{4.9}$$

gde smo sa t_{lk} označili njegovu l-tu komponentu. Tada su komponente vektora napona $\boldsymbol{t}_{(n)}$ prema (4.6) date sa

$$t_{(n)l} = t_{lk}n^k. \tag{4.10}$$

S obzirom na tenzorski karakter $t_{(n)l}$ i n^k, kao i to da (4.10) važi za svako n^k, prema kriterijumu o tenzorskom karakteru sistema zaključujemo da je t_{kl} kovarijantni tenzor drugog reda. Ovaj tenzor nazivamo tenzor napona. Njegove komponente na glavnoj dijagonali, tj. t_{kk} (ne sabirati po k) nazivamo *normalni naponi*. Komponente izvan glavne dijagonale, t_{kl} $(k \neq l)$ nazivamo *smičući naponi*.

Utvrđujući tenzorski karakter t_{kl} i koristeći (4.10) dokazujemo u drugom vidu Košijevu fundamentalnu teoremu:

— *Vektor napona za bilo koju površ u tački je u potpunosti određen kao linearna funkcija tenzora napona u toj tački.*

Tenzor napona je, na osnovu (4.9), funkcija samo položaja $\boldsymbol{x}$ i ne zavisi od pravaca $\boldsymbol{n}$ u $\boldsymbol{x}$. Tada, analizom izraza (4.10) možemo kazati:

— Naponsko stanje za česticu tela je određeno tenzorom napona t_{kl} za tu česticu, a naponsko stanje tela tenzorom napona za svaku česticu tela.

U dosadašnjoj analizi tačka $\boldsymbol{x}$ je bila razmatrana kao unutrašnja tačka oblasti b. Međutim, istim postupkom možemo doći do odgovarajućih zaključaka i u slučaju kada je $\boldsymbol{x}$ granična tačka, tj. tačka na graničnoj površi oblasti b u kojoj ova ima tangentnu ravan. Tada za telo koje je opterećeno na svojoj graničnoj površi, granični uslovi glase

$$t^k_{(n)} = t^{kl}n_l = p^k, \tag{4.11}$$

gde je p^k zadata funkcija na granici tela. Time je ustanovljen značaj Košijeve fundamentalne teoreme u svim slučajevima koji nas interesuju.

Tenzor napona se često obeležava samo sa $\boldsymbol{T}$, tj.

$$\boldsymbol{T} = t_{kl}\boldsymbol{g}^k \otimes \boldsymbol{g}^l. \tag{4.12}$$

Tada se (4.10) može napisati u obliku

$$\boldsymbol{t}_{(n)} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{n}. \tag{4.13}$$

5. KONVENCIJA ZNAKA

Iz (4.9) i (4.10) se vidi da se prvi indeks tenzora t_{kl} odnosi na pravac koordinatne linije, a drugi na presečnu ravan kroz tačku $\boldsymbol{x}$. To je prvenstveno uslovljeno izrazom (4.13) zbog određenih pogodnosti, čisto matematičke prirode, koje su vezane za teoremu o divergenciji. U tehničkoj literaturi značenje indeksa tenzora napona je obrnuto. U slučaju simetričnog tenzora napona, koji mi ovde razmatramo, ove dve konvencije su ekvivalentne. Imajući to u vidu, ovde iznosimo konvenciju znaka tenzora napona, kada se prvi indeks odnosi na koordinatnu površ, a drugi na koordinatni pravac. Primera radi, t_2^3 je komponenta vektora napona $\boldsymbol{t}_2$, koji deluje na koordinatnu ravan $x^2 = \text{const.}$, u pravcu ose x^3. U slučaju kovarijantne reprezentacije t_{kl}, ponovo je reč o istom vektoru, ali datom u odnosu na kontravarijantnu bazu $\boldsymbol{g}^l$. Samo u slučaju Dekartovih koordinata ove dve reprezentacije će biti iste. Zbog toga ćemo se detaljnije zadržati na ovom slučaju.

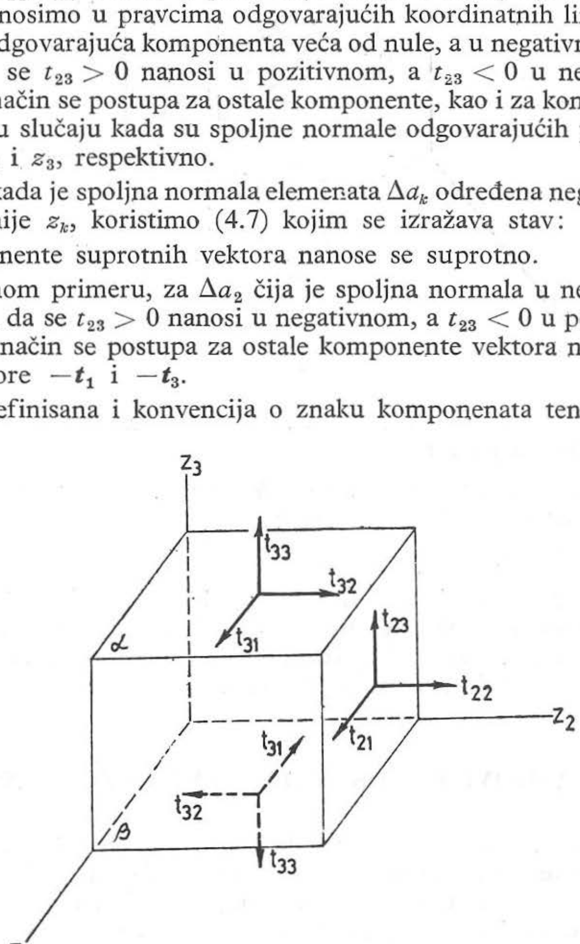
Neka je Δa_k površina elementa površi koja je paralelna koordinatnoj ravni $z_k = \text{const.}$ Tada je, na primer, za Δa_2, čija je spoljna normala u pozitivnom smeru ose z_2, $\boldsymbol{t}_2\,(t_{21}, t_{22}, t_{23})$ vektor napona koji deluje u nekoj njenoj tački. Njegove komponente nanosimo u pravcima odgovarajućih koordinatnih linija i to: u pozitivnom ako je odgovarajuća komponenta veća od nule, a u negativnom ako je manja od nule. Tako se $t_{23} > 0$ nanosi u pozitivnom, a $t_{23} < 0$ u negativnom smeru ose z_3. Na isti način se postupa za ostale komponente, kao i za komponente vektora napona $\boldsymbol{t}_1$ i $\boldsymbol{t}_3$ u slučaju kada su spoljne normale odgovarajućih površi pozitivnih smerova osa z_1 i z_3, respektivno.

U slučaju kada je spoljna normala elemenata Δa_k određena negativnim smerom koordinatne linije z_k, koristimo (4.7) kojim se izražava stav:

— Komponente suprotnih vektora nanose se suprotno.

U navedenom primeru, za Δa_2 čija je spoljna normala u negativnom smeru ose z_2, to znači da se $t_{23} > 0$ nanosi u negativnom, a $t_{23} < 0$ u pozitivnom smeru ose z_3. Na isti način se postupa za ostale komponente vektora napona $-\boldsymbol{t}_2$. Isto važi i za vektore $-\boldsymbol{t}_1$ i $-\boldsymbol{t}_3$.

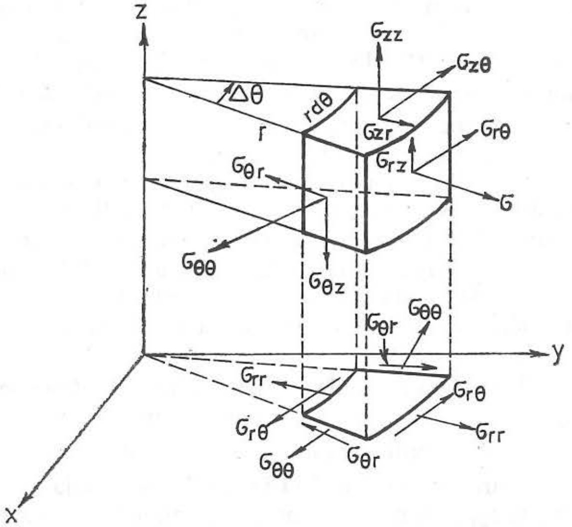
Time je definisana i konvencija o znaku komponenata tenzora napona t_{kl}.



Sl. 29

Na sl. 29 je interpretacija pozitivnih komponenti tenzora napona. Saglasno usvojenoj konvenciji, na ravni α su u pozitivnom smeru, a na ravni β u negativnom smeru z_k—osa, s obzirom na njihovu suprotnu orijentaciju.

Na sl. 30 je dat prikaz pozitivnih komponenti tenzora napona, ali u odnosu na cilindarski koordinatni sistem. Ovde napominjemo da je izbor koordinatnog sistema prvenstveno diktiran geometrijom problema koji razmatramo.



Sl. 30

Za normalne komponente tenzora napona, s obzirom na njihovo dejstvo, koriste se posebni nazivi i to:

— naponi zatezanja, ako normalna komponenta deluje u smeru spoljne normale na površinski element, i suprotno njima

— naponi pritiska.

Saglasno ovome, na sl. 29 i sl. 30 su prikazani naponi zatezanja. Međutim, ova konvencija računanja napona zatezanja kao pozitivnih i napona pritiska kao negativnih normalnih napona može biti izmenjena u slučaju kada su naponi pritiska dominantni, kao u slučaju geoloških problema.

6. RAZNI VIDOVI PREDSTAVLJANJA TENZORA NAPONA

Za tenzor napona se koriste razna obeležavanja. Mi ovde navodimo one koji se češće sreću u literaturi kao što su: t_{ij}, σ_{ij} i τ_{ij} kada su u pitanju bilo koji dopustivi sistemi koordinata u E_3. Obeležavanje se menja i u zavisnosti od izbora koordinatnog sistema. Tako na primer, za Dekartov sistem u inženjerskoj praksi najčešći vid označavanja je: σ_x, σ_y, σ_z, τ_{xy}, τ_{zx} i τ_{zy} za simetrični tenzor napona. Samo u odnosu na ovaj sistem koordinata ne postoji razlika između kovarijantnih, kontravarijantnih i fizičkih komponenata bilo kog tenzora pa prema tome i tenzora napona.

Za eksperimentalna merenja fizičke koordinate su najpogodnije, jer imaju iste dimenzije. U teorijskim razmatranjima kovarijantna i kontravarijantna reprezentacija je dominantna s obzirom na njihov tenzorski karakter. U svakom slučaju, nužno je poznavanje veze između ovih vidova reprezentacije tenzora napona.

Ako sa $t_{\langle kl \rangle}$ obeležimo fizičke komponente tenzora napona, tada je

$$t_{\langle kl \rangle} = \frac{t_{kl}}{\sqrt{g_{\underline{kk}} g_{\underline{ll}}}}, \tag{6.1}$$

gde se crtom naglašava da se ne vrši sabiranje po ponovljenim indeksima. Smenom izraza

$$t_{kl} = t_k{}^q g_{lq} = g_{kp} g_{lq} t^{pq},$$

kojim se određuje relacija između mešovitih kontravarijantnih i kovarijantnih komponenti tenzora napona, u (6.1) dobija se relacija između njegovih mešovitih, kontravarijantnih i fizičkih koordinata.

Analogni izrazi postoje i za druge vidove fizičkih koordinata tenzora napona. Takve su $t^{\langle kl \rangle}$ i $t_{\langle k}{}^{l \rangle}$ Za njih je zajedničko svojstvo njihova dimenzija, tj.

$$\dim t_{\langle kl \rangle} = [ML^{-1}T^{-2}]. \tag{6.2}$$

U literaturi se vrlo često sreće i matrično predstavljanje tenzora napona. Tako je

$$T = \{t_{kl}\} = \begin{Bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{Bmatrix} \tag{6.3}$$

jedno predstavljanje iz kojeg se vidi da normalni naponi predstavljaju elemente sa glavne dijagonale, a smičuće komponente elemente izvan glavne dijagonale matrice T.

Vežbanja

1. Dekartov sistem koordinata je rotiran za ugao $\theta = 90°$ oko ose z_3. Tako dobijeni sistem z'_k je zatim rotiran za ugao $\varphi = 90°$ oko nove ose z'_2.

   Odrediti komponente tenzora napona u tako dobijenom sistemu koordinata $\bar{z}_k$ u tački $\boldsymbol{z}$ ako su poznate njegove komponente u odnosu na sistem z_k.

2. Odrediti komponente vektora napona u tački $\boldsymbol{z}$ površi

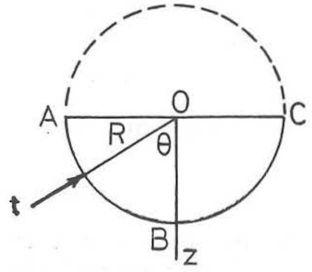
$$z_3 = f(z_1, z_2).$$

3. Odrediti fizičke komponente tenzora napona u odnosu na cilindarski i sferni sistem.

4. Odrediti komponente tenzora i vektora napona u odnosu na cilindarski i sferni koordinatni sistem preko njihovih odgovarajućih reprezentacija u odnosu na Dekartov sistem koordinata.

5. Vektor napona $\boldsymbol{t}_{(n)}$ na površi hemisfera ABC je uvek u pravcu njenog centra O. Ako je konstantnog intenziteta, naći z — komponentu ukupne površinske sile na hemisferi.

Ako je hemisfera u ravnoteži pod dejstvom uniformno raspoređenih zapreminskih sila u celoj sferi, koliki je intenzitet $\boldsymbol{b}$ sile po jedinici zapremine (videti (1.2) i (1.1))?



6. Matrica tenzora napona u $\boldsymbol{z}$ u odnosu na Dekartov sistem je

$$T = \begin{Bmatrix} 36 & 27 & 0 \\ 27 & -36 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{Bmatrix}.$$

Odrediti:

a) komponente i intezitet vektora napona u $\boldsymbol{z}$ za ravan jedinične normale $\boldsymbol{n}\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$,

b) njegovu komponentu u pravcu normale $\boldsymbol{n}$,

c) ugao koji zaklapa sa $\boldsymbol{n}$.

7. U odnosu na Dekartov sistem stanje napona u tački $\boldsymbol{z}$ je određeno sa

$$T = \begin{Bmatrix} t_{11} & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{Bmatrix}.$$

Odrediti t_{11} tako da kroz $\boldsymbol{z}$ prolazi ravan za koju je vektor napona nula. Koja je to ravan?

8. Za tenzor napona, čija je matrica

$$T = \begin{Bmatrix} a & o & d \\ o & b & e \\ d & e & c \end{Bmatrix}$$

u odnosu na z_k, odrediti jedinični vektor normale ravni paralelne osi z_3 čiji vektor, napona leži u njoj.

9. Matrica T, data u odnosu na z_k, je

$$T = \begin{Bmatrix} 50 & 37{,}5 & 0 \\ 37{,}5 & -25 & -50 \\ 0 & -50 & 25 \end{Bmatrix}.$$

Novi koordinatni sistem $\bar{z}_k$ je dat sa $\bar{z}_k = a_{kl} z_l$ gde je

$$A = \{a_{kl}\} = \begin{Bmatrix} \frac{3}{5} & 0 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{5} \end{Bmatrix}.$$

Odrediti komponente T u $\bar{z}_k$.

7. O GEOMETRIJSKOM PREDSTAVLJANJU NAPONSKOG STANJA

Glavne ose i glavni naponi

Simetričnost tenzora napona nam omogućuje da izvedemo čitav niz zaključaka koji za asimetričan tenzor napona ne važe.

Tada je uvek moguće za datu tačku izabrati specijalni sistem koordinatnih osa u odnosu na koje su njegove smičuće komponente jednake nuli. Ovaj sistem osa se naziva: glavne ose tenzora napona. Ravni upravne na glavne ose nazivamo glavne ravni. Vektori napona koji na njih deluju su u potpunosti u pravcu njihovih normala $\boldsymbol{n}$, tako da je

$$t^k_{(n)} = \sigma n^k. \tag{7.1}$$

Koristeći (4.10), koja se može izraziti u obliku

$$t^k_{(n)} = t^k_l n^l, \tag{7.2}$$

možemo (7.1) pisati kao

$$(t^k_l - \sigma\delta^k_l)\, n^l = 0. \tag{7.3}$$

Ovaj sistem homogenih i linearnih jednačina po n^l, koji određuje glavne pravce simetričnog tenzora napona,

$$t_{kl} = t_{lk} \tag{7.4}$$

po svom obliku je potpuno identičan sistemu jednačina (2.10.10) kojim se određuju glavni pravci tenzora C_{KL}. I za njega važe Teoreme 1 i 2 koje tvrde da karakteristična jednačina

$$|t^k_l - \sigma\delta^k_l| = 0 \tag{7.5}$$

ima realne karakteristične brojeve σ, i da različitim karakterističnim brojevima odgovaraju međusobno upravni karakteristični pravci, ili glavni pravci tenzora t^k_l. U razvijenom obliku ova karakteristična jednačina glasi

$$\sigma^3 - I_T\sigma^2 + II_T\sigma - III_T = 0, \tag{7.6}$$

gde su I_T, II_T i III_T prva, druga i treća invarijanta tenzora napona t^k_l, respektivno, date izrazima koji su po svom obliku identični sa (2.10.13).

U odnosu na sistem koordinata koji određuju glavni pravci, matrica tenzora napona se svodi na dijagonalnu matricu

$$T = \begin{Bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{Bmatrix} = \{\sigma_k \delta_{kl}\},$$

čiji su elementi na glavnoj dijagonali, σ_i $(i = 1, 2, 3)$, karakteristični brojevi tenzora napona koje nazivamo glavni naponi. Stanje napona u tački, u odnosu na ovako izabrani sistem koordinata, određen je glavnim naponima u tački.

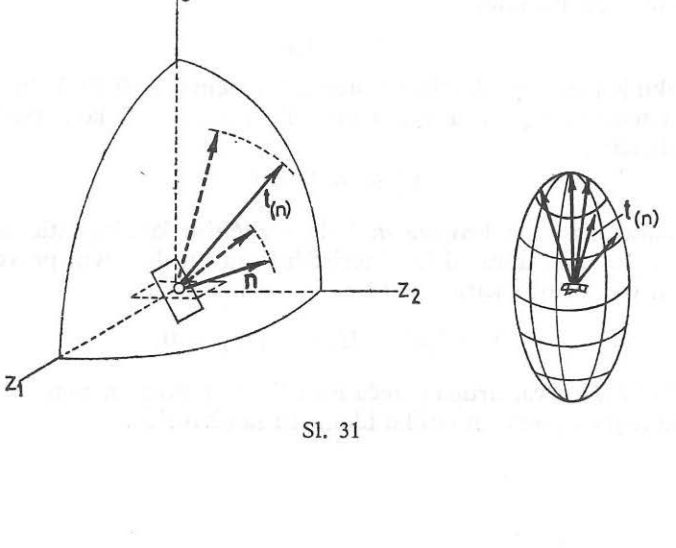
U zavisnosti od međusobnog odnosa vrednosti glavnih napona razlikujemo dva specijalna stanja napona i to kada su dva glavna napona jednaka i kada su svi glavni naponi međusobno jednaki. U prvom slučaju samo je jedan glavni pravac jednoznačno određen i odnosi se na pravac glavnog napona koji se po svojoj vrednosti razlikuje od druga dva, međusobno jednaka glavna napona. Druga dva pravca se mogu proizvoljno birati u ravni upravnoj na prvi pravac pod uslovom da su međusobno upravni. U tom slučaju kažemo da je stanje napona cilindrično, jer ne postoji smičući napon ni za jednu ravan koja sadrži jednoznačno određeni glavni pravac.

U drugom slučaju, bilo koja tri međusobno upravna pravca mogu biti izabrana za glavne pravce. Tada kažemo da je stanje napona sferno, jer ne postoji smičući napon za bilo koju ravan kroz posmatranu tačku. Sferno stanje napona ponekad se naziva i hidrostatičko stanje napona, jer je to jedina vrsta napona koja postoji kada je fluid u miru.

Lameov (Lamé) elipsoid napona

U odnosu na glavne pravce vektor napona za bilo koju ravan kroz posmatranu tačku je dat sa

$$t_{(n)k} = \sigma_k n_k \tag{7.8}$$



Sl. 31

s obzirom na (4.10) i $(7.7)_2$. U odnosu na isti sistem koordinata, pošto je spoljni vektor normale $\boldsymbol{n}$ jedinični vektor, važi

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1. \tag{7.9}$$

Smenom n_k iz (7.8) u (7.9) vidimo da komponente vektora napona zadovoljavaju jednačinu

$$\left(\frac{t_{(n)1}}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{t_{(n)2}}{\sigma_2}\right)^2 + \left(\frac{t_{(n)3}}{\sigma_3}\right)^2 = 1, \tag{7.10}$$

koja predstavlja jednačinu elipsoida i koja se naziva Lameov elipsoid napona. On određuje geometrijsko mesto tačaka krajeva vektora napona za uočenu tačku i kao takav predstavlja geometrijsku reprezentaciju stanja napona u toj tački (sl. 31).

Košijeva kvadratna površ

Koši daje drugu geometrijsku reprezentaciju. On polazi od normalne komponente, σ_n, vektora napona, koja predstavlja njegovu projekciju na pravac jediničnog vektora spoljne normale $\boldsymbol{n}$ ravni na koju deluje, tako da je u odnosu na glavne pravce kao koordinatne ose,

$$\begin{aligned} \sigma_n &= t_{(n)k} n_k = \sigma_k (n_k)^2 = \\ &= \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2, \end{aligned} \tag{7.11}$$

s obzirom na (7.8). U odnosu na tako izabrani sistem Dekartovih koordinata, svaki vektor položaja je kolinearan sa vektorom normale $\boldsymbol{n}$ neke ravni koja prolazi kroz tu tačku, tako da je

$$z_k = r n_k, \tag{7.12}$$

gde smo sa r označili intenzitet vektora položaja $\boldsymbol{r}\,(z_k)$. Tada se (7.11) može napisati u obliku

$$r^2 \sigma_n = \sigma_k z_k^2. \tag{7.13}$$

Koši razmatra kvadratnu površ

$$\sigma_k z_k^2 = \pm\, k^2, \tag{7.14}$$

gde je konstanta k, prema (7.13), data sa

$$k^2 = \pm\, r^2 \sigma_n, \tag{7.15}$$

pri čemu se znak bira tako da (7.14) predstavlja realnu površ, koja je napisana u razvijenom obliku

$$\sigma_1 z_1^2 + \sigma_2 z_2^2 \pm \sigma_3 z_3^2 = \pm k^2, \tag{7.16}$$

pogodnija za izučavanje. Dalje, neka glavni naponi čine uređen skup, tako da je

$$\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \sigma_3. \tag{7.17}$$

Tada (7.16) reprezentuje:

a) elipsoid, ako je

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 > 0 \quad \text{za } +k^2,$$
$$0 > \sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 \quad \text{za } -k^2;$$

b) obrtni elipsoid, ako su glavni naponi istog znaka i dva jednaka, tj.

$$\sigma_1 = \sigma_2 \quad \text{ili} \quad \sigma_2 = \sigma_3 \quad \text{ili} \quad \sigma_2 = \sigma_1;$$

c) sferu, ako je

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3;$$

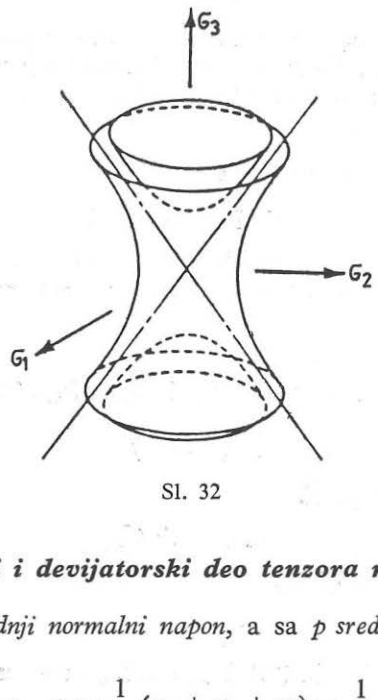
d) jednograni hiperboloid, ako je

$$\sigma_1 \geqslant \sigma_2 > 0, \quad \sigma_3 > 0 \quad \text{za } +k^2;$$

e) dvograni hiperboloid, ako je

$$\sigma_1 \geqslant \sigma_2 > 0, \quad \sigma_3 < 0 \quad \text{za } -k^2 \ldots$$

Slučaj $\sigma_1 > 0$, $0 > \sigma_2 \geqslant \sigma_3$ je sličan slučaju e). Geometrijski prikaz navedene analize dat je na sl. 32.



Sl. 32

Sferni i devijatorski deo tenzora napona

Obeležimo sa σ_0 *srednji normalni napon*, a sa p *srednji normalni pritisak*. Po definiciji je

$$\sigma_0 = -p = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1}{3}\, t^m_m. \tag{7.18}$$

Tenzor

$$\sigma_0 g_{kl} \, (= -p g_{kl}), \tag{7.19}$$

nazivamo *sferni deo napona*, jer određuje sferno ili hidrostatičko stanje napona. Tačnije, hidrostatički napon proizvodi promenu zapremine bez njene promene oblika u izotropnim materijalima, tj. u materijalima sa istim materijalnim osobinama za sve pravce. Zaista, uniformna raspodela pritisaka bi dovela do smanjenja zapremine materijalne sfere koja se u svim pravcima jednako opire takvoj promeni. Međutim, ako bi taj otpor bio slabiji u nekom pravcu, tada bi se taj prečnik sfere više promenio nego neki drugi, tj. hidrostatički pritisak bi proizveo i promenu oblika kod anizotropnih materijala.

Tenzor koji određuje odstupanje, devijaciju, od sfernog stanja napona

$$t'_{kl} = t_{kl} - \sigma_0 g_{kl} \tag{7.20}$$

nazivamo devijatorski deo tenzora napona t_{kl} ili *devijatorski tenzor napona*. Karakteristika ovog tenzora je da je njegova prva invarijanta tj. $I_{t'}$ uvek jednaka nuli

$$I_{t'} = t'^{k}_{k} = 0, \tag{7.21}$$

što neposredno sledi iz (7.20) i (7.19). Suprotno sfernom naponu, devijatorski tenzor napona utiče na promenu oblika, ali ne i zapremine nekog materijalnog sfernog elementa kod izotropnih materijala. Njegovi glavni pravci se, analogno tenzoru napona, određuju iz sistema jednačina

$$(t'^{k}_{l} - \sigma' \delta^{k}_{l})\, n^l = 0. \tag{7.22}$$

Koristeći (7.20) u (7.22) i tako dobiveni izraz upoređujući sa (7.3), zaključujemo da tenzor napona i njegov devijatorski deo imaju iste glavne pravce, dok su im karakteristične vrednosti vezane relacijom

$$\sigma' = \sigma - \sigma_0 = \sigma + p. \tag{7.23}$$

Na isti način se može lako pokazati da karakteristična jednačina devijatorskog tenzora napona glasi

$$\sigma'^3 - \overline{II}_{t'}\sigma' - III_{t'} = 0, \quad \overline{II}_{t'} = -II_{t'} \tag{7.24}$$

i koja se može rešiti eksplicitnom smenom

$$\sigma' = 2\left(\frac{1}{3}\,\overline{II}_{t'}\right)^{\frac{1}{2}} \cos\alpha. \tag{7.25}$$

Kubna jednačina se tada svodi na oblik

$$2\left(\frac{1}{3}\,\overline{II}_{t'}\right)^{\frac{3}{2}} (4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha) = III_{t'}.$$

Izraz u zagradi je jednak $\cos 3\alpha$, pa je prema tome

$$\cos 3\alpha = \frac{III_{t'}}{2}\left(\frac{3}{\overline{II}_{t'}}\right)^{\frac{3}{2}}. \tag{7.26}$$

Za α_1 čiji je $\cos 3\alpha_1$ dat sa (7.26) i koje zadovoljava uslov:

$$0 \leqslant 3\alpha_1 \leqslant \pi$$

odmah se mogu odrediti sva tri rešenja. Tada $3\alpha_1$, $3\alpha_1 + 2\pi$, $3\alpha_1 - 2\pi$ imaju iste kosinuse, pa prema tome predstavljaju rešenja jednačine (7.26), pa je

$$\sigma_k = 2\left(\frac{1}{3}\,\overline{II}_{t'}\right)^{\frac{1}{2}} \cos\alpha_k, \quad (k = 1, 2, 3), \tag{7.27}$$

rešenje jednačine (7.24) s obzirom na (7.25), gde su

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \frac{2}{3}\pi, \quad \alpha_3 = \alpha_1 - \frac{2}{3}\pi.$$

Smenom

$$\tau_0^2 = \frac{2}{3}\, II_{t'}, \tag{7.28}$$

izrazi (7.27) se mogu napisati u prostijem obliku

$$\sigma_k = \sqrt{2}\,\tau_0 \cos\alpha_k. \tag{7.29}$$

Napon τ_0 se naziva oktaedarski napon i zajedno sa $II_{t'}$, igra važnu ulogu u teoriji plastičnosti.

Vežbanja

1. Odrediti glavne pravce tenzora napona čije su komponente date u odnosu na Dekartov sistem koordinata:

a) $\begin{Bmatrix} 18 & 0 & 24 \\ 0 & -50 & 0 \\ 24 & 0 & 32 \end{Bmatrix}$ b) $\begin{Bmatrix} 3 & -10 & 0 \\ -10 & 0 & 30 \\ 0 & 30 & -27 \end{Bmatrix}$

c) $\begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{Bmatrix}$ d) $\begin{Bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{Bmatrix}$

2. Izračunati invarijante I_t, II_t i III_t za tenzore napona datih u 1. primeru preko njegovih komponenata i preko njegovih glavnih vrednosti, koje su dobijene pri određivanju glavnih pravaca, i na taj način proveriti da li se dobijaju isti rezultati.

3. Svaku od matrica napona 1. primera predstaviti u obliku zbira dve matrice, koje predstavljaju sferni i devijatorski deo napona.

4. Pokazati da je

a) $9\tau_0^2 = 2I_t^2 - 6II_t$

b) $9\tau_0^2 = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2$,

c) $II_{t'} = II_t - 3\sigma_0^2$,

d) $III_{t'} = III_t - II_t\sigma_0 + 2\sigma_0^3$,

e) $6II_{t'} = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2$.

5. Pokazati da je

$$\frac{\partial II_{t'}}{\partial t_l^k} = -t'^l_k.$$

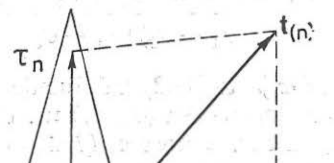
7a. MOROVI (MOHR) KRUGOVI

Lameov elipsoid i Košijeva kvadratna površ kao površ u trodimenzionom prostoru mogu se predstaviti samo svojim projekcijama u ravni crteža. Zbog toga je njihova upotreba u praksi ređa od Morovih krugova, kada je u pitanju grafičko prikazivanje naponskog stanja u tački tela, određenog simetričnim tenzorom napona t_{kl}. To je i razlog zašto Morove krugove izučavamo u posebnom odeljku.

Svaki vektor napona se, za neku ravan kroz tačku $\boldsymbol{x}$, može jednoznačno predstaviti preko svoje dve komponente: jedne u pravcu normale na ravan i druge u ravni svoga dejstva. Komponentu u pravcu normale, σ_n, kao što smo rekli, nazivamo normalna komponenta. Ona je data sa (7.11). Komponentu u ravni dejstva nazivamo tangentna ili smičuća komponenta. Njenu veličinu obeležavamo sa τ_n. Tada je

$$t^2_{(n)} = \sigma^2_n + \tau^2_n. \tag{7a.1}$$

U Morovoj reprezentativnoj ravni, (sl. 33) σ_n i τ_n su koordinatne linije.



Sl. 33

Tačka (σ_n, τ_n) u toj ravni reprezentuje naponsko stanje za ravan prikazanu na slici kroz tačku O u fizičkom telu $\mathcal{B}$. Za neku drugu presečnu ravan kroz O, druge normale $\boldsymbol{n}$, vektor napona biće drugačiji i njemu će odgovarati druga tačka (σ_n, τ_n) u Morovoj ravni. Na taj način se za svaku presečnu ravan kroz O u Morovoj ravni dobija neka tačka koja reprezentuje njeno naponsko stanje. Za sve ravni kroz O u Morovoj ravni će se, u opštem slučaju, dobiti neka oblast koja će reprezentovati naponsko stanje u tački O tela, čije određivanje predstavlja naš zadatak.

Mi razmatramo opšti slučaj kada su glavni naponi međusobno različiti. Drugi slučajevi slede kao specijalni slučajevi opšteg.

Bez gubljenja u opštosti, a u cilju pojednostavljenja diskusije, u daljem razmatranju biramo glavne pravce simetričnog tenzora napona t_{kl} u posmatranoj tački O za Dekartove ose, i to tako da z_1-osa bude u pravcu najvećeg glavnog napona. σ_1, a z_3-osa u pravcu najmanjeg, po algebarskoj vrednosti, glavnog napona σ_3.

U odnosu na tako izabrani sistem koordinata, tenzor napona je dat svojom matricom (7.7), vektor napona $\boldsymbol{t}_{(n)}$ sa (7.8), a njegova normalna komponenta sa $(7.11)_3$.

Jednačine (7.9), $(7.11)_3$ i (7a.1) tada formiraju potpun sistem linearnih jednačina po n_1^2, n_2^2 i n_3^2:

$$\begin{aligned} n_1^2+n_2^2+n_3^2&=1,\\ \sigma_1 n_1^2+\sigma_2 n_2^2+\sigma_2 n_3^2&=\sigma_n,\\ \sigma_1^2 n_1^2+\sigma_2^2 n_2^2+\sigma_3^2 n_3^2&=\sigma_n^2+\tau_n^2, \end{aligned}\tag{7a.2}$$

čija rešenja glase

$$\begin{aligned} n_1^2&=\frac{\sigma_n^2+\tau_n^2-\sigma_n(\sigma_2+\sigma_3)+\sigma_2\sigma_3}{(\sigma_2-\sigma_1)(\sigma_3-\sigma_1)},\\ n_2^2&=\frac{\sigma_n^2+\tau_n^2-\sigma_n(\sigma_3+\sigma_1)+\sigma_3\sigma_1}{(\sigma_3-\sigma_2)(\sigma_1-\sigma_2)},\\ n_3^2&=\frac{\sigma_n^2+\tau_n^2-\sigma_n(\sigma_1+\sigma_2)+\sigma_1\sigma_2}{(\sigma_1-\sigma_3)(\sigma_2-\sigma_3)}. \end{aligned}\tag{7a.3}$$

Analizom, recimo, prvog rešenja u (7a.3) zaključujemo da za datu vrednost n_1 ono određuje geometrijsko mesto tačaka (σ_n, τ_n) u Morovoj ravni, koje odgovara toj vrednosti n_1. Međutim, za tu vrednost n_1 $(7a.2)_1$ određuje krug na jediničnoj sferi. Time se uspostavlja korespondencija između tačaka jedinične sfere, koje reprezentuju presečne ravni kroz O, i tačaka u Morovoj ravni koje reprezentuju stanje napona za te ravni. Na analogan način se zaključuje za $(7a.3)_{2,3}$. Neprekidnim variranjem vrednosti komponenata n_1, n_2 i n_3 jediničnog vektora $\boldsymbol{n}$ opisujemo sve tačke jedinične sfere, kojoj odgovara oblast u Morovoj ravni s obzirom na neprekidnu funkcionalnu zavisnost σ_n i τ_n od n_1, n_2 i n_3, a koja je data sa (7a.3).

Za dalju analizu, (7a.3) ćemo pisati u obliku

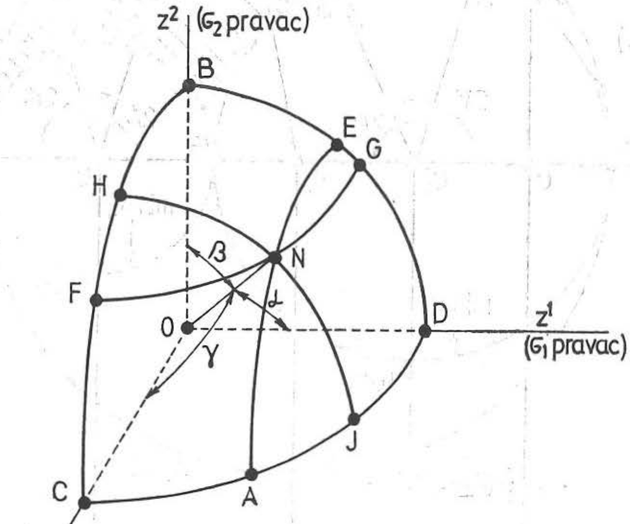
$$\begin{aligned} \left[\sigma_n-\frac{1}{2}(\sigma_2+\sigma_3)\right]^2+\tau_n^2&=R_1^2,\\ \left[\sigma_n-\frac{1}{2}(\sigma_3+\sigma_1)\right]^2+\tau_n^2&=R_2^2,\\ \left[\sigma_n-\frac{1}{2}(\sigma_1+\sigma_2)\right]^2+\tau_n^2&=R_3^2, \end{aligned}\tag{7a.4}$$

gde su

$$\begin{aligned} R_1^2&=\frac{1}{4}(\sigma_2+\sigma_3)^2+(\sigma_1-\sigma_2)(\sigma_1-\sigma_3)\,n_1^2-\sigma_2\sigma_3,\\ R_2^2&=\frac{1}{4}(\sigma_3+\sigma_1)^2-(\sigma_1-\sigma_2)(\sigma_2-\sigma_3)\,n_2^2-\sigma_3\sigma_1,\\ R_3^2&=\frac{1}{4}(\sigma_1+\sigma_2)^2+(\sigma_1-\sigma_3)(\sigma_2-\sigma_3)\,n_3^2-\sigma_1\sigma_2. \end{aligned}\tag{7a.5}$$

Za određene vrednosti n_1, n_2 i n_3 (7a.4) predstavlja krugove u ravni σ_n, τ_n. Tačnije, krugovi na jediničnoj sferi određeni vrednostima n_1, n_2 ili n_3 se preslikavaju u odgovarajuće krugove u Morovoj ravni. Primera radi, krug za neko određeno n_1 (sl. 34) se preslikava u krug Morove ravni sa centrom u tački

$$\sigma_n = \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3), \quad \tau_n = 0,$$



Sl. 34

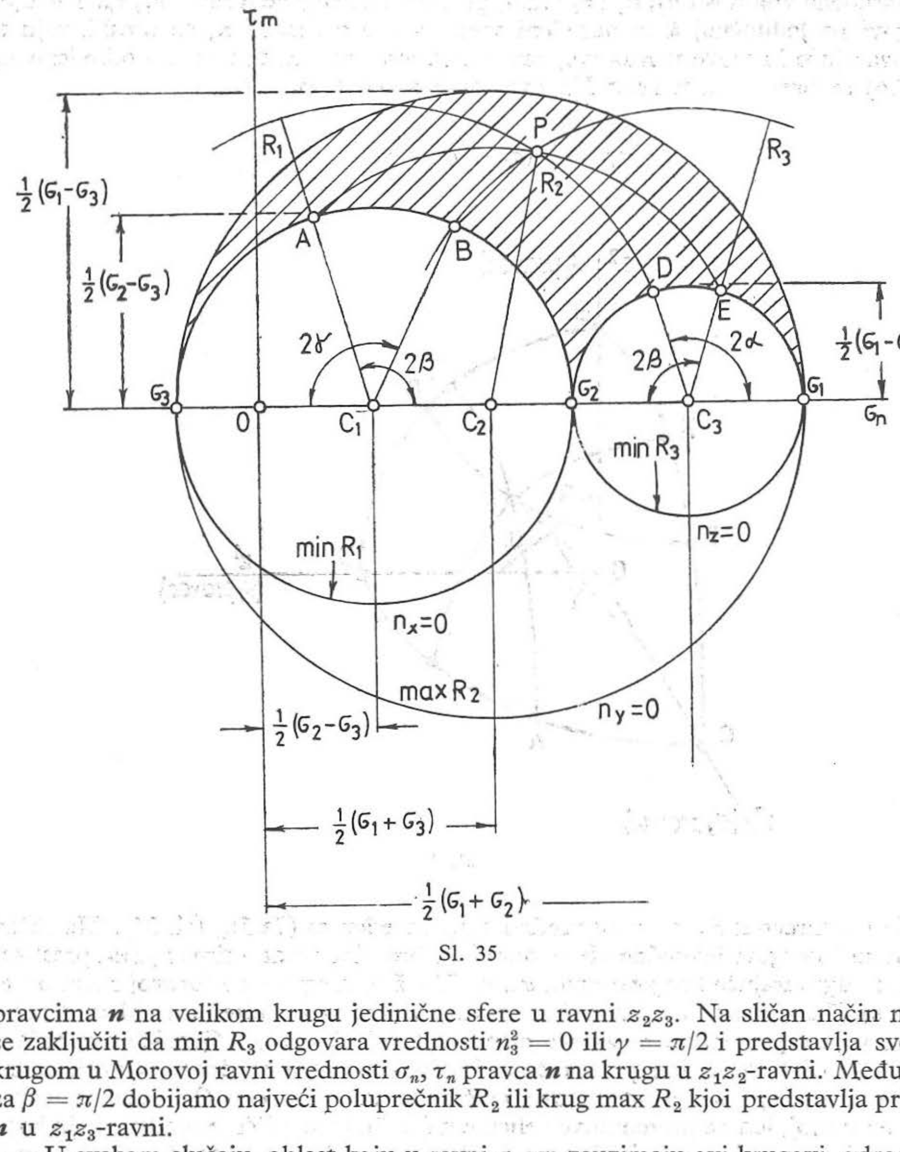
čiji je poluprečnik R_1, za datu vrednost n_1, određen sa $(7a.5)_1$, (sl. 35). Na sličan način se i krugovi jedinične sfere, određeni brojnim vrednostima n_2 i n_3, preslikavaju u odgovarajuće krugove ravni σ_n, τ_n. Uopšte, krugove u Morovoj ravni određene sa (7a.4) nazivamo Morovi krugovi. Ovi krugovi i određuju oblast u ravni σ_n, τ_n koja reprezentuje naponsko stanje u tački C tela $\mathcal{B}$. Granice ove oblasti čine Morovi krugovi čiji poluprečnici imaju ekstremne vrednosti s obzirom na vrednosti n_1, n_2 i n_3, jer su sve ove veličine za uočenu tačku O i poznati tenzor napona u njoj, jedine promenljive veličine u (7a.5). Ove veličine predstavljaju kosinuse uglova α, β i γ koje jedinični vektor $\boldsymbol{n}$ zaklapa sa koordinatnim osama, tako da je

$$n_1 = \cos\alpha, \quad n_2 = \cos\beta, \quad n_3 = \cos\gamma, \quad |n_i| \leqslant 1. \tag{7a.6}$$

Kako je

$$\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \sigma_3, \tag{7a.7}$$

sledi da su izrazi u zagradama u (7a.5) najmanje jednaki nuli. Tada je R_1 najmanje kada je $n_1^2 = 0$, ili kada je $\alpha = \pi/2$. Krug koji mu odgovara, koji je u Morovoj ravni naznačen sa min R_1 prema tome predstavlja vrednosti σ_n, τ_n koje odgovaraju



Sl. 35

pravcima $\boldsymbol{n}$ na velikom krugu jedinične sfere u ravni z_2z_3. Na sličan način može se zaključiti da min R_3 odgovara vrednosti $n_3^2 = 0$ ili $\gamma = \pi/2$ i predstavlja svojim krugom u Morovoj ravni vrednosti σ_n, τ_n pravca $\boldsymbol{n}$ na krugu u z_1z_2-ravni. Međutim, za $\beta = \pi/2$ dobijamo najveći poluprečnik R_2 ili krug max R_2 kjoi predstavlja pravce $\boldsymbol{n}$ u z_1z_3-ravni.

U svakom slučaju, oblast koju u ravni σ_n, τ_n zauzimaju ovi krugovi, određena je rasponom vrednosti koje imaju njihovi poluprečnici, a koji je dat izrazima (7a.5). Na slici 35 je prikazana njihova zajednička oblast ograničena krugovima poluprečnika max R_2, min R_1 i min R_3. Ova oblast je određena pozitivnom vrednošću τ_n kojom izražavamo vrednost smičuće komponente vektora napona. Sa slike se vidi da su ekstremne vrednosti normalnog napona glavni naponi i da oni odgovaraju glavnim pravcima. Za svaki drugi pravac $\boldsymbol{n}$ tačka (σ_n, τ_n) će se nalaziti u naznačenoj oblasti. Problem određivanja ove tačke za zadani pravac i obrnuto, problem određivanja pravca za zadatu tačku Morove ravni su zadaci koji se rešavaju metodom Morovih krugova.

Prvi problem se rešava potpuno grafički ako su poznati uglovi α, β i γ koje pravac $\boldsymbol{n}$ zaklapa sa glavnim pravcima tenzora napona, ovde uzeti kao pravci koordinatnog sistema z_k. Tom pravcu odgovara tačka $P(\sigma_n, \tau_n)$ koja se nalazi u preseku Morovih krugova (7a.4), čiji su poluprečnici određeni sa (7a.5), kada se u ove izraze zamene vrednosti n_1, n_2 i n_3 datih sa (7a.6) za zadate uglove. U stvari, P se nalazi u preseku bilo koja dva od tri kruga. Treći krug nam služi kao kontrola tačnosti.

Uočimo krug $(7a.4)_2$ i odredimo njegov presek sa krugom $\min R_1$ koji ćemo predstaviti u parametarskom obliku

$$\sigma_n - \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3) = \min R_1 \cos\theta, \tag{7a.8}$$

$$\tau_n = \min R_1 \sin\theta, \tag{7a.9}$$

gde je θ ugao koji poteg iz centra ovog kruga $(1/2\,(\sigma_2 + \sigma_3), 0)$ zaklapa sa pozitivnim smerom σ_n-ose. Vrednost $\min R_1$ je data sa $(7a.5)_1$ i iznosi

$$\min R_1 = \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3). \tag{7a.10}$$

Ako se $(7a.4)_2$ napiše u obliku

$$\left[\sigma_n - \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3) + \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3)\right]^2 + \tau_n^2 = R_2^2,$$

ili

$$\left[\sigma_n - \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3)\right]^2 + \tau_n^2 + \frac{1}{4}(\sigma_2 - \sigma_1)^2 + (\sigma_2 - \sigma_1)\left[\sigma_n - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3)\right] = R_2^2,$$

tada se smenom (7a.8—9) dobija

$$\min R_1 (\sigma_2 - \sigma_1)\cos\theta = R_2^2 - \min R_1^2 - \frac{1}{4}(\sigma_2 - \sigma_1)^2. \tag{7a.11}$$

Poluprečnik R_2^2 je dat formulom $(7a.5)_2$, koja pomoću izraza

$$\cos^2\beta = \frac{1 + \cos 2\beta}{2}$$

i posle izvesnog sređivanja članova formule, glasi

$$R_2^2 = \frac{1}{4}(\sigma_2 - \sigma_1)^2 + \frac{1}{4}(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_1)(\sigma_2 - \sigma_3)\cos 2\beta. \tag{7a.12}$$

Smenom ovog izraza, kao i (7a.10) u (7a.11), dobijamo $\cos\theta = \cos 2\beta$ ili

$$\theta = 2\beta \tag{7a.13}$$

Znači, Morov krug određen uglom β seče krug $\min R_1$ za vrednost njegovog polarnog ugla, kada je jednaka dvostrukoj vrednosti ugla β. Na sličan način bi se pokazalo da isti Morov krug seče $\min R_3$ kada njegov polarni ugao postane $\pi - 2\beta$.

Potpuno analogna situacija je za Morove krugove određene uglovima α i γ što je prikazano na sl. 35.

Ovde izneti zaključak nam omogućuje da čisto grafički odredimo tačku P. Zaista, nanoseći ugao 2β sa temenom u C_1 u pozitivnom smeru, dobijamo u preseku njegovog kraka sa krugom min R_1 tačku A. Tada duž AC_2 određuje poluprečnik Morovog kruga za ugao β. Na sličan način se određuje Morov krug za ugao α. U preseku ta dva kruga nalazi se tačka P koja reprezentuje naponsko stanje u O za pravac određen ovim uglovima. Krug određen uglom γ takođe mora da prođe kroz P. U tome se i sastoji kontrola naše konstrukcije.

Obrnut problem nalaženja pravca $\boldsymbol{n}$ kome odgovara tačka P, rešava se obrnutim postupkom. Tada se kroz tačku P, iz centra C_1, C_2 i C_3, povlače Morovi krugovi do njihovog preseka sa krugovima min R_1 i min R_2. Ove presečne tačke i odgovarajući centri krugova određuju pravce koji sa pravcem σ_n-ose zaklapaju dvostruke uglove koje traženi pravac zaklapa sa glavnim osama, čime je problem rešen.

U slučaju kada je pravac $\boldsymbol{n}$ zadat svojim komponentama, metoda Morovih krugova je grafo-analitička. Tada se iz (7a.6) određuju njegovi uglovi α, β i γ pa se prethodni postupak ponovi, ili, prema (7a.5) izračunavaju R_1, R_2 i R_3 za koje se crtaju Morovi krugovi.

Sa sl. 35 možemo izvesti još jedan važan zaključak. On se odnosi na ekstremne vrednosti smičuće komponente τ_n. Odmah se vidi da je $\tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)$ i da je normalni napon na ravan dejstva maksimalnog smičućeg napona $\frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3)$. Smenom ovih vrednosti u (7a.3) dobija se

$$n_1^2 = n_2^2 = \frac{1}{2} \quad \text{i} \quad n_3 = 0.$$

To pokazuje da maksimalni smičući napon deluje na dve ravni koje polove ugao između dve ravni maksimalnog i minimalnog normalnog napona. Sa slike se vidi da su tri glavna smičuća napona, data svojim algebarskim vrednostima

$$\tau_1 = \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3), \quad \tau_2 = \frac{1}{2}(\sigma_3 - \sigma_1), \quad \tau_3 = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \qquad (7a.14)$$

oni smičući naponi koji deluju na ravni koje polove uglove između glavnih ravni, pri čemu je $\tau_{\max}$ najveći, glavni smičući napon.

Analizirajući stanje napona preko Morovih krugova, mi se do sada nismo upuštali u analitički dokaz nekih zaključaka želeći time da istaknemo značaj ove metode. Takav zaključak je da su glavni naponi ekstremne vrednosti komponente normalnog napona, a glavni pravci njegovi karakteristični pravci. Analogan zaključak važi za smičuću komponentu napona. Međutim, način na koji smo odredili glavne napone i glavne pravce ne dokazuje iznetu tvrdnju i mi smo dužni da je dokažemo.

Po definiciji je

$$\sigma_n = \boldsymbol{t}_{(\boldsymbol{n})} \cdot \boldsymbol{n} = t_{kl} n^k n^l, \qquad (7a.15)$$

u odnosu na bilo koji dopustivi sistem koordinata, s obzirom na (4.10). U odnosu na iste koordinate je

$$g_{kl} n^k n^l = 1. \qquad (7a.16)$$

Tada se problem određivanja pravaca n^k za koje normalna komponenta napona ima ekstremne vrednosti svodi na problem vezanog ekstremuma, zbog (7a.16), a koji je istovetan problemu određivanja glavnih izduženja (II 10 pod b). Koristeći rezultate tog odeljka, konkretno (2.10.10), za simetrični tenzor t_{kl}, možemo pisati

$$(t^k_l - \sigma\delta^k_l)\, n^l = 0, \tag{7a.17}$$

gde smo sa σ označili Lagranžov množitelj veze. Ovaj sistem je potpuno identičan sistemu (7.3). Zbog toga su rešenja ovog sistema, koja predstavljaju ekstremne vrednosti normalne komponente, jednaka glavnim naponima a njima odgovarajući pravci pravci glavnih napona.

Za određivanje pravaca ekstremnih smičućih komponenti napona polazimo od algebarske vrednosti smičuće komponente

$$\tau_n = \boldsymbol{t}_{(n)} \cdot \boldsymbol{m} = t_{kl} n^k m^l, \tag{7a.18}$$

gde su $\boldsymbol{n}$ i $\boldsymbol{m}$ međusobno ortogonalni jedinični vektori, tj.

$$g_{kl} n^k n^l = 1, \quad g_{kl} m^k m^l = 1, \quad g_{kl} n^k m^l = 0. \tag{7a.19}$$

S obzirom na (7a.19) problem određivanja glavnih pravaca smičuće komponente, ponovo se svodi na uslovni ekstremum koji se pomoću Lagranžovih neodređenih množilaca a, b i c, svodi na određivanja funkcije

$$\tau_n = t_{kl} n^k m^l - \frac{a}{2} g_{kl} n^k n^l - \frac{b}{2} g_{kl} m^k m^l - c g_{kl} n^k m^l. \tag{7a.20}$$

Za promenljive n^k i m^k ekstremum ove funkcije određen je iz uslova

$$\frac{\partial \tau_n}{\partial n^k} = 0, \quad \frac{\partial \tau_n}{\partial m^k} = 0,$$

koji, u razvijenom obliku, glase

$$\begin{aligned} &t_{kl} m^l - a g_{kl} n^l - c g_{kl} m^l = 0, \\ &t_{kl} n^l - b g_{kl} m^l - c g_{kl} n^l = 0. \end{aligned} \tag{7a.21}$$

Iz ovog sistema jednačina, simetričnosti tenzora napona t_{kl} i (7a.19) odmah se vidi da je $a = b$. Tada se iz (7a.21), prvo sabiranjem a zatim oduzimanjem, dobija

$$\begin{aligned} &[t_{kl} - (a + c)\, g_{kl}]\,(n^l + m^l) = 0, \\ &[t_{kl} - (a - c)\, g_{kl}]\,(n^l - m^l) = 0, \end{aligned} \tag{7a.22}$$

koji su po svom obliku potpuno identični sa (7a.17). Prema tome,

$$\begin{aligned} &n^l + m^l, \quad a + c, \\ &n^l - m^l, \quad a - c, \end{aligned}$$

su glavni pravci i njima odgovarajuće glavne vrednosti napona, tj. saglasno dosadašnjem načinu obeležavanja

$$\begin{aligned} &n^l_\alpha = p\,(n^l + m^l), \quad \sigma_\alpha = a + c, \\ &n^l_\beta = q\,(n^l + m^l), \quad \sigma_\beta = a - c. \end{aligned} \qquad (\alpha \neq \beta) \tag{7a.23}$$

Iz (7a.19) i uslova da su vektori n^l_α i n^l_β sistem ortonormiranih vektora, sledi da je

$$p = q = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Tada se iz (7a.23) dobija

$$n^l = \frac{\sqrt{2}}{2}(n^l_\alpha + n^l_\beta), \quad m^l = \frac{\sqrt{2}}{2}(n^l_\alpha - n^l_\beta),$$
$$a = \frac{1}{2}(\sigma_\alpha + \sigma_\beta), \quad c = \frac{1}{2}(\sigma_\alpha - \sigma_\beta), \tag{7a.24}$$

iz čega se može zaključiti da glavni pravci smičućih komponenti polove ugao između glavnih pravaca napona, ili da glavni smičući naponi deluju na ravni koje polove uglove između glavnih ravni napona. Smenom $(7a.24)_{1,2}$ u (7a.18) određuju se vrednosti smičućih napona za ove pravce

$$\tau_\gamma = \frac{1}{2}(\sigma_\alpha - \sigma_\beta), \quad (\alpha \neq \beta \neq \gamma;\ \alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3), \tag{7a.25}$$

gde je, prema (7a.17), očigledno

$$\sigma_\alpha = t_{kl} n^k_\alpha n^l_\alpha. \tag{7a.26}$$

Cikličkom permutacijom indeksa α, β i γ dobija se (7a.14) čime je analitički dokaz završen.

Razmotrimo ukratko dva specijalna slučaja.

Prvi nastaje kada su dva glavna napona jednaka, recimo $\sigma_1 = \sigma_2$. Tada je naponsko stanje cilindrično i određeno Morovim krugom

$$\left[\sigma_n - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3)\right]^2 + \tau_n^2 = R_1^2, \quad R_1 = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3).$$

Sa slike se vidi da je smičući napon jednak nuli za sve pravce upravne na pravac glavnog napona σ_3.

U slučaju kada su svi glavni naponi jednaki međusobno, tj. $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma$ naponsko stanje se reprezentuje tačkom $(\sigma, 0)$ i prema tome je isto za sve pravce. Kako ova tačka leži na σ_n-osi očigledno je da je smičući napon takođe jednak za sve pravce i ravan nuli. Na taj način se reprezentuje sferno stanje napona.

7b. POSEBNA NAPONSKA STANJA

Naponsko stanje u tački tela je određeno skupom svih vektora napona $\boldsymbol{t}_{(n)}$ u toj tački. Već ranije smo rekli da se pod skupom svih $\boldsymbol{t}_{(n)}$ podrazumevaju vektori napona za sve presečne marši kroz tu tačku. U zavisnosti od položaja skupa $\boldsymbol{t}_{(n)}$ u nekoj tački tela kažemo da je naponsko stanje prostorno, ravansko ili linearno. Za stanje napona u tački tela kažemo da je prostorno ako je skup vektora napona, ili kratko vektori napona $\boldsymbol{t}_{(n)}$, prostorno raspoređen u toj tački. Mi smo do sada izučavali, prećutno, takvo stanje napona. Radi definisanosti kažemo za presečnu ravan, kojoj odgovara vektor napona jednak nuli, da je nenapregnuta.

Međutim od praktičnog značaja su i tri posebna slučaja i to: ravansko stanje napona, linearno stanje napona i čisto smicanje.

Ravansko stanje napona

Definicija:

Stanje napona u tački je ravansko ako vektori napona za sve presečne ravni kroz tu tačku leže u jednoj od presečnih ravni.

Teorema:

Stanje napona u tački je ravansko ako i samo ako su vektori $\boldsymbol{t}_k$ $(k=1, 2, 3)$ *komplanarni, tj.*

$$(\boldsymbol{t}_1 \times \boldsymbol{t}_2) \cdot \boldsymbol{t}_3 = 0. \tag{7b.1}$$

Dokaz: Zaista, ako važi (7b.1) tada, s obzirom na (4.6), vektori napona $\boldsymbol{t}_{(n)}$ za bilo koju presečnu ravan kroz uočenu tačku tela leže u ravni vektora $\boldsymbol{t}_1$, $\boldsymbol{t}_2$ i $\boldsymbol{t}_3$. Prema definiciji, takvo stanje napona je ravansko.

Obrnuto, ako je naponsko stanje u tački tela ravansko tada su prema definiciji, vektori napona i za bilo koje tri nekomplanarne ravni, komplanarni. Ako jedinične vektore ovih ravni obeležimo sa $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ i $\boldsymbol{r}$ a njima odgovarajuće vektore napona sa $\boldsymbol{t}_{(p)}$, $\boldsymbol{t}_{(q)}$ i $\boldsymbol{t}_{(r)}$, respektivno, biće

$$e_{klm}p^k q^l r^m \neq 0, \tag{7b.2}$$

$$(\boldsymbol{t}_{(p)} \times \boldsymbol{t}_{(q)}) \cdot \boldsymbol{t}_{(r)} = 0. \tag{7b.3}$$

Koristeći (4.6) može se (7b.3) napisati u obliku

$$(\boldsymbol{t}_k \times \boldsymbol{t}_l) \cdot \boldsymbol{t}_m p^k q^l r^m = 0$$

Kako je

$$(\boldsymbol{t}_k \times \boldsymbol{t}_l) \cdot \boldsymbol{t}_m = e_{klm}(\boldsymbol{t}_1 \times \boldsymbol{t}_2) \cdot \boldsymbol{t}_3,$$

ova jednačina postaje oblika

$$(\boldsymbol{t}_1 \times \boldsymbol{t}_2) \cdot \boldsymbol{t}_3 e_{klm} p^k q^l r^m = 0$$

iz koje, s obzirom na (7b.2), sledi (7b.1). □

Pomoću (4.9) možemo (7b.1) izraziti u obliku

$$\begin{vmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{vmatrix} = |t_{kl}|, \quad III_t = 0, \tag{7b.4}$$

ili u razvijenom obliku

$$e^{klm} t_{pk} t_{ql} t_{rm} = 0. \tag{7b.5}$$

Tada je $\boldsymbol{n}$, jedinični vektor normale presečne ravni u kojoj leže vektori napona $\boldsymbol{t}_{(n)}$, određen vektorskim proizvodom bilo koja dva od njih, tj. koristeći (4.10)

$$|\boldsymbol{t}_{(a)} \times \boldsymbol{t}_{(b)}|\, n^k = \varepsilon^{klm} t_{(a)l} t_{(b)m} = \varepsilon^{klm} t_{ql} t_{rm} n^q_{(a)} n^r_{(b)}, \tag{7b.6}$$

gde smo sa $\boldsymbol{n}_{(a)}$ i $\boldsymbol{n}_{(b)}$ obeležili jedinične vektore normala koordinatnih ravni kojima odgovaraju vektori napona $\boldsymbol{t}_{(a)}$ i $\boldsymbol{t}_{(b)}$ čiji je intenzitet vektorskog proizvoda obeležen sa $|\boldsymbol{t}_{(a)} \times \boldsymbol{t}_{(b)}|$. Toj presečnoj ravni odgovara vektor napona

$$t_{(n)p} = t_{pk}n^k = \varepsilon^{klm} t_{pk} t_{lq} t_{mr} \frac{n^q_{(a)} n^r_{(b)}}{|\boldsymbol{t}_{(a)} \times \boldsymbol{t}_{(b)}|} = 0. \tag{7b.7}$$

Na taj način smo dokazali, s obzirom na (4.10), (7b.6) i (7b.5), da je vektor napona za tu presečnu ravan nula vektor, odnosno: *presečna ravan u kojoj leže svi vektori napona za ravansko stanje napona je nenapregnuta.*

U slučaju ravanskog stanja napona (7b.7) važi za bilo koje dve nekomplanarne presečne ravni, tj. za proizvoljne nekolinearne vektore $\boldsymbol{n}_{(a)}$ i $\boldsymbol{n}_{(b)}$. Tada iz (7b.7) sledi (7b.5), odnosno (7b.1), čime je dokazana ekvivalencija ovih izraza.

Iz (7b.4) se vidi da je matrica tenzora napona, T, singularna i ranga dva, tj. jedna vrsta, odnosno kolona, je linearna kombinacija preostale dve vrste, odnosno kolone. Pogodnom koordinatnom transformacijom može se uvek zavisna vrsta, odnosno kolona, anulirati. Bez gubljenja u opštosti možemo uzeti da je treća vrsta, odnosno kolona, ona koja je zavisna i koja se, recimo, u koordinatnom sistemu z_K anulira. Tada se matrica tenzora napona u takvom koordinatnom sistemu svodi na oblik

$$T = \begin{Bmatrix} t_{11} & t_{12} & 0 \\ t_{21} & t_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}, \tag{7b.8}$$

ili, s obzirom na način obeležavanja komponenata tenzora napona u inženjerskoj praksi u odnosu na Dekartov sistem koordinata,

$$T = \begin{Bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}. \tag{7b.9}$$

Tada možemo kazati: stanje napona u kome je

$$\sigma_z = 0, \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} = 0, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} = 0 \tag{7b.10}$$

naziva se ravansko stanje napona u ravni-xy.

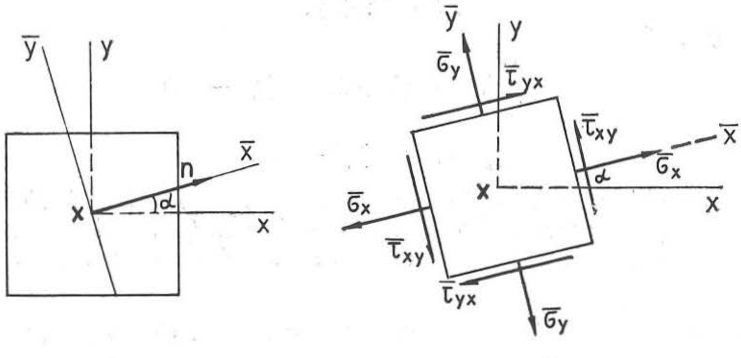
Za ravansko stanje napona Morovi krugovi su najčešće korišćeni metod za određivanje vektora napona za proizvoljnu presečnu ravan koja sadrži osu-z. Postupak za njihovo određivanje je nešto drugačiji od do sada izloženog. Radi definisanosti, neka $\boldsymbol{n}$, jedinični vektor jedne od tih ravni, zaklapa ugao α sa pozitivnim smerom x-ose. U ravni-xy ovim vektorom je jednoznačno određen novi sistem osa $\bar{x}_1$ i $\bar{y}_2$ kao što je na sl. 36.

Veza između ova dva sistema koordinata određena je koordinatnom transformacijom

$$\begin{aligned} \bar{x} &= x\cos\alpha + y\sin\alpha \qquad & x &= \bar{x}\cos\alpha - \bar{y}\sin\alpha \\ \bar{y} &= -x\sin\alpha + y\cos\alpha \qquad & y &= \bar{x}\sin\alpha + \bar{y}\cos\alpha. \end{aligned} \tag{7b.11}$$

S obzirom na tenzorski karakter tenzora napona, tj. da njegove komponente zadovoljavaju transformacioni izraz

$$\bar{t}_{ij} = t_{kl} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j}, \tag{7b.12}$$



Sl. 36

pri prelasku sa sistema x^i na novi sistem $\bar{x}^i$, lako je pokazati, pomoću (7a.11) i (7b.12), da je

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_x &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\cos 2\alpha + \tau_{xy}\sin 2\alpha \\ \bar{\tau}_{xy} &= \tau_{xy}\cos 2\alpha - \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\sin 2\alpha. \end{aligned} \tag{7b.13}$$

Iz ovog sistema jednačina, eliminacijom ugla α, dobija se jednačina Morovog kruga

$$\left[\bar{\sigma}_x - \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y)\right]^2 + \bar{\tau}_{xy}^2 = R^2, \tag{7b.14}$$

gde je R poluprečnik kruga, dat sa

$$R^2 = \frac{1}{4}(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \tau_{xy}^2. \tag{7b.15}$$

Za dalju analizu pogodniji je parametarski oblik

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_x - \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) &= R\cos\gamma \\ \bar{\tau}_{xy} &= R\sin\gamma, \end{aligned} \tag{7b.16}$$

gde je γ ugao koji R zaklapa sa $\bar{\sigma}_x$-osom.

Iz (7b.13) i (7b.16) se, posle kraćeg računanja, dobija da je

$$\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) = R\cos 2\beta \qquad (7b.17)$$

$$\tau_{xy} = R\sin 2\beta,$$

gde je

$$2\beta = 2\alpha + \gamma. \qquad (7b.18)$$

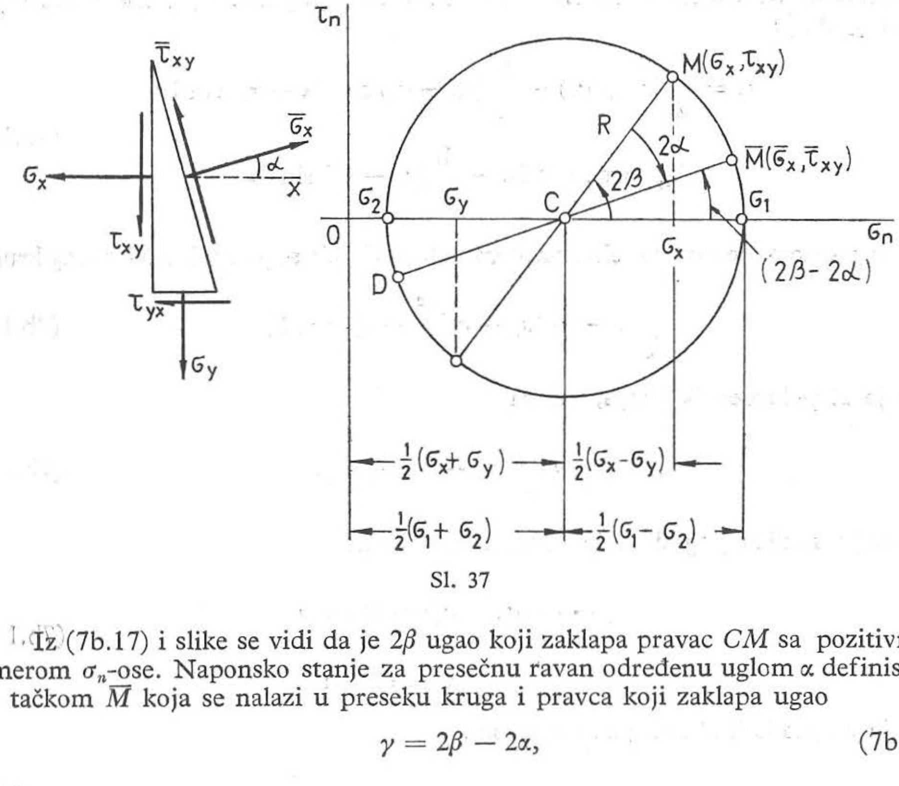
Tada (7a.16) glasi

$$\bar{\sigma}_x = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + R\cos(2\beta - 2\alpha) \qquad (7b.19)$$

$$\bar{\tau}_{xy} = R\sin(2\beta - 2\alpha).$$

Važno je uočiti da za dato (7b.8) veličine R i 2β su određeni brojevi u tački posmatranog stanja napona, a što neposredno sledi iz (7b.15) i (7b.17). Prema tome, naponi $\bar{\sigma}_x$ i $\bar{\tau}_{xy}$ se menjaju u funkciji ugla α kojim su i određene presečne ravni.

Iz (7b.14) se vidi da je centar Morovog kruga u tački $C\left[\frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y), 0\right]$ Morove ravni — $\sigma_n\tau_n$ i da prolazi kroz tačku $M(\sigma_x, \tau_{xy})$ kojom je određeno naponsko stanje za presečnu ravan čija je normala u pravcu x-ose. Sa centrom C i tačkom M Morov krug je jednoznačno određen i prikazan na sl. 37.



Sl. 37

Iz (7b.17) i slike se vidi da je 2β ugao koji zaklapa pravac CM sa pozitivnim smerom σ_n-ose. Naponsko stanje za presečnu ravan određenu uglom α definisano je tačkom $\overline{M}$ koja se nalazi u preseku kruga i pravca koji zaklapa ugao

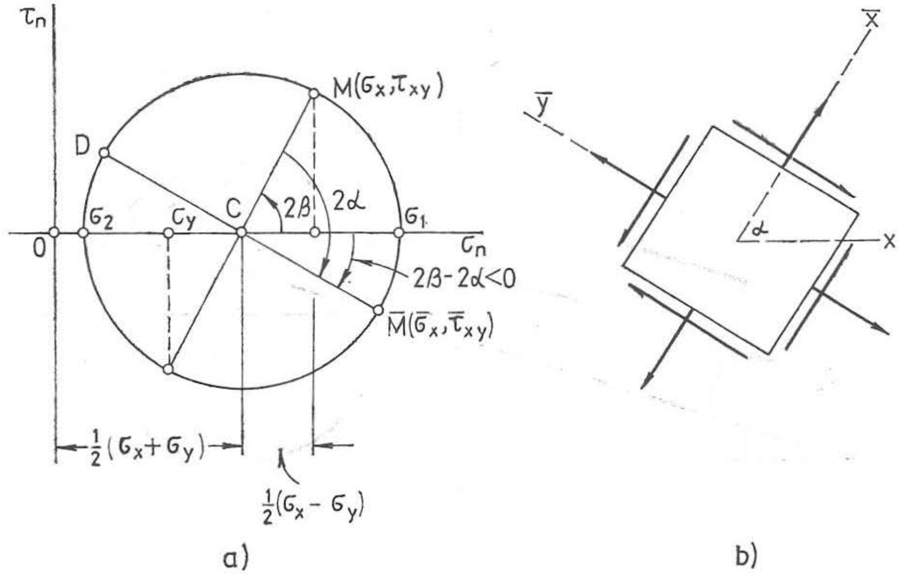
$$\gamma = 2\beta - 2\alpha, \qquad (7b.20)$$

s obzirom na (7b.16) i (7b.18), sa pozitivnim smerom σ_n-ose. Ovaj pravac se grafički određuje nanošenjem ugla 2α u negativnom smeru, kao što je na sl. 37.

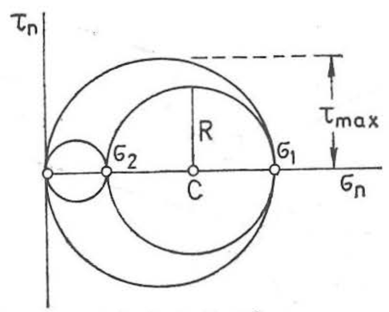
Za razliku od prethodnog slučaja korišćenja Morovih krugova, sada dopuštamo mogućnost da smičuće komponente tenzora napona imaju i negativne vrednosti. To će biti u slučaju kada je

$$\gamma = 2\beta - 2\alpha < 0$$

kao što je na sl. 38. Na osnovu konvencije o znaku to znači da ta smičuća komponenta napona za ravan čija je spoljna normala u pozitivnom smeru x-ose deluje u negativnom smeru y-ose.



Sl. 38

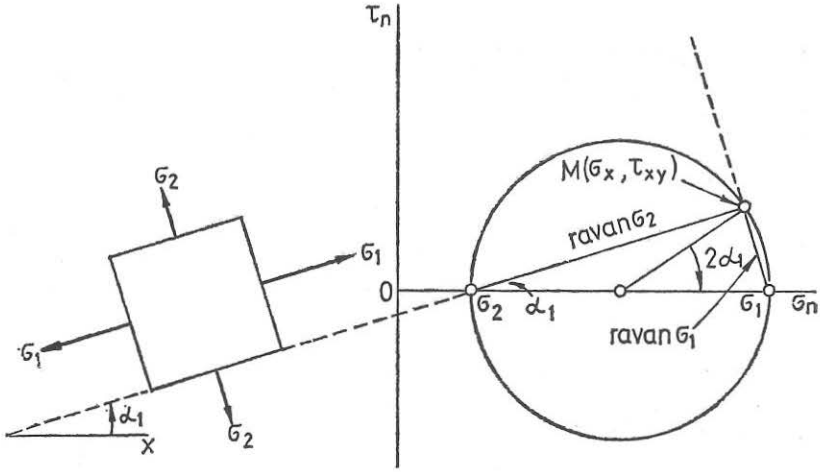


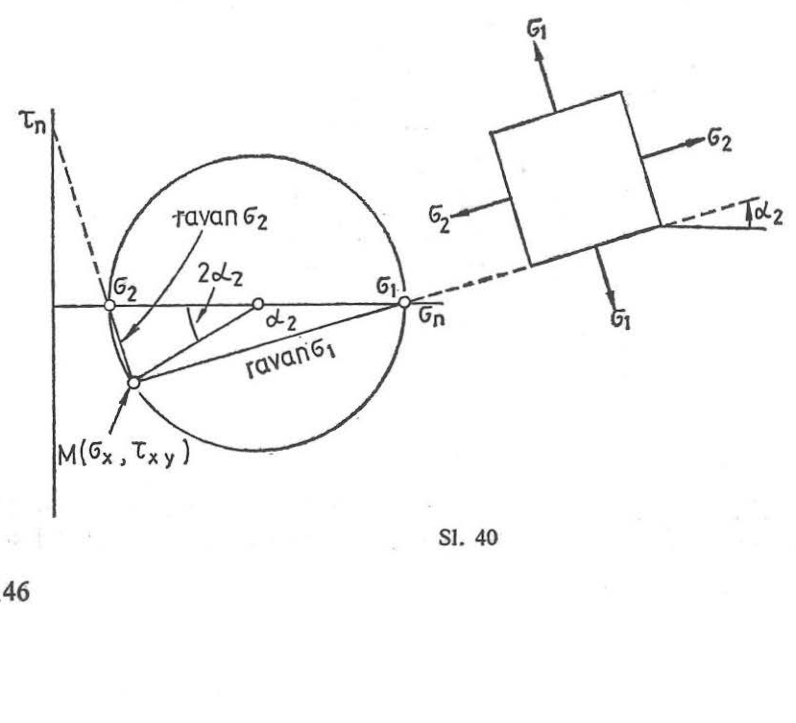
Sl. 39

Sa slike se vidi da su glavni naponi σ_1 i σ_2 određeni za vrednost uglova $\gamma = 0$ i $\gamma = \pi$, respektivno. Iz (7b.20) se vidi da oni odgovaraju presečnim ravnima koje su određene uglovima $\alpha = \beta$ i $\alpha = \beta - 1/2\pi$. Bez gubljenja u opštosti možemo uzeti da je $\sigma_1 \geqslant \sigma_2$. Treći glavni napon σ_3 je jednak nuli, što neposredno sledi iz (7.6) i (7b.4). Zbog toga skup glavnih napcna, sa stanovišta opštosti razmatranja, ne možemo predstaviti kao uređen skup, jer glavni naponi σ_1 i σ_2 mogu, ali ne moraju biti istog znaka. Tada je maksimalni smičući napon određen sa

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} (\sigma_{\max} - \sigma_{\min})$$

i ne mora da odgovara vrednosti $\tau_n = R$. Takav slučaj imamo kada su glavni naponi σ_1 i σ_2 istog znaka kao što je na sl. 39, kada je maksimalni smičući napon jednak polovini maksimalnog normalnog napona.





Sl. 40

U cilju otklanjanja pogrešnog nanošenja ugla u pogrešnom pravcu data je posebna grafička metoda, koja je ilustrovana na sl. 40. Na njoj je ilustrovana grafička metoda određivanja glavnih osa. Objašnjenje postupka se odnosi na slučaj pod a). Tačka M Morovog kruga (koja se ponekad naziva početak ravni ili pol) spaja se linijama sa tačkama $(\sigma_1, 0)$ i $(\sigma_2, 0)$ Morove ravni. One su međusobno upravne i paralelne su presečnim ravnima u tački tela na koje deluju glavni naponi i to:

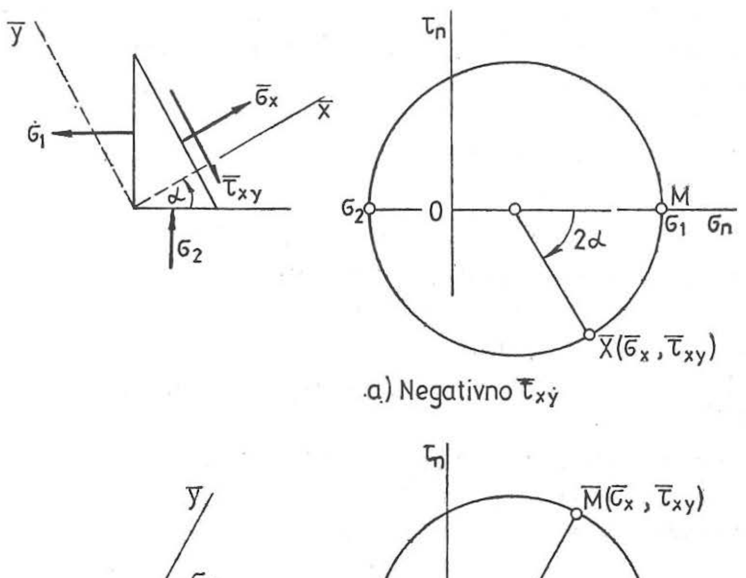
linija $M\sigma_1$ paralelna ravni na koju deluje σ_1, a

linija $M\sigma_2$ paralelna ravni na koju deluje σ_2 napon.

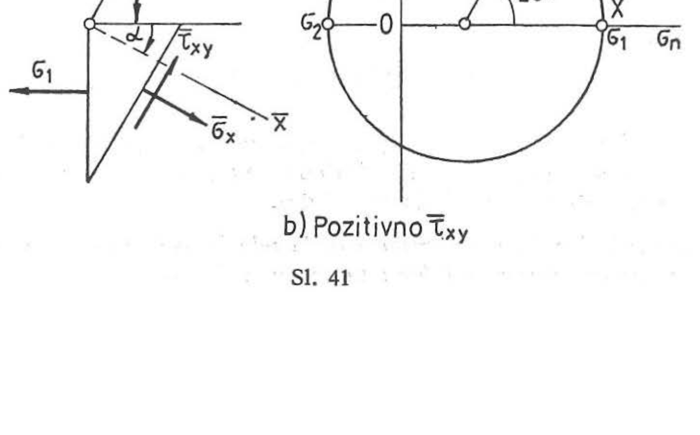
a) $\sigma_x > \sigma_y$, $\tau_{xy} > 0$; b) $\sigma_x < \sigma_y$, $\tau_{xy} < 0$.

U drugim slučajevima je postupak sličan i na njima se ovde nećemo zadržavati.

U odnosu na glavne ose reprezentacija naponskog stanja $(\bar{\sigma}_x, \bar{\tau}_{xy})$ za presečnu ravan čija normala sa osom $\sigma_x = \sigma_1$ zaklapa ugao α je znatno prostija. Tada je



a) Negativno $\bar{\tau}_{xy}$



b) Pozitivno $\bar{\tau}_{xy}$

Sl. 41

$\sigma_y = \sigma_2, \tau_{xy} = 0$ i $\beta = 0$ u odnosu na glavne ose, a parametarske jednačine Morovog kruga (7b.19) glase

$$\bar{\sigma}_x = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) + R \cos 2\alpha,$$
$$\bar{\tau}_{xy} = - R \sin 2\alpha. \tag{7b.21}$$

Na sl. 41 su ilustrovana dva slučaja koji objašnjavaju, saglasno sa $(7b.21)_2$, smer nanošenja ugla 2α.

Na kraju, navedimo neke primere ravanskog stanja napona. Na graničnoj površini tela, slobodnoj od opterećenja, stanje napona je lokalno ravno, jer je vektor napona za tangentnu ravan jednak nuli. Ravansko stanje napona u telu postoji aproksimativno i kada je to telo tanka ravna ploča napregnuta na svojim ivicama paralelno ravni ploče, tako da ne postoji izvijanje niti savijanje.

Vežbanja

1. Izvesti (7b.4).
2. Dokazati da je, u slučaju ravanskog stanja napona glavni pravac koji odgovara glavnom naponu jednak nuli, upravan na nenapregnutu ravan.
3. Grafičkom metodom odrediti glavne ose tenzora napona u slučajevima koji nisu ilustrovani sl. 41:

   a) $\sigma_x > \sigma_y, \tau_{xy} < 0$ b) $\sigma_x < \sigma_y, \tau_{xy} > 0$.
4. Za ravansko stanje napona

   $$\sigma_x = 10, \quad \sigma_y = 40, \quad \tau_{xy} = 20$$

   (zadate su samo brojne vrednosti) odrediti:

   glavne napone i pravce njihovog delovanja,

   maksimalni smičući napona.

   Ispitati naponsko stanje metodom Morovog kruga i nacrtati element na koji deluju glavni naponi.
5. Isto kao u prethodnom zadatku, ali u slučaju kada je:

   a) $\sigma_x = 55 \quad \sigma_y = 15 \quad \tau_{xy} = 10,$

   b) $\sigma_x = -30 \quad \sigma_y = 10 \quad \tau_{xy} = 20,$

   c) $\sigma_x = 30 \quad \sigma_y = -10 \quad \tau_{xy} = -20,$

   d) $\sigma_x = -10 \quad \sigma_y = 30 \quad \tau_{xy} = -20.$

7c. LINEARNO STANJE NAPONA

Sa stanovišta analize naponskog stanja, linearno stanje napona je najjednostavnije. Smatramo da, na osnovu prethodnih odeljaka, čitalac može samostalno izvesti zaključke i dokazati teoreme koje navodimo.

Definicija: *Stanje napona u tački tela je linearno ako su vektori napona za sve presečne ravni kroz tu tačku kolinearni.*

Teorema 1: *Stanje napona u tački je linearno ako i samo ako su vektori* $\boldsymbol{t}_k$ $(k = 1, 2, 3)$ *kolinearni, tj.*

$$\boldsymbol{t}_k \times \boldsymbol{t}_l = 0, \quad (k \neq l).$$

Teorema 2: *Presečne ravni koje sadrže vektore napona, u slučaju linearnog stanja napona, su nenapregnute.*

Teorema 3: *U slučaju linearnog stanja napona postoji samo jedan glavni napon različit od nule.*

Posledica Teoreme 3: *Glavni pravci tenzora napona u slučaju linearnog stanja napona nisu jednoznačno određeni. Jednoznačno je određen samo glavni pravac koji odgovara glavnom naponu različitom od nule. Druga dva glavna pravca mogu biti bilo koja dva upravna pravca koja leže u ravni upravnoj na jednoznačno određeni glavni pravac.*

Bez gubljenja u opštosti možemo uzeti da je $\sigma_1 \neq 0$. Tada matrica napona, u odnosu na glavne pravce, ima oblik

$$T = \begin{Bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}.$$

Vežbanja

1. Dokazati da je, u slučaju linearnog stanja napona, glavni pravac koji odgovara glavnom naponu različitom od nule kolinearan sa vektorima napona.

7d. ČISTO SMICANJE

Definicija: *Stanje napona u tački je čisto smicanje ako je* $t_{11} = t_{22} = t_{33} = 0$ *za neki sistem koordinata u toj tački.*

Teorema: *Potreban i dovoljan uslov da bi naponsko stanje u tački bilo čisto smicanje jeste da je* $I_t = 0$.

Dokaz:

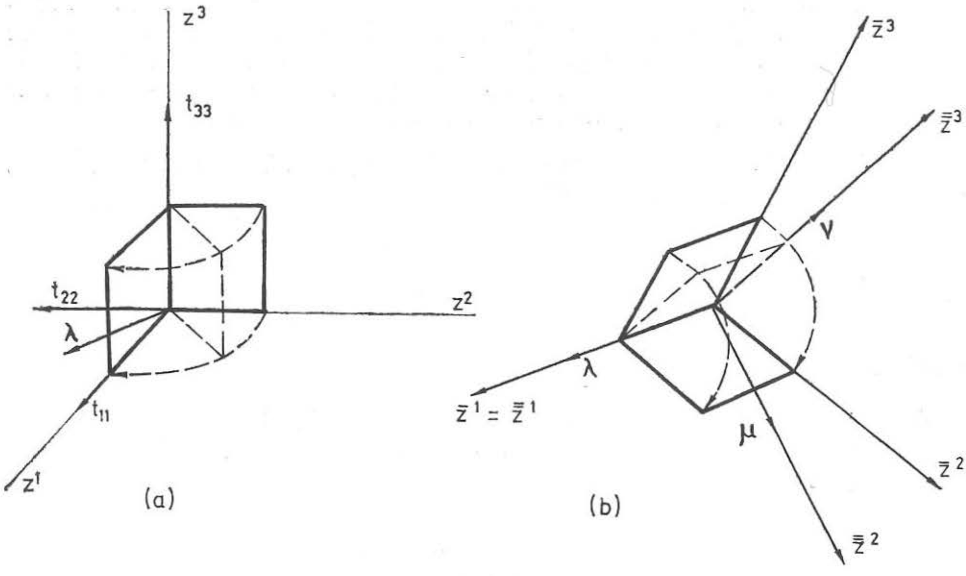
Dokaz ćemo izvesti u odnosu na Dekartov sistem koordinata.

Uslov je potreban. Zaista, ako je stanje napona čisto smicanje, onda, po definiciji, postoji sistem koordinata u datoj tački u odnosu na koji je $t_{11} = t_{22} = t_{33} = 0$. Tada je i $I_t = 0$ u odnosu na taj sistem koordinata. Međutim, kako je $I_t = 0$. skalarna invarijanta, tj., kako je $I_t = I_{\bar{t}}$ za bilo koji drugi sistem koordinata, sledi da je takođe $I_{\bar{t}} = 0$ u odnosu na bilo koji sistem dopustiv u toj tački.

Uslov je dovoljan. Mi ćemo ga dokazati, bez gubljenja u opštosti, geometrijski.

Neka je uslov $I_t = t_{11} + t_{22} + t_{33} = 0$ ispunjen u odnosu na sistem koordinata z^k u datoj tački. Treba pokazati, da u tom slučaju, postoji sistem koordinata $\bar{\bar{z}}^k$ u odnosu na koji je $\bar{\bar{t}}_{11} = \bar{\bar{t}}_{22} = \bar{\bar{t}}_{33} = 0$.

Iz izraza $t_{11} + t_{22} + t_{33} = 0$ sledi da je bar jedan od ovih napona — recimo t_{11} — pozitivan, a bar jedan — recimo t_{22} — negativan. Zna se da je i svaki od njih normalni napon za odgovarajuću presečnu površ kroz datu tačku. To znači da se svaki od njih dobija iz izraza $\sigma_n = t_{ij}n_i n_j$ koji pokazuje da su normalni naponi σ_n u datoj tački neprekidne funkcije jediničnog vektora normale $\boldsymbol{n}$ kojim se određuju presečne ravni kroz tu tačku. Tako se, na primer, rotacijom površinskog elementa upravnog na osu z^1 (kome odgovara, po pretpostavci, $t_{11} > 0$) oko ose z^3 normalni napon za tu površ neprekidno menja u funkciji rotacije. Jedan od njegovih mogućih položaja jeste položaj upravan na osu z^2 (sl. 42 pod a).



Sl. 42

Tom položaju odgovara naponsko stanje, po pretpostavci $t_{22} < 0$. Na osnovu prethodno rečenog, možemo zaključiti da se pri tome nije promenila samo vrednost normalnog napona, nego i njegov znak. Ali, s obzirom na neprekidnost te promene, sledi da mora postojati neki međupoložaj rotiranog površinskog elementa za koji je vrednost normalnog napona jednaka nuli. U tom položaju površinski element je određen svojim jediničnim vektorom spoljne normale, recimo $\boldsymbol{\lambda}$. U njegovom pravcu je $\sigma_\lambda = 0$.

Sada izaberimo bilo koja dva proizvoljna pravca koji sa pravcem vektora $\boldsymbol{\lambda}$ čine ortogonalan sistem koordinata (sl.42 pod b). Tako dobijeni sistem koordinata obeležimo sa $\bar{z}^i$. Radi definisanosti možemo obeležiti sa $\bar{z}^1$ koordinatnu osu u pravcu vektora $\boldsymbol{\lambda}$. Tada je $\sigma_\lambda = \bar{t}_{11} = 0$ i $I_t = I_{\bar{t}} = \bar{t}_{22} + \bar{t}_{33} = 0$. Odavde sledi da su $\bar{t}_{22}$ i $\bar{t}_{33}$ suprotnog znaka. Prema tome, ako je $\bar{t}_{22} > 0$, onda je $\bar{t}_{33} = -\bar{t}_{22} < 0$. Rotacijom površinskog elementa upravnog na osu $\bar{z}^2$ oko ose $\bar{z}^1$ do položaja upravnog na osu $\bar{z}^3$ prolazimo neprekidan niz vrednosti normalnog napona tog površinskog elementa od $\bar{t}_{22} > 0$ do $\bar{t}_{33} < 0$. To znači, da postoji jedan međupoložaj površinskog elementa za koji je normalni napona jednak nuli. Neka je taj položaj određen jediničnim vektorom normale površinskog elementa $\boldsymbol{\mu}$. Tada je $\sigma_\mu = 0$. Ako sada izaberemo novi koordinatni sistem $\bar{\bar{z}}^k$, tako da je $\bar{\bar{z}}^1 = \bar{z}^1$, $\bar{\bar{z}}^2$ u pravcu $\boldsymbol{\mu}$ i $\bar{\bar{z}}^3$ upravno na $\bar{\bar{z}}^1$ i $\bar{\bar{z}}^2$, dobijamo sistem u kome je $\bar{\bar{t}}_{11} = \bar{t}_{11} = 0$, $\bar{\bar{t}}_{22} = \sigma_\mu = 0$. Kao posledica uslova $I_t = I_{\bar{\bar{t}}}$ i $I_t = 0$ sledi da je i $\bar{\bar{t}}_{33} = 0$. To znači da je $\bar{\bar{t}}_{11} = \bar{\bar{t}}_{22} = \bar{\bar{t}}_{33} = 0$ za sistem $\bar{\bar{z}}^k$. □

Bitno je napomenuti da sistem $\bar{\bar{z}}^k$ nije jedinstven. Pri njegovoj konstrukciji pošlo se od proizvoljnog sistema z^k. Za drugi izbor z^k odredili bi i drugo $\bar{\bar{z}}^k$. Drukčije rečeno, ako postoji jedan sistem, onda postoji beskonačno mnogo sistema $\bar{\bar{z}}^k$ za koje je $\bar{\bar{t}}_{11} = \bar{\bar{t}}_{22} = \bar{\bar{t}}_{33} = 0$.

Prema definiciji čistog smicanja kao i srednjeg napona, a saglasno ovoj teoremi, sledi:

Naponsko stanje je čisto smicanje ako i samo ako je $\sigma_0 = 0$;

i

Naponsko stanje je čisto smicanje ako i samo ako je tenzor napona jednak svom devijatorskom delu.

8. KOŠIJEVI ZAKONI KRETANJA

U cilju opštosti mi dalje pretpostavljamo da u posmatranom telu, u toku njegovog kretanja, postoji površ diskontinuiteta $\sigma(t)$ koja može, ali ne mora biti materijalne prirode. Kao što je rečeno u III 7, sa fizičkog stanovišta, takva površ može biti npr. talas koji se u telu prostire brzinom u_n.

Tada se, u odsustvu zapreminskih i površinskih spregova, Ojlerovi zakoni (3.3) i (3.4) mogu napisati u obliku

$$\frac{d}{dt}\int_v \varrho \boldsymbol{v} dv = \int_{\mathscr{S}} \boldsymbol{t}_{(n)}\, da + \int_v \varrho \boldsymbol{f} dv, \tag{8.1}$$

$$\frac{d}{dt}\int_v \varrho \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{v} dv = \int_{\mathscr{S}} \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{t}_{(n)}\, da + \int_v \varrho \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{f} dv, \tag{8.2}$$

gde su v i $\mathscr{S}$ materijalna zapremina i granična površ posmatranog tela. Ovi izrazi su oblika opšteg zakona balansa datog sa (3.14.1), koji ćemo dalje koristiti za izvođenje lokalnih oblika ovih zakona balansa. U tom cilju mi pretpostavljamo da važi lokalni zakon balansa mase (3.14.5) koji povlače za sobom lokalni zakon balansa (3.14.7). Identifikacijom veličina ψ, $\boldsymbol{\Phi}$ i $\boldsymbol{p}$ u (8.1) i (8.2) odmah dobijamo njihove lokalne oblike.

Ovaj postupak ćemo primeniti prvo na (8.1).

Poređenjem ovog izraza sa (3.14.1) mi identifikujemo: ψ sa $\boldsymbol{v}$, p sa $\boldsymbol{f}$ i $\boldsymbol{\Phi} \cdot \boldsymbol{da}$ sa $\boldsymbol{t}_{(n)} da$. Koristeći (4.6) i izraz $\boldsymbol{da} = \boldsymbol{n} da$ možemo pisati

$$\boldsymbol{\Phi}\, \boldsymbol{da} = \boldsymbol{\Phi}\, \boldsymbol{n} da = \boldsymbol{\Phi}^k n_k da = \boldsymbol{t}_{(n)} da,$$

odakle vidimo da je $\boldsymbol{\Phi n} = \boldsymbol{t}_{(n)}$ i $\boldsymbol{\Phi}^k = \boldsymbol{t}^k = g^{kl}\boldsymbol{t}_l$ tj.

$$\boldsymbol{\Phi}^k = \boldsymbol{t}^k, \quad \boldsymbol{\Phi n} = \boldsymbol{t}_{(n)}. \tag{8.3}$$

Smenom ovih veličina u (3.14.7) dobijamo

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}\,\boldsymbol{t}^k}{\partial x^k}+\varrho(\boldsymbol{f}-\dot{\boldsymbol{v}})=0 \qquad \text{u} \quad v-\sigma \tag{8.4}$$

$$[\![\boldsymbol{t}_{(n)}+\varrho\boldsymbol{v}(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{n}]\!]=0 \qquad \text{na } \sigma.$$

Jednačinu $(8.4)_1$ nazivamo *prvi Košijev zakon kretanja*, a $(8.4)_2$ *uslov skoka na površi diskontinuiteta* $\sigma(t)$.

Poređenjem (8.2) sa (3.14.1) identifikujemo: ψ sa $\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{v}$, p sa $\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{f}$ i $\boldsymbol{\Phi}\,da$ sa $\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{t}_{(n)}da$. Kao i u prethodnom slučaju lako je videti da je

$$\boldsymbol{\Phi}\,da=\boldsymbol{\Phi}\,\boldsymbol{n}da=\boldsymbol{\Phi}^k n_k da=\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{t}_{(n)}da,$$

tj.

$$\boldsymbol{\Phi}\,\boldsymbol{n}=\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{t}_{(n)} \quad \text{i} \quad \boldsymbol{\Phi}^k=\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{t}^k. \tag{8.5}$$

Smenom tako identifikovanih veličina u (3.14.7) dobijamo

$$\boldsymbol{p}\times\left[\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}\,\boldsymbol{t}^k}{\partial x^k}+\varrho(\boldsymbol{f}-\dot{\boldsymbol{v}})\right]+\boldsymbol{g}_k\times\boldsymbol{t}^k=0 \quad \text{u} \quad v-\sigma,$$

$$\boldsymbol{p}\times[\![\varrho\boldsymbol{v}(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{n}+\boldsymbol{t}_{(n)}]\!]=0 \ \text{na } \sigma,$$

pri čemu pretpostavljamo da na površi diskontinuiteta kretanje materijalnih čestica ne trpi diskontinuitet, tj. te površi nisu, na primer, prskotine i na njima je $[\![\boldsymbol{p}]\!]=0$. Pretpostavljajući da važi prvi Košijev zakon kretanja $(8.4)_1$, prva od ovih jednakosti se svodi na

$$\boldsymbol{g}_k\times\boldsymbol{t}^k=0 \ \text{u} \ v-\sigma \tag{8.6}$$

i naziva se *drugi Košijev zakon kretanja*. Druga jednakost je, na osnovu $(8.4)_2$, identički zadovoljena. Time smo dokazali *stav:*

> — *Prvi i drugi Košijev zakon kretanja, zajedno sa uslovom skoka, predstavljaju potrebne i dovoljne uslove za lokalne zakone balansa količine kretanja i momenta količine kretanja.*

Ako se koriste relacije

$$\boldsymbol{t}^k=t^{lk}\boldsymbol{g}_l, \qquad \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x^k}=\begin{Bmatrix} l \\ k\,l \end{Bmatrix},$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{g}_l}{\partial x^k}=\begin{Bmatrix} m \\ k\,l \end{Bmatrix}\boldsymbol{g}_m, \quad \boldsymbol{g}_k\times\boldsymbol{g}_l=\varepsilon_{klm}\boldsymbol{g}^m \tag{8.7}$$

onda se prvi i drugi Košijev zakon kretanja, $(8.4)_1$ i (8.6), kao i uslov skoka $(8.4)_2$ mogu napisati u komponentalnom obliku

$$t^{lk}{}_{,k}+\varrho(f^l-\dot{v}^l)=0, \quad \varepsilon_{klm}t^{kl}=0 \ \text{u} \ v-\sigma, \tag{8.8}$$

$$[\![t^{lk}n_k+\varrho v^l(u_n-v_n)]\!]=0 \ \text{na } \sigma. \tag{8.9}$$

Izražen na ovaj način, prvi Košijev zakon predstavlja sistem parcijalnih diferencijalnih jednačina koje nazivamo Košijeve jednačine kretanja.

Drugi Košijev zakon kretanja $(8.8)_2$ nam kaže da je antisimetričan deo tenzora napona jednak nuli, $t^{[kl]} = 0$, što je ekvivalentno tvrđenju da je tenzor napona simetričan, tj.

$$t^{kl} = t^{lk}. \tag{8.10}$$

Dalja analiza uslova skoka $(3.14.5)_2$ i (8.9) nam omogućuje da ih napišemo u kompaktnijem i pogodnijem obliku

$$[\![\varrho u]\!] = 0, \tag{8.11}$$

$$[\![t^{kl} n_k + \varrho u v^l]\!] = 0, \tag{8.12}$$

gde je, s obzirom na (3.4.17),

$$u = u_n - v_n \tag{8.13}$$

lokalna brzina prostiranja. Koristeći (3.7.1), (4.10) i (8.11) možemo kraće pisati (8.12) kao

$$[\![t^l_{(n)}]\!] + \varrho^{\pm} u^{\pm} [\![v^l]\!] = 0, \tag{8.14}$$

koji ćemo analizirati u sledećim specijalnim slučajevima:

a) Površ diskontinuiteta je materijalna površ.

Tada je prema III 4, $u = 0$ i

$$[\![t^l{}_{(n)}]\!] = 0, \tag{8.15}$$

tj. vektor napona na materijalnoj površi je neprekidan. Takva površ može biti neka međupovrš koja razdvaja dve materijalne sredine ili granična površ tela. U slučaju granične površi tela možemo $\boldsymbol{t}_{(n)}$ interpretirati kao spoljašnje površinsko opterećenje p^l. Tada nam (8.15) daje granične uslove $(4.13)_1$ koje smo ranije izveli na drugi način.

b) Na površi diskontinuiteta je $[\![v^l]\!] = 0$.

I u tom slučaju važi (8.15). Ako uvedemo pojam *udarne površi* kao površi na kojoj je $[\![v_n]\!] \neq 0$ onda možemo kazati: na površi diskontinuiteta koja nije udarna površ vektor napona je neprekidan.

c) Površ diskontinuiteta je fiksna površ.

Tada je $u_n = 0$ i (8.11) i (8.12) postaju

$$[\![\varrho v_n]\!] = 0, \quad [\![t^{kl} - \varrho v^k v^l]\!]\, n_k = 0. \tag{8.16}$$

Takve površi su *kontrolne površi*.

Detaljnom analizom moguće je izvesti i druge vrlo važne fizičke zaključke. Mi se na tome nećemo zadržavati smatrajući da smo na ovim primerima donekle istakli značaj postojanja površi diskontinuiteta.

Za dalju analizu Košijevih zakona kretanja i površi diskontinuiteta pogodniji je njihov sledeći oblik pisanja

$$\operatorname{div} \boldsymbol{T} + \varrho\,(\boldsymbol{f} - \boldsymbol{a}) = 0 \quad \text{ili} \quad \nabla \cdot \boldsymbol{T} + \varrho\,(\boldsymbol{f} - \boldsymbol{a}) = 0, \tag{8.17}$$

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}^T, \tag{8.18}$$

$$[\![\boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{n} + \varrho \boldsymbol{v}\,(u_n - v_n)]\!] = 0 \tag{8.19}$$

gde je ∇ operator gradijenta.

Napomena:

Vrlo je važno podvući značaj i ulogu zakona konzervacije mase pri izvođenju drugih zakona balansa. Njega smo koristili pri izvođenju opšteg zakona balansa u lokalnom obliku (3.14.6), pa prema tome i u izvođenju zakona balansa količine kretanja i momenta količine kretanja. Takođe, izvođenju zakona balansa momenta količine kretanja prethodi zakon balansa količine kretanja. Svi oni prethode izvođenju zakona balansa energije, što ćemo kasnije detaljno razmatrati.

Vežbanja

1. Pokazati da prve Košijeve jednačine kretanja glase:

a) u odnosu na Dekartove koordinate (x, y, z)

$$\varrho\left(\frac{\partial v_x}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}\right)=\frac{\partial t_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial t_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial t_{xz}}{\partial z}+\varrho f_x;$$

$$\varrho\left(\frac{\partial v_y}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)=\frac{\partial t_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial t_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial t_{yz}}{\partial z}+\varrho f_y;$$

$$\varrho\left(\frac{\partial v_z}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_z}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_z}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)=\frac{\partial t_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial t_{zy}}{\partial y}+\frac{\partial t_{zz}}{\partial z}+\varrho f_z;$$

b) u odnosu na cilindarske koordinate (r, θ, z)

$$\varrho\left(\frac{\partial v_r}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}-\frac{v_\theta^2}{r}+v_z\frac{\partial v_r}{\partial z}\right)=$$

$$=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\,t_{rr})+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(t_{r\theta})-\frac{t_{\theta\theta}}{r}+\frac{\partial t_{rz}}{\partial z}+\varrho f_r;$$

$$\varrho\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}+\frac{v_r v_\theta}{r}+v_z\frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right)=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\,t_{\theta r})+$$

$$+\frac{1}{r}\frac{\partial t_{\theta\theta}}{\partial \theta}+\frac{\partial t_{\theta z}}{\partial z}+\varrho f_\theta;$$

$$\varrho\left(\frac{\partial v_z}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r t_{zr})+\frac{1}{r}\frac{\partial t_{z\theta}}{\partial \theta}+\frac{\partial t_{zz}}{\partial z}+\varrho f_z;$$

c) u odnosu na sferne koordinate (r, θ, φ)

$$\varrho\left(\frac{\partial v_r}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}+\frac{v_\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \varphi}-\frac{v_\theta^2+v_\varphi^2}{r}\right)=$$

$$=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 t_{rr})+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(t_{r\theta}\sin\theta)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial t_{r\varphi}}{\partial\varphi}-\frac{t_{\theta\theta}+t_{\varphi\varphi}}{r}+\varrho f_r;$$

$$\varrho\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}+\frac{v_\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial\varphi}+\frac{v_r v_\theta}{r}-\frac{v_\varphi^2\operatorname{ctg}\theta}{r}\right)=$$

$$=\frac{1}{r^3}\frac{\partial}{\partial r}(r^3\,t_{\theta r})+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(t_{\theta\theta}\sin\theta)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial t_{\theta\varphi}}{\partial\varphi}-\frac{\operatorname{ctg}\theta}{r}t_{\varphi\varphi}+\varrho f_\theta;$$

$$\varrho\left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_\varphi}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\theta}+\frac{v_\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{v_\varphi v_r}{r}+\frac{v_\theta v_\varphi}{r}\operatorname{ctg}\theta\right)=$$

$$=\frac{1}{r^3}\frac{\partial}{\partial r}(r^3\,t_{\varphi r})+\frac{1}{r\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(t_{\varphi\theta}\sin^2\theta)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial t_{\varphi\varphi}}{\partial\varphi}+\varrho f_\varphi,$$

gde su sve veličine izražene preko svojih fizičkih koordinata.

2. Pokazati da se prvi Košijev zakon kretanja može napisati u obliku

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varrho\dot{x}^k)=(t^{km}-\varrho\dot{x}^m\dot{x}^k)_{,m}+\varrho f^k,$$

gde je $\dot{x}^k=v^k$.

3. U slučaju statičke ravnoteže ubrzanje $\dot{\boldsymbol{v}}=\boldsymbol{a}$ je jednako nuli. Tada diferencijalne jednačine kretanja ili prve Košijeve jednačine kretanja $(8.8)_1$ glase

$$t^{lk}_{,k}+\varrho f^l=0$$

i nazivamo ih *jednačinama ravnoteže.*

Pokazati da je opšte rešenje jednačina ravnoteže, u slučaju odsustva zapreminskih sila, dato sa

$$t^{kl}=\varepsilon^{krp}\varepsilon^{lsq}a_{rs,pq},$$

gde su a_{rs} proizvoljne neprekidne dva puta diferencijabilne funkcije koje predstavljaju komponente tenzora drugog reda, i nazivaju se funkcije napona.

4. Pokazati da se $(8.9)_2$, u odnosu na pravac normale i tangentnu ravan površi diskontinuiteta, može predstaviti u obliku

$$[\![\sigma_n-\varrho u^2]\!]=0,\quad [\![\tau_n]\!]+\varrho^{\pm}u^{\pm}[\![\dot{x}_\tau]\!]=0,$$

gde je $\dot{x}_\tau$-komponenta vektora brzine $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{v}$ u tangentnoj ravni površi diskontinuiteta.

5. Koristeći (8.11) u prethodnom zadatku pokazati da je

$$(u^-)^2=-\frac{\varrho^+}{\varrho^-}\frac{[\![\sigma_n]\!]}{[\![\varrho]\!]}\qquad\text{ili}\qquad u^+u^-=-\frac{[\![\sigma_n]\!]}{[\![\varrho]\!]},$$

tj. brzine prostiranja udarnog talasa (udarne površi) su određene skokom normalnog napona i vrednostima gustine na svakoj strani udarnog talasa.

6. Pokazati da je

$$U_N=u\lambda_{(n)}=\frac{u}{\sqrt{c_{kl}\,n^k\,n^l}}.$$

9. JEDNAČINE KRETANJA U ODNOSU NA REFERENTNU KONFIGURACIJU

Košijeve jednačine kretanja $(8.8)_1$, kao i sve veličine koje se u njoj pojavljuju:

ϱ — gustina,

t^{kl} — tenzor napona,

v^k — brzina,

f^k — zapreminska sila

izražene su u odnosu na nezavisne promenljive:

x^k — prostorne koordinate i

t — vreme.

Sa matematičkog stanovišta, kao što je već rečeno, one predstavljaju nelinearni sistem parcijalnih diferencijalnih jednačina po navedenim promenljivim, za čije je rešavanje potrebno poznavanje i uslova koje odgovarajuće veličine zadovoljavaju na graničnoj površi tela u svakom trenutku. Za poznavanje ovih uslova prethodno je potrebno znati graničnu površ, koja se kod deformabilnog tela menja i po obliku i položaju i zavise od nepoznatog polja pomeranja, što predstavlja problem za sebe.

S druge strane, početni položaj tela, pa prema tome i njegove granične površi, je poznat. Zbog toga je granične uslove pogodno izraziti u odnosu na referentnu konfiguraciju tela, konfiguraciju u kojoj znamo graničnu površ tela, a koju možemo uzeti za početnu. To posebno važi za elastična tela koja poseduju privilegisanu konfiguraciju u kojoj je telo nenapregnuto i u koje se vraća po prestanku dejstva sila i koje definišemo kao njegovo prirodno stanje. To znači da se granični uslovi izražavaju u odnosu na materijalne koordinate X^K, dopustive u referentnoj konfiguraciji. Da bi se ovako izraženi granični uslovi mogli koristiti, nužno je izraziti i jednačine kretanja u odnosu na referentno stanje. Međutim, to nije samo izražavanje funkcionalne zavisnosti veličina, koje figurišu u jednačinama kretanja, od promenljivih X^K, zamenom x^k sa $x^k = x^k(X^K, t)$, (kao što smo videli u III 14) nego i prevođenja odgovarajućih veličina u referentnu konfiguraciju. Tako za gustinu ϱ imamo, saglasno materijalnim jednačinama neprekidnosti, (3.13.4).

U suštini, mi treba da nađemo odgovarajuće lokalne zakone balansa u referentnoj konfiguraciji Ojlerovih zakona (8.1) i (8.2). Postupajući na način izložen u prethodnom odeljku i koristeći sada (3.14.14) u (8.1), kada se uzme u obzir da je

$$\psi = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{v}[\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X}, t), t], \quad p = \boldsymbol{f}, \quad \Phi^k = \boldsymbol{t}^k, \quad \Phi^K = \boldsymbol{T}^K,$$

lako je videti da prvi Košijev zakon kretanja u referentnoj konfiguraciji, kao i skok na površi diskontinuiteta, glase respektivno

$$\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{G}\,\boldsymbol{T}^K}{\partial X^K} + \varrho_0(\boldsymbol{f} - \dot{\boldsymbol{v}}) = 0 \quad \text{u } V - \Sigma, \tag{9.1}$$

$$[\![\boldsymbol{T}^K N_K + \varrho_0 \boldsymbol{v} U_N]\!] = 0 \quad \text{na } \Sigma$$

gde je, saglasno sa (3.14.12),

$$\boldsymbol{T}^K = J X^K_{;k} \boldsymbol{t}^k. \tag{9.2}$$

Koristeći pak (3.14.14) u (8.2), (9.1), kao i činjenicu da je sada

$$\psi = \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{v}, \quad p = \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{f}, \quad \Phi^k = \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{t}^k, \quad \Phi^K = \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{T}^K,$$

dobijamo drugi Košijev zakon

$$g_k \times T^K x^k_{;K} = 0, \tag{9.3}$$

Odgovarajuća relacija skoka je u ovom slučaju identički zadovoljena.

Pisanje ovih izraza u komponentalnom obliku bitno je vezano za $\boldsymbol{T}^K$, datog sa (9.2), zbog čega se zadržavamo na njegovoj analizi. Ako se uzme u obzir da je $dA_K = N_K dA$ tada možemo pisati, analogno sa (4.6), da je

$$\boldsymbol{T}^K dA_K = \boldsymbol{T}^K N_K dA = \widetilde{\boldsymbol{T}}_{(N)} dA. \tag{9.4}$$

Smisao ove veličine se može odrediti iz (9.2) kada se ova relacija pomnoži sa dA_K i iskoristi (2.15.8), (4.6) i (3.1). Tada se vidi da je

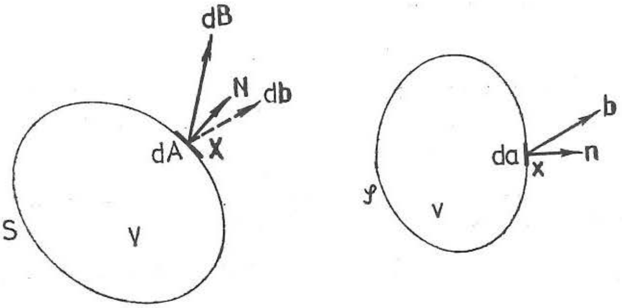
$$\widetilde{\boldsymbol{T}}_{(N)} dA = \boldsymbol{t}_{(n)} da = d\boldsymbol{b}, \tag{9.5}$$

tj. tako definisana veličina $\widetilde{\boldsymbol{T}}_{(N)}$ predstavlja silu koja deluje na element deformisane površine računatu po jedinici nedeformisane površine (sl. 43). Takođe je

$$db^k = \widetilde{T}^k_{(N)} dA \quad \text{i} \quad \widetilde{\boldsymbol{T}}_{(N)} = \boldsymbol{T}^K N_K, \tag{9.6}$$

s obzirom na (9.5) i (9.4) respektivno, gde je

$$\boldsymbol{T}^K = T^{kK} \boldsymbol{g}_k \tag{9.7}$$



Sl. 43

u odnosu na prostorni sistem koordinata. Tako definisani tenzor T^{kK} se naziva *prvi Piola-Kirhofov (Piola-Kirchhoff) tenzor* i predstavlja napon u $\boldsymbol{x}$ meren po jedinici površine u $\boldsymbol{X}$; sa tenzorskog stanovišta on predstavlja dvostruko tenzorsko polje. Iz (9.7) i $(9.6)_2$ se vidi da je drugi indeks tenzora T^{kK} indeks normale presečne ravni, za razliku od tenzora t^{kl} kod koga tu ulogu obično ima (s obzirom na inženjersku praksu) prvi indeks.

Veza između Piola-Kirhofovog tenzora, koji ćemo dalje obeležavati sa $\boldsymbol{T}_R$, (koji se ponekad naziva Lagranžov tenzor napona) i tenzora $\boldsymbol{T}$ (ili Košijev tenzor napona) sledi neposredno iz (9.7) i (9.2) i glasi

$$T^{kK} = J t^{kl} X^K_{;l}, \quad t^{kl} = J^{-1} T^{kL} x^l_{;L}, \tag{9.8}$$

ili

$$\boldsymbol{T}_R = J\boldsymbol{T}(\boldsymbol{F}^{-1})^T, \quad \boldsymbol{T} = J^{-1}\boldsymbol{T}_R \boldsymbol{F}^T. \tag{9.8a}$$

Koristeći $(8.7)_3$, dualni izraz za (8.7) u odnosu na materijalne koordinate lako je pokazati da je

$$\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{G}\,T^{kK}\boldsymbol{g}_k}{\partial X^K}=\left(\frac{\partial T^{kK}}{\partial X^K}+T^{kL}\begin{Bmatrix}K\\LK\end{Bmatrix}+T^{lK}\begin{Bmatrix}k\\l\,m\end{Bmatrix}x^m_{;K}\right)\boldsymbol{g}_k=T^{kK}_{;K}\boldsymbol{g}_k. \tag{9.9}$$

Smenom ovog izraza i (9.7) u (9.1), kao i $(8.7)_4$ u (9.3), dobijamo Košijeve zakone kretanja u referentnoj konfiguraciji

$$\left.\begin{aligned}&T^{kK}_{;K}+\varrho_0(f^k-\dot{v}^k)=0\\&\varepsilon_{klm}x^k_{;K}T^{lK}=0\end{aligned}\right\}\quad \text{u } V-\Sigma \tag{9.10}$$

i njima odgovarajući skok

$$[\![T^{kK}N_K+\varrho_0 v^k U_N]\!]=0 \quad \text{na } \Sigma. \tag{9.11}$$

Iz $(9.10)_2$ se vidi da je

$$x^{[k}_{;K}T^{l]K}=0, \tag{9.10a}$$

tj. prvi Piola-Kirhofov tenzor napona nije simetričan.

Uvođenjem tenzora

$$T^{KL}=X^K_{;k}T^{kL}=JX^K_{;k}X^L_{;l}t^{kl}, \tag{9.12}$$

koji se naziva *drugi Piola-Kirhofov tenzor*, ovaj nedostatak se eliminiše. Zaista, iz (9.12) ili, još jednostavnije, iz $(8.8)_2$ sledi da je

$$T^{KL}=T^{LK}, \tag{9.13}$$

tj. drugi Piola-Kirhofov tenzor napona je simetričan. Međutim, u tom slučaju su jednačine kretanja $(9.10)_1$ komplikovanije. To se najbolje vidi iz njihovog razvijenog oblika

$$\frac{\partial T^{kK}}{\partial X^K}+T^{mK}\begin{Bmatrix}k\\m\,l\end{Bmatrix}x^l_{;K}+T^{kK}\begin{Bmatrix}L\\L\,K\end{Bmatrix}+\varrho_0(f^k-\dot{v}^k)=0, \tag{9.14}$$

kada se izraze preko prvog Piola-Kirhofovog tenzora napona, odnosno

$$\frac{\partial(T^{LK}x^k_{;L})}{\partial X^K}+\left(\begin{Bmatrix}k\\m\,l\end{Bmatrix}x^m_{;L}x^l_{;K}+\begin{Bmatrix}M\\M\,K\end{Bmatrix}x^k_{;L}\right)T^{LK}+\varrho_0(f^k-\dot{v}^k)=0, \tag{9.15}$$

kada se izraze preko drugog Piola-Kirhofovog tenzora napona.

Iz (9.12), koristeći (2.5.5), lako je pokazati da je

$$T^{kK}=x^k_{;L}T^{LK} \tag{9.16}$$

i

$$t^{kl}=J^{-1}x^k_{;K}x^l_{;L}T^{KL}. \tag{9.17}$$

Upoređujući (9.17) i $(9.12)_2$, uzimajući u obzir da su J i J^{-1} dualne veličine, možemo zaključiti da su Košijev tenzor t^{kl} i drugi Piola-Kirhofov tenzor T^{KL} dualne veličine. Na osnovu principa dualnosti tada možemo posmatrati T^{KL} u referentnoj konfiguraciji na isti način kao i t^{kl} u trenutnoj konfiguraciji tela. Tako se vektor napona $\boldsymbol{T}_{(N)}$, dat sa

$$T^L_{(N)}=T^{LK}N_K, \tag{9.18}$$

koji je dualan sa $t^l_{(n)} = t^{lk} n_k$, definiše kao neka za sada neodređena sila $d\boldsymbol{B}$ po jedinici površine dA, tj.

$$T^L_{(N)} = \frac{dB^L}{dA} \tag{9.19}$$

što je očigledno dualno sa (3.1). Množeći (9.17) sa da_k i koristeći (2.15.8), (4.10), (3.1), (9.18) i (9.19) dobija se da je

$$db^k = x^k_{;K} dB^K, \tag{9.20}$$

tj. sile $d\boldsymbol{b}$ i $d\boldsymbol{B}$ se nalaze u istom odnosu kao i prostorni element $d\boldsymbol{x}$ prema njegovom materijalnom elementu $d\boldsymbol{X}$ s obzirom na relaciju $dx^k = x^k_{;K} dX^K$. Time je određena sila $d\boldsymbol{B}$ kao i njen smisao (sl. 43).

Sa fizičkog stanovišta Piola-Kirhofovi tenzori nisu stvarne veličine zbog čega se nazivaju pseudo-tenzori napona. Pogodni su za teorijska razmatranja zbog čega se (9.10) često koristi u obliku

$$\begin{aligned} \operatorname{Div} \boldsymbol{T}_R + \varrho_0 (\boldsymbol{f} - \boldsymbol{a}) &= 0, \\ \boldsymbol{F}\boldsymbol{T}_R^T &= \boldsymbol{T}_R \boldsymbol{F}^T. \end{aligned} \tag{9.21}$$

Vežbanja

1. Pokazati da je:

   a) $T^{kK} = \dfrac{\varrho_0}{\varrho} g^{Km} (g_{ml} - u_{m,l}) t^{lk}$,

   b) $T^{KL} = \dfrac{\varrho_0}{\varrho} g^{Kp} g^{Lq} (g_{pk} - u_{p,k})(g_{ql} - u_{q,l}) t^{kl}$.

2. U odnosu na isti sistem koordinata (npr. u odnosu na zajednički koordinatni sistem), koristeći prethodni zadatak, prodiskutovati slučajeve kada je:
   a) $\bar{e}_{kl} \ll 1$ i b) $\bar{r}_{kl} \ll 1$.

3. Pokazati da nema razlike između Košijevog i Piola-Kirhofovih tenzora napona izraženih u odnosu na zajednički sistem kada su i $\bar{e}_{kl}$ i $\bar{r}_{kl}$ jednovremeno male veličine u odnosu na jedinicu.

4. Koristeći (9.2) u (8.4), kao i III 14 zadatak 5., izvesti (9.1).

5. Izvesti (9.10) neposredno iz (8.8) koristeći (9.8) i III 14 zadatak 6.

V ENERGIJA I ENTROPIJA

1. OSNOVNE DEFINICIJE

U ovom odeljku definišemo određene pojmove od značaja za dalji deo izlaganja, posebno u termodinamici kontinuuma.

Sistem. Stanje. Parametri stanja

U mehanici kontinuuma *termodinamičkim sistemom* se naziva materijalno telo čija se termodinamička svojstva izučavaju. To je posebna oblast prostora u kojoj je materija neprekidno raspoređena. Površ, koja obuhvata tu oblast, naziva se *granica sistema*. Granična površ sistema može biti stvarna ili imaginarna. Može se kretati zajedno sa materijom uočenog sistema ili biti fiksirana u prostoru. Fiksirana površ je pogodna za kontrolu protoka materije kroz nju, zbog čega se i naziva *kontrolna površ*. Izbor granične površi sistema obično zavisi od vrste problema koji izučavamo.

Oblast prostora izvan sistema naziva se njegovom okolinom. Interakcija između sistema i okoline određena je prirodom njihove zajedničke granice. Ako granična površ ne dopušta prolazak materije, sistem je *zatvoren*, u protivnom je *otvoren*. Sistem koji nema interakcije sa okolinom je *izolovan*.

Primetimo da je zatvoren sistem sistem konstantne mase. Obrnuto ne važi, tj. sistem konstantne mase ne mora biti zatvoren. To je slučaj otvorenog sistema koji gubi onoliko mase koliko je dobija.

Ako za dati termodinamički sistem znamo sve informacije koje su nam potrebne za traženo opisivanje sistema, kažemo da je *stanje sistema poznato*. Fizičke veličine koje možemo meriti direktno ili indirektno i koje određuju ove informacije ili, preciznije rečeno, koje karakterišu termodinamičko stanje nazivamo *termodinamičkim parametrima stanja, promenljivim stanja* ili kratko *parametrima*. Oni opisuju pojedine osobine sistema. Primeri parametra stanja su masa sistema, njegova zapremina, deformacija, napon itd.

Za sistem se kaže da je *homogen* ako parametri stanja ne zavise u uočenom trenutku od položaja čestice u telu. U protivnom slučaju sistem je *nehomogen.*

Proces. U opštem slučaju, termodinamički sistem ne ostaje u jednom istom stanju, nego se menja sa vremenom. Promena stanja sistema podrazumeva promenu vrednosti bar jedne njegove osobine. U tom slučaju parametri stanja su funkcije vremena i kaže se da je sistem podvrgnut *termodinamičkom procesu.* Ako su parametri stanja nezavisni od vremena, za sistem se kaže da je u *termodinamičkoj ravnoteži.*

Posebni primeri termodinamičkih procesa su

i. Proces pri konstantnoj temperaturi ili *izotermički proces,*

ii. Proces pri konstantnom pritisku ili *izobarični proces,*

iii. Procesi pri konstantnoj energiji, pri konstantnoj zapremini,

iiii. Proces koji se odvija bez razmene toplote sistema sa okolinom ili *adijabatski proces.*

Za sistem koji je podvrgnut takvom procesu da se na kraju sistem vraća u početno stanje, kažemo da je podvrgnut *cikličkom procesu.* Na kraju cikličnog procesa sva svojstva sistema imaju iste početne vrednosti nezavisno od prirode ciklusa.

U termodinamici se svi procesi dele na *reverzibilne* (povratne) i *ireverzibilne* (nepovratne). Reverzibilni proces je idealizovani proces koji se može izvesti u suprotnom smeru, tako da sistem prolazi kroz ista međustanja kao i pri stvarnom procesu, vraćajući sistem u početno stanje. Proces koji ne zadovoljava ove uslove naziva se ireverzibilnim. Napominjemo da su svi realni procesi ireverzibilni, u svakom slučaju zbog opšte prisutnog trenja koje nepovratno pretvara rad u toplotu.

U klasičnoj termodinamici posebno značenje imaju tzv. *kvazistatički procesi,* tj. procesi koji se definišu kao uzastopan niz ravnotežnih stanja sistema. Takvi procesi se odvijaju beskonačno malim brzinama.

Funkcije stanja. Jednačine stanja. Do sada nije bilo reči o međusobnoj zavisnosti parametara stanja. Međutim, iskustvo nas uči da promene osobina sistema nisu međusobno nezavisne. Drukčije rečeno, to znači da je samo konačan broj parametara stanja nezavistan, tj. nisu funkcije drugih parametara stanja. Takvi parametri stanja su primitivni ili osnovni u odnosu na ostale parametre stanja. Radi definisanosti, kažemo za bilo koji skup nezavisnih parametara stanja, koji potpuno i jednoznačno određuju stanje sistema, da je *potpun.* Broj parametara potpunog skupa (parametara) određuje tzv. *stepen slobode sistema.*

Parametri koji jednoznačno zavise od potpunog skupa parametara nazivaju se *funkcije stanja.* Zahtev jednoznačnosti je bitan. U protivnom bi postojala funkcionalna zavisnost između parametara potpunog skupa, tj. svi parametri potpunog skupa ne bi bili nezavisni, što je suprotno definiciji potpunog skupa parametara.

Ovaj zahtev dovodi i do drugih važnih zaključaka. Naime, vrednost funkcije stanja za dato stanje sistema, recimo S, ne zavisi od procesa kojim je sistem doveden iz drugog stanja S_0 u dato stanje. Zaista, kada to ne bi bio slučaj, tada bi, prevodeći sistem iz stanja S_0 u stanje S pomoću dve različite putanje, registrovali dve različite vrednosti funkcije stanja u S, što je suprotno pretpostavci da je funkcija stanja jednoznačna. (Termin *putanja* se odnosi na opis svih stanja koje sistem prolazi za vreme promene stanja. Prema tome, putanja se opisuje preko parametara potpunog skupa koji određuju međustanja sistema. Posledica tcga je da je integral funkcije stanja duž zatvorene putanje, kojom se definiše jedan ciklički proces, jednak nuli.

Pošto je krivolinijski integral totalnog diferencijala

$$d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial z_k} dz_k$$

funkcije $\Phi(z_k)$, nezavisan od putanje integracije između datih granica, uobičajeno je u klasičnoj termodinamici da se elementarni priraštaj funkcije stanja identifikuje sa njenim totalnim diferencijalom. Jasno je da svaki priraštaj Δf funkcije $f(z_k)$ koji se može izraziti u obliku

$$\Delta f = f_k dz_k$$

gde je $f_k = f_k(z_l)$, nije totalni diferencijal funkcije f. Za to je potrebno da bude

$$f_{k,l} = f_{l,k} \quad \text{kada je} \quad f_k = \frac{\partial f}{\partial z_k} \quad \text{i} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z_k \partial z_l} = \frac{\partial^2 f}{\partial z_l \partial z_k}$$

(što predstavlja uslove integrabilnosti). To je slučaj kada su u pitanju funkcije stanja.

Na osnovu svega iznetog sledi da se svaka funkcija stanja X_α, može jednoznačno izraziti u obliku

$$X_\alpha = X_\alpha(x_j), \qquad \begin{array}{l} \alpha = 1, \ldots, m \\ j = 1, \ldots, n \end{array}$$

gde su x_j — parametri stanja potpunog skupa parametara. Jednačine ovog oblika nazivaju se *jednačinama stanja.*

Ekstenzivne, intenzivne i specifične veličine

Sve parametre, bez obzira na to da li su nezavisni ili zavisni, možemo podeliti na dve vrste: *intenzivne* i *ekstenzivne.* Termodinamičke veličine ili promenjive koje ne zavise od mase ili broja čestica sistema nazivamo intenzivnim veličinama (pritisak, gustina, temperatura itd.), a veličine koje su proporcionalne masi ili broju čestica nazivamo aditivnim ili ekstenzivnim veličinama (zapremina, unutrašnja energija itd.). U mnogim slučajevima pogodnije je da se termodinamičke relacije izražavaju preko intenzivnih veličina, jer su tada relacije nezavisne od mase bilo kojeg pojedinog sistema.

Odnos jedne ekstenzivne veličine i mase sistema nazivamo *specifična vrednost veličine.* Tako definisana veličina se izražava po jedinici mase, ne zavisi od ukupne mase sistema i za homogene sisteme predstavlja intenzivnu veličinu.

Za obeležavanje ekstenzivnih veličina koristićemo velika slova, dok ćemo njihove odgovarajuće specifične vrednosti i intenzivne veličine obeležavati malim slovima.

U daljem delu, ako se posebno ne naglasi, podrazumeva se da izučavamo samo zatvorene sisteme.

2. TERMIČKA RAVNOTEŽA. NULTI ZAKON TERMODINAMIKE

Posmatrajmo dva zatvorena sistema koji su u ravnotežnom stanju. Dovedimo ih u kontakt. Ako pri tome svaki ostaje u ravnotežnom stanju, kažemo da su u *termičkoj* ravnoteži jedan sa drugim. Odatle sledi: dva sistema, koja nisu u kontaktu, nalazila bi se u termičkoj, ili šire, u termodinamičkoj ravnoteži ako bi bili u ravnoteži kada bi se doveli u kontakt.

Eksperimentima je pokazano da *dva sistema, koja su u termičkoj ravnoteži sa trećim, su takođe u termičkoj ravnoteži jedan sa drugim.*

Ova činjenica se iskazuje kao *nulti zakon termodinomike.*

Njegove posledice ispitaćemo na sistemima, recimo, S_1, S_2 i S_3 čiji su parametri stanja $\underset{1}{x_i}$, $\underset{2}{x_i}$ i $\underset{3}{x_i}$ respektivno. Parametri za sisteme koji su u termičkoj ravnoteži ne mogu biti nezavisni. Oni moraju zadovoljavati funkcionalnu relaciju

$$f(\underset{1}{x_i}; \underset{2}{x_i}) = 0,$$

ili, u skraćenom načinu obeležavanja,

$$f(1, 2) = 0. \tag{a}$$

Slično tome, ako su S_1 i S_3 u termičkoj ravnoteži, onda mora postojati funkcionalna relacija

$$g(1, 3) = 0. \tag{b}$$

Na isti način za S_2 i S_3 u termičkoj ravnoteži važi

$$h(2, 3) = 0. \tag{c}$$

Prema nultom zakonu termodinamike sledi da ako su bilo koje dve od relacija (a), (b) i (c) zadovoljene, onda je i treća zadovoljena. To je jedino moguće ako se ove jednačine mogu napisati u obliku

$$f(1, 2) = f_1 - f_2 = 0,$$

$$g(1, 3) = f_1 - f_3 = 0,$$

$$h(2, 3) = f_2 - f_3 = 0,$$

gde su

$$f_j = f_j(\underset{j}{x_i}), \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Očigledno da onda postoje funkcije f_1, f_2 i f_3 tako da je

$$f_1 = f_2 = f_3,$$

tj. te funkcije imaju iste vrednosti kada su sistemi u termičkoj ravnoteži. Vrednost ovih funkcija se naziva *emprijska temperatura* i označavaćemo je sa T. Tako određena emprijska temperatura

$$T = f_1(\underset{1}{x_i}), \tag{2.1}$$

očigledno je funkcija stanja.

Numerička vrednost T, pa prema tome i temperaturska skala, kojom se opisuje neko posebno stanje termičke ravnoteže, može biti birana proizvoljno. Zajedničko za sve skale je postojanje najniže granice. Ako toj granici propišemo vrednost 0 dobija se apsolutna temperatura skale kojom se meri *apsolutna temperatura* θ. Očigledno je

$$0 < \theta < \infty, \tag{2.2}$$

tj. tako definisana temperatura je uvek pozitivna. Jedinica merene temperature ostaje proizvoljna.

Primera radi navedimo Kelvinovu (Kelvin) i Celziusovu (Celsius) skalu. Za ove skale važi: 1K = 1°C pri čemu $0K$ odgovara −273,16°C.

Nulti zakon termodinamike, mada na prvi pogled trivijalan, povlači za sobom postojanje ravnotežne temperature kao termičkog svojstva sistema. Drukčije rečeno, telo može da ima samo jednu ravnotežnu temperaturu, jer bi u protivnom moglo biti u termičkoj ravnoteži sa druga dva tela različitih temperatura, što je suprotno nultom zakonu termodinamike. Bitno je, da, za razliku od količine toplote, temperaturu nije moguće izraziti preko mehaničkih jedinica i da se može posmatrati i kao funkcija stanja i kao promenljiva stanja. U drugom slučaju, prema (2.1), neka od promenljivih $\underset{1}{x_i}$ postaje funkcija stanja sistema S_1.

3. UNUTRAŠNJA ENERGIJA

Telo poseduje energiju u raznim oblicima. Jedan oblik njegove energije se ispoljava pri kretanju (kao celine) i poznat je pod imenom energije kretanja ili *kinetička energija*.

Za nas je od posebnog interesa energija nagomilana u sistemu. Takav vid energije se naziva *unutrašnja energija* i može biti mehaničkog, termičkog, hemijskog, elektromagnetnog i drugog porekla. Sa mikroskopskog stanovišta unutrašnja energija je zbir kinetičke energije translatornog i rotacionog kretanja molekula, oscilatorne energije elektrona u atomu i oscilatornog kretanja atoma u molekularnoj strukturi tela. Prema tome, tesno je povezana sa strukturom materijalnih tela i sa makroskopskog stanovišta koristi se kao termin za molekularnu energiju koju poseduje telo. Drugim rečima, *unutrašnja energija* je energija unutar sistema u koju ne ulaze kinetička energija sistema (kao celine). Znači, pod pojmom unutrašnje energije podrazumeva se razlika između ukupne energije sistema i energije njegovog kretanja, tj. kinetičke energije.

Tako definisana veličina je očigledno ekstenzivna i obeležavamo je sa E. Njenu specifičnu vrednost, koja se naziva *specifična unutrašnja energija*, označićemo sa ε tako da je

$$E = \int_v \varrho \varepsilon dv. \tag{3.1}$$

Mi ćemo se prvenstveno baviti unutrašnjom energijom mehaničkog i termičkog porekla. Tipičan primer jednog takvog vida unutrašnje energije je energija deformacije nagomilana u elastičnom deformabilnom telu.

Bitno je da se za unutrašnju energiju pretpostavlja da je funkcija stanja, tj. da je određena samo stanjem u kome se, u datom trenutku, sistem nalazi i da ne zavisi od puta kojim se sistem dovodi u to stanje. U protivnom, bilo bi moguće zamisliti mašinu koja bi se večno kretala (perpetuum mobile prve vrste), što je suprotno principu očuvanja energije. Zaista, ostajući u istom stanju telo bi moglo nagomilati dve različite količine unutrašnje energije, E i $E_2 > E_1$, tako da bi bilo moguće izdvojiti i koristiti višak energije $E_2 - E_1$, bez promene stanja sistema. Telo bi onda moglo da služi kao večni izvor energije, stvorene ni iz čega, što je nemoguće prema Prvom zakonu termodinamike ili zakonu održanja energije.

4. PRVI ZAKON TERMODINAMIKE ILI ZAKON BALANSA ENERGIJE

Efekat mehaničkog rada (mehanička snaga) je rad svih sila koje deluju na sistem u jedinici vremena. U slučaju ne-polarnog kontinuuma efekat mehaničkog rada W, određen je izrazom

$$W = \oint_{\mathscr{S}} \boldsymbol{t}_{(n)} \cdot \boldsymbol{v}\, da + \int_{v} \varrho \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v} dv. \tag{4.1}$$

Na osnovu teoreme o divergenciji može se površinski integral ovog izraza pretvoriti u zapreminski tako da je

$$\begin{aligned}\oint_{\mathscr{S}} \boldsymbol{t}_{(n)} \cdot \boldsymbol{v}\, da &= \oint_{\mathscr{S}} \boldsymbol{t}^k \cdot \boldsymbol{v}\, da_k \\ &= \int_{v} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}\, \boldsymbol{t}^k \cdot \boldsymbol{v}}{\partial x^k} dv \\ &= \int_{v} \left(\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}\, \boldsymbol{t}^k}{\partial x^k} \cdot \boldsymbol{v} + \boldsymbol{t}^k \cdot \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x^k} \right) dv,\end{aligned}$$

pri čemu smo koristili (IV. 4.6) i činjenicu da je $da_k = n_k da$. Tada je, s obzirom na $(4.8.4)_1$

$$W = \frac{D}{Dt} \int_{v} \frac{1}{2} \varrho\, \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}\, dv + \int_{v} \boldsymbol{t}^k \cdot \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x^k} dv. \tag{4.2}$$

Prvi integral desne strane ovog izraza predstavlja kinetičku energiju sistema K, tj.

$$K = \int_{v} \frac{1}{2} \varrho\, \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}\, dv, \tag{4.3}$$

dok podintegralna funkcija Φ drugog integrala, tj.

$$\Phi = \boldsymbol{t}^k \cdot \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x^k} \tag{4.4}$$

određuje veličinu koja se naziva *snaga napona* (po jedinici zapremine). Iz (4.2) se vidi da snaga napona predstavlja onaj deo mehaničke energije koji ne doprinosi kinetičkoj energiji. Saglasno definiciji unutrašnje energije, snaga napona doprinosi unutrašnjoj energiji sistema. Prema tome, ukupan efekat mehaničkog rada W utiče na promenu kinetičke energije sistema i doprinosi njegovoj unutrašnjoj energiji.

Snaga napona može se izraziti i u drugim, međusobno ekvivalentnim, oblicima

$$\Phi = t^{kl} \dot{x}_{l,k} = \boldsymbol{T} \cdot\cdot\, \boldsymbol{L} = \boldsymbol{T} : \boldsymbol{D}, \tag{4.5}$$

imajući u vidu da je tenzor napona $\boldsymbol{T}$ simetričan.

Toplotni efekat. U termodinamici toplota se definiše kao energija koja se prenosi između dva sistema ili sistema i okoline. Iz fizike je dobro poznato da se prenošenje toplote u materijalu odvija na tri različita načina: *zračenjem* ili *radijacijom*, *strujanjem* ili *konvekcijom* i *provođenjem* ili *kondukcijom*.

Termička radijacija predstavlja vid prenošenja toplote od jednog sistema na drugi kada sistemi nisu u kontaktu. Toplota se onda prenosi elektromagnetnim talasima, koji se prostiru brzinom svetlosti. U vakuumu brzina prostiranja c ovih talasa ne zavisi od talasne dužine i približno iznosi $3 \cdot 10^8$ m/s. Pri prostiranju kroz materijalnu sredinu njihova brzina zavisi od talasne dužine, mala je i iznosi c/n, gde je n indeks prelamanja (refrakcije) i za čvrsta tela dostiže vrednost reda 1.5 (npr. za staklo 1.66).

Kada su dva sistema odvojena materijalnom sredinom, koja je u čvrstom ili tečnom stanju, količina toplote preneta radijacijom je mala. U slučaju kada je materijalna sredina u gasovitom stanju, ovaj vid prenošenja toplote može biti značajan.

Poseban oblik prenošenja toplote kod fluida javlja se usled *strujanja* fluidne sredine — tečnosti ili gasa — kada materijalne čestice prenose materijalnu energiju koju poseduju sa jednog mesta na drugo. Kada do kretanja fluida dolazi samo zbog razlike gustine, izazvane nehomogenim temperaturnim poljem, kaže se za strujanje ili konvekciju da je *prirodna*. Ako do kretanja fluida dolazi iz bilo kog drugog razloga, za konvekciju se kaže da je *prinudna*. U svakom slučaju, nezavisno od toga da li se radi o prirodnom ili prinudnom strujanju fluida, kaže se da je reč o prenošenju toplote konvekcijom ili, kratko, da je reč o *toplotnoj konvekciji*.

Kod čvrstih tela najznačajniji vid prenošenja toplote je *provođenje* ili *kondukcija*. Ovaj vid prenošenja toplote se ispoljava samo kada je temperaturno polje u telu nehomogeno. Tada se čestice, koje imaju višu temperaturu i pripadaju toplijem delu tela, sudaraju sa sporijim česticama koje pripadaju hladnijem delu istog tela predajući im i jedan deo svoje kinetičke energije. Prema tome, smer toplotnog toka je uvek od dela tela više temperature ka delu tela niže temperature.

Razmena toplote između sistema i okoline predstavlja njihovu toplotnu interakciju. Kao i u opštem slučaju i ovde, u zavisnosti od dometa njenog delovanja, razlikujemo dve vrste interakcije: na kratkom i dugom rastojanju. Interakcija na kratkom rastojanju se odvija u tačkama granične površi sistema i u slučaju prenošenja toplote odvija se ili konvekcijom ili kondukcijom. Interakcija na dugom rastojanju obuhvata sistem i u slučaju toplotne razmene odvija se radijacijom. To znači da se zagrevanje tela javlja kao toplotni efekat ukupnog priliva toplote Q koji se sastoji iz površinskog i zapreminskog dela

$$Q = \oint_{\mathscr{S}} q da + \int_{v} \varrho h dv, \tag{4.6}$$

gde smo označili sa

$q = q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{n})$ — *toplotni fluks* meren po jedinici orijentisanog elementa površine spoljne normale $\boldsymbol{n}$ u tački $\boldsymbol{x}$ i jedinici vremena,

h — *priliv toplote* po jedinici mase u jedinici vremena,

Očigledno je da je $Q = 0$ za procese za koje je $q = 0$ na $\mathscr{S}$ i $h = 0$ u v. Tada nema razmene toplote između sistema i okoline i proces je, po definiciji, *adijabatski*.

Izražavajući efekat mehaničkog i toplotnog rada u istim jedinicama, a na osnovu principa ekvivalentnosti toplote i rada, možemo ukupan efekat izraziti kao njihov zbir $W + Q$.

Prvi zakon termodinamike. Na osnovu eksperimentalnih istraživanja konstatovano je, da pri cikličnim procesima, u opštem slučaju važi

$$\oint W dt \neq 0, \quad \oint Q dt \neq 0, \tag{4.7}$$

gde $\oint \cdot \, dt$ označava integral u toku jednog ciklusa. Prema tome, ne postoji funkcija rada za koju je $W dt$ potpun diferencijal. Slično tome, ne postoji ni funkcija toplote za koju je $Q\, dt$ potpun diferencijal. To znači da nije moguće govoriti o sadržaju rada ili toplote sistema u bilo kom trenutku vremena: rad i toplota nisu funkcije stanja ili osobine sistema. Oni postoje samo u obliku *razmene energije* sistema i njegove okoline, tj. nemaju individualni identitet u sistemu.

S druge strane, pokazano je da je

$$\oint (W + Q)\, dt = 0, \tag{4.8}$$

za svaki ciklus. To znači da postoji funkcija stanja U, koju ćemo zvati *ukupna energija* sistema, za koju je

$$dU = (W + Q)\, dt$$

totalni diferencijal. Tada je promena ukupne energije sistema u jedinici vremena određena izrazom

$$\dot{U} = W + Q, \tag{4.9}$$

kojim se izražava *prvi zakon termodinamike* ili *zakon balansa energije* u globalnom obliku:

Promena ukupne energije sistema u jedinici vremena jednaka je zbiru efekata rada svih sila koje deluju na sistem i toplotnog efekta ukupnog priliva toplote.

Kako je prema definiciji ukupne energije $U = K + E$ može se prvi zakon termodinamike u globalnom obliku izraziti u obliku

$$\dot{K} + \dot{E} = W + Q. \tag{4.10}$$

Ovaj izraz, ako se iskoristi (4.2—6) i

$$\dot{E} = \int_v \varrho \dot{\varepsilon} dv,$$

postaje

$$\int_v \varrho \dot{\varepsilon} dv = \int_v \boldsymbol{T} : \boldsymbol{D}\, dv + \oint_{\mathscr{S}} q da + \int_v \varrho h dv. \tag{4.11}$$

Prisustvo samo jednog površinskog integrala u ovoj relaciji i činjenica da ona važi za proizvoljni element tela, daje nam mogućnost da izvedemo potpunije zaključke o funkcionalnom obliku toplotnog fluksa $q = q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{n})$. U tom cilju, primenimo (4.11) na elementarni tetraedar, kao na slici 28 (str. 120), pod pretpostavkom da su $\varrho \dot{\varepsilon}$, $\boldsymbol{T} : \boldsymbol{D}$ i ϱh ograničene veličine i da je q neprekidna funkcija $\boldsymbol{x}$ i $\boldsymbol{n}$. Neka su $-q_i$ $(i = 1, 2, 3)$ toplotni fluksevi strana tetraedra čiji su jedinični vektori spoljnih normala $-\boldsymbol{e}_i$. Primenjujući dalje isti postupak kao i u slučaju određivanja vektora napona $\boldsymbol{t}_{(n)}$, lako se pokazuje da je

$$q = q_k n_k = \boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{n} \tag{4.12}$$

gde je po definiciji $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}(q_k)$ nezavisno od $\boldsymbol{n}$. Tako određen vektor $\boldsymbol{q}$ naziva se vektor *toplotnog fluksa*. Važno je uočiti da u zavisnosti od smera vektora toplotnog fluksa zavisi i smer prenošenja toplotne energije. Na način kako smo ovde definisali q_k, vidi se da će se energija prenositi na posmatrano telo kroz njegovu graničnu površ $\mathcal{S}$ ako je $\boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{n} \geqslant 0$, tj. ako je $\boldsymbol{q}$ usmereno izvan tela. Sa fizičkog stanovišta, to znači da je vektor toplotnog fluksa usmeren od tela niže temperature ka telu više temperature.

Iz (4.12) se vidi da je toplotni fluks q linearna funkcija jediničnog vektora spoljne normale $\boldsymbol{n}$, što nam omogućava da se, pomoću teoreme o divergenciji, jedini površinski integral u (4.11) pretvori u zapreminski. Tada (4.11) glasi

$$\int_v [\varrho\dot{\varepsilon} - \boldsymbol{T} : \boldsymbol{D} - \operatorname{div} \boldsymbol{q} - \varrho h]\, dv = 0,$$

što važi za proizvoljno v ako i samo ako je podintegralna funkcija jednaka nuli, tj.

$$\varrho\dot{\varepsilon} = \boldsymbol{T} : \boldsymbol{D} + \operatorname{div} \boldsymbol{q} + \varrho h, \tag{4.13}$$

ili u komponentalnom obliku

$$\varrho\dot{\varepsilon} = t^{kl} d_{kl} + q^k_{,k} + \varrho h. \tag{4.14}$$

Ova jednačina predstavlja *zakon balansa energije* ili *prvi zakon termodinamike u lokalnom obliku.*

Pozitivan znak ispred $\operatorname{div} \boldsymbol{q}$ u (4.13) je uslovio usvajanje navedenog smera za vektor toplotnog fluksa $\boldsymbol{q}$. (U literaturi se koristi i suprotna orijentacija za $\boldsymbol{q}$ što dovodi, očigledno, i do promene znaka u (4.13) kao i u (4.14) ispred člana $\operatorname{div} \boldsymbol{q}$. Tako orijentisan vektor $\boldsymbol{q}$ je usmeren od tela više temperature ka telu niže temperature).

Posebno podvlačimo da je lokalni oblik prvog zakona termodinamike izveden bez ikakvih ograničenja na brzinu odvijanja termodinamičkih procesa i da važi nezavisno od toga da li je u pitanju reverzibilan, ireverzibilan ili kvazistatički proces. To se mora imati na umu s obzirom na činjenicu da jednačina (4.14) igra centralnu ulogu u dokazu egzistencije entropije, a kasnije i neravnotežne temperature.

5. POTENCIJALNA ENERGIJA. ENERGIJA DEFORMACIJE

Iz (4.1), (4.2) i (4.3) vidi se da je

$$\dot{K} = \oint_{\mathcal{S}} \boldsymbol{t}_{(n)} \cdot \boldsymbol{v}\, da + \int_v \varrho \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v}\, dv - \int_v \boldsymbol{t}^k \cdot \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x^k}\, dv, \tag{5.1}$$

tj. da je promena kinetičke energije u jedinici vremena jednaka zbiru efekta rada zapreminskih sila i vektora napona na granici tela umanjenog za snagu napona. Ovaj izraz se, u nekim slučajevima, može pisati u obliku pogodnijem za interpretaciju, što zahteva analizu svakog integrala posebno.

Takav slučaj je kada na telo deluju zapreminske sile $\boldsymbol{f}$ koje imaju potencijal $\pi(\boldsymbol{x})$, tj. za koje je

$$f_k = -\pi_{,k}. \tag{5.2}$$

Tada je

$$\int_v \varrho \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v}\, dv = -\int_v \varrho \pi_{,k} \dot{x}^k dv = -\frac{D}{Dt}\int_v \varrho \pi dv, \tag{5.3}$$

s obzirom na (3.13.7). Veličinu Π, definisanu sa

$$\Pi = \int_v \varrho \pi dv, \tag{5.4}$$

nazivamo *potencijalna energija sistema*. Pomoću ove veličine, kao i (5.3), moguće je (5.1) izraziti u obliku

$$\dot{K} + \dot{\Pi} = \oint_{\mathscr{S}} \boldsymbol{t}_{(n)} \cdot \boldsymbol{v}\, da - \int_v \boldsymbol{t}^k \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x^k} dv. \tag{5.5}$$

Prema tome, ukupna promena kinetičke i potencijalne energije se izražava u funkciji rada napona.

Sam izraz (5.1) je u obliku opšteg zakona balansa (3.14.1) i može se dodatnom pretpostavkom o dekompoziciji vektora napona dalje uprostiti. U tom cilju pretpostavimo da se tenzor napona može rastaviti na zbir dva simetrična tenzora

$$\boldsymbol{T} = {}_E\boldsymbol{T} + {}_D\boldsymbol{T}, \tag{5.6}$$

i to tako da se ${}_E\boldsymbol{T}$ može izvesti, analogno potencijalnim silama, iz funkcije potencijala $\sigma(x^k_{;K})$, koja se naziva *energija deformacije*, prema formuli

$${}_E T_k^{\ K} = \varrho_0 \frac{\partial \sigma}{\partial x^K_{;k}}. \tag{5.7}$$

Tako određen Piola-tenzor napona ${}_E\boldsymbol{T}$ predstavlja povratan ili reverzibilan deo napona $\boldsymbol{T}$ i naziva se *elastični napon*, dok ${}_D\boldsymbol{T}$ predstavlja njegov nepovratni ili disipativni deo.

Definišući ukupnu energiju deformacije Σ sa

$$\Sigma = \int_v \varrho \sigma dv, \tag{5.8}$$

i uzimajući u obzir da je

$$\varrho \dot{\sigma} = {}_E\boldsymbol{T} : \boldsymbol{D} = {}_E t^{kl} \dot{x}_{k,l}, \tag{5.9}$$

lako je pokazati, koristeći i (4.4) i (4.5) da je

$$\int_v \boldsymbol{t}^k \cdot \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x^k} dv = \int_v \boldsymbol{T} : \boldsymbol{D}\, dv = \dot{\Sigma} + \int_v {}_D\boldsymbol{T} : \boldsymbol{D}\, dv.$$

Smenom ovog izraza u (5.5) dobijamo

$$\dot{K} + \dot{\Pi} + \dot{\Sigma} = \oint_{\mathscr{S}} \boldsymbol{t}_{(n)} \cdot \boldsymbol{v}\, da - \int_v {}_D\boldsymbol{T} : \boldsymbol{D}\, dv. \tag{5.10}$$

Odavde sledi *prva teorema konzervacije mehaničke energije* pod pretpostavkom da desna strana iščezava. Tačnije, ako je:

1. vektor napona upravan na brzinu u tačkama granice tela,
2. efekat rada disipativnog napona nula i
3. ukupan napon zbir elastičnog napona, koji zadovoljava (5.7), i disipativnog napona,

onda je

$$K + \Pi + \Sigma = \text{const.} \tag{5.11}$$

Važno je napomenuti da je dekompozicija (5.6) uvek moguća na beskonačno mnogo načina. Pri tome napon disipacije, u opštem slučaju, neće posedovati posebno proste osobine. Interesantan je slučaj kada je

$$\sigma(x^k_{;K}) = \sigma(J) = \sigma\left(\frac{\varrho_0}{\varrho}\right). \tag{5.12}$$

Tada je, s obzirom na (2.4.7) i (3.13.4),

$$\begin{aligned} {}_ET_k^{\ K} &= \varrho_0 \frac{\partial\sigma}{\partial J} \frac{\partial J}{\partial x^k_{;K}} = \varrho_0 \frac{\partial\sigma}{\partial J} JX^K_{,k} \\ &= \frac{\partial\sigma}{\partial v} JX^K_{;k}, \end{aligned}$$

gde je v specifična zapremina ili recipročna gustina definisana kao zapremina po jedinici mase.

S obzirom na (4.9.8) prethodni izraz nam daje

$$ {}_Et_l^k = -\bar{u}\delta_l^k, \tag{5.13}$$

gde je $\bar{u} = -\dfrac{\partial\sigma}{\partial v} = \bar{u}(v)$ *elastični hidrostatički pritisak*. Znači elastični napon je hidrostatički. Obrnuto, ako je ${}_E\boldsymbol{T} = -\bar{u}\boldsymbol{I}$ i $\bar{u} = \bar{u}(v)$, možemo izvesti (5.12). U tom slučaju je $\sigma = -\int \bar{u}dv$, a ukupna energija deformacije

$$\Sigma = -\int_V \left(\int \bar{u}\, dv\right) dV. \tag{5.14}$$

U slučaju kada je kretanje izohorično, tj. kada je $I_d = \dot{x}^k_{,k} = 0$, efekat rada hidrostatičkog pritiska je nula, jer je

$$ {}_Et_l^k\, \dot{x}^l_{,k} = -\bar{u}\dot{x}^k_{,k} = 0.$$

Uzimajući to u obzir, kao i prethodne rezultate, dolazimo do *druge teoreme konzervacije mehaničke energije*. Tada, ako u odnosu na prvu teoremu zadržimo uslove 1 i 2, a 3. uslov zamenimo sa:

3a. ukupni napon je zbir elastičnog i disipativnog napona,

3b. kretanje je ili izohorično ili je pritisak funkcija samo gustine,

sledi (5.11). Ukupna elastična energija je data sa (5.14) i nula je kada je kretanje izohorično.

Prvi uslov u obe teoreme se odnosi na površinski integral u (5.1). On je zadovoljen u slučaju stacionarne granične površi kao materijalne površi na koju je $\boldsymbol{t}_{(n)}$ upravno. Za takve površi je njena normalna komponenta brzine, u_n, jednaka nuli, što s obzirom na (4.4.11) i Lagranžovu teoremu o materijalnim površima, povlači za sobom da je normalna komponenta brzine $\dot{x}_n$ nula na takvoj površi.

Moguć je i slučaj kada se ovaj površinski integral može izraziti kao materijalni izvod drugog površinskog integrala. Npr.: ako primenimo granične uslove (4.4.13) na stacionarnu površ $\mathscr{S}$, pod pretpostavkom da je $p_k = -b_{,k}$, imamo

$$\oint_{\mathscr{S}} \boldsymbol{t}_{(n)} \cdot \boldsymbol{v}\, da = \oint_{\mathscr{S}} t^k_{(n)}\, \dot{x}_k da = -\dot{B},$$

gde je $B = \oint_{\mathscr{S}} b\, da$ i $b = b(\boldsymbol{x})$.

Tada (5.5) glasi

$$\dot{K} + \dot{\Pi} + \dot{B} = -\int_v \Phi\, dv, \tag{5.15}$$

s obzirom na (4.4). Uz dati uslov, da je desna strana (5.15) jednaka nuli, dobijamo novi zakon mehaničke energije.

U svakom slučaju, dosadašnja analiza je pokazala da uslovi 3. i 3a. mogu biti uvek trivijalno zadovoljeni. Isto tako se vidi da postoje mnogi slučajevi u kojima je uslov 1 zadovljen. Međutim, drugi uslovi su zadovoljeni samo u ograničenom broju slučajeva. Navodeći ove teoreme i uslove pod kojima one važe namera nam je bila da pokažemo da se zakoni konzervacije, kao npr. (5.11), ne mogu očekivati u svakoj tipičnoj situaciji u mehanici kontinuuma, gde je disipacija energije pravilo a ne izuzetak.

Uzimajući u obzir termičke efekte situacija postaje daleko složenija.

6. PRINCIP VIRTUALNOG RADA

Varijacione metode imaju veliku ulogu u mehanici kontinuuma. Posebno je značajan princip virtualnog rada, poznat i pod imenom *princip virtualnog pomeranja*. Mada po formi sličan izrazu (4.1), on stvarno ne predstavlja zakon energije jer je virtualan rad fiktivnog karaktera izračunat za skup *dopustivih sila i napona*, za koje pretpostavljamo da ostaju konstantni u toku rada na skupu *kinematički dopustivih pomeranja*. To znači da naponi i pomeranja ne moraju da budu stvarni naponi i pomeranja, tj. ne moraju da odgovaraju naponima i pomeranjima realnog fizičkog tela. Takvi naponi i pomeranja su nezavisni za razliku od napona i pomeranja pri stvarnom kretanju na osnovu kojih se određuju tenzori deformacija, a koji su povezani sa tenzorom napona preko konstitutivnih relacija.

Podsetimo se da je u mehanici sistema materijalnih tačaka i krutih tela princip virtualnih pomeranja predstavljao alternativan način za određivanje jednačina kretanja. Mi ćemo videti da je to slučaj i u mehanici deformabilnih tela.

Navodeći (4.1) mi smo se prećutno ograničili na deformabilno telo koje se nalazi samo pod dejstvom mehaničkih efekata, uključujući i efekte inercijalnih sila. Drukčije rečeno, mi ćemo razmatrati princip virtualnog rada koji se naziva Lagranž-Dalamberov (Lagrange-D'Alambert) princip.

Neka sa δx_k obeležimo virtualno pomeranje, onda (4.1) daje izraz za virtualan rad δW sila $\boldsymbol{t}_{(n)}$ i $\boldsymbol{f}$ na površini $\mathscr{S}$ i zapremini v tela respektivno. Uzimajući u obzir (4.4.13) i koristeći komponentalnu reprezentaciju u cilju veće preglednosti, imamo

$$\delta W = \oint_{\mathscr{S}} p^k \delta x_k da + \int_v \varrho f^k \delta x_k dv, \tag{6.1}$$

ili

$$\delta W = \oint_{\mathscr{S}} t^{kl} \delta x_k n_l da + \int_v \varrho f^k \delta x_k dv.$$

Pomoću teoreme o divergenciji možemo površinski integral ovog izraza transformisati tako da je

$$\begin{aligned} \oint_{\mathscr{S}} t^{kl} \delta x_k da_l &= \int_v (t^{kl} \delta x_k)_{,l}\, dv \\ &= \int_v t^{kl}_{,l}\, \delta x_k dv + \int_v t^{kl} \delta x_{k,l}\, dv \\ &= \int_v \varrho\, (\ddot{x}^k - f^k)\, \delta x_k dv + \int_v t^{kl} \delta x_{k,l}\, dv, \end{aligned} \tag{6.2}$$

i

$$\delta W = \int_v \varrho \ddot{x}^k \delta x_k dv + \int_v t^{kl} \delta x_{k,l}\, dv.$$

Iz ovog izraza i (6.1) dobijamo izraz

$$\int_v \varrho \ddot{x}^k \delta x_k dv - \oint_{\mathscr{S}} p^k \delta x_k da - \int_v [\varrho f^k \delta x_k - t^{km} \delta x_{k,m}]\, dv = 0, \tag{6.3}$$

kojim se izražava *Lagranž-Dalamberov princip:*

Rad svih sila na virtualnom pomeranju je jednak nuli.

Važno je napomenuti da smo za njegovo izvođenje osim (4.4.13) koristili prvi Košijev zakon (4.8.8). Pokazaćemo da i obrnuto važi, tj. da iz (6.3) slede (4.4.13) i (4.4.8).

Ako ograničimo virtualna pomeranja možemo izbeći neposredno korišćenje komponenata tenzora napona u principu virtualnog rada, a na osnovu ***teoreme Piola (Piola)*** koja tvrdi:

$$\int_v \varrho \ddot{x}^k \delta x_k\, dv = \oint_{\mathscr{S}} p^k \delta x_k da + \int_v \varrho f^k \delta x_k dv \tag{6.4}$$

što je ekvivalentno prvom Košijevom zakonu (4.8.8) za virtualne translacije i drugom Košijevom zakonu (4.8.10) za kruta virtualna pomeranja.

Dokaz: U slučaju virtualnih translacija virtualno pomeranje je ograničeno uslovom $\delta x_k = \text{const.}$ ili $\delta x_{k,m} = 0$.

Koristeći Lagranžove množitelje veza $-t^{km}$ možemo sada (6.4) napisati u obliku

$$\int_v \varrho \ddot{x}^k \delta x_k dv = \oint_{\mathscr{S}} p^k \delta x_k da + \int_v (\varrho f^k \delta x_k - t^{km} \delta x_{k,m})\, dv,$$

koji je identičan sa (6.3) i kome su varijacije δx^k proizvoljne. Pomoću $(6.2)_2$ ovaj izraz, posle izvesnog grupisanja članova, postaje

$$\int_v [\varrho(\ddot{x}^k - f^k) - t^{km}{}_{,m}]\,\delta x_k dv + \oint_{\mathscr{S}} (t^{km}n_m - p^k)\,\delta x_k da = 0.$$

S obzirom na proizvoljnost varijacija δx_k ova jednakost biće zadovoljena ako i samo ako su podintegralne funkcije jednake nuli. Očigledno je da tada dobijamo (4.8.8.) i (4.4.13), tj. prvi Košijev zakon i granične uslove po naponu.

U slučaju krutih virtualnih pomeranja imamo ograničenja $\delta x_{(k,m)} = 0$ kojima takođe odgovara $-t^{km}$ kao Lagranžov množitelj veze. Proširujući (6.4) izrazom

$$-\int_v t^{km}\delta x_{(k,m)}dv$$

i ponavljajući prethodni postupak dobijamo drugi Košijev zakon (4.8.10), tj da je $t^{kl} = t^{lk}$. □

Napomena 1.

U dosadašnjem izlaganju smo pomeranja obeležavali sa u_k. Očigledno je da je njegova varijacija δu_k. Ali, s obzirom na relaciju $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{P}$ sledi da je $\delta x_k = \delta u_k$. Prema tome, u svim izrazima ovog odeljka može se ravnopravno koristiti i δx_k i δu_k za virtualna pomeranja. Uobičajeno je da se sa δu_k obeleže virtualna pomeranja u slučaju infinitezimalnih deformacija. Tada, za slučaj ravnotežnog stanja, princip virtualnog rada (6.3) glasi

$$\int_v t^{km}\delta e_{km}dv = \int_{\mathscr{S}} p^k\delta u_k da + \int_v \varrho f^k \delta u_k dv, \tag{6.5}$$

gde je

$$\delta e_{km} \equiv \delta u_{(k,m)} \equiv \frac{1}{2}(\delta u_{k,m} + \delta u_{m,k}) \text{ i } \delta u_{k,m} = (\delta u_k)_{,m}$$

Napomena 2.

S obzirom na to da se princip virtualnog rada široko koristi u teoriji elastičnosti, princip je često bio formulisan u obliku koji važi samo za slučaj kada postoji funkcija elastične energije. Takav specijalan oblik je umanjivao opštost principa. Formulisan na ovde iznet način moguće ga je primeniti i u slučaju npr. plastičnih deformacija.

Napomena 3.

U mehanici deformabilnih tela postoje i drugi principi kao što su: Hamiltonov (Hamilton) princip, Lagranžov (Lagrange) princip, princip virtualnog rada pod dejstvom prinuda itd. Te principe nismo ovde razmatrali i čitaoca upućujemo za detaljni pregled na knjigu CFT.

7. POVRŠ DISKONTINUITETA I PRVI ZAKON TERMODINAMIKE

U cilju jasnije i potpunije interpretacije fizičkog karaktera određenih veličina i pojmova prvi zakon termodinamike smo razmatrali u slučaju kada materijalna zapremina v tela ne sadrži površ diskontinuiteta.

Prisustvo površi diskontinuiteta dovodi do dodatnih relacija poznatih kao uslovi skoka. Za njihovo izvođenje koristićemo prvi zakon termodinamike u obliku (4.10), koji pomoću (3.1), (4.1), (4.3), (4.6) i (4.12) glasi

$$\frac{D}{Dt}\int_v \varrho\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}+\varepsilon\right)dv = \oint_{\mathscr{S}}(\boldsymbol{t}^k\cdot\boldsymbol{v}+q^k)\,da_k + \int_v \varrho(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}+h)\,dv. \quad (7.1)$$

Ova relacija je napisana u obliku opšteg zakona balansa (3.14.1). Identifikujući ψ sa $\frac{1}{2}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}+\varepsilon$, $\boldsymbol{\Phi}^k$ sa $\boldsymbol{t}^k\cdot\boldsymbol{v}+q^k$ i p sa $\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}+h$ i primenjujući (3.14.7) imamo

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}\,(\boldsymbol{t}^k\cdot\boldsymbol{v}+q^k)}{\partial x^k}+\varrho\left[(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}+h)-\overline{\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}+\varepsilon\right)}^{\boldsymbol{\cdot}}\right]=0, \qquad \text{u } v-\sigma$$

$$\left[\!\left[\boldsymbol{t}_{(n)}\cdot\boldsymbol{v}+\boldsymbol{q}+\varrho\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}+\varepsilon\right)(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{n}\right]\!\right]=0, \qquad \text{na } \sigma.$$

Posle sređivanja ovih izraza, korišćenjem $(\mathrm{IV}.8.4)_1$, sledi da je

$$\varrho\dot{\varepsilon}=\boldsymbol{t}^k\cdot\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial x^k}+q^k_{,k}+\varrho h, \qquad \text{u } v-\sigma$$

$$(7.2)$$

$$\left[\!\left[\varrho\left(\varepsilon+\frac{1}{2}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}\right)(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{n}-\boldsymbol{t}_{(n)}\cdot\boldsymbol{v}-\boldsymbol{q}\right]\!\right]=0, \qquad \text{na } \sigma$$

ili

$$\varrho\dot{\varepsilon}=t^{kl}v_{l,k}+q^k_{,k}+\varrho h, \qquad \text{u } v-\sigma$$

$$(7.3)$$

$$\left[\!\left[\varrho\left(\varepsilon-\frac{1}{2}v^2\right)(v^k-u^k)-t^{kl}v_l-q^k\right]\!\right]n_k=0, \qquad \text{na } \sigma.$$

Očigledno je da (7.2) i $(7.3)_1$ istovetno sa (4.13) i da predstavljaju zakon balansa energije u materijalnoj oblasti $v-\sigma$. Zbog toga se zadržavamo detaljnije na $(7.3)_2$ što predstavlja *uslove diskontinuiteta energije* u nekim specijalnim slučajevima.

a) ***Površ diskontinuiteta je materijalna površ***

U tom slučaju je $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}$ *i* $(7.3)_2$ *glasi*

$$[\![t^{kl}v_l+q^k]\!]\,n_k=0 \qquad \text{na } \sigma, \quad (7.4)$$

tj. skok efekta rada površinskih sila kroz, materijalnu površ se uravnotežuje toplotnim efektom.

U slučaju kada je brzina materijalnih čestica neprekidna, (7.4) *se dalje uprošćuje, s obzirom na* (4. 8. 15), *i postaje*

$$[\![q^k]\!]\,n_k=[\![q]\!]=0. \quad (7.5)$$

Ovaj izraz iskazuje neprekidnost toplotnog efekta q *kroz* $\sigma(t)$.

b) ***Površ diskontinuiteta se poklapa sa graničnom površi tela***

U tom slučaju je $\varrho^+ = 0$ *i* $\boldsymbol{v}^- = \boldsymbol{u}$. *Uslovi skoka* (7.3)$_2$ *se ponovo svode na* (7.4), *koje pišemo u razvijenom obliku*

$$t^-_{kl} n^k v^{-l} + q^-_k n^k = t^+_{kl} n^k v^{+l} + q^+_k n^k.$$

Koristeći (4. 4. 13), (4.12) *i uvodeći oznake*

$$\begin{aligned} t^+_{kl} n^k &= p_l; \quad q^+_k n^k = q_{(n)}, \\ \bar{t}_{kl} &= t_{kl}; \quad \bar{q}_k = q_k; \quad v^-_l = v_l, \end{aligned} \tag{7.6}$$

prethodne relacije postaju

$$(t_{kl} v^l + q_k)\, n^k = p_k \cdot v^{+k} + q_{(n)}. \tag{7.7}$$

Ova jednačina određuje ***granične uslove za fluks (protok) energije*** *kroz graničnu površ tela. Ona tvrdi da se energija spoljašnjih sila i toplotnog fluksa (u jedinici vremena) uravnotežava energijom unutrašnjih površinskih sila i toplotnog fluksa za graničnu površ tela.*

U slučaju da je brzina $\boldsymbol{v}$ *neprekidna* (7.7) *se svodi na granični uslov*

$$q_k n^k = q_{(n)}, \tag{7.8}$$

koji sadrži samo toplotni fluks.

U nekim slučajevima, kao npr. kada je reč o dinamičkim problemima prostiranja talasnih poremećaja, pogodnije je zakon balansa energije ili prvi zakon termodinamike i odgovarajuće uslove skoka izraziti u odnosu na referentnu konfiguraciju. U tom slučaju koristimo (3.14.14) (identifikujući Φ^K sa $JX^K_{,k}(\boldsymbol{t}^k \cdot \boldsymbol{v} + q^k)$ saglasno (3.14.12)) tako da je

$$\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{G}\, J X^K_{,k} (\boldsymbol{t}^k \cdot \boldsymbol{v} + q^k)}{\partial X^K} + \varrho_0 \left[\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v} + h - \left(\dot{\varepsilon} + \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}} \right) \right] = 0 \qquad \text{u } V - \Sigma$$

$$\left[\!\left[J X^K_{,k} (\boldsymbol{t}^k \cdot \boldsymbol{v} + q^k)\, N_K + \varrho_0 U_N \left(\varepsilon + \frac{1}{2} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v} \right) \right]\!\right] = 0 \qquad \text{na } \Sigma.$$

Koristeći (4.9.1)$_1$, (4.9.2) i definišući *vektor toplotnog fluksa u referentnoj konfiguraciji* $\underset{\sim}{\boldsymbol{q}}\,(\underset{\sim}{q}^K)$, prema (3.14.12), sa

$$\underset{\sim}{q}^K = J X^K_{,k} q^k \quad \text{ili} \quad \underset{\sim}{\boldsymbol{q}} = J \boldsymbol{F}^{-1} \boldsymbol{q} \tag{7.9}$$

možemo prethodne izraze svesti na

$$\begin{aligned} \varrho_0 \dot{\varepsilon} &= \boldsymbol{T}^K \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial X^K} + \operatorname{Div} \underset{\sim}{\boldsymbol{q}} + \varrho_0 h, \qquad \text{u } V - \Sigma \\ &\left[\!\left[(\boldsymbol{T}^K \cdot \boldsymbol{v} + \underset{\sim}{q}^K)\, N_K + \varrho_0 U_N \left(\varepsilon + \frac{1}{2} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v} \right) \right]\!\right] = 0 \qquad \text{na } \Sigma. \end{aligned} \tag{7.10}$$

Ovim jednačinama se i iskazuju prvi zakoni termodinamike ili zakoni balansa energije i odgovarajući skok energije u referentnoj konfiguraciji.

Izraženo u komponentalnom obliku te jednačine glase

$$\varrho_0 \dot{\varepsilon} = T^{lK} v_{l;K} + q^K_{,K} + \varrho h_0 \qquad \text{u } V - \Sigma,$$

$$\left[\!\left[(T^{kK} v_k + q^K) N_K + \varrho_0 U_N \left(\varepsilon + \frac{1}{2} v^2\right) \right]\!\right] = 0 \qquad \text{na } \Sigma, \tag{7.11}$$

ili pomoću Piola-Kirhofovog tenzora druge vrste, s obzirom na (4.9.16) i (3.58)

$$\varrho_0 \dot{\varepsilon} = T^{LK} \dot{E}_{LK} + q^K_{,K} + \varrho_0 h \qquad \text{u } v - \Sigma,$$

$$\left[\!\left[(T^{KL} v_k x^k_{,L} + q^K) N_K + \varrho_0 U_N \left(\varepsilon + \frac{1}{2} v^2\right) \right]\!\right] = 0 \qquad \text{na } \Sigma. \tag{7.12}$$

8. ENTROPIJA I DRUGI ZAKON TERMODINAMIKE

Fizičke osnove. Prvi zakon termodinamike, kao što smo istakli, predstavlja zakon održanja energije. Ukazuje na oblike pretvaranja energije (toplotne u mehaničku i obrnuto) kao i na njihove veze sa osobinama sistema. To možemo da ilustrujemo na sledećim primerima:

a) Točak, koji se rotira, zaustavlja se usled trenja u ležištima. Ako je ceo sistem izolovan, tada unutrašnja energija ostaje u sistemu izazivajući porast temperature. Na taj način se celokupna kinetička energija sistema pretvorila u unutrašnju energiju.

b) U termički izolovanom sistemu, koji se sastoji od komada toplog metala stavljenog u sud sa vodom, temperatura metala će da opada, a vode da raste sve dok se njihove temperature ne izjednače. Tada je količina toplote, koju je odao komad metala, jednak količini toplote koju je voda primila.

c) Idealan gas se slobodno širi kroz ventil u prazan sud. U takvom procesu konačna zapremina je veća, pritisak manji, a temperatura ostaje konstantna.

U svakom od ovih procesa, na osnovu prvog zakona termodinamike, ukupna energija sistema, koji učestvuje u procesu, ostaje očuvana.

Očigledno je da bi ukupna energija sistema u svakom od navedenih primera ostala očuvana ako bi se procesi spontano odvijali obrnutim redom. U prvom primeru točak i ležište bi se hladili sve dok točak ne bi počeo da se obrće dobijajući svoju početnu kinetičku energiju. U drugom primeru komad metala bi se zagrevao, a voda hladila sve dok se ne bi uspostavila prvobitna razlika u temperaturi. U trećem slučaju, gas bi se vraćao kroz ventil, sabijao se u početnu zapreminu. Međutim, takvi spontani procesi se ne odvijaju. Pitanje je zašto. Očigledno je da nam na to pitanje ne može odgovoriti prvi zakon termodinamike. To znači da mora da postoji neki drugi prirodni princip, koji se iz prvog principa ili zakona održanja energije ne može izvesti, na osnovu koga se može odrediti smer odvijanja navedenih procesa u izolovanim sistemima. Mogli bi se navesti i drugi primeri kojima se ilustruje smer odvijanja prirodnih procesa. Takav je slučaj sa balonom koji, pri povećanoj temperaturi, puca usled širenja gasa koji sadrži. Gas odlazi u atmosferu. Nikad nije uočen obrnut proces, tj. da se gas spontano ponovo vraća u balon. Kocka leda se topi u vodi, ali obrnut spontani proces nikada nije uočen, itd.

Navodeći ove i druge, po svojoj prirodi međusobno različite primere, postavlja se pitanje da li je moguće naći neku karakterističnu veličinu koja bi bila zajednička za sve ove „nemoguće" procese. Ta veličina ne može da bude unutrašnja energija, jer je u izolovanim sistemima konstantna.

Klauzijus (Clausius) je pokazao da postoji takva funkcija, da je kao i unutrašnja energija funkcija samo stanja sistema i da raste ili ostaje konstantna u svakom mogućem procesu do kojeg dolazi u izolovanom sistemu. Nazvao ju je entropija sistema prema grčkoj reči $\varepsilon\nu\tau\varrho\omega\pi\acute{\eta}$ što znači pretvaranje ili preobražaj.

Klauzijus je formulisao drugi zakon termodinamike na način koji ukazuje na pravac prenošenja toplote između dva sistema na različitim temperaturama:

> *Toplota se nikada ne prenosi spontono (sama od sebe) od tela niže na telo više temperature.*

To ne znači da se toplota ne može preneti sa hladnijeg na topliji sistem — primer toga su rashladni uređaji. Ali u tom slučaju se mora utrošiti određeni rad s obzirom da u navedenom smeru ne dolazi do spontanog prenošenja toplote.

Druga alternativna formulacija drugog zakona termodinamike u osnovi ima proces pretvaranja toplote u rad. Prvi zakon uspostavlja ekvivalentnost između toplote i rada i ne nameće nikakva ograničenja na proces njihovog uzajamnog pretvaranja. Iskustvo pokazuje da se rad može u potpunosti pretvoriti u toplotu. Primer toga procesa je naveden pod a). Međutim, obrnuti proces, proces pretvaranja toplote u rad, podvrgnut je konačnim ograničenjima. Nemoguće je, npr. pretvoriti u rad energiju okeana korišćenjem njegove toplotne energije pod uslovom da se ne dešavaju jednovremeno promene u njegovoj okolini.

Već je ranije bilo reči o mašini koja bi mogla da stvara rad ni iz čega i koja je bila nazvana perpetuum mobile prve vrste. Na osnovu prvog zakona termodinamike ustanovljena je nemogućnost konstrukcije takve mašine.

Viljem Osvald (Wilhelm Ostwald) je uveo koncept perpetuum mobila druge vrste, tj. mašine koja bi mogla da vrši rad samo hlađenjem tela. Perpetuum mobile druge vrste ne bi bio u suprotnosti sa stavom prvog zakona termodinamike, jer bi izvodio rad na račun unutrašnje energije izvora, ali sa praktičnog stanovišta bi imao isti karakter kao i perpetuum mobile prve vrste, jer bi mogao da koristi neiscrpnu količinu toplote energije koja se nalazi u okolini svakog sistema. Svi pokušaji da se konstruiše takva mašina, a koji nisu doveli do uspeha, doveli su do stava:

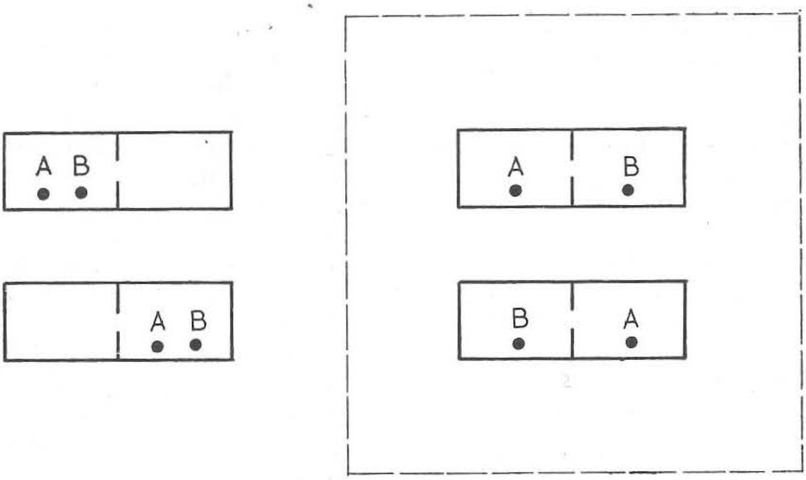
> *Nije moguć nikakav proces koji bi imao kao posledicu samo oduzimanje toplote iz jednog izvora (toplote) uz vršenje ekvivalentne količine rada.*

On predstavlja Kelvinovu (Lord Kelvin) ili Kelvin-Plankovu (Lord Kelvin-M. Planc) formulaciju drugog zakona termodinamike.

9. ENTROPIJA I VEROVATNOĆA, UREĐENA I NEUREĐENA STANJA

Kao što je prvi zakon termodinamike vezan za koncept unutrašnje energije, tako je i drugi zakon termodinamike povezan sa konceptom *entropije*. Međutim, predstava o entropiji nije tako lako prihvatljiva kao kada je u pitanju predstava o mehaničkim veličinama. Zbog toga je, a u cilju sticanja predstave o fizičkom značenju pojma entropije, nužno posmatrati telo ne sa kontinualnog nego sa molekularnog stanovišta.

U statističkoj mehanici entropija stanja se odnosi na verovatnoću događanja toga stanja među svim mogućim stanjima. Nađeno je da je veća verovatnoća da se promena stanja desi u smeru veće neuređenosti sistema kada je posmatrani sistem izolovan. Prema tome, povećanje entropije je tesno povezano sa porastom neuređenosti sistema. Koristeći metode kombinatorike to možemo ilustrovati na sistemu koji se sastoji iz kutije podeljene na dva jednaka dela pregradom sa otvorom. Neka kutija sadrži dve istovetne kuglice A i B. Njihov raspored u kutiji određuje stanje sistema. Slučaj kada su obe kuglice u jednoj pregradi je slučaj najveće uređenosti. Prodrmajmo kutiju i posmatrajmo kakvo će biti stanje sistema. Postoje četiri mogućnosti koje su prikazane na slici 44.



Sl. 44

Dve konfiguracije na desnoj strani slike 44 se ne razlikuju jedna od druge s obzirom na identičnost kuglica A i B. Prema tome, zapažaju se samo tri stanja (makrostanje) za četiri konfiguracije (mikrostanje). Pod pretpostavkom da su sva makrostanja jednako moguća, možemo zaključiti: verovatnoća da će se desiti neuređeno makrostanje je dva puta veća od verovatnoće da će se desiti bilo koje od uređenih stanja.

U slučaju većeg broja kuglica verovatnoća da će se ostvariti uređeno stanje sistema je još manja. Za 5 kuglica broj varijacija $P_{i:j}$ (gde je $i+j = 5$ i $i:j$ prostornih raspodela kuglica u dve pregrade) za ostvarivanje svih šest mogućih prostornih raspodela iznosi:

$$P_{0:5} = P_{5:0} = \frac{5!}{5!} = 1$$

$$P_{1:4} = P_{4:1} = \frac{5!}{1!\,4!} = 5$$

$$P_{2:3} = P_{3:2} = \frac{5!}{2!\,3!} = 10,$$

ili ukupno $32 = 2^5$ podjednako verovatnih varijacija. Matematička verovatnoća za najveći broj varijacija postoji pri raspodeli 2 : 3 i 3 : 2 kuglice i jednaka je za ove raspodele 20/32. To znači da je ona prostorna raspodela, koja se može ostvariti sa većim brojem varijacija, verovatnija.

Prevodeći dosadašnja matematička razmatranja na jezik termodinamike, na osnovu dosadašnjih izlaganja možemo izvesti opšti zaključak: ako se neki proces odvija u izolovanom sistemu, skoro je sigurno da će smer procesa biti prema stanju veće verovatnoće (neuređenosti) sve dok se ne dostigne stanje maksimalne verovatnoće.

Prema tome, verovatnoća ravnomerne raspodele molekula jeste upravo neizbežnost. To znači, da u slučaju da se neki gas zatvoren u sudu, iz bilo kakvog razloga nađe u nekom trenutku u stanju najmanje verovatnoće, skoro je sigurno da će se on brzo vratiti u stanje maksimalne verovatnoće.

U tome je fizički smisao entropije kao funkcije stanja. Pomoću entropije drugi zakon termodinamike možemo iskazati na sledeći način:

Nisu mogući procesi u kojima bi dolazilo do smanjenja entropije izolovanog sistema. Ili, u svakom procesu do kojeg dolazi u izolovanom sistemu entropija sistema ili raste ili ostaje konstantna.

To znači da za izolovan sistem, u stanju maksimalne entropije, promena tog stanja sistema nije moguća. Odatle sledi: potreban uslov za ravnotežno stanje sistema jeste da je njegova entropija maksimalna.

Sva ova tvrđenja odnosila su se samo na izolovane sisteme. Međutim, u slučaju sistema koji nisu izolovani, moguće je da se njihova entropija u stvarnom procesu smanjuje. Ali to dovodi do porasta za istu toliku vrednost ili veću entropiju drugih sistema sa kojima prvi sistem međusobno deluje.

Na kraju kažimo: tako relativno opsežno zadržavanje na predstavi funkcije entropije, njenim fizičkim osnovama, kao i na raznim formulacijama drugog zakona termodinamike imalo je za cilj da se i na takav način istakne njihov značaj i važnost. Njihova fizička interpretacija olakšava prihvatanje njihovog značenja. Logično je onda da širina i raznovrsnost njihove interpretacije može samo da pomogne kada se pređe na striktnu i rigoroznu matematičku formulaciju.

10. PROMENLJIVE STANJA DEFORMACIJE. IDEALAN GAS

Jedan od nezaobilaznih zadataka termodinamike je utvrđivanje veličina koje mogu biti promenljive stanja ili funkcije stanja, kao i veza između njih. Od svih promenljivih ili parametara prvenstveno će nas interesovati osnovne ili primitivne promenjive stanja od kojih zavisi gustina unutrašnje energije ε, kao funkcije stanja, s obzirom da ima dominantno mesto u formulaciji lokalnog oblika zakona balansa energije (4.14), koji, kao što smo naglasili ne zavisi od vrste procesa koji se odvija u sistemu. Za dalju analizu pogodniji oblik tog zakona je dat u odnosu na referentnu konfiguraciju sa $(7.12)_1$,

$$\varrho_0\dot{\varepsilon} = \frac{1}{2}\, T^{KL}\dot{C}_{KL} + q^K_{,K} + \varrho_0 h, \tag{10.1}$$

gde smo koristili $(3.5.8)_1$.

Kako je $q^K_{,K} + \varrho_0 h$ toplotni efekat po jedinici zapremine materijalnog sistema u nedeformisanoj konfiguraciji, proces će biti lokalno adijabatski ako je

$$q^K_{,K} + \varrho_0 h = 0. \tag{10.2}$$

U tom slučaju, prema (10.1), do promene unutrašnje energije dolazi usled mehaničkog procesa. Prema tome, moguća je promena ε samo usled promene C_{KL}. Na osnovu toga se može zaključiti da je C_{KL} promenljiva stanja funkcije ε. Nazvaćemo je *promenljiva stanja deformacije*. Broj funkcionalno nezavisnih komponenata tenzora C_{KL} zavisi od vrste tela, sistema koji razmatramo i procesa kome telo podleže. Za elastična čvrsta tela, u opštem slučaju, jednak je broju nezavisnih komponenata tenzora C_{KL} i iznosi šest. U slučaju izohorične deformacije iznosi pet zbog uslova det $C_{KL} = 1$. Za viskozni fluid postoji samo jedna promenljiva stanja deformacije — specifična zapremina $v = \dfrac{1}{\varrho}$.

Radi definisanosti, ako se za takav sistem promena termodinamičkog stanja odvija adijabatski, onda kažemo da je sistem podvrgnut *reverzibilnom procesu.*

Do promene unutrašnje energije može doći i kada je $C_{KL} = \text{const}$. Pri takvim termičkim procesima promenljive C_{KL} nisu dovoljne da odrede jednoznačno funkciju ε. Potrebna je nova promenljiva koja bi karakterisala stepen zagrejanosti sistema. Ova promenljiva je očigledno temperatura T sistema.

Mogu se izvesti eksperimenti koji pokazuju da su i komponente tenzora napona T^{KL} takođe funkcije C_{KL} i T.

Skup promenljivih stanja C_{KL} i T čije su numeričke vrednosti u trenutku t potrebne i dovoljne da jednoznačno odrede vrednosti ε i T_{KL} u trenutku t, je, prema definiciji, potpun skup. U tom smislu su i ε i T_{KL} funkcije stanja sistema.

Dalja analiza prvog zakona termodinamike dovodi nas do novih, suštinskih, zaključaka. Na ovom mestu korisno je to ilustrovati primerom. Primer takvog sistema je idealan gas. Po definiciji, takav sistem ima sledeće osobine:

i) *U njemu vlada uniforman hidrostatički pritisak, tj.*

$$t^{ij} = -pg^{ij}. \tag{10.3}$$

ii) *Pritisak gasa je funkcija (stanja) specifične zapremine v i apsolutne temperature θ s obzirom na njegovu jednačinu gasnog stanja*

$$pv = R\theta, \tag{10.4}$$

gde je R gasna konstanta.

iii) *Gustina unutrašnje energije ε je, kao funkcija stanja, funkcija samo temperature θ:*

$$\varepsilon = \varepsilon(\theta). \tag{10.5}$$

Kako je $v = \dfrac{1}{\varrho} = \dfrac{1}{\varrho_0} J = \dfrac{1}{\varrho_0} \sqrt{III_C}$, s obzirom na (3.13.4) i $(2.11.6)_4$, procesi u takvom sistemu su, po definiciji reverzibilni.

Lokalni oblik prvog zakona termodinamike (4.14) možemo sada pisati u obliku

$$\varrho\dot{\varepsilon} = -pI_d + q^k_{,k} + gh,$$

ili

$$\varrho d\varepsilon = -pI_d dt + (q^k_{,k} + \varrho h)\, dt. \tag{10.6}$$

Koristeći (3.13.9) i relaciju $\nu = \frac{1}{\varrho}$ ovaj izraz se svodi na

$$d\varepsilon = đq - p d\nu, \tag{10.7}$$

gde je

$$đq \equiv \frac{1}{\varrho}(q^k_{,k} + \varrho h)\, dt. \tag{10.8}$$

Za procese pri konstantnoj zapremini (10.7) glasi

$$d\varepsilon = đq = C_\nu d\theta, \tag{10.9}$$

gde je C_ν specifična toplota pri konstantnoj zapremini. Međutim, pretpostavka da je gustina unutrašnje energije ε funkcija samo tepmerature povlači za sobom da je C_ν funkcija samo θ. Ali tada je

$$d\varepsilon = C_\nu(\theta)\, d\theta, \tag{10.10}$$

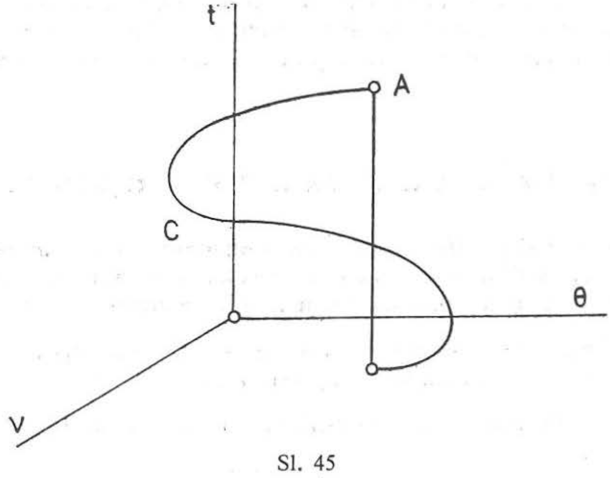
za svaki proces u idealnom gasu, pa prema tome i za procese kada specifična zapremina ν nije konstantna.

Imajući sve ovo u vidu (10.7) sada glasi

$$đq = C_\nu(\theta)\, d\theta + p d\nu, \tag{10.11}$$

odakle se vidi da $đq$ nije totalni diferencijal što smo i istakli koristeći oznaku $đ$. To znači da u jednom termodinamičkom cikličkom procesu, koji je prikazan na slici 45, vrednost integrala

$$\int_0^{t_A} đq = \oint C_\nu(\theta)\, d\theta + p d\nu,$$



Sl. 45

zavisi od putanje procesa. Drukčije rečeno, tako definisana veličina ne može, prema definiciji, biti funkcija stanja.

Ako se sada (10.11) podeli sa θ i uzme u obzir (10.4), onda dobijamo

$$\frac{\bar{d}q}{\theta}=\frac{C_v(\theta)}{\theta}d\theta+R\frac{dv}{v}. \tag{10.12}$$

Odavde se vidi da je desna strana totalni diferencijal neke funkcije, recimo η, tj. da je

$$\frac{C_v(\theta)}{\theta}d\theta+R\frac{dv}{v}=d\eta.$$

Tada je i

$$\frac{\bar{d}q}{\theta}=d\eta, \tag{10.13}$$

totalni diferencijal, gde je θ očigledno integracioni faktor. Otuda funkcija

$$\eta=\oint\frac{\bar{d}q}{\theta}=\int_{\theta_0}^{\theta}C_v(\theta)\frac{d\theta}{\theta}+R\ln\frac{v}{v_0},$$

ne zavisi od putanje procesa, pa je prema, definiciji, funkcija stanja. Nazivamo je *gustina entropije.*

Prema tome, za sistem koji je idealan gas, unutrašnja energija i entropija su funkcije stanja i funkcije promenljivih stanja v i θ, za razliku od integrala priraštaja toplote $\bar{d}q$ koji to nije.

Pretpostavka da su unutrašnja energija i pritisak funkcije stanja (posebnog oblika) promenljivih v i θ omogućila je integrabilnost prvog zakona termodinamike u lokalnom obliku. Integrabilnost je dovela do nove funkcije stanja koju nazivamo entropija.

Pitanje je sada, da li važnost ovog zaključka može da se primeni i na druge sisteme. To ćemo razmatrati u sledećim odeljcima. Njima prethodi deo koji se odnosi na matematičke osnove Pfafove (Pfaff) forme, koje su od velikog značaja u termodinamici.

11. PFAFOVE FORME. KARATEODORIJEVA TEOREMA

Neke osnovne definicije. U cilju veće preglednosti, a bez gubljenja u opštosti, s obzirom na tenzorski karakter veličina i relacija koje ćemo izučavati, dalja razmatranja će se vršiti u odnosu na Dekartove koordinate.

Neka je E_n n — dimenzionalni euklidski prostor i neka je x_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ Dekartov sistem koordinata tog prostora.

Pfafova forma. *Linearna skalarna diferencijalna invarijanta $\bar{d}Q$ definisana sa*

$$\bar{d}Q\equiv X_i(x_j)\,dx_i, \tag{11.1}$$

gde su $X_i(x_j)$ neprekidne i diferencijabilne funkcije svojih promenjivih x_j u nekom konačnom domenu naziva se Pfafova forma.

Pfafova jednačina. *Linearna diferencijalna jednačina*

$$X_i(x_j)\, dx_i = 0, \tag{11.2}$$

naziva se Pfafova jednačina.

Integrabilnost. *Pfafova forma* (11.1) *je integrabilna ako postoje funkcije* $\theta(x_k)$ *i* $\eta(x_k)$ *takve da je*

$$\frac{1}{\theta} X_i dx_i,$$

totalni diferencijal funkcije η, *tj.*

$$\frac{1}{\theta} X_i dx_i = d\eta. \tag{11.3}$$

U tom slučaju je

$$X_i = \theta \frac{\partial \eta}{\partial x_i}, \tag{11.4}$$

i

$$\frac{đQ}{\theta} = d\eta. \tag{11.5}$$

Dalje, ako je C zatvorena kriva linija u domenu definisanosti funkcija $X_i(x_j)$ *onda je*

$$\oint_C \frac{đQ}{\theta} = 0. \tag{11.6}$$

Funkcija θ *se naziva* ***integracioni faktor*** *Pfafove forme.*

Pitanje da li Pfafova forma dopušta postojanje ovih funkcija zavisi, očigledno, od funkcionalnog oblika funkcija X_i. Može se pokazati da potrebni i dovoljni uslovi, koje funkcije X_i moraju zadovoljiti da bi njima odgovarajuća Pfafova forma (11.1) bila integrabilna, glase

$$X_i(X_{j,k} - X_{k,j}) + X_j(X_{k,i} - X_{i,k}) + X_k(X_{i,j} - X_{j,i}) = 0 \tag{11.7}$$

Njihov ukupan broj iznosi $\binom{n}{3}$ od kojih je samo $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ nezavisnih. Odatle sledi da su za $n = 1$ i $n = 2$ uslovi integrabilnosti identički zadovoljeni, a Pfafova forma uvek integrabilna.

Pfafova forma (10.11) za idealan gas je ilustracija slučaja $n = 2$.

Za $n \geqslant 3$ uslovi (11.7) ne moraju biti zadovoljeni. U tom slučaju Pfafova forma nije integrabilna u smislu postojanja integracionog faktora θ.

U termodinamici je od posebnog značaja teorema, koju je formulisao Karateodori (Caratheodory), a koja se odnosi na uslov integrabilnosti Pfafove diferencijalne forme (11.1) u prethodno navedenom smislu, tj. u smislu da je

$$X_i dx_i = \theta d\eta. \tag{11.8}$$

Karateodorijeva teorema*: Ako u okolini neke tačke G_0 postoje njoj nedostupne tačke G, tj. tačke koje ne mogu biti povezane sa G_0 krivama koje su rešenja Pfafove jednačine*

$$X_i(x_j)\,dx_i = 0, \tag{11.2}$$

onda je Pfafova forma integrabilna.

Iz teorije Pfafovih formi je poznato da krive $x_i = x_i(t)$ koje su rešenje jednačine (11.2), uvek postoje, pa prema tome i u slučaju kada Pfafova jednačina (11.2) nije integrabilna u smislu postojanja integracionog faktora θ.

Posledice ove teoreme u termodinamici su dalekosežne ako se pođe od proširenog *Karateodorijevog* (Caratheodory C.) *postulata*, koji je formulisao Valanis (Valanis):

> *U okolini termodinamičkog stanja sistema postoje stanja koja sistem ne može dostići procesima koji su adijabatski i reverzibilni.*

U tom slučaju je moguće pokazati postojanje funkcije stanja koja se naziva entropija. To je predmet razmatranja sledećeg odeljka.

12. PRIMENA KARATEODORIJEVE TEOREME NA PRVI ZAKON TERMODINAMIKE

Prvi zakon termodinamike u obliku Pfafove forme. Slučaj idealnog gasa, koji je razmatran ranije, ukazuje na pravac dalje analize prvog zakona termodinamike. Za opštu analizu polazimo od njihovog lokalnog oblika (10.1) izraženog u odnosu na početnu konfiguraciju. U odnosu na Dekartove koordinate njegov diferencijalni oblik glasi

$$d\varepsilon - \frac{1}{2\varrho_0} T_{KL} dC_{KL} = \frac{1}{\varrho_0}(q_{K,K} + \varrho_0 h)\,dt. \tag{12.1}$$

Za dalju diskusiju pogodniji je oblik

$$d\varepsilon - X_i dx_i = \bar{d}q, \tag{12.2}$$

gde X_i i x_i $(i = 1, 2, \ldots, 6)$ predstavljaju promenljive $\frac{1}{2\varrho_0} T_{KL}$ i C_{KL}, respektivno i gde je

$$\bar{d}q = \frac{1}{\varrho_0}(q_{K,K} + \varrho_0 h)\,dt. \tag{12.3}$$

Lako je pokazati da je (12.3) istovetno sa (10.8) s obzirom na (7.9) i (3.13.4).

Isto tako, iz (10.2) se vidi da je proces adijabatski ako je

$$\bar{d}q = 0. \tag{12.4}$$

Očigledno da je leva strana (12.2) Pfafova forma koja, sa termodinamičkog stanovišta, predstavlja priraštaj gustine unutrašnje energije sistema umanjen za priraštaj

---

* Dokaz ove teoreme je dat u Dodatku koji se odnosi na Pfafove jednačine.

rada na sistemu. Brojna vrednost ove forme jednaka je priraštaju priliva toplote sistema.

Integrabilnost prvog zakona termodinamike. (***Reverzibilan sistem***). Razmatrajući prvi zakon termohinamike u obliku Pfafove forme (12.2) dolazimo do pitanja: za koje sisteme i procese je ova forma integrabilna? (Za sisteme i procese za koje je uslov integrabilnosti zadovoljen moguće je naći novu funkciju stanja — entropiju).

Zadržimo se prvo na slučaju sistema, koji smo razmatrali na početku odeljka 10, za koji je

$$\varepsilon = \varepsilon\,(x_i, T), \quad X_i = X_i\,(x_i, T). \tag{12.5}$$

Za takav sistem (12.2) glasi

$$\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} - X_i\right) dx_i + \frac{\partial \varepsilon}{\partial T}\, dT = đq. \tag{12.6}$$

Prema teoremi Karateodorija, Pfafova forma data levom stranom ovog izraza je integrabilna ako u prostoru promenjivih x_i i T postoje tačke u okolini neke tačke P koje ne mogu biti spojene sa P duž krivih koje su rešenja jednačine

$$\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} - X_i\right) dx_i + \frac{\partial \varepsilon}{\partial T}\, dT = 0. \tag{12.7}$$

S obzirom na (12.4) ova jednačina tvrdi da se promene u sistemu mogu odvijati samo adijabatski. Takve promene u posmatranom sistemu su, po definiciji, reverzibilne. Tada, na osnovu Karateodorijevog postulata, postoje ,,susedna'' termodinamička stanja ($x_i + dx_i$; $T + dT$) koja sistemu nisu dostupna (duž krivih koja su rešenja jednačine (12.7)).

Prema tome, na osnovu Karateodorijeve teoreme, Pfafova forma na levoj strani izraza (12.6) je integrabilna. Šta više, postoji relacija*

$$T = T\,(\boldsymbol{x}), \tag{i}$$

tj., temperatura sistema ne može da se menja nezavisno od promene x_i. Ova funkcionalna relacija, za slučaj ovde razmatranog sistema, je izvedena u Dodatku koji se odnosi na Pfafovu formu. Jednačina (i) definiše hiperpovrš u prostoru (x_i, T). Sa fizičkog stanovišta takva površ je izentropska.

Ovi zaključci se mogu formulisati u obliku *teoreme:*

Ako su ε i X_i ($i = 1, 2, \ldots 6$) funkcije stanja samo promenljivih stanja x_i ($i = 1, 2, \ldots 6$) i T onda je Pfafova jednačina(12.7) *integrabilna.*

Tada postoji integracioni faktor $\theta\,(x_i, T)$ tako da je

$$\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} - X_i\right) dx_i + \frac{\partial \varepsilon}{\partial T}\, dT = đq = \theta\, d\eta, \tag{12.8}$$

---

* Videti u Dodatku napomenu koja se odnosi na Pfafove jednačine.

gde je η funkcija od x_i i T. Takođe je

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} - X_i = \theta \frac{\partial \eta}{\partial x_i}, \tag{12.9}$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial T} = \theta \frac{\partial \eta}{\partial T}. \tag{12.10}$$

Tako određena funkcija η je poznata pod imenom *entropija sistema* i funkcija je promenljivih stanja x_i i T tj.

$$\eta = \eta\,(T; x_i). \tag{12.11}$$

Isto tako je

$$\theta = \theta\,(T; x_i). \tag{12.12}$$

Odavde se vidi da je θ za fiksno x_i funkcija temperature T i prema tome ima značenje unutrašnje mere temperature ako je $\left.\frac{\partial \theta}{\partial T}\right|_{x_i} \neq 0$. Pod tim uslovom moguće je skup promenljivih stanja $\{x_i; T\}$ zameniti skupom $\{x_i; \theta\}$ transformacijom

$$\begin{aligned} x_i &= x_i, \\ \theta &= \theta\,(T; x_i). \end{aligned} \tag{12.13}$$

U tom slučaju jednačine (12.9—10) se mogu izraziti u obliku

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} - \theta \frac{\partial \eta}{\partial x_i} = X_i, \tag{12.14}$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta} - \theta \frac{\partial \eta}{\partial \theta} = 0. \tag{12.15}$$

Uvodeći novu funkciju stanja $\psi = \psi\,(x_i, \theta)$ smenom

$$\psi = \varepsilon - \theta\eta, \tag{12.16}$$

ove jednačine se znatno uprošćavaju i postaju

$$X_i = \frac{\partial \psi}{\partial x_i}, \tag{12.17}$$

$$\eta = -\frac{\partial \psi}{\partial \theta}. \tag{12.18}$$

Pomoću njih lako je pokazati da je

$$\dot{\psi} = X_i \dot{x}_i - \eta \dot{\theta}, \tag{12.19}$$

tj. ψ je onaj deo unutrašnje energije sistema koji je, pri izotermičkim procesima ($\dot{\theta} = 0$), slobodan da vrši rad. Zbog toga se funkcija ψ, koja ima takva svojstva i koja je definisana sa (12.16) naziva *slobodna energija* u literaturi poznata i pod imenom *Helmholcova (Helmholz) energija.*

Ovde izneti rezultati mogu se kratko sumirati u obliku ***leme:***

Ako su unutrašnja energija sistema i mehaničke sile (naponi) X_i, koji deluju na sistem, funkcije deformacija x_i (takvih da je $X_i \dot{x}_i = W$) i temperature θ, onda, kao posledica Karateodorijevog postulata i teoreme postoji funkcija $\eta(x_i; \theta)$, koju nazivamo ***entropija*** *sistema, takva da je*

$$d\eta = \frac{đq}{\theta}, \tag{12.20}$$

Definicija: *Sistemi za koje važi relacija* (12.20) *nazivaju se reverzibilni.*

Ireverzibilni sistemi: Za takve sisteme unutrašnja energija ε i sile X_i nisu funkcije samo promenljivih stanja x_i i T. To znači da promenljive stanja x_i i T nisu dovoljne da jednoznačno definišu termodinamičko stanje sistema i za njegovo definisanje moraju da se uvedu dodatne promenljive. Primer takvog sistema je viskozni fluid ili viskoelastično telo.

Aksioma: *Uvek se može naći potpun skup primitivnih promenljivih stanja (pri čemu se ne moraju biti opažljive) koji jednoznačno određuje stanje termodinamičkog sistema.*

Definicija 1: *Dodatne nezavisne promenljive stanja, koje nisu opažljive, a koje su potrebne za jednoznačno definisanje stanje ireverzibilnog sistema nazivamo* ***unutrašnje promenljive stanja.*** *Takve promenljive stanja obeležavamo sa q_α ($\alpha = 1, 2, \ldots p$).**

Znači za ireverzibilan sistem je

$$\varepsilon = \varepsilon(T; x_i; q_\alpha); \quad X_i = X_i(T; x_i; q_\alpha). \tag{12.21}$$

Za takav sistem prvi zakon termodinamike važi u ranijem obliku, tj. u obliku

$$d\varepsilon - X_i\, dx_i = đq. \tag{12.2}$$

Očigledno je da u ovom izrazu, s obzirom na (12.21), ne figuriše član $Q_\alpha dq_\alpha$, gde je $Q_\alpha = Q_\alpha(x_i; T; q_\beta)$; $(\alpha, \beta = 1, 2, \ldots p)$. To je moguće u procesima u kojima se unutrašnje promenljive stanja ne menjaju. Ali takvi procesi su reverzibilni i za njih važe zaključci prethodnog odeljka.

Time je dokazana ***lema:***

*Za ireverzibilne procese, u kojima su q_α konstantni, diferencijalna forma prvog zakona termodinamike je integrabilna.***

Posledice ove leme su značajne. S obzirom na (12.21) i integrabilnost leve strane forme (12.2) dobijamo da je

$$\left.\frac{\partial \varepsilon}{\partial T}\right|_{q_\alpha} dT + \left.\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i}\right|_{q_\alpha} dx_i - X_i\, dx_i = \theta\, d\eta\,|_{q_\alpha}. \tag{12.22}$$

U ovom izrazu sa $|_{q_\alpha}$ označili smo operaciju diferenciranja pri fiksnim vrednostima q_α. Zbog toga prva dva člana leve strane ne čine totalni diferencijal funkcije pa prema tome desna strana (12.22) nije jednaka $đq$.

---

* U literaturi se promenljive stanja q_α nazivaju i disipativne promenljive stanja.

** U slučaju kada se q_α menja, Pfafova forma (12.2) nije integrabilna.

Nezavisno od toga, postojanje integracionog faktora $\theta(T\ x_i; q_\alpha)$ i funkcije stanja $\eta(T; x_i; q_\alpha)$, koju ponovo zovemo entropijom, dovodi nas do izraza

$$X_i = \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} - \theta \frac{\partial \eta}{\partial x_i}, \tag{12.23}$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial T} = \theta \frac{\partial \eta}{\partial T}. \tag{12.24}$$

Ako ponovimo postupak prethodnog odeljka uvodeći transformaciju

$$\begin{aligned} x_i &= x_i; \\ q_\alpha &= q_\alpha; \\ \theta &= \theta\ (T; x_i; q_\alpha), \end{aligned} \tag{12.25}$$

ove jednačine postaju

$$X_i = \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} - \theta \frac{\partial \eta}{\partial x_i}, \tag{12.26}$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta} = \theta \frac{\partial \eta}{\partial \theta}, \tag{12.27}$$

gde su ε, X_i i η sada funkcije stanja promenljivih $(x_i; q_\alpha; \theta)$. Veličina θ igra ulogu unutrašnje temperature kao i u slučaju reverzibilnih sistema.

Uvođenjem nove funkcije stanja, slobodne energije $\psi\ (\theta; x_i; q_\alpha)$, definisane sa (12.16), ove relacije se znatno uprošćuju i glase

$$X_i = \frac{\partial \psi}{\partial x_i}, \tag{12.28}$$

$$\eta = -\frac{\partial \psi}{\partial \theta}. \tag{12.29}$$

Dalje je lako pokazati da je

$$\dot{\psi} = X_i \dot{x}_i + \frac{\partial \psi}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha + \eta \dot{\theta}. \tag{12.30}$$

Odavde sledi da je, za dva stanja deformacije $\underset{1}{x_i}$ i $\underset{2}{x_i}$,

$$\Delta \psi = \int_{\underset{1}{x_i}}^{\underset{2}{x_i}} X_i\, dx_i, \tag{12.31}$$

u slučaju izotermičkih procesa ($\theta = \text{const.}$) za koje je $q_\alpha = 0$. Prema tome ψ ima značenje povratne energije sistema za takve procese jer je $\Delta\psi = 0$ kada je $\underset{1}{x_i} = \underset{2}{x_i}$.

Ovi rezultati se mogu sumirati u obliku ***teoreme:***

Za ireverzibilan sistem podvrgnut termodinamičkom procesu, postoji funkcija stanja koju nazivamo entropija i, kao posledica, funkcija koju nazivamo slobodna energija. Funkcija slobodne energije igra ulogu funkcije potencijala za sile (napone) koji deluju na sistem i entropiju.

3. TERMODINAMIČKA NEJEDNAKOST. KLAUZIJUS-DIJEMOVA (CLAUSIUS-DUHEM) NEJEDNAKOST

Poznato je da se, pri ispoljavanju dejstva silama okoline na sistem, granica sistema deformiše. Deformacijom granice sistema prenosi se rad koji se na njemu vrši. Prema tome,

Pri izotermičkim uslovima ne može se vršiti rad na sistemu bez deformacije njegove granice.

Ovaj stav, koji izražava *Kelvinov princip*, može se iskazati u modifikovanom obliku:

Pri izotermičkim uslovima slobodna energija sistema, čija je granica stacionarna, ne može rasti.

U protivnom, porast slobodne energije bi mogao biti pretvoren u rad i sistem bi mogao da služi kao neiscrpan izvor energije.

Kakve su posledice ovog postulata?

U tom cilju razmotrimo (12.30) koja za izotermičke uslove postaje

$$\dot{\psi} = X_i \dot{x}_i + \frac{\partial \psi}{\partial q^\alpha} \dot{q}_\alpha. \tag{13.1}$$

U slučaju kada je x_i konstantno, tj. kada je granica sistema stacionarna — do na kruto kretanje tela, na osnovu istog postulata, sledi da je

$$\dot{\psi}\big|_{x_i,\theta} = 0. \tag{13.2}$$

Ali tada iz 13.1) sledi da je

$$\frac{\partial \psi}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha \leqslant 0. \tag{13.3}$$

Neka je, dalje,

$$\frac{\partial \psi}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha \equiv -\delta, \tag{13.4}$$

Tako definisana funkcija δ naziva se *unutrašnja disipacija*. Očigledno da je

$$\delta \geqslant 0, \tag{13.5}$$

kao posledica (13.3). Tvrđenje (13.5), da unutrašnja disipacija ne može biti negativna, predstavlja *Plankovu* (Planck M.). *nejednakost* Dalje se (12.2), s obzirom na (12.22), (13.4) i činjenicu da je

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial q_\alpha} - \theta \frac{\partial \eta}{\partial q^\alpha} = \frac{\partial \psi}{\partial q^\alpha},$$

(što neposredno sledi iz (12.16) i (12.21)), može napisati u obliku

$$đq = \theta\, d\eta - \delta\, dt,$$

ili

$$d\eta = \frac{đq}{\theta} + \frac{\delta}{\theta}\, dt. \tag{13.6}$$

Očigledno, na osnovu (13.5), sledi da je

$$d\eta \geqslant \frac{đq}{\theta}. \tag{13.7}$$

Ova nejednakost se naziva *Klauzijus-Dijemova nejednakost*. Ona *izražava drugi zakon termodinamike u lokalnom obliku*. Tačnije rečeno, dovodi do postojanja entropije kao funkcije stanja koja zadovoljava uslove

$$d\eta = \frac{đq}{\theta}. \tag{13.8}$$

za reverzibilan proces i

$$d\eta > \frac{đq}{\theta}, \tag{13.9}$$

za ireverzibilan proces.

Slučaj

$$d\eta < \frac{đq}{\theta} \tag{13.10}$$

nikada se ne događa u prirodi.

Truzdel-Nol-ov (Truesdell-Noll) oblik Klauzijus-Dijemove nejednakosti

Koristeći (10.8) u (13.7) možemo Klauzijus-Dijemovu nejednakost pisati u obliku

$$\dot{\eta} \geqslant \frac{1}{\varrho\theta}\, q^k_{,k} + \frac{h}{\theta}. \tag{13.11}$$

Pri tome se mora imati u vidu da važi *Furieova (Fourier) nejednakost*

$$q^k\theta_{,k} \geqslant 0, \tag{13.12}$$

kojom se tvrdi da se toplota nikada spontano ne prenosi sa hladnijeg na toplije telo. Uvodeći oznake

$$\gamma_{\mathrm{loc}} = \dot{\eta} - \frac{1}{\varrho\theta}\operatorname{div}\boldsymbol{q} - \frac{h}{\theta}, \tag{13.13}$$

$$\gamma_{\mathrm{con}} = \frac{1}{\varrho\theta^2}\,\boldsymbol{q}\cdot\operatorname{grad}\theta = \frac{1}{\varrho\theta^2}\, q^k\theta_{,k}, \tag{13.14}$$

možemo (13.11—12) izraziti u obliku koji su predložili Truzdel i Nol

$$\gamma_{\mathrm{loc}} \geqslant 0 \quad \mathrm{i} \quad \gamma_{\mathrm{con}} \geqslant 0. \tag{13.15}$$

Uvedene veličine γ_{loc} i γ_{con} nazivaju se *lokalna proizvodnja entropije i proizvodnja entropije provođenjem toplote (kondukcijom)*, respektivno.

U slučaju reverzibilnih procesa mora jednovremeno biti i $\gamma_{\mathrm{loc}} = 0$ i $\gamma_{\mathrm{con}} = 0$.

Očigledno je da su uslovi (13.15) stroživi od uslova

$$\gamma_{\mathrm{loc}} + \gamma_{\mathrm{con}} \geqslant 0, \tag{13.16}$$

koji se, pomoću (13.13—14) može pisati u obliku

$$\varrho\dot{\eta} - \frac{1}{\theta}\, q^k_{,k} + \frac{1}{\theta^2}\, q^k\theta_{,k} - \varrho\frac{h}{\theta} \geqslant 0,$$

ili

$$\varrho\dot{\eta} - \left(\frac{q^k}{\theta}\right)_{,k} - \varrho\frac{h}{\theta} \geqslant 0. \tag{13.17}$$

Klauzijus-Dijemova nejednakost ili princip ireverzibilnosti u globalnom obliku

Ako sa H obeležimo ukupnu entropiju sistema, čija je specifična entropija η (tj. entropija po jedinici mase), onda imamo da je

$$H = \int_v \varrho\eta\, dv. \tag{13.18}$$

Pod uslovom da je sistem zatvoren vidi se da je

$$\dot{H} = \int_v \varrho\dot{\eta}\, dv.$$

Tada iz (10.8) i (13.6) sledi da je

$$\dot{H} = \int_v \frac{1}{\theta}\left(q^k_{,k} + \varrho h + \varrho\delta\right) dv. \tag{13.19}$$

Koristeći identičnost

$$\frac{q^k_{,k}}{\theta} = \left(\frac{q^k}{\theta}\right)_{,k} + \frac{q^k\theta_{,k}}{\theta^2}, \tag{13.20}$$

kao i teoremu o divergenciji, prethodni izraz postaje

$$\dot{H} - \int_{\mathscr{S}} \frac{q^k}{\theta}\, da_k - \int_v \varrho\frac{h}{\theta}\, dv = \int_v \frac{1}{\theta}\left(\varrho\delta + \frac{q^k\theta_{,k}}{\theta}\right) dv. \tag{13.21}$$

Neka je dalje, po definiciji,

$$\varrho\gamma \equiv \frac{1}{\theta}\left(\varrho\delta + \frac{q^k\theta_{,k}}{\theta}\right), \tag{13.22}$$

Tako definisana veličina γ predstavlja *specifičnu proizvodnju entropije.* Tada je

$$\Gamma \equiv \int_v \varrho\gamma \, dv \tag{13.23}$$

ukupna proizvodnja entropije u jedinici vremena posmatranog sistema.

Pomoću nje se (13.21) može pisati u obliku

$$\Gamma = \dot{H} - \oint_{\mathscr{S}} \frac{\mathbf{q}}{\theta} \, d\mathbf{a} - \int_v \varrho \frac{h}{\theta} \, dv. \tag{13.24}$$

U ovom izrazu, koji ima oblik zakona balansa, možemo $\frac{\mathbf{q}}{\theta}$ interpretirati kao fluks entropije kojim entropija napušta sistem provođenjem, a $\frac{h}{\theta}$ kao entropiju koja napušta sistem radijacijom.

Iz (13.22), (13.13—14), (13.16), (10.8), i (13.6) vidi se da je

$$\gamma = \gamma_{\text{loc}} + \gamma_{\text{con}} \geqslant 0, \tag{13.25}$$

ili

$$\gamma = \dot{\eta} - \frac{1}{\varrho\theta} q^k_{,k} - \frac{h}{\theta} + \frac{1}{\varrho\theta^2} q^k \theta_{,k} \geqslant 0, \tag{13.25a}$$

što predstavlja lokalni oblik Klauzijus-Dijemove nejednakosti. Prema tome i za ukupnu proizvodnju entropije Γ važi

$$\Gamma = \int_v \varrho\gamma \, dv \geqslant 0. \tag{13.26}$$

Tada i za (13.24) važi nejednakost

$$\dot{H} \geqslant \int_{\mathscr{S}} \frac{\mathbf{q}}{\theta} \, d\mathbf{a} + \int_v \varrho \frac{h}{\theta} \, dv, \tag{13.27}$$

koja predstavlja *Klauzijus-Dijemovu nejednakost u globalnom obliku,* ili, prema Truzdelu, *opšti postulat ireverzibilnosti.*

U slučaju adijabatskih procesa, tj. kada je $\mathbf{q} = 0$ na $\mathscr{S}$ i $h = 0$ u v, iz (13.27) se dobija $\dot{H} \geqslant 0$. Tada kažemo:

Za adijabatske procese ukupna entropija ne može opadati.

14. KLAUZIJUS-DIJEMOVA NEJEDNAKOST U SLUČAJU POSTOJANJA POVRŠI DISKONTINUITETA

U slučaju postojanja površi diskontinuiteta $\sigma(t)$ u posmatranom telu polazimo od Klauzijus-Dijemove nejednakosti (13.27) koja, po svom obliku, asocira na opšti zakon balansa (3.14.10), tj.

$$\frac{d}{dt} \int_v \varrho\eta \, dv \geqslant \int_{\mathscr{S}} \frac{q^k}{\theta} \, da_k + \int_v \varrho \frac{h}{\theta} \, dv. \tag{14.1}$$

Identifikujući ψ sa η, Φ^k sa $\dfrac{q^k}{\theta}$ i p sa $\dfrac{h}{\theta}$ iz (3.14.7) sledi da je

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\sqrt{g}\,\frac{q^k}{\theta}\right) + \varrho\left(\frac{h}{\theta} - \dot{\eta}\right) \leqslant 0 \quad \text{u } v - \sigma, \\ &\left[\!\left[\frac{\boldsymbol{q}}{\theta} + \varrho\eta\,(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v})\right]\!\right] \cdot \boldsymbol{n} \leqslant 0 \quad \text{na } \sigma. \end{aligned} \tag{14.2}$$

Posle izvesnog sređivanja ovih izraza dobijamo Klauzijus-Dijemovu nejednačinu u lokalnom obliku

$$\varrho\theta\dot{\eta} - q^k_{,k} + q^k(\log\theta)_{,k} - \varrho h \geqslant 0 \quad \text{u } v - \sigma \tag{14.3}$$

ili

$$\varrho\theta\dot{\eta} - \operatorname{div}\boldsymbol{q} + \boldsymbol{q}\operatorname{grad}\log\theta - \varrho h \geqslant 0, \tag{14.3a}$$

i uslov skoka

$$\left[\!\left[\varrho\eta\,(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}) - \frac{\boldsymbol{q}}{\theta}\right]\!\right] \cdot \boldsymbol{n} \geqslant 0 \quad \text{na } \sigma(t). \tag{14.5}$$

U odnosu na početnu konfiguraciju, s obzirom na (7.9) i (3.13.4), globalni oblik Klauzijus-Dijemove nejednakosti (14.1) glasi

$$\frac{d}{dt}\int_V \varrho_0\eta\, dV \geqslant \int_S \frac{q^K}{\theta}\, dA_K + \int_V \varrho_0\frac{h}{\theta}\, dV, \tag{14.6}$$

koji je napisan u obliku (3.14.11).

Identifikujući ψ sa η, Φ^K sa q^K i p sa $\dfrac{h}{\theta}$ i koristeći (3.14.7) dobijamo, posle izvesne računice, u odnosu na početnu konfiguraciju, Klauzijus-Dijemovu nejednakost u lokalnom obliku

$$\varrho_0\theta\dot{\eta} - q^K_{,K} + q^K(\log\theta)_{K,} - \varrho_0 h \geqslant 0 \quad \text{u } V - \Sigma, \tag{14.7}$$

ili

$$\varrho_0\theta\dot{\eta} - \operatorname{div}\boldsymbol{q} + \boldsymbol{q}\cdot\operatorname{Grad}\log\theta - \varrho_0 h \geqslant 0 \quad \text{u } V - \Sigma, \tag{14.7a}$$

gde smo sa Grad označili parcijalni kovarijantni izvod po X^K, i uslov skoka

$$[\![q^K N_K + \varrho_0\eta u_N]\!] \geqslant 0 \quad \text{na } \Sigma. \tag{14.8}$$

Ovi izrazi su od bitnog značaja, posebno u slučaju problema prostiranja talasa u neprekidnoj sredini.

Osim toga, koriste se i drugi, njima ekvivalentni oblici, pogodni za razmatranje pojedinih problema. Tako se iz (7.3) i (14.3), eliminacijom $q^k_{,k} + \varrho h$ dobija

$$-\varrho\,(\dot{\varepsilon} - \theta\dot{\eta}) + t^{kl}d_{kl} + q^k(\log\theta)_{,k} \geqslant 0 \quad \text{u } v - \sigma \tag{14.9}$$

ili

$$-\varrho\,(\dot{\varepsilon} - \theta\dot{\eta}) + \boldsymbol{T} : \boldsymbol{D} + \boldsymbol{q}\cdot\operatorname{grad}\log\theta \geqslant 0 \quad \text{u } v - \sigma. \tag{14.9a}$$

Dalje, koristeći funkciju slobodne energije ψ definisanu na primer sa (12.16), tj.

$$\psi = \varepsilon - \theta\eta, \tag{12.16}$$

ovi izrazi postaju

$$-\varrho\,(\dot{\psi}+\eta\dot{\theta})+t^{kl}d_{kl}+(q^k\log\theta)_{,k}\geqslant 0 \quad \text{u } v-\sigma \tag{14.10}$$

ili

$$-\varrho\,(\dot{\psi}+\eta\dot{\theta})+\boldsymbol{T}:\boldsymbol{D}+\boldsymbol{q}\cdot\operatorname{grad}\log\theta\geqslant 0 \quad \text{u } v-\sigma. \tag{14.10a}$$

Istim postupkom se mogu dobiti i njima odgovarajući izrazi u materijalnoj konfiguraciji

$$-\varrho_0\,(\dot{\varepsilon}-\theta\dot{\eta})+T^{KL}\dot{E}_{KL}+q^K(\log\theta)_{,K}\geqslant 0 \quad \text{u } V-\Sigma \tag{14.11}$$

i

$$-\varrho_0\,(\dot{\psi}+\eta\dot{\theta})+T^{KL}\dot{E}_{KL}+q^K(\log\theta)_{,K}\geqslant 0 \quad \text{u } V-\Sigma. \tag{14.12}$$

Pri tome uslovi skoka (14.5) i (14.8) ostaju nepromenjeni.

15. KALORIČNA JEDNAČINA STANJA. DŽIPSOVA (GIBBS) RELACIJA. TERMODINAMIČKI NAPON. TERMODINAMIČKI POTENCIJAL. FUNKCIJA DISIPACIJE

Sva dosadašnja razmatranja, koja su se odnosila na drugi zakon termodinamike, bitno su se odnosila na fizičke i matematičke osnove egzistencije entropije η kao funkcije stanja termodinamičkog sistema. Proučavani su sistemi i procesi za koje je striktno matematički pokazana egzistencija entropije η i temperature θ. Izvedena je Klauzijus-Dijemova nejednakost u lokalnom i globalnom obliku i ukazano je na prilaz izvođenju ove nejednakosti u mehanici kontinuuma.

U *Truzdelovom prilazu* entropija i temperatura su osnovni pojmovi. Šta više, za razliku od dosadašnjeg načina izvođenja drugog zakona termodinamike, entropija se ne postulira eksplicitno ni kao funkcija stanja određena trenutnim vrednostima drugih promenjivih stanja. Zbog svega toga, smatramo korisnim da se zadržimo na ovom načinu izlaganja detaljnije koristeći uobičajne oznake i termine mehanike kontinuuma.

Prema tom prilazu skup svih nezavisnih parametara ν_α $(\alpha=1,2,\ldots,n)$ koji utiču na promenu gustine unutrašnje energije ε definiše *termodinamičko podstanje sistema*. Sami parametri ν_α se nazivaju *termodinamičke promenljive podstanja*. Njihove fizičke dimenzije se izražavaju preko mehaničkih i elektromagnetnih jedinica, a izbor zavisi od sistema koji se posmatra. Primer idealnog gasa, koji smo ranije razmatrali, ilustruje termodinamičko podstanje sistema određeno samo jednom promenljivom podstanja — specifičnom zapreminom v. Gradijenti deformacije $x^k_{;K}$ su devet parametara ν_α u slučaju deformabilnog tela, itd. U opštem slučaju, ν_α su tenzorska polja proizvoljnog reda i funkcije položaja $\boldsymbol{x}$ i vremena t, tj.

$$\mathbf{v}=\mathbf{v}(\boldsymbol{x},t). \tag{15.1}$$

i nisu dovoljni za određivanje stanja sistema. Odatle sledi:

Osnovna pretpostavka termodinamike. Podstanje sistema $\mathbf{v}$ zajedno sa jednim skalarnim parametrom η, čija je dimenzija nezavisna od dimenzija ν_α, dovoljan je da odredi ε nezavisno od vremena, položaja, kretanja i napona. To znači da je moguće odrediti a priori funkciju f tako da je

$$\varepsilon = f(\eta, v_\alpha, \boldsymbol{X}). \tag{15.2}$$

Parametar η se naziva *entropija*. Njena dimenzija je nezavisna od $[M]$, $[L]$, $[T]$.

Saglasno osnovnoj pretpostavci termodinamike skup $n+1$ parametara v_a, η definiše *termodinamičko stanje*.

Za neko kretanje $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{X}, t)$, sigurno je $\varepsilon = \varphi(\boldsymbol{X}, t)$. Za drugo kretanje biće $\varepsilon = g(\boldsymbol{X}, t)$, pri čemu je u opštem slučaju $g \neq \varphi$. Međutim, prva posledica iznete pretpostavke (15.2) je da mi možemo odrediti ε bez poznavanja kretanja sistema i bez obzira na vreme. Drukčije rečeno, vrednost gustine unutrašnje energije ε može biti određena na osnovu tekućih vrednosti η i v_α i pretpostavljenog funkcionalnog oblika (15.2). Eksplicitna zavisnost ε od $\boldsymbol{X}$ dopušta mogućnost da funkcionalna zavisnost od v_α i η može biti različita za različite čestice u nehomogenoj sredini. Pretpostavlja se da je (15.2) neprekidno po $\boldsymbol{X}$ kao i po v_α i η.

Jednačina (15.2) se naziva *kalorična jednačina stanja*.

Termodinamička temperatura θ i *termodinamički naponi* τ_α se definišu izrazima

$$\theta = \left.\frac{\partial\varepsilon}{\partial\eta}\right|_{v_\alpha}, \quad \tau_\alpha = \left.\frac{\partial\varepsilon}{\partial v_\alpha}\right|_{\eta}, \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, n). \tag{15.3}$$

Tada je pri promeni termodinamičkog stanja u datoj čestici $\boldsymbol{X}$

$$d\varepsilon = \theta\, d\eta + \tau_\alpha\, dv_\alpha, \tag{15.4}$$

gde se po ponovljenom indeksu α, koji nema tenzorski karakter, vrši sabiranje. Ova relacija je poznata pod imenom *Džipsova* (*Gibbs*) *relacija*. Za fluid, primera radi, ona glasi

$$d\varepsilon = \theta\, d\eta - p\, dv, \tag{15.5}$$

gde je

$$\theta = \left.\frac{\partial\varepsilon}{\partial\eta}\right|_{v} \quad \text{temperatura, a}$$

$$-p = \left.\frac{\partial\varepsilon}{\partial v}\right|_{\eta} \quad \text{termodinamički pritisak.}$$

Iz (15.2—3) sledi da su temperatura i termodinamički naponi funkcije termodinamičkog stanja, tj. za datu česticu je

$$\theta = \theta(\eta, v, \boldsymbol{X}), \quad \tau_\alpha = \tau_\alpha(\eta, v, \boldsymbol{X}). \tag{15.6}$$

Pretpostavimo, dalje, da je $(15.6)_1$ moguće rešiti po η tako da je

$$\eta = \eta(\theta, v, \boldsymbol{X}). \tag{15.7}$$

Smenom ovog izraza u (15.2) dobijamo alternativni oblik kalorične jednačine stanja

$$\varepsilon = \varepsilon(\theta, v, \boldsymbol{X}). \tag{15.8}$$

Na isti način se dobija iz (15.6—7)

$$\tau_\alpha = \tau_\alpha(\theta, \mathbf{v}, \boldsymbol{X}), \tag{15.9}$$

ili

$$\nu_\alpha = \nu_\alpha(\theta, \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{X}), \tag{15.10}$$

pod pretpostavkom da je $\left|\frac{\partial \tau_\alpha}{\partial \nu_\beta}\right| \neq 0.$

Jednačine (15.9—10) se nazivaju *termičke jednačine stanja*. Napominjemo da nadalje, u najvećem broju slučajeva, neće biti naznačena eksplicitna zavisnost relacija od $\boldsymbol{X}$.

Termodinamički potencijali. Polazeći od egzistencije kalorične jednačine stanja, uvedena su četiri termodinamička potencijala, pri čemu je svaki pogodan za određen izbor promenljivih stanja. Navodimo ih u sledećoj tabeli

Termodinamički potencijali

Potencijal	Veza sa ε	Nezavisne promenljive stanja
Unutrašnja energija ε	ε	η, ν_α
Helmholcova slobodna energija ψ	$\psi = \varepsilon - \theta\eta$	θ, ν_α
Entalpija χ	$\chi = \varepsilon - \tau_\alpha \nu_\alpha$	η, τ_α
Slobodna entalpija ili Džipsova funkcija ζ	$\zeta = \varepsilon - \theta\eta - \tau_\alpha \nu_\alpha$ $= \chi - \theta\eta$	θ, τ_α

Očigledno je da se može uspostaviti uzajamna veza i sa bilo kojim drugim potencijalom, a ne samo sa ε. Zadržavajući se na ovim relacijama i funkcionalnoj zavisnosti od navedenog skupa promenljivih stanja, lako je pokazati da je

$$\begin{aligned} d\varepsilon &= \theta\, d\eta + \tau_\alpha\, d\nu_\alpha \\ d\psi &= -\eta\, d\theta + \tau_\alpha\, d\nu_\alpha \\ d\chi &= \theta\, d\eta - \nu_\alpha\, d\tau_\alpha \\ d\zeta &= -\eta\, d\theta - \nu_\alpha\, d\tau_\alpha \end{aligned} \tag{15.11}$$

gde je

$$\begin{aligned} \theta &= \left.\frac{\partial \varepsilon}{\partial \eta}\right|_{\mathbf{v}} & \tau_\alpha &= \left.\frac{\partial \varepsilon}{\partial \nu_\alpha}\right|_{\eta} \\ \eta &= -\left.\frac{\partial \psi}{\partial \theta}\right|_{\mathbf{v}} & \tau_\alpha &= \left.\frac{\partial \psi}{\partial \nu_\alpha}\right|_{\theta} \\ \theta &= \left.\frac{\partial \chi}{\partial \eta}\right|_{\boldsymbol{\tau}} & \nu_\alpha &= \left.\frac{\partial \chi}{\partial \tau_\alpha}\right|_{\eta} \\ \eta &= -\left.\frac{\partial \zeta}{\partial \theta}\right|_{\boldsymbol{\tau}} & \nu_\alpha &= -\left.\frac{\partial \zeta}{\partial \tau_\alpha}\right|_{\theta}. \end{aligned} \tag{15.12}$$

Iz (15.11) i (15.12) se mogu izvući sledeći zaključci:

— *Slobodna energija* ψ je onaj deo unutrašnje energije ε koji može da vrši rad pri konstantnoj temperaturi (vidi (12.19)).

— *Entalpija* χ je onaj deo unutrašnje energije ε koji se može osloboditi kao toplota pri konstantnim termodinamičkim naponima.

— *Unutrašnja energija* ε je potencijal za termodinamičke napone pri izentropskim procesima (η = const.).

— *Helmholcova slobodna energija* ψ je potencijal za napone pri izotermičkim procesima (θ = const.).

Slučaj potpuno povratnog rada. Za dalja razmatranja pogodniji oblici $(15.11)_{1,2}$ su

$$\dot{\varepsilon} = \theta\dot{\eta} + \tau_\alpha \dot{v}_\alpha, \qquad\qquad \dot{\psi} = -\eta\dot{\theta} + \tau_\alpha \dot{v}_\alpha. \tag{15.13}$$

Pomoću (7.3) i (12.16) ovi izrazi se mogu napisati u obliku

$$\varrho\dot{\varepsilon} = \varrho\theta\dot{\eta} + \varrho\tau_\alpha\dot{v}_\alpha = t^{kl}d_{kl} + q^k_{,k} + \varrho h, \tag{15.14}$$

$$\begin{aligned}\varrho\dot{\psi} &= -\varrho\eta\dot{\theta} + \dot{\varrho}\tau_\alpha\dot{v}_\alpha \\ &= t^{ij}d_{ij} - \varrho\eta\dot{\theta} + \varrho\theta\left[\frac{1}{\varrho\theta}(q^k_{,k} + \varrho h) - \dot{\eta}\right].\end{aligned} \tag{15.15}$$

Njihovom analizom dolazimo do zaključka da su moguća dva slučaja kada je rad termodinamičkih napona povratan i kada je snaga napona jednaka efektu rada termodinamičkih napona, tj.

$$t^{kl}d_{kl} = \varrho\tau_\alpha\dot{v}_\alpha. \tag{15.16}$$

1. Slučaj — Deformacija je adijabatska i izentropska.

   Tada je $\dot{\eta} = 0$, $q^k = 0$ *i* $h = 0$ *i iz* (15.14) *sledi* (15.16). *Ali tada je* $d\varepsilon = \tau_\alpha dv_\alpha$ *i* $\oint \tau_\alpha\, dv_\alpha = 0$ *jer je* ε *funkcija stanja. To znači da je rad termodinamičkih napona* τ_α *potpuno povratan za takve procese.*

2. Slučaj — Deformacija je izotermička i prenošenje toplote reverzibilno.

   Tada je $\dot{\theta} = 0$ *i* $\varrho\theta\dot{\eta} = q^k_{.k} + \varrho h$ *i iz* (15.15) *ponovo sledi* (15.16). *Takođe je* $d\psi = \tau_\alpha dv_\alpha$ *i* $\oint \tau_\alpha dv_\alpha = 0$ *jer je sada* ψ *funkcija stanja. Ponovo sledi da je rad termodinamičkih napona povratan.*

Važno je uočiti da je povratan rad uslovljen egzistencijom kalorične jednačine i da samo termodnamički naponi, koji se mogu izvesti iz potencijala definisanog takvom jednačinom, vrše rad koji ne doprinosi entropijskoj proizvodnji, što se vidi iz (15.14—16).

Identifikacija termodinamičkih napona sa komponentama napona

Zadržaćemo se na prethodno navedena dva slučaja povratnog rada za izvestan izbor promenljivih podstanja. Razmotrićemo dva moguća izbora promenljivih podstanja v_α: Lagranžov tenzor deformacije $\boldsymbol{E}$ i gradijent deformacije $\boldsymbol{F}$ pretpostavljajući da je podstanje potpuno definisano komponentama tenzora $\boldsymbol{E}$ i $\boldsymbol{F}$.

a) Kada se ν_α ($\alpha = 1, \ldots, 9$) identifikuje sa E_{KL} onda se njima odgovarajući termodinamički napon τ_α može označiti sa τ^{KL} tako da je

$$\tau^{KL} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial E_{KL}}, \tag{15.17}$$

s obzirom na $(15.12)_2$.

Tada se (15.16) može napisati u obliku

$$\frac{1}{\varrho_0} T^{KL} \dot{E}_{KL} = \tau^{KL} \dot{E}_{KL}. \tag{15.18}$$

gde je T^{KL} — Piola-Kirhofov tenzor druge vrste. Pri izvođenju ove relacije koristili smo (3.13.4) i (4.9.12). Ako gustina unutrašnje energije nije simetrizovana po svojim argumentima E_{KL} $\left(\text{tj. zamenjujući svaki od njih sa } \frac{1}{2}(E_{KL} + E_{KL})\right)$ mi ne možemo zaključiti da je $\tau^{KL} = \frac{1}{\varrho_0} T^{KL}$. Zaista, pošto je E_{KL} simetrično ne možemo birati $\dot{E}_{KL}$ tako da je npr. samo $\dot{E}_{12}$ različito od nule, nego tako da su samo $\dot{E}_{12}$ i $\dot{E}_{21}$ različiti od nule. Onda se (15.18) svodi na

$$\frac{1}{\varrho_0}(T^{12}\dot{E}_{12} + T^{21}\dot{E}_{21}) = \tau^{12}\dot{E}_{12} + \tau^{21}\dot{E}_{21},$$

odakle se, koristeći simetrična svojstva tenzora T_{KL} i E_{KL} dobija

$$\frac{1}{\varrho_0} T^{12} = \frac{1}{2}(\tau^{12} + \tau^{21}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial E_{12}} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial E_{21}}\right),$$

ili uopšte, za ovaj slučaj

$$\frac{1}{\varrho_0} T^{KL} = \frac{1}{2}(\tau^{KL} + \tau^{LK}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial E_{KL}} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial E_{LK}}\right). \tag{15.19}$$

Ako je funkcija ε (ili funkcija slobodne energije ψ) simetrizovana po svojim argumentima onda je

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial E_{KL}} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial E_{LK}}$$

i sledi da je

$$\frac{1}{\varrho_0} T^{KL} = \tau^{KL} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial E_{KL}}. \tag{15.20}$$

b) Kada je podstanje sistema određeno gradijentima deformacije $x^k_{,K}$ njima odgovarajuće ili konjugovane napone, obeležavaćemo sa $\tau^K{}_k$. Postupajući kao i u prethodnom slučaju pokazuje se da je

$$\tau^K{}_k = \frac{\partial \varepsilon}{\partial x^k_{,K}} = \frac{1}{\varrho_0} T_k{}^K, \tag{15.21}$$

gde je $T_k^{\ K}$ — Piola-Kirhofov tenzor prve vrste definisan sa (4.9.8). Ista relacija se može izraziti, pomoću (4.9.12), preko simetričnog Piola-Kirhofog tenzora druge vrste koristeći (4.9.12), tako da je

$$\tau^K{}_k = \frac{\partial \varepsilon}{\partial x^k_{,K}} = \frac{1}{\varrho_0} T^{KL} x_{k,L}$$

ili

$$T^{KL} = \varrho_0 \frac{\partial \varepsilon}{\partial x^k_{,K}} x^{k,L}. \tag{15.22}$$

S obzirom na simetričnost T^{KL} mora biti i desna strana (15.22) simetrična, tj. mora biti

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial x^k_{,K}} x^{k,L}{}_{[KL]} = 0. \tag{15.23}$$

Iz (15.21) i $(4.9.8)_2$ dobijamo za Košijev tenzor napona

$$t^{kl} = \varrho x^k_{,K} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_{l,K}}, \tag{15.24}$$

pri čemu zbog simetričnosti t^{kl} mora, takođe, i desna strana da bude simetrična, tj. mora biti

$$x^k_{,K} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_{l,K}}{}_{[kl]} = 0. \tag{15.25}$$

Iz (15.23) i (15.25) se vidi da ε ne može biti proizvoljna funkcija $x^k_{,K}$. Ove relacije u stvari nameću ograničenja na oblik funkcionalne zavisnosti ε od $x^k_{,K}$.

Disipativna snaga i unutrašnja proizvodnja energije. Disipativna funkcija

U slučaju kada snaga napona nije potpuno povratna relacije (15.14—15) se ne svode na (15.16). Tada je

$$\varrho \theta \dot{\eta} = t^{kl} d_{kl} + q^k_{,k} + \varrho h - \varrho \tau_\alpha \dot{\nu}_\alpha, \tag{15.26}$$

ekvivalentno sa (15.14). Možemo se dogovoriti da prvih devet parametara ν_α budu komponente gradijenta deformacije. Time se ništa ne gubi u opštosti, jer za materijale za koje gustina unutrašnje energije ε ne zavisi od nekih ili svih promenljivih stanja $x^k_{,K}$ njima odgovarajuće termodinamičke napone τ_α možemo uzeti da su jednaki nuli.

Sa ovim izborom parametara ν_α $(\alpha = 1, 2, \ldots 9)$ (15.26) postaje

$$\varrho \theta \dot{\eta} = t^{kl} d_{kl} + q^k_{,k} + \varrho h - \varrho \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_{k,K}} x^l_{,K} v_{k,l} - \varrho \tau_a \dot{\nu}_a,$$

$$(a = 10, 11, \ldots n).$$

Međutim, prema dosadašnjem izlaganju rad termodinamičkih napona, koji se mogu izvesti iz ε kao potencijala, je potpuno povratan. Zbog toga je, prema (15.25), $\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_{k,K}} x^l_{,K}$ simetrično, i prethodnu relaciju možemo pisati u obliku

$$\varrho \theta \dot{\eta} = {}_D t^{kl} d_{kl} + q^k_{,k} + \varrho h - \varrho \tau_a \dot{\nu}_a, \tag{15.27}$$

gde je

$${}_D t^{kl} = t^{kl} - \varrho \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_{k,K}} x^l_{,K}, \tag{15.28}$$

ili

$$t^{kl} = \varrho g^{km} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x^m_{,K}} x^l_{,K} + {}_D t^{kl}. \tag{15.29}$$

Simetrični tenzor ${}_D t^{kl}$ definisan sa (15.28) očigledno predstavlja ukupan simetričan napon t^{kl} umanjen za deo napona koji vrši povratan rad. Zbog toga se naziva disipativan deo čime je uslovljen i način njegovog obeležavanja. (Takvo ${}_D t^{kl}$, definisano sa (15.28), poklapa se sa disipativnim naponom definisanim sa (5.6) samo u specijalnim slučajevima.) Tada iz (15.27) možemo zaključiti:

Samo disipativni deo napona ${}_D t^{kl}$ doprinosi promeni entropije.

Ili još opštije (pošto je moguće da ukupan napon bude disipativan):

Bilo koji deo napona koji vrši povratan rad ne doprinosi promeni energije.

Upoređujući (15.27) sa (13.25a), lako je pokazati da je

$$\theta \gamma = \frac{1}{\varrho} {}_D t^{kl} d_{kl} + \frac{1}{\varrho \theta} q^k \theta_{,k} - \tau_a \dot{\nu}_a. \tag{15.30}$$

Odavde sledi: *specifična proizvodnja energije γ izražava se u obliku bilinearne forme odgovarajućeg skupa veličina.*

Uobičajeno je da se dve veličine koje ulaze kao sabirci u izraz za specifičnu proizvodnju energije nazivaju *termodinamička sila i termodinamička flukcija.*

U slučaju (15.30) taj skup veličina bi mogao biti dat prema sledećoj tabeli

Termodinamička sila	*Termodinamički fluks*
$\frac{1}{\varrho} {}_D t^{kl}$	d_{kl}
q^k	$\frac{1}{\varrho\theta} \theta_{,k}$
$-\tau_a$	$\dot{\nu}_a$

Izbor veličine, koja će predstavljati silu a koja fluks, je do izvesnog stepena proizvoljan. U svakom slučaju nisu jednoznačno definisani. Nezavisno od toga pretpostavljamo da su ove veličine uvek izabrane tako da njihov unutrašnji proizvod daje snagu (mehaničke i termičke) disipacije po jedinici mase. To znači da je

$$\theta \gamma = X_a J_a, \tag{15.31}$$

gde smo sa X_a označili termodinamičke sile, a sa J_a odgovarajuće termodinamičke fluksove.

U ireverzibilnoj termodinamici obično se pretpostavlja da konstitutivne jednačine daju fluksove kao funkcije sila (ili obrnuto) i da su bar „u okolini ravnoteže" konstitutivne jednačine (koje se nazivaju i fenomenološke) date u linearnom obliku

$$J_a = L_{ab}X_b, \quad X_a = a_{ab}J_b. \tag{15.32}$$

Onsager (Onsager) je, dalje, postavio *princip* na osnovu koga pogodnim izborom sila i fluksova koeficijenti u (15.32) zadovoljavaju tzv. *Onsagerove recipročne relacije*

$$L_{ab} = L_{ba} \quad \text{ili} \quad a_{ab} = a_{ba}. \tag{15.33}$$

koje predstavljaju uslov simetričnosti ovih koeficijenata. Ove relacije, koje je Onsager predložio (1931) na osnovu statističke mehanike, bile su široko korišćene. Međutim prema Truzdelu, takav prilaz sa stanovišta opšte teorije je neadekvatan, utoliko pre što ne postoji neko pravilo za izbor sila i fluksova na način koji bi garantovao primenljivost Onsagerovih relacija.

Nezavisno od toga, korišćenjem fenomenoloških relacija u entropisjkoj proizvodnji (15.31) dobijamo kvadratne forme koje moraju zadovoljavati nejednakost

$$\theta\gamma = L_{ab}X_aX_b \geqslant 0$$

ili

$$\theta\gamma = a_{ab}J_a J_b \geqslant 0, \tag{15.34}$$

što znači da one moraju biti pozitivno definitne.

Druga od ovih formi se naziva *disipativna funkcija* D, tako da je

$$D(\boldsymbol{J}) = a_{ab}J_a J_b. \tag{15.35}$$

Tada je $(15.32)_2$ ekvivalentno pretpostavci da je

$$X_a = \frac{1}{2}\frac{\partial D}{\partial J_a} \tag{15.36}$$

Jasno je da obrnuti postupak, tj. postuliranje (15.36) i disipativne funkcije (15.35), sa simetrizovanim koeficijentima a_{ab}, obezbeđuje važenje Onsagerovih relacija.

U specijalnom slučaju, kada su $x^k_{,K}$ promenljive stanja koje potpuno definišu podstanje sistema, biće $\tau_a = 0$. Tada (15.30) glasi

$$\varrho\theta\gamma = {}_Dt^{kl}d_{kl} + \frac{1}{\theta}q^k\theta_{,k}, \tag{15.37}$$

tako da je unutrašnja proizvodnja energije γ razdvojena na dva dela: deo koji se odnosi na disipativnu snagu ${}_Dt^{kl}d_{kl}$ i deo koji se odnosi na disipativno ili ireverzibilno provođenje (kondukciju) toplote *u prisustvu* gradijenta temperature.

Takvo razdvajanje u opštem slučaju nije moguće, tj. funkcija disipacije D se u opštem slučaju ne može razdvojiti na zbir dva dela u kojima su mehaničke i termičke sile razdvojene ili nespregnute.

Navedimo na kraju da strožiji oblici Klauzijus-Dijemove nejednakosti dati sa (15.—14—15) zahtevaju da u ovom specijalnom slučaju bude posebno

$$\varrho\theta\gamma_{\text{loc}} = {}_Dt^{kl}d_{kl} \geqslant 0, \tag{15.38}$$

i posebno

$$\varrho\theta\gamma_{\text{con}} = \frac{1}{\theta}\, q^k\theta_{,k} \geqslant 0. \tag{15.39}$$

VI KONSTITUTIVNE JEDNAČINE

1. TERMODINAMIČKI I DINAMIČKI PROCESI

Već smo u uvodnom delu rekli da osnovni principi važe za sva materijalna tela. To su opšti zakoni konzervacije i balansa koje smo ovde izveli, a koje, u cilju preglednosti i dalje analize, ponovo navodimo (bez njima odgovarajućih uslova skoka).

Zakon konzervacije mase

$$\varrho J = \varrho_0 \quad \text{ili} \quad \dot{\varrho} + \varrho I_d = 0. \tag{3.13.6}$$

Zakon balansa količine kretanja

$$t^{kl}{}_{,l} + \varrho\,(f^k - \dot{v}^k) = 0. \tag{4.8.8}$$

Zakon balansa momenta količine kretanja

$$t^{kl} = t^{lk}. \tag{4.8.10}$$

Prvi zakon termodinamike ili zakon balansa energije

$$\varrho\dot{\varepsilon} = t^{kl} d_{kl} + q^k_{,k} + \varrho h. \tag{5.4.14}$$

Ove jednačine dalje nazivamo *jednačine polja.*

Ukupan broj ovih jednačina je osam. Njima treba dodati Klauzijus-Dijemovu nejednakost, na primer u obliku

$$\varrho\,(\theta\dot{\eta} - \dot{\varepsilon}) + t^{kl} d_{kl} + q^k (\log\theta)_{,k} \geqslant 0. \tag{5.14.9}$$

Analizom ovih izraza može se zaključiti da se proces u neprekidnom materijalnom telu može *opisati* sa devet funkcija po promenjivim $\boldsymbol{X}$ i t, a predstavljaju sledeće fizičke veličine:

1. kretanje tela $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{X}, t)$;
2. gustinu ϱ;
3. tenzor napona $\boldsymbol{T}\,\{t^{kl}\}$;

4. zapreminsku silu $\boldsymbol{f}\{f^k\}$ kojom se ispoljava dejstvo okoline na telo;
5. specifičnu unutrašnju energiju ε;
6. vektor toplotnog fluksa $\boldsymbol{q}\{q^k\}$;
7. specifičnu proizvodnju toplote h;
8. specifičnu entropiju η;
9. apsolutnu temperaturu $\theta > 0$.

Ovaj skup veličina, definisan za svaku česticu tela $\mathcal{B}$ i za svako t, se naziva *termodinamički proces* ako i samo ako je saglasan sa *zakonom konzervacije mase*, *zakonom balansa količine kretanja*, *zakonom balansa momenta količine kretanja i prvim zakonom termodinamtke*.

Za preciziranje termodinamičkog procesa dovoljno je poznavati skup $\{\varrho, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{T}, \varepsilon, \boldsymbol{q}, \theta, \eta\}$ imajući u vidu da je $\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{x}}$ i $\boldsymbol{a} = \ddot{\boldsymbol{x}}$. Preostale veličine $\boldsymbol{f}$ i h su onda određene pomoću (4.8.8) i (5.4.14). Pri tome se ima na umu pretpostavka da je početna raspodela gustine ϱ_0 poznata. Kao posledica toga sledi, na osnovu (3.13.6) da je, za poznato kretanje $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{X}, t)$., poznata gustina $\varrho = \varrho(\boldsymbol{X}, t)$.

U mehanici kontinuuma je od posebnog interesa specijalan slučaj kada se proces odvija pod dejstvom mehaničkih, a u odsustvu termičkih uticaja. Za takav proces su jednačine polja određene sistemom jednačina (3.13.6), (4.8.8) i (4.8.10). Tada je proces opisan skupom veličina ϱ, $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{T}$ za čije je poznavanje dovoljan uređeni par $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{T})$. Radi definisanosti kažemo:

> *Uređen par* $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{T})$ *nazivamo* ***dinamičkim procesom*** *za telo* $\mathcal{B}$, *ako on zadovoljava prvi i drugi Košijev zakon kretanja.*

Ustvari, kada je zakon balansa momenta količine kretanja zadovoljen (koji nameće uslov simetričnosti tenzora napona $\boldsymbol{T}$, što je kod nas slučaj), zakon balansa količine kretanja ne nameće nikakva ograničenja na vrednost uređenog para $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{T})$, što nije teško pokazati.

Naime, prvi Košijev zakon kretanja uspostavlja vezu između polja napona $\boldsymbol{T}$ i ubrzanja $\ddot{\boldsymbol{x}}$ ($\equiv \boldsymbol{a}$) pod uslovom da je $\boldsymbol{f}$ poznato. Mada se u svakodnevnom životu i problemima u laboratorijama susrećemo samo sa nekoliko konkretnih sila ove vrste, npr. silom zemljine teže, u principu ne postoji način na osnovu koga bi se mogle naznačiti sve moguće zapreminske sile. Zbog toga smo u razmatranjima, koja se odnose na sveukupnost svih mogućih kretanja tela, prinuđeni da smatramo da $\boldsymbol{f}$ nije podvrgnuto nikakvim ograničenjima. To znači da za proizvoljna dovoljno glatka polja $\boldsymbol{x}$ i $\boldsymbol{T}$ i određenu raspodelu gustine ϱ iz jednačina kretanja uvek možemo odrediti raspodelu zapreminskih sila $\boldsymbol{f}$ koje čine uređeni par $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{T})$ *dopustivim* dinamičkim procesom. Tako određene sile $\boldsymbol{f}$ mogu imati teorijskog, ali ne i stvarnog smisla.

U svakom slučaju možemo zaključiti da prvi Košijev zakon kretanja ne nameće nikakva ograničenja na $\boldsymbol{x}$ i $\boldsymbol{T}$. Saglasno tome svaki uređen par $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{T})$ koji se sastoji iz glatkog kretanja tela $\mathcal{B}$ i simetričnog tenzorskog polja u svakom trenutku t predstavlja dinamički proces.

Ovakva razmatranja možemo primeniti i na termodinamičke procese.

Pretpostavimo da su nam dati $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{T}, \varepsilon, \boldsymbol{q}, \theta$ i η. Tada je, s obzirom na (5.4.14), specifična proizvodnja toplote h jednoznačno određena. Tako određeno h, kao i u slučaju zapreminske sile $\boldsymbol{f}$, ne mora imati stvarnog smisla ali ga iz teoriskih razmatranja ne isključujemo. Prema tome, skup $\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{T}, \varepsilon, \boldsymbol{q}, \theta, \eta\}$ može biti uvek kompletiran specifičnom proizvodnjom toplote h tako da čini *termodinamički proces* Dalje ga obeležavamo sa $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{T}, \varepsilon, \boldsymbol{q}, \theta, \eta)$.

2. POTREBA ZA KONSTITUTIVNIM JEDNAČINAMA. OSNOVNI KONSTITUTIVNI STAV. IDEALNI MATERIJALI

Zakonomernost ponašanja pojedinih tela i njihovog reagovanja na spoljne uticaje, koje je uslovljeno prirodom materijala od koga je telo sačinjeno, određena je relacijama između veličina koje karakterišu njegova materijalna svojstva. Te relacije sa matematičkog stanovišta iskazuju se u obliku jednačina. Sa fizičkog stanovišta one predstavljaju *jednačine stanja* — termin uobičajen u termodinamici — ili *konstitutivne jednačine* — termin uobičajen u mehanici kontinuuma.

Očigledno je da jednačine polja, pošto važe za sva neprekidna tela, ne definišu svojstva i ponašanje pojedinih tela. To smo posebno analizirali u slučaju odsustva termičkih efekata kada smo zaključili da prvi Košijev zakon ne nameće nikakva ograničenja na skup $\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{T}\}$ kojim je definisan dinamički proces. To znači da za svaki konkretan skup $\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{T}\}$ uvek postoji potpuno određeno $\boldsymbol{f}$ koje $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{T})$ čini dopustivim dinamičkim procesom. Međutim, u obrnutom slučaju, tj. u slučaju potpuno određenog $\boldsymbol{f}$, iz (4.8.8) nije moguće jednoznačno odrediti skup $\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{T}\}$ čak ni kada su u pitanju inkompresibilni materijali. Sa matematičkog stanovišta to je potpuno razumljivo jer se iz sistema od tri jednačine (4.8.8) ne može, u opštem slučaju, jednoznačno odrediti devet funkcija x^i i t^{ij} $(t^{ij} = t^{ji})$. Za to je potrebno još šest jednačina po x^i i t^{ij}.

Razumljivo je to i sa fizičkog stanovišta. Zaista, poznato je da dva različita tela iste geometrije i raspodela masa različito reaguju — različito odgovaraju — različito se ponašaju pod dejstvom istih spoljnih uticaja. Primera radi: najveći broj čvrstih tela pod dejstvom spoljnog pritiska se slabo deformiše dok fluidi teku i uzimaju oblik suda. Ovo ukazuje na značaj prirode tela. Zbog toga se, bez preciziranja materijala od koga je telo sačinjeno, ne može ni poznavati njegovo reagovanje na spoljne uticaje.

Prema tome, dopunski skup od šest jednačina, koji je potreban da bi proces $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{T})$ bilo moguće jednoznačno odrediti, nije proizvoljan nego je onaj koji karakteriše materijal od koga je telo sačinjeno. Kratko rečeno: taj potreban skup jednačina jesu konstitutivne jednačine.

Očigledno je da konstitutivne jednačine nameću ograničenja na sile ili kretanja ili i na jedno i na drugo istovremeno. U tom smislu neke od konstitutivnih jednačina su trivijalne. Takav je slučaj sa spoljašnjim zapreminskim silama koje se, u skupu svih zapreminskih sila, karakterišu osobinom da ne zavise od kretanja posmatranog tela koje može da zauzima deo prostora u kome te sile deluju. „Ograničenja" na sile takve vrste ne potpadaju pod domen teorije konstitutivnih jednačina u mehanici kontinuuma i nadalje, takve sile smatramo poznatim $(\boldsymbol{f})$. Ali se zato konstitutivnim jednačinama detaljno analizira reagovanje materijala, koje se ispoljava preko kontaktnih sila, kada se telo nalazi pod dejstvom tih trivijalnih zapreminskih sila. Zapravo, od svih sila kontaktne sile su jedine od interesa u mehanici kontinuuma. U odeljku (IV. 1) videli smo da su one određene tenzorom napona $\boldsymbol{T}$.

U slučaju termodinamičkog procesa opisanog skupom $\{\varrho, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{T}, \varepsilon, \boldsymbol{q}, \theta, \eta\}$, u kome figuriše 19 funkcija koje moraju zadovoljavati osam jednačina polja (3.13.6), (4.8.8), (4.8.10) i (5.4.14), a u kojima su poznate veličine $\boldsymbol{f}$ i h, potrebno je dodatnih jedanaest jednačina po promenljivim skupa $\{\varrho, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{T}, \varepsilon, \boldsymbol{q}, \theta, \eta\}$. Kao i u slučaju dinamičkih procesa ovih jedanaest jednačina nisu ništa drugo nego konstitutivne jednačine koje su potrebne za preciziranje materijala od koga je telo sačinjeno.

Analogno prethodnim razmatranjima može se zaključiti da je sada u teoriji konstitutivnih jednačina od posebnog interesa skup $\{\boldsymbol{T}, \varepsilon, \boldsymbol{q}, \eta\}$, koji je očigledno definisan sa jedanaest funkcija. Tada je moguće, poznavanjem skupa $\{\boldsymbol{T}, \varepsilon, \boldsymbol{q}, \eta\}$ u funkciji ϱ, $\boldsymbol{x}$ i θ za poznate veličine $\boldsymbol{f}$ i h jednoznačno odrediti pet funkcionalnih relacija

$$\varrho = \varrho(\boldsymbol{X}, t), \quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{X}, t), \quad \theta = \theta(\boldsymbol{X}, t) \tag{2.1}$$

iz sistema od pet jednačina (3.13.6), (4.8.8), i (5.4.14). [Na osnovu (3.13.6). Zbog simetričnosti tenzora napona $\boldsymbol{T}$ jednačine (4.8.10) su identički zadovoljene.]

Ovo nam sugeriše prirodan put formiranja datih jedanaest jednačina koje bi sa jednačinama polja činile potpun sistem jednačina. Na taj način dolazimo do *osnovnog konstitutivnog stava.*

U tački $\boldsymbol{x}$, koja određuje položaj neke materijalne čestice tela $\mathcal{B}$ u nekom trenutku t, tenzor napona $\boldsymbol{T}$ specifična unutrašnja energija ε, vektor toplotnog fluksa $\boldsymbol{q}$, specifična entropija η su jednoznačno određene kretanjem tela $\mathcal{B}$ i raspodelom temperature u telu $\mathcal{B}$.

Idealni materijali. Teorija konstitutivnih jednačina zasnovana je na odgovarajućim fizičkim istinama i zahtevima. Na toj osnovi se dalje razvija kao matematička teorija i predstavlja izuzetno značajan deo mehanike kontinuuma. Materijali za koje se na taj način određuju konstitutivne jednačine predstavljeni su svojim matematičkim modelima. Takvi modeli predstavljaju idealna tela, pa prema tome konstitutivne jednačine definišu *idealan materijal.*

Broj i domen promena veličina u konstitutivnim jednačinama, ili kratko konstitutivnih promenljivih, određen je odgovarajućim fizičkim osobinama materijala. Za nas će od posebnog značaja biti osobine elastičnosti, viskoznosti i plastičnosti kao i toplotna provodljivost neprekidnih tela. Ove osobine poseduje svako telo. Kod nekih tela neka od osobina je znatno izraženija. Koja od ovih osobina će biti dominantna zavisi ne samo od unutrašnje strukture tela nego i od spoljnih uticaja. Npr.: fluid se razlikuje od čvrstog tela po svojoj osobini da ne može podneti dejstvo smičućeg napona. Fluid se pod njegovim dejstom deformiše neprekidno i neograničeno ili kratko rečeno fluid teče. Po prestanku dejstva sile na fluid, on se ne vraća u svoju nedeformisanu konfiguraciju.

Tečenje čvrstih tela nastaje samo u slučaju kada sile, koje na njega deluju, pređu neku granicu koja se naziva *granicom tečenja* za dati materijal. Tada se kaže da je reč o osobini plastičnosti čvrstog tela, čija se deformacija, po toj osobini, naziva plastična deformacija ili plastično tečenje tela. U matematičkoj teoriji plastičnosti, plastično stanje ili plastična deformacija su nezavisne od vremena. I u ovom slučaju po prestanku dejstva sila telo se ne vraća u celosti u svoju nedeformisanu konfiguraciju.

Za razliku od plastičnog tečenja, viskozno tečenje može da nastane pod dejstvom bilo kojih sila, ma koliko one bile male. Međutim, brzina deformacije se umanjuje kada dejstvo sila opada i pri njihovom iščezavanju postaje jednaka nuli.

Kada se čvrsto telo nalazi pod dejstvom sila, koje ne prelaze granicu tečenja, telo se elastično deformiše. Elastična tela se, po prestanku dejstva sila, vraćaju u svoju prvobitnu nedeformisanu konfiguraciju.

Za svaki od matematičkih modela kojima se predstavljaju realni materijali sa ovde navedenim osobinama formulišu se odgovarajuće konstitutivne jednačine. Zbog toga ćemo dalje govoriti o konstitutivnim jednačinama realnih tela imajući u vidu da se, sa stanovišta teorije konstitutivnih jednačina, njihovo izvođenje odnosi na njima odgovarajuće matematičke modele. Takvi modeli su idealno elastično čvrsto ili Hukovo (Hooke) telo, idealni Njutnov (Newton) fluid, itd.

Realna tela u suštini poseduju složena ili spregnuta svojstva kao što su elasto-plastičnost, visko-elastičnost, visko-plastičnost i drugo, svojstva na koja nesumnjivo utiču i osobine toplotnog provođenja. Posebna svojstva konkretnog tela karakterišu se njegovim konstitutivnim jednačinama. Prema tome, telima različitih fizičkih karakteristika odgovaraju i različite konstitutivne jednačine.

3. OPŠTI PRINCIPI KONSTITUTIVNIH JEDNAČINA

Konstitutivne jednačine realnih tela moraju zadovoljavati i određene opšte principe. Zbog toga se u modernoj mehanici kontinuuma pristupa izvođenju konstitutivnih jednačina sa stanovišta tih opštih principa koji važe za sva materijalna tela. Ovi principi nameću određena ograničenja na opšti oblik konstitutivnih jednačina. Dalja ograničenja su uslovljena zajedničkim osobinama određene vrste ili klase materijala, kao što su elastična, visko-elastična, plastična tela itd. U okviru te klase poseban materijal se karakteriše svojim posebnim fizičkim svojstvima koja imaju odraza na konačan oblik njemu odgovarajuće konstitutivne jednačine. Ovakav pristup izvođenju konstitutivnih jednačina nam omogućuje opšti uvid u ponašanje i reagovanje materijala, čime se isključuje mogućnost previda, posebno kada su u pitanju spregnuta svojstva materijala. Kratko rečeno: ovakav pristup izvođenju konstitutivnih jednačina se svodi na princip od opšteg ka pojedinačnom.

Sa matematičkog stanovišta osnovni principi koje moraju da zadovoljavaju konstitutivne jednačine predstavljaju polazni skup aksioma u teoriji konstitutivnih jednačina. I bez obzira što do sada ne postoji jedinstven prilaz teoriji konstitutivnih jednačina, moraju biti zadovoljeni sledeći principi.

I. Koordinantna invarijantnost

Konstitutivne jednačine moraju, u svakom određenom trenutku, biti predstavljene u tenzorskom obliku.

Zaista, fizički proces, osobine i ponašanje materijala ne zavisi od koordinatnog sistema kojim ih opisujemo. To znači da konstitutivne jednačine moraju biti kovarijantne u odnosu na bilo koji koordinatni sistem dopustiv u prostoru fizičkih događaja. Drukčije rečeno: konstitutivne jednačine moraju biti napisane u tenzorskom obliku: u obliku direktne notacije koji uopšte ne koristi koordinatni sistem ili konponentalnom obliku. U protivnom, promena koordinatnog sistema bi izazivala promenu ponašanja materijala. (Jedan primer jednačine u tenzorskom obliku je dat sa (5.4.14) i (4.5.13) kojim se izražava prvi zakon termodinamike.)

II. Princip ekviprezensa ili jednake prisutnosti

Nezavisno promenjiva prisutna u jednoj konstitutivnoj jednačini prisutna je u svim konstitutivnim jednačinama sve dok to nije u suprotnosti sa zakonima balansa, entropijskom nejednakošću ili uslovima invarijantnosti.

Isti princip možemo iskazati i drukčije:

Na početku sve konstitutivne jednačine izražavaju se kao funkcije istog skupa nezavisnih (konstitutivnih) promenljivih sve dok to ne bude u suprotnosti sa drugim važećim fizičkim principima ili zakonima.

Ovaj Truzdelov princip iskazuje se kao fizički princip. Takvo stanovište nije opšte prihvaćeno. Pre se prihvata kao pogodan matematički postupak pri formulisanju funkcionalnog oblika konstitutivnih jednačina.

U svakom slučaju predstavlja meru predostrožnosti. Pomaže nam da ne zaboravimo neke od nezavisnih konstitutivnih promenljivih, zanemarujući ih na račun drugih. Prema tome, ima smisla samo kada se skup konstitutivnih nezavisnih promenljivih sastoji više od jedne veličine. Po pravilu, primenjuje se pri razmatranju opšte teorije konstitutivnih jednačina.

III. Princip determinizma

Konstruktivne funkcije $\boldsymbol{T}$, ε, $\boldsymbol{q}$, η za česticu $X \in \mathcal{B}$, određenu sa $\boldsymbol{X}$, u trenutku t određene su istorijama kretanja i temperature svih materijalnih čestica tela $\mathcal{B}$.

Na osnovu principa determinizma i ekviprezensa imamo

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{T}[\boldsymbol{x}(X, t), t] &= \mathop{\mathcal{T}}_{s=0}^{\infty}[\boldsymbol{x}(\bar{X}, t-s),\ \theta(\bar{X}, t-s), X, t],\\
\varepsilon[\boldsymbol{x}(X, t), t] &= \mathop{\varepsilon}_{s=0}^{\infty}[\boldsymbol{x}(\bar{X}, t-s),\ \theta(\bar{X}, t-s), X, t],\\
\boldsymbol{q}[\boldsymbol{x}(X, t), t] &= \mathop{\boldsymbol{K}}_{s=0}^{\infty}[\boldsymbol{x}(\bar{X}, t-s),\ \theta(\bar{X}, t-s), X, t],\\
\eta[\boldsymbol{x}(X, t), t] &= \mathop{\mathcal{N}}_{s=0}^{\infty}[\boldsymbol{x}(\bar{X}, t-s),\ \theta(\bar{X}, t-s), X, t].
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

gde su $\mathcal{T}$, ε, $\boldsymbol{K}$ i $\mathcal{N}$ *funkcioneli ponašanja materijala.* Saglasno principu koordinatne invarijantnosti, $\boldsymbol{T}$ i $\boldsymbol{K}$ su tenzorski i vektorski funkcioneli, respektivno, a ε i $\mathcal{N}$ skalarni funkcioneli, definisani na polju realnih funkcija $\boldsymbol{x}(\bar{X}, t-s)$ i $\theta(\bar{X}, t-s)$,

$$\bar{X} \in \mathcal{B} \ \text{ i } \ 0 \leqslant s < \infty. \tag{3.2}$$

Princip determinizma se oslanja na osnovni konstitutivni stav i predstavlja princip isključenja. On isključuje zavisnost ponašanja materijala u $X \in \mathcal{B}$ u posmatranom trenutku od kretanja bilo koje čestice izvan tela i bilo kojih budućih događaja. Ujedno tvrdi da je njegovo trenutno ponašanje, u opštem slučaju, uslovljeno prošlim. Zbog toga se materijali, koji zavise od istorije svog ponašanja, nazivaju materijali sa pamćenjem ili memorijom, a funkcioneli u konstitutivnim jednačinama (3.1) *funkcioneli pamćenja ili memorije.*

Princip determinizma obuhvata dva specijalna slučaja koja su od posebnog interesa za nas:

a) Konstitutivne jednačine (3.1) zavise samo od kretanja $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(X, t)$ i raspodele tremperature $\theta = \theta(X, t)$ u posmatranom trenutku. Tada je reč o *materijalima bez pamćenja.* Primer takvog materijala je idealni termoelastični materijal čija se zavisnost od istorije njegovog ponašanja sastoji u posedovanju privilegovane konfiguracije, koja određuje njegovo prirodno stanje na koje se telo vraća po prestanku dejstva mehaničkih i termičkih uticaja.

b) Konstitutivne jednačine zavise samo od izvoda $\boldsymbol{x}$ i θ po vremenu u posmatranom trenutku. Time se karakterišu *materijali sa slabim pamćenjem* ili *materijali sa bledom memorijom.*

U opštoj teoriji konstitutivnih jednačina, sa matematičkog stanovišta, detaljno je proučen slučaj reagovanja materijala na samo mehaničke uticaje. Tada princip determinizma, saglasno osnovnom konstitutivnom stavu, a u odsustvu termičkih uticaja, glasi:

Napon u telu je određen istorijom njegovog kretanja.

To znači da je za bilo koju česticu $X \in \mathcal{B}$ u posmatranom trenutku

$$\boldsymbol{T}[\boldsymbol{x}(X, t), t] = \overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathcal{T}}}[\boldsymbol{x}(\bar{X}, t-s), X, t], \tag{3.3}$$

za svako $\bar{X}$ i s za koje važi (3.2).

Jasno je da je sada reč o jednoj užoj klasi materijala sa memorijom i da se (za tu klasu) mogu primeniti prethodna razmatranja. Specijalno kao primer materijala bez pamćenja sada služe *idealni elastični materijali.*

IV. Princip lokalnog dejstva

> *Vrednost konstitutivnih funkcija* $\boldsymbol{T}$, ε, $\boldsymbol{q}$ *i* η *za česticu* $X \in \mathcal{B}$ *u posmatranom trenutku vremena je određena istorijom kretanja i temperature proizvoljno male okoline čestice* X.

Ovaj princi predstavlja proširenje principa lokalnog dejstva u slučaju odsustva termičkih uticaja:

> *Za određivanje napona za datu česticu* $X \in \mathcal{B}$ *kretanje čestica izvan proizvoljne okoline čestice* X *može biti zanemareno.*

Ovako formulisan princip je posledica fizičkog koncepta kontaktnih sila. Zaista, saglasno sa principom determinizma, konstitutivne jednačine (3.3) dopuštaju da na napon za česticu X utiče kretanje svih čestica tela $\mathcal{B}$, pa prema tome i čestice Y koja se nalazi na konačnom rastojanju od X. S druge strane, kontaktne sile, koje deluju na deo tela $\mathcal{B}$, kao što je istaknuto u glavi IV, odeljak 1., određene su tenzorom napona $\boldsymbol{T}$. Fizička predstava o kontaktnoj sili podrazumeva da je ona određena stanjem u neposrednoj okolini čestice svoje primene. To znači da je napon $\boldsymbol{T}[\boldsymbol{x}(X, t), t]$ određen stanjem proizvoljno male okoline čestice $X \in \mathcal{B}$, čiji je trenutni položaj $\boldsymbol{x}$ određen sa $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(X, t)$. Kratko rečeno, princip lokalnog dejstva tvrdi da je za bilo koja dva kretanja $\boldsymbol{x}_1(\bar{X}, t)$ i $\boldsymbol{x}_2(\bar{X}, t)$ koja se poklapaju u okolini $\mathcal{N}(X)$ čestice $X \in \mathcal{B}$, za sve vreme kretanja vrednost funkcionala $\mathcal{T}$ ista. Formalno,

$$\overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathcal{T}}}(\boldsymbol{x}_1(\bar{X}, t-s)) = \overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathcal{T}}}(\boldsymbol{x}_2(\bar{X}, t-s))$$

uvek kada postoji okolina $\mathcal{N}(X)$ takva da je

$$\boldsymbol{x}_1(\bar{X}, t-s) = \boldsymbol{x}_2(\bar{X}, t-s)$$

za svako $\bar{X} \in \mathcal{N}(X)$ i $0 \leqslant s < \infty$.

U slučaju postojanja termičkih uticaja princip lokalnog dejstva tvrdi da kretanje $\boldsymbol{x}(\bar{X}, t-s)$ i temperatura $\theta(\bar{X}, t-s)$ za česticu $\bar{X}$ koja nije u okolini čestice X neće značajno uticati na $\boldsymbol{T}$, ε, $\boldsymbol{q}$, η u $(\boldsymbol{X}, t)$. Na osnovu ovog principa možemo isključiti iz konstitutivnih jednačina (3.1) efekte koji se odnose na dejstva izvan proizvoljne okoline čestice X.

V. Princip materijale indiferentnosti

Sistem referencije. Događaj

Osnovna ideja koja se koristi pri korektnom formulisanju konstitutivnih jednačina se zasniva na činjenici:

Fizičke osobine materijala i njegovo ponašanje ne zavise od posmatrača.

Zbog toga je pri eksperimentalnim merenjima veoma važno znati izdvojiti one veličine koje karakterišu datu pojavu, a na koje kretanje posmatrača ne utiče. Za takve veličine kažemo da su *indiferentne* ili *objektivne* i dovoljno ih je odrediti u odnosu na jednog posmatrača.

Sa matematičkog stanovišta posmatrač se karakteriše sistemom referencije u odnosu na koji izučavamo sve fizičke veličine i događaje. U kinematici postoje dve fundamentalne veličine koje merimo: rastojanje i vremenski interval. Fizički sistem referencije može biti zid laboratorije, neka zvezda ili skup objekata čija uzajamna rastojanja ostaju nepromenjena za sve vreme kretanja. Vreme nekog događaja može biti određeno samo u odnosu na neki drugi događaj (na primer: u odnosu na vreme puštanja u rad štoperice) i smatramo ga delom sistema referencije. Prema tome, sistem referencije se može opisati kao mogući način povezivanja fizičke realnosti sa trodimenzionalnim euklidskim prostorom E_3 i realnom vremenskom osom. To znači da su prostor i vreme samo oblici postojanja materije.

Događaj je par $(\boldsymbol{x}, t)$, gde je $\boldsymbol{x}$ tačka u E_3, a t vreme. Skup svih događaja se naziva *prostor-vreme*.

U slučaju kada se koristi Dekartov sistem koordinata u E_3 tačke i njeni vektori položaja imaju iste koordinate. Tada ćemo pisati $\boldsymbol{z}$ za tačku i njen vektor položaja, kao i $(\boldsymbol{z}, t)$ za događaj.

Promena sistema referencije

Pod promenom sistema referencije podrazumevamo obostrano jednoznačno preslikavanje prostor-vremena u samog sebe tako da: a) rastojanja, b) vremenski intervali i c) vremenski redosled ostaju očuvani.

Neka z i t označavaju tačku i vreme u sistemu $\mathcal{F}$, a z^* i t^* njima odgovarajući položaj i vreme u sistemu $\mathcal{F}^*$. Tada je, pod gore navedenim uslovima, najopštija promena sistema referencije data sa:

$$\begin{aligned} z^* &= Q(t)\, z + c(t), \\ t^* &= t - a, \end{aligned} \tag{3.4}$$

gde su:

$c(t)$ — vektor položaja koordinatnog početka sistema $\mathcal{F}$ u odnosu na kordinatni početak sistema $\mathcal{F}^*$

$Q(t)$ — ortogonalan tenzor i

a — realan broj.

Za tenzor Q važi uslov

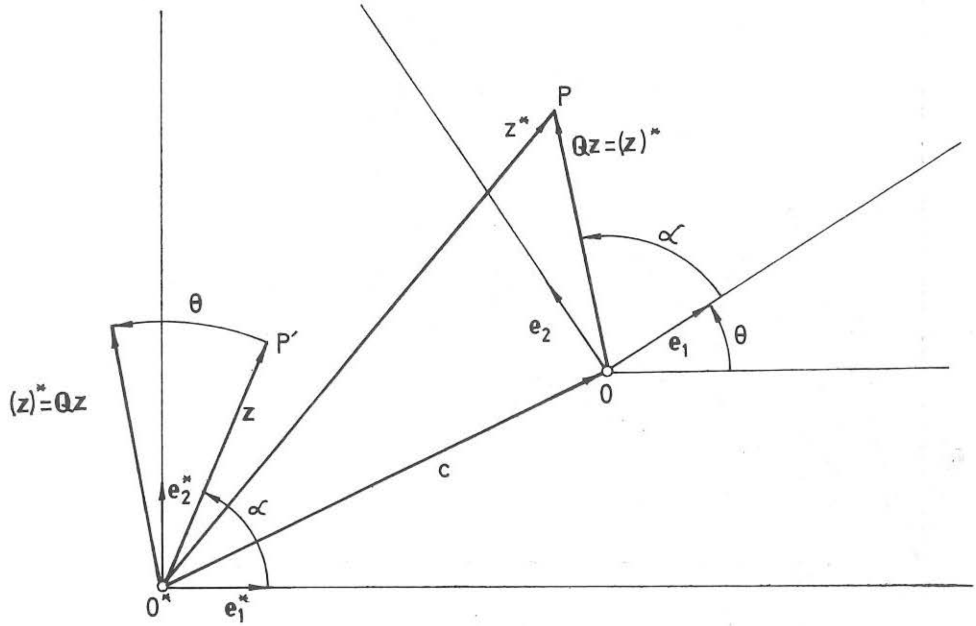
$$QQ^T = Q^TQ = I, \quad (\det Q = \pm 1) \tag{3.5}$$

gde je I jedinični tenzor, a Q^T transponovani tenzor tenzora Q. Tenzor Q određuje rotaciju za det $Q = 1$, a refleksiju ili ogledanje za det $Q = -1$ starog sistema u odnosu na novi. U svakom slučaju, određuje relativnu orijentaciju posmatrača $\mathcal{F}$ u odnosu na $\mathcal{F}^*$. S obzirom na odeljak (II.7a) sledi da transformacija sistema referencije, data sa (3.4), ne predstavlja ništa drugo nego kruto pomeranje prostornog sistema referencije. Sa matematičkog stanovišta transformacija (3.4) ima grupno svojstvo i definiše *euklidsku transformaciju*.

Geometrijska interpretacija transformacije (3.4) u slučaju dvodimenzionalnog prostora E_2 prikazana je na slici 46. Dva posmatrača, $\mathcal{F}$ i $\mathcal{F}^*$, su predstavljeni, respektivno, svaki svojim sistemom referencije (O, e_k) i (O^*, e_k^*) i vremenskom transformacijom $t^* = t - a$, koja predstavlja vremensku translaciju jednog posmatrača u odnosu na drugog. U slučaju kada je $a = 0$ dva posmatrača na svojim časovnicima očitavaju isto vreme. U protivnom njihova vremena se razlikuju za a.

Interesuje nas na koji način posmatrači uspostavljaju vezu između uređenih parova (z, t) i (z^*, t^*) kada je reč o istom događaju. Primer: možemo zamisliti da se dva posmatrača nalaze svako na svom brodu koji su ovde predstavljeni sistemima (O, e_k) i (O^*, e_k^*). Neka posmatrač $\mathcal{F}$ u trenutku t uoči događaj (z, t) — recimo cilj P. O njemu on izveštava posmatrača $\mathcal{F}^*$, recimo radio vezom, označavajući njegov položaj u odnosu na svoj brod sistem (O, e_K) — recimo označavanjem ugla α. Posmatrač $\mathcal{F}^*$ na osnovu tih podataka treba da, u odnosu na svoj sistem referencije, odredi položaj istog cilja P znajući položaj broda posmatrača $\mathcal{F}$ (opet preko radio veze), tj. znajući c i Q. Ustvari, posmatrač $\mathcal{F}^*$ mora odrediti vektor položaja z^* tačke P preko vektora položaja tačke P u odnosu na posmatrača $\mathcal{F}$. Pošto posmatrač $\mathcal{F}^*$ ne vidi taj cilj, on nanosi vektor z u svom sistemu na osnovu podataka posmatrača $\mathcal{F}$ za cilj položaja tačke P u odnosu na $\mathcal{F}$. Tako nacrtani vektor se nalazi u istom položaju u odnosu na posmatrača $\mathcal{F}^*$ kao i vektor položaja tačke P u odnosu ne posmatrača $\mathcal{F}$. Ali u sistemu (O^*, e_k^*) on određuje položaj fiktivnog cilja P', a ne stvarnog cilja P. Da bi dobio vektor položaja tačke P, on mora dovesti svoj sistem (O^*, e_k^*), sa stanovišta rotacije Q, određene uglom α, u položaj iste orijentacije sa sistemom (O, e_k). Ali do vektora položaja tačke P u odnosu na $\mathcal{F}$ on može da dođe i kada samo vektor z rotira dovodeći ga u položaj $(z)^* = Qz$. Tako dobijeni vektor $(z)^*$ predstavlja vektor položaja tačke P u odnosu na posmatrača $\mathcal{F}$ kako ga vidi posmatrač $\mathcal{F}^*$. Tada je konačno $\boldsymbol{z}^*$ određeno relacijom $\boldsymbol{z}^* = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{z} + \boldsymbol{c}$.

Analogna interpretacija (3.4) može se dati u slučaju dva posmatrača u E_3.



Sl. 46

Sistem referencije povlači za sobom, u opštem slučaju, način obeležavanja skalara, vektora i tenzora u svakom trenutku vremena t. Takc ćemo neko skalarno polje definisano u nekoj oblasti, označiti sa b u odnosu na posmatrača $\mathcal{F}$, a sa b^* u odnosu na posmatrača $\mathcal{F}^*$. Iz tih razloga ćemo koristiti oznake $\boldsymbol{u}$ i $\boldsymbol{u}^*$ kada je u pitanju vektorsko, odnosno $\boldsymbol{T}$ i $\boldsymbol{T}^*$ kada je u pitanju neko tenzorsko polje. Za svaku prcmenu posmatrača $\mathcal{F}$, za ove veličine važe sledeći zakoni transformacije

za skalar

$$b^* = b, \tag{3.6}$$

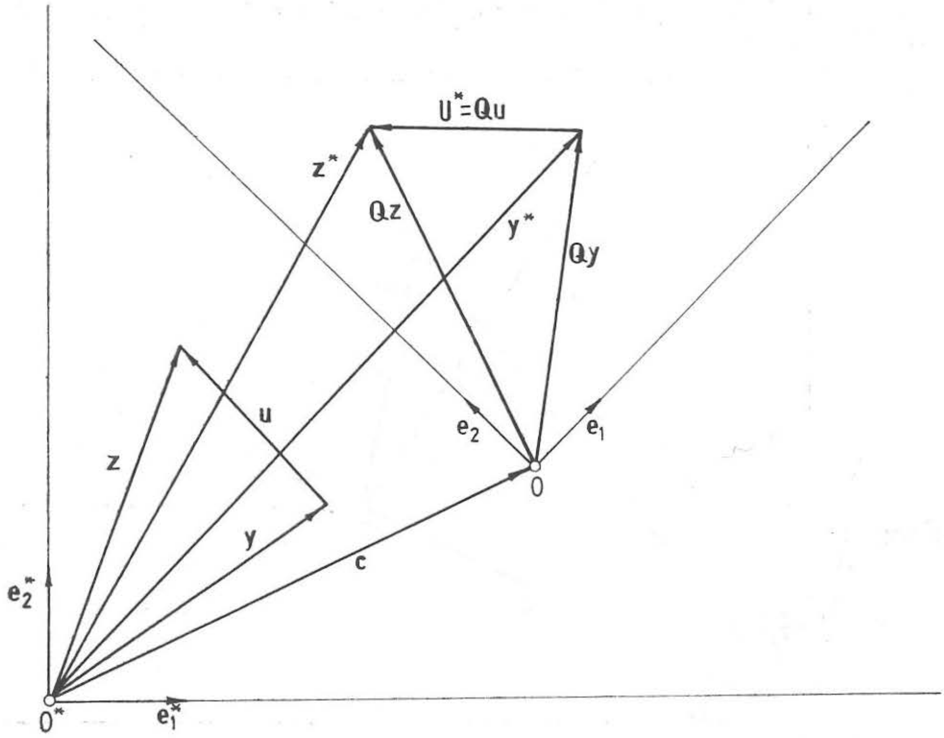
za vektor

$$\boldsymbol{u}^* = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{u}. \tag{3.7}$$

Zakon transformacije (3.6) zasniva se na činjenici da skalarna veličina ne menja svoju vrednost pri promeni posmatrača. Vektorska transformacija (3.7) sledi neposredno iz (3.4) i činjenice da se bilo koji vektor (koji nije vektor položaja) može predstaviti kao razlika vektora položaja dve tačke u E_3. Tako je na (sl. 47).

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{z} - \boldsymbol{y} \quad \text{i} \quad \boldsymbol{u}^* = \boldsymbol{z}^* - \boldsymbol{y}^*.$$

Definicija 1: *Tenzor drugog reda* $\boldsymbol{T}$ *je linearna transformacija vektora u vektor.*



Sl. 47

Na osnovu ove definicije lako je izvesti zakon transformacije tenzora drugog reda. Zaista ako je

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{w},$$

$$\boldsymbol{v}^* = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{v} \quad \text{i} \quad \boldsymbol{w}^* = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{w},$$

onda je

$$\boldsymbol{v}^* = \boldsymbol{T}^*\boldsymbol{w}^*.$$

Ali tada je, s obzirom na prethodne izraze

$$\boldsymbol{Q}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{T}\boldsymbol{w} = \boldsymbol{T}^*\boldsymbol{Q}\boldsymbol{w},$$

ili

$$\boldsymbol{T}^* = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{T}\boldsymbol{Q}^T, \tag{3.8}$$

što predstavlja traženi zakon transformacije za tenzor drugog reda.

Transformacije $(3.4)_1$ i (3.6—7) imaju više koordinatnih reprezentacija. Razlog tome je što se svaka od veličina u ovim izrazima može izraziti ravnopravno u odnosu na ortonormirane baze $\boldsymbol{e}_i$ i $\boldsymbol{e}_j^*$ koje odgovaraju sistemima $\mathcal{F}$ i $\mathcal{F}^*$ respektivno. Pri tome je, s obzirom na ortogonalnost matrice $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{Q}\boldsymbol{e}_k^* = \boldsymbol{e}_k$. Teškoće nastaju kada je potrebno izraziti komponente neke veličine u odnosu na ova dva sistema tako da se iz njihovog označavanja vidi ne samo o kojoj je veličini reč, nego i u odnosu na koji sistem je predstavljena. Logično je usaglasiti te oznake sa oznakama baze.

Primera radi, moguće je pisati za bilo koji vektor $\boldsymbol{a}$ i tenzor drugog reda S

$$\boldsymbol{a} = a_k \boldsymbol{e}_k = {}_{*}a_k \boldsymbol{e}^*_k,$$
$$\boldsymbol{S} = S_{kl} \boldsymbol{e}_k \otimes \boldsymbol{e}_l = {}_{*}S_{kl} \boldsymbol{e}^*_k \otimes \boldsymbol{e}^*_l, \tag{3.9}$$

gde je

$$ {}_{*}a_k = Q_{kl} a_l$$
$$ {}_{*}S_{kl} = Q_{km} Q_{ln} S_{mn}. \tag{3.10}$$

Tada je, imajući u vidu činjenicu da je $Q_{kl} = {}_{*}Q_{kl}$, lako pokazati da se $(3.4)_1$ može izraziti u obliku

$$z^*_k = c_k + {}_{*}z_k = c_k + Q_{kl} z_l, \tag{3.11}$$

ili

$$ {}_{*}z^*_k = Q_{kl\,*}z_l + {}_{*}c_k. \tag{3.12}$$

S obzirom na istovetnost ovih izraza po obliku, mi ćemo se ubuduće pozivati na (3.11).

Dalje je moguće pokazati da (3.7—8)) u komponentalnom obliku glase

$$ {}_{*}u_k = Q_{kl} u_l, \tag{3.13}$$

ili

$$u^*_k = {}_{*}u_k, \tag{3.14}$$

i

$$ {}_{*}T^*_{kl} = Q_{km} Q^*_{ln} T_{mn}, \tag{3.15}$$

ili

$$T^*_{kl} = {}^{*}T_{kl}. \tag{3.16}$$

Transformacioni izraz (3.13) nam kazuje da se, u odnosu na dva posmatrača, komponente vektora, koji posmatrači identifikuju kao istovetan, razlikuju za njihovu međusobnu orientaciju određenu tenzorom rotacije $\boldsymbol{Q}$. U slučaju transformisanog izraza (3.14) zaključujemo da se orijentacija vektora ne menja pri transformaciji posmatrača (sl. 47). Isto tumačenje važi i za transformacione izraze (3.15) i (3.16).

U slučaju tenzora višeg reda od dva, zakon transformacije se mora izražavati u komponentalnom obliku. On se izvodi na osnovu stava:

Neki tenzor bilo kog reda transformiše tenzor u tenzor.

Na osnovu ovog stava nije teško pokazati da zakon transformacije tenzora proizvoljnog reda, $T_{kl\ldots m}$, glasi

$$ {}_{*}T^*_{kl,\ldots m} = Q_{kp} Q_{lq} \ldots Q_{mr\,*} T_{pq\ldots r}, \tag{3.17}$$

i

$$T^*_{kl\ldots m} = {}_{*}T_{kl\ldots m}. \tag{3.18}$$

Jasno je da su (3.13—16) specijalni slučajevi ovih zakona transformacije.

U literaturi se transformacije sistema referencije i zakoni transformacije skalarnih i tenzorskih veličina u komponentalnom obliku daju izrazima

$$z^*_k = Q_{kl} z_l + c_k,$$
$$t^* = t - a, \tag{3.19}$$

i

$$b^* = b,$$
$$T^*_{kl\ldots m} = Q_{kp} Q_{lq} \ldots Q_{mr} T_{pq\ldots r}. \tag{3.20}$$

Oni su istovetni sa ovde izvedenim izrazima (3.12), (3.6) i (3.18) u odnosu na posmatrača $\mathcal{F}^*$. Imajući u vidu ovu napomenu možemo ih dalje uvek koristiti kada bude u pitanju komponentalno predstavljanje zakona transformacije skalarnih i tenzorskih veličina.

Važno je istaći da se transformacija sistema referencije ili posmatrača (3.4) može pisati i u obliku

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}^* &= \boldsymbol{Q}(t)\,\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}(t) \\ t^* &= t - a, \end{aligned} \tag{3.21}$$

gde je sa $\boldsymbol{x}^*$ (x^{*k}) i $\boldsymbol{x}$ (x^k) označen položaj tačke P ali u odnosu na krivolinijski koordinatni sistem referencije posmatrača $\mathcal{F}^*$ i $\mathcal{F}$ respektivno.

Zakoni transformacije skalarnih, vektorskih i tenzorskih veličina drugog reda i dalje glase

$$b^* = b, \tag{3.6}$$

$$\boldsymbol{u}^* = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{u}, \tag{3.7}$$

$$\boldsymbol{T}^* = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{T}\boldsymbol{Q}^T, \tag{3.8}$$

ali sada računati u odnosu i na krivolinijske koordinate x^k odnosno x^{*k}.

Komponentalna reprezentacija (3.21) i (3.6—8) u odnosu na krivolinijske koordinate nije samo višestruka nego i sa fizičkog stanovišta nejasna za razliku od njihove reprezentacije u odnosu na Dekartove koordinate, kada se relativno kretanje dva posmatrača, za det $\boldsymbol{Q} = 1$, može posmatrati kao kruto kretanje dva sistema referencije. Zbog toga je (3.21) i (3.6—8), kada su u pitanju krivolinijske koordinate, najbolje posmatrati sa geometrijskog stanovišta ne pozivajući se na koordinatnu reprezentaciju.

Napomena 1: Vrlo je važno praviti razliku između koordinatnog sistema i sistema referencije, kako je ovde naznačen, kao i koordinatne transformacije od promene sistema referencije. Transformacija koordinatnog sistema je nezavisna od vremena za razliku od promene sistema referencije (3.4). Prema tome, kriterijum tenzorskog karaktera neke veličine se određuje u odnosu na proizvoljnu koordinatnu transformaciju dopustivu u E_3. U odnosu na promenu sistema referencije (3.4) određuje se *objektivnost tenzora* (o čemu će dalje biti reči). Nas interesuje objektivnost samo tenzorskih veličina proizvoljnog reda u procesu kretanja tela.

Očigledno da je transformacija $(3.19)_1$ po svome obliku samo posebna grupa euklidskih transformacija u odnosu na opšte koordinatne transformacije dopustive u E_3 za koju je

$$\frac{\partial z_k^*}{\partial z_l} = Q_{kl}(t) \quad \text{i} \quad \frac{\partial z_k}{\partial z_l^*} = Q_{lk}(t), \tag{i}$$

jer je

$$Q_{km}Q_{lm} = Q_{mk}Q_{ml} = \delta_{kl}, \tag{3.5a}$$

s obzirom na (3.5).

Korišćenjem, npr. (i) u zakonu transformacije (3.20) tenzora $T_{kl\ldots m}$ dobijamo

$$T^*_{kl\ldots m} = T_{pq\ldots r}\frac{\partial z_p}{\partial z_k^*}\frac{\partial z_q}{\partial z_l^*}\cdots\frac{\partial z_r}{\partial z_m^*}.$$

Mada smo svesni da su koeficijenti transformacije $\frac{\partial z_k}{\partial z_l^*}$ u ovom izrazu, na način kako smo do njega došli, funkcije vremena, sam izraz se, za svaki uočeni trenutak vremena, po svom obliku ne razlikuje od koordinatne transformacije. To znači da se $T^*_{kl\ldots m}$ može formalno odrediti poznavanjem $T_{pq\ldots r}$ u odnosu na sistem z, primenom u datom trenutku transformacije $(3.19)_1$ sada tumačene kao koordinatne transformacije sistema $\boldsymbol{z} \longrightarrow \boldsymbol{z}^*$.

Međutim, razlika između transformacije (3.20) i stvarne koordinatne transformacije postaje očigledna kada se razmatra promena po vremenu tenzora. Tako

materijalni izvod tenzora $T_{kl\ldots m}$ *je takođe tenzor* jer iz zakona transformacije

$$\bar{T}_{kl\ldots m} = T_{pq\ldots r} \frac{\partial y^p}{\partial \bar{y}^k} \frac{\partial y^q}{\partial \bar{y}^l} \cdots \frac{\partial y^r}{\partial \bar{y}^m},$$

sledi

$$\dot{\bar{T}}_{kl\ldots m} = \dot{T}_{pq\ldots r} \frac{\partial y^p}{\partial \bar{y}^k} \frac{\partial y^q}{\partial \bar{y}^l} \cdots \frac{\partial y^k}{\partial \bar{y}^m},$$

zbog nezavisnosti koeficijenata transformacije $\frac{\partial y^p}{\partial \bar{y}^k}$ od vremena pri dopustivoj koordinatnoj transformaciji $\bar{y}^k = \bar{y}^k (y^b)$.

Takav analogon ne važi za slučaj objektivnih tenzora jer u opštem slučaju:

materijalni izvod objektivnog tenzora je tenzor koji nije objektivan.

Zaista, iz (3.20) sledi da je

$$\dot{T}^*_{kl\ldots m} = Q_{kp}Q_{lq} \cdots Q_{mr}\dot{T}_{pq\ldots r} + \cdots + Q_{kp}Q_{lq} \cdots \dot{Q}_{mr}T_{pq\ldots r}$$

odakle se vidi da tenzor $\dot{T}_{kl\ldots m}$ nije objektivan.

Iz ovog i prethodnog izraza očigledna je razlika između oblika transformacije jedne promene po vremenu tenzora koji je objektivan pri transformaciji sistema referencije i koordinatne transformacije.

Ekvivalentno kretanje. Brzina. Ubrzanje. Promena sistema referencije dovodi do promene opisa kretanja tela. Zaista, neka je u odnosu na sistem referencije ili posmatrača $\mathcal{F}$ kretanje definisano sa

$$x^k = x^k (X^K, t), \tag{2.4.5}$$

ili kratko

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} (X, t). \tag{3.22}$$

Isto kretanje je, s obzirom na (3.21), definisano u odnosu na sistem referencije ili posmatrača $\mathcal{F}^*$ sa

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}^* &= \boldsymbol{x}^* (X, t^*) = \boldsymbol{Q} (t)\, \boldsymbol{x} (X, t) + \boldsymbol{c} (t), \\ t^* &= t - a. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Fizički $x(X, t)$ i $x^*(X, t^*)$ opisuju isto kretanje. Sa matematičkog stanovišta kretanje $x^*(X, t^*)$ je dobijeno kada se na $x(X, t)$ superponira kruta transformacija i kada se izvrši vremenska translacija.

Uopšte, za dva kretanja ćemo kazati da su ***ekvivalentna*** *ako su vezana relacijama* (3.23.).

Relacija između brzina iste materijalne čestice u odnosu na dva posmatrača se dobija kada se nađe materijalni izvod (3.23) po vremenu t^*. Tada je brzina u odnosu na $\mathcal{F}^*$ data sa

$$v^* = \frac{dx^*}{dt} = \dot{c} + \dot{Q}x + Q\frac{dx}{dt}.$$

ako se, na osnovu $(3.23)_2$, zna da je $dt^* = dt$. Kako je $\frac{dx}{dt} = v$ brzina u odnosu na posmatrača $\mathcal{F}$, prethodni izraz postaje

$$v^* = \dot{c} + \dot{Q}x + Qv. \tag{3.24}$$

Takođe je iz (3.4), ili $(3.23)_1$ i (3.5)

$$x = Q^T(x^* - c)$$

na osnovu čega je moguće pisati transformacioni izraz za brzinu u obliku

$$v^* = \dot{c} + A(x^* - c) + Qv, \tag{3.25}$$

ili, konačno

$$v^* - Qv = \dot{c} + A(x^* - c), \tag{3.26}$$

gde je

$$A = \dot{Q}Q^T = -A^T. \tag{3.27}$$

Antisimetričnost tenzora A sledi iz (3.5).

Sa fizičkog stanovišta tako definisan tenzor A predstavlja ugaonu brzinu sistema referencije posmatrača $\mathcal{F}$ u odnosu na sistem referencije posmatrača $\mathcal{F}^*$.

Ako se potraži materijalni izvod po vremenu izraza (3.25) onda dobijamo relaciju između ubrzanja a^* i a u odnosu na posmatrače $\mathcal{F}^*$ i $\mathcal{F}$ respektivno, koja glasi

$$a^* = \ddot{c} + \dot{A}(x^* - c) + A(v^* - \dot{c}) + \dot{Q}v + Qa.$$

Koristeći transformacioni izraz za $\dot{Q}v$, tj.

$$\dot{Q}v = \dot{Q}[Q^T(Qv)] = A \cdot [v^* - c - A \cdot (x^* - c)],$$

gde smo koristili (3.26) i (3.27), dobijamo da je

$$a^* - Qa = c^* + 2A(v^* - \dot{c}) + (\dot{A} - A^2)(x^* - c). \tag{3.28}$$

Važno je napomenuti da smo pri izvođenju transformacionih izraza za brzinu i ubrzanja u slučaju transformacije posmatrača koristili pravila za određivanje brzine i ubrzanja, koja su nezavisna od posmatrača i kao takva važe za svakog od njih. Za brzinu smo to posebno naglasili, dok se za ubrzanje podrazumeva da je $\frac{dv^*}{dt}(\equiv a^*)$ u odnosu na $\mathcal{F}^*$ i $\frac{dv}{dt}(\equiv a)$ u odnosu na $\mathcal{F}$.

Nezavisnost od sistema referencije ili posmatrača

Do sada smo razmatrali neku pojavu opisanu skalarom, vektorom ili tenzorom u odnosu na jedan sistem referencije ili posmatrača i prevodili njen opis, pomoću (3.4), u odnosu na drugog posmatrača. Na taj način smo došli do zakona transformacije (3.6—8) i pojma ekvivalentnog kretanja definisanog sa (3.23).

Sasvim druge prirode je problem iznalaženja veze između veličina u odnosu na dva sistema referencije koje se određuju po nekim pravilima koja ne zavise od sistema referencije u smislu da se jednako mogu primeniti u svakom od njih.

Primer tih veličina su brzina i ubrzanje koje se određuju na osnovu kretanja materijalne čestice po pravilima koja ne zavise od posmatrača. To smo i napomenuli u prethodnom odeljku. Na osnovu tih pravila mogli smo odrediti brzinu i ubrzanje u odnosu na $\mathcal{F}^*$ preko brzine i ubrzanja u odnosu na $\mathcal{F}$ pomoću, očigledno, funkcija $\boldsymbol{Q}$ i $\boldsymbol{c}$ kojima je određena transformacija posmatrača. Tako dobijeni rezultati se izražavaju relacijama (3.26) i (3.28). Iz njih je jasno da brzina i ubrzanje, kako ih vide posmatrači $\mathcal{F}$ i $\mathcal{F}^*$, ne predstavljaju razne opise jedne iste pojave. Zaista, kada bi to bio slučaj, kao vektorska veličina brzina $\boldsymbol{v}$ u odnosu na posmatrača $\mathcal{F}$ prevedena u sistem referencije, tj. u odnosu na posmatrača $\mathcal{F}^*$ bi glasila $(\boldsymbol{v})^*$ i zadovoljavala zakon transformacije (3.7), tj., $(\boldsymbol{v})^* = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{v}$, što je očigledno različito, u opštem slučaju, od (3.26). Isto to važi i za ubrzanje. Prema tome, kako je u opštem slučaju $\boldsymbol{v}^* \neq (\boldsymbol{v})^* = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{v}$ i $\boldsymbol{a}^* \neq (\boldsymbol{a})^* = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{a}$ kažemo da *brzina* i *ubrzanje zavise* od *posmatrača*. Ovaj primer je dovoljan da objasni da:

Pravila ili definicije, koje ne zavise od sistema referencije mogu dovesti do veličina koje zavise od sistema referencije.

Time nije isključena mogućnost da neka pravila, mada formulisana u zavisnosti od sistema referencije, mogu dovesti do veličina koje od njih ne zavise. Takve veličine možemo, u principu, razmatrati apstraktno, ne koristeći sistem referencije.

Neka je, na osnovu nekog pravila, dato skalarno polje A i A^* u odnosu na $\mathcal{F}$ i $\mathcal{F}^*$, respektivno. Ako je

$$A^*(\boldsymbol{x}^*, t^*) = [A(\boldsymbol{x}, t)]^* = A(\boldsymbol{x}, t) \tag{3.29}$$

za svaku transformaciju sistema referencije (3.21), *tada kažemo da su A i A^* nezavisni od posmatrača, ili da je skalarno polje A indiferentno u odnosu na transformaciju posmatrača. Kratko rečeno: za takvo skalarno polje A kažemo da je objektivno.*

Analogno tome vektorsko polje $\boldsymbol{u}$ i tenzorsko polje $\boldsymbol{T}$ zvaćemo indiferentno ili objektivno ako je

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}^*(\boldsymbol{x}^*, t^*) &= [\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)]^* = \boldsymbol{Q}(t)\,\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t), \\ \boldsymbol{T}^*(\boldsymbol{x}^*, t^*) &= [\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}, t)]^* = \boldsymbol{Q}(t)\,\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}, t)\,\boldsymbol{Q}^T(t), \end{aligned} \tag{3.30}$$

za svaku transformaciju posmatrača (3.21).

Pri tome smo sa $[\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)]^*$ i $[\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}, t)]^*$ označili vektorsko polje $\boldsymbol{u}$ i tenzorsko polje $\boldsymbol{T}$, respektivno, u odnosu na posmatrača $\mathcal{F}$ kako ih vidi posmatrač $\mathcal{F}^*$.

Prva od ovih relacija tvrdi da $\boldsymbol{u}^*$ i $\boldsymbol{u}$ predstavljaju isti vektor, kojim se predstavlja jedna te ista pojava, međutim, u odnosu na razne sisteme referencije ili posmatrače [videti (3.7)]. Druga relacija, kao što smo videli na osnovu (3.8), tvrdi da T^* i T za jedan isti događaj, na primer w, određuju istu transformaciju kojom se taj događaj prevodi u isti događaj, npr. v.

Sve što je rečeno za komponentalnu reprezentaciju zakona transformacije (3.7—8) važi i u slučaju (3.30). Takođe važi da se u slučaju tenzorskih polja reda većeg od dva, zakon transformacije polja nezavisnog od sistema referencije ili posmatrača, mora pisati u komponentalnom obliku u odnosu na Dekartov sistem koordinata i da je dat sa (3.20).

U svakom slučaju, tj. nezavisno od koordinatnog sistema koji se koristi, kaže se:

> *Veličine, koje zavise samo od orijentacije sistema referencije (određene sa Q), a ne i od drugih karakteristika njegovog kretanja (kao što su translatorno pomeranje, brzina, ubrzanje, ugaona brzina, ugaono ubrzanje), su* ***indiferentne*** *ili* ***objektivne.***

Na osnovu toga sledi *definicija:*

> ***Funkcije i polja*** *čije su vrednosti skalari, vektori ili tenzori nazvaćemo* ***indiferentnim*** *ili* ***objektivnim*** *ako se i zavisne i nezavisne skalarne, vektorske i tenzorske promenljive transformišu po zakonima* (3.29—30), *respektivno.*

Najveći broj polja sa kojima se susrećemo u mehanici, zavise od sistema referencije. Međutim, npr.: slučaj sa brzinom (ubrzanjem) nam pokazuje da, ukoliko se ograničimo na podgrupu g grupe euklidskih transformacija (3.21) možemo dobiti rezultat za koji bi važio zakon transformacije $(3.30)_1$. U tom slučaju možemo kazati da dati konkretni vektor ili tenzor ne zavise od sistema referencije u odnosu na grupu g.

Tako npr. iz (3.28) sledi da je $a^* = Qa$ ako, i samo ako, je $\ddot{c} = 0$ i $A = 0$. Tada je $\dot{c} = \text{const.}$ i $Q = \text{const.}$ Tako određenu grupu transformacija sistema referencije ili posmatrača g, u odnosu na koju je ubrzanje objektivno, nazvaćemo grupom *Galilejevih* (Galileo Galilei) *transformacija*. Takva transformacija prevodi jedan sistem referencije u drugi translatornim kretanjem konstantnom brzinom (bez promene relativne orijentacije).

Dalje se, iz (3.26), vidi da je $v^* = Qv$ ako, i samo ako, je $\dot{c} = 0$ i $A = 0$. Tada je $c = \text{const.}$ i $Q = \text{const.}$ Ova podgrupa Galilejevih transformacija očuvava objektivnost brzine i naziva se grupom *konstantnih krutih transformacija*. U odnosu na ovu grupu transformacija dva posmatrača se nalaze u mirovanju jedan u odnosu na drugog.

Do sada smo razmatrali dva različita pristupa u određivanju veličina u odnosu na dva posmatrača. Jedan smo ovde izneli, a drugi je razmatran u prethodnom odeljku i naveden u samom početku ovog odeljka. Tim postupkom, istakli smo, moguće je uvek jednu veličinu poznatu u odnosu na jednog posmatrača trivijalno proširiti na način kojim se definiše veličina nezavisna od sistema referencije ili posmatrača. Kao ilustraciju posmatrajmo ubrzanje a dato u odnosu na $\mathcal{F}$. U odnosu na posmatrača $\mathcal{F}^*$, pod uslovom da predstavlja objektivnu veličinu, saglasno sa (3.30), ona postaje Qa. Uvodeći oznaku $(a)^* \equiv Qa$, čime naglašavamo da je to ista veličina a ali u odnosu na posmatrača $\mathcal{F}^*$, što nije slučaj sa a^*, i koristeći (3.28) dobijamo

$$(a)^* \equiv Qa = a^* - \ddot{c} - 2A(v^* - \dot{c}) - (\dot{A} - A^2)(x^* - c). \tag{3.31}$$

Tako dobijena objektivna veličina, očigledno, u slučaju posmatrača $\mathcal{F}$ predstavlja polje ubrzanja nekog deformabilnog tela. Razume se da ona predstavlja polje ubrzanja i u odnosu na grupu Galilejevih transformacija.

Na isti način lako je pokazati da je

$$(\boldsymbol{v})^* \equiv \boldsymbol{Q}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}^* - \dot{\boldsymbol{c}} - \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{c}) \tag{3.32}$$

objektivna veličina i da predstavlja polje brzina u odnosu na posmatrača $\mathcal{F}$ i grupu konstantnih krutih transformacija.

Time završavamo sa opštim razmatranjima problema nezavisnosti od posmatrača i prelazimo na primenu ovde iznetih kriterijuma u slučaju konkretnih fizičkih polja koja su dalje od posebnog interesa za nas.

Gradijent deformacije. Na osnovu definicije gradijenta deformacije, koja jednako važi za posmatrača $\mathcal{F}$ i $\mathcal{F}^*$ i (3.23) sledi da je

$$\boldsymbol{F}^* = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{F}. \tag{3.33}$$

Prema tome: gradijent deformacije se pri transformaciji posmatrača transformiše kao vektor, nije nezavisan od sistema referencije i nije objektivan.

Desni i levi Koši-Grinov tenzor deformacije. Iz (2.7.14) i (3.33) lako je naći transformacione izraze za tenzore $\boldsymbol{C}$ i $\boldsymbol{B}$. Tako je

$$\boldsymbol{C}^* = (\boldsymbol{F}^*)^T \boldsymbol{F}^* = \boldsymbol{F}^T\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F} = \boldsymbol{C}, \tag{3.34}$$

i

$$\boldsymbol{B}^* = \boldsymbol{F}^* (\boldsymbol{F}^*)^T = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^T\boldsymbol{Q}^T = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}^T, \tag{3.35}$$

odakle se vidi da je levi Koši-Grinov tenzor deformacije $\boldsymbol{B}$ indiferentan u odnosu na posmatrača za razliku od desnog Koši-Grinovog tenzora deformacije koji to nije.

Desni i levi tenzor izduženja. S obzirom na pozitivnu definitnost tenzora $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{V}$ iz (3.34) i (3.35) sledi da je

$$\boldsymbol{U}^* = \boldsymbol{U}, \tag{3.36}$$

i

$$\boldsymbol{V}^* = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{V}\boldsymbol{Q}^T, \tag{3.37}$$

Prema tome levi tenzor izduženja $\boldsymbol{V}$ je indiferentan ili objektivan, dok desni tenzor izduženja $\boldsymbol{U}$ to nije. Nije objektivan ni tenzor rotacije $\boldsymbol{R}$ jer iz $(2.5.15)_1$, (3.36) sledi da je

$$\boldsymbol{R}^* = \boldsymbol{F}^* (\boldsymbol{U}^*)^{-1} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{F}\boldsymbol{U}^{-1} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{R}, \tag{3.38}$$

tj., tenzor rotacije $\boldsymbol{R}$ transformiše se kao vektor.

Gradijent brzine. Tenzor brzine deformacije. Tenzor vrtložnosti. Iz (3.33) dobijamo

$$\dot{\boldsymbol{F}}^* = \dot{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{F} + \dot{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{F}. \tag{3.33a}$$

čime je određena transformacija $\dot{\boldsymbol{F}}$ pri transformaciji posmatrača. Takođe je

$$(\boldsymbol{F}^*)^{-1} = (\boldsymbol{Q}\boldsymbol{F})^{-1} = \boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{Q}^T. \tag{3.33b}$$

Tada, koristeći (3.8.24), ove izraze i (3.27) nalazimo

$$L^* = \dot{F}^* (F^*)^{-1} = (Q\dot{F} + \dot{Q}F) F^{-1}Q^T = Q\dot{F} F^{-1}Q^T + \dot{Q}Q^T$$
$$= QLQ^T + A. \tag{3.39}$$

Prema tome, gradijent brzine L nije objektivan. Na osnovu ovog izraza i (3.826) sledi

$$W^* = QWQ^T + A, \tag{3.40}$$

odakle se vidi da ni tenzor vrtložnosti nije objektivan.

Međutim, zakon transformacije za tenzor brzine deformacije D, na osnovu (3.8.25) pokazuje da je

$$D^* = QDQ^T + A + A^T = QDQ^T, \tag{3.41}$$

jer je $A + A^T = 0$ s obzirom na (3.27). To znači da je tenzor brzine deformacije nezavisan od posmatrača i kao takav indiferentan ili objektivan tenzor.

Napomena: Mada su F, C, U i L veličine koje zavise od posmatrača i kao takve neobjektivne, njihovi zakoni transformacije se međusobno razlikuju. Tako se iz (3.34) i (3.36) vidi da je $C^* = C$ i $U^* = U$, tj., da se pri transformaciji posmatrača ove veličine ne menjaju za razliku od F i L. Zbog toga ćemo dalje, radi definisanosti, kazati:

> *Vektorsko i tenzorsko polje je* ***invarijantno u odnosu na posmatrača*** *ako se ne menja pri transformaciji posmatrača.*

Saglasno tome, tenzorska polja C i U su *invarijantna* u odnosu na posmatrača ali ne i indiferentna.

Korotacioni i konvektivni izvod

U konstitutivnim jednačinama, kojima se opisuje ponašanje nekih idealnih materijala, javljaju se i materijalni izvodi pojedinih objektivnih tenzorskih veličina. Takve jednačine, prema definiciji, nisu indiferentne u odnosu na posmatrača, jer, kao što smo pokazali, materijalni izvod objektivne veličine nije u opštem slučaju objektivna veličina. Zbog toga se promena te objektivne veličine po vremenu ne bi smela javiti u konstitutivnoj jednačini u obliku koji bi narušavao indiferentnost konstitutivne jednačine u odnosu na posmatrača. Zato je potrebno (poželjno) definisati objektivan tenzor koji bi u sebi sadržao materijalni izvod te (objektivne) veličine.

Način na koji se razrešava taj problem, iz razloga praktične potrebe, ilustrovaćemo na objektivnom tenzoru drugog reda T. Tada je

$$T^* = QTQ^T, \tag{3.42}$$

i

$$\dot{T}^* = Q\dot{T}Q^T + \dot{Q}TQ^T + QT\dot{Q}^T. \tag{3.43}$$

Očigledno je da zbog poslednja dva člana $\dot{T}$ nije objektivno. U njima figuriše $\dot{Q}$ i $\dot{Q}^T$ koje možemo odrediti pomoću (3.40) i (3.27). Naime, smenom (3.27) u (3.40) i množenjem tako dobijenog izraza sa Q sa desne strane imamo

$$\dot{Q} = W^*Q - QW, \tag{3.44}$$

i

$$\dot{Q}^T = -Q^T W^* + W Q^T, \tag{3.45}$$

pri čemu smo koristili (3.5) i činjenicu da je $W^T = -W$. Smenom ovih izraza u (3.43) i grupisanjem članova u odnosu na $\mathcal{F}$ i $\mathcal{F}^*$ dobijamo

$$\dot{T}^* - W^*T^* + T^*W^* = Q(\dot{T} - WT + TW)\,Q^T. \tag{3.46}$$

Neka je, po definiciji,

$$\overset{\circ}{T} \equiv \dot{T} - WT + TW. \tag{3.47}$$

Tako definisanu veličinu $\overset{\circ}{T}$ nazvaćemo *Jaumanov* (*Jaumann*) ili *ko-rotacioni izvod* objektivnog tenzora T.

Pomoću tako uvedene veličine može se (3.46) pisati u obliku

$$\overset{\circ}{T}{}^* = Q\overset{\circ}{T}Q^T, \tag{3.48}$$

koji pokazuje da je ko-rotacioni izvod $\overset{\circ}{T}$ objektivan.

Specijalno u slučaju kada je $W = 0$ sledi, iz (3.47) da je $\overset{\circ}{T} = \dot{T}$. Tada se sistem referencije posmatrača $\mathcal{F}$ rotira zajedno sa posmatranim telom $\mathcal{B}$, zbog čega se takvi sistemi nazivaju ko-rotacionim. Sa fizičkog stanovišta to znači da se, pri odsustvu rotacije materijala u odnosu na sistem referencije posmatrača $\mathcal{F}$, ko-rotacioni izvod $\overset{\circ}{T}$ svodi na materijalni izvod $\dot{T}$. Tada je

$$\overset{\circ}{T}{}^* = \dot{T}^* - W^*T^* + T^*W^* = Q\dot{T}Q^T$$

odakle sledi da je, za takav izbor posmatrača $\mathcal{F}$, $\overset{\circ}{T}{}^*$ ustvari $\dot{T}$ kako ga vidi posmatrač $\mathcal{F}^*$. Ili, $\overset{\circ}{T}{}^*$ tada određuje promenu po vremenu objektivne veličine T koju posmatrač $\mathcal{F}^*$ uočava pri praćenju translatornog i rotacionog kretanja materijalnog elementa tela $\mathcal{B}$. Isto tumačenje, očigledno, važi i za (3.47) ali sada za $\overset{\circ}{T}$ u odnosu na posmatrača $\mathcal{F}$. Uopšte,

> *ko-rotacioni izvod nekog objektivnog tenzora je objektivan tenzor za opštu grupu transformacija* (3.4) *koji se svodi na materijalni izvod u slučaju ko-rotacionih sistema referencije.*

Uvođenje ko-rotacionog izvoda nam omogućuje da se konstitutivne jednačine mogu učiniti indiferentnim u odnosu na posmatrača zamenom $\dot{T}$ sa $\overset{\circ}{T}$ ako su sve ostale zavisne i nezavisne promenljive indiferentne. Moguće je takođe, u tom slučaju, umesto $\overset{\circ}{T}$ uvesti smenu $\dot{T} - WT + TW$.

Važno je uočiti da ko-rotacioni izvod nije jedina moguća objektivna veličina kojom se definiše promena objektivnog tenzora T. Na osnovu ko-rotacionog izvoda moguće je odrediti i druge objektivne veličine kojima se može zameniti $\dot{T}$. Tako se npr. dodavanjem ili oduzimanjem objektivnih tenzora DT i TD iz (3.47) dobijaju sledeći objektivni tenzori

$$\begin{aligned}
&\overset{\circ}{\boldsymbol{T}} + \boldsymbol{DT} + \boldsymbol{TD} = \dot{\boldsymbol{T}} + \boldsymbol{L}^T\boldsymbol{T} + \boldsymbol{TL},\\
&\overset{\circ}{\boldsymbol{T}} + \boldsymbol{DT} - \boldsymbol{TD} = \dot{\boldsymbol{T}} + \boldsymbol{L}^T\boldsymbol{T} - \boldsymbol{TL}^T,\\
&\overset{\circ}{\boldsymbol{T}} - \boldsymbol{DT} + \boldsymbol{TD} = \dot{\boldsymbol{T}} - \boldsymbol{LT} + \boldsymbol{TL},\\
&\overset{\circ}{\boldsymbol{T}} - \boldsymbol{DT} - \boldsymbol{TD} = \dot{\boldsymbol{T}} - \boldsymbol{LT} - \boldsymbol{TL}^T,
\end{aligned} \tag{3.49}$$

gde smo pri izvođenju desnih strana koristili (3.2.23—26). Svaki od ovih izraza je jednako dobar, sa stanovišta objektivnosti, za zamenu $\dot{\boldsymbol{T}}$ u konstitutivnoj jednačini. Prvi od njih ima posebno značenje. Mi ćemo ga ovde označiti sa $\overset{\triangle}{\boldsymbol{T}}$, tj.

$$\overset{\triangle}{\boldsymbol{T}} = \overset{\circ}{\boldsymbol{T}} + \boldsymbol{DT} + \boldsymbol{TD} = \dot{\boldsymbol{T}} + \boldsymbol{L}^T\boldsymbol{T} + \boldsymbol{TL}, \tag{3.50}$$

i, saglasno matematičkoj terminologiji, nazvati *konvektivnim izvodom*. Sa fizičkog stanovišta predstavlja proširenje ko-rotacionog izvoda. Naime, iz (3.50), (3.46) i činjenice da je $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{W} + \boldsymbol{D}$ se vidi da

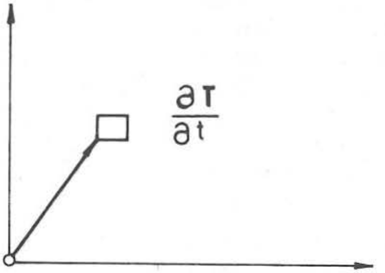
> *konvektivni izvod određuje promenu po vremenu objektivne tenzorske veličine $\boldsymbol{T}$, koju posmatrač $\mathcal{F}$ uočava pri praćenju translatornog, rotacionog i deformacionog kretanja materijalnog elementa tela $\mathcal{B}$.*

Značenje raznih izvoda po vremenu, radi lakšeg vizuelnog sagledavanja i razumevanja, prikazano je grafički na slici 48.

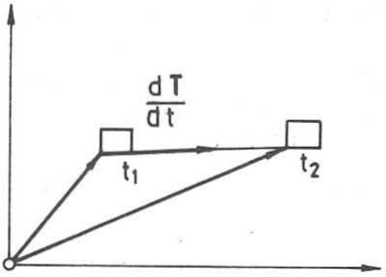
Napomena 2: Kada je u pitanju ne bilo kakav tenzor $\boldsymbol{T}$ nego tenzor napona, tada ćemo svaku objektivnu veličinu, kojom možemo zameniti $\dot{\boldsymbol{T}}$ nazvati, radi definisanosti, *naponski fluks*. Primeri naponskog fluksa su ko-rotacioni izvod $\overset{\circ}{\boldsymbol{T}}$ i konvektivni izvod napona $\overset{\triangle}{\boldsymbol{T}}$. Drugi primeri su dati sa (3.49). Izvodi višeg reda od $\overset{\circ}{\boldsymbol{T}}$ i $\overset{\triangle}{\boldsymbol{T}}$ takođe se mogu pojaviti u konstitutivnim jednačinama diferencijalnog tipa. Naziv „diferencijalan" dolazi zbog prisustva izvoda po vremenu, diferencijala, nezavisnih ili zavisnih konstitutivnih promenljivih u takvim konstitutivnim jednačinama.

Napomena 3: Pojam konvektivnog izvoda tesno je povezan sa konvektivnim koordinatama o kojim je bilo reči u odeljku II.4. Kako smo ih ovde uveli, one su materijalne linije i kao takve deformišu se sa telom. Zbog toga se koordinate materijalne čestice u odnosu na konvektivne koordinate x^k ne menjaju pri deformaciji tela, tj., *nezavisne su od vremena* (videti (2.4.8)) i predstavljaju „nalepnicu" ili „etiketu" čestice o kojoj je reč.

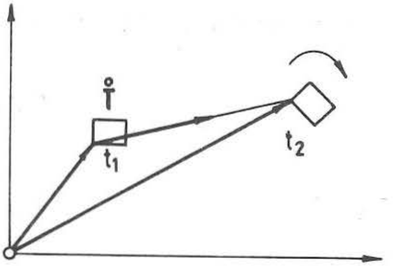
Međutim, njihov značaj u mehanici kontinuuma je daleko veći: one nam omogućavaju da formulišemo jednačine stanja ili konstitutivne jednačine nezavisno od kretanja tela u celosti — tj., u indiferentnom obliku u odnosu na posmatrača. To znači da sve tenzorske veličine i operacije potrebne pri formulisanju konstitutivnih jednačina (jednačina stanja) treba da budu izražene u odnosu na konvektivni koordinatni sistem. Tako formulisane konstitutivne jednačine onda opisuju unutrašnje dinamičko reagovanje tela na promenu kinematičkog stanja nezavisno



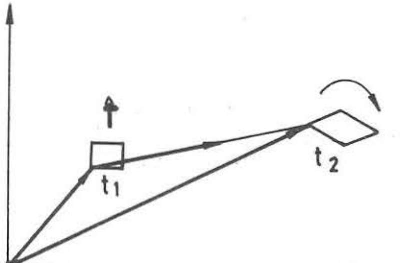
Parcijalni izvod — promena po vremenu u fiksnoj tački.



Materijalni izvod — promena po vremenu pri praćenju translatornog kretanja materijalnog tela.



Jaumanov ili ko-rotacioni izvod — promena po vremenu pri praćenju translatornog i rotacionog kretanja materijalnog tela.



Konvektivni izvod — promena po vremenu pri praćenju translatornog, rotacionog i deformacionog kretanja materijalnog tela.

Sl. 48

od kretanja tela kao celine. Jasno, jednačine formulisane u odnosu na konvektivne koordinate moraju biti transformisane u odnosu na fiksni koordinatni sistem, jer se sva fizička opažanja vrše u odnosu na neki takav koordinatni sistem. Primer izražavanja veličina u odnosu na konvektivan i fiksan koordinatni sistem dat je sa (2.7.3). U navedenom primeru se vidi da je C_{KL} — metrički tenzor u odnosu na konvektivne koordinate X^K - funkcija vremena, što je uvek slučaj, zbog čega transformacija između konvektivnog i fiksnog koordinatnog sistema nije sasvim ista kao transformacija između dva fiksna koordinatna sistema.

Konvektivne koordinate imaju, sa matematičkog stanovišta širi smisao jer se mogu uvesti i u n-dimenzionu diferencijabilnu mnogostrukost. Kao takve očigledno nemaju fizički smisao materijalnih linija za $n > 3$. Zbog toga se pojam konvektivnog izvoda mora sagledati opštije, jer se, na način kako smo do njega došli za tenzor $\boldsymbol{T}$, može stvoriti pogrešna slika o njegovom izvođenju u opštem slučaju. Pri tome naglašavamo, da je dosadašnji način izvođenja bio uslovljen praktičnim potrebama.

U cilju jednostavnosti ilustrovaćemo postupak izvođenja konvektivnog izvoda, sada u opštem slučaju, na apsolutnom tenzoru drugog reda $S^i{}_j(\boldsymbol{x}, t)$. U odnosu, na koordinate $\bar{x}^i$, definisane koordinatnom transformacijom

$$\bar{x}^i = \bar{x}^i(x^j), \quad (i, j = 1, 2, \ldots n) \tag{3.51}$$

isti tenzor je određen sa $\bar{S}^i{}_j(\bar{x}^k, t)$ saglasno zakonu transformacije

$$\bar{S}^i{}_j(\bar{x}^k, t) = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^p} \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^j} S^p{}_q(x^r, t). \tag{3.52}$$

Posmatraćemo promenu tog tenzorskog polja u vremenu pri kretanju tačke ξ čije su jednačine kretanja u odnosu na sistem x^k date jednačinama

$$x^i = x^i(\xi, t), \tag{3.53}$$

koje, u odnosu na sistem $\bar{x}^k$, postaju

$$\bar{x}^i = \bar{x}^i(x^j(\xi, t)) = \bar{x}^i(\xi, t). \tag{3.54}$$

Tada je

$$\bar{v}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^p} v^p, \tag{3.55}$$

gde je $\bar{v}^i \equiv \dot{\bar{x}}^i$ i $v^p \equiv \dot{x}^p$, i

$$\frac{d\bar{S}^i{}_j}{dt} = \frac{dS^p{}_q}{dt} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^p} \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^j} + S^p{}_q \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^p}\right) \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^j} + S^p{}_q \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^p} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^j}\right), \tag{3.56}$$

koji slede iz (3.53) i (3.51) respektivno.

Pomoću (3.54) i (3.53) nije teško pokazati da je

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^p}\right) = \frac{\partial^2 \bar{x}^i}{\partial x^p \partial x^r} v^r = \frac{\partial \bar{v}^i}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^p} - \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^r} \frac{\partial v^r}{\partial x^p},$$

odakle neposredno sledi i $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^j}\right)$ formalnom zamenom uloga nadvučenih i nenadvučenih koordinata. Smenom ovih izraza u (3.56) i korišćenjem (3.51), posle grupisanja članova, dobijamo

$$\frac{d\bar{S}^i{}_j}{dt} - \bar{S}^k{}_j \frac{\partial \bar{v}^i}{\partial \bar{x}^k} + \bar{S}^i{}_k \frac{\partial \bar{v}^k}{\partial x^j} = \left(\frac{dS^p{}_q}{dt} - S^r{}_q \frac{\partial v^p}{\partial x^r} + S^p{}_r \frac{\partial v^r}{\partial x^q}\right) \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^p} \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^j},$$

odakle se vidi da veličina

$$\frac{d_c S^i{}_j}{dt} \equiv \frac{dS^i{}_j}{dt} - S^k{}_j \frac{\partial v^i}{\partial x^k} + S^i{}_k \frac{\partial v^k}{\partial x^j}, \tag{3.57}$$

koju nazivamo *konvektivni izvod*, ima tenzorski karakter. Smenom

$$\frac{dS^i{}_j}{dt} = \frac{\partial S^i{}_j}{\partial t} + \frac{\partial S^i{}_j}{\partial x^k} v^k$$

u (3.57), konvektivni izvod se može pisati u obliku

$$\frac{d_c S^i{}_j}{dt} \equiv \frac{\partial S^i{}_j}{\partial t} + \frac{\partial S^i{}_j}{\partial x^k} v^k - S^k{}_j \frac{\partial v^i}{\partial x^k} + S^i{}_k \frac{\partial v^k}{\partial x^j}, \tag{3.58}$$

ili

$$\frac{d_c S^i{}_j}{dt} = \frac{\partial S^i{}_j}{\partial t} + \underset{v}{\pounds} S^i{}_j, \tag{3.59}$$

gde je, po definiciji,

$$\underset{v}{\pounds} S^i{}_j \equiv \frac{\partial S^i{}_j}{\partial x^k} v^k - S^k{}_j \frac{\partial v^i}{\partial x^k} + S^i{}_k \frac{\partial v^k}{\partial x^j}. \tag{3.60}$$

Tako definisana veličina $\underset{v}{\pounds} S^i{}_j$ se naziva *Liov* (*Lie*) *izvod*, koji je, s obzirom na (3.59) i tenzorski karakter $\frac{\partial S^i{}_j}{\partial t}$ (što neposredno sledi iz (3.52)), takođe tenzor. Iz (3.59) sledi takođe da je u slučaju stacionarnog tenzorskog polja $S^i{}_j$, tj., u slučaju kada je $\frac{\partial S^i{}_j}{\partial t} = 0$, konvektivni izvod jednak Liovom izvodu ili $\frac{d_c S^i{}_j}{dt} = \underset{v}{\pounds} S^i{}_j$.

S obzirom na to da je prostor fizičkih događaja metrički, u daljim razmatranjima ograničićemo se na diferencijabilnu mnogostrukost u kojoj je zadat osnovni metrički tenzor $g_{ij}(x^k)$. Kratko rečeno, ograničavamo se na Rimanove (Riemann) prostore. U tom slučaju je definisan kovarijantni izvod $v^k{}_{,l}$ vektora na osnovu koga dobijamo da je

$$\frac{\partial v^i}{\partial x^j} = v^i{}_{,j} - v^k \begin{Bmatrix} i \\ k\ j \end{Bmatrix}.$$

Smenom ovog izraza u (3.60), posle izvesnog sređivanja članova sledi da je

$$\underset{v}{\pounds} S^i{}_j = S^i{}_{j,k} v^k - S^k{}_j v^i{}_{,k} + S^i{}_k v^k{}_{,j}. \tag{3.61}$$

Uočimo da su u ovom izrazu svi članovi desne strane tenzorskog karaktera što nam omogućava da (3.59) pišemo u obliku

$$\frac{d_c S^i{}_j}{dt} = \frac{\partial S^i{}_j}{\partial t} + \underset{v}{\pounds} S^i{}_j = \dot{S}^i{}_j - S^k{}_j v^i{}_{,k} + S^i{}_k v^k{}_{,j}. \tag{3.62}$$

Ako se, dalje, uzme u obzir da je

$$v^i{}_{,j} = d^i_j + w^i{}_j,$$

gde su d^i_j i $w^i{}_j$ simetričan i antisimetričan deo tenzora $v^i{}_{,j}$ respektivno, onda (3.62) postaje

$$\frac{d_c S^i{}_j}{dt} = \dot{S}^i{}_j - w^i{}_k S^k{}_j + S^i{}_k w^k{}_j - d^i_k S^k{}_j + S^i{}_k d^k_j,$$

ili

$$\frac{d_c S^i{}_j}{dt} = \frac{d_r S^i{}_j}{dt} - d^i_k S^k{}_j + S^i{}_k d^k_j, \tag{3.63}$$

gde je, po definiciji

$$\frac{d_r S^i{}_j}{dt} = \dot{S}^i{}_j - w^i{}_k S^k{}_j + S^i{}_k w^k{}_j. \tag{3.64}$$

Tako definisana veličina je, očigledno, tenzorskog karaktera i naziva se *ko-rotacioni izvod.*

Relacija (3.63) se može izraziti u ekvivalentnom obliku

$$\left(\frac{d_c}{dt} - \frac{d_r}{dt}\right) S^i{}_j = S^i{}_k d^k_j - S^k{}_j d^i_k, \tag{3.63a}$$

odakle se vidi da su ko-rotacioni i konvektivni izvodi jednaki kada je

1. reč o skalarnom polju, ili
2. $S^i{}_j = 0$ u položaju za posmatrani trenutak, ili
3. $d^i_j = 0$.

U slučaju 1. i 2. imamo da je

$$\dot{S} = \frac{d_c S}{dt} = \frac{d_r S}{dt}, \tag{3.65}$$

gde je S skalarno polje ili tenozorsko polje drugog reda. Slučaj 3. u E_3 se može tumačiti sa fizičkog stanovišta: tada je kretanje lokalno i trenutno kruto.

Uopšte, kada je u pitanju prostor E_3, relacije (3.62) i (3.64) svode se na (3.50) i (3.47), respektivno, po formi.

Na kraju navedimo, bez izvođenja, izraz za konvektivni izvod proizvoljnog relativnog tenzorskog polja $S^{k\ldots m}_{p\ldots q}$ težine M i n-dimenzionom Rimanovom prostoru

$$\frac{d_c S^{k\ldots m}_{p\ldots q}}{dt} = \frac{\partial S^{k\ldots m}_{p\ldots q}}{\partial t} + \underset{v}{\pounds} S^{k\ldots m}_{p\ldots q}, \tag{3.66}$$

gde je Liov izvod, u odnosu na vektor $\boldsymbol{v}\,(v^k)$

$$\begin{aligned} \underset{v}{\pounds}\, S^{k\ldots m}_{p\ldots q} &= S^{k\ldots m}_{p\ldots q,r} v^r + S^{k\ldots m}_{r\ldots q} v^r_{,p} + S^{k\ldots m}_{p\ldots r} v^r_{,q} \\ &- S^{r\ldots m}_{p\ldots q} v^k_{,r} - \ldots S^{k\ldots r}_{p\ldots q} v^m_{,r} \\ &+ M S^{k\ldots m}_{p\ldots q} v^r_{,r}. \end{aligned} \tag{3.67}$$

Tada je ko-rotacioni izvod

$$\begin{aligned} \frac{d_r S^{k\ldots m}_{p\ldots q}}{dt} &= \dot{S}^{k\ldots m}_{p\ldots q} \\ &- w^k{}_r S^{r\ldots m}_{p\ldots q} - \ldots - w^m{}_r S^{k\ldots r}_{p\ldots q} \\ &+ S^{k\ldots m}_{r\ldots q} w^r{}_p + \ldots + S^{k\ldots m}_{p\ldots r} w^r{}_q \end{aligned} \tag{3.68}$$

tako da je

$$\begin{aligned} \left(\frac{d_c}{dt} - \frac{d_r}{dt}\right) S^{k\ldots m}_{p\ldots q} &= S^{k\ldots m}_{r\ldots q} d^r_p + \ldots + S^{k\ldots m}_{p\ldots r} d^r_q \\ &- d^k_r S^{r\ldots m}_{p\ldots q} - \ldots - d^m_r S^{k\ldots r}_{p\ldots q} \\ &+ M S^{k\ldots m}_{p\ldots q} d^r_r. \end{aligned} \tag{3.69}$$

Postupak za njihovo izvođenje je isti kao i u slučaju apsolutnog tenzora $S^i{}_j$. Polazi se od zakona transformacije relativnog tenzora težine M

$$\bar{S}^{k\ldots m}_{p\ldots q} = \Delta^M S^{a\ldots b}_{c\ldots d} \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^a} \cdots \frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^b} \frac{\partial x^c}{\partial \bar{x}^p} \cdots \frac{\partial x^d}{\partial \bar{x}^q}$$

gde je

$$\Delta = \left| \frac{\partial x^a}{\partial \bar{x}^k} \right|.$$

a M realan broj.

Iz do sada izvedenih izraza, kojima se određuje promena neke veličine po vremenu, vidi se da je među njima konvektivni izvod najopštiji. Iz (3.66) sledi da se konvektivni izvod svodi na Liov izvod za stacionarna tenzorska polja. U slučaju kretanja koje je lokalno trenutno i kruto konvektivni izvod postaje ko-rotacioni, a „materijalni" ako je kretanje još lokalno i trenutno translatorno. Ako ne postoji ni translatorno kretanje, konvektivni izvod se svodi na parcijalni. Time je određen ujedno i odnos između raznih izvoda, koje smo ovde definisali, a koji određuju promenu po vremenu posmatranog tenzorskog polja.

Rivlin–Eriksenovi (R. C. Rivlin–L. J. Ericksen) tenzori

U konstitutivnim jednačinama materijala diferencijalnog tipa pored tenzora napona javljaju se i materijalni izvodi desnog Koši-Grinovog tenzora deformacije $\boldsymbol{C}$ i materijalnog tenzora deformacije $\boldsymbol{E}$ koji nisu objektivni. Tako je npr., na osnovu (3.5.8),

$$\dot{\boldsymbol{C}} = 2\boldsymbol{F}^T \boldsymbol{D} \boldsymbol{F}. \tag{3.70}$$

Odavde sledi da $\dot{C}$ nije objektivno bez obzira na objektivnost tenzora brzine deformacije D, jer gradijent deformacije nije objektivan. Lako je pokazati, s obzirom na (3.34), da je $\dot{C}$ invarijantno u odnosu na transformaciju posmatrača. Isto to važi za materijalne izvode višeg reda za tenzore C i E. Ovim izvodima Rivlin i Eriksen su pripisali objektivne tenzore koji se po njima tako i nazivaju. Oni prirodno slede iz (2.7.1), tj., iz $ds^2 = dX^T C dX = dx^T dx$, kada se potraži materijalni izvod prvog, drugog i višeg reda. Tada je očigledno

$$\frac{d^n}{dt^n}[ds^2] = dX^T \frac{d^n C}{dt^n} dX = dx^T A_n dx \tag{3.71}$$

s obzirom na to da je $dx = F\,dX$ što neposredno sledi iz (2.5.2) i (2.5.10). Pri tome je, po definiciji,

$$\frac{d^n C}{dt^n} = F^T A_n F, \tag{3.72}$$

gde je n — prirodan broj. Za $n = 1$, iz (3.72) i (3.70) zaključujemo da je

$$A_1 = 2D. \tag{3.73}$$

Diferenciranjem (3.72) i korišćenjem (3.2.24) lako je izvesti rekurentne formule

$$A_{n+1} = \frac{dA_n}{dt} + A_n L + L^T A_n. \tag{3.74}$$

Tako uvedeni tenzori su indiferentni u odnosu na posmatrača. Da je A_1 indiferentno sledi iz (3.73) i indiferentnosti tenzora brzine deformacije D. Indiferentnost ostalih Rivlin-Eriksenovih tenzora dokazujemo metodom matematičke indukcije.

Neka su svi A_m za $m = 1, 2, \ldots n$ objektivni. Onda je, na osnovu (3.74)

$$\begin{aligned}
A^*_{n+1} &= \frac{dA^*_n}{dt} + A^*_n L^* + L^{*T} A^*_n \\
&= \frac{d}{dt}(QA_nQ^T) + QA_nQ^T(QLQ^T + A) \\
&\quad + (QL^TQ^T + A^T)\,QA_nQ^T \\
&= Q\left(\frac{dA_n}{dt} + A_nL + L^TA_n\right)Q^T \\
&\quad + \dot{Q}A_nQ^T + QA_n\dot{Q}^T + QA_nQ^TA + A^TQA_nQ^T \\
&= QA_{n+1}Q^T,
\end{aligned} \tag{3.75}$$

s obzirom na (3.74) i (3.27). Prema tome, iz uslova da su svi A_m, $m = 1, 2, \ldots n$ objektivni, sledi da je i A_{n+1} takođe objektivno, što je trebalo dokazati.

Truzdel i Nol definišu A_n na drugi način. Oni umesto početne nedeformisane konfiguracije kao referentnu koriste bilo koju konfiguraciju između početne i trenutne. Tada je, za dve konfiguracije tela $\mathcal{B}$ u dva trenutka vremena t i τ, deformacija tela određena sa

$$\begin{aligned} \xi &= \xi(\boldsymbol{X}, \tau), \\ \boldsymbol{x} &= \boldsymbol{x}(\boldsymbol{X}, t). \end{aligned} \tag{3.76}$$

To znači da je ξ — položaj koji u trenutku τ zauzima materijalna čestica određena sa $\boldsymbol{X}$ koja je u trenutku t bila u položaju $\boldsymbol{x}$. Na taj način preciziramo da se kao refe-. rentna konfiguracija uzima konfiguracija u posmatranom trenutku vremena t S obzirom na aksiomu neprobojnosti sledi da je

$$\xi = \xi(\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}, t), \tau) = \xi_t(\boldsymbol{x}, \tau). \tag{3.77}$$

Tako određena funkcija $\xi_t(\boldsymbol{x}, \tau)$ se naziva *relativna deformacija*. Iz (3.77) sledi da je

$$\boldsymbol{F}(\tau) = \boldsymbol{F}_t(\tau)\, \boldsymbol{F}(t), \tag{3.78}$$

odakle se dobija

$$\boldsymbol{F}_t(\tau) = \boldsymbol{F}(\tau)\, \boldsymbol{F}^{-1}(t) \tag{3.79}$$

Definišući tenzor relativne deformacije $\boldsymbol{C}_t(\tau)$ izrazom

$$\boldsymbol{C}_t(\tau) = \boldsymbol{F}_t^T(\tau)\, \boldsymbol{F}_t(\tau), \tag{3.80}$$

može se pokazati da je

$$\boldsymbol{A}_n(t) = \left.\frac{d^n \boldsymbol{C}_t(\tau)}{dt_n}\right|_{\tau=t}.$$

Ovako definisani tenzor $\boldsymbol{C}_t(\tau)$, kao i $\boldsymbol{U}_t(\tau)$ i $\boldsymbol{D}_t(\tau)$ su pogodni kada je reč o prostornom opisu kretanja neprekidne materijalne sredine.

Sile i promena sistema referencije. Sile koje deluju na telo, kao što smo istakli u odeljku IV. 1, delimo na spoljašnje i unutrašnje. Uzrok su kretanja tela koje je, pod pretpostavkom da postoji privilegisani sistem referencije $(O\boldsymbol{x})$ u odnosu na koji važe Ojlerovi zakoni, određeno Košijevim zakonima kretanja

$$\nabla \cdot \boldsymbol{T} + \varrho \boldsymbol{f} = \varrho \boldsymbol{a}, \tag{4.8.17}$$

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}^T, \tag{4.8.18}$$

i glasi $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(X, t)$. Pri promeni sistema referencije, definisanim sa (3.21), tom kretanju odgovara njemu ekvivalentno kretanje $\boldsymbol{x}^*(X, t^*)$ određeno sa (3.23). Očigledno je da $\boldsymbol{x}^*(X, t^*)$ zadovoljava jednačine kretanja u odnosu na sistem $(O^*, \boldsymbol{x}^*)$. Pitanje je kako one glase. Pri tome moramo imati na umu, da sistem $(O^*, \boldsymbol{x}^*)$, u opštem slučaju, ne mora biti inercijalni što bi nam dalo za pravo da zaključimo da Košijevi zakoni kretanja u odnosu na nove inercijalne sisteme važe u obliku (4.8.17—18). Problem je utoliko složeniji što, za sada, ništa ne znamo o zakonima transformacije sile $\boldsymbol{f}$ i napona $\boldsymbol{T}$ pri transformaciji sistema referencije (3.21). Znamo samo relaciju (3.28) između ubrzanja posmatrane materijalne čestice deformabilnog tela u odnosu na promenu sistema referencije.
Pomoću tog izraza i (3.5) možemo (4.8.17) pisati u obliku

$$\boldsymbol{Q}\nabla \cdot \boldsymbol{T} + \varrho \boldsymbol{Q} \boldsymbol{f} = \varrho \boldsymbol{a}^* - \varrho\,[\ddot{\boldsymbol{c}} + 2\boldsymbol{A}(\boldsymbol{v}^* - \dot{\boldsymbol{c}}) + (\dot{\boldsymbol{A}} - \boldsymbol{A}^2)(\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{c})] \tag{3.81}$$

Pošto masa tela ne zavisi od kretanja, pa prema tome i od sistema referencije, logično je pretpostaviti da je i gustina ϱ, kao skalarna veličina, indiferentna veličina, tj., da je

$$\varrho^* = \varrho. \tag{3.82}$$

Ako dalje pretpostavimo da su zapreminska sila $\boldsymbol{f}$ i napon $\boldsymbol{T}$ veličine nezavisne od sistema referencije, onda sledi da je

$$\boldsymbol{T}^* = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{T}\boldsymbol{Q}^T, \tag{3.83}$$

$$\boldsymbol{f}^* = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{f} \tag{3.84}$$

saglasno sa (3.7—8). Tada (3.81) možemo izraziti u odnosu na sistem $(O^*, \boldsymbol{x}^*)$

$$\nabla^* \boldsymbol{T}^* + \varrho^* \boldsymbol{f}^* = \varrho^* \boldsymbol{a}^* - \varrho^* [\ddot{\boldsymbol{c}} + 2\boldsymbol{A}(\boldsymbol{v}^* - \dot{\boldsymbol{c}}) + (\dot{\boldsymbol{A}} - \boldsymbol{A}^2)(\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{c})], \tag{3.85}$$

kada se ima u vidu da je

$$\nabla^* \cdot \boldsymbol{T}^* = \boldsymbol{Q}\nabla \cdot \boldsymbol{T},$$

što neposredno sledi iz (3.83) i (3.21).

Iz (4.8.17) i (3.85) se vidi da prvi Košijev zakon, u slučaju kada važe zakoni transformacije (3.72—84), nije nezavisan od promene sistema referencije. To će biti samo za one transformacije za koje je

$$\ddot{\boldsymbol{c}} + 2\boldsymbol{A}(\boldsymbol{v}^* - \dot{\boldsymbol{c}}) + (\dot{\boldsymbol{A}} - \boldsymbol{A}^2)(\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{c}) = 0. \tag{3.86}$$

Ova jednačina je zadovoljena tada i samo tada kada je $\dot{\boldsymbol{c}} = \text{const.}$ i $\boldsymbol{Q} = \text{const}$ čime se karakteriše Galilejeva grupa transformacija ili klasa svih mogućih inercijalnih sistema. Ovaj rezultat se ponekad izražava kao Galilejev princip relativnosti:

> *Zakoni kretanja materijalnog tela su nezavisni od posmatrača ako, i samo ako, se njihovi sistemi referencije nalaze u relativnoj translaciji sa konstantnom brzinom.*

Jednačine (3.85) možemo pisati u alternativnom obliku

$$\nabla^* \boldsymbol{T}^* + \varrho\, {}^*\boldsymbol{f} = \varrho \boldsymbol{a}^*, \tag{3.89}$$

gde je

$${}^*\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}^* + \ddot{\boldsymbol{c}} + 2\boldsymbol{A}(\boldsymbol{v}^* - \dot{\boldsymbol{c}}) + (\dot{\boldsymbol{A}} - \boldsymbol{A}^2)(\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{c}), \tag{3.90}$$

kada se uzme u obzir da je $\varrho^* = \varrho$. Ove jednačine takođe predstavljaju jednačine kretanja u odnosu na sistem $(O^*\boldsymbol{x}^*)$ ali u kojima je zapreminska sila modifikovana dodatnim članovima usled promene (kretanja) sistema referencije u odnosu na inercijalni sistem što je dobro poznato u klasičnoj mehanici krutog tela. One su po svome obliku iste kao i (4.8.17) i u tom obliku važe za bilo koji sistem referencije. Međutim, u njima figurišu dve neindiferentne veličine, ubrzanje $\boldsymbol{a}^*$ i modifikovana sila ${}^*\boldsymbol{f}$, što zamagljuje početnu prirodu sistema referencije i sistema sila. Tako se npr. iz (3.84), (3.90) i (3.31) dobija da je

$${}^*\boldsymbol{f} - \boldsymbol{a}^* = \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{f} - \boldsymbol{a}), \tag{3.90a}$$

odakle sledi da je veličina $\boldsymbol{f} - \boldsymbol{a}$, koju radi definisanosti nazivamo *efektivna sila*, objektivna.

Ekvivalentni procesi. Problem pisanja prvog Košijevog zakona kretanja u obliku nezavisnom od posmatrača Truzdel i Nol razrešavaju na sledeći način:

U odnosu na sistem $(O, \boldsymbol{x})$ uređen par $\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{T}\}$, kako je već ranije rečeno, definiše dinamički proces za telo $\mathcal{B}$ ako zadovoljava Košijeve zakone kretanja (4.8.17—18). Pri transformaciji sistema referencije, koja je data sa (3.21), kretanju $\boldsymbol{x}(X, t)$ u odnosu na posmatrača $\mathcal{F}$ odgovara njemu ekvivalentno kretanje $\boldsymbol{x}^*(X, t)$ u odnosu na posmatrača $\mathcal{F}^*$ određeno relacijom (3.23). Tada ima smisla govoriti o dinamičkom procesu $(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{T}^*)$ u odnosu na $\mathcal{F}^*$ koji bi bio ekvivalentan procesu $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{T})$. Po definiciji, uređeni par $\{\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{T}^*\}$ bi tada morao zadovoljavati jednačine

$$\nabla^* \boldsymbol{T}^* + \varrho \boldsymbol{f}^* = \varrho\,(\boldsymbol{a})^*, \tag{3.91}$$

$$\boldsymbol{T}^* = (\boldsymbol{T}^*)^T, \tag{3.92}$$

koje su, s obzirom na (3.82—84) i (3.31) ne samo istog oblika kao (4.8.17—18), nego i indiferentne u odnosu na sistem referencije i kao takve važe u odnosu na bilo koji sistem. Očigledno je da se samo u sistemu referencije $(O, \boldsymbol{x})$ one svode na oblik (4.8.17—18).

Važno je uočiti da smenom (3.31) u (3.91) dobijamo (3.85) što nam daje za pravo da tumačimo (3.91) kao jednačine kretanja tela $\mathcal{B}$ u odnosu na sistem $(O^* \boldsymbol{x}^*)$ u kome je, u opštem slučaju, $\boldsymbol{a}^* = (\boldsymbol{a})^*$. U stvari, jednačine (3.85), (3.89) i (3.91) su međusobno ekvivalentne. U tim jednačinama uvek ostaje očuvan samo zakon transformacije tenzora napona (3.83). Tada možemo zaključiti da su svaka dva procesa $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{T})$ i $(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{T}^*)$ ekvivalentna ako su međusobno povezana relacijama (3.21) i (3.83) pri promeni sistema referencije. Samo po sebi se razume da takva dva međusobno ekvivalentna procesa predstavljaju različite matematičke opise jednog istog procesa.

Za razliku od prvog Košijevog zakona kretanja, drugi Košijev zakon (4.8.18) je nezavisan od sistema referencije pod uslovom da važi (3.83), tj., pod uslovom da je tenzor napona indiferentna veličina.

Princip materijalne indiferentnosti

Zahtev da je tenzor napona nezavisan od sistema referencije ima svoje fizičko značenje. Naime, unutrašnje kontaktne sile $\boldsymbol{t}_{(\boldsymbol{n})} = \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{n}$ zavise samo od konfiguracije tela $\mathcal{B}$, a ne i od konfiguracije masa izvan tela, za razliku od spoljašnjih zapreminskih sila $\boldsymbol{f}$. Zbog toga su unutrašnje kontaktne sile formalno nezavisne od promene sistema referencije (3.21) što se iskazuje zakonom transformacije

$$\boldsymbol{t}^*_{(\boldsymbol{n}^*)} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{t}_{(\boldsymbol{n})}, \tag{3.93}$$

gde je

$$\boldsymbol{t}_{(\boldsymbol{n})} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{n}, \tag{4.4.12}$$

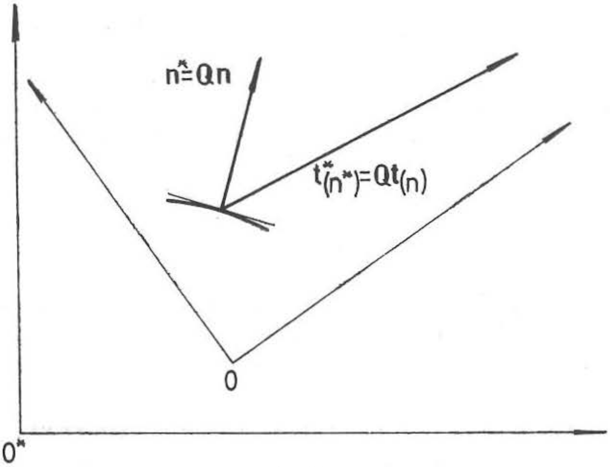
i

$$\boldsymbol{t}^*_{(\boldsymbol{n}^*)} = \boldsymbol{T}^*\boldsymbol{n}^*. \tag{4.4.12a}$$

Pri takvim transformacijama očigledno je (sl. 49)

$$\boldsymbol{n}^* = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{n}. \tag{3.94}$$

Na osnovu toga i prethodnih izraza sledi zakon transformacije (3.83) koji, tako izveden, predstavlja konkretan primer kojim se ilustruju izvođenje zakona transformacije oblika (3.8) ali sada za konkretan tenzor — tenzor napona.



Sl. 49

Dalje, za dato telo, kao što smo ranije istakli, nije svaki dinamički proces adekvatan fizičkoj prirodi problema. To smo posebno razmatrali u slučaju kada je zapreminska sila $\boldsymbol{f}$ data. Tada smo zaključili da mogući proces ne može biti proizvoljan nego mora zadovoljavati uslove koji karakterišu materijalna svojstva tela. Ovi uslovi se nazivaju konstitutivne pretpostavke ili konstitutivne jednačine. I pošto konstitutivne jednačine karakterišu idealni materijal mi kažemo: neki dinamički proces je dopustiv za dati idealni materijal ako su konstitutivne jednačine tog materijala, za taj proces, zadovoljene. Isto to mora da važi za proces koji je njemu ekvivalentan. Pri tome smatramo da se svojstva materijala ne menjaju pri promeni sistema referencije ili da su nezavisna od sistema referencije. To znači, matematički, mora biti zadovoljen:

Princip materijalne indiferentnosti

Konstitutivne jednačine moraju biti indiferentne pri promeni sistema referencije. Ako je konstitutivna jednačina zadovoljena za dinamički proces koji je određen kretanjem i simetričnim tenzorom napona

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(X, t), \quad \boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}(X, t), \tag{3.95}$$

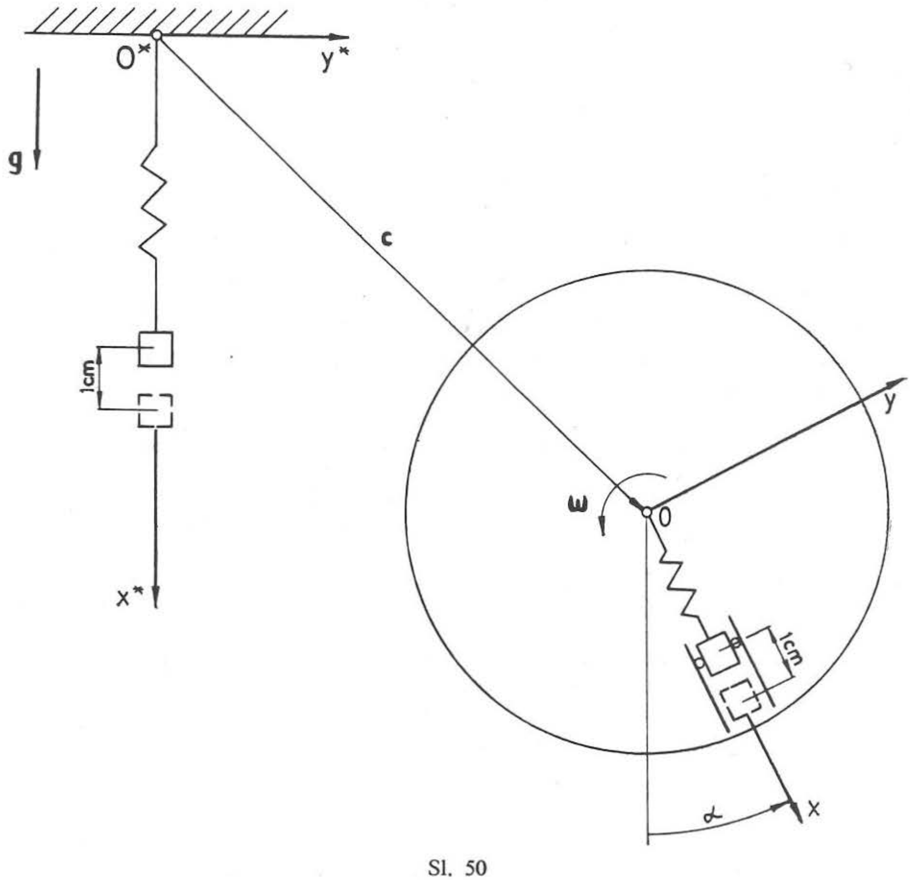
respektivno, onda ona mora biti, takođe, zadovoljena za bilo koji ekvivalentni proces ($\boldsymbol{x}^*$, $\boldsymbol{T}^*$). To znači da konstitutivnu jednačinu zadovoljava, takođe, svako kretanje i napon dati sa

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}^* &= \boldsymbol{x}(X, t^*) = \boldsymbol{Q}(t)\,\boldsymbol{x}(X, t) + \boldsymbol{c}(t), \\ \boldsymbol{T}^* &= \boldsymbol{T}^*(X, t^*) = \boldsymbol{Q}(t)\,\boldsymbol{T}(X, t)\,\boldsymbol{Q}^T(t). \\ t^* &= t - a \end{aligned} \tag{3.96}$$

za proizvoljnu vektorsku funkciju vremena $\boldsymbol{c}(t)$, proizvoljnu ortogonalnu tenzorsku funkciju vremena $\boldsymbol{Q}(t)$ i proizvoljan realan broj a.

Pri predlaganju prve od svih konstitutivnih jednačina za deformabilna tela, naime zakona linearne elastičnosti, Huk (Hooke) je dao prvi nejasan nagoveštaj principa materijalne indiferentnosti sugerišući da se promena gravitacije može meriti korišćenjem mernog instrumenta sa elastičnom oprugom na dnu rudnika ili na vrhu planine. Dobar primer intuitivnog poimanja istog principa u navedenom slučaju dat je od strane Truzdela i Nola.

Telo poznate težine, recimo 1 N, obešeno je o jedan kraj elastične opruge zanemarljive težine koja je drugim krajem učvršćena za plafon laboratorije. Opruga će se tada istegnuti za neku dužinu, recimo 1 cm. Oprugu i telo obešenu o nju zatim stavimo na horizontalnu kružnu ploču ili disk tako da je slobodan kraj opruge učvršćen za centar ploče. Disk se rotira oko vertikalne ose koja prolazi kroz centar diska, takvom konstantnom ugaonom brzinom da se opruga istegne za 1 cm. Dva posmatrača prate ovaj eksperiment: jedan stoji na podu laboratorije (blizu opruge), a drugi na disku koji rotira. Sistem referencije za prvog posmatrača je određen zidovima laboratorije, a za drugog osom rotacije i dvema međusobno upravnim osama u ravni diska (sl. 50).



Sl. 50

Dva posmatrača će se složiti da centrifugalna sila, potrebna da se telo zadrži u relativnoj ravnoteži u odnosu na disk pri izduženju opruge za 1 cm, iznosi 1 N. Pri tome se prećutno pretpostavlja da (unutrašnja) sila u opruzi zavisi samo od relativne deformacije opruge u odnosu na samu sebe, a ne i od superponiranog krutog kretanja — translacije i rotacije. Drukčije rečeno: pretpostavlja se implicitno pri ovim merenjima da je sila koju ispoljava opruga pri svom reagovanju na dato izduženje zavisna samo od relativne deformacije opruge, a ne i od posmatrača.

Ovaj primer i njemu slični ukazuju na prećutnu primenu principa materijalne indiferentnosti, koji izgleda toliko očigledan našoj fizičkoj intuiciji da u najvećem broju slučajeva i ne pretpostavljamo da ga primenjujemo. Međutim, primena principa materijalne indiferentnosti na nelinearne konstitutivne jednačine u slučaju trodimenzionalnih tela nije bila očigledna sve dok ga nije u opštem obliku na jednostavan i matematički precizan način formulisao Nol 1955. godine.

Samo po sebi se razume da se sva dosadašnja razmatranja mogu proširiti i na slučaj termodinamičkog procesa određenog skupom veličina $\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{T}, \varepsilon, \boldsymbol{q}, \theta, \eta\}$. Tako se njemu ekvivalentan proces definiše skupom veličina $\{\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{T}^*, \varepsilon^*, \boldsymbol{q}^*, \theta^*, \eta^*\}$ za koje važe relacije

$$\theta^* = \theta, \tag{3.95}$$

i

$$\begin{aligned} \boldsymbol{T}^* &= \boldsymbol{Q}\boldsymbol{T}\boldsymbol{Q}^T \\ \varepsilon^* &= \varepsilon \\ \boldsymbol{q}^* &= \boldsymbol{Q}\boldsymbol{q} \\ \eta^* &= \eta \end{aligned} \tag{3.96}$$

pri promeni sistema referencije. Pri tome se uvek podrazumeva da važi (3.82).

Saglasno tome i osnovnom konstutivnom stavu, *u slučaju termodinamičkog procesa, princip materijalne indiferentnosti glasi:*

> *Konstitutivne jednačine moraju biti invarijantne pri promeni sistema referencije. Ako su konstitutivne jednačine zadovoljene za termodinamički proces* $\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{T}, \varepsilon, \boldsymbol{q}, \theta, \eta\}$ *onda one moraju takođe biti zadovoljene za bilo koji njemu ekvivalentan proces* $\{\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{T}^*, \varepsilon^*, \boldsymbol{q}^*, \theta^*, \eta^*\}$. *To znači da konstitutivne jednačine moraju biti zadovoljene takođe za svako kretanje, temperaturu, simetričan napon, specifičnu unutrašnju energiju, vektor toplotnog fluksa i specifičnu entropiju, date sa*

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{x}^* &= \boldsymbol{x}^*(X, t) = \boldsymbol{Q}(t)\,\boldsymbol{x}(X, t) + \boldsymbol{c}(t) \\ t^* &= t - a \end{aligned}\right\} \tag{3.21}$$

$$\theta^* = \theta^*(X, t^*) = \theta(X, t). \tag{3.97}$$

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{T}^* &= \boldsymbol{T}^*(X, t^*) = \boldsymbol{Q}(t)\,\boldsymbol{T}(X, t)\,\boldsymbol{Q}^T(t) \\ \varepsilon^* &= \varepsilon^*(X, t^*) = \varepsilon(X, t) \\ \boldsymbol{q}^* &= \boldsymbol{q}^*(X, t^*) = \boldsymbol{Q}(t)\,\boldsymbol{q}(X, t) \\ \eta^* &= \eta^*(X, t^*) = \eta(X, t) \end{aligned}\right\} \tag{3.98}$$

> *za proizvoljnu vektorsku funkciju vremena* $\boldsymbol{c}(t)$, *proizvoljnu ortogonalnu tenzorsku funkciju* $\boldsymbol{Q}(t)$ *i proizvoljan realan broj* a.

Napomena 4.

Princip materijalne indiferentnosti se još naziva *princip materijalne objektivnosti* ili kratko: *princip objektivnosti* ili *princip izotropije prostora*. Pri tome naglašavamo da princip izotropije prostora ne nameće nikakav zahtev na izotropiju materijala; i anizotropni materijali se takođe moraju podvrgnuti ovom principu. Uopšte govoreći, princip materijalne indiferentnosti podrazumeva da je prostor fizičkih događaja izotropan i homogen. To znači da u tom prostoru nema privilegisanih položaja niti pravaca. Posledica toga je da konstitutivne jednačine materijalnih tela mogu zavisiti samo od reativnih položaja materijalnih čestica, a ne i od njihovog apsolutnog položaja u prostoru, što ćemo pokazati.

Sa fizičkog stanovišta ovaj princip se iskazuje u dva različita vida. Prema prvom, koji se naziva „oblik Huka-Puasona-Košija" (Hooke-Poisson-Caushy), konstitutivne jednačine moraju biti invarijantne *pri superponiranom krutom kretanju tela*. Prema drugom, poznatom pod imenom „Zaremba-Jaumana" (Zaremba-Jaumann) dozvoljena je promena posmatrača. Pošto telo može biti podvrgnuto samo svojstvenim rotacijama, $\det \boldsymbol{Q} = 1$, za razliku od promene posmatrača što dopušta potpunu grupu ortogonalnih transformacija, tj., za koje je $\det \boldsymbol{Q} = \pm 1$, drugi oblik nameće veća ograničenja od prvog. To znači da konstitutivne jednačine koje zadovoljavaju oblik Zaremba-Jaumana zadovoljavaju takođe i oblik Huka-Puasona-Košija, pri čemu obrnuto ne važi. Tako se za optički aktivne fluide, koji poseduju privilegisane pravce, korišćenjem drugog oblika principa materijalne indiferentnosti mogu isključiti bitna svojstva materijala. Međutim, za čistu mehaničku teoriju prostih materijala, na koju ćemo se ovde ograničiti, razlika u primeni ova dva oblika navedenog principa je bez značaja. Zbog toga i zbog matematičkih prednosti ovde smo prihvatili drugi oblik.

Zakon balansa energije i promena sistema referencije

Iz (3.95) i razmatranja koja su mu prethodila može se zaključiti da između zahteva koji proizilaze iz principa materijalne indiferentnosti i zakona kretanja postoji slaba veza. Ustvari, princip materijalne indiferentnosti se striktno odnosi na nezavisnost ponašanja materijala od sistema referencije a ne i na indiferentnost kretanja. Međutim, može biti pokazano da svi zakoni mehanike kontinuuma, izuzev II zakona termodinamike, slede iz drugog principa — *principa invarijantnosti oblika zakona balansa energije pri promeni sistema referencije.*

> *Zakon konzervacije mase, balans količine kretanja i balans momenta količine kretanja su posledice invarijantnog oblika zakona balansa energije pri transformaciji sistema referencije* (3.21). *Pri tome se pretpostavlja da važe zakoni transformacije* (3.82), (3.90a), (3.97) *i* (3.98) *i* $h^* = h$.

Na osnovu (5.4.10), (5.4.3), (5.4.1), (5.4.6) zakon balansa energije (ili I zakon termodinamike) u odnosu na sistem referencije $(O\boldsymbol{x})$ možemo pisati u obliku

$$\frac{d}{dt}\int_v \varrho\left(\varepsilon + \frac{1}{2}\,\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}\right) dv = \oint_{\mathcal{S}} (\boldsymbol{t}_{(n)}\cdot\boldsymbol{v} + q)\, da + \int_v \varrho\,(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v} + h)\, dv \qquad (3.100)$$

koji, saglasno navedenom principu ostaje istog oblika u odnosu na svaki sistem referencije $(O^* x^*)$ određen sa (3.21), tj.,

$$\frac{d}{dt}\int_v \varrho^*\left(\varepsilon^* + \frac{1}{2}\, \boldsymbol{v}^* \cdot \boldsymbol{v}^*\right) dv = \oint_{\mathscr{S}} (\boldsymbol{t}^*_{(n)} \cdot \boldsymbol{v}^* + q^*)\, da + \int_v \varrho^* ({}^*\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v}^* + h^*)\, dv$$

ili, saglasno zakonu transformacije pojedinih veličina

$$\frac{d}{dt}\int_v \varrho\left(\varepsilon + \frac{1}{2}\, \boldsymbol{v}^* \cdot \boldsymbol{v}^*\right) dv = \oint_{\mathscr{S}} (\boldsymbol{t}^*_{(n)} \cdot \boldsymbol{v}^* + q^*)\, da + \int_v \varrho ({}^*\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v}^* + h)\, dv \tag{3.101}$$

I. U slučaju kada je $\boldsymbol{Q}(t) = \boldsymbol{I}$ i $\dot{\boldsymbol{c}}(t) = \boldsymbol{b}$, gde je $\boldsymbol{b}$ proizvoljan konstantni vektor, biće s obzirom na (3.26), (3.27) (3.93), (3.90) i (3.96_3)

$$\boldsymbol{v}^* = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{A} = \dot{\boldsymbol{A}} = 0, \quad \ddot{\boldsymbol{c}} = 0,$$

$$\boldsymbol{t}^*_{(n^*)} = \boldsymbol{t}_{(n)}, \quad {}^*\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}, \quad q^* = q$$

tako da je (3.101) moguće napisati u obliku

$$\frac{d}{dt}\int_v \varrho\left[\varepsilon + \frac{1}{2}(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{b})\right] dv = \oint_{\mathscr{S}} [\boldsymbol{t}_{(n)} \cdot (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{b}) + q]\, da +$$

$$+ \int_v \varrho\, [\boldsymbol{f}(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{b}) + h]\, dv,$$

li, s obzirom na (3.100),

$$\frac{1}{2}\, \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{b} \int_v \varrho dv = \boldsymbol{b} \cdot \left[-\frac{d}{dt}\int_v \varrho\, \boldsymbol{v}\, dv + \oint_{\mathscr{S}} \boldsymbol{t}_{(n)}\, da + \int_v \varrho \boldsymbol{f} dv\right].$$

Ako se $\boldsymbol{b}$ zameni sa $\beta \boldsymbol{b}$, gde je β proizvoljan skalar, onda je ova jednakost zadovoljena samo ako je

$$\frac{d}{dt}\int \varrho\, dv = 0,$$

i

$$\frac{d}{dt}\int_v \varrho\, \boldsymbol{v}\, dv = \oint_{\mathscr{S}} \boldsymbol{t}_{(n)}\, da + \int_v \varrho \boldsymbol{f} dv,$$

što očigledno predstavlja zakon konzervacije mase (3.13.5) i balans količine kretanja (4.8.1), respektivno.

II. U slučaju kada je $\boldsymbol{Q}(t) = \boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{A} =$ const. (što je uvek zadovoljeno za $\boldsymbol{Q}(\tau) = e^{\boldsymbol{A}(\tau - t)}$ i $\boldsymbol{c} = 0$, biće

$$\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{x}; \quad \dot{\boldsymbol{c}} = \ddot{\boldsymbol{c}} = 0, \quad \dot{\boldsymbol{A}} = 0$$

$$\boldsymbol{v}^* = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{t}^*_{(n^*)} = \boldsymbol{t}_{(n)}; \quad {}^*\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f} + 2\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} + \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{v}, \quad q^* = q$$

s obzirom na transformacione izraze u prethodnom slučaju, i

$$\frac{1}{2}\,\boldsymbol{v}^*\cdot\boldsymbol{v}^*=\frac{1}{2}\,\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}+\boldsymbol{Ax}\cdot\boldsymbol{v}+\frac{1}{2}\,\boldsymbol{Ax}\cdot\boldsymbol{Ax},$$

$$\begin{aligned}{}^*\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}^*&=(\boldsymbol{f}+2\boldsymbol{Av}+\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x})\cdot(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{Ax})\\&=\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}+\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{Ax}+\boldsymbol{Av}\cdot\boldsymbol{Ax}\end{aligned}$$

jer je $\boldsymbol{Ax}\cdot\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Av}\cdot\boldsymbol{v}=0$ zbog antisimetričnosti tenzora $\boldsymbol{A}$. Tada (3.101) postaje

$$\frac{d}{dt}\int_v \varrho\left(\varepsilon+\frac{1}{2}\,\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}+\boldsymbol{Ax}\cdot\boldsymbol{v}+\frac{1}{2}\,\boldsymbol{Ax}\cdot\boldsymbol{Ax}\right)dv$$

$$=\oint_{\mathscr{S}}(\boldsymbol{t}_{(n)}\cdot\boldsymbol{v}+\boldsymbol{t}_{(n)}\cdot\boldsymbol{Ax}+q)\,da+\int_v \varrho\,(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}+\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{Ax}+\boldsymbol{Av}\cdot\boldsymbol{Ax}+h)\,dv.$$

Ovaj izraz se znatno redukuje s obzirom na (3.100) i činjenicu da je

$$\frac{d}{dt}\int_v \varrho\,\boldsymbol{Ax}\cdot\boldsymbol{Ax}\,dv=\int_v 2\varrho\,\boldsymbol{Av}\cdot\boldsymbol{Ax}\,dv$$

tako da postaje

$$\frac{d}{dt}\int_v \varrho\,\boldsymbol{Ax}\cdot\boldsymbol{v}\,dv=\oint_{\mathscr{S}}\boldsymbol{Ax}\cdot\boldsymbol{t}_{(n)}da+\int_v \varrho\boldsymbol{Ax}\cdot\boldsymbol{f}\,dv \tag{ii}$$

Ako sa $\boldsymbol{\omega}$ označimo vektor pridružen antisimetričnom tenzoru $\boldsymbol{A}$, tako da je

$$\boldsymbol{\omega}=\frac{1}{2}\,\boldsymbol{\epsilon}\,..\,\boldsymbol{A},$$

tj.

$$\omega_k=\frac{1}{2}\,\varepsilon_{klm}A^{ml}\quad\text{i}\quad A^{ml}=\varepsilon^{klm}\omega_k,$$

onda je

$$\boldsymbol{Ab}=A^{ml}b_l\boldsymbol{g}_m=\varepsilon^{klm}\omega_k b_l\boldsymbol{g}_m=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{b}$$

i

$$\boldsymbol{Ab}\cdot\boldsymbol{d}=(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{d}=(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{d})\cdot\boldsymbol{\omega}$$

za proizvoljne vektore $\boldsymbol{b}$ i $\boldsymbol{d}$. Tada se, s obzirom na proizvoljnost konstantnog tenzora $\boldsymbol{A}$, a to znači i proizvoljnost vektora $\boldsymbol{\omega}$, jednačina (ii) može pisati u obliku

$$\frac{d}{dt}\int_v \varrho\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{v}\,dv=\oint_{\mathscr{S}}\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{t}_{(n)}da+\int_v \varrho\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{f}\,dv$$

što ne predstavlja ništa drugo nego balans momenta količine kretanja (4.8.2).

Time je jasno pokazano da su zakoni balansa mase, količine kretanja i momenta količine kretanja ekvivalentni zakonu balansa energije i zahtevu invarijantnosti pri transformaciji sistema referencije.

Pri takvoj transformaciji prvi Košijev zakon kretanja, kao što smo videli, nije indiferentan, za razliku od drugog Košijevog zakona kretanja koji to jeste.

Indiferentni su i ostali zakoni balansa. Za zakon konzervacije mase, npr. (3.13.9), to sledi neposredno iz (3.82) i (3.41) jer su $\dot{\varrho}$ i I_d takođe objektivne veličine. Takođe se može pokazati da su veličine div $\boldsymbol{v}$, $\varrho\dot{\varepsilon}$, $\boldsymbol{T} : \boldsymbol{D}$, div $\boldsymbol{q}$, koje se pojavljuju u I i II zakonu termodinamike objektivne veličine. Tada su zakon balansa energije (5.4.13) i Klauzijus-Dijemova entropijska nejednakost (5.14.3a) indiferentni pod uslovom da je specifična proizvodnja toplote h skalarna indiferentna veličina, tj.,

$$h^* = h, \tag{3.102}$$

pri transformaciji sistema referencije (3.21).

4. OPŠTE KONSTITUTIVNE JEDNAČINE (MEHANIČKA TEORIJA)

S obzirom na veći broj konstitutivnih jednačina u slučaju termodinamičkih procesa, kao i glomaznosti njihovih izraza, do daljnjeg ćemo se ograničiti na dinamičke procese. Sa stanovišta teorije konstitutivnih jednačina time se postiže veća preglednost i jasnoća primene opštih principa kao i posledica koje iz toga slede. Prema tome, za sada zanemarujemo sve nemehaničke uticaje — u našem slučaju — termičke uticaje. Tada prema principu determinizma i principu lokalnog dejstva, napon u materijalnoj čestici X zavisi samo od istorije kretanja proizvoljno male okoline te čestice. Saglasno tome, ako sa $\mathcal{N}(X)$ obeležimo proizvoljnu okolinu čestice X, biće

$$\boldsymbol{T}(X, t) = \overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathcal{T}}} [\boldsymbol{x}(\bar{X}, t - s), X, t] \tag{4.1}$$

za svako $\bar{X} \in \mathcal{N}(X)$.

S obzirom na tenzorski karakter funkcionela reagovanja $\overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathcal{T}}}$ i njegove zavisnosti od $\boldsymbol{x}(\bar{X}, t - s)$ trivijalno su zadovoljeni principi kovarijantne invarijantnosti i ekviprezensa. Ova konstitutivna jednačina mora zadovoljavati i princip materijalne indiferentnosti, tj.

$$\boldsymbol{T}^*(X, t^*) = \boldsymbol{Q}(t)\, \boldsymbol{T}(X, t)\, \boldsymbol{Q}^T(t), \tag{4.2}$$

ili

$$\mathcal{T}(\boldsymbol{x}^*, t^*) = \boldsymbol{Q}(t) \mathcal{T}(\boldsymbol{x}, t)\, \boldsymbol{Q}^T(t), \tag{4.2a}$$

gde smo radi jednostavnosti sa $\mathcal{T}(\boldsymbol{x}, t)$ za trenutak obeležili funkcionel $\overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathcal{T}}} [\boldsymbol{x}(\bar{X}, (t - s), X, t]$, a sa $\mathcal{T}(\boldsymbol{x}^*, t^*)$ njemu odgovarajući funkcionel u sistemu referencije $(O^*\boldsymbol{x}^*)$ određenom sa (3.21). Bitno je uočiti da princip materijalne indiferentnosti nameće isti oblik funkcionalne zavisnosti $\mathcal{T}$, tj., invarijantnost funkcionela reagovanja $\mathcal{T}$ od nezavisnih promenljivih koje se, u opštem slučaju, menjaju pri promeni sistema referencije. Tako iz (4.2) i (3.21) sledi da mora biti

$$\boldsymbol{Q}(t) \mathcal{T}(\boldsymbol{x}, t)\, \boldsymbol{Q}^T(t) = \mathcal{T}(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}, t - a), \tag{4.3}$$

za proizvoljan vektor $\boldsymbol{c}$, proizvoljan ortogonalni tenzor $\boldsymbol{Q}$ i proizvoljan realan broj a.

Očigledno je da uslov (4.3), a to znači princip materijalne indiferentnosti, nameće ograničenja na oblik funkcionalne zavisnosti $\mathcal{T}$ od $\boldsymbol{x}$ i t. Pre nego što pređemo na određivanje tog oblika uvedimo smenu

$$\tau = t - s \tag{4.4}$$

gde je $\tau \leqslant t$ kada je $0 \leqslant s < \infty$, tako da (4.1) možemo pisati u obliku

$$\boldsymbol{T}(X, t) = \underset{\tau \leqslant t}{\mathcal{T}} [\boldsymbol{x}(\bar{X}, \tau), X, t] \tag{4.1a}$$

Tada za trenutak vremena τ (3.21) postaje

$$\boldsymbol{x}^*(X, \tau^*) = \boldsymbol{Q}(\tau)\, \boldsymbol{x}(X, \tau) + \boldsymbol{c}(\tau) \tag{3.21a}$$

$$\tau^* = \tau - a.$$

Sa kinematičkog stanovišta svaka promena sistema referencije (3.21), odnosno (3.21a), se sastoji iz tri međusobno nezavisne promene: prostorne translacije, vremenske translacije i rotacije sistema referencije. Mi ćemo ispitati uticaj svake od ovih nezavisnih promena sistema referencije na oblik funkcionela reagovanja $\mathcal{T}(\boldsymbol{x}, t)$.

1. ***Prostorna translacija sistema referencije sa materijalnom česticom*** X. Neka je

$$\boldsymbol{Q}(\tau) = \boldsymbol{I}, \quad a = 0, \quad \boldsymbol{c}(\tau) = -\boldsymbol{x}(X, \tau), \tag{4.5}$$

za svako $\tau \leqslant t$. Ovaj izbor odgovara relativnoj translaciji dva sistema pri čemu materijalna čestica X ostaje u stanju mirovanja u koordinatnom početku sistema $(O^*\boldsymbol{x}^*)$, jer je, prema (3.21a)

$$\boldsymbol{x}^*(X, \tau^*) = 0, \quad \tau^* = \tau.$$

Takođe je, za svako $\bar{X} \in \mathcal{N}(X)$,

$$\boldsymbol{x}^*(\bar{X}, \tau^*) = \boldsymbol{x}^*(\bar{X}, \tau) = \boldsymbol{x}(\bar{X}, \tau) - \boldsymbol{x}(X, \tau) \tag{4.6}$$

tj., kretanje čestice $\bar{X} \in \mathcal{N}(X)$ je određeno njenim relativnim kretanjem u odnosu na česticu X. Kako je, s obzirom na (4.2) i (4.5),

$$\boldsymbol{T}^*(X, t) = \boldsymbol{T}(X, t).$$

ili

$$\mathcal{T}(\boldsymbol{x}, t) = \mathcal{T}(\boldsymbol{x}^*, t),$$

jer je $t^* = t$, to je, prema (4.1a)

$$\boldsymbol{T}(X, t) = \underset{\tau \leqslant t}{\mathcal{T}} [\boldsymbol{x}(\bar{X}, \tau) - \boldsymbol{x}(X, \tau), X, t]. \tag{4.7}$$

Odavde se vidi da napon u X za uočeni trenutak t zavisi samo od istorije relativnog kretanja $(\tau \leqslant t)$ u odnosu na X skupa svih čestica $\bar{X} \in \mathcal{N}(X)$.

Ovo ograničenje na oblik konstitutivnih jednačina je posledica *prostorne homogenosti sistema referencije*.

2. ***Vremenska translacija.*** Neka je uočeni trenutak t referentno vreme i

$$\boldsymbol{Q}(\tau) = \boldsymbol{I}, \quad \boldsymbol{c}(\tau) = 0 \quad \text{i} \quad a = t. \tag{4.8}$$

Tada je, prema (3.21a),

$$\tau^* = \tau - t, \quad t^* = t - a = 0, \tag{4.9}$$
$$\boldsymbol{x}^* (\bar{X}, \tau^*) = \boldsymbol{x} (\bar{X}, \tau),$$

a prema (4.2)

$$\boldsymbol{T}^* (X, 0) = \boldsymbol{T} (X, t). \tag{4.10}$$

Kako je sada $\boldsymbol{T} (X, t)$ određeno sa (4.7) i

$$\boldsymbol{T}^* (X, t^*) = \underset{\tau^* \leqslant t^*}{\mathcal{T}} [x^* (\bar{X}, \tau^*) - x^* (X, \tau^*), X, t^*]$$

biće, s obzirom na (4.9),

$$\boldsymbol{T}^* (X, 0) = \underset{\tau \leqslant t}{\mathcal{T}} [\boldsymbol{x} (\bar{X}, \tau) - \boldsymbol{x} (X, \tau), X].$$

Koristeći ovaj izraz u (4.10) dobijamo da je

$$\boldsymbol{T} (X, t) = \underset{\tau \leqslant t}{\mathcal{T}} [\boldsymbol{x} (\bar{X}, \tau) - \boldsymbol{x} (X, \tau), X]$$

ili

$$\boldsymbol{T} (X, t) = \overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathcal{T}}} [\boldsymbol{x} (\bar{X}, \tau) - \boldsymbol{x} (X, \tau), X] \tag{4.11}$$

kada se uzme u obzir (4.1) i (4.4).

Iz (4.10) se veći vidi da u izvedenom slučaju konstitutivna jednačina ne zavisi eksplicitno od vremena. Ovo ograničenje na zavisnost od vremena je posledica *homogenosti sistema referencije po vremenu.*

3. ***Rotacija sistema.*** Određena je sa

$$\boldsymbol{c} (\tau) = 0, \quad a = 0. \tag{4.12}$$

Tada je

$$\boldsymbol{x}^* (\bar{X}, \tau^*) = \boldsymbol{Q} (\tau) \boldsymbol{x} (\bar{X}, \tau)$$
$$\tau^* = \tau \tag{3.21b}$$

i

$$t^* = t.$$

Konstitutivne jednačine (4.1), odnosno (4.1a), moraju zadovoljavati uslove (4.2)

$$\boldsymbol{T}^* (X, t) = \boldsymbol{Q} (t) \boldsymbol{T} (X, t) \boldsymbol{Q}^T (t), \tag{4.13}$$

odnosno (4.2a)

$$\mathcal{T} (\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}, X, t) = \boldsymbol{Q} (t) \mathcal{T} (\boldsymbol{x}, t) \boldsymbol{Q}^T (t), \tag{4.13a}$$

koje, s obzirom na (4.11), glase

$$\underset{\tau \leqslant t}{\mathcal{T}} \{\boldsymbol{Q} (\tau) [\boldsymbol{x} (\bar{X}, \tau) - \boldsymbol{x} (X, \tau)], X\} = \boldsymbol{Q} (t) \underset{\tau \leqslant t}{\mathcal{T}} [\boldsymbol{x} (\bar{X}, \tau) - \boldsymbol{x} (X, \tau), X] \boldsymbol{Q}^T (t) \tag{4.14}$$

ili

$$\underset{s=0}{\overset{\infty}{\mathcal{T}}} \{\boldsymbol{Q}(t-s)[\boldsymbol{x}(\overline{X}, t-s) - \boldsymbol{x}(X, t-s)], X\} = \boldsymbol{Q}(t) \underset{s=0}{\overset{\infty}{\mathcal{T}}} [\boldsymbol{x}(\overline{X}, t-s) - \\ - \boldsymbol{x}(X, t-s), X] \boldsymbol{Q}^T(t) \tag{4.14a}$$

Prema tome, jednačina (4.11), *predstavlja najopštiju konstitutivnu jednačinu* za čistu mehaničku teoriju konstitutivnih jednačina mehanike kontinuuma pod uslovom da funkcionel reagovanja $\mathcal{T}$ zadovoljava jednačinu (4.14), odnosno (4.14a), za svako ortogonalno $\boldsymbol{Q}$. Jednačine (4.14—14a) su posledica *prostorne izotropije* sistema referencije kojom se izražava odsustvo privilegisanih pravaca prostora fizičkih događaja.

Bilo koja jednačina takvog oblika ograničava klasu svih mogućih dinamičkih procesa okoline materijalne čestice X i prema tome karakteriše njena lokalna materijalna svojstva. Otuda i naziv *funkcionel reagovanja* za takav funkcionel $\underset{s=0}{\overset{\infty}{\mathcal{T}}}$. Njihova eksplicitna zavisnost od X dopušta nehmogenost materijala. Pošto to nije od centralnog interesa izostavljamo eksplicitnu zavisnost $\underset{s=0}{\overset{\infty}{\mathcal{T}}}$ od X, ako se posebno ne naglasi.

5. PROSTI MATERIJALI

Pojam prostog materijala. Za dovoljno malu okolinu materijalne čestice X, pod pretpostavkom da je kretanje svih njenih čestica $\overline{X} \in \mathcal{N}(X)$ diferencijabilno, relativno kretanje može biti aproksimirano sa

$$\boldsymbol{x}(\overline{X}, \tau) - \boldsymbol{x}(X, \tau) = \boldsymbol{F}(X, \tau)\, d\boldsymbol{X}, \tag{5.1}$$

gde je $\boldsymbol{F}(X, \tau)$ gradijent deformacije u X za trenutak vremena τ, a $d\boldsymbol{X}$ vektor položaja čestice $\overline{X}$ u odnosu na X. Pri tome je gradijent deformacije nezavisan od okoline $\mathcal{N}(X)$ za razliku od $d\boldsymbol{X} = \overline{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{X}$ koji zavisi samo od okoline $\mathcal{N}(X)$ u odnosu na neku referentnu konfiguraciju $\varkappa$, a ne i od kretanja $\boldsymbol{x}(X, t)$. Ovo sugeriše, pošto je istorija relativnog kretanja infinitezimalne okoline čestice X u potpunosti određena istorijom gradijenta deformacije u X, da onda i tenzor napona $\boldsymbol{T}(X, t)$ mora biti određen istorijom $\boldsymbol{F}(X, \tau)$ za $\tau \leqslant t$. To nas dovodi do definicije:

> *Materijal kod koga je napon za svaku njegovu česticu određen funkcionelom gradijenta deformacije za tu česticu, a u odnosu na neku referentnu konfiguraciju $\varkappa$ okoline te čestice, nazivamo* ***prost materijal.***

Saglasno ovoj definiciji koju je dao Nol (1957) napon u X zavisi od istorije dvostrukog tenzorskog polja $\boldsymbol{F}$ do trenutka t, polja koje je funkcija samo jedne promenljive τ (za svako X).

Redukovani oblici funkcionela reagovanja prostog materijala. U cilju sažetog načna obeležavanja dogovorimo se da indeks t na neku funkciju označava istoriju te funkcije. Tako je saglasno sa (5.1) i (4.4)

$$\boldsymbol{F}^t \equiv \boldsymbol{F}^t(s) \equiv \boldsymbol{F}(t-s), \quad (s \geqslant 0), \tag{5.2}$$

gde smo radi jedinstvenog načina obeležavanja izostavili eksplicitnu zavisnost F^t od X, koja se, dok se drukčije ne kaže, podrazumeva. Usvajajući takav način obeležavanja i za druge veličine, možemo pisati konstitutivnu jednačinu prostog materijala (4.10) ili (4.11), saglasno sa (5.1), u obliku

$$T(t) = \underset{s=0}{\overset{\infty}{\mathcal{T}}}[F^t(s)]. \tag{5.3}$$

Dalje uprošćenje u pisanju konstitutivne jednačine se postiže izostavljanjem granica $s = 0$ i ∞, tako da je

$$T(t) = \mathcal{T}[F^t(s)], \tag{5.4}$$

pri čemu se podrazumeva da je $s \geqslant 0$. Ova jednačina predstavlja *najopštiju konstitutivnu jednačinu prostog materijala* u slučaju dinamičkog procesa pod uslovom da identički važi

$$\boxed{\mathcal{T}(Q^t F^t) = Q(t)\mathcal{T}(F^t)Q^T(t), \quad (Q(t) = Q^t|_{s=0})} \tag{5.5}$$

po istoriji regularnog tenzora F^t i istoriji ortogonalnog tenzora Q^t. Očigledno je da (5.5) ne predstavlja ništa drugo nego jednačine (4.14a) u slučaju prostih materijala. Tačnije rečeno, (5.5) predstavljaju ograničenja na oblik funkcionela reagovanja $\mathcal{T}$, koje nameće princip materijalne indiferentnosti pri proizvoljnim rotacijama sistema referencije (3.21b).

Identičnost (5.5), s obzirom da mora da važi za svako ortogonalno Q, očigledno važi i za specijalan izbor Q. To nas dovodi do važnih zaključaka o obliku funkcionalne zavisnosti $\mathcal{T}$ od istorije gradijenta deformacije F^t.

Tako se, na osnovu teoreme o polarnoj dekompoziciji za gradijent deformacije može pisati

$$F^t = R^t U^t, \tag{5.6}$$

gde je R^t istorija ortogonalnog tenzora, tj.,

$$R^t (R^t)^T = (R^t)^T R^t = I, \tag{5.7}$$

a U^t istorija simetričnog pozitivno definitnog desnog tenzora izduženja takva da je

$$U^t = (U^t)^T, \tag{5.8}$$

i

$$C^t = (U^t)^2 = (F^t)^T F^t, \tag{5.9}$$

gde je C^t takođe istorija pozitivno definitnog simetričnog desnog Koši-Grinovog tenzora deformacije. Tada je

$$U^t = (R^t)^T F^t, \tag{5.10}$$

što neposredno sledi iz (5.6) i (5.7). S obzirom na ortogonalnost tenzora R^t biramo Q^t tako da je baš

$$Q^t = (R^t)^T. \tag{5.11}$$

Identičnost (5.5) tada postaje

$$\mathcal{T}[(R^t)^T F^t] = R^T(t)\mathcal{T}(R^t U^t) R(t),$$

koja se, množenjem s leve strane sa $\boldsymbol{R}(t)$ i s desne strane sa $\boldsymbol{R}^T(t)$ redukuje na oblik

$$\mathcal{T}(\boldsymbol{F}^t) = \boldsymbol{R}(t)\mathcal{T}[\boldsymbol{U}^t(s)]\,\boldsymbol{R}^T(t), \tag{5.12}$$

s obzirom na (5.6) i (5.7). Ovaj redukovani oblik konstitutivnog funkcionela omogućuje nam i obrnut zaključak. Naime, uslov invarijantnosti (5.5) je automatski zadovoljen kada konstitutivni funkcionel prostog materijala $\mathcal{T}[\boldsymbol{U}^t(s)]$, definisan nad istorijom simetričnog definitnog desnog tenzora izduženja $\boldsymbol{U}^t(s)$ za $s \geqslant 0$, zadovoljava (5.12). U to se lako možemo uveriti kada se uzmu u obzir zakoni transformacija veličina $\boldsymbol{R}(t)$ i $\boldsymbol{U}^t(s)$ datih sa (2.5.15) i (2.5.16) respektivno. Ali tada sledi da (5.12) predstavlja *opšti oblik konstitutivnog funkcionela prostog materijala.*

Ovaj rezultat je vrlo značajan iz dva razloga. Prvo: predstavlja opšte rešenje funkcionalne jednačine (5.5) tako da dalje koristimo vrlo koncizan, ali dovoljno opšti oblik konstitituvne jednačine prostog materijala date sa (5.12). Drugo: on pokazuje da rotacija u posmatranom trenutku t, u opštem slučaju, utiče na napon u prostom materijalu za razliku od rotacije u prošlosti koja ne utiče na naponsko stanje. To znači da napon, u početku pretpostavljajući da zavisi od istorije deformacije $\boldsymbol{F}^t$, može zavisiti samo od mere deformacije $\boldsymbol{U}^t(s)$ što nam u principu omogućuje da redukujemo broj pokušaja potrebnih za određivanje funkcionela ponašanja. Primera radi: ako možemo odrediti oblik funkcionela ponašanja koji daje napon za sve čiste homogene istorije izduženja ($\boldsymbol{R}^t = \boldsymbol{I}$), onda možemo izračunati $\boldsymbol{T}$ za bilo koju istoriju kada uključimo rotaciju u posmatranom trenutku kao u (5.12).

Mogući su i drugi redukovani oblici konstitutivne jednačine prostog materijala.

i) Smenom

$$\boldsymbol{U}^t = (\boldsymbol{C}^t)^{\frac{1}{2}}, \tag{5.13}$$

u (5.12) dobija se

$$\boldsymbol{T}(t) = \boldsymbol{R}(t)\,\mathcal{H}[\boldsymbol{C}^t(s)]\,\boldsymbol{R}^T(t), \tag{5.14}$$

gde je $\mathcal{H}(\boldsymbol{C}^t) = \mathcal{T}[(\boldsymbol{C}^t)^{\frac{1}{2}}]$.

Ako se pak uzme u obzir da je $\boldsymbol{U}\boldsymbol{U}^{-1} = \boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{I}$, onda jednačina (5.14) postaje

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{U}\boldsymbol{U}^{-1}\,\mathcal{H}(\boldsymbol{C}^t)\,\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{U}\boldsymbol{R}^T,$$

ili, s obzirom na $(2.5.14)_1$ i (5.13),

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{F}(t)\,\mathcal{L}[\boldsymbol{C}^t(s)]\,\boldsymbol{F}^T(t), \tag{5.15}$$

gde je

$$\mathcal{L}[\boldsymbol{C}^t(s)] = \boldsymbol{C}^{-\frac{1}{2}}(t)\,\mathcal{H}[\boldsymbol{C}^t(s)]\,\boldsymbol{C}^{-\frac{1}{2}}(t). \tag{5.16}$$

U svim ovim redukovanim oblicima pojavljuju se tenzori $\boldsymbol{R}$ i $\boldsymbol{U}$ što je logično s obzirom na njihovo fizičko značenje. Međutim, nijedna od ovih veličina ne može se tako lako odrediti iz kretanja $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(X, t)$ za razliku od $\boldsymbol{F}$ i $\boldsymbol{C}$ koji su određeni sa (2.7.14) i (5.9), respektivno. Zbog toga je pogodno uvesti drugi funkcionel reagovanja $\mathcal{G}'$ takav da je

$$\underset{s=0}{\overset{\infty}{\mathcal{G}'}}\{[\boldsymbol{U}^t(s)]^2\} = \boldsymbol{U}(t)\underset{s=0}{\overset{\infty}{\mathcal{T}}}[\boldsymbol{U}^t(s)]\,\boldsymbol{U}(t). \tag{5.17}$$

Tada se (5.12) može izraziti u alternativnom obliku kao

$$\widehat{\boldsymbol{T}}(t) = \underset{s=0}{\overset{\infty}{\mathcal{G}'}}[\boldsymbol{C}^t(s)] = \underset{s=0}{\overset{\infty}{\mathcal{G}'}}[\boldsymbol{C}(X, t-s)], \tag{5.18}$$

gde je

$$\widehat{\boldsymbol{T}} = \boldsymbol{F}^T\boldsymbol{T}\boldsymbol{F}, \tag{5.18a}$$

što neposredno sledi iz (5.12), (5.17), (5.18) i (5.14). Tako definisan tenzor $\widehat{\boldsymbol{T}}$ se naziva *konvektivni tenzor napona*.

ii) Zajedničko za sve ove oblike je njihovo izvođenje u odnosu na referentnu konfiguraciju $\varkappa$ (koja može biti i početna konfiguracija $\varkappa_0$), jer su sve mere deformacije u ovim izrazima određene u odnosu na tu konfiguraciju.

Međutim, redukovani oblici funkcionela reagovanja prostog materijala mogu biti određeni u odnosu na bilo koju referentnu konfiguraciju. Sa fizičkog stanovišta to je posebno značajno za fluide pošto oni nemaju privilegisane konfiguracije. U tom slučaju se obično za referentnu konfiguraciju bira konfiguracija u posmatranom trenutku vremena t. Tada je

$$\boldsymbol{F}(\tau) = \boldsymbol{R}_t(\tau)\,\boldsymbol{U}_t(\tau)\,\boldsymbol{R}(t)\,\boldsymbol{U}(t) \tag{5.19}$$

što sledi iz (3.78) i $(2.5.14)_1$. Za $\tau = t - s$ iz (5.19), saglasno načinu obeležavanja (5.2), dobijamo da je

$$\boldsymbol{F}^t(s) = \boldsymbol{R}_t(t-s)\,\boldsymbol{U}_t(t-s)\,\boldsymbol{R}(t)\,\boldsymbol{U}(t)$$

ili

$$\boldsymbol{F}^t(s) = \boldsymbol{R}_t(t-s)\,\boldsymbol{R}(t)\,\boldsymbol{U}_t^*(t-s)\,\boldsymbol{U}(t), \tag{5.20}$$

gde je

$$\boldsymbol{U}_t^*(t-s) = \boldsymbol{R}^T(t)\,\boldsymbol{U}_t(t-s)\,\boldsymbol{R}(t). \tag{5.21}$$

S obzirom na ortogonalnost tenzora $\boldsymbol{R}_t(t-s)$ i $\boldsymbol{R}(t)$, pa prema tome i njihovog proizvoda, biramo $\boldsymbol{Q}^t$ tako da je

$$\boldsymbol{Q}^t = [\boldsymbol{R}_t(t-s)\,\boldsymbol{R}(t)]^T \tag{5.22}$$

i

$$\boldsymbol{Q}^t\boldsymbol{F}^t = \boldsymbol{U}_t^*(t-s)\,\boldsymbol{U}(t). \tag{5.23}$$

Takođe je za $s = 0$

$$\boldsymbol{Q}(t) = [\boldsymbol{R}(t)]^T$$

jer je $\boldsymbol{R}_t(t) = \boldsymbol{I}$ zbog $\boldsymbol{F}_t(t) = \boldsymbol{I}$ što sledi iz (3.79). Za taj izbor $\boldsymbol{Q}^t$ identičnost (5.5) postaje

$$\boldsymbol{T}(t) = \underset{s=0}{\overset{\infty}{\mathcal{T}}}(\boldsymbol{F}^t) = \boldsymbol{R}(t)\underset{s=0}{\overset{\infty}{\mathcal{T}}}[\boldsymbol{U}_t^*(t-s)\,\boldsymbol{U}(t)]\,\boldsymbol{R}^T(t), \tag{5.24}$$

ili

$$T(t) = R(t)\,\mathcal{P}\,[C_t^*(t-s)\,C(t)]\,R^T(t), \tag{5.25}$$

gde je

$$\mathcal{P}\,[C_t^*(t-s)\,C(t)] \equiv \underset{s=0}{\overset{\infty}{\mathcal{T}}}\,[U_t^*(t-s)\,U(t)]. \tag{5.26}$$

kada se uzme u obzir (5.9). Lako je pokazati da (5.24—25) identički zadovoljava (5.5) za svako Q. Prema tome, (5.24) i (5.25) predstavljaju takođe najopštiji oblik konstitutivne jednačine za prost materijal.

Često je korisno izraziti opštu konstitutivnu jednačinu (5.25) u obliku zbira dva člana: „ravnotežnog člana" $p(C(t))$* i člana koji iščezava kada se materijal sve vreme drži u ravnoteži. Tada je pogodno koristiti tenzor

$$G^*(s) \equiv C_t^*(t-s) - I, \tag{5.27}$$

za opisivanje istorije deformacije. Kako je za $s = 0$, $U_t^*(t) = C_t^{*\frac{1}{2}}(t) = I$, što neposredno sledi iz (5.21), biće i

$$G^*(0) = O \tag{5.27a}$$

$$G^*(s) = O \tag{5.28}$$

kada se telo drži sve vreme u ravnotežnom stanju koje odgovara stanju u trenutnoj konfiguraciji. Tada (5.25) možemo pisati u obliku

$$R^T T R = p(C) + \underset{s=0}{\overset{\infty}{\mathcal{R}}}\,[G^*(s),\ C], \tag{5.29}$$

gde smo izostavili pisanje zavisnosti od t zbog veće preglednosti izraza i gde je

$$\underset{s=0}{\overset{\infty}{\mathcal{R}}}\,[G^*(s),\ C] = O, \quad \text{za } G^*(s) = O. \tag{5.30}$$

Iz (5.29) se vidi da se konstitutivna jednačina u slučaju statičke deformacije svodi na

$$T = R p(C) R^T. \tag{5.31}$$

Izučavanje konstitutivne jednačine ovog oblika spada u domen *elastičnosti*.

iii) Navedimo još slučaj kada materijalna čestica ima prirodnu konfiguraciju.

Definicija: *Kažemo da materijalna čestica X ima* ***prirodnu konfiguraciju*** *$\varkappa_0$, ako je napon za česticu X jednak nuli u slučaju kada je neka okolina te tačke u stanju mirovanja u $\varkappa_0$ za sva prošla i buduća vremena.*

Razume se da, u opštem slučaju, materijalna čestica ne mora da ima takvu konfiguraciju. Primer toga su Ojlerove tečnosti (koje će kasnije biti razmatrane) za koje su konstitutivne jednačine date sa (9.21). Tada se uvek smatra da je $p(\varrho) > 0$ za $\varrho \neq 0$ pri čemu slučaj $\varrho = 0$ kao trivijalan isključujemo. Ako prirodna konfiguracija $\varkappa_0$ postoji, tada njenim izborom za referentnu konfiguraciju dobijamo da je

$$\underset{s=0}{\overset{\infty}{\mathcal{T}}}\,(I^t) = O, \tag{5.32}$$

* Uočiti da je ovde i dalje reč o konstitutivnoj f-ji — tenzoru drugog reda — za razliku od *vektora* položaja.

gde je $\boldsymbol{I}^t$ istorija tenzorske funkcije $\boldsymbol{F}^t$ do trenutka t takva da je $\boldsymbol{F}^t(s) = \boldsymbol{I}^t = \boldsymbol{I}$ za svako t i $s \geqslant 0$. Takođe, s obzirom na (5.5), mora biti

$$\mathop{\mathcal{T}}_{s=0}^{\infty}(\boldsymbol{Q}^t) = \boldsymbol{O} \tag{5.33}$$

odakle sledi:

Bilo koja rotacija prevodi jednu prirodnu konfiguraciju u drugu, koja je takođe prirodna.

Obrnuto ne važi jer materijalna čestica može imati dve prirodne konfiguracije koje se ne mogu dobiti jedna iz druge rotacijom.

Sa ovde izvedenim izrazima ne iscrpljuje se lista raznih drugih redukovanih oblika funkcionela reagovanja prostih materijala. Drugi oblici se mogu odnositi, primera radi, na prvi ili drugi Piola-Kirhofov tenzor napona što ovde, za sada izostavljamo.

Svaki od ovih redukovanih oblika je pogodan za pojedina ispitivanja. Pri tome se uvek mora imati na umu osnovno fizičko svojstvo prostog materijala, koje se, kao što smo rekli, najočiglednije sagledava iz (5.3).

5A. UNUTRAŠNJE VEZE (PRINUDE)

Do sada smo prećutno pretpostavljali da su za materijalno telo svako proizvoljno kretanje

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(X, t), \tag{3.22}$$

kao i njemu odgovarajući gradijent deformacije $\boldsymbol{F}$ mogući ako se na njega deluje odgovarajućom silom. To neće biti slučaj kada je telo podvrgnuto dejstvu unutrašnjih veza.

Prosta unutrašnja veza je definisana skalarnom funkcijom $\lambda(\boldsymbol{F})$ gde je promenljiva gradijent deformacije $\boldsymbol{F}$. Kažemo da je čestica X u telu pod dejstvom veze λ ako su moguća kretanja tela ona za koja je

$$\lambda(\boldsymbol{F}) = 0, \tag{5a.1}$$

gde je $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(X, \tau)$, $-\infty < \tau < +\infty$. Funkcija veze zavisi od izbora lokalne referentne konfiguracije ali ne i od sistema referencije. Veza (5a.1) je konstitutivna jednačina i prema tome mora biti podvrgnuta principu materijalne indiferentnosti. Primenjujući isti postupak kao i u odeljku 5 vidimo (npr. iz (5.14) za skalarnu funkciju) da je princip materijalne indiferentnosti zadovoljen ako, i samo ako, je

$$\lambda(\boldsymbol{C}) = 0, \tag{5a.2}$$

gde je $\boldsymbol{C}$ desni Koši-Grinov tenzor $(2.7.14)_1$. Diferenciranjem ove jednačine po vremenu dobijamo

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \boldsymbol{C}}\, \dot{\boldsymbol{C}} = \frac{\partial \lambda}{\partial C_{KL}}\, \dot{C}_{KL} = 0. \tag{5a.3}$$

Ako uvedemo oznaku $f_{\boldsymbol{A}}$ za izvod funkcije $f(\boldsymbol{A})$ po promenljivoj $\boldsymbol{A}$ tj., ako je

$$f_{\boldsymbol{A}} \equiv \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{A}} \tag{5a.4}$$

onda prethodnu jednačinu možemo pisati u ekvivalentnom obliku

$$tr\,(\lambda_C \dot{C}) = 0$$

ili, s obzirom na (3.70)

$$tr\,(F\lambda_C F^T D) = \frac{\partial \lambda}{\partial C_{KL}} x^k_{,K} x^l_{,L} d_{kl} = 0 \tag{5a.5}$$

za sve nesingularne tenzore F i sve simetrične tenzore $D\,(d_{kl})$ Obrnuto, ako (5a.5) važi za posmatrano telo u svakom trenutku vremena, integracijom tog izraza dobijamo (5a.2). Na taj način relacija (5a.5) se može koristiti u svojstvu drugog opšteg izraza za prostu vezu koji ne zavisi od sistema referencije.

5b. PRINCIP DETERMINIZMA ZA PROSTE MATERIJALE POD DEJSTVOM VEZA

Za proste materijale pod dejstvom veza nije moguće odrediti konstitutivne jednačine na način kako smo to radili do sada kada su bili u pitanju materijali bez dejstva veza. Razlog tome je što se veze, čije se prisustvo ogleda u isključivanju nekih oblika kretanja, ostvaruju silama. Kako su po definiciji proste veze zadržavajuće, sile koje ih ostvaruju ne mogu biti određene samo na osnovu kretanja ili istorije kretanja. Specijalno, unutrašnje veze se ostvaruju pomoću odgovarajućih napona. Zbog toga konstitutivne jednačine prostog materijala pod dejstvom veza moraju biti tako određene da dopuštaju dejstvo tih napona nezavisno od istorije kretanja. Ali konkretno koji od svih mogućih takvih napona?

Naime, poznato je još iz mehanike sistema materijalnih tačaka da se data veza može ostvariti pomoću beskonačno mnogo raznih sistema sila. Najprostiji od svih mogućih sistema je svakako sistem sila čiji je rad jednak nuli za bilo koje kretanje tela saglasno vezama. Tada kažemo da je reč o *idealnim vezama*. Analogon toga, kada je u pitanju materijal na koji veze deluju, su naponi koji ne vrše rad. Dalje smatramo da su takvi naponi oni koji ostvaruju datu vezu. Jasno je da su oni neodređeni u prethodno navedenom smislu, tj., u smislu da se ne mogu odrediti na osnovu istorije kretanja. Ali tada ranije postavljen princip determinizma mora biti modifikovan kada su u pitanju materijali pod dejstvom veza. S obzirom da ova neophodna modifikacija ne može biti izvedena iz prethodnog principa, reč je zapravo o novom principu, tj., *principu determinizma za proste materijale pod dejstvom veza:*

Tenzor napona T u trenutku t određen je istorijom gradijenta deformacije $F^t(s)$ samo do na napon koji ne vrši rad pri bilo kom kretanju koje je saglasno vezama. Drukčije rečeno,

$$T = N + \mathop{\mathcal{T}}_{s=0}^{\infty}\,[F^t(s)] \tag{5b.1}$$

gde je N tenzor napona kada je snaga napona jednaka nuli za svako kretanje saglasno sa vezama, tj., za koje je, s obzirom na (5.4.5)

$$N : D = tr\,TD = 0, \tag{5b.2}$$

za svako $\boldsymbol{D}$ *koje zadovoljava* (5a.5). *Funkcionel reagovanja* $\mathcal{T}$ *je definisan samo za* $\boldsymbol{F}$ *koji zadovoljavaju veze.*

$\boldsymbol{N}$ može da zavisi od $\boldsymbol{X}$ ali ne i od $\varkappa$ jer se ne koristi u uslovu kojim se $\boldsymbol{N}$ definiše.

Pošto su $\boldsymbol{T}$ i $\boldsymbol{D}$ simetrični tenzori onda oni pripadaju 6-dimenzionalnom prostoru $\mathcal{S}$ simetričnih tenzora. U tom prostoru $tr\,(\boldsymbol{AB})$, za $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{B}$ u $\mathcal{S}$, definiše unutrašnji proizvod.

Uslov (5b.2) za šestodimenzionalni vektor $\boldsymbol{N} \in \mathcal{S}$ sada može biti geometrijski protumačen:

$\boldsymbol{N}$ *mora biti ortogonalno na svaki vektor* $\boldsymbol{D}$ *koji je ortogonalan na* $\boldsymbol{F}\lambda_{\boldsymbol{C}}\boldsymbol{F}^T$.

To će biti samo kada je

$$\boldsymbol{N} = q\boldsymbol{F}\lambda_{\boldsymbol{C}}\boldsymbol{F}^T, \tag{5b.3}$$

tj. kada je $\boldsymbol{N}$ kolinearno sa $\boldsymbol{F}\lambda_{\boldsymbol{C}}\boldsymbol{F}^T$.

Ako postoji k veza $\lambda^i(\boldsymbol{C}) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots k)$, onda je

$$\boldsymbol{N} = \sum_{i=1}^{k} q_i \boldsymbol{F}\lambda^i_{\boldsymbol{C}}(\boldsymbol{C})\,\boldsymbol{F}^T, \tag{5b.4}$$

gde su q_i neodređeni skalarni koeficijenti. Tada princip determinizma za proste materijale pod dejstvom veza, iskazan matematički sa (5b.1) može biti formulisan u ekvivalentnom obliku:

Istorijom gradijenta deformacije $\boldsymbol{F}^t(s)$ *određen je* ***dodatni*** *(extra) ili* ***konstitutivni napon***

$$\boldsymbol{T}_E = \boldsymbol{T} - \sum_{i=1}^{k} q_i\,\boldsymbol{F}\lambda^i_{\boldsymbol{C}}(\boldsymbol{C})\,\boldsymbol{F}^T \tag{5b.5}$$

konstitutivnom jednačinom

$$\boldsymbol{T}_E(t) = \mathop{\mathcal{T}}_{s=0}^{\infty}[\boldsymbol{F}^t(s)] = \boldsymbol{R}(t)\mathop{\mathcal{T}}_{s=0}^{\infty}[\boldsymbol{U}^t(s)]\,\boldsymbol{R}^T(t). \tag{5b.6}$$

Funkcionel reagovanja $\mathcal{T}$ *je definisan samo za* $\boldsymbol{F}^t(s)$ *koji zadovoljava veze* $\lambda^i(\boldsymbol{C}) = 0$ *i određen je do na član definisan sa* (5b.4).

Po pravilu $\mathcal{T}$ se može predstaviti u oblicima koji su identični onima u odeljku 5 za materijale na koje ne deluju nikakve veze.

Broj unutrašnjih veza k nismo precizirali ali je ograničen. Naime, pretpostavljajući da je funkcionalna zavisnost λ od $\boldsymbol{C}$ simetrizovana sledi da je λ funkcija, u opštem slučaju, šest njegovih nezavisnih komponenti. Kako svaka unutrašnja veza oblika (5a.2) nameće ograničenje na jednu od nezavisnih komponenti, sledi da je najveći mogući broj ograničenja šest što je i najveći mogući broj nezavisnih unutrašnjih veza. To znači da je u (5b.4) $k \leqslant 6$.

Razmotrimo neke primere unutrašnjih veza.

1. ***Nestišljivost.*** Materijal je nestišljiv ako se može samo izohorično kretati. Tada je $\det \boldsymbol{C} = 1$ i odgovarajuća funkcija veze glasi

$$\lambda(\boldsymbol{C}) = \det \boldsymbol{C} - 1. \tag{5b.7}$$

Odavde je lako pokazati da je

$$F\lambda_C F^T = FC^{-1}F^T, \quad \det C = 1$$

tako da (5b.3) postaje

$$N = -pI, \tag{5b.8}$$

gde je p proizvoljni skalar. Smenom ovog izraza u (5b.1) dobijamo da je

$$T = -pI + \underset{s=0}{\overset{\infty}{\mathcal{T}}}[F^t(s)], \tag{5b.9}$$

odakle sledi dobro poznati rezultat:

> *Za nestišljive proste materijale napon je određen istorijom gradijenta deformacije do na hidrostatički pritisak p.*

Funkcionel reagovanja $\mathcal{T}$ je definisan samo za one gradijente deformacije F za koje je, saglasno sa vezom (5b.7), $\det F(\tau) = +1$, $-\infty < \tau < \infty$. *Hidrostatički pritisak p* je, jasno, neodređen samo u smislu da ne može biti određen samo pomoću istorije kretanja. On se određuje pomoću Košijevih zakona kretanja i zadatih normalnih napona na granici posmatranog tela.

2. ***Neistegljivost.*** Neka je e jedinični vektor u referentnoj konfiguraciji $\varkappa$ i neka je materijal neistegljiv u pravcu e. Tada je, s obzirom na (2.9.1) i (2.9.3), $\lambda^2_{(e)} = 1$. Na osnovu toga funkciju veze za neistegljiv materijal u pravcu e možemo pisati u obliku

$$\lambda(C) = e \cdot Ce - 1 \tag{5b.10}$$

Sada je lako pokazati da je $\lambda_C = e \otimes e$ i

$$N = qF(e \otimes e)F^T = qFe \otimes Fe \tag{5b.11}$$

s obzirom na (5b.3). Smenom ovih izraza u (5b.1) dobijamo da je

$$T = qFe \otimes Fe + \underset{s=0}{\overset{\infty}{\mathcal{T}}}[F^t(s)], \tag{5b.12}$$

tj., za materijale koji su neistegljivi u pravcu e

> *u odnosu na referentnu konfiguraciju $\varkappa$, napon je određen istorijom kretanja do na aksijalno naponsko stanje u pravcu Fe.*

3. ***Krutost.*** Pri krutim pomeranjima određenim sa (2.7a.4) gradijent deformacije $F(\tau)$ je svojstven ortogonalan tenzor Q ($\det Q = 1$) u odnosu na pogodno izabranu referentnu konfiguraciju. Tada je, kao što smo više puta isticali,

$$C(\tau) = F^T(\tau)F(\tau) = I, \quad (-\infty < \tau < \infty). \tag{5b.13}$$

Odgovarajuće nezavisne funkcije veza su

$$\lambda_{\alpha\beta}(C) = C_{\alpha\beta} - G_{\alpha\beta}, \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3;\ \alpha \leqslant \beta) \tag{5b.14}$$

i ima ih šest. Dalje ćemo koristiti (5b.4) u obliku

$$N^{kl} = \sum_{\beta,\alpha\leqslant\beta}^{3} q^{\alpha\beta}\frac{\partial\lambda_{\alpha\beta}}{\partial C_{KL}}x^k_{,K}x^l_{,L} = \sum_{\beta,\alpha\leqslant\beta}^{3} q^{\alpha\beta}\frac{\partial\lambda_{\alpha\beta}}{\partial C_{KL}}Q^k_K Q^l_L \tag{5b.15}$$

jer je $x^k_{,K} = Q^k_K$ što neposredno sledi iz (2.7a.4). Simetrizujući funkcionalnu zavisnost $\lambda_{\alpha\beta}$ od $C_{\alpha\beta}$, na osnovu (5b.14), pišemo

$$\lambda_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(C_{\alpha\beta} + C_{\beta\alpha}) - G_{\alpha\beta}.$$

Sada je

$$\frac{\partial \lambda_{\alpha\beta}}{\partial C_{KL}} = \frac{1}{2}(\delta^K_\alpha \delta^L_\beta + \delta^L_\alpha \delta^K_\beta)$$

tako da (5b.15) postaje

$$N^{kl} = \sum_{\beta,\alpha\leqslant\beta}^{3} q^{\alpha\beta} Q^{(k}_\alpha Q^{l)}_\beta \equiv q^{kl} \tag{5b.16}$$

gde su $q^{\alpha\beta}$ proizvoljne skalarne veličine. Prema (5b.16) proizvoljne su i veličine q^{kl} koje formiraju simetričan sistem drugog reda.

Smenom ovog izraza u (5b.6) dobijamo

$$t^{kl} = q^{kl} + \overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathcal{T}}}{}^{kl}\,[\boldsymbol{F}^t(s)]. \tag{5b.17}$$

S obzirom na proizvoljnost q^{kl} sledi da je tenzor napona t^{kl} proizvoljan u celosti. Kratko rečeno: pri krutom kretanju materijala napon je u potpunosti neodređen. Tada, bez gubljena u opštosti, možemo uzeti da je $\mathcal{T}^{kl} \equiv 0$, tako da je

$$t^{kl} = q^{kl} \tag{5b.18}$$

odakle se vidi da ne postoji nikakva relacija između napona i istorije gradijenta deformacije koja se uvek mora, u slučaju krutog kretanja, svesti na istoriju rotacije.

Znači, za krute materijale napon uopšte ne zavisi od istorije njegovog kretanja. To nije ni čudno kada se zna da se kruto kretanje bilo kog tela određuje nezavisno od njegovog naponskog stanja.

Vežbanja:

1. Pokazati da se u slučaju nestišljivih materijala konstitutivna relacija (5b.9), s obzirom na proizvoljnost p, može pisati, bez gubljenja u opštosti, u obliku

$$\boldsymbol{T} = -p\boldsymbol{I} + \overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathcal{T}}}\,[\boldsymbol{F}^t(s)],$$

gde je

$$tr\,\overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathcal{T}}}\,[\boldsymbol{F}^t(s)] = 0.$$

U tom slučaju je hidrostatički pritisak jednak srednjem normalnom pritisku napona $\boldsymbol{T}$, tj.

$$p = -\frac{1}{3}\,tr\,\boldsymbol{T}.$$

2. Uslovi $r\overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathscr{T}}}[\boldsymbol{F}^t(s)] = 0$ omogućuje da se dodatni napon $\mathscr{T}$ za nestišljive materijale u potpunosti odredi. Tada u izrazu za $\mathscr{T}$, koje je u potpunosti određeno istorijom izohorične deformacije, ne figuriše neodređeno p, jer je $\mathscr{T}$ jednako devijatorskom delu tenzora napona $\boldsymbol{T}$. Pokazati!

3. U slučaju nestišjivih materijala u pravcu $\boldsymbol{e}$ pokazati da uslov potpune određenosti dodatnog napona $\mathscr{T}$ glasi

$$\boldsymbol{Fe}\cdot\overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathscr{T}}}[\boldsymbol{F}^t(s)]\,\boldsymbol{Fe} = 0.$$

4. Za nestišjivi materijal u dva pravca $\boldsymbol{e}_\alpha$ $(\alpha = 1, 2)$ u odnosu na referentnu konfiguraciju $\varkappa$ biće

$$\boldsymbol{N} = \sum_{\alpha=1}^{2} q^\alpha\, \boldsymbol{Fe}_\alpha \otimes \boldsymbol{Fe}_\alpha.$$

Pokazati!

5. Pokazati da je, u slučaju zadatka 4,

$$\boldsymbol{Fe}_\alpha\cdot\overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathscr{T}}}[\boldsymbol{F}^t(s)]\,\boldsymbol{Fe}_\alpha = 0 \quad (\alpha = 1, 2)$$

uslov potpune određenosti dodatnog napona.

6. MATERIJALNI IZOMORFIZAM. HOMOGENOST

Jednačina

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{X}, t) \tag{2.4.5}$$

određuje kretanje materijalnog kontinuuma u odnosu na neku referentnu konfiguraciju $\varkappa$ koja može biti i početna. Očigledno je da će pri promeni referentnog sistema, u opštem slučaju, jednačina kretanja imati drugi oblik. Zbog toga pišemo

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_\varkappa(\boldsymbol{X}, t) \tag{6.1}$$

umesto (2.4.5) kada želimo da istaknemo zavisnost opisa kretanja od referentne konfiguracije $\varkappa$. Pri prelasku na drugu referentnu konfiguraciju $\hat{\varkappa}$, određenu u odnosu na $\varkappa$ transformacijom

$$\varkappa \to \hat{\varkappa}: \quad \widehat{\boldsymbol{X}} = \widehat{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{X}) \quad \text{ili} \quad \boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}(\widehat{\boldsymbol{X}}) \tag{6.2}$$

isto kretanje tela je dato sa

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_\varkappa[\boldsymbol{X}(\widehat{\boldsymbol{X}}), t] = \boldsymbol{x}_{\hat{\varkappa}}(\widehat{\boldsymbol{X}}, t). \tag{6.3}$$

Tada je, saglasno sa (2.5.10), (2.4.5), (6.3) i (6.2), promena gradijenta deformacije pri promeni referentne konfiguracije određena sa

$$\boldsymbol{F} = \widehat{\boldsymbol{F}}\boldsymbol{P} \tag{6.4}$$

gde je

$$\boldsymbol{P}: \varkappa \to \hat{\varkappa}, \quad \boldsymbol{P} = \left\{\frac{\partial \widehat{X}^K}{\partial X^L}\right\} \tag{6.5}$$

gradijent transformacije referentne konfiguracije $\varkappa$ u $\hat{\varkappa}$.

Na osnovu principa determinizma napon je za neku materijalnu česticu X određen istorijom kretanja tela. Prema tome, preko kretanja i funkcionel reagovanja $\mathcal{T}$ je takođe dat u odnosu na neku referentnu konfiguraciju $\varkappa$. Mi pišemo $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\varkappa}$ kada želimo da tu zavisnost naglasimo. Tako za proste materijale imamo

$$\boldsymbol{T}(t) = \overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathcal{T}_{\varkappa}}} [\boldsymbol{F}^t(s)] \tag{6.6}$$

u odnosu na referentnu konfiguraciju $\varkappa$, ili

$$\boldsymbol{T}(t) = \overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathcal{T}_{\hat{\varkappa}}}} [\boldsymbol{F}^t(s)] \tag{6.7}$$

u odnosu na referentnu konfiguraciju $\hat{\varkappa}$.

Očigledno je da, pri svakoj promeni referentnog sistema $\varkappa \longrightarrow \hat{\varkappa}$ mora identički da važi

$$\overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathcal{T}_{\varkappa}}} [\boldsymbol{F}^t(s)] \equiv \overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathcal{T}_{\hat{\varkappa}}}} [\hat{\boldsymbol{F}}^t(s)]. \tag{6.8}$$

S obzirom na (6.6) i (6.7) možemo zaključiti:

Oblik funkcionela reagovanja ne zavisi samo od čestice za koju se određuje, nego i od izbora referentnog sistema.
Tenzor napona $\boldsymbol{T}(X, t)$ *je određen na isti način istorijom gradijenta deformacije u odnosu na* $\varkappa$ *kao i istorijom gradijenta deformacije u odnosu na* $\hat{\varkappa}$.
Pri promeni konfiguracije $\varkappa \longrightarrow \hat{\varkappa}$ *važi identičnost za proizvoljnu regularnu istoriju* $\boldsymbol{F}^t(s)$

$$\boxed{\overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathcal{T}_{\varkappa}}} [\boldsymbol{F}^t(s)] = \overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathcal{T}_{\hat{\varkappa}}}} [\boldsymbol{F}^t(s)\, \boldsymbol{P}^{-1}]} \tag{6.9}$$

koja neposredno sledi iz (6.8) *i* (6.4).

Važno je uočiti da gradijent deformacije uopšte, prema (2.5.2), zavisi samo od referentne konfiguracije lokalno u odnosu na X. Prema tome, u opštem slučaju, i funkcionel reagovanja zavisi samo od *lokalne* konfiguracije $\varkappa$ u okolini X, a ne i od *globalne* konfiguracije. To znači da su se sva naša dosadašnja razmatranja konstitutivnih jednačina odnosila na jednu posebnu materijalnu česticu, ili u specijalnom slučaju, na telo koje se sastoji od čestica koje imaju isti funkcionel reagovanja u odnosu na datu referentnu konfiguraciju $\varkappa$. Za takvo telo se kaže da je homogeno i o njemu će dalje biti više reči.

U slučaju dve različite čestice X i $\bar{X}$ tela $\mathcal{B}$ njima odgovarajući funkcioneli reagovanja će se u opštem slučaju razlikovati. Pri tome se, saglasno prethodno rečenom, podrazumeva da se svaki od tih funkcionela određuje posebno u odnosu na lokalnu konfiguraciju njima odgovarajuće čestice. Pitanje je sada kada možemo kazati za dve čestice X i $\bar{X}$ tela $\mathcal{B}$ da su čestice istog materijala. To je sigurno onda kada okoline tih čestica možemo prevesti u takve referentne konfiguracije $\varkappa$ i $\bar{\varkappa}$ tako da bilo koja sledeća deformacija dovodi do jednakih napona u položajima $\boldsymbol{X}$ i $\bar{\boldsymbol{X}}$ koje zauzimaju čestice X i $\bar{X}$ u tim konfiguracijama, respektivno. Tada nikakvo eksperimentalno merenje napona, izazvanog deformacijom, ne može da nam kaže da li polazimo od dela tela $\mathcal{B}$, koji odgovara okolini čestice X, u odnosu na referentnu konfiguraciju $\varkappa(\mathcal{B})$ ili od dela, koji odgovara okolini čestice $\bar{X}$, u odnosu na referentnu konfiguraciju $\bar{\varkappa}(\mathcal{B})$. Ova interpretacija sugeriše takođe da smo dužni pretpostaviti da su gustine $\varrho_{\varkappa}$ i $\varrho_{\bar{\varkappa}}$ u okolini čestica X i $\bar{X}$, respektivno, jednake i uniformne što ćemo i dalje činiti. Sva ova naša razmatranja sada formalno prevedimo na matematički jezik.

Za referentnu konfiguraciju $\varkappa$ kažemo da ima konstantnu gustinu ako $\varrho_{\varkappa}(X)$ ne zavisi od čestice X.

*Za dve čestice X i $\bar{X}$ se kaže da su **materijalno izomorfne** ako je moguće naći referentnu konfiguraciju $\varkappa$ okoline X i referentnu konfiguraciju $\bar{\varkappa}$ okoline $\bar{X}$ takve da:*

a) *$\varkappa$ i $\bar{\varkappa}$ imaju istu uniformnu gustinu, tj.*

$$\varrho_{\varkappa} = \varrho_{\bar{\varkappa}} = \text{const.}; \tag{6.10}$$

b) *funkcionel reagovanja $\mathcal{T}_{\varkappa}$ za X se poklapa sa funkcionelom reagovanja $\mathcal{T}$ za $\bar{X}$, tj.*

$$\mathop{\mathcal{T}_{\varkappa}}_{t=0}^{\infty}[\boldsymbol{F}(X, t-s)] = \mathop{\mathcal{T}_{\bar{\varkappa}}}_{s=0}^{\infty}[\boldsymbol{F}(\bar{X}, t-s)] \tag{6.11}$$

za svaku regularnu tenzorsku istoriju gradijenta deformacije $\boldsymbol{F}^t$.

Za telo $\mathcal{B}$ kažemo da je *materijalno izomorfno* ako su sve njegove čestice uzajamno materijalno izomorfne jedna sa drugom.

Telo $\mathcal{B}$ je *materijalno uniformno* ako se može naći za svaku česticu $X \in \mathcal{B}$ referentna konfiguracija $\varkappa^X$ okoline X tako da je:

i) $\varrho_{\varkappa^X}$ uniformno i nezavisno od X i

ii) funkcionel reagovanja $\mathcal{T}$, koji odgovara X i $\varkappa^X$, isti za sve čestice X.

U opštem slučaju biće potrebno da se bira različita referentna konfiguracija $\varkappa^X$ za razne čestice X. Ako je moguće izabrati *jednu* referentnu konfiguraciju $\varkappa$ za celo telo $\mathcal{B}$ tako da je $\mathcal{T}_{\varkappa}$ isto za sve čestice kažemo da je *telo homogeno.* Sa fizičkog stanovišta telo je homogeno ako i samo ako postoji referentna konfiguracija *za celo telo* tako da svaka čestica reaguje na potpuno isti način kao i svaka druga na prošle deformacije opisane u odnosu na ovu konfiguraciju. Za homogeno telo konfiguracija $\varkappa^X$ može biti uzeta kao lokalizacija globalne konfiguracije $\varkappa(\mathcal{B})$ što za nehomogena tela ne važi. To znači da je svako homogeno telo materijalno uniformno. Obrnuto ne važi, tj., telo može biti materijalno uniformno, a da ne bude homogeno. U fizici se kao primer uniformnih ali ne i homogenih tela navode tela sa defektima i dislokacijama.

Precizirajući ove pojave mi ćemo dalje razmatrati samo homogeno telo, što smo ranije već napomenuli.

7. GRUPA IZOTROPIJE

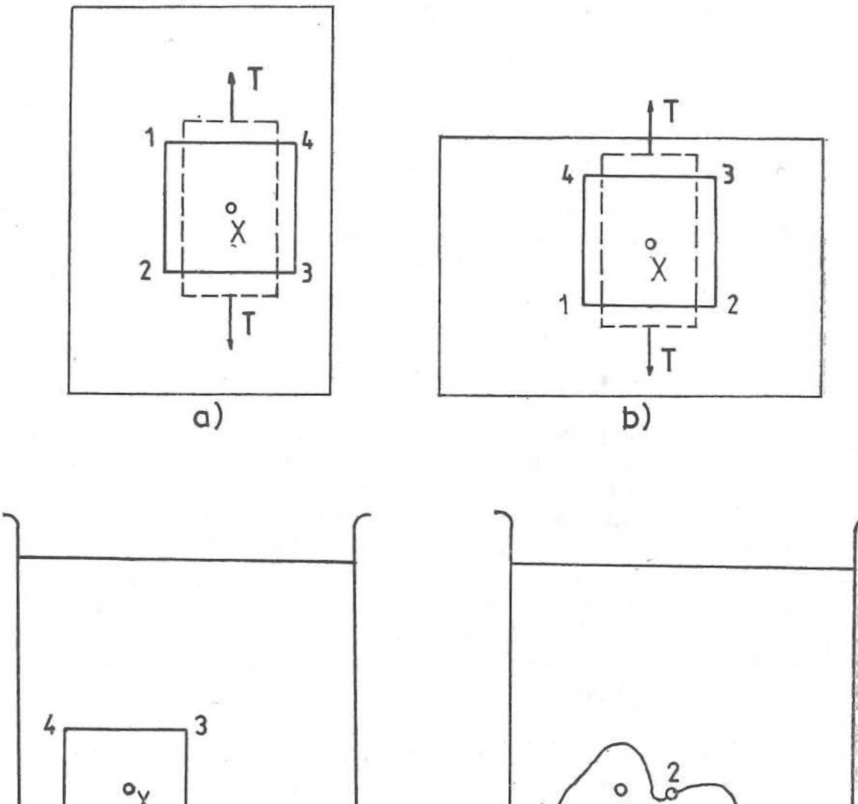
Može se desiti da čestica X bude netrivijalno materijalno izomorfna u odnosu na samu sebe. To znači, saglasno sa definicijom materijalnog izomorfizma, da postoje dve različite konfiguracije $\varkappa$ i $\bar{\varkappa}$ iste konstantne gustine okoline čestice X tako da se njima odgovarajući funkcioneli reagovanja, tj., $\mathcal{T}_{\varkappa}$ i $\mathcal{T}_{\bar{\varkappa}}$, poklapaju. Sa fizičkog stanovišta poklapanje funkcionela $\mathcal{T}_{\varkappa}$ i $\mathcal{T}_{\bar{\varkappa}}$ znači da se materijal u čestici X u konfiguraciji $\varkappa$ ne može razlikovati po svom mehaničkom reagovanju pošto se deformacijom prevede u konfiguraciju $\bar{\varkappa}$. Tada, s obzirom na (6.11), uslov materijalnog izomorfizma, ali sada za $X \equiv \bar{X}$, glasi

$$\underset{s=0}{\overset{\infty}{\mathcal{T}_{\varkappa}}} [\boldsymbol{F}(X, t-s)] = \underset{s=0}{\overset{\infty}{\mathcal{T}_{\bar{\varkappa}}}} [\boldsymbol{F}(X, t-s)]$$

ili

$$\underset{s=0}{\overset{\infty}{\mathcal{T}_{\varkappa}}} [\boldsymbol{F}^t(s)] = \underset{s=0}{\overset{\infty}{\mathcal{T}_{\bar{\varkappa}}}} [\boldsymbol{F}^t(s)] \tag{7.1}$$

saglasno načinu obeležavanja (5.3). Ova relacija mora da važi za sve istorije gradijenta deformacije $\boldsymbol{F}^t(s)$.



Sl. 51

Fizički smisao (7.1) ilustrovan je na sl. 51 na dva poznata primera. Na slici pod a) i b) predstavljeno je čvrsto telo u dve različite konfiguracije u okolini čestice X. Konfiguracija $\bar{\varkappa}$ je rotirana u donosu na $\varkappa$ za ugao $\frac{\pi}{2}$. T je napon zatezanja u vertikalnom pravcu, a e je dilatacija u istom pravcu. U opštem slučaju, konstitutivne jednačine u ova dva slučaja će biti

$$T = \mathcal{T}_{\varkappa}(e); \; \bar{T} = \mathcal{T}_{\bar{\varkappa}}(e) \text{ i } T \neq \bar{T},$$

tj., za istu dilataciju naponi zatezanja će biti različiti. Ako bi reagovanje materijala u odnosu na konfiguracije $\varkappa$ i $\bar{\varkappa}$ bilo isto imali bi

$$\mathcal{T}_{\varkappa}(e) = \mathcal{T}_{\bar{\varkappa}}(e).$$

Drugi primer je predstavljen pod c) i d) za slučaj stišljivog fluida. U dvema različitim konfiguracijama $\varkappa$ i $\bar{\varkappa}$, u kojima je fluid u miru, biće

$$p = p_{\varkappa}(\varrho), \quad \bar{p} = p_{\bar{\varkappa}}(\varrho).$$

U opštem slučaju bi se moglo očekivati da je $p \neq \bar{p}$ čak i kad je gustina u obe konfiguracije ista. Analogno prethodnom primeru bi bio

$$p_{\varkappa}(\varrho) = p_{\bar{\varkappa}}(\varrho).$$

S obzirom na to da (6.9) važi za svaku transformaciju referentnog sistema, pa prema tome i za $\varkappa \to \bar{\varkappa}$, dobijamo iz (6.9) i (7.1)

$$\mathop{\mathcal{T}_{\varkappa}}_{s=0}^{\infty}[\boldsymbol{F}^t(s)] = \mathop{\mathcal{T}_{\bar{\varkappa}}}_{s=0}^{\infty}[\boldsymbol{F}^t(s)\,\boldsymbol{P}^{-1}] = \mathop{\mathcal{T}_{\varkappa}}_{s=0}^{\infty}[\boldsymbol{F}^t(s)\,\boldsymbol{P}^{-1}], \tag{7.2}$$

gde je sada

$$\boldsymbol{P} : \varkappa \to \bar{\varkappa}, \quad \det \boldsymbol{P} = \pm 1, \tag{7.3}$$

pošto, saglasno sa (6.10) materijalnog izomorfizma, konfiguracije $\varkappa$ i $\bar{\varkappa}$ imaju istu gustinu. Zbog toga se takvo $\boldsymbol{P}$ naziva *unimodularni* (ili izohorični) gradijent transformacije referentne konfiguracije $\varkappa$ u referentnu konfiguraciju $\bar{\varkappa}$. Relacija (7.2) mora da važi za sve istorije gradijenta deformacije $\boldsymbol{F}^t(s)$.

Nije teško pokazati da, obrnuto, bilo koji unimodularni tenzor $\boldsymbol{H}$ za koji je

$$\boxed{\mathop{\mathcal{T}_{\varkappa}}_{s=0}^{\infty}[\boldsymbol{F}^t(s)] = \mathop{\mathcal{T}_{\varkappa}}_{s=0}^{\infty}[\boldsymbol{F}^t(s)\,\boldsymbol{H}]} \tag{7.4}$$

za svako $\boldsymbol{F}^t(s)$ dovodi do materijalnog izomorfizma X u samog sebe. Zaista, interpretirajući unimodularni tenzor $\boldsymbol{H}^{-1}$ kao gradijent transformacije $\boldsymbol{P}$ referentnog sistema $\varkappa$ u referentni sistem $\hat{\varkappa}$, (6.4) postaje $\hat{\boldsymbol{F}} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{H}$. Pri takvoj transformaciji sistema gustina ostaje nepromenjena što sledi iz (3.13.4) i (6.4) za $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{H}^{-1}$. Takođe, s obzirom da (6.9) važi za svaku istoriju gradijenta deformacije $\boldsymbol{F}^t(s)$, pa prema tome i za $\hat{\boldsymbol{F}}^t(s)$, ista identičnost sada glasi $\mathcal{T}_{\varkappa}(\hat{\boldsymbol{F}}^t) = \mathcal{T}_{\varkappa}(\hat{\boldsymbol{F}}^t\boldsymbol{P}^{-1})$ ili

$$\mathcal{T}_{\varkappa}(\boldsymbol{F}^t\boldsymbol{H}) = \mathcal{T}_{\hat{\varkappa}}(\boldsymbol{F}^t), \tag{a}$$

kada se uzme u obzir da je $\boldsymbol{P}^{-1} = \boldsymbol{H}$ i $\widehat{\boldsymbol{F}} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{H}$ Tada iz ovog izraza i (7.4) sledi da je

$$\underset{s=0}{\overset{\infty}{\mathcal{T}}}_{\varkappa}[\boldsymbol{F}^t(s)] = \underset{s=0}{\overset{\infty}{\mathcal{T}}}_{\hat{\varkappa}}[\boldsymbol{F}^t(s)], \tag{6.11}$$

što je trebalo dokazati.

Iz (6.8), (7.4) i (a) takođe sledi da je

$$\boldsymbol{T}(t) = \mathcal{T}_{\varkappa}(\boldsymbol{F}^t) = \mathcal{T}_{\varkappa}(\widehat{\boldsymbol{F}}^t) = \mathcal{T}_{\hat{\varkappa}}(\widehat{\boldsymbol{F}}^t) = \mathcal{T}_{\hat{\varkappa}}(\boldsymbol{F}^t). \tag{7.5}$$

Odavde se vidi da pri određivanju tenzora napona u X nije važno koji od funkcionela $\mathcal{T}_{\varkappa}$ ili $\mathcal{T}_{\hat{\varkappa}}$, niti koja od istorija deformacije $\boldsymbol{F}^t(s)$ ili $\widehat{\boldsymbol{F}}^t(s)$ će biti korišćeni. Kratko rečeno: ovaj izraz predstavlja matematičku formulaciju prethodno iznetog fizičkog stava da funkcionel reagovanja materijala ne pravi razliku između referentnih konfiguracija $\varkappa$ i $\hat{\varkappa}$ pri netrivijalnom materijalnom izomorfizmu materijalne čestice X u odnosu na samu sebe. Mi tada kažemo da su referentne konfiguracije $\varkappa$ i $\hat{\varkappa}$ *ravnopravne* u X.

Jednačina (7.4) očigledno izražava svojstvo koje ne važi za svako unimodularno $\boldsymbol{H}$. Skup svih unimodularnih tenzora $\boldsymbol{H}$ za koje (7.4) važi, formira grupu koja se naziva *grupa izotopije** funkcionel ponašanja ili *grupa materijalne simetrije* materijalne čestice X koja zauzima polož j $\boldsymbol{X}$ u konfiguraciji $\varkappa$. Što je veći broj unimodularnih tenzora $\boldsymbol{H}$ za koje važi (7.4), tj. što je veći broj elemenata koje sadrži grupa izotropije, brojnija su i materijalna simetrična svojstva koja telo poseduje. Po definiciji, grupa izotropije, u opštem slučaju, zavisi od izbora lokalne konfiguracije $\varkappa$ i označava se sa $g_{\varkappa}$.

Za neki apstraktni skup elemenata $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, ... nad kojim je definisana operacija opšteg proizvoda elemenata $\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B}$ kažemo da čini grupu u odnosu na operaciju opšteg proizvoda ako je:

a) $\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B}$ u skupu za svako $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{B}$;

b) skup sadrži jedinični element $\boldsymbol{I}$ takav da je $\boldsymbol{I} \otimes \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{I}$ za svako $\boldsymbol{A}$;

c) $\boldsymbol{A} \otimes (\boldsymbol{B} \otimes \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B}) \otimes \boldsymbol{C}$, tj., važi asocijativni zakon za proizvod;

d) Svaki element $\boldsymbol{A}$ ima inverzni element $\boldsymbol{A}^{-1}$, koji takođe pripada skupu, takav da je $\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1} \otimes \boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$.

U našem slučaju elementi skupa su transformacije referentnih konfiguracija definisane sa $\boldsymbol{H}$. Proizvod dve transformacije je proizvod $\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{H}_2$. Jedinični element je definisan identičnom transformacijom $\boldsymbol{I}$, dok je inverzna transformacija $\boldsymbol{H}^{-1}$ transformacije $\boldsymbol{H}$ takva da je $\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^{-1} = \boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{H} = \boldsymbol{I}$.

Da skup $g_{\varkappa}$ svih unimodularnih tenzora $\boldsymbol{H}$, koji zadovoljavaju (7.4), formira grupu vidi se iz sledećeg:

i) Neka su $\boldsymbol{H}_1$ i $\boldsymbol{H}_2$ elementi $g_{\varkappa}$; onda je sigurno i $\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{H}_2$ u $g_{\varkappa}$, jer je

$$\mathcal{T}_{\varkappa}(\boldsymbol{F}^t\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{H}_2) = \mathcal{T}_{\varkappa}(\boldsymbol{F}^t\boldsymbol{H}_1) = \mathcal{T}_{\varkappa}(\boldsymbol{F}^t);$$

ii) Ako je $\boldsymbol{H}$ element $g_{\varkappa}$, onda je i $\boldsymbol{H}^{-1}$, jer je

$$\mathcal{T}_{\varkappa}(\boldsymbol{F}^t) = \mathcal{T}_{\varkappa}(\boldsymbol{F}^t\boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{H}) = \mathcal{T}_{\varkappa}(\boldsymbol{F}^T\boldsymbol{H}^{-1}).$$

---

* Termin „grupa izotropije" uvodi Nol. U ovom slučaju Truzdel koristi termin „grupa ravnopravnosti" s obzirom da svako $\boldsymbol{H}$ iz grupe prevodi konfiguraciju $\varkappa$ u njoj ravnopravnu konfiguraciju $\hat{\varkappa}$. Mi dalje koristimo termin „grupa izotropije" koji je šire prihvaćen.

Identična transformacija $\boldsymbol{I}$ je u $g_\varkappa$ jer je $\boldsymbol{I}$ unimodularno i $\boldsymbol{IH} = \boldsymbol{HI}$ za svako $\boldsymbol{H}$ u $g_\varkappa$. Takođe važi asocijativni zakon $\boldsymbol{H}_1 (\boldsymbol{H}_2\boldsymbol{H}_3) = (\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{H}_2) \boldsymbol{H}_3$ za svako $\boldsymbol{H}_1$, $\boldsymbol{H}_2$ i $\boldsymbol{H}_3$ u $g_\varkappa$. □

Na osnovu definicije izotropne grupe, $g_\varkappa$ je podgrupa *unimodularne grupe* u svih unimodularnih transformaija, tj.,

$$g_\varkappa \subset u \tag{7.6}$$

Za dve referentne konfiguracije $\varkappa$ i $\hat{\varkappa}$ materijalne čestice X grupe izotropije biće $g_\varkappa$ i $g_{\hat{\varkappa}}$. U odnosu na te konfiguracije važi, kao što smo videli

$$\mathcal{T}_\varkappa(\boldsymbol{F}^t) = \mathcal{T}_{\hat{\varkappa}}(\boldsymbol{F}^t\boldsymbol{P}^{-1}), \tag{6.9}$$

za svaku istoriju gradijenta deformacije $\boldsymbol{F}^t$, gde je $\boldsymbol{P}$, saglasno sa (6.5), gradijent transformacije $\varkappa \to \hat{\varkappa}$. Takođe smo videli da je $\boldsymbol{H}$ u $g_\varkappa$ ako, i samo ako, (7.4) važi za sve istorije $\boldsymbol{F}^t(s)$ što nam omogućuje da dokažemo ***teoremu*** 1:

$$g_{\hat{\varkappa}} = \boldsymbol{P} g_\varkappa \boldsymbol{P}^{-1}. \tag{7.7}$$

Dokaz: Neka je $\boldsymbol{H}$ u $g_\varkappa$. Tada važi (7.4). Na osnovu toga i (6.9) imamo

$$\mathcal{T}_{\hat{\varkappa}}(\boldsymbol{F}^t\boldsymbol{P}^{-1}) = \mathcal{T}_\varkappa(\boldsymbol{F}^t) = \mathcal{T}_\varkappa(\boldsymbol{F}^t\boldsymbol{H}) = \mathcal{T}_{\hat{\varkappa}}(\boldsymbol{F}^t\boldsymbol{H}\boldsymbol{P}^{-1}).$$

Ova identičnost mora da važi za svako $\boldsymbol{F}^t(s)$ pa prema tome i za $\boldsymbol{F}^t(s)\,\boldsymbol{P}$. Iz identičnosti

$$\mathcal{T}_{\hat{\varkappa}}(\boldsymbol{F}^t) = \mathcal{T}_{\hat{\varkappa}}(\boldsymbol{F}^t\boldsymbol{PHP}^{-1}), \tag{7.4a}$$

koja važi za svako $\boldsymbol{H}$ u $g_\varkappa$ onda sledi, prema definiciji grupe izotropije, da je $\boldsymbol{PHP}^{-1}$ u $g_{\hat{\varkappa}}$. □ Ona izražava ***Nolovo pravilo***:

Izotropne grupe date čestice u odnosu na razne referentne konfiguracije su uzajamno konjugovane.

Pri izvođenju ove teoreme dve lokalne konfiguracije $\varkappa$ i $\hat{\varkappa}$ ne moraju imati istu gustinu jer $\boldsymbol{P}$ ne mora biti unimodularno. Međutim, kako se svaki regularan tenzor može izraziti kao proizvod pozitivno definitnog sfernog tenzora i unimodularnog tenzora, na primer, $\boldsymbol{P} = (|\det \boldsymbol{P}|^{1/3}\boldsymbol{I})(|\det \boldsymbol{P}|^{-1/3}\boldsymbol{P})$, sledi da je za razmatranje promene referentne konfiguracije dovoljno dalje razmatrati unimodularne tenzore $\boldsymbol{P}$. U specijalnom slučaju kada je $\boldsymbol{P}$ sferno, tj., $\boldsymbol{P} = \alpha\boldsymbol{I}$ ($\alpha \neq 0$), referentni sistemi se dobijaju jedan iz drugog pomoću dilatacije (tj. deformacije za koju su glavna izduženja jednaka). Tada (7.7) postaje $g_\varkappa = g_{\hat{\varkappa}}$. To znači: *grupa izotropije se ne menja pri dilataciji.*

U mnogim slučajevima prvenstveno će nas interesovati članovi izotropne grupe koji su ortogonalni.

Teorema 2: *Ortogonalna transformacija* $\boldsymbol{Q}$ *pripada izotropnoj grupi* $g_\varkappa$ *ako i samo ako je*

$$\boxed{\boldsymbol{Q}\,\overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathcal{T}}}[\boldsymbol{F}^t(s)]\,\boldsymbol{Q}^T = \overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathcal{T}}}[\boldsymbol{Q}\boldsymbol{F}^t(s)\,\boldsymbol{Q}^T].} \tag{7.8}$$

identički zadovoljeno po $\boldsymbol{F}^t(s)$.

Dokaz: Ako je $\boldsymbol{Q}$ u $g_\varkappa$ onda je to i $\boldsymbol{Q}^T = \boldsymbol{Q}^{-1}$ jer je $g_\varkappa$ grupa. Tada identičnost (7.4), za $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{Q}^T$, postaje

$$\mathcal{T}_\varkappa(\boldsymbol{F}^t) = \mathcal{T}_\varkappa(\boldsymbol{F}^t\boldsymbol{Q}^T)$$

i važi za svako $F^t(s)$ pa prema tome i za $QF^t(s)$ kada glasi

$$\mathcal{T}_{\varkappa}(QF^t) = \mathcal{T}_{\varkappa}(QF^tQ^T). \tag{7.9}$$

Ali, ako u jednačini (5.5), koja izražava princip materijalne indiferentnosti i koja važi za svaku ortogonalnu matricu $Q^t(s)$ izaberemo $Q^t(s)$ tako da je $Q^t(s) \equiv Q$, nezavisno od s, onda dobijamo

$$\mathcal{T}_{\varkappa}(QF^t) = Q\mathcal{T}_{\varkappa}(F^t)\,Q^T.$$

Iz ove relecije i (7.9) očigledno sledi (7.8) za svako $F^t(s)$. □

Relacija (7.8) je ekvivalentna sledećim relacijama za funkcionele $\mathcal{R}$ i p u (5.29)

$$\left.\begin{aligned} Q\overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathcal{R}}}[G^*(s),\, C]\,Q^T &= \overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathcal{R}}}[QG^*(s)\,Q^T,\, QCQ^T] \\ Qp(C)\,Q^T &= p(QCQ^T). \end{aligned}\right\} \tag{7.10}$$

Identičnost (7.8) važi za svako Q u $g_{\varkappa}$ ako se funkcionel $\mathcal{T}$ zameni sa funkcionelom $\mathcal{G}'$ konstitutivne jednačine (5.18), ili $\mathcal{L}$ jednačine (5.15) ili drugim redukovanim oblicima funkcionela reagovanja prostog materijala.

Iz (7.8) sledi da $g_{\varkappa}$ sadrži identičnu transformciju I i centralnu inverziju $-I$. Odatle sledi da ako $g_{\varkappa}$ sadrži svojstvenu ortogonalnu transformaciju Q ($\det Q = 1$) onda sadrži i nesvojstvenu ortogonalnu transformaciju $-Q$. Specijalno, $g_{\varkappa}$ ne može sadržati grupu svojstvenih ortogonalnih transformacija ako takođe ne sadrži grupu svih ortogonalnih transformacija, svojstvenih ili ne. Centralna inverzija ne može biti shvaćena kao stvarno kretanje materijala, ali može odgovarati stvarnom stanju materijalne simetrije. Pošto I i $-I$ zajedno formiraju grupu, onda oni formiraju najmanju moguću grupu materijalne simetrije.

8. IZOTROPNI PROSTI MATERIJALI

Definicija: *Za (prost) materijal se kaže da je* ***izotropan*** *ako postoji bar jedna lokalna referentna konfiguracija $\varkappa$ takva da njena izotropna grupa $g_{\varkappa}$, koja odgovara funkcionelu reagovanja, sadrži potpunu ortogonalnu grupu o, tj.,*

$$o \subset g_{\varkappa}. \tag{8.1}$$

Lokalna konfiguracija koja poseduje tu osobinu određuje *neizobličeno (neiskrivljeno) (undistorted) stanje (izotropnog) materijala.* Za bilo koji izotropan materijal u neizobličenom stanju fizički eksperiment ne može otkriti da li je ili ne materijal proizvoljno rotiran pre nego što je eksperiment napravljen. Pri tome podvlačimo da termin rotiran sugeriše da je ovde reč o promeni referentnih konfiguracija, a ne o promenama koje su izazvane deformacijom u toku eksperimenta. Kratko rečeno, materijal nema privilegovanih pravaca kada je u neizobličenom stanju.

U ovde datoj definiciji izotropnog materijala ne pominje se koordinatna transformacija. Međutim, u praksi, rotacija materijala od bilo koje lokalne konfiguracije u drugu pomoću ortogonalne transformacije može biti predstavljena rotacijom ortogonalnih Dekartovih materijalnih osa zamišljeno vezanih za materijal u prvoj referentnoj konfiguraciji.

Očigledno je da za izotropan materijal važi relacija

$$Q\overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathcal{T}}}[\boldsymbol{F}^t(s)]\,\boldsymbol{Q}^T = \overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathcal{T}}}[\boldsymbol{Q}\boldsymbol{F}^t(s)\,\boldsymbol{Q}^T] \tag{7.8}$$

ali koja sada mora biti zadovoljena identički po istoriji $\boldsymbol{F}^t(s)$ i po ortogonalnom tenzoru $\boldsymbol{Q}$. Ona je od bitnog značaja u problemima svođenja funkcionela reagovanja izotropnih materijala na redukovani oblik.

Za izotropni materijal relacija (7.10) važi za sve ortogonalne transformacije $\boldsymbol{Q}$ pod uslovom da je referentna konfiguracija neizobličeno stanje. Izaberimo $\boldsymbol{Q}$ tako da je $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{R}(t)$; onda na osnovu (2.7.15), (5.27), (5.9) i (5.21) imamo da je

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{C}\boldsymbol{R}^T;\quad \boldsymbol{R}\boldsymbol{G}^*(s)\,\boldsymbol{R}^T = \boldsymbol{C}_t(t-s) - \boldsymbol{I} \equiv \boldsymbol{G}(s) \tag{8.2}$$

gde je $\boldsymbol{B}$ levi Koši-Grinov tenzor deformacije. Tada se (7.10), odnosno (5.29), svodi na prostiji oblik

$$\boldsymbol{T}(t) = \boldsymbol{p}(\boldsymbol{B}) + \overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathcal{R}}}[\boldsymbol{G}(s),\,\boldsymbol{B}]. \tag{8.3}$$

Ovaj redukovani oblik konstitutivne jednačine ne zadovoljava identički (7.8). To znači da (7.8) nameće nova ograničenja koja sada glase

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{Q}\boldsymbol{p}(\boldsymbol{B})\,\boldsymbol{Q}^T &= \boldsymbol{p}(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}^T) \\ \boldsymbol{Q}\overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathcal{R}}}[\boldsymbol{G}(s),\,\boldsymbol{B}]\,\boldsymbol{Q}^T &= \overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathcal{R}}}[\boldsymbol{Q}\boldsymbol{G}(s)\,\boldsymbol{Q}^T,\,\boldsymbol{Q}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}^T] \end{aligned}\right\} \tag{8.3a}$$

Tenzorska funkcija $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{B})$ koja zadovoljava $(8.3\text{a})_1$ za svako ortogonalno $\boldsymbol{Q} \in \mathcal{O}$ i svako pozitivno definitno i simetrično $\boldsymbol{B}$ u domenu definisanosti f-je $\boldsymbol{p}$ naziva se *izotropna tenzorska funkcija* u odnosu na $\mathcal{O}$. Isto tako funkcionel $\mathcal{R}$ koji zadovoljava $(8.3\text{a})_2$ za svako $\boldsymbol{Q} \in \mathcal{O}$, svako pozitivno definitno i simetrično $\boldsymbol{B}$ i svaku simetričnu istoriju $\boldsymbol{G}(s)$ nazivamo *izotropnim funkcinelom.* Samo po sebi se razume da je pojam izotropnog funkcionala generalizacija pojma izotropne funkcije o kojoj će dalje biti više reči. Uopšte kada su u pitanju izotropni prosti materijali uvek će biti reči o izotropnim funkcionelima i (ili) funkcijama. Saglasno tome i funkcionel reagovanja $\mathcal{T}$ koji zadovoljava (7.8) za svako $\boldsymbol{Q} \in \mathcal{O}$ i svaku regularnu istoriju $\boldsymbol{F}^t$ je takođe *izotropan funkcionel.*

Konstitutivna jednačina izotropnog materijala (8.3) nije jedini prostiji mogući oblik. Tako se, na primer, za izotropan materijal jednačina (5.24) svodi na oblik

$$\boldsymbol{T}(t) = \overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathcal{T}}}[\boldsymbol{U}_t(t-s),\,\boldsymbol{V}(t)], \tag{8.4}$$

gde funkcionel reagovanja mora biti izotropan, tj. mora da zadovoljava relaciju

$$\boldsymbol{Q}\overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathcal{T}}}[\boldsymbol{U}_t(t-s),\,\boldsymbol{V}(t)]\,\boldsymbol{Q}^T = \overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathcal{T}}}[\boldsymbol{Q}\boldsymbol{U}_t(t-s)\,\boldsymbol{Q}^T,\,\boldsymbol{Q}\boldsymbol{V}\boldsymbol{Q}^T] \tag{8.4a}$$

za svako $\boldsymbol{Q} \in \mathcal{O}$, svako pozitivno definitno i simetrično $\boldsymbol{V}$ i za svaku pozitivno definitnu i simetričnu istoriju $\boldsymbol{U}_t(t-s)$.

Iz konstitutivne jednačine izotropnog prostog materijala date u obliku (8.3) ili (8.4) se vidi da je *rotacija potpuno eliminisana.* Grubo govoreći, obe tvrde da je napon određen istorijom deformacije i trenutnom deformacijom samo pod uslovom, da kao meru trenutne deformacije izaberemo $\boldsymbol{V}$ ili $\boldsymbol{B}$ (ili bilo koju jednoznačno definisanu invertibilnu izotropnu funkciju od $\boldsymbol{V}$).

Vrlo je važno istaći da razni redukovani oblici konstitutivnih jednačina, datih u odeljku 5, važe za bilo koju referentnu konfiguraciju za razliku od redukovanih oblika (8.3) i (8.4) koji važe, u opštem slučaju, *samo* za izotropne materijale i *samo* kada se neizoblićeno stanje koristi kao lokalna referentna konfiguracija. Jasno je da je moguće koristiti i bilo koju drugu referentnu konfiguraciju. Ali tada, podvlačimo, konstitutivne jednačine izotropnog prostog materijala neće više imati neki jednostavan oblik kao u slučaju konfiguracije neizobličenog stanja materijala.

Za izotropan prost materijal sledi da je funkcionel $\mathcal{F}$ u (5.18) *izotropan* po $\boldsymbol{C}$, tj., da je

$$\boldsymbol{Q}\,\underset{s=0}{\overset{\infty}{\mathcal{F}}}[\boldsymbol{C}^t(s)]\,\boldsymbol{Q}^T = \underset{s=0}{\overset{\infty}{\mathcal{F}}}[\boldsymbol{Q}\boldsymbol{C}^t(s)\,\boldsymbol{Q}^T], \tag{8.5}$$

za svako ortogonalno $\boldsymbol{Q}$ i svaku pozitivno definitnu istoriju $\boldsymbol{C}^t(s)$. Ograničenja koja nameće identičnost (8.5) na oblik funkcionela $\mathcal{F}$ biće posebno razmatrana.

Napomena: Relacija (8.1) ima šire značenje. S obzirom na (7.6) možemo je pisati u obliku

$$\mathscr{o} \subset g_\varkappa \subset u. \tag{8.6}$$

Međutim, na osnovu jedne teoreme teorije grupa sledi da je ortogonalna grupa maksimalna podgrupa unimodularne grupe. To znači, da ako neka grupa g zadovoljava uslov $\mathscr{o} \subset g \subset u$ onda je $g = \mathscr{o}$ ili $g = u$. Primjenjujući to na (8.6) zaključujemo da za izotropne materijale postoji najmanje jedna referentna konfiguracija $g_\varkappa$ takva da je

$$g_\varkappa = \mathscr{o} \quad \text{ili} \quad g_\varkappa = u. \tag{8.7}$$

To znači da je grupa izotropije $g_\varkappa$ izotropnih materijala ili ortogonalna grupa ili unimodularna grupa.

Vežbanja:

1. Pokazati da se pri promeni $\boldsymbol{F}(\tau)$ u $\boldsymbol{Q}\boldsymbol{F}(\tau)\,\boldsymbol{Q}^T$ $(-\infty < \tau < \infty)$, gde je $\boldsymbol{Q} \in \mathscr{o}$, tenzor $\boldsymbol{S}$ menja u

$$\boldsymbol{Q}\boldsymbol{S}\boldsymbol{Q}^T,$$

gde je $\boldsymbol{S}$ bilo koja od veličina skupa

$$\{\boldsymbol{F}_t(\tau),\ \boldsymbol{C}_t(\tau),\ \boldsymbol{U}_t(\tau),\ \boldsymbol{V}_t(\tau),\ \boldsymbol{C}^t,\ \boldsymbol{U}^t,\ \boldsymbol{B}^t,\ \boldsymbol{V}^t,\ \boldsymbol{R}^t,\ \boldsymbol{G}(s)\}.$$

2. Ako se $\boldsymbol{F}(\tau)$ menja u

$$\boldsymbol{F}(\tau)\,\boldsymbol{Q}$$

gde je $\boldsymbol{Q} \in \mathscr{o}$, onda se:

a) $\boldsymbol{M}$ menja u $\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{Q}$, gde je $\boldsymbol{M}$ bilo koji od tenzora iz skupa

$$\{\boldsymbol{C}(\tau),\ \boldsymbol{U}(\tau),\ \boldsymbol{C}_t^*(\tau),\ \boldsymbol{U}_t^*(\tau)\};$$

b) $\boldsymbol{N}$ ostaje $\boldsymbol{N}$,

gde je $\boldsymbol{N}$ bilo koja od veličina iz skupa

$$\{\boldsymbol{B}(\tau),\ \boldsymbol{V}(\tau),\ \boldsymbol{F}_t(\tau),\ \boldsymbol{C}_t(\tau),\ \boldsymbol{B}_t(\tau)\};$$

c) $\boldsymbol{R}(\tau)$ menja u $\boldsymbol{R}(\tau)\,\boldsymbol{Q}$.

Pokazati!

9. PROSTI FLUIDI

Fizički pojam *fluida* je dosta neodređen i koristi se u širokom smislu. Kaže se da je to materijal koji može da teče u bilo kom pravcu. Formalno, u tom smislu, *fluid* ne može da bude u ravnotežnom stanju pod dejstvom smičućih napona. Posmatra se i kao materijal koji nema *privilegisane orijentacije* ili kao materijal koji prirodno ispunjava sud u kome se nalazi. U tome je sadržana ideja da *svojstva* ili *ponašanje* fluida ne zavise od njegovog *oblika* pri istoj gustini.

Nol, koristeći pojam grupe simetrije, ova kvalitetna fizička tumačenja prevodi u preciznu matematičku ***definiciju:***

Prosti materijal je prost fluid ako je, za neku referentnu konfiguraciju, grupa izotropije potpuna grupa unimodularnih transformacija, tj.

$$g = u. \tag{9.1}$$

Trivijalna posledica ove definicije je da su svi prosti fluidi izotropni. Takođe, na osnovu Nolovog pravila možemo zaključiti: ako je $\varkappa$ neizobličeno stanje za koje je $g_\varkappa = u$ onda je grupa izotropije koja odgovara lokalnoj referentnoj konfiguraciji $\hat{\varkappa}$ data sa $g_{\hat{\varkappa}} = \boldsymbol{P} g_\varkappa \boldsymbol{P}^{-1} = \boldsymbol{P} u \boldsymbol{P}^{-1} = u$. Znači,

svaka konfiguracija prostog fluida je neizobličeno stanje. Prema tome, za svaku konfiguraciju prostog fluida izotropna grupa je potpuna unimodularna grupa.

Tada (7.4) važi za svako $\boldsymbol{H}$ u u i za svako $\hat{\varkappa}$. Takođe, iz (7.1) sledi da je

$$\mathop{\mathcal{T}_\varkappa}_{s=0}^{\infty}[\boldsymbol{F}^t(s)] = \mathop{\mathcal{T}_{\hat{\varkappa}}}_{s=0}^{\infty}[\boldsymbol{F}^t(s)] \tag{9.2}$$

uvek kada je

$$\boldsymbol{P}: \varkappa \longrightarrow \hat{\varkappa}, \quad \det \boldsymbol{P} = \pm 1. \tag{9.3}$$

S obzirom na (3.13.4) i (6.4) vidi se da je

$$\varrho_\varkappa = \varrho_{\hat{\varkappa}} \det \boldsymbol{P} \tag{7.3}$$

odakle se može zaključiti da je

$$\varrho_\varkappa = \varrho_{\hat{\varkappa}}, \tag{9.4}$$

uvek kada važi (9.3) (u ovom slučaju je reč o sličnim konfiguracijama $\varkappa$ i $\hat{\varkappa}$). Važi i obrnuto, (9.4) povlači za sobom (9.3). Ali tada sledi da (9.2) važi uvek kada je $\varrho_\varkappa = \varrho_{\hat{\varkappa}}$, tj., uvek kada je gustina u X ista u lokalnim konfiguracijama $\varkappa$ i $\hat{\varkappa}$. To znači da oblik funkcionela reagovanja $\mathcal{T}_{\varkappa}$ zavisi od gustine $\varrho_{\varkappa}$, a ne i od bilo kojih drugih osobina referentne konfiguracije u X, kao što su rjena orijentaija ili oblik. Zato se, u slučaju fluida, cpšta konstitutivna jednačina (5.12), koja u sebi preko $\boldsymbol{F}$ sadrži zavisnost od $\varkappa$, svodi na

$$\boldsymbol{T}(t) = \boldsymbol{R}(t) \underset{s=0}{\overset{\infty}{\mathcal{T}}} [\boldsymbol{U}^t(s), \varrho_{\varkappa}] \boldsymbol{R}^T(t) \tag{9.5}$$

gde je sada $\mathcal{T}$ funkcionel istorije $\boldsymbol{U}(t-s)$, definisan u odnosu na konfiguraciju $\varkappa$, i funkcionel parametra $\varrho_{\varkappa}$. Funkcionel $\mathcal{T}$ ne zavisi od izbora lokalne referentne konfiguracije $\varkappa$. Ako se trenutna konfiguracija izabere za referentnu biće $\boldsymbol{R}_t(t) = \boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{U}^t(s) = \boldsymbol{U}_t(t-s)$ i

$$\boldsymbol{T}(t) = \underset{s=0}{\overset{\infty}{\mathcal{T}}} [\boldsymbol{U}_t(t-s), \varrho(t)]. \tag{9.6}$$

Pošto grupa izotropije sadrži ortogonalnu grupu $\mathcal{O}$, (7.8) može biti primenjeno na $\mathcal{T}$ tako da imamo

$$\boldsymbol{Q} \underset{s=0}{\overset{\infty}{\mathcal{T}}} [\boldsymbol{U}_t(t-s), \varrho(t)] \boldsymbol{Q}^T = \underset{s=0}{\overset{\infty}{\mathcal{T}}} [\boldsymbol{Q}\boldsymbol{U}_t(t-s)\boldsymbol{Q}^T, \varrho(t)] \tag{9.7}$$

za svaku ortogonalnu transformaciju $\boldsymbol{Q}$, tj., funkcionel $\mathcal{T}$ mora biti *izotropan* po $\boldsymbol{U}_t(t-s)$. Sa (9.6) i (9.7) određena je konstitutivna jednačina prostog fluida.

Kakvo je fizičko tumačenje ove jednačine?

Jednačina (9.6) kaže da je napon $\boldsymbol{T}(t)$ u posmatranom trenutku t određen trenutnom gustinom $\varrho(t)$ i istorijom tenzcra izduženja $\boldsymbol{U}_t(t-s)$ u odnosu na trenutnu konfiguraciju. Jednačina (9.7), pak tvrdi da ako je celokupna istorija izduženja rotirana za konstantnu ortogonalnu transformaciju $\boldsymbol{Q}$, onda će i napon biti rotiran na isti način. Funkcionel reagovanja $\mathcal{T}$ u (9.6) ne zavisi od referentne konfiguracije. To znači da prosti fluid, mada može da pamti sve što mu se ikada desilo, razlikuje jednu konfiguraciju od druge samo po gustini.

i) Konstitutivnu jednačinu prostog fluida (9.6) možemo izvesti i direktno polazeći od (5.3) u kom funkcionel reagovanja $\mathcal{T}$ mora zadovoljavati (7.4) za svako unimodularno $\boldsymbol{H}$. Kao i u slučaju izvođenja opštih konstitutivnih jednačina prostih materijala pogodnim izborom $\boldsymbol{H}$ može se doći do bitnih zaključaka o obliku funkcionalne zavisnosti $\mathcal{T}$ od istorije gradijenata deformacije $\boldsymbol{F}^t(s)$.

Izaberimo $\boldsymbol{H}$ tako da je

$$\boldsymbol{H} = \{[\det \boldsymbol{F}(\tau)]^{\frac{1}{3}} \boldsymbol{F}^{-1}(\tau)\}_{\tau=t}. \tag{9.8}$$

Tada je prema (7.4), (3.78)

$$\boldsymbol{T}(t) = \underset{s=0}{\overset{\infty}{\mathcal{T}}} [\boldsymbol{F}^t(s)] = \underset{s=0}{\overset{\infty}{\mathcal{T}}} \{\boldsymbol{F}_t(t-s) [\det \boldsymbol{F}(t)]^{\frac{1}{3}}\}. \tag{9.9}$$

Ova konstitutivna jednačina mora identički zadovoljavati princip materijalne indiferentnosto (3.96) kcji pišemo u obliku

$$\boldsymbol{Q}(t) \boldsymbol{T}(t) \boldsymbol{Q}^T(t) = \underset{s=0}{\overset{\infty}{\mathcal{T}}} \{\boldsymbol{F}_t^*(t-s) [\det \boldsymbol{F}^*(t)]^{\frac{1}{3}}\}. \tag{9.10}$$

Iz (3.33) se vidi da je

$$\det \boldsymbol{F}^* = \det \boldsymbol{F}$$

dok je, saglasno sa (3.79)

$$\boldsymbol{F}_t^* (t-s) = \boldsymbol{Q}(t-s)\, \boldsymbol{F}_t (t-s)\, \boldsymbol{Q}^T (t).$$

Tada (9.10) postaje

$$\boldsymbol{Q}(t)\, \boldsymbol{T}(t)\, \boldsymbol{Q}^T (t) = \underset{s=0}{\overset{\infty}{\mathcal{T}}} \{\boldsymbol{Q}(t-s)\, \boldsymbol{F}_t (t-s)\, \boldsymbol{Q}^T (t)\, [\det \boldsymbol{F}]^{\frac{1}{3}}\}. \tag{9.11}$$

i mora biti zadovoljeno za svako $\boldsymbol{Q}(\tau)$. Neka je

$$\boldsymbol{Q}(t-s) = \boldsymbol{R}_t^T (t-s). \tag{9.12}$$

Onda je

$$\boldsymbol{Q}(t)\, \boldsymbol{T}(t)\, \boldsymbol{Q}^T (t) = \underset{s=0}{\overset{\infty}{\mathcal{T}}} \{\boldsymbol{U}_t (t-s)\, \boldsymbol{Q}^t (t)\, [\det \boldsymbol{F}]^{\frac{1}{3}}\}.$$

Za $\boldsymbol{Q}(t) = \boldsymbol{I}$ dobijamo

$$\boldsymbol{T}(t) = \underset{s=0}{\overset{\infty}{\mathcal{T}}} \{\boldsymbol{U}_t (t-s)\, [\det \boldsymbol{F}]^{\frac{1}{3}}\}$$

ili

$$\boldsymbol{T}(t) = \underset{s=0}{\overset{\infty}{\mathcal{T}}} [\boldsymbol{U}_t (t-s),\ \varrho(t)] \tag{9.6}$$

kada se uzme u obzir da je

$$\varrho \det \boldsymbol{F} = \varrho_\varkappa. \tag{9.13}$$

Koristeći (2.7.14) i (6.3.78) ova konstitutivna jednačina se može izraziti i u drugim ekvivalentnim oblicima. Na primer: iz (5.9) i (8.2) se vidi da je

$$\boldsymbol{U}_t (t-s) = [\boldsymbol{C}_t (t-s)]^{\frac{1}{2}} = [\boldsymbol{I} + \boldsymbol{G}(s)]^{\frac{1}{2}}, \tag{9.14}$$

čijom smenom u (9.6) dobijamo konstitutivnu jednačinu

$$\boldsymbol{T}(t) = \underset{s=0}{\mathcal{L}} [\boldsymbol{G}(s),\ \varrho(t)]. \tag{9.15}$$

ii) Konstitutivna jednačina data sa (9.15) je pogodna za nalaženje ravnotežnog dela napona prostog fluida.

U tom slučaju je, s obzirom na (5.28) i (8.2)

$$\boldsymbol{G}(s) = \boldsymbol{O} \tag{9.16}$$

i napon je funkcija samo od $\varrho(t)$, tj.

$$\boldsymbol{T}(t) = -\boldsymbol{p}\,[\varrho(t)]. \tag{9.17}$$

Uslov (9.7) nameće dalja ograničenja na tenzor napona, odnosno proizvoljan simetričan tenzor $\boldsymbol{p}$, koji sada glasi

$$\boldsymbol{Q}\boldsymbol{p}\boldsymbol{Q}^T = \boldsymbol{p}, \tag{9.18}$$

ili

$$\boldsymbol{Q}\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}\boldsymbol{Q} \tag{9.19}$$

za svako ortogonalno $\boldsymbol{Q}$. Prema tome, simetričan tenzor $\boldsymbol{p}$ mora biti komutativan sa svim ortogonalnim tenzorima što je moguće, saglasno jednoj teoremi linearne algebre, ako i samo ako je

$$\boldsymbol{p} = p(\varrho)\,\boldsymbol{I}. \tag{9.20}$$

Tada je

$$\boldsymbol{T} = -p(\varrho)\,\boldsymbol{I} \tag{9.21}$$

odakle se vidi da prost fluid u ravnotežnom stanju ne može da se odupre dejstvu smičućeg napona. Tada je, naime za sve statičke deformacije napon u prostom fluidu određen pritiskom $p(\varrho)$. Ovaj rezultat je ustvari specijalan slučaj konstitutivne jednačine (5.31) koja važi za sve proste materijale, pa prema tome i za proste fluide. Zbog toga (9.21) spada u domen *elastičnosti fluida.*

iii) Kako se opšta konstitutivna jednačina (9.15) može izraziti u obliku zbira ravnotežnog člana i člana koji izčezava kada se prost fluid drži u ravnoteži biće, saglasno sa (9.21)

$$\boldsymbol{T}(t) = -p(\varrho)\,\boldsymbol{I} + \mathop{\mathcal{R}}_{s=0}^{\infty}[\boldsymbol{G}(s),\,\varrho] \tag{9.22}$$

gde funkcionel reagovanja $\mathcal{R}$, prema (9.7), mora zadovoljavati

$$\boldsymbol{Q}\mathop{\mathcal{R}}_{s=0}^{\infty}[\boldsymbol{G}(s),\,\varrho]\,\boldsymbol{Q}^T = \mathop{\mathcal{R}}_{s=0}^{\infty}[\boldsymbol{Q}\boldsymbol{G}(s)\,\boldsymbol{Q}^T,\,\varrho] \tag{9.23}$$

identički po ortogonalnom tenzoru $\boldsymbol{Q}$. Takođe je

$$\mathop{\mathcal{R}}_{s=0}^{\infty}[\boldsymbol{G}(s),\,\varrho] = \boldsymbol{O} \tag{9.24}$$

za ostatak istorije $\boldsymbol{G}(s) = \boldsymbol{O}$ tako da je

$$\boldsymbol{T} = -p(\varrho)\,\boldsymbol{I} \tag{9.21}$$

za materijalnu česticu koja je sve vreme u ravnotežnom stanju. To znači da funkcionel $\mathcal{R}$ određuje reagovanje materijala na poremećaje koji ga izvode iz ravnotežnog stanja.

Prost fluid je izotropan materijal pa se prema tome svi rezultati prethodnog odeljka mogu primeniti na proste fluide. Specijalno, iz (8.3) lako je izvesti (9.22) kada se uzme u obzir da se, u slučaju prostog fluida, zavisnost od $\boldsymbol{B}(t)$ svodi na zavisnost od $\varrho(t)$, što sledi iz (9.6). To se može i direktno pokazati.

iiii) Za nestišljive proste fluide gustina je $\varrho = \varrho_\varkappa$, tj., ne može zavisiti od vremena i može biti izostavljena u konstitutivnoj jednačini. Tako npr. konstitutivna jednačina (9.22) može biti zamenjena jednačinom

$$\boldsymbol{T}(t) = -p\boldsymbol{I} + \mathop{\mathcal{R}}_{s=0}^{\infty}[\boldsymbol{G}(s)], \tag{9.25}$$

gde je funkcionel reagovanja $\mathcal{R}$ sada definisan samo za

$$\boldsymbol{C}_t(t-s) = \boldsymbol{G}(s) + \boldsymbol{I} \tag{8.2}$$

koje je unimodularno za sve $s \geqslant 0$, tj., kada je

$$\det[\boldsymbol{G}(s) + \boldsymbol{I}] = \det \boldsymbol{C}_t(t-s) = 1. \tag{9.26}$$

Kao i u (5b.9) p je neodređen pritisak.

Napomena: Oznaku p smo već koristili u izotropnom članu nestišljivih prostih materijala. I tada je p predstavljalo *neodređeni pritisak* u smislu da se ne može odrediti samo pomoću istorije kretanja što nije slučaj sa *pritiskom* $p(\varrho)$ prostih fluida. Zadržavajući ovaj način obeležavanja, jer se u oba slučaja radi o pritisku, razlikovaćemo ih isticanjem zavisnosti *pritiska* $p(\varrho)$ — izotropnog člana prostog fluida — od gustine što nije slučaj sa *neodređenim* ili *hidrostatičkim pritiskom* p prostih nestišljivih materijala uopšte.

Vežbanja:

Funkcionel reagovanja $\mathcal{R}$ u (9.25) je neodređen do na neodređen pritisak p. Pokazati da ova neodređenost može biti otklonjena ako se pretpostavi da je

$$tr \overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathcal{R}}} [G(s)] = 0,$$

kada se $\mathcal{R}$ svodi na devijatorski deo. Pokazati da se tada neodređeni pritisak p poklapa sa srednjim normalnim pritiskom napona.

10. PROSTO ČVRSTO TELO

Realni materijal, koji se obično smatra *čvrstim telom,* ima privilegisanu konfiguraciju u smislu da bilo koja promena njegovog oblika u odnosu na tu konfiguraciju dovodi do promene reagovanja materijala. Na primer: ako se neopterećeni čelični (ili gumeni) štap izduži, a zatim drži u ravnoteži, onda je za držanje štapa u toj konfiguraciji potrebno i dalje koristiti sile (ili bar njihov deo) koje su izazvale to izduženje, za razliku od početne konfiguracije za čije održavanje nisu bile potrebne nikakve sile. Ovakvo ponašanje je potpuno različito od ponašanja realnih supstanca koje smatramo *fluidima,* jer je, kao što smo videli, njihovo reagovanje za datu istoriju deformacije isto za bilo koje dve referentne konfiguracije koje imaju istu gustinu.

Promena oblika tela ostvaruje se deformacijom koja nije ortogonalna. To znači da bilo koja čista deformacija (vidi glavu II, odeljak 14) u odnosu na privilegisanu konfiguraciju dovodi do promene oblika tela što ne mora da bude slučaj sa rotacijom. Tada, saglasno rečenom, možemo zaključiti da bilo koja čista deformacija utiče na ponašanje čvrstog tela za razliku od rotacije za koju to ne možemo kazati, tj. rotacija može ali ne mora uticati na ponašanje čvrstog tela. Ova razmatranja nas dovode do ***Nolove definicije čvrstog tela:***

Prost materijal se naziva prosto čvrsto telo ako postoji referentna konfiguracija $\varkappa$ takva da njoj odgovarajuća izotropna grupa $g_\varkappa$ je podgrupa ortogonalne grupe $\mathcal{O}$, tj., ako je

$$g_\varkappa \subset \mathcal{O}. \tag{10.1}$$

Takva lokalna konfiguracija $\varkappa$ se naziva neizobličeno stanje čvrstog tela.

Saglasno ovoj definiciji deformacija koja nije ortogonalna ne pripada grupi izotropije $g_\varkappa$ kada je $\varkappa$ neizobličena konfiguracija.

Uočimo takođe, da je ovde data definicija pojma *neizobličeno stanje čvrstog tela* drukčija od definicije *neizobličeno stanje izotropnog materijala* koja se sadrži u

(8.1). Međutim, kada je prosto čvrsto telo izotropno one se poklapaju. I pre nego što pređemo na dokaz toga mi ćemo prethodno dokazati ***Koleman-Nolovu lemu:***

> *Neka su $\varkappa$ i $\hat{\varkappa}$ dve neizobličene konfiguracije čvrstog tela i neka je $\boldsymbol{P}$ gradijent transformcije $\varkappa \longrightarrow \hat{\varkappa}$ definisan sa (6.5). Neka je, saglasno teoremi o polarnoj dekompoziciji $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{R}_0 \boldsymbol{U}_0$ i neka su $\boldsymbol{Q}$ i $\widehat{\boldsymbol{Q}}$ elementi grupa $g_\varkappa$ i $g_{\hat{\varkappa}}$, respektivno, koje su uzajamno konjugovane saglasno Nolovom pravilu. Onda je*

$$\widehat{\boldsymbol{Q}} = \boldsymbol{R}_0 \boldsymbol{Q} \boldsymbol{R}_0^T \tag{10.2}$$

$$\boldsymbol{U}_0 = \boldsymbol{Q}^T \boldsymbol{U}_0 \boldsymbol{Q}. \tag{10.3}$$

Dokaz: Kako su $\varkappa$ i $\hat{\varkappa}$ neizobličene konfiguracije čvrstog tela, po definiciji su $\boldsymbol{Q}$ i $\widehat{\boldsymbol{Q}}$ ortogonalni tenzori. Takođe je

$$\widehat{\boldsymbol{Q}} = \boldsymbol{P} \boldsymbol{Q} \boldsymbol{P}^{-1} \tag{10.4}$$

prema Nolovom pravilu, što može mopisati u obliku $\widehat{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}$ ili

$$\widehat{\boldsymbol{Q}} \boldsymbol{R}_0 \boldsymbol{U}_0 = \boldsymbol{R}_0 \boldsymbol{U} \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{R}_0 \boldsymbol{Q} \, (\boldsymbol{Q}^T \boldsymbol{U}_0 \boldsymbol{Q}).$$

Odavde, na osnovu jedinstvenosti polarne dekompozicije, sledi (10.2) i (10.3). □

Posledica leme:

$$g_{\hat{\varkappa}} = \boldsymbol{R}_0 g_\varkappa \boldsymbol{R}_0^T, \tag{10.5}$$

tj., grupa $g_{\hat{\varkappa}}$ je ortogonalno konjugovana sa grupom $g_\varkappa$.

Ovo neposredno sledi iz (10.2).

Očigledno je da su $g_\varkappa$ i $g_{\hat{\varkappa}}$ uzajamno konjugovane u okviru ortogonalne grupe $\mathcal{O}$. Ističući to mi preciziramo:

> *Za dve podgrupe u $\mathcal{O}$ se kaže da su **istog tipa** ako su uzajamno konjugovane u $\mathcal{O}$.*

Samo tip izotropne grupe, ne sama grupa, predstavlja unutrašnje svojstvo prostog čvrstog tela.

i) Izotropno čvrsto telo je izotropno i čvrsto. Oba ova pojma, kao što smo videli, definisana su preko postojanja nekih specijalnih referentnih sistema pri čemu je svaki nosio naziv neizobličen. Radi određenosti, označićemo ih: sa $\varkappa$ — kada je u pitanju izotropno, a sa $\bar{\varkappa}$ — kada je u pitanju čvrsto stanje tela. Tada je, saglasno sa (8.1) i (10.1)

$$\mathcal{O} \subset g_\varkappa, \qquad g_{\bar{\varkappa}} \subset \mathcal{O}. \tag{10.6}$$

Teorema 1:

$$g_\varkappa = g_{\bar{\varkappa}} = \mathcal{O}. \tag{10.7}$$

Dokaz: Relacije u (10.6) važe za izotropno čvrsto telo jer je ono izotropno i čvrsto. Na osnovu (8.6) i (8.7) sledi da je $g_\varkappa = \mathcal{O}$ ili $g_\varkappa = u$. Ako je $g_\varkappa = u$, tada je, s obzirom na (7.7), $g_{\bar{\varkappa}} = \boldsymbol{P} u \boldsymbol{P}^{-1} = u$. To je protivurečno sa $(10.6)_2$. Prema tome mora biti $g_{\varkappa} = \mathcal{O}$, tj., $\varkappa$ — predstavlja neizobličenu konfiguraciju i za čvrsto telo.

Potrebno je još pokazati da je $g_{\bar{\varkappa}} = \mathcal{O}$.

Prema Nolovom pravilu (7.7) za transformaciju $\varkappa \to \bar{\varkappa}$ biće sada $g_{\varkappa} = \boldsymbol{P} g_{\bar{\varkappa}} \boldsymbol{P}^{1} = \boldsymbol{P} \mathcal{O} \boldsymbol{P}^{-1}$, gde je $\boldsymbol{P}$ gradijent transformacije definisan sa (6.5) (u tom izrazu $\hat{\varkappa}$ zameniti sa $\bar{\varkappa}$). Ali tada, s obzirom na (10.5) sledi da je

$$g_{\bar{\varkappa}} = \boldsymbol{R}_0 \mathcal{O} \boldsymbol{R}_0^T = \mathcal{O}. \tag{10.8}$$

Druga jednakost u ovom izrazu sledi na osnovu dobro poznatog stava teorije grupa:

Potpuno ortogonalna grupa $\mathcal{O}$ je otrogonalno konjugovana sama sebi.

Na osnovu toga i prvog dela dokaza, tj., $g_{\varkappa} = \mathcal{O}$, sledi (10.7) □

Ali tada očigledno, s obzirom na (8.7), (9.1) i (10.7 važi stav:

Svaki izotropni prosti materijal je ili fluid ili čvrsto telo.

ii) Prosto čvrsto telo je *aelotropno* ili *anizotropno*, ako je njegova izotropna grupa, koja odgovara neizobličenom referetnom stanju, *svojstvena podgrupa g* potpune ortogonalne grupe $\mathcal{O}$. Tip anizotropije se karakteriše tipom grupe g. U svakom slučaju, prosto čvrsto telo, određeno grupom g, je anizotropno ako i samo ako (7.8) važi za svako $\boldsymbol{Q} \in g$ i svaku istoriju $\boldsymbol{F}^t(s)$.

Kao što smo već napomenuli na kraju odeljka 7, svaka moguća izotropna grupa g sadrži dvočlanu grupu $\{\boldsymbol{I}, -\boldsymbol{I}\}$ kao podgrupu. Tada je lako pokazati da se g izvodi na osnovu podgrupe g_0, koju čine svojstvene rotacije i $-\boldsymbol{I}$. Prema tome, tip anizotropije određen je tipom grupe g_0. I mada postoji beskonačan broj tipova rotacionih grupa g_0 (izgleda da) samo njih dvanaest iscrpljuje vrste simetrija koje se javljaju u materijalu od kojih jedanaest odgovara trideset dvema kristalnim klasama, a koje su izvedene na osnovu svojstava optičke simetrije. Time u stvari pretpostavljamo da se izotropna grupa g kristalnog tela izvodi na osnovu njegove kristalografske tačkaste grupe g_0 i inverzije $-\boldsymbol{I}$. Napominjemo da je, prema teoriji grupa, za određivanje izotropne grupe g za čvrsto telo potrebno precizirati skup generatora za odgovarajuću grupu rotacije g_0 tela, tj., skup elemenata g_0 pomoću kojih se bilo koji element g_0 dobija u obliku proizvoda stepena tih elemenata.

U cilju određivanja tih grupa simetrija označimo sa $\boldsymbol{R}_n^{\varphi}$ pozitivnu rotaciju za ugao φ, $0 < \varphi < 2\pi$, oko ose čiji je pravac i smer određen jediničnim vektorom $\boldsymbol{n}$, sa $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ neku ortogonalnu bazu, a sa $\boldsymbol{m}$ jedinični vektor takav da je $\boldsymbol{m} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k})$. Pravce određene jediničnim vektorima $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ i $\boldsymbol{k}$, radi definisanosti, nazivamo *kristalografske ose.*

Sa ovako uvedenim definicijama, koje su uobičajne u kristalografiji, dajemo tabelu jedanaest tipova kristalnih klasa bez njihovog izvođenja s obzirom da je to u domenu kristalografije (tab. 1).

Tabela 1.

	Klasa kristala	Generatori grupe g
1.	Triklinični sistem sve klase	$\boldsymbol{I}$
2.	Monoklinični sistem sve klase	$\boldsymbol{R}_k^{\pi}$

3.	Rombični sistem sve klase	$R_i^{\pi} R_j^{\pi}$
4.	Tetragonalni sistem tetragonalna bisfenoidska tetragonalna piramidska tetragonalna bipiramidska	$R_k^{\frac{1}{2}\pi}$
5.	tetragonalna skalenoedarska ditetragonalna piramidska tetragonalna trapezoedarska ditetragonalna bipiramidska	$R_k^{\frac{1}{2}\pi} R_i^{\pi}$
6.	Teseralni (kubni) sistem tetraedarpentagondoedarska (tetartoedarska) didodekaedarska diploidalna	$R_i^{\pi} R_j^{\pi} R_m^{\frac{2}{3}\pi}$
7.	heksatetraedarska pentagonikositetraedarska (giroedarska) heksaoktaedarska	$R_i^{\frac{1}{2}\pi} R_j^{\frac{1}{2}\pi} R_k^{\frac{1}{2}\pi}$
8.	Heksagonalni sistem trigonalna piramidska trigonalna romboedarska	$R_k^{\frac{2}{3}\pi}$
9.	ditrigonalna piramidska trigonalna trapezoedarska ditrigonalna heksagonalna (skalenoedarska)	$R_i^{\pi} R_k^{\frac{2}{3}\pi}$
10.	trigonalna bipiramidska heksagonalna piramidska heksagonalna bipiramidska	$R_k^{\frac{1}{3}\pi}$
11.	ditrigonalna bipiramidska diheksagonalna piramidska heksagonalna trapezoedarska diheksagonalna bipiramidska	$R_i^{\pi} R_k^{\frac{1}{3}\pi}$

Poslednji tip aelc tropije se odnosi na *transverzalnu izotropiju* materijala za koji se $g_\varkappa$ sastoji iz jediničnog tenzora $\boldsymbol{I}$ i svih rotacija $\boldsymbol{R}_k^{\varphi}$, $(0 < \varphi < 2\pi)$, oko ose određena jediničnim vektorom $\boldsymbol{k}$. Transverzalna izotropija odgovara realnim materijalima koji imaju lamelarnu (lisnatu) ili snopovitu (bundle) strukturu.

Materijal se naziva *ortotropnim* ako njegova izotropna grupa sadrži refleksije (ogledanje) u odnosu na tri međusobno upravne ravni. Takav skup od tri refleksije čine $-\boldsymbol{R}_i^{\pi}$, $-\boldsymbol{R}_j^{\pi}$, $-\boldsymbol{R}_k^{\pi}$. Pošto je $\boldsymbol{R}_i^{\pi}\boldsymbol{R}_j^{\pi} = \boldsymbol{R}_k^{\pi}$ i $(\boldsymbol{R}_i^{\frac{1}{2}\pi})^2 = \boldsymbol{R}_i^{\pi}$, sledi da su kristali navedeni pod 3, 5, 6 i 7 u tabeli *ortortopni materijali.*

iii) Vratimo se ponovo na razmatranje čvrstih tela u najopštijem obliku. Kao što smo rekli i funkcionel reagovanja i grupa izotropije, u opštem slučaju, zavise ne samo od materijala nego i od referentne konfiguracije. Zbog toga je normalno očekivati da su samo posebne konfiguracije čvrstih tela neizobličene. Zaista, ako je konfiguracija $\varkappa$ neizobličena, a $\check{\varkappa}$ bilo koja druga konfiguracija, tada je, s obzirom na (6.5) i Nolovo pravilo

$$g_{\check{\varkappa}} = \boldsymbol{P} g_\varkappa \boldsymbol{P}^{-1}, \qquad g_\varkappa \subset \mathcal{O}, \tag{10.7}$$

Odavde je, za ortogonalni tenzor $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{PQP}^{-1}$ ortogonalan tenzor za svaki ortogonalan tenzor $\boldsymbol{Q} \in g_\varkappa$. To znači da bilo koja ortogonalna transformacija neizobličenog stanja je neizobličeno stanje. Za konjugovane grupe izotropije se tada kaže da su *slične*.

Tenzor $\boldsymbol{P}$ ne mora biti ortogonalan. Tada, u opštem slučaju, neće svi $\boldsymbol{PQP}^{-1}$ biti ortogonalni tenzori. To znači da $\check{\varkappa}$ nije neizobličena konfiguracija. Prema tome, sve referentne konfiguracije nisu neizobličene.

Pitanje je: da li postoji takvo neortogonalno $\boldsymbol{P}$ za koje je referentna konfiguracija $\check{\varkappa}$ takođe neizobličeno stanje?

Ako postoji, onda za takvo $\boldsymbol{P}$ važi (10.4). Formalno matematički problem se onda svodi na određivanje neortogonalnog tenzora $\boldsymbol{P}$ takvog da se iz (10.4), koje mora da važi za svako $\boldsymbol{Q} \in g_\varkappa$, dobija ortogonalno $\check{\boldsymbol{Q}}$ u $g_{\check{\varkappa}}$. Kako je $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{R}_0 \boldsymbol{U}_0$, gde je $\boldsymbol{R}_0$ ortogonalan, a $\boldsymbol{U}_0$ pozitivno definitan simetrični tenzor, i kako bilo koja rotacija neizobličenog stanja dovodi do drugog neizobličenog stanja, dalje je dovoljno odrediti pozitivno definitan tenzor $\boldsymbol{U}_0$ preko relacije

$$\check{\boldsymbol{Q}} = \boldsymbol{U}_0 \boldsymbol{Q} \boldsymbol{U}_0^{-1}, \tag{10.4a}$$

koja važi za svako $\boldsymbol{Q} \in g_\varkappa$, pod uslovom da je $\check{\boldsymbol{Q}} \in g_{\check{\varkappa}}$ ortogonalan tenzor. Ova relacija se može izraziti u obliku

$$\check{\boldsymbol{Q}} \boldsymbol{U}_0 = \check{\boldsymbol{Q}} (\boldsymbol{Q}^T \boldsymbol{U}_0 \boldsymbol{Q}).$$

S obzirom na zahtev da tenzori $\boldsymbol{Q}$ i $\check{\boldsymbol{Q}}$ moraju biti ortogonalni i da su tenzori $\boldsymbol{U}$ i $\boldsymbol{Q}^T \boldsymbol{U} \boldsymbol{Q}$ pozitivno definitni sledi, na osnovu jedinstvenosti polarne dekompozicije da je

$$\check{\boldsymbol{Q}} = \boldsymbol{Q}, \quad \boldsymbol{U}_0 \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q} \boldsymbol{U}_0, \tag{10.9}$$

odakle se vidi da $\boldsymbol{U}_0$ mora biti komutativno sa svakim ortogonalnim tenzorom $\boldsymbol{Q} \in g_\varkappa$. Na osnovu teoreme linearne algebre poznate pod imenom teorema o komutativnosti, to će biti onda i samo onda kada $\boldsymbol{Q}$ ostavlja svaki od karakterističnih prostora tenzora $\boldsymbol{U}_0$ invarijantnim. S obzirom da je tenzor $\boldsymbol{U}_0$ simetričan i pozitivno definitan, za njega važe teoreme glave II, odeljka 10. Podsećamo se da su tada moguća tri slučaja:

1. *Karakteristične vrednosti tenzora $\boldsymbol{U}_0$ su različite i njima odgovarajući karakteristični prostori su međusobno upravni.*

Ako sa λ, μ i ν obeležimo te karakteristične vrednosti, a njima odgovarajuće ortogonalne vektore, koji određuju invarijantne prostore, sa $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ i $\boldsymbol{k}$, respektivno, tada je

$$\boldsymbol{U}_0 = \lambda \boldsymbol{i} \otimes \boldsymbol{i} + \mu \boldsymbol{j} \otimes \boldsymbol{j} + \nu \boldsymbol{k} \otimes \boldsymbol{k}, \tag{10.10}$$

u odnosu na tako određenu bazu $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$.

2. *Dve karakteristične vrednosti su jednake i postoji jedan jednodimenzionalni karakteristični prostor i upravan na njega dvodimenzionalni karakteristični prostor.*

U tom slučaju je, recimo, $\lambda = \mu$. Tada iz (10.10) dobijamo da je

$$\boldsymbol{U}_0 = \lambda \boldsymbol{I} + \alpha \boldsymbol{k} \otimes \boldsymbol{k}, \tag{10.11}$$

gde je $\alpha = \nu - \lambda$ i

$$\boldsymbol{I} = \boldsymbol{i} \otimes \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} \otimes \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k} \otimes \boldsymbol{k}. \tag{10.12}$$

3. *Karakteristične vrednosti su jednake, a njima odgovarajući prostor je trodimenzionalan; to je ceo trodimenzionalan vektorski prostor.*

Tenzor $\boldsymbol{U}_0$ je tada izotropan tenzor, tj.,

$$\boldsymbol{U}_0 = \lambda \boldsymbol{I}, \tag{10.13}$$

s obzirom na (10.12) i činjenicu da je $\lambda = \mu = \nu$.

Koji od ovih mogućih slučajeva odgovara pojedinim grupama izotropija? Ili, kakva ograničenja na oblik $\boldsymbol{U}_0$ nameću razne grupe izotropija prostih čvrstih tela?

Iz prethodne tabele se vidi da trikliničnim čvrstim telima odgovara grupa izotropije $\{\boldsymbol{I}, -\boldsymbol{I}\}$. Očigledno je da su $\boldsymbol{Q}$ i $\boldsymbol{U}_0$ konjugovani za sve članove ove grupe. To znači da je za trikliničnu izotropiju svaka konfiguracija neizobličeno stanje. Podsetićemo se da je isti slučaj bio i sa prostim fluidima. Znači, triklinična prosta čvrsta tela i prosti fluidi imaju zajedničku osobinu da nemaju privilegisane konfiguracije, ali iz suprotnih razloga. Naime, fluidi poseduju maksimalnu simetriju u svakoj konfiguraciji, jer je $g_\varkappa = u$, dok triklinička čvsta tela poseduju minimalnu simetriju u svakoj konfiguraciji, jer je $g_\varkappa = \{\boldsymbol{I}, -\boldsymbol{I}\}$. To su ujedno i najmanja i najveća grupa od svih mogućih izotropnih grupa respektivno.

Najveća ograničenja na $\boldsymbol{U}_0$, očigledno, nameću prosta čvrsta tela sa najvećim simetričnim svojstvima ili, ekvivalentno tome, tela kojim odgovara izotropna grupa sa najvećim brojem elemenata. Tako je $g_\varkappa = \mathscr{o}$ za izotropno čvrsto telo. $\boldsymbol{U}_0$ mora biti tada izotropan tenzor, tj., $\boldsymbol{U}_0 = \lambda \boldsymbol{I}$. U tom slučaju je $\boldsymbol{P} = \lambda \boldsymbol{R}_0$, tj., transformacija $\varkappa \to \bar{\varkappa}$ je *konformna* (videti zadatak II. 12.7). Time je dokazana jedna od ***posledica Koleman-Nolove leme:***

> *Bilo koje neizobličeno stanje izotropnog čvrstog tela može se dobiti iz nekog drugog neizobličenog konformnom deformacijom $\boldsymbol{P} = \lambda \boldsymbol{R}_0$. Ili, svaka konformna deformacija prevodi jedno neizobličeno stanje u drugo, takođe neizobličeno stanje.*

Nije teško *direktno* pokazati da je i za kubne teseralne sisteme $\boldsymbol{U}_0$ izotropan tenzor. Tada je na primer

$$\boldsymbol{R}_k^{\frac{1}{2}\pi} = \begin{Bmatrix} \cos\frac{1}{2}\pi & \sin\frac{1}{2}\pi & 0 \\ -\sin\frac{1}{2}\pi & \cos\frac{1}{2}\pi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix}$$

i

$$\boldsymbol{U}_0 = \begin{Bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix} \boldsymbol{U}_0 \begin{Bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix}$$

prema (10.3), odakle se dobija da je

$$\boldsymbol{U}_0 = \begin{Bmatrix} U_{11} & 0 & 0 \\ 0 & U_{11} & 0 \\ 0 & 0 & U_{33} \end{Bmatrix}, \quad (U_{22} = U_{11}). \tag{10.14}$$

Ponavljajući isti postupak za tako dobijeno U_0 i za

$$R_i^{\frac{1}{2}\pi} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{Bmatrix}$$

sledi da je

$$U = \lambda I, \quad (\lambda = U_{11}) \tag{10.13}$$

Očigledno je da je U_0 sada invarijantno za $R_j^{\frac{1}{2}\pi}$. Invarijantno je i za bilo koju rotaciju $R_m^{\frac{1}{2}\pi}$. Prema tome za kubni sistem U_0 ima oblik (10.13) što je trebalo pokazati.

Istim postupkom je moguće odrediti oblik U_0 i za druge kristalne klase. Primera radi, iz (10.14) neposredno sledi da je, u slučaju tetragonalnog sistema,

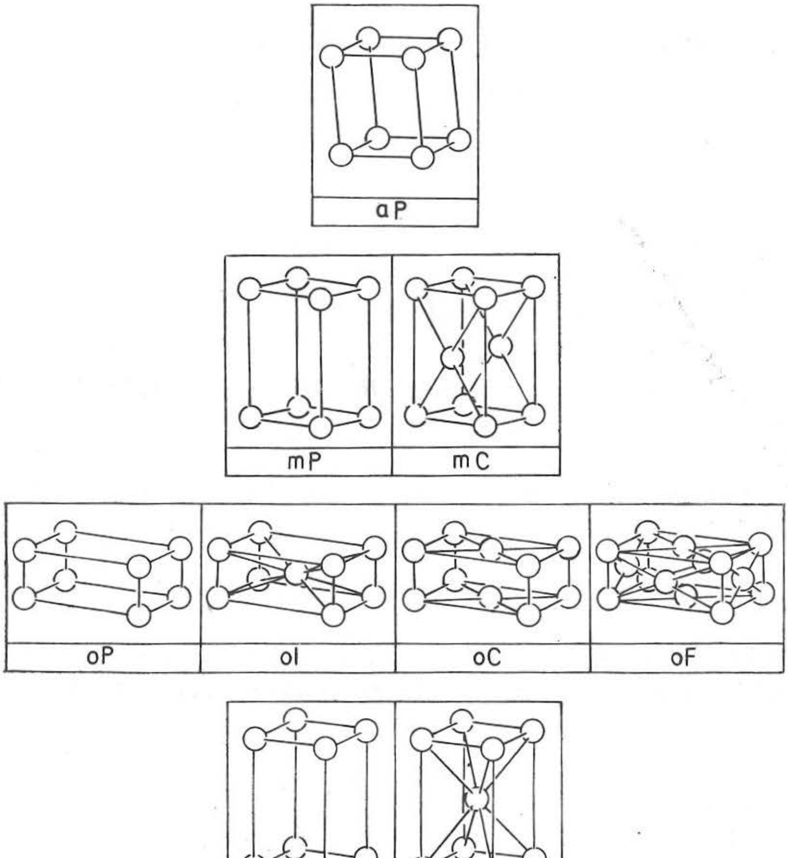
$$U_0 = \lambda I + \nu k \otimes k \quad (\lambda \equiv U_{11}, \nu \equiv U_{33} - U_{11}) \tag{10.11}$$

U sledećoj tabeli dajemo oblik U_0 i za druge kristalne klase pri čemu brojevi u levoj koloni označavaju odgovarajuće kristalne sisteme date u prethodnoj tabeli.

Tabela 2

Tip anizotropije	Ograničenja na U_0
Trikliničan sistem (1)	bez ograničenja
Monokliničan sistem (2)	k je karakterističan vektor U_0
Rombičan sistem (3)	i, j, k su karakteristični vektori U_0
Tetragonalan sistem (4, 5) Heksagonalan sistem (8, 9, 10, 11) Transverzalna izotropija	$U_0 = \lambda I + \alpha k \otimes k$
Kubičan (teseralni) sistem (6, 7)	$U_0 = \lambda I$

Geometrijski prikaz ovih sistema je na sl. 52. Na njoj je predstavljeno četrnaest Braveovih (Bravais) ili prostornih rešetki koje su grupisane u sedam sistema u slagasnosti sa sedam tipova konvencionalnih elementarnih kristalnih ćelija: a — triklinična, m — monoklinična, o — rombična, t — tetragonalna, h — heksagonalna i trigonalna, c — kubična. Na istoj slici je naznačena sa: P — primitivna rešetka, C — bazno centrirana rešetka, I — zapreminski centrirana rešetka, F — pljosno centrirana rešetka, R — primitivna romboedarska rešetka.



Sl. 52

11. TEČNI KRISTALI

Kao što smo videli, za proste fluide je $g_\varkappa = u$ dok je za prosta čvrsta tela $g_\varkappa \subset \subset o \subset u$. Prema tome, prosti fluidi i prosta čvrsta tela se uzajamno isključuju. To znači da materijal ne može istovremeno da bude fluid i čvrsto telo.

Međutim, sa prostim fluidima i prostim čvrstim telima nisu obuhvaćeni svi prosti materijali. Moguće je da postoje materijali koji nisu ni fluidi ni čvrsta tela u smislu značenja ovih pojmova. Radi definisanosti takve proste materijale nazvaćemo *prosti tečni kristali* ili *podfluidi* (subfluids). Njihova grupa izotropije u odnosu na bilo koju referentnu konfiguraciju sadrži neki element koji nije ortogonalan. To znači da je $g_\varkappa$, za takve materijale, svojstvena podgrupa unimodularne grupe. Ona ne sadrži ni potpunu ortogonalnu grupu, tj., nije $o \subset g_\varkappa$ jer bi, u protivnom, tečni kristal bio fluid. Drukčije rečeno: tečni kristal je fluid ako i samo ako je izotropan; ili, ako tečni kristal nije fluid onda je anizotropan. Po tom svojstvu tečni kristal podseća na čvrsta tela.

Dalje se nećemo baviti tečnim kristalima.

VII ELASTIČNI MATERIJALI

1. DEFINICIJA ELASTIČNOG MATERIJALA I ELASTIČNOG TELA

Za materijal koji se sve vreme nalazi u stanju mirovanja istorija gradijenta deformacije je konstantna za svaku materijalnu česticu X, tj.,

$$\boldsymbol{F}^t(s) = \boldsymbol{F}(X, t - s) = \boldsymbol{F}(X). \tag{1.1}$$

Tada je sve što se određuje pomoću istorije gradijenta deformacije $\boldsymbol{F}^t(s)$, određeno preko $\boldsymbol{F}$. U specijalnom slučaju, kada je reč o prostom materijalu, njegova konstitutivna jednačina (6.5.3) postaje

$$\boldsymbol{T} = \tilde{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{F}), \tag{1.2}$$

gde je $\tilde{\boldsymbol{T}}$ *funkcija reagovanja materijala.*

> i) ***Definicija.*** *Prosti materijal za koji važi konstitutivna jednačina* (1.2) *za sve istorije deformacije (a ne samo istorije deformacije koje se odnose na stanje mirovanja) nazivamo* ***elastičnim.***

Za telo čija je svaka materijalna čestica sačinjena od elastičnog materijala kaže se da je *elastično telo.*

Za elastične materijale napon je u svakoj čestici tela jednoznačno određen deformacijom u posmatranom trenutku u odnosu na proizvoljnu fiksnu referentnu konfiguraciju, tj.,

$$\boldsymbol{T}(t) = \tilde{\boldsymbol{T}}[\boldsymbol{F}(t)]. \tag{1.3}$$

Konstitutivna jednačina (1.3) jednostavno tvrdi da napon zavisi samo od trenutne konfiguracije, tj., nezavisan je od kretanja tela pre dolaska u trenutnu konfiguraciju. Tako se u klasičnoj mehanici sila u elastičnoj opruzi razmatra kao funkcija samo promene dužine opruge, nezavisno od prošle istorije opruge i brzine kojom se dužina opruge menja u toku vremena.

Jednačine (1.2) i (1.3) mogu se dobiti iz (6.5.3) i to (1.2) pod pretpostavkom da je $\boldsymbol{F}(t - s) = \boldsymbol{F} = \text{const.}$ za svako s, a (1.3) pod pretpostavkom da $\boldsymbol{T}(t)$ zavisi samo od $\boldsymbol{F}(t-s)$ za $s=0$. Prema tome, konstitutivne jednačine (1.2) i (1.3) imaju različite fizičke interpretacije mada su po svom obliku iste: t — je samo parametar u (1.3). Ako je elastično telo u ravnoteži biće i u drugom slučaju $\boldsymbol{F}(t) =$ $=$ const. i neće biti nikakve razlike između (1.2) i (1.3). Kratko rečeno: pri statičkoj deformaciji ne može se ustanoviti razlika između prostih i elastičnih materijala. Iz toga sledi da se teorija elastičnosti može primeniti na statičke probleme svih prostih materijala, tj. prostih materijala koji se nalaze u ravnotežnom stanju.

Odavde sledi jedan interesantan i važan zaključak: Dalamberov princip (D'Alambert) na osnovu koga se dobijaju dinamičke jednačine iz statičkih kada se njima dodaju inercijalne sile, važi samo u nekim specijalnim teorijama mehanike! Iz statike se o dinamici može zaključiti malo ili ništa.

Zaista, za sve proste materijale jednačine ravnoteže glase

$$\operatorname{div} \boldsymbol{T} + \varrho \boldsymbol{f} = 0.$$

Dodavanjem „inercijalne sile" dobijamo

$$\operatorname{div} \widetilde{\boldsymbol{T}} + \varrho \boldsymbol{f} = \varrho \boldsymbol{a}.$$

Ovo je dinamička jednačina koja važi samo za elastične materijale.

Kada bi važio Dalamberov princip, onda bi svi prosti materijali morali biti elastični i ne bi postojali takvi materijali kao što su materijali sa memorijom. U specijalnom slučaju, svaki fluid bi bio elastičan i prema tome i Navije-Štoksova (Navier-Stokes) teorija bi bila isključena na osnovu ovog principa.

Po definiciji, gradijent deformacije $\boldsymbol{F}$ zavisi od izabrane referentne konfiguracije $\varkappa$. Saglasno tome, konstitutivna jednačina (1.3) je data u odnosu na $\varkappa$. U odnosu na drugu referentnu konfiguraciju $\hat{\varkappa}$ biće

$$\widetilde{\boldsymbol{T}}_{\varkappa}(\boldsymbol{F}) = \widetilde{\boldsymbol{T}}_{\hat{\varkappa}}(\boldsymbol{F}\boldsymbol{P}^{-1}). \tag{1.4}$$

s obzirom na (6.6.4), (6.6.5) i (6.6.9). Odavde se vidi da je funkcija reagovanja elastičnih materijala različita za različite referentne konfiguracije $\varkappa$ i $\hat{\varkappa}$. Međutim, ako je poznato reagovanje elastičnog materijala u odnosu na jednu konfiguraciju, npr. $\varkappa$, onda je ono, na osnovu (1.4), određeno u odnosu na bilo koju drugu referentnu konfiguraciju. Kratko rečeno: reagovanje elastičnog materijala ne zavisi od izbora referentne konfiguracije iako funkcionel reagovanja zavisi.

ii) Konstitutivna jednačina (1.3) mora zadovoljavati princip materijalne indiferentnosti $(6.3.96)_2$ izražen sada u obliku

$$\boldsymbol{Q}\widetilde{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{F})\boldsymbol{Q}^T = \widetilde{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{F}). \tag{1.5}$$

Ova relacija mora biti zadovoljena za svako $\boldsymbol{F}$ i svako ortogonalno $\boldsymbol{Q}$, što nameće ograničenja na oblik funkcije reagovanja $\widetilde{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{F})$. Analizom (1.3) i (1.5) moguće je izvesti sledeće redukovane oblike za proste elastične materijale (postupkom koji je analogan postupku iznetom u odeljku 5, glava VI)

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{R}\widetilde{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{U})\boldsymbol{R}^T, \tag{1.6}$$

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{p}(\boldsymbol{C})\boldsymbol{R}^T, \tag{1.7}$$

$$\widehat{\boldsymbol{T}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{C}), \tag{1.8}$$

gde je $\boldsymbol{U}$ desni tenzor izduženja, $\boldsymbol{R}$ rotacija, $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{U}^2$ desni Koši-Grinov tenzor i $\widehat{\boldsymbol{T}}$ konvektivan tenzor napona definisan sa (6.5.18a). Konstitutivna jednačina (1.6) direktno sledi iz (6.5.12) ili (6.5.24) kada se uzme u obzir da $\boldsymbol{T}(t)$ zavisi samo od vrednosti $\boldsymbol{U}^t(s)$ ili $\boldsymbol{U}_t^*(t-s)$ za $s = 0$ i $\boldsymbol{U}^t(O) = \boldsymbol{U}(t)$ ili $\boldsymbol{U}_t^*(O) = \boldsymbol{I}$, respektivno. Jednačina (1.7) je baš (6.5.31); (1.8) se dobija iz (6.5.18) kada se uzme u obzir da je $\boldsymbol{C}(X, t-s) = \boldsymbol{C}(X, t)$. Kao i u odeljku 5, glava VI, lako je pokazati da (1.6—8) identički zadovoljavaju princip materijalne indiferentnosti te prema tome predstavljaju *redukovane najopštije konstitutivne jednačine elastičnih materijala.*

Sa fizičkog stanovišta konstitutivna jednačina (1.6) tvrdi sledeće: ako se deformacija za česticu X razloži na izduženje $\boldsymbol{U}$ i rotaciju $\boldsymbol{R}$ onda se dobija napon koji je jednak naponu rotiranom za $\boldsymbol{R}$ koji bi se dobio kada bi se primenilo samo izduženje $\boldsymbol{U}$. Slično tumačenje može se dati i za (1.7) i (1.8).

Za rešavnje konkretnih zadataka korisni su i drugi redukovani oblici koji su ekvivalentni konstitutivnoj jednačini (1.3). Tako npr. za *nestišljive elastične materijale* konstitutivna jednačina (6.5b.9), s obzirom na $(6.5b.6)_1$, glasi

$$\boldsymbol{T}_E = \widetilde{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{F}) = p\boldsymbol{I} + \boldsymbol{T} \tag{1.9}$$

gde je p neodređeni pritisak, a konstitutivni napon $\boldsymbol{T}_E$, tj. $\widetilde{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{F})$, definisan je samo za $\det \boldsymbol{F} = \pm 1$. Koristeći redukovane oblike (1.6—8) za konstitutivni napon može se (1.9) izraziti u obliku (Videti glavu VI, odeljak 5b)

$$\begin{gathered}\boldsymbol{T}_E = p\boldsymbol{I} + \boldsymbol{T} = \boldsymbol{R}\widetilde{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{U})\boldsymbol{R}^T = \boldsymbol{R}p(\boldsymbol{C})\boldsymbol{R}^T,\\ \det \boldsymbol{U} = \det \boldsymbol{C} = 1,\end{gathered} \tag{1.10}$$

ili

$$\widehat{\boldsymbol{T}} = -p\boldsymbol{C} + \boldsymbol{F}(\boldsymbol{C}), \quad \det \boldsymbol{C} = 1, \tag{1.11}$$

kada se uzme u obzir (6.5.18a) i (2.7.14).

Kada je prosti fluid takođe elastičan materijal onda se naziva *elastičan fluid.* Njegova konstitutivna jednačina se dobija iz konstitutivne jednačine prostog fluida (6.9.22) kada se zahteva da napon $\boldsymbol{T}$ ne zavisi od istorije $\boldsymbol{G}(s)$. Pošto funkcionel $\mathcal{R}$ u (6.9.22) iščezava za $\boldsymbol{G}(s) = \boldsymbol{O}$ sledi da $\mathcal{R}$ mora uvek iščezavati. Tada opšta konstitutivna jednačina elastičnog fluida ima oblik

$$\boldsymbol{T} = -p(\varrho)\boldsymbol{I}, \tag{1.12}$$

gde je kao i u (6.9.22) $p(\varrho)$ pritisak.

Na isti način se može iz (6.9.25) zaključiti da je za *nestišljive elastične fluide*

$$\boldsymbol{T} = -p\boldsymbol{I}, \tag{1.13}$$

gde je p, kao i do sada, neodređeni pritisak.

Materijali za koje važe konstitutivne jednačine (1.12—13) takođe se nazivaju *Ojlerovi fluidi.* Karakterišu se nesposobnošću da podnesu smičući napon nezavisno od toga da li se nalaze u stanju mirovanja ili kreću.

Elastično čvrsto telo je elastični materijal koji je takođe čvrsto telo. Saglasno definiciji odeljka 10, glava VI, za takvo telo postoji referentna konfiguracija $\varkappa$, koja se naziva *neizobličeno stanje,* kojoj odgovara izotropna grupa $g_\varkappa$ koja je podgrupa ortogonalne grupe $\mathcal{O}$, tj. za koju važi (6.10.1). Neizobličeno stanje elastičnog materijala u kome je napon jednak nuli nazivamo *prirodnim stanjem* (videti odeljak 5, glava VI). Kada je referentna konfiguracija *prirodno stanje* tada je u (1.6—8)

$$\tilde{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{I}) = \boldsymbol{p}(\boldsymbol{I}) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{I}) = \boldsymbol{O}. \tag{1.14}$$

iii) Iz (6.7.4) i (1.2) sledi da je *grupa izotropije* elastičnog materijala određena skupom svih unimodularnih tenzora $\boldsymbol{H}$ za koje je

$$\tilde{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{F}) = \tilde{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{F}\boldsymbol{H}) \tag{1.15}$$

za sve regularne tenzore $\boldsymbol{F}$. Takođe se iz (6.7.8) vidi da ortogonalni tenzor $\boldsymbol{Q}$ pripada grupi izotropije elastičnog materijala ako i samo ako je

$$\boldsymbol{Q}\tilde{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{F})\boldsymbol{Q}^T = \tilde{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{F}\boldsymbol{Q}^T) \tag{1.16}$$

za sve regularne tenzore $\boldsymbol{F}$.

U daljem delu, ako se ne kaže drukčije, mi ćemo razmatrati samo homogena elastična tela. U tom slučaju referentna konfiguracija $\varkappa$ je izabrana tako da predstavlja homogenu konfiguraciju tela. Tada je $\boldsymbol{T}$u (1.2) zaista funkcija samo od $\boldsymbol{F}$.

2. IZOTROPNI ELASTIČNI MATERIJALI

Definicija. *Ako je materijal elastičan (u smislu definicije odeljka* 1) *i izotropan (u smislu definicije odeljka* 8, *glava* VI) *onda se kaže da je on* ***izotropan elastičan materijal.***

Saglasno tome, kao posledica (6.7.8) i (1.2) sledi

Teorema 1: *Elastičan materijal je izotropan ako i samo ako je funkcionel reagovanja $\tilde{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{F})$, računat u odnosu na neizobličeno stanje kao referentnu konfiguraciju, izotropna tenzorska funkcija $\boldsymbol{F}$, tj., ako i samo ako $\tilde{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{F})$ zadovoljava relaciju*

$$\boldsymbol{Q}\tilde{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{F})\boldsymbol{Q}^T = \tilde{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{F}\boldsymbol{Q}^T) \tag{2.1}$$

za svako regularno $\boldsymbol{F}$ i svako ortogonalno $\boldsymbol{Q}$.

Očigledno je da (2.1) sledi iz (1.16) kada ono važi za svako $\boldsymbol{Q} \in \mathcal{O}$, tj., kada je u pitanju izotropan elastičan materijal. U tom slučaju se (1.15) svodi na relaciju

$$\tilde{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{F}) = \tilde{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{F}\boldsymbol{Q}) \tag{2.2}$$

koja mora biti zadovoljena za svako regularno $\boldsymbol{F}$ i ortogonalno $\boldsymbol{Q}$. Relacija (2.2) izražava, takođe, potreban i dovoljan uslov koji mora zadovoljavati funkcionel reagovanja $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{F})$ kada definiše izotropne elastične materijale. Zaista, u (1.15) za $\boldsymbol{H}$ može biti uzeto bilo koje ortogonalno $\boldsymbol{Q}$ ako i samo ako je materijal izotropan.

Ako u (2.2) $\boldsymbol{Q}$ nije bilo koji ortogonalan tenzor, nego $\boldsymbol{R}^T$, tj., $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{R}^T$ i ako iskoristimo (2.5.14) dobijamo redukovani oblik konstitutivne jednačine za izotropni elastični materijal

$$\boldsymbol{T} = \tilde{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{V}). \tag{2.3}$$

Ista jednačina se dobija iz (1.6) kada se iskoristi (2.2) ili (2.1). Na taj način se iz (1.7) pomoću (2.2) dobija

$$T = RQp\,(Q^T CQ)\,Q^T R^T$$

jer se, pri promeni F u FQ, R menja u RQ, a C u $Q^T CQ$. Za $Q = R^T$ ova relacija postaje

$$T = p\,(B) \tag{2.4}$$

s obzirom na (2.7.15). Jasno je da (2.4) neposredno sledi iz (2.3) i $(2.7.14)_2$.

Funkcije ponašanja $\widetilde{T}(V)$ i $p\,(B)$ ne zadovoljavaju (2.1) za svako Q. One dalje moraju zadovoljavati uslove

$$Q\widetilde{T}(V)\,Q^T = \widetilde{T}\,(QVQ^T), \tag{2.5}$$

$$Qp\,(B)\,Q^T = p\,(QBQ^T), \tag{2.6}$$

tj., za izotropne elastične materijale funkcije reagovanja $\widetilde{T}(V)$ i $p\,(B)$ moraju biti izotropne tenzorske funkcije.

Na osnovu svega možemo kazati:

Teorema 2: *Prost materijal je izotropan elastičan materijal ako i samo ako je njegova konstitutivna jednačina u odnosu na neku referentnu konfiguraciju data sa*

$$T = p\,(B), \tag{2.4}$$

i gde funkcija reagovanja p *zadovoljava relaciju*

$$Qp\,(B)\,Q^T = p\,(QBQ^T) \tag{2.6}$$

za svako ortogonalno Q *i svako pozitivno definitno i simetrično* B. *Obrnuto, ako* (2.4) *i* (2.6) *važe onda je referentna konfiguracija neizobličeno stanje izotropnog elastičnog materijala.*

Na osnovu ove teoreme i teoreme Rivlina i Eriksena o predstavljanju izotropnih tenzorskih funkcija (vidi dodatak o tenzorskim funkcijama) sledi da je

$$T = \varphi_0 I + \varphi_1 B + \varphi_2 B^2 \tag{2.7}$$

gde su *koeficijenti reagovanja* ili *materijalne funkcije* φ_Γ funkcije glavnih invarijanata tenzora B, tj.

$$\varphi_\Gamma = \varphi_\Gamma\,(I_B, II_B, III_B), \quad (\Gamma = 0, 1, 2). \tag{2.8}$$

Konstitutivna jednačina izotropnog elastičnog materijala (2.7) može biti predstavljena pomoću Kejli-Hamiltonove teoreme u obliku

$$T = \Phi_0 I + \Phi_1 B + \Phi_{-1} B^{-1} \tag{2.9}$$

gde su *koeficijenti reagovanja*

$$\Phi_\Lambda = \Phi_\Lambda\,(I_B, II_B, III_B) \quad (\Lambda = 0, 1, -1). \tag{2.10}$$

Veza između koeficijenata ponašanja φ_Γ i Φ_Δ se lako izvodi i data je relacijama

$$\Phi_0 = \varphi_0 - II_B \varphi_2, \quad \Phi_1 = \varphi_1 + I_B \varphi_2, \quad \Phi_{-1} = III_B \varphi_2 \tag{2.11}$$

$$\varphi_0 = \Phi_0 + \frac{II_B}{III_B} \Phi_{-1}, \quad \varphi_1 = \Phi_1 - \frac{I_B}{III_B} \Phi_{-1}, \quad \varphi_2 = \frac{1}{III_B} \Phi_{-1}. \tag{2.12}$$

Na potpuno isti način se, na osnovu (2.3) i (2.5), može pokazati da je

$$\boldsymbol{T} = \alpha_0 \boldsymbol{I} + \alpha_1 \boldsymbol{V} + \alpha_2 \boldsymbol{V}^2 \tag{2.13}$$

$$\boldsymbol{T} = \beta_0 \boldsymbol{I} + \beta_1 \boldsymbol{V} + \beta_{-1} \boldsymbol{V}^{-1} \tag{2.14}$$

gde su koeficijenti ponašanja α_Γ i β_Δ funkcije glavnih invarijanata tenzora $\boldsymbol{V}$: I_V, II_V, III_V, za koje važe relacije oblika (2.11) i (2.12).

i) Dalje ćemo pretpostaviti, ako se drukčije ne kaže, da se ponašanje izotropnog materijala posmatra u odnosu na neizobličenu konfiguraciju kao referentnu konfiguraciju za koju je $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}^{-1} = \boldsymbol{I}$. Tada iz (2.7) sledi da je napon izotropnog elastičnog materijala izotropan tenzor i jednak je hidrostatičkom pritisku.

Iz (2.7) se vidi da je neizobličena konfiguracija prirodna konfiguracija ako i samo ako je

$$\varphi_0 (3, 3, 1) + \varphi_1 (3, 3, 1) + \varphi_2 (3, 3, 1) = 0. \tag{2.15}$$

To znači da ako je jedna neizobličena konfiguracija prirodna konfiguracija, onda druge neizobličene konfiguracije, u opštem slučaju, to ne moraju da budu. Zaista, napon u neizobličenoj konfiguraciji koji se javlja pri zapreminskom širenju $\boldsymbol{B} = k\boldsymbol{I}$ u odnosu na referentnu konfiguraciju je dat konstitutivnom jednačinom

$$\boldsymbol{T} = [\varphi_0 (3k, 3k^2, k^3) + \varphi_1 (3k, 3k^2, k^3) + \varphi_2 (3k, 3k^2, k^3)] \boldsymbol{I} \tag{2.16}$$

Za ovaj napon nema nikakve osnove da se pretpostavi da je nula za $k \neq 1$. Primer elastičnog fluida sa pozitivnom funkcijom pritiska p pokazuje da može da postoji elastičan materijal koji nema nikakve prirodne konfiguracije.

ii) Uopšte, glavne vrednosti t_i $(i = 1, 2, 3)$ tenzora napona $\boldsymbol{T}$ zvaćemo *glavni naponi*. Njima odgovarajući pravci zovu se *glavni pravci napona*. Trivijalna posledica konstitutivne jednačine izotropnih materijala je da su glavne ose mera deformacije takođe glavne ose napona. Ako sa V_i označimo glavna izduženja ili glavne vrednosti tenzora izduženja $\boldsymbol{V}$ onda su V_i^2 glavne vrednosti tenzora $\boldsymbol{B}$ što sledi iz $(2.7.14)_2$. Tada iz (2.7) i (2.9) sledi

$$\begin{aligned} t_i &= \varphi_0 + \varphi_1 V_i^2 + \varphi_2 V_i^4 \\ &= \Phi_0 + \Phi_1 V_i^2 + \Phi_{-1} V_i^{-2} \end{aligned} \tag{2.17}$$

gde su φ_Γ i Φ_Δ kaofunkcije glavnih invarijanti tenzora $\boldsymbol{B}$ simetrične funkcije od V_i. U svakom slučaju je

$$t_i = \bar{t}_i (V_1, V_2, V_3) \tag{2.17a}$$

pri čemu je funkcionalni oblik $\bar{t}_i (V_1, V_2, V_3)$ određen sa (2.17). Tako je npr.

$$t_1 = \varphi_0 + \varphi_1 V_1^2 + \varphi_2 V_1^4 = \bar{t}_1 (V_1, V_2, V_3)$$

i

$$t_2 = \varphi_0 + \varphi_1 V_2^2 + \varphi_2 V_2^4 = \bar{t}_2 (V_1, V_2, V_3).$$

S obzirom na simetričnost funkcija φ_r po V_i odavde sledi da je

$$\bar{t}_1 V_1, V_2, V_3) = \bar{t}_2 (V_2, V_1, V_3).$$

Neka je po definiciji $\bar{t}_1 (V_1, V_2, V_3) \equiv t (V_1, V_2, V_3)$. Tada se na osnovu prethodnog razmatranja zaključuje da je $t (v_1, v_2, v_3)$ simetrična funkcija takva da je

$$\begin{aligned} t_1 &= t (V_1, V_2, V_3) \\ t_2 &= t (V_2, V_1, V_3) \\ t_3 &= t (V_3, V_2, V_1), \end{aligned} \tag{2.18}$$

tj., izotropni elastični materijal je potpuno okarakterisan pomoću simetrične funkcije $t (V_1, V_2, V_3)$.

iii) Za nestišljive elastične materijale moguća je samo izohorična deformacija kada je

$$III_{\boldsymbol{B}} = \det \boldsymbol{B} = 1. \tag{2.19}$$

Za takve materijale, uopšte, dodatni napon je određen do na neodređeni pritisak p a (2.7) i (2.9) se svode na

$$\boldsymbol{T} = -p\boldsymbol{I} + \varphi_1\boldsymbol{B} + \varphi_2\boldsymbol{B}^2 \tag{2.20}$$

$$\boldsymbol{T} = -p\boldsymbol{I} + \Phi_1\boldsymbol{B} + \Phi_{-1}\boldsymbol{B}^{-1}, \tag{2.21}$$

gde su sada φ_1, φ_2, Φ_1 i Φ_{-1} funkcije samo glavnih invarijanti $I_{\boldsymbol{B}}$, $II_{\boldsymbol{B}}$.

Veze između ovih koeficijenata su date izrazima

$$\Phi_1 = \varphi_1 + I_{\boldsymbol{B}}\varphi_2, \quad \Phi_{-1} = \varphi_2, \quad \varphi_1 = \Phi_1 - I_{\boldsymbol{B}}\Phi_{-1}. \tag{2.22}$$

Napomena:

Pogrešno je smatrati da ista ograničenja na funkcionale reagovanja nameće grupa izotropije $g_\varkappa$ za $g_\varkappa = \mathscr{o}$ i $g_\varkappa = u$. U opštem slučaju to nije tačno. Ilustrovaćemo to na primeru elastičnog materijala čija je grupa izotropije unimodularna, tj. $g_\varkappa = u$.

Neka je u odnosu na referentnu konfiguraciju $\varkappa$

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{h} (\boldsymbol{F})$$

i neka je $g_\varkappa = u$. S obzirom da je $\mathscr{o} \subset u$ za takve materijale, važe rezultati odeljka 2. Međutim, u ovom slučaju, saglasno sa (1.15), mora da važi

$$\boldsymbol{h} (\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{h} (\boldsymbol{FH})$$

za svako $\boldsymbol{H} \in u$. Tada je, za $\boldsymbol{H} = (\det \boldsymbol{F})^{\frac{1}{3}} \boldsymbol{F}^{-1}$,

$$\boldsymbol{h} (\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{h} [(\det \boldsymbol{F})^{-\frac{1}{3}} \boldsymbol{I}] = \widehat{\boldsymbol{h}} (\varrho\boldsymbol{I})$$

s obzirom na (6.9.13). Ali saglasno sa (2.7), $\widehat{\boldsymbol{h}} (\varrho\boldsymbol{I})$ je izotropna funkcija od $\varrho\boldsymbol{I}$. Njen konačan oblik se dobija kada se $\boldsymbol{B}$ u (2.7) i (2.8) zameni sa $\varrho\boldsymbol{I}$. U našem slučaju (2.7) se svodi na

$$\boldsymbol{h} (\boldsymbol{F}) = -p (\varrho) \boldsymbol{I}$$

tj. elastični materijal, čija je grupa izotropije unimodularna, je *stišljivi neviskozni fluid*. Za razliku od njega elastični materijal, čija je grupa izotropije ortogonalna grupa, je izotropni elastični materijal.

3. IZVOĐENJE LINEARNE TEORIJE ELASTIČNOSTI

Već smo videli da je pomeranje čestice X u odnosu na referentnu konfiguraciju $\varkappa$ određeno izrazom

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{X}, t) = \boldsymbol{p}(\boldsymbol{X}, t) - \boldsymbol{P} \tag{2.6.1}$$

Kada je $\boldsymbol{u}$ definisano za svako $X \in \mathcal{B}$ onda $\boldsymbol{u}(X, t)$ definiše *polje pomeranja*. Tada je gradijent polja pomeranja u odnosu na referentnu konfiguraciju $\varkappa$, tj., $\boldsymbol{H} = \nabla \boldsymbol{u}$, određen izrazom

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{F} - \boldsymbol{I}, \tag{3.1}$$

s obzirom na $(2.6.33)_1$.

Uvođenje polja pomeranja u mehanici kontinuuma je korisno samo kada su i pomeranja $\boldsymbol{u}$ i gradijent pomeranja $\boldsymbol{H}$ u određenom smislu male veličine. Za dobijanje takvih polja možemo, polazeći od nekog zadatog polja pomeranja $\boldsymbol{u}$, formirati familiju pomeranja $\varepsilon\boldsymbol{u}$ i pustiti da $\varepsilon \to 0$. Veličine koje odgovaraju ovoj familiji obeležavamo sa ε. Nas će prvenstveno interesovati njihovo ponašanje kada $\varepsilon \to 0$.

Saglasno tako uvedenim oznakama biće

$$\boldsymbol{H}_\varepsilon = \nabla(\varepsilon\boldsymbol{u}) = \varepsilon\boldsymbol{H}. \tag{3.2}$$

Koristeći ovaj izraz u $(2.5.16)_1$ i (3.1) vidimo da je

$$\begin{aligned} \boldsymbol{U}_\varepsilon^2 &= \boldsymbol{F}_\varepsilon^T\boldsymbol{F}_\varepsilon = (\boldsymbol{I} + \varepsilon\boldsymbol{H})^T(\boldsymbol{I} + \varepsilon\boldsymbol{H}) \\ &= \boldsymbol{I} + \varepsilon(\boldsymbol{H} + \boldsymbol{H}^T) + \boldsymbol{O}(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

odakle se dobija

$$\boldsymbol{U}_\varepsilon = \boldsymbol{I} + \frac{1}{2}\varepsilon(\boldsymbol{H} + \boldsymbol{H}^T) + \boldsymbol{O}(\varepsilon^2) \tag{3.3}$$

U ovim izrazima i dalje sa $\boldsymbol{O}(\varepsilon^2)$ označavamo ostatak reda čiji su članovi infinitezimale najmanje drugog reda po ε.

Iz (3.3) i polarne dekompozicije $\boldsymbol{F}_\varepsilon = \boldsymbol{R}_\varepsilon\boldsymbol{U}_\varepsilon$ lako je pokazati da je

$$\boldsymbol{R}_\varepsilon = \boldsymbol{I} + \frac{1}{2}\varepsilon(\boldsymbol{H} - \boldsymbol{H}^T) + \boldsymbol{O}(\varepsilon^2). \tag{3.4}$$

Uvedimo oznake

$$\begin{aligned} \widetilde{\boldsymbol{E}} &= \frac{1}{2}(\boldsymbol{H} + \boldsymbol{H}^T) \\ \widetilde{\boldsymbol{R}} &= \frac{1}{2}(\boldsymbol{H} - \boldsymbol{H}^T). \end{aligned} \tag{3.5}$$

Tada je, saglasno sa (2.8.1), $\tilde{E}$ simetričan deo gradijenta pomeranja H, a $\tilde{R}$ njegov antisimetrični deo. Pomoću $\tilde{E}$ i $\tilde{R}$ prethodno izvedene izraze možemo pisati u obliku

$$\begin{aligned} U_\varepsilon &\doteq I + \varepsilon\tilde{E} = V_\varepsilon \\ R_\varepsilon &\doteq I + \varepsilon\tilde{R} \\ R_\varepsilon^T &\doteq I - \varepsilon\tilde{R}, \end{aligned} \tag{3.6}$$

gde sa $\doteq$ naznačavamo tačnost do na $O(\varepsilon^2)$. Takva teorija, uopšte, u kojoj se zadržavaju samo članovi najnižeg nenultog reda po ε, naziva se teorija *infinitezimalnih deformacija*.

Za takve deformacije razmatramo konstitutivnu jednačinu elastičnog materijala

$$T = R\tilde{T}(U)R^T. \tag{1.6}$$

Pretpostavimo da je $\tilde{T}(U)$ dva puta neprekidno diferencijabilna funkcija i $U = I$. Tada $\tilde{T}(U)$, koja odgovara familiji pomeranja εu, pišemo, s obzirom na $(3.6)_1$, u obliku

$$\tilde{T}(U) = T[I + \varepsilon\tilde{E} + O(\varepsilon^2)] \doteq \tilde{T}_0 + \varepsilon L[\tilde{E}] \tag{3.7}$$

gde je L tenzor četvrtog reda definisan sa

$$L \equiv \tilde{T}_U(U)|_{U=I}. \tag{3.8}$$

Sa matematičkog stanovišta L predstavlja operator linearne transformacije kojim se simetričan tenzor drugog reda prevodi u simetričan tenzor.

Iz (3.7) se dalje vidi da je

$$\tilde{T}_0 = \tilde{T}(I) \tag{3.9}$$

i da predstavlja polje napona u telu kada se ono nalazi u referentnoj konfiguraciji $\varkappa$. Zbog toga se često naziva *početnim naponom*.

Smenom (3.7) i $(3.6)_{2,3}$ u (1.6) dobijamo, u slučaju εu

$$\begin{aligned} T &\doteq (I + \varepsilon\tilde{R})(T_0 + \varepsilon L_\varkappa[\tilde{E}])(I - \varepsilon\tilde{R}) \\ &\doteq \tilde{T}_0 + \varepsilon(\tilde{R}T_0 - T_0\tilde{R} + L_\varkappa[\tilde{E}]). \end{aligned} \tag{3.10}$$

Ovaj izraz se može sažetije napisati ako se dalje bude podrazumevalo da su εu i njemu odgovarajuće veličine male za veoma malo ε. Tada ćemo εu, $\varepsilon\tilde{R}$ i $\varepsilon\tilde{E}$ obeležavati samo sa u, $\tilde{R}$ i $\tilde{E}$ respektivno. Imajući to u vidu konstitutivnu jednačinu $(3.10)_2$ onda pišemo u ekvivalentnom obliku

$$T \doteq \tilde{T}_0 + \tilde{R}T_0 - T_0\tilde{R} + L_\varkappa[\tilde{E}]. \tag{3.11}$$

Ova konstitutivna jednačina elastičnog materijala u slučaju infinitezimalnih deformacija poznata je pod imenom *Košijev zakon.*

Iz Košijevog zakona se vidi da je priraštaj napona (koji je posledica infinitezimalne deformacije) određen zbirom dva priraštaja, jednog koji zavisi samo od rotacije i drugog koji je zavisan samo od mera deformacije.

Prvi priraštaj, tj., $\widetilde{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{T}_0 - \boldsymbol{T}_0\widetilde{\boldsymbol{R}}$, zavisi samo od početnog napona i, izuzev toga, isti je za sve elastične materijale.

Drugi priraštaj je $\boldsymbol{L}_\varkappa [\widetilde{\boldsymbol{E}}]$ i linearan je po $\widetilde{\boldsymbol{E}}$. Tenzor četvrtog reda $\boldsymbol{L}_\varkappa$ se naziva. *tenzor elastičnosti* elastičnog materijala u odnosu na referentnu konfiguraciju $\varkappa$ Naglašava se konfiguracija jer jedan isti materijal može imati različite tenzore elastičnosti u odnosu na razne konfiguracije $\varkappa$. Svaki od njih se određuje na osnovu (3.8). Jasno je da su za razne referentne konfiguracije funkcije reagovanja vezane relacijom (1.4).

Za analizu tenzora elastičnosti pogodno je izraziti $\boldsymbol{L}_\varkappa [\widetilde{\boldsymbol{E}}]$ u komponentalnom obliku. Tada je

$$(\boldsymbol{L}_\varkappa [\widetilde{\boldsymbol{E}}])^{kl} \doteq \boldsymbol{L}^{klmn}\widetilde{E}_{mn}. \tag{3.12}$$

Sve komponente tenzora L^{klmn}, kojih ukupno ima 81, nisu međusobno nezavisne. Preciznije, L^{klmn} ima 36 nezavisnih komponenti s obzirom na simetričnost po prvom i drugom paru indeksa posebno koja se izražava relacijama

$$L^{klmn} = L^{lkmn} = L^{klnm}. \tag{3.13}$$

U linearnoj teoriji elastičnosti se uzima da je tenzor elastičnosti simetričan i po prvom i drugom paru indeksa, tj.

$$\boldsymbol{L}_\varkappa = \boldsymbol{L}_\varkappa^T \quad \text{ili} \quad L^{klmn} = L^{mnkl}. \tag{3.14}$$

Tada iz (3.13—14) sledi da L^{klmn} ima 21 nezavisnu komponentu.

U slučaju kada je elastično telo izotropno Košijev zakon (3.11) se svodi na

$$\boldsymbol{T} \doteq -p\boldsymbol{I} + \lambda_p (tr\, \widetilde{\boldsymbol{E}})\, \boldsymbol{I} + 2\mu_p \widetilde{\boldsymbol{E}} \tag{3.15}$$

gde su p, λ_p i μ_p konstante. Do ovog izraza se može doći neposrednom primenom teoreme o predstavljanju linearnih izotropnih funkcija (vidi Dodatak) ili direktnim razmatranjem (3.11). Konstante λ_p i μ_p su *Lameove* (Lamé) *konstante*; određene su u odnosu na neizobličenu konfiguraciju kojoj odgovara hidrostatički pritisak.

4. HUKOV ZAKON

U slučaju kada je neizobličena konfiguracija prirodno stanje biće $\boldsymbol{T}_0 = \boldsymbol{O}$ i

$$\boldsymbol{T} \doteq \boldsymbol{L}_\varkappa [\widetilde{\boldsymbol{E}}] \tag{4.1}$$

ili

$$T^{kl} \doteq L^{klmn}\widetilde{E}_{mn}. \tag{4.2}$$

Linearna konstitutivna jednačina elastičnog materijala (4.1), odnosno (4.2) naziva se *generalisani Hukov (Hooke) zakon.* Ovaj zakon se u slučaju izotropnog elastičnog materijala svodi na dobro poznati *Hukov zakon*

$$\boldsymbol{T} = \lambda\, (tr\, \boldsymbol{E})\, \boldsymbol{I} + 2\mu\widetilde{\boldsymbol{E}}. \tag{4.3}$$

On neposredno sledi iz (3.15) kada se u njemu stavi $p = 0$. Indeks p u Lameovim konstantama se tada izostavlja.

Vrlo često se u literaturi polazi od generalisanog Hukovog zakona (4.2) pri izvođenju konstitutivne jednačine linearnog izotropnog elastičnog materijala ili Hukovog tela. U tom slučaju tenzor elastičnosti L^{klmn} je izotropan tenzor četvrtog reda i kao takav mora identički zadovoljavati uslov izotropnosti

$$L^{klmn} = Q^k{}_p Q^l{}_q Q^m{}_r Q^n{}_s L^{pqrs} \tag{4.4}$$

za svako ortogonalno $\boldsymbol{Q}$. Tada tenzor elastičnosti mora imati oblik

$$L^{klmn} = \lambda g^{kl} g^{mn} + \mu g^{km} g^{ln} + \gamma g^{kn} g^{lm}. \tag{4.5}$$

Tako određeno L^{klmn} zadovoljava identički (4.4) i (3.14). Iz (3.13) dalje sledi da je $\mu = \gamma$ tako da (4.5) postaje

$$L^{klmn} = \lambda g^{kl} g^{mn} + \mu\,(g^{km} g^{ln} + g^{kn} g^{lm}). \tag{4.6}$$

Iz (4.6) i (4.1) dobijamo (4.3).

Za dalju analizu Hukovog zakona pogodno je i tenzor napona i tenzor infinitezimalne deformacije razložiti na sferni i devijatorski deo. Tada je, prema (4.7.20) i (4.7.21)

$$\boldsymbol{T} = \frac{1}{3}(tr\,\boldsymbol{T})\boldsymbol{I} + \boldsymbol{T}' \qquad tr\,\boldsymbol{T}' = 0 \tag{4.7}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{E}} = \frac{1}{3}(tr\,\widetilde{\boldsymbol{E}})\boldsymbol{I} + \boldsymbol{E}' \qquad tr\,\widetilde{\boldsymbol{E}}' = 0. \tag{4.8}$$

Iz (4.3), (4.7) i (4.8) je sada lako pokazati da se Košijev zakon može izraziti pomoću dve relacije

$$tr\,\boldsymbol{T} = K\,tr\,\widetilde{\boldsymbol{E}}, \qquad K = \lambda + \frac{2}{3}\mu \tag{4.9}$$

$$\boldsymbol{T}' = 2\mu\widetilde{\boldsymbol{E}}'. \tag{4.10}$$

Ovi izrazi su pogodni za tumačenje ne samo Hukovog zakona nego i fizičkog smisla konstanti K i μ. Tako (4.9) uspostavlja vezu između srednjeg normalnog napona i $tr\,\widetilde{\boldsymbol{E}}$ koji karakteriše relativnu promenu zapremine u slučaju infinitezimalne deformacije. Zaista, tada je

$$J = \det \boldsymbol{F} = \det(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{H}) \doteq 1 + tr\,\widetilde{\boldsymbol{E}} \tag{4.11}$$

i

$$\frac{dv - dV}{dV} = tr\,\widetilde{\boldsymbol{E}} \tag{4.12}$$

s obzirom na (2.15.12).

Kratko rečeno: relacije (4.9) i (4.12) tvrde da je promena zapremine materijala proporcionalna srednjem naponu.

U slučaju hidrostatičkog pritiska

$$\boldsymbol{T} = -p\boldsymbol{I} \tag{4.13}$$

jednačina (4.9) glasi

$$p = -K(tr\,\tilde{E}) \tag{4.14}$$

ili, s obzirom na (4.12),

$$K = -p\frac{1}{\left(\dfrac{dv - dV}{dV}\right)}. \tag{4.15}$$

Zbog toga se K naziva *modul kontrakcije* ili *zapreminski modul.*.

S obzirom da je $tr\,\tilde{\boldsymbol{E}}' = 0$, iz (4.12) sledi da devijatorski deo $\tilde{\boldsymbol{E}}'$ tenzora infinitezimalne deformacije $\tilde{\boldsymbol{E}}$ određuje deformaciju bez promene zapremine. Pri takvoj deformaciji relacija (4.10) tvrdi da je devijator napona proporcionalan devijatoru tenzora infinitezimalne deformacije. U specijalnom slučaju, kada je $\tilde{E}_{xy} \neq 0$, a sve ostale komponente tenzora $\boldsymbol{E}$ jednake nuli, biće

$$T_{xy} = 2\mu\tilde{E}_{xy} \tag{4.16}$$

dok su ostale komponente tenzora $\boldsymbol{T}$ jednake nuli. Zbog toga se μ naziva *modul smicanja* ili *modul krutosti*. U inženjerskoj praksi obeležava se sa G, tj., $\mu = G$.

Za izotropne materijale za koje su modul smicanja μ i zapreminski modul K različiti od nule Hukov zakon može biti lako rešen po $\tilde{\boldsymbol{E}}$. U tom slučaju iz (4.3) i (4.9) dobijamo da je

$$\tilde{\boldsymbol{E}} = \frac{1}{2\mu}\left[-\frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu}(tr\,\boldsymbol{T})\boldsymbol{I} + \boldsymbol{T}\right]. \tag{4.17}$$

Specijalno, kada je

$$\boldsymbol{T} = t\,(\boldsymbol{n} \otimes \boldsymbol{n}) \tag{4.18}$$

tj., kada je reč o jednoosnom zatezanju veličine t u pravcu jediničnog vektora $\boldsymbol{n}$, (4.17) postaje

$$\tilde{\boldsymbol{E}} = \frac{t}{E}[\boldsymbol{n} \otimes \boldsymbol{n} - \nu(\boldsymbol{e} \otimes \boldsymbol{e} + \boldsymbol{f} \otimes \boldsymbol{f})] \tag{4.19}$$

gde su $\boldsymbol{e}$ i $\boldsymbol{f}$ bilo koja dva međusobno ortogonalna vektora u ravni normalnoj na $\boldsymbol{n}$,

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}, \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}. \tag{4.20}$$

Iz (4.19) se vidi da konstanta E predstavlja odnos između primenjenog napona zatezanja i njime izazvanog istezanja materijala. Zbog toga se konstanta E naziva *modul elastčnosti* ili *Jungov* (Young) *modul*. Modul ν je odnos između poprečnog skraćenja prema uzdužnom istezanju; naziva se *Puasonov* (Poisson) *koeficijent*.

Ponekad je korisno znati, koristeći (4.10) i (4.20), sledeće relacije između koeficijenata λ, μ, K, E i ν

$$
\begin{aligned}
\lambda &= \frac{2\mu\nu}{1-2\nu} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} = \frac{3K\nu}{1+\nu} \\
\mu &= \frac{\lambda(1-2\nu)}{2\nu} = \frac{E}{2(1+\nu)} \\
\frac{\mu}{\lambda+\mu} &= 1-2\nu, \quad \frac{\lambda}{\lambda+2\mu} = \frac{\nu}{1-\nu} \\
3K &= 3\lambda + 2\mu = \frac{E}{1-2\nu}.
\end{aligned}
\tag{4.21}
$$

Pomoću ovih relacija moguće je (4.17) izraziti u obliku

$$
\begin{aligned}
\widetilde{E}_{KK} &= \frac{1}{E}\left[T_{KK} - \nu\left(T_{LL} + T_{MM}\right)\right] \\
\widetilde{E}_{KL} &= \frac{1+\nu}{E} T_{KL} = \frac{1}{2\mu} T_{KL} \quad (K \neq L \neq M),
\end{aligned}
\tag{4.22}
$$

koji se često koristi.

Vrlo je važno naglasiti da je, prema našem opštem opredeljenju iznetom u odeljku 6 glave VI, elastično telo homogeno. Zbog toga su tenzor elastičnosti $\boldsymbol{L}_{\varkappa}$, moduli λ, μ, K, E i ν konstantni. U slučaju nehomogenih tela njihova vrednost se menja u funkciji položaja čestice X u telu $\mathcal{B}$.

5. LINEARNA ELASTODINAMIKA

Iz (3.1) sledi da je za polje pomeranja $\varepsilon \boldsymbol{u}$

$$
\boldsymbol{F}_{\varepsilon}^{-1} = (\boldsymbol{I} + \varepsilon \boldsymbol{H})^{-1} = \boldsymbol{I} - \varepsilon \boldsymbol{H} + \boldsymbol{O}(\varepsilon^2)
$$

odakle se dobija

$$
\boldsymbol{F}^{-1} = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{H} \tag{5.1}
$$

kada je posmatrano pomeranje $\boldsymbol{u}$ infinitezimalno.

Koristeći ovaj izraz, (4.1), kao i (4.11) u izrazu za Piola-Kirhofov tenzor prve vrste

$$
\boldsymbol{T}_R = J\boldsymbol{T}(\boldsymbol{F}^{-1})^T
$$

dobijamo da je u slučaju infinitezimalne deformacije

$$
\boldsymbol{T}_R \doteq \boldsymbol{T} \doteq \boldsymbol{L}_{\varkappa}[\widetilde{\boldsymbol{E}}]. \tag{5.2}
$$

Tada osnovne jednačine polja linearne elastodinamike glase

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Div} \boldsymbol{T}_R + \varrho_0 \boldsymbol{f} &= \varrho_0 \ddot{\boldsymbol{u}} \\
\boldsymbol{T}_R &= \boldsymbol{L}[\widetilde{\boldsymbol{E}}] \\
\widetilde{\boldsymbol{E}} &= \frac{1}{2}(\nabla \boldsymbol{u} + \nabla \boldsymbol{u}^T)
\end{aligned}
\tag{5.3}
$$

gde je $\nabla \boldsymbol{u}$ gradijent polja pomeranja u odnosu na materijalne koordinate tj., $\nabla \boldsymbol{u} = \operatorname{Grad} \boldsymbol{u}$.

Zakon balansa količine kretanja je identički zadovoljen s obzirom na (3.14), tj., s obzirom na simetričnost tenzora elastičnosti $\boldsymbol{L}_{\varkappa}$ i (5.2).

U jednačinama (5.3) gustina metrijala se pojavljuje preko njene vrednosti u referentnoj (početnoj) konfiguraciji ϱ_0 za koju pretpostavljamo da je poznata. Tada zakon balansa mase izražen u obliku

$$\varrho \det \boldsymbol{F} = \varrho_0 \tag{6.9.13}$$

očigledno ne mora biti uključen u sistem jednačina (5.3) u cilju određivanja polja $\boldsymbol{u}$, $\widetilde{\boldsymbol{E}}$ i $\boldsymbol{T}_R$ za zadato polje zapreminske sile $\boldsymbol{f}$.

Mi dalje pretpostavljamo da je telo $\mathcal{B}$ ograničeno i ϱ_0 neprekidno u $\mathcal{B}$.

Definicija: *Neka je skup polja $\{\boldsymbol{u}, \widetilde{\boldsymbol{E}}, \boldsymbol{T}_R\}$ neprekidan u V u svakom trenutku $t \in [0, t_0)$ (u daljem $V \times [0, t_0)$), pri čemu je $\boldsymbol{u} \in C^2$ i neka (5.3) važi za polje $\boldsymbol{f}$ definisano nad $V \times [0, t_0)$.*

Onda $\{\boldsymbol{u}, \widetilde{\boldsymbol{E}}, \boldsymbol{T}_R\}$ nazivamo ***elastični proces*** *koji odgovara dejstvu sile $\boldsymbol{f}$.*

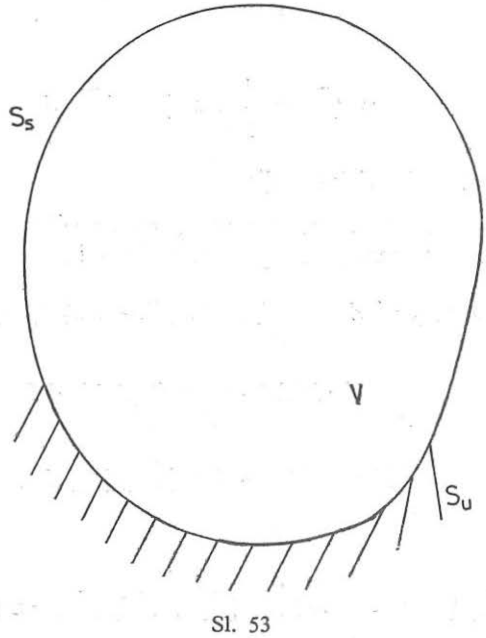
Pretpostavimo takođe da je

$$tr\,(\boldsymbol{L}_{\varkappa}[\widetilde{\boldsymbol{E}}]\,\widetilde{\boldsymbol{E}}) > 0 \qquad \text{za svako } \widetilde{\boldsymbol{E}} \neq \boldsymbol{O} \tag{5.4}$$

ili

$$L^{klmn}\widetilde{E}_{kl}\widetilde{E}_{mn} > 0 \qquad \text{ako nije } \widetilde{E}_{kl} = 0. \tag{5.4a}$$

Drukčije rečeno, pretpostavimo da je tenzor elastičnosti $\boldsymbol{L}_{\varkappa}$ pozitivno definitan. Pokazaće se da su simetričnost i pozitivna definitnost tenzora $\boldsymbol{L}_{\varkappa}$ i dovoljni uslovi egzistencije jedinstvenog rešenja *mešovitog problema* linearne elastodinamike za koji je



Sl. 53

Poznato: polje gustine ϱ_0, tenzor elastičnosti $\boldsymbol{L}_\varkappa$, polje zapreminske sile $\boldsymbol{f}$ na $V\times[0, t_0)$, polje pomeranja $\hat{\boldsymbol{u}}$ na $S_u\times[0, t_0)$, polje početnog pomeranja $\boldsymbol{u}_0$ na $\mathcal{B}$ i početna brzina $\boldsymbol{v}_0$ na $\mathcal{B}$; granična površ tela $\mathcal{B}$ je S i za nju važi $S=S_u\cup S_s$ (sl. 53).

Traži se: elastični proces $\{\boldsymbol{u}, \widetilde{\boldsymbol{E}}, \boldsymbol{T}_R\}$ koji odgovara sili $\boldsymbol{f}$ i koji zadovoljava *početne uslove:*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{X}, 0) &= \boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{X}) \\ \dot{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{X}, 0) &= \dot{\boldsymbol{u}}_0(\boldsymbol{X}) \end{aligned} \tag{5.5}$$

za svako $\boldsymbol{X}\in\mathcal{B}$, i *granične uslove*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} &= \hat{\boldsymbol{u}} \qquad \text{na } S_u\times[0, t_0) \\ \boldsymbol{T}_R\boldsymbol{N} &= \boldsymbol{p} \qquad \text{na } S_S\times[0, t_0). \end{aligned} \tag{5.6}$$

Elastični proces sa ovim osobinama nazvaćemo *rešenjem* mešovitog problema.

Teorema o jedinstvenosti rešenja mešovitog problema

Ako je $\boldsymbol{L}_\varkappa$ simetrično i pozitivno definitno i $\varrho_0>0$ onda postoji najviše jedno rešenje mešovitog problema.

Dokaz se zasniva na pomoćnom rezultatu koji iskazujemo ***lemom:***

Neka je $\boldsymbol{L}_\varkappa$ simetrično. Neka je $\{\boldsymbol{u}, \widetilde{\boldsymbol{E}}, \boldsymbol{T}_R\}$ elastični proces koji odgovara zapreminskoj sili $\boldsymbol{f}$. Tada je

$$\int_S \boldsymbol{T}_R\boldsymbol{N}\cdot\dot{\boldsymbol{u}}\, dA + \int_V \varrho_0\boldsymbol{f}\cdot\dot{\boldsymbol{u}}\, dV = [\mathcal{U}(\widetilde{\boldsymbol{E}})+\mathcal{K}(\dot{\boldsymbol{u}})]^{\cdot}, \tag{5.7}$$

gde je

$$\mathcal{U}(\widetilde{\boldsymbol{E}}) = \frac{1}{2}\int_V tr\,(\widetilde{\boldsymbol{E}}\boldsymbol{L}_\varkappa[\widetilde{\boldsymbol{E}}])\, dV \tag{5.8}$$

i naziva se energija deformacije.

Dokaz leme. Koristeći simetričnost tenzora $\boldsymbol{L}_\varkappa$, relaciju (5.2) koja povlači simetričnost $\boldsymbol{T}_R$ i teoremu o divergenciji, moguće je pokazati da je

$$\begin{aligned} \int_V \mathrm{Div}\,\boldsymbol{T}_R\cdot\dot{\boldsymbol{u}}\, dV &= \int_V [Div\,(\boldsymbol{T}_R\dot{\boldsymbol{u}}) - tr\,\boldsymbol{T}_R\nabla\dot{\boldsymbol{u}}]\, dV \\ &= \int_S \boldsymbol{T}_R\dot{\boldsymbol{u}}\cdot\boldsymbol{N}\, dA - \int_V tr\,(\boldsymbol{T}_R\nabla\dot{\boldsymbol{u}})\, dV \\ &= \int_S \boldsymbol{T}_R\boldsymbol{N}\cdot\dot{\boldsymbol{u}} dA - \int_V tr\,(\dot{\widetilde{\boldsymbol{E}}}\boldsymbol{L}_\varkappa[\widetilde{\boldsymbol{E}}])\, dV. \end{aligned}$$

Kako je

$$\frac{1}{2}\,tr\,(\widetilde{\boldsymbol{E}}\boldsymbol{L}_\varkappa[\widetilde{\boldsymbol{E}}])^{\cdot} = \frac{1}{2}\,tr\,(\dot{\widetilde{\boldsymbol{E}}}\boldsymbol{L}_\varkappa[\widetilde{\boldsymbol{E}}] + \widetilde{\boldsymbol{E}}\boldsymbol{L}_\varkappa[\dot{\widetilde{\boldsymbol{E}}}]) = tr(\dot{\widetilde{\boldsymbol{E}}}\boldsymbol{L}_\varkappa[\widetilde{\boldsymbol{E}}])$$

biće, s obzirom na (5.8),

$$\int_V \operatorname{Div} \boldsymbol{T}_R \cdot \dot{\boldsymbol{u}}\, dV = \int_S \boldsymbol{T}_R\boldsymbol{N} \cdot \dot{\boldsymbol{u}}\, dA - \frac{d}{dt}\frac{1}{2}\int_V tr\, \widetilde{\boldsymbol{E}}\boldsymbol{L}_{\varkappa}[\widetilde{\boldsymbol{E}}]\, dV$$

$$= \int_S \boldsymbol{T}_R\boldsymbol{N} \cdot \dot{\boldsymbol{u}}\, dA - \dot{\mathcal{U}}(\widetilde{\boldsymbol{E}}).$$

Takođe je

$$\int_V \operatorname{Div} \boldsymbol{T}_R \cdot \dot{\boldsymbol{u}}\, dV + \int_V \varrho_0 \boldsymbol{f} \cdot \dot{\boldsymbol{u}}\, dV = \int_V \varrho_0\, \ddot{\boldsymbol{u}} \cdot \dot{\boldsymbol{u}}\, dV$$

$$= \frac{d}{dt}\frac{1}{2}\int_V \varrho_0\, \dot{\boldsymbol{u}}^2\, dV$$

$$= \dot{\mathcal{K}}(\dot{\boldsymbol{u}}).$$

Iz ova dva poslednja izraza sledi (5.7). □

Posledica leme. *Neka je $\boldsymbol{L}_{\varkappa}$ simetrično i neka je $\{\boldsymbol{u}, \widetilde{\boldsymbol{E}}, \boldsymbol{T}_R\}$ elastičan proces koji odgovara zapreminskoj sili $\boldsymbol{f} = 0$. Pretpostavimo da je $\boldsymbol{T}_R\boldsymbol{N} \cdot \dot{\boldsymbol{u}} = 0$ na $\mathcal{B}$. Onda je ukupna energija linearnog elastičnog tela konstantna, tj.,*

$$\mathcal{U}(\widetilde{\boldsymbol{E}}) + \mathcal{K}(\dot{\boldsymbol{u}}) = \text{const.} \tag{5.9}$$

Na osnovu ovog rezultata se može zaključiti da je, u slučaju kada elastični proces počne od nedeformisanog stanja u kome je telo u stanju mirovanja, tj. u kome je

$$\widetilde{\boldsymbol{E}}(X, 0) = \boldsymbol{O}; \quad \dot{\boldsymbol{u}}(X, 0) = 0, \tag{5.10}$$

ukupna energija u početnom trenutku jednaka nuli, pa je

$$\mathcal{U}(\widetilde{\boldsymbol{E}}) + \mathcal{K}(\dot{\boldsymbol{u}}) = 0 \tag{5.11}$$

za sve infinitezimalne deformacije $\widetilde{\boldsymbol{E}}$ i $t \in [0, t_0)$.

Sada možemo preći na ***dokaz*** *teoreme o jedinstvenosti rešenja mešovitog problema:*

Pretpostavljamo da postoje dva rešenja. Tada njihova razlika, koju ćemo označiti sa $\{\boldsymbol{u}, \widetilde{\boldsymbol{E}}, \boldsymbol{T}_R\}$, predstavlja elastični proces koji odgovara zapreminskoj sili $\boldsymbol{f} = 0$ i početnim uslovima

$$\boldsymbol{u}(\cdot, 0) = \dot{\boldsymbol{u}}(\cdot, 0) = 0 \tag{5.12}$$

i za koji je

$$\boldsymbol{u} = 0 \text{ na } S_u \times [0, t_0), \qquad \boldsymbol{T}_R\boldsymbol{N} = 0 \text{ na } S_s \times [0, t_0). \tag{5.13}$$

Tada važi (5.10) pa prema tome i (5.11) za svako $t \in [0, t_0)$. Takođe su i kinetička energija i energija deformacije nenegativni jer je $\varrho_0 > 0$ i $tr\, \widetilde{\boldsymbol{E}}\boldsymbol{L}_{\varkappa}[\widetilde{\boldsymbol{E}}] \geqslant 0$. Tada iz (5.11) zaključujemo da je

$$\mathcal{K}(\dot{\boldsymbol{u}}) = \frac{1}{2}\int_V \varrho_0 \dot{\boldsymbol{u}} \cdot \dot{\boldsymbol{u}}\, dV = 0$$

odakle sledi da je $\dot{\boldsymbol{u}} = 0$ na $V \times [0, t_0)$. Međutim, kako je $\boldsymbol{u}$, prema $(5.12)_1$, u početnom trenutku jednako nuli, biće

$$\boldsymbol{u} = 0 \text{ na } V \times [0, t_0) \cdot \square$$

Primenimo ovde izvedene rezultate na slučaj Hukovog tela. Za to nam je potrebna relacija

$$\begin{aligned} \operatorname{Div}(2\widetilde{\boldsymbol{E}}) &= \operatorname{Div}\operatorname{Grad}\boldsymbol{u} + \operatorname{Grad}\operatorname{Div}\boldsymbol{u} \\ &= \triangle\boldsymbol{u} + \operatorname{Grad}\operatorname{Div}\boldsymbol{u} \end{aligned} \tag{5.14}$$

Koristeći ovaj izraz, (5.2), (4.3) u $(5.3)_1$ dobijamo jednačinu

$$\mu\triangle\boldsymbol{u} + (\lambda + \mu)\operatorname{Grad}\operatorname{Div}\boldsymbol{u} + \varrho_0\boldsymbol{f} = \varrho_0\ddot{\boldsymbol{u}}, \tag{5.15}$$

koja se naziva *Navijeova (Navier) jednačina.*

Koristeći identičnost

$$\operatorname{Rot}\operatorname{Rot}\boldsymbol{u} = \operatorname{Grad}\operatorname{Div}\boldsymbol{u} - \triangle\boldsymbol{u} \tag{5.16}$$

možemo Navijeovu jednačinu napisati u obliku

$$(\lambda + 2\mu)\operatorname{Grad}\operatorname{Div}\boldsymbol{u} - \mu\operatorname{Rot}\operatorname{Rot}\boldsymbol{u} + \varrho_0\boldsymbol{f} = \varrho_0\ddot{\boldsymbol{u}} \tag{5.17}$$

koji je u izvesnim dinamičkim problemima pogodniji za rešavanje.

U slučaju Hukovog tela nejednakost (5.4), kojom se definiše pozitivna definitnost tenzora elastičnosti, glasi, s obzirom na (4.6),

$$\lambda\,(tr\,\widetilde{\boldsymbol{E}})^2 + 2\mu\,(tr\,\widetilde{\boldsymbol{E}}^2) > 0. \tag{5.18}$$

Ova nejednakost se, koristeći (4.8), može izraziti u ekvivalentnom obliku

$$\left(\lambda + \frac{2}{3}\mu\right)(tr\,\widetilde{\boldsymbol{E}})^2 + 2\mu\,tr\,\widetilde{\boldsymbol{E}}'^2 > 0. \tag{5.19}$$

Pošto se $tr\,\widetilde{\boldsymbol{E}}$ i $tr\,\widetilde{\boldsymbol{E}}'$ mogu zadavati nezavisno onda (5.19) važi za svako $\widetilde{\boldsymbol{E}} \neq \boldsymbol{O}$ ako i samo ako je

$$\mu > 0, \quad K = \lambda + \frac{2}{3}\mu > 0, \tag{5.20}$$

tj. ako i samo ako su modul smicanja i zapreminski modul pozitivni. Iz (4.21) se vidi da je

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \text{i} \quad K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$$

što nam omogućuje da se (5.20) izrazi pomoću ekvivalentnih uslova

$$E > 0, \quad -1 < \nu < \frac{1}{2}. \tag{5.21}$$

U stvarnosti nisu poznati materijali za koje je ν negativno.

VIII TERMOELASTIČNI I HIPERELASTIČNI MATERIJALI

1. TERMOELASTIČNI MATERIJALI

Do sada izložena konstitutivna (mehanička) teorija zanemarivala je toplotne efekte. Konstitutivna teorija koja te efekte uzima u obzir naziva se *termodinamička konstitutivna teorija*. U opštem slučaju ova teorija je vrlo složena. Zbog toga se ovde zadržavamo samo na nekim elementima termomehanike prostih materijala.

Za dovoljno malu okolinu čestice X, pod pretpostavkom da su jednačine kretanja i temperature svih njenih tačaka $\overline{X} \in \mathcal{N}(X)$ diferencijabilne, relativno kretanje i temperatura mogu biti aproksimirani sa

$$\boldsymbol{x}(\overline{X}, \tau) - \boldsymbol{x}(X, \tau) \approx \boldsymbol{F}(X, \tau)\, d\boldsymbol{X} \tag{6.5.1}$$

i

$$\begin{aligned} \theta(\overline{X}, \tau) &\approx \theta(X, \tau) + \boldsymbol{G}(X, \tau)\, d\boldsymbol{X} \\ &\approx \theta(X, \tau) + \boldsymbol{g}(X, \tau)\, d\boldsymbol{x} \end{aligned} \tag{1.1}$$

gde su $\boldsymbol{G}(X, \tau)$ i $\boldsymbol{g}(X, \tau)$ istorija gradijenta temperature u odnosu na materijalne i prostorne koordinate respektivno, tj.,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{G}(X, \tau) &= \operatorname{Grad} \theta(X, \tau) = \theta_{,K} \boldsymbol{G}^K \\ \boldsymbol{g}(X, \tau) &= \operatorname{grad} \theta(X, \tau) = \theta_{,k} \boldsymbol{g}^k \end{aligned} \tag{1.2}$$

a

$$\tau = t - s, \quad 0 \leqslant s < \infty, \tag{6.4.4}$$

Iz (1.2) se vidi da je

$$\boldsymbol{G}(X, \tau) = \boldsymbol{F}^T(X, \tau)\, \boldsymbol{g}(X, \tau). \tag{1.3}$$

Za materijale, čije je reagovanje u posmatranoj čestici X u datom trenutku vremena t određeno istorijom gradijenta deformacije u odnosu na neku referentnu konfiguraciju, istorijom temperature i gradijenta temperature te čestice, kažemo da su *termodinamički prosti materijali*.

Nas će prvenstveno interesovati *termoelastični materijali* koji su definisani sledećim termodinamičkim konstitutivnim pretpostavkama.

Postoje funkcije reagovanja $\hat{\boldsymbol{T}}(X, t)$, $\hat{\varepsilon}(X, t)$, $\hat{\boldsymbol{q}}(X, t)$ *i* $\hat{\eta}(X, t)$ *koje su funkcije gradijenta deformacije* $\boldsymbol{F}(X, t)$ *temperature* $\theta(X, t)$ *i gradijenta temperature* $\boldsymbol{G}(X, t)$ *a kojima su određeni napon, unutrašnja energija, vektor toplotnog fluksa i energija u čestici* X *u trenutku vremena* t *relacijama*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{T}(X, t) &= \hat{\boldsymbol{T}}[\boldsymbol{F}(X, t), \theta(X, t), \boldsymbol{G}(X, t)] \\ \varepsilon(X, t) &= \hat{\varepsilon}[\boldsymbol{F}(X, t), \theta(X, t), \boldsymbol{G}(X, t)] \\ \boldsymbol{q}(X, t) &= \hat{\boldsymbol{q}}[\boldsymbol{F}(X, t), \theta(X, t), \boldsymbol{G}(X, t)] \\ \eta(X, t) &= \hat{\eta}[\boldsymbol{F}(X, t), \theta(X, t), \boldsymbol{G}(X, t)]. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Kako su $\boldsymbol{F}$ i $\boldsymbol{G}$ uvek definisani u odnosu na neku referentnu konfiguraciju $\varkappa$ sledi da su i funkcije reagovanja $\hat{\boldsymbol{T}}$, $\hat{\varepsilon}$, $\hat{\boldsymbol{q}}$, $\hat{\eta}$ zavisne od referentne konfiguracije. One zavise, takođe, eksplicitno od čestice X ako je termoelastični materijal nehomogen.

U nekim slučajevima pogodnije je umesto unutrašnje energije ε koristiti slobodnu energiju ψ koja je definisana relacijom

$$\psi = \varepsilon - \theta\eta \tag{5.12.16}$$

Tada je

$$\begin{aligned} \boldsymbol{T} &= \hat{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{F}, \theta, \boldsymbol{G}) \\ \psi &= \hat{\psi}(\boldsymbol{F}, \theta, \boldsymbol{G}) \\ \boldsymbol{q} &= \hat{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{F}, \theta, \boldsymbol{G}) \\ \eta &= \hat{\eta}(\boldsymbol{F}, \theta, \boldsymbol{G}) \end{aligned} \tag{1.5}$$

gde smo radi jednostavnosti obeležavanja izostavili pisanje zavisnosti $\boldsymbol{F}$, θ i $\boldsymbol{G}$ od X i t koja se dalje, sve dok se drukčije ne kaže, podrazumeva.

Sigurno je da konstitutivne jednačine (1.5), s obzirom na način kako smo do njih došli, zadovoljavaju princip koordinatne invarijantnosti, princip ekviprezensa, princip determinizma i princip lokalnog dejstva; one moraju zadovoljavati i princip materijalne indiferentnosti. Tačnije, funkcije reagovanja $\hat{\boldsymbol{T}}$, $\hat{\psi}$, $\hat{\boldsymbol{q}}$ i $\hat{\eta}$ moraju zadovoljavati relacije

$$\begin{aligned} \boldsymbol{Q}\hat{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{F}, \theta, \boldsymbol{G})\boldsymbol{Q}^T &= \hat{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{QF}, \theta, \boldsymbol{G}) \\ \hat{\psi}(\boldsymbol{F}, \theta, \boldsymbol{G}) &= \hat{\psi}(\boldsymbol{QF}, \theta, \boldsymbol{G}) \\ \widehat{\boldsymbol{Qq}}(\boldsymbol{F}, \theta, \boldsymbol{G}) &= \hat{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{QF}, \theta, \boldsymbol{G}) \\ \hat{\eta}(\boldsymbol{F}, \theta, \boldsymbol{G}) &= \hat{\eta}(\boldsymbol{QF}, \theta, \boldsymbol{G}) \end{aligned} \tag{1.6}$$

za svako regularno $\boldsymbol{F}$, za svako $\theta > 0$, svako $\boldsymbol{G}$ i svako ortogonalno $\boldsymbol{Q}$.

2. OGRANIČENJA KOJA NA TERMOELASTIČNE MATERIJALE NAMEĆE DRUGI ZAKON TERMODINAMIKE

Već smo ranije videli (odeljak 1, glava VI) da je za preciziranje termodinamičkog procesa dovoljno propisati skup veličina $\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{T}, \psi, \boldsymbol{q}, \eta, \theta\}$. Zato radi definisanosti kažemo:

U slučaju termoelastičnih materijala termodinamički proces je ***dopustiv*** *ako je kompatibilan (saglasan) sa konstitutivnim jednačinama (1.5) u svakoj čestici X tela i za sve vreme t.*

Na osnovu toga možemo dokazati ***stav:***

Svakom izboru funkcije kretanja $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(X, t)$ i raspodele temperature $\theta = \theta(X, t)$, $(X \in \mathcal{B},\ a \leqslant t \leqslant b)$, odgovara ***jedinstevn*** *dopustiv termodinamički proces u $\mathcal{B}$.*

Dokaz: Neka su $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(X, t)$ i $\theta = \theta(X, t)$ funkcije definisane za svako $t \in [a, b]$ i $X \in \mathcal{B}$. Onda je sigurno poznato i $\boldsymbol{G} = Grad\, \theta(X, t)$. Na osnovu (1.5) određeni su i $\boldsymbol{T}, \psi, \boldsymbol{q}, \eta$ za $t \in [a, b]$ i za svako $X \in \mathcal{B}$. Ali tada su nad $\mathcal{B}$ određena polja $\varrho \ddot{\boldsymbol{x}}$, $div\, \boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{T} : \boldsymbol{D}$, $div\, \boldsymbol{q}$, $\dot{\psi}$ pa prema (5.12.16) i $\dot{\varepsilon}$. Za tako određena polja uvek možemo izabrati $\boldsymbol{f}$ i h tako da prvi Košijev zakon (4.8.17) i prvi zakon termodinamike (5.4.13) važe. Šta više, tako određena polja $\boldsymbol{f}$ i h su jedinstvena. □

Na osnovu ovog stava možemo dokazati ***lemu:***

Neka je $(\boldsymbol{F}_0, \theta_0, \boldsymbol{G}_0)$ proizvoljna tačka u domenu definisanosti funkcija reagovanja $\hat{\boldsymbol{T}}, \hat{\psi}, \hat{\boldsymbol{q}}$ i $\hat{\eta}$ za česticu $X_0 \in \mathcal{B}$ koja u trenutku t_0 zauzima položaj $\boldsymbol{X}_0$. Neka su $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{a}$ i α proizvoljan tenzor, proizvoljan vektor i proizvoljan skalar respektivno. Tada postoji dopustiv termodinamički proces za svako X u okolini čestice X_0 u $\mathcal{B}$ u nekom intervalu $[t_0, t_0 + \delta]$ za koji je

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{F}(X_0, t_0) &= \boldsymbol{F}_0; & \dot{\boldsymbol{F}}(X_0, t_0) &= \boldsymbol{A} \\
\theta(X_0, t_0) &= \theta_0; & \dot{\theta}(X_0, t_0) &= \alpha \\
\boldsymbol{G}(X_0, t_0) &= \boldsymbol{G}_0; & \dot{\boldsymbol{G}}(X_0, t_0) &= \boldsymbol{a}.
\end{aligned} \tag{2.1}
$$

Dokaz: Posmatrajmo kretanje i raspodelu temperature koji su definisani sa

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x}(X, t) &= \boldsymbol{X}_0 + [\boldsymbol{F}_0 + (t - t_0)\boldsymbol{A}](\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_0) \\
\theta(X, t) &= \theta_0 + \alpha(t - t_0) + [\boldsymbol{G}_0 + (t - t_0)\boldsymbol{a}](\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_0)
\end{aligned} \tag{2.2}
$$

za svako $\boldsymbol{X}$ u okolini $\boldsymbol{X}_0 \in \mathcal{B}$ i $t \geqslant t_0$ dovoljno blisko t_0. Tada postoji takvo $\delta > 0$ tako da je za svako $t \in [t_0, t_0 + \delta]$

$$det\,[\boldsymbol{F}_0 + (t - t_0)\boldsymbol{A}] \neq 0$$

$$\theta_0 + \alpha(t - t_0) + [\boldsymbol{G}_0 + (t - t_0)\boldsymbol{a}](\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_0) > 0$$

za svako X u nekoj okolini čestice $X_0 \in \mathcal{B}$.

Na osnovu prethodno dokazanog stava, tako izabranim funkcijama $\boldsymbol{x}(X, t)$ i $\theta(X, t)$ onda odgovara neki dopustivi termodinamički proces u okolini čestice X_0

za $t \in [t_0, t_0 + \delta]$. Lako je proveriti da $\boldsymbol{x}(X, t)$ i $\theta(X, t)$ dati sa (2.2) imaju sve osobine (2.1) u $X_0 \in \mathcal{B}$ za $t = t_0$. □

Mi dalje zahtevamo da drugi zakon termodinamike takođe važi za sve dopustive termodinamičke procese. Ovaj zahtev povlači za sobom izvesna ograničenja na funkcije ponašanja. Za njihovo izvođenje koristićemo entropijsku nejednakost u lokalnom obliku (5.14.10a).

Kada se u tom izrazu, koristeći $(1.5)_2$ zameni

$$\dot{\psi} = tr\,[\hat{\psi}_{\boldsymbol{F}}^T \dot{\boldsymbol{F}}] + \hat{\psi}_\theta \dot{\theta} + \hat{\psi}_{\boldsymbol{G}} \dot{\boldsymbol{G}} \tag{2.3}$$

i, pomoću (3.8.24) i (3.8.25), odredi (vodeći računa o simetričnosti tenzora $\boldsymbol{T}$)

$$\boldsymbol{T} : \boldsymbol{D} = tr\,\boldsymbol{T}\boldsymbol{D} = tr\,(\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{T}\dot{\boldsymbol{F}}) \tag{2.4}$$

dobijamo posle sređivanja članova disipativnu nejednakost u obliku

$$\begin{aligned} & tr\,\{[\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{T}(\boldsymbol{F}, \theta, \boldsymbol{G}) - \varrho\hat{\psi}_{\boldsymbol{F}}^T(\boldsymbol{F}, \theta, \boldsymbol{G})]\,\dot{\boldsymbol{F}}\} - \\ & - \varrho\,[\hat{\psi}_\theta(\boldsymbol{F}, \theta, \boldsymbol{G}) + \hat{\eta}(\boldsymbol{F}, \theta, \boldsymbol{G})]\,\dot{\theta} - \\ & - \varrho\hat{\psi}_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{F}, \theta, \boldsymbol{G}) \cdot \dot{\boldsymbol{G}} + \frac{1}{\theta}\hat{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{F}, \theta, \boldsymbol{G}) \cdot \boldsymbol{g} \geqslant 0. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Teorema 1: *Disipativna nejednakost* (2.5) *je zadovoljena za svaki dopustiv termodinamički proces ako i samo ako:*

a) *funkcije reagovanja* $\hat{\psi}$, $\hat{\boldsymbol{T}}$ *i* $\hat{\eta}$ *ne zavise od gradijenta temperature, tj.,*

$$\psi = \hat{\psi}(\boldsymbol{F}, \theta), \quad \boldsymbol{T} = \hat{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{F}, \theta), \quad \eta = \hat{\eta}(\boldsymbol{F}, \theta); \tag{2.6}$$

b) *napon i energija se određuju pomoću slobodne energije preko* ***naponske relacije***

$$\boldsymbol{T} = \varrho\boldsymbol{F}\hat{\psi}_{\boldsymbol{F}}^T(\boldsymbol{F}, \theta) \tag{2.7}$$

odnosno ***entropijske relacije***

$$\eta = -\hat{\psi}_\theta(\boldsymbol{F}, \theta); \tag{2.8}$$

c) *toplotni fluks zadovoljava* ***nejednakost toplotnog provođenja***

$$\hat{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{F}, \theta, \boldsymbol{G}) \cdot \boldsymbol{g} \geqslant 0 \tag{2.9}$$

ili

$$\boldsymbol{q}(\boldsymbol{F}, \theta, \boldsymbol{g}) \cdot \boldsymbol{g} \geqslant 0 \tag{2.10}$$

gde je, s obzirom na (1.3),

$$\boldsymbol{q}(\boldsymbol{F}, \theta, \boldsymbol{g}) = \hat{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{F}, \theta, \boldsymbol{F}^T\boldsymbol{g}). \tag{2.11}$$

Dokaz: Neka važi (2.6—9). Tada je (2.5) zadovoljeno za svaki dopustivi termodinamički proces.

Obrnuto, neka je (2.5) zadovoljeno za svaki dopustivi termodinamički proces u svakoj čestici tela $\mathcal{B}$.

Tada je (2.5) zadovoljeno i za dopustivi proces dat sa (2.2) tako da za proizvoljno $X_0 \in \mathcal{B}$ u trenutku t_0 (2.5) postaje, s obzirom na (2.1),

$$tr\,\{[F_0^{-1}\boldsymbol{T}(\boldsymbol{F}_0, \theta_0, \boldsymbol{G}_0) - \varrho_0\hat{\psi}_{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{F}_0, \theta_0, \boldsymbol{G}_0)]\,\boldsymbol{A}\} -$$
$$- \varrho_0\,[\hat{\psi}_\theta(\boldsymbol{F}_0, \theta_0, \boldsymbol{G}_0) + \hat{\eta}(\boldsymbol{F}_0, \theta_0, \boldsymbol{G}_0)]\,\alpha -$$
$$- \varrho_0\hat{\psi}_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{F}_0, \theta_0, \boldsymbol{G}_0)\cdot\boldsymbol{a} + \frac{1}{\theta_0}\hat{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{F}_0, \theta_0, \boldsymbol{G}_0)\cdot\boldsymbol{g}_0 \geqslant 0.$$

Očigledno je da je ova nejednakost linearna po $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{a}$ i α i za njihov proizvoljan, izbor njima odgovarajući koeficijenti u toj nejednakosti moraju biti jednaki nuli, tj.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{T}(\boldsymbol{F}_0, \theta_0, \boldsymbol{G}_0) &= \varrho_0\boldsymbol{F}_0\hat{\psi}^T_{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{F}_0, \theta_0, \boldsymbol{G}_0) \\ \hat{\eta}(\boldsymbol{F}_0, \theta_0, \boldsymbol{G}_0) &= -\hat{\psi}_\theta(\boldsymbol{F}_0, \theta_0, \boldsymbol{G}_0) \\ \hat{\psi}_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{F}_0, \theta_0, \boldsymbol{G}_0) &= 0. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Tada se entropijska nejednakost svodi na

$$\hat{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{F}_0, \theta_0, \boldsymbol{G}_0)\cdot\boldsymbol{g}_0 \geqslant 0 \tag{2.13}$$

ili

$$\boldsymbol{q}(\boldsymbol{F}_0, \theta_0, \boldsymbol{g}_0)\cdot\boldsymbol{g}_0 \geqslant 0 \tag{2.14}$$

s obzirom na (2.11).

Pošto smo X_0 i t_0 birali proizvoljno, onda (2.12—14) važi za svako $X \in \mathcal{B}$ i svako t. Tada se (2.12—14) svodi na (2.6—10). □

Na osnovu ove teoreme možemo dokazati ***stav:***

Prvi zakon termodinamike (5.4.13) za dopustive termodinamičke procese u termoelastičnom materijalu može biti izražen u obliku

$$\varrho\theta\dot{\eta} = div\,\boldsymbol{q} + \varrho h. \tag{2.15}$$

Dokaz: Iz (2.3), $(2.6)_1$ i (2.8) se dobija da je

$$\dot{\psi} = tr\,[\hat{\psi}^T_{\boldsymbol{F}}\dot{\boldsymbol{F}}] - \eta\dot{\theta}$$

a iz (2.4) i (2.7) i ovog izraza

$$\begin{aligned} \boldsymbol{T} : \boldsymbol{D} &= \varrho\, tr\,\hat{\psi}^T_{\boldsymbol{F}}\dot{\boldsymbol{F}} \\ &= \varrho\dot{\psi} + \varrho\eta\dot{\theta}. \end{aligned}$$

Takođe je, s obzirom na (5.12.16),

$$\dot{\psi} = \dot{\varepsilon} - \dot{\theta}\eta - \theta\dot{\eta}$$

tako da je

$$\boldsymbol{T} : \boldsymbol{D} = \varrho\dot{\varepsilon} - \varrho\theta\dot{\eta}.$$

Smenom ovog izraza u (5.4.13) dobijamo (2.15). □

Definicija: *Za dopustivi termodinamički proces kažemo da je izentropski ako je $\dot{\eta} = 0$.*

Teorema 2: *Dopustivi termodinamički proces je adijabatski, tj.,*

$$\operatorname{div} \boldsymbol{q} + \varrho h = 0 \tag{2.16}$$

ako i samo ako je izentropski.

Dokaz teoreme neposredno sledi iz (2.15). □

Pri rešavanju konkretnih zadataka termoelastičnih materijala često se koristi prvi zakon termodinamike u obliku

$$\varrho_0 \theta \dot{\eta} = \operatorname{Div} \boldsymbol{q} + \varrho_0 h \tag{2.17}$$

koji se dobija iz (2.15), $(3.13.4)_1$ i (4.7.9).

3. POSLEDICE NEJEDNAKOSTI TOPLOTNOG PROVOĐENJA I PRINCIPA MATERIJALNE INDIFERENTNOSTI

Posledice nejednakosti toplotnog provođenja

Na osnovu teoreme 1 prethodnog odeljka disipativna nejednakost (2.5) se, u slučaju termoelastičnih materijala, svodi na nejednakost toplotnog provođenja

$$\boldsymbol{q}(\boldsymbol{F}, \theta, \boldsymbol{g}) \cdot \boldsymbol{g} \geqslant 0. \tag{2.10}$$

Ova nejednakost se naziva i *Furijeova* (*Fourier*) *nejednakost* i identična je sa $(5.13.12)_2$. Sa fizičkog stanovišta ona predstavlja činjenicu da se toplota nikada spontano ne prenosi sa hladnijeg na toplije telo. Pomoću nje možemo izvesti određene zaključke u vezi toplotnog fluksa. U tom cilju označimo sa I funkciju definisanu izrazom

$$I \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{g}. \tag{3.1}$$

Ona predstavlja entropijsku proizvodnju usled provođenja toplote. Iz (3.1) i (2.10) se vidi da je

$$I = I(\boldsymbol{F}, \theta, \boldsymbol{g}), \tag{3.1a}$$

da je nenegativno za sve dopustive termodinamičke procese i da je

$$I(\boldsymbol{F}, \theta, 0) = 0. \tag{3.2}$$

Pretpostavimo da je $\boldsymbol{q}$ neprekidno po $\boldsymbol{g}$. Tada je i I neprekidno po $\boldsymbol{g}$. Šta više, s obzirom na (2.10), (3.1) i (3.2), I ima minimum u $\boldsymbol{g} = 0$ tako da je

$$I_{\boldsymbol{g}}(\boldsymbol{F}, \theta, \boldsymbol{g})\,|_{\boldsymbol{g}=0} = 0. \tag{3.3}$$

Koristeći (3.1) u ovom izrazu dobijamo da je

$$\boldsymbol{q}(\boldsymbol{F}, \theta, 0) = 0. \tag{3.4}$$

Time smo dokazali ***stav:***

Toplotni fluks iščezava uvek kada gradijent temperature iščezava.

Sa matematičkog stanovišta to znači da vektor toplotnog fluksa ima nulu u $\boldsymbol{g} = 0$ i da ga možemo predstaviti, razvijajući ga u Tajlorov (Taylor) red u okolini $\boldsymbol{g} = 0$, u obliku

$$q = k(F, \theta)g + O(|g|^2) \tag{3.5}$$

gde je tenzorska funkcija drugog reda

$$k = q_g(F, \theta, g)|_{g=0}.$$

Furijeova nejednakost (2.10) tada ima oblik

$$g \cdot k(F, \theta)g + 0(|g|^3) \geqslant 0$$

Ona važi za svako g samo ako je

$$g \cdot k(F, \theta)g \geqslant 0 \tag{3.6}$$

za svako g. Odatle sledi da je $k(F, \theta)$ pozitivno semi-definitno. Uobičajno je da se takva tenzorska funkcija $k(F, \theta)$ naziva *tenzor provodljivosti.*

Značaj dokazanog stava, tj., (3.4) se ogleda i u sledećim njegovim posledicama

$$q_F(F, \theta, 0) = O, \tag{3.7}$$

$$q_\theta(F, \theta, 0) = 0, \tag{3.8}$$

koji se koriste pri linearizaciji konstitutivne jednačine za vektor toplotnog fluksa.

i) Furijeovu nejednakost (2.10) možemo izraziti u ekvivalentnom obliku

$$q \cdot G \geqslant 0 \tag{3.9}$$

s obzirom na (5.7.9), (1.3) i (2.4.4). Koristeći (5.7.9) konstitutivnu jednačinu $(1.5)_3$ kao i činjenicu da je $J = \det F$ vidimo da konstitutivna jednačina vektora toplotnog fluksa u odnosu na referentnu konfiguraciju glasi

$$q = q(F, \theta, G). \tag{3.10}$$

Na osnovu istog postupka i u slučaju Furijeove nejednakosti (2.10), možemo sada pokazati da je

$$q(F, \theta, 0) = 0 \tag{3.11}$$

$$q_F(F, \theta, 0) = O \tag{3.12}$$

$$q_\theta(F, \theta, 0) = 0. \tag{3.13}$$

što je, kao i u slučaju vektora toplotnog fluksa $q(F, \theta, g)$, vrlo značajno pri izvođenju linearnih konstitutivnih jednačina. Specijalno, kada se q razvije u okolini $G = 0$ u Tajlorov red, dobijamo da je

$$q = K(F, \theta)G + O(|G|^2). \tag{3.14}$$

gde $K(F, \theta)$ mora zadovoljavati nejednačinu

$$G \cdot K(F, \theta)G \geqslant 0. \tag{3.15}$$

odakle sledi da je K pozitivno semi-definitan tenzor drugog reda. Kao i u slučaju tenzora k naziva se *tenzor porovodljivosti.*

Posledice principa materijalne indiferentnosti

Prema (2.6) što je posledica teoreme 1 odeljka 2, funkcije reagovanja $\hat{\psi}$, $\hat{\boldsymbol{T}}$ i $\hat{\eta}$ ne zavise od $\boldsymbol{G}$. Posledica toga je da se (1.6) svodi na relacije

$$
\begin{aligned}
\hat{\psi}(\boldsymbol{F}, \theta) &= \hat{\psi}(\boldsymbol{QF}, \theta) \\
\boldsymbol{Q}\hat{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{F}, \theta)\boldsymbol{Q}^T &= \hat{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{QF}, \theta) \\
\hat{\eta}(\boldsymbol{F}, \theta) &= \hat{\eta}(\boldsymbol{QF}, \theta) \\
\boldsymbol{Q}\hat{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{F}, \theta, \boldsymbol{G}) &= \hat{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{QF}, \theta, \boldsymbol{G}),
\end{aligned}
\tag{3.16}
$$

koje $\hat{\psi}$, $\hat{\boldsymbol{T}}$, $\hat{\eta}$ i $\hat{\boldsymbol{q}}$ moraju zadovoljavati za svako regularno $\boldsymbol{F}$, svako $\theta > 0$, svako $\boldsymbol{G}$ i svako ortogonalno $\boldsymbol{Q}$.

Kao i ranije, birajući za $\boldsymbol{Q}$ baš $\boldsymbol{R}^T$ dobijamo da je

$$\hat{\psi}(\boldsymbol{F}, \theta) = \hat{\psi}(\boldsymbol{U}, \theta) \tag{3.17}$$

jer je, prema $(2.5.14)_1$, $\boldsymbol{R}^T\boldsymbol{F} = \boldsymbol{U}$.

Nije teško pokazati da funkcija reagovanja $\hat{\psi}(\boldsymbol{U}, \theta)$ zadovoljava $(3.16)_1$ za svako ortogonalno $\boldsymbol{Q}$ i svako $\theta > 0$.

Na isti način se pokazuje da je

$$\hat{\eta}(\boldsymbol{F}, \theta) = \hat{\eta}(\boldsymbol{U}, \theta). \tag{3.18}$$

Iz (2.8), (3.18) i (3.17) se vidi da $\hat{\eta}(\boldsymbol{U}, \theta)$ nije bilo kakva funkcija od $\boldsymbol{U}$ i θ nego funkcija koja je data relacijom

$$\hat{\eta}(\boldsymbol{U}, \theta) = -\hat{\psi}_\theta(\boldsymbol{U}, \theta). \tag{3.19}$$

Dalje je

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{R}\hat{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{U}, \theta)\boldsymbol{R}^T \tag{3.20}$$

s obzirom na identičnost oblika relacija (1.5) i $(3.16)_2$. Razlika je samo u funkcionalnoj zavisnosti $\hat{\boldsymbol{T}}$ od θ što ne utiče na postupak dobijanja redukovanog oblika konstitutivne jednačine (3.20) koja direktno sledi iz (1.6). Međutim, tako određeni tenzor reagovanja $\hat{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{U}, \theta)$ nije proizvoljna funkcija svojih argumenata jer u slučaju termoelastičnih materijala tenzor napona $\boldsymbol{T}$ mora zadovoljavati relaciju (2.7). Zbog toga se za dobijanje konstitutivne jednačine za napon može odmah koristiti (3.17) u (2.7). Međutim, za izračunavanje izvoda po $\boldsymbol{F}$ pogodnije je umesto desnog tenzora izduženja $\boldsymbol{U}$ koristiti Koši-Grinov tenzor $\boldsymbol{C}$ jer je $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{U}^2 = \boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F}$. Tada (3.17) možemo pisati u obliku

$$\hat{\psi}(\boldsymbol{F}, \theta) = \hat{\psi}(\boldsymbol{U}, \theta) = \hat{\psi}(\boldsymbol{C}^{\frac{1}{2}}, \theta) \equiv \check{\psi}(\boldsymbol{C}, \theta) \tag{3.21}$$

Primenjujući na (3.21) definiciju unutrašnjeg izvoda (vidi Dodatak) i vodeći računa o simetričnosti tenzora $\boldsymbol{C}$ imamo

$$
\begin{aligned}
tr\,[\hat{\psi}_{\boldsymbol{F}}^T(\boldsymbol{F}, \theta)\boldsymbol{A}] &= tr\,[\check{\psi}_{\boldsymbol{C}}(\boldsymbol{C}, \theta)(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}^T\boldsymbol{A})] \\
&= 2tr\,[\check{\psi}_{\boldsymbol{C}}(\boldsymbol{C}, \theta)\boldsymbol{F}^T\boldsymbol{A}]
\end{aligned}
\tag{3.22}
$$

Pošto ova relacija mora da važi za proizvoljan tenzor $\boldsymbol{A}$ sledi da je

$$\hat{\psi}_{\boldsymbol{F}}^{T}(\boldsymbol{F}, \theta) = 2\check{\psi}_{\boldsymbol{C}}(\boldsymbol{C}, \theta)\, \boldsymbol{F}^{T}. \tag{3.23}$$

Koristeći ovaj izraz u (2.7) dobijamo konstitutivnu relaciju za napon

$$\boldsymbol{T} = 2\varrho \boldsymbol{F}\check{\psi}_{\boldsymbol{C}}(\boldsymbol{C}, \theta)\, \boldsymbol{F}^{T}. \tag{3.24}$$

Vrlo je važno uočiti da je tako dobijeni tenzor napona $\boldsymbol{T}$ simetričan što se ne može zaključiti iz (2.7). Prema tome, kao posledica primene principa materijalne indiferentnosti na (2.7) zakon momenta količine kretanja (4.8.18) je identički zadovoljen.

Isti zakon se pomoću Piola-Kirhofovog tenzora izražava sa $(4.9.21)_2$ u kome je sada, s obzirom na (4.9.8a) i (3.24),

$$\boldsymbol{T}_R = 2\varrho_0 \boldsymbol{F}\check{\psi}_{C}(\boldsymbol{C}, \theta). \tag{3.25}$$

U slučaju toplotnog fluksa iz $(3.16)_4$ na isti način se pokazuje da je

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{R}\hat{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{U}, \theta, \boldsymbol{G}) \tag{3.26}$$

ili

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{F}\hat{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{U}, \theta, \boldsymbol{G}) \tag{3.27}$$

kada se uzme u obzir da je $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{U}^{-1}$. Ponovo koristeći $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{U}^2$ možemo prethodnu konstitutivnu jednačinu pisati u obliku

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{F}\check{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{C}, \theta, \boldsymbol{G}). \tag{3.28}$$

Sumirajući ovde navedene rezultate vidimo da konstitutivne jednačine

$$\begin{aligned} \hat{\psi}(\boldsymbol{F}, \theta) &= \check{\psi}(\boldsymbol{C}, \theta), \\ \hat{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{F}, \theta) &= 2\varrho \boldsymbol{F}\check{\psi}_{\boldsymbol{C}}(\boldsymbol{C}, \theta)\, \boldsymbol{F}^{T}, \\ \hat{\eta}(\boldsymbol{F}, \theta) &= -\check{\psi}_{\theta}(\boldsymbol{C}, \theta), \\ \hat{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{F}, \theta, \boldsymbol{G}) &= \boldsymbol{F}\check{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{C}, \theta, \boldsymbol{G}) \end{aligned} \tag{3.29}$$

zadovoljavaju (3.16) za svako regularno $\boldsymbol{F}$, svako $\theta > 0$ svako $\boldsymbol{G}$ i svako ortogonalno $\boldsymbol{Q}$. Zbog toga (3.29) predstavlja *skup najopštijih konstitutivnih jednačina termoelastičnih materijala.*

i) Ovaj skup konstitutivnih jednačina nije jedini mogući s obzirom da postoje i njima ekvivalentni redukovani oblici. Primer toga su konstitutivne jednačine (3.17), (3.19) i (3.26).

Drugi pogodni redukovani oblici dobijaju se kada se umesto desnog Koši-Grinovog tenzora deformacije $\boldsymbol{C}$ kao nezavisno promenjiva veličina uvede Lagranžov tenzor relativne deformacije $\boldsymbol{E}$ relacijom

$$2\boldsymbol{E} = \boldsymbol{C} - \boldsymbol{I}. \tag{2.7.11}$$

U tom slučaju je

$$\check{\psi}(\boldsymbol{C}, \theta) = \check{\psi}(2\boldsymbol{E} - \boldsymbol{I}, \theta) \equiv \tilde{\psi}(\boldsymbol{E}, \theta) \tag{3.30}$$

i

$$\check{q}(C, \theta, G) = \check{q}(2E - I,\ \theta,\ G) \equiv \tilde{q}(E, \theta, G). \tag{3.31}$$

Iz (3.30) i $(2.7.11)_1$ se lako pokazuje da je

$$\hat{\psi}_C(C, \theta) = \frac{1}{2}\tilde{\psi}_E(E, \theta), \tag{3.32}$$

tako da sada (3.25) možemo pisati u obliku

$$T_R = \varrho_0 F \tilde{\psi}_E(E, \theta). \tag{3.33}$$

Iz (3.31), (3.32) i (3.29) odmah dobijamc

$$\begin{aligned} \hat{\psi}(F, \theta) &= \tilde{\psi}(E, \theta), \\ \hat{T}(F, \theta) &= \varrho F \tilde{\psi}_E(E, \theta), \\ \hat{\eta}(F, \theta) &= -\tilde{\psi}_\theta(E, \theta), \\ \hat{q}(F, \theta, G) &= F \tilde{q}(E, \theta, G). \end{aligned} \tag{3.34}$$

Njima odgovarajući ekvivalentni sistem redukovanih konstitutivnih jednačina je

$$\begin{aligned} \psi &= \tilde{\psi}(E, \theta), \\ T_R &= \varrho_0 F \tilde{\psi}_E(E, \theta), \\ \eta &= -\tilde{\psi}_\theta(E, \theta), \\ q &= \hat{q}(E, \theta, G). \end{aligned} \tag{3.35}$$

I drugi pogodni redukovani oblici konstitutivnih jednačina se izvode i koriste pri rešavanju ili analizi pojedinih problema termoelastičnih materijala.

4. RAZNA TERMODINAMIČKA RAZMATRANJA

i) Iz (5.12.16) i (2.8) se vidi da unutrašnja energija zadovoljava konstitutivnu jednačinu oblika

$$\varepsilon = \hat{\varepsilon}(F, \theta), \tag{4.1}$$

gde je

$$\hat{\varepsilon}(F, \theta) = \hat{\psi}(F, \theta) + \theta \hat{\eta}(F, \theta). \tag{4.2}$$

Označimo sa $C(F, \theta)$ veličinu $\hat{\varepsilon}_\theta(F, \theta)$, tj.

$$C(F, \theta) \equiv \hat{\varepsilon}_\theta(F, \theta). \tag{4.3}$$

Tako definisanu veličinu $C(F, \theta)$ nazivamo *specifična toplota* pri konstantnoj deformaciji.

Iz (4.2) i (4.3) se vidi da je

$$C(\boldsymbol{F}, \theta) = \hat{\psi}_\theta(\boldsymbol{F}, \theta) + \hat{\eta}(\boldsymbol{F}, \theta) + \theta\hat{\eta}_\theta(\boldsymbol{F}, \theta)$$

ili

$$C(\boldsymbol{F}, \theta) = \theta\hat{\eta}_\theta(\boldsymbol{F}, \theta), \tag{4.4}$$

s obzirom na (2.8).

Dalje ćemo pretpostaviti da je

$$C(\boldsymbol{F}, \theta) > 0 \tag{4.5}$$

za svako $(\boldsymbol{F}, \theta)$. Pošto je $\theta > 0$, iz (4.4) i (4.5) sledi da je $\hat{\eta}(\boldsymbol{F}, \theta)$ glatka invertibilna funkcija po θ za svaki izbor $\boldsymbol{F}$. To znači da je moguće izraziti θ kao funkciju od η, tj.

$$\theta = \bar{\theta}(\boldsymbol{F}, \eta), \tag{4.6}$$

što nam omogućuje da konstitutivne jednačine (2.6) i $(1.5)_3$ pišemo u obliku

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \bar{\varepsilon}(\boldsymbol{F}, \eta), \\ \boldsymbol{T} &= \bar{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{F}, \eta), \\ \theta &= \bar{\theta}(\boldsymbol{F}, \eta), \\ \boldsymbol{q} &= \bar{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{F}, \eta, \boldsymbol{G}), \end{aligned} \tag{4.7}$$

gde je, npr.,

$$\bar{\varepsilon}(\boldsymbol{F}, \eta) = \hat{\varepsilon}[\boldsymbol{F}, \bar{\theta}(\boldsymbol{F}, \eta)]. \tag{4.8}$$

Takođe je, s obzirom na (5.12.16),

$$\bar{\varepsilon}(\boldsymbol{F}, \eta) = \hat{\psi}[\boldsymbol{F}, \bar{\theta}(\boldsymbol{F}, \eta)] + \eta\bar{\theta}(\boldsymbol{F}, \eta) \tag{4.9}$$

odakle se dobija

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_{\boldsymbol{F}} &= \hat{\psi}_{\boldsymbol{F}} + \hat{\psi}_{\bar{\theta}}\bar{\theta}_{\boldsymbol{F}} + \eta\bar{\theta}_{\boldsymbol{F}} \\ \bar{\varepsilon}_\eta &= \hat{\psi}_{\bar{\theta}}\bar{\theta}_\eta + \bar{\theta} + \eta\bar{\theta}_\eta. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Iz ovih izraza, (2.7) i (2.8), lako je pokazati da (4.7) možemo pisati u obliku

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \bar{\varepsilon}(\boldsymbol{F}, \eta), \\ \boldsymbol{T} &= \varrho\boldsymbol{F}\bar{\varepsilon}_{\boldsymbol{F}}^T(\boldsymbol{F}, \eta), \\ \theta &= \bar{\varepsilon}_\eta(\boldsymbol{F}, \eta), \\ \boldsymbol{q} &= \bar{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{F}, \eta, \boldsymbol{G}). \end{aligned} \tag{4.11}$$

s obzirom da je

$$\bar{\varepsilon}_{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{F}, \eta) = \hat{\psi}_{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{F}, \theta). \tag{4.12}$$

Saglasno sa principom materijalne indiferentnosti konstitutivne jednačine (4.11) moraju biti nezavisne od posmatrača. To znači da mora biti

$$
\begin{aligned}
\bar{\varepsilon}(\boldsymbol{QF}, \eta) &= \bar{\varepsilon}(\boldsymbol{F}, \eta),\\
\boldsymbol{T}(\boldsymbol{QF}, \eta) &= \boldsymbol{QT}(\boldsymbol{F}, \eta)\,\boldsymbol{Q}^T,\\
\theta(\boldsymbol{QF}, \eta) &= \theta(\boldsymbol{F}, \eta),\\
\bar{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{QF}, \eta, \boldsymbol{G}) &= \boldsymbol{Q}\bar{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{F}, \eta, \boldsymbol{G})
\end{aligned}
\tag{4.13}
$$

za svako regularno $\boldsymbol{F}$, svako $\theta > 0$, svako $\boldsymbol{G}$ i svako ortogonalno $\boldsymbol{Q}$.

S obzirom na (4.11) kao i na identičan oblik relacija (4.13) i (3.16) odmah se može zaključiti da skup konstitutivnih jednačina

$$
\begin{aligned}
\bar{\varepsilon}(\boldsymbol{F}, \eta) &= \check{\varepsilon}(\boldsymbol{C}, \eta),\\
\bar{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{F}, \eta) &= 2\varrho \boldsymbol{F}\check{\varepsilon}_C(\boldsymbol{C}, \theta)\,\boldsymbol{F}^T\\
\bar{\theta}(\boldsymbol{F}, \eta) &= \check{\varepsilon}_\theta(\boldsymbol{C}, \theta),\\
\bar{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{F}, \eta, \boldsymbol{G}) &= \boldsymbol{F}\check{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{C}, \theta, \boldsymbol{G}),
\end{aligned}
\tag{4.13a}
$$

identički zadovoljava (4.13), pa prema tome, takođe predstavlja *opšte konstitutivne jednačine termoelastičnog materijala.*

ii) U slučaju *nestišljivog termoelastičnog materijala* konstitutivna jednačina za napon $(2.6)_2$ se zamenjuje jednačinom

$$\boldsymbol{T} = -p\boldsymbol{I} + \boldsymbol{T}_E(\boldsymbol{F}, \theta) \tag{4.14}$$

gde je p neodređeni hidrostatički pritisak. Tenzor $\boldsymbol{T}_E$ je određen samo gradijentom deformacije koji zadovoljava uslov nestišljivosti

$$\det \boldsymbol{F} = 1 \text{ ili } tr\, \boldsymbol{D} = 0. \tag{4.14a}$$

Na osnovu toga sledi da deo napona koji karakteriše hidrostatički pritisak ne doprinosi ništa članu $tr\, \boldsymbol{TD}$, pa prema tome ni entropijskoj nejednačini. Tada entropijska nejednačina nameće ograničenja samo na $\boldsymbol{T}_E$ na način koji je iznet u prethodnom odeljku za ukupan napon.

iii) Razmotrimo sada slučaj *termoelastičnog fluida.* Generališemo konstitutivnu jednačinu za elastični fluid čineći sledeće konstitutivne pretpostavke

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{T} &= -p(\varrho, \theta, \boldsymbol{g})\,\boldsymbol{I}\\
\psi &= \hat{\psi}(\varrho, \theta, \boldsymbol{g})\\
\eta &= \hat{\eta}(\varrho, \theta, \boldsymbol{g})\\
\boldsymbol{q} &= \hat{\boldsymbol{q}}(\varrho, \theta, \boldsymbol{g}).
\end{aligned}
\tag{4.15}
$$

Iz $(4.15)_2$ se vidi da je

$$\dot{\psi} = \hat{\psi}_\varrho \dot{\varrho} + \hat{\psi}_\theta \dot{\theta} + \hat{\psi}_{\boldsymbol{g}} \dot{\boldsymbol{g}}. \tag{4.16}$$

Takođe je

$$tr\,\boldsymbol{TD} = -p\,tr\,\boldsymbol{D} = \frac{p}{\varrho}\,\dot{\varrho}, \tag{4.17}$$

kada se iskoristi jednačina kontinuiteta $(3.13.9)_2$ u obliku

$$\dot{\varrho} + \varrho\,tr\,\boldsymbol{D} = 0. \tag{4.18}$$

Smenom (4.16—17) u (5.14.10a) i pogodno grupišući članove dobijamo

$$\left(-\varrho\hat{\psi}_\varrho + \frac{p}{\varrho}\right)\dot{\varrho} - \varrho\,(\hat{\psi}_\theta + \eta)\,\dot{\theta} - \varrho\hat{\psi}_{\boldsymbol{g}}\cdot\dot{\boldsymbol{g}} + \frac{1}{\theta}\,\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{g} \geqslant 0,$$

odakle sledi da je, koristeći teoremu 1, odeljka 2,

$$\begin{aligned} p &= \varrho^2\hat{\psi}_\varrho, \\ \eta &= -\hat{\psi}_\theta, \\ \hat{\psi}_{\boldsymbol{g}} &= 0, \\ \boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{g} &\geqslant 0. \end{aligned} \tag{4.19}$$

Iz (4.15) i (4.19) se odmah može zaključiti da konstitutivne jednačine za napon, specifičnu slobodnu energiju i specifičnu entropiju zadovoljavaju princip materijalne indiferentnosti. Isti princip zahteva da funkcija reagovanja $\hat{\boldsymbol{q}}$ vektora toplotnog fluksa zadovoljava relaciju

$$\boldsymbol{Q}\hat{\boldsymbol{q}}\,(\varrho, \theta, \boldsymbol{g}) = \hat{\boldsymbol{q}}\,(\varrho, \theta, \boldsymbol{Qg}), \tag{4.20}$$

za svako $\varrho > 0$, $\theta > 0$, svako $\boldsymbol{g}$ i svako ortogonalno $\boldsymbol{Q}$.

Na osnovu teoreme o reprezentaciji izotropnih vektorskih funkcija [vidi Dodatak (10.8.37)] onda sledi da je

$$\boldsymbol{q} = k\,(\varrho, \theta, g)\,\boldsymbol{g}, \tag{4.21}$$

gde je $g^2 = \boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{g}$. Iz (4.21) i (4.19) se vidi da je

$$k\,(\varrho, \theta, g) \geqslant 0. \tag{4.22}$$

Prema tome, u navedenom slučaju, konstitutivne jednačine termoelastičnog fluida glase

$$\begin{aligned} \psi &= \hat{\psi}\,(\varrho, \theta), \\ \boldsymbol{T} = -p\,(\varrho, \theta)\,\boldsymbol{I} &= -\varrho^2\hat{\psi}_\varrho\,(\varrho, \theta)\,\boldsymbol{I}, \\ \eta &= -\hat{\psi}_\theta\,(\varrho, \theta), \\ \boldsymbol{q} = k\,(\varrho, \theta, g)\,\boldsymbol{g}, &\qquad k \geqslant 0. \end{aligned} \tag{4.23}$$

Slične relacije dobijamo ako razmenimo uloge θ i η, odnosno ψ i ε.

5. IZVOĐENJE LINEARNE TEORIJE TERMOELASTIČNOSTI

Prethodno ćemo sumirati neke izraze i rezultate koje smo do sada razmatrali i izveli, a koji su nam ovde potrebni.

Potpun sistem jednačina polja u nelinearnoj teoriji termoelastičnosti u odnosu na referentnu konfiguraciju $\varkappa$ sastoji se iz:

zakona balansa količine kretanja

$$\operatorname{Div} \boldsymbol{T}_R + \varrho_0 \boldsymbol{f} = \varrho_0 \ddot{\boldsymbol{u}}, \tag{4.9.22}$$

zakona balansa energije

$$\varrho_0 \theta \dot{\eta} = \operatorname{Div} \boldsymbol{q} + \varrho_0 h, \tag{2.17}$$

i konstitutivnih jednačina

$$\begin{aligned} \psi &= \widetilde{\psi}(\boldsymbol{E}, \theta), \\ \boldsymbol{T}_R &= \varrho_0 \boldsymbol{F} \widetilde{\psi}_{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{E}, \theta), \\ \eta &= -\widetilde{\psi}_\theta(\boldsymbol{E}, \theta), \\ \boldsymbol{q} &= \widetilde{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{E}, \theta, \boldsymbol{G}), \end{aligned} \tag{3.35a}$$

gde je

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F} &= \boldsymbol{I} + \nabla \boldsymbol{u} = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{H} \\ 2\boldsymbol{E} &= \boldsymbol{F}^T \boldsymbol{F} - \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{G} &= \operatorname{Grad} \theta. \end{aligned} \tag{5.1}$$

U slučaju kada je reč o polju pomeranja $\varepsilon \boldsymbol{u}$ lako je pokazati, koristeći (7.3.1), (7.3.2) i $(7.3.5)_1$, da je

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}_\varepsilon &= \boldsymbol{I} + \varepsilon \boldsymbol{H}, \\ \boldsymbol{E}_\varepsilon &= \varepsilon \widetilde{\boldsymbol{E}} + \boldsymbol{O}(\varepsilon^2). \end{aligned} \tag{5.2}$$

Slično tome možemo pisati

$$\theta_\varepsilon = \theta_0 + \varepsilon \vartheta \tag{5.3}$$

gde je θ_0 uniformno polje temperature u referentnoj konfiguraciji a ϑ polje razlike temperature, tj.

$$\vartheta = \theta - \theta_0. \tag{5.4}$$

Takođe je, s obzirom na (5.3) i uvedeni način obeležavanja

$$\boldsymbol{G}_\varepsilon = \varepsilon \operatorname{Grad} \vartheta = \varepsilon \nabla \vartheta. \tag{5.5}$$

Kao i u slučaju linearne teorije elastičnosti nas će interesovati ponašanje određenih polja u slučaju kada $\varepsilon \to 0$. Takva polja su funkcija reagovanja u konstitutivnim jednačinama (3.35) za koje pretpostavljamo da su neprekidne i diferencijabilne funkcije skupa ili podskupa promenljivih $(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{E}, \theta, \boldsymbol{G})$ u okolini $(\boldsymbol{I}, \boldsymbol{O}, \theta_0, \boldsymbol{G})$.

Njihova vrednost zavisi od izbora referentne konfiguracije. Primera radi: za $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{I}$, $\theta = \theta_0$, $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{O}$ tenzor napona je određen relacijom

$$\boldsymbol{T}_R = \varrho_0 \widetilde{\psi}_{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{E}, \theta)\Big|_{\substack{\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}\\ \theta=\theta_0}} = \boldsymbol{T}_R(\boldsymbol{O}, \theta_0). \tag{5.6}$$

Tako određen tenzor $\boldsymbol{T}_R(\boldsymbol{O}, \theta_0)$ predstavlja *rezidualni* ili *zaostali* napon pri uniformnoj temperaturi, tj. napon koji bi telo imalo kada bi se zadržalo u referentnoj konfiguraciji na uniformnoj temperaturi θ_0. U slučaju kada je referentna konfiguracija prirodna konfiguracija, napon je jednak nuli, tj.

$$\boldsymbol{T}_R(\boldsymbol{O}, \theta_0) = \varrho_0 \widetilde{\psi}_{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{E}, \theta)\Big|_{\substack{\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}\\ \theta=\theta_0}} = \boldsymbol{O}. \tag{5.7}$$

Pretpostavke o postojanju prirodne konfiguracije i uniformne temperature su presudne pri izvođenju klasične teorije termoelastičnosti.

Za pomeranje $\varepsilon\boldsymbol{u}$ i polje temperature $\varepsilon\vartheta$ imamo sada

$$\begin{aligned}\widetilde{\psi}_{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{E}, \theta) &= \widetilde{\psi}_{\boldsymbol{E}}[\varepsilon\widetilde{\boldsymbol{E}} + \boldsymbol{O}(\varepsilon^2),\ \theta_0 + \varepsilon\vartheta] \\ &\doteq \varepsilon\left[\left(\frac{\partial^2\widetilde{\psi}}{\partial \boldsymbol{E}^2}\right)\Big|_{\substack{\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}\\ \theta=\theta_0}}[\widetilde{\boldsymbol{E}}] + \left(\frac{\partial^2\widetilde{\psi}}{\partial \boldsymbol{E}\,\partial\theta}\right)_{\substack{\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}\\ \theta=\theta_0}}\vartheta\right]\end{aligned} \tag{5.8}$$

tako da $(3.5a)_2$ postaje

$$\begin{aligned}\boldsymbol{T}_R &= \varrho_0(\boldsymbol{I} + \varepsilon\boldsymbol{H})\,\widetilde{\psi}_{\boldsymbol{E}}[\varepsilon\widetilde{\boldsymbol{E}} + \boldsymbol{O}(\varepsilon^2),\ \theta_0 + \varepsilon\vartheta] \\ &\doteq (\boldsymbol{L}_\varkappa[\widetilde{\boldsymbol{E}}] + \boldsymbol{M}_\varkappa\vartheta)\,\varepsilon\end{aligned} \tag{5.9}$$

gde su

$$\boldsymbol{L}_\varkappa = \varrho_0\left(\frac{\partial^2\widetilde{\psi}}{\partial \boldsymbol{E}^2}\right)\Big|_{\substack{\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}\\ \theta=\theta_0}}, \tag{5.10}$$

$$\boldsymbol{M}_\varkappa = \varrho_0\left(\frac{\partial^2\widetilde{\psi}}{\partial \boldsymbol{E}\,\partial\theta}\right)\Big|_{\substack{\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}\\ \theta=\theta_0}} \tag{5.11}$$

U ovim izrazima $\doteq$ kao i ranije označava tačnost do na $\boldsymbol{O}(\varepsilon^2)$.

Analogno tome $(3.35a)_4$ postaje

$$\widetilde{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{E}, \theta, \boldsymbol{G}) = \widetilde{\boldsymbol{q}}[\varepsilon\widetilde{\boldsymbol{E}} + \boldsymbol{O}(\varepsilon^2),\ \theta_0 + \varepsilon\vartheta,\ \varepsilon\nabla\vartheta]$$

$$\doteq \widetilde{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{O}, \theta_0, 0) + \varepsilon\,\{\widetilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{E}, \theta_0, 0)|_{\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}}[\widetilde{\boldsymbol{E}}] + \widetilde{\boldsymbol{q}}_\theta(\boldsymbol{O}, \theta, 0)|_{\theta=\theta_0}\vartheta + \widetilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{O}, \theta_0, \boldsymbol{G})|_{\boldsymbol{G}=0}\nabla\vartheta\} \tag{5.12}$$

Iz (3.10) i (3.35a) se vidi da je

$$\boldsymbol{q}(\boldsymbol{F}, \theta, \boldsymbol{G}) = \widetilde{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{E}, \theta, \boldsymbol{G}). \tag{5.13}$$

Kao posledica relacije, (5.1) i (3.11) sledi da je

$$\begin{aligned} \tilde{q}(\boldsymbol{E}, \theta, 0) &= 0 \\ \tilde{q}_{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{E}, \theta, 0) &= \boldsymbol{O} \\ q_\theta(\boldsymbol{E}, \theta, 0) &= 0. \end{aligned} \tag{5.14}$$

Smenom ovih izraza u (5.12) dobijamo

$$\tilde{q}(\boldsymbol{E}, \theta, \boldsymbol{G}) \doteq \varepsilon \boldsymbol{K} \nabla \vartheta, \tag{5.15}$$

gde je

$$\boldsymbol{K} = \tilde{q}_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{O}, \theta_0, \boldsymbol{G})|_{\boldsymbol{G}=0}. \tag{5.16}$$

Obeležavajući dalje $\varepsilon \boldsymbol{u}$ i $\varepsilon\vartheta$ sa $\boldsymbol{u}$ i ϑ respektivno i analogno tome njima odgovarajuće veličine, možemo (5.9) i (5.15) pisati u obliku

$$\boldsymbol{T}_R \doteq \boldsymbol{L}_\varkappa[\tilde{\boldsymbol{E}}] + (\theta - \theta_0)\boldsymbol{M}_\varkappa \tag{5.17}$$

$$\boldsymbol{q} \doteq \boldsymbol{K}\boldsymbol{G}. \tag{5.18}$$

Izvršimo kratku analizu ovih konstitutivnih jednačina. Relacija (5.17) predstavlja *Duamel-Nojmanov* (Duhamel-Neumann) *oblik Hukovog zakona.* U njoj se tenzor četvrtog reda $\boldsymbol{L}_\varkappa$, kao i u slučaju linearne elastičnosti naziva *tenzor elastičnosti.* Na način kako je definisan sa (5.10) vidi se da zadovoljava uslove (7.3.13) i (7.3.14) i da prema tome ima, u opštem slučaju, 21 nezavisnu komponentu.

Tenzor drugog reda $\boldsymbol{M}_\varkappa$ je, s obzirom na simetričnost tenzora $\boldsymbol{E}$ i (5.11), takođe simetričan. On predstavlja onaj deo napona koji je izazvan temperaturnim poljem zbog čega se naziva *tenzor temperaturnog napona.*

Zaista, iz (5.17) se vidi da je

$$\boldsymbol{T}_R = (\theta - \theta_0)\boldsymbol{M}_\varkappa \quad \text{za} \quad \tilde{\boldsymbol{E}} = \boldsymbol{O}. \tag{5.19}$$

S obzirom na simetričnost tenzora $\boldsymbol{L}_\varkappa$ i $\boldsymbol{M}_\varkappa$ iz (5.17) se takođe može zaključiti da je prvi Piola-Kirhofov tenzor $\boldsymbol{T}_R$ simetričan u linearnoj teoriji, tj.

$$\boldsymbol{T}_R = \boldsymbol{T}_R^T. \tag{5.20}$$

Tenzore $\boldsymbol{T}_R$ i $\boldsymbol{M}_\varkappa$ možemo razmatrati kao vektore u nekom šestodimenzionom prosto, a $\boldsymbol{L}_\varkappa$ kao simetričan tenzor drugog reda po prvom i drugom paru indeksa. Ako je $\boldsymbol{L}_\varkappa$ regularan tenzor, onda se može rešiti po $\tilde{\boldsymbol{E}}$ tako da dobijamo

$$\tilde{\boldsymbol{E}} = \boldsymbol{\Lambda}_\varkappa[\boldsymbol{T}_R] + (\theta - \theta_0)\boldsymbol{N}_\varkappa, \tag{5.21}$$

gde je

$$\boldsymbol{\Lambda}_\varkappa = \boldsymbol{L}^{-1}, \tag{5.22}$$

$$\boldsymbol{N}_\varkappa = -\boldsymbol{\Lambda}_\varkappa[\boldsymbol{M}_\varkappa]. \tag{5.23}$$

Iz (5.21) se vidi da je

$$\tilde{\boldsymbol{E}} = (\theta - \theta_0)\boldsymbol{N}_\varkappa, \quad \text{kada je} \quad \boldsymbol{T}_R = \boldsymbol{O}. \tag{5.24}$$

To znači da tenzor $\boldsymbol{N}_\varkappa$ određuje deformaciju koja se javlja pri datoj raspodeli temperature za koju je napon jednak nuli. Zbog toga se tenzor $\boldsymbol{N}_\varkappa$ naziva *tenzor termičkog širenja.*

Dalje prelazimo na kratku analizu konstitutivne jednačine vektora toplotnog fluksa. Iz izraza (5.16) kojim je definisan tenzor toplotnog provođenja $\boldsymbol{K}$ ne možemo zaključiti nikakva njegova simetrična svojstva. Ali zato, koristeći (5.18) u Furijeovoj nejednačini (3.9), možemo zaključiti da je on pozitivno semi-definitan.

U cilju kompletiranja klasične teorije potrebno je izvesti linearan oblik jednačine balansa energije (2.17). Očigledno da nam je potrebno da izrazimo $\dot{\eta}$ u navedenom slučaju. Zbog toga koristimo $(3.35a)_3$ odakle dobijamo

$$\eta(\boldsymbol{E}, \theta) = \widetilde{\eta}\,[\varepsilon\widetilde{\boldsymbol{E}} + \boldsymbol{O}(\varepsilon^2),\ \theta_0 + \varepsilon\vartheta] = -\widetilde{\psi}_\theta\,[\varepsilon\widetilde{\boldsymbol{E}} + \boldsymbol{O}(\varepsilon^2),\ \theta_0 + \varepsilon\vartheta]$$

$$\doteq -\psi_\theta(\boldsymbol{O}, \theta_0) - \varepsilon\left[tr\left(\frac{\partial^2\widetilde{\psi}}{\partial\boldsymbol{E}\,\partial\theta}\right)\Bigg|_{\substack{\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}\\ \theta=\theta_0}}\widetilde{\boldsymbol{E}} + \frac{\partial^2\widetilde{\psi}}{\partial\theta^2}\Bigg|_{\substack{\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}\\ \theta=\theta_0}}\vartheta\right]. \qquad (5.25)$$

S obzirom na nezavisnost parametara ε i t iz (5.22) sledi

$$\dot{\eta} = -\varepsilon\left[tr\left(\frac{\partial^2\widetilde{\psi}}{\partial\boldsymbol{E}\,\partial\theta}\right)\Bigg|_{\substack{\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}\\ \theta=\theta_0}}\dot{\widetilde{\boldsymbol{E}}} + \frac{\partial^2\widetilde{\psi}}{\partial\theta^2}\Bigg|_{\substack{\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}\\ \theta=\theta_0}}\dot{\vartheta}\right]. \qquad (5.26)$$

Takođe je

$$\varrho_0\theta\dot{\eta} = \varrho_0(\theta_0 + \varepsilon\vartheta)\,\dot{\eta}\,[\varepsilon\widetilde{\boldsymbol{E}} + \boldsymbol{O}(\varepsilon^2),\ \theta_0 + \varepsilon\vartheta]$$

$$\doteq -\varrho_0\theta_0\varepsilon\left[tr\left(\frac{\partial^2\widetilde{\psi}}{\partial\boldsymbol{E}\,\partial\theta}\right)\Bigg|_{\substack{\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}\\ \theta=\theta_0}}\dot{\widetilde{\boldsymbol{E}}} + \frac{\partial^2\widetilde{\psi}}{\partial\theta^2}\Bigg|_{\substack{\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}\\ \theta=\theta_0}}\dot{\vartheta}\right] \qquad (5.27)$$

$$\doteq -\varepsilon\theta_0\left[tr\,\boldsymbol{M}_\varkappa\dot{\widetilde{\boldsymbol{E}}} + \varrho_0\left(\frac{\partial^2\widetilde{\psi}}{\partial\theta^2}\right)\Bigg|_{\substack{\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}\\ \theta=\theta_0}}\dot{\vartheta}\right],$$

gde smo koristili (5.11).

Iz (5.2) i (5.3) se vidi dalje da je

$$\dot{\boldsymbol{E}}_\varepsilon = \varepsilon\dot{\widetilde{\boldsymbol{E}}} + \boldsymbol{O}(\varepsilon^2) \quad \text{i} \quad \dot{\theta}_\varepsilon = \varepsilon\dot{\vartheta}.$$

Zbog toga, kao i do sada što smo radili, obeležimo $\varepsilon\dot{\widetilde{\boldsymbol{E}}}$ i $\varepsilon\dot{\vartheta}$ sa $\dot{\widetilde{\boldsymbol{E}}}$ i $\dot{\theta}$ respektivno. Tada prethodnu relaciju možemo pisati u obliku

$$\varrho_0\theta\dot{\eta} \doteq -\theta_0\,tr\,\boldsymbol{M}_\varkappa\dot{\widetilde{\boldsymbol{E}}} + c\dot{\theta}, \qquad (5.28)$$

gde je po definiciji

$$c = -\varrho_0\theta_0\left(\frac{\partial^2\widetilde{\psi}}{\partial\theta^2}\right)\Bigg|_{\substack{\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}\\ \theta=\theta_0}} \qquad (5.29)$$

Tako definisana veličina c predstavlja *specifičnu toplotu.*

Smenom (5.28) u (2.17) dobijamo sledeći linearan oblik balansa energije

$$c\dot{\theta} \doteq \theta_0 \, tr \, \boldsymbol{M}_\varkappa \dot{\widetilde{\boldsymbol{E}}} + \operatorname{Div} \boldsymbol{q} + \varrho_0 h, \tag{5.30}$$

gde je $\boldsymbol{q}$ dato sa (5.18).

Time smo kompletirali klasičnu teoriju termoelastičnosti. Ili preciznije, jednačine (4.9.21), (5.30), (5.17), (5.18) i $\widetilde{\boldsymbol{E}} = \frac{1}{2}(\nabla \boldsymbol{u} + \nabla \boldsymbol{u}^T)$ određuju *osnovne jednačine linearizovane teorije termoelastičnosti*. Radi preglednosti navedimo ih

$$\begin{aligned} \operatorname{Div} \boldsymbol{T}_R + \varrho_0 \boldsymbol{f} &= \varrho_0 \ddot{\boldsymbol{u}} \\ c\dot{\theta} &= \theta_0 \, tr \, \boldsymbol{M}_\varkappa \dot{\widetilde{\boldsymbol{E}}} + \operatorname{Div} \boldsymbol{q} + \varrho_0 h \\ \boldsymbol{T}_R &= \boldsymbol{L}_\varkappa [\widetilde{\boldsymbol{E}}] + (\theta - \theta_0) \boldsymbol{M}_\varkappa \\ \boldsymbol{q} &= \boldsymbol{K}\boldsymbol{G} \\ \widetilde{\boldsymbol{E}} &= \frac{1}{2}(\nabla \boldsymbol{u} + \nabla \boldsymbol{u}^T). \end{aligned} \tag{5.31}$$

Važno je uočiti da materijalne funkcije $\boldsymbol{L}_\varkappa$, $\boldsymbol{M}_\varkappa$, $\boldsymbol{K}$, c i ϱ_0 u opštem slučaju zavise od θ_0. Takođe mogu zavisiti i od položaja čestice X ako telo nije homogeno.

Zbog složenosti određivanja rešenja sistema jednačina (5.31) čine se dalja dodatna uprošćenja. Navedimo dva od njih koja se često koriste. Prvo se zasniva na zanemarivanju člana $\theta_0 \, tr \, \boldsymbol{M}_\varkappa \dot{\widetilde{\boldsymbol{E}}}$ u jednačini balansa energije. U tom slučaju se u jednačini za energiju javlja samo termički uticaj zbog čega je takva teorija poznata pod imenom *nespregnuta* teorija linearne termoelastičnosti. Drugo uprošćenje se dobija zanemarivanjem člana $\varrho_0 \ddot{\boldsymbol{u}}$ u jednačini balansa količine kretanja. Kao rezultat toga se dobija *kvazi-statička* teorija. U praksi se ova dva uprošćenja čine obično jednovremeno.

6. TEOREMA O SNAZI I ENERGIJI

Izraz

$$\int_V \operatorname{Div} \boldsymbol{T}_R \cdot \dot{\boldsymbol{u}} \, dV = \int_S \boldsymbol{T}_R \boldsymbol{N} \cdot \dot{\boldsymbol{u}} dA - \int_V tr \, (\boldsymbol{T}_R \nabla \dot{\boldsymbol{u}}) \, dV, \tag{6.1}$$

koji smo koristili u okviru dokaza leme odeljka 5 glave VII važi u opštem slučaju. Njegov dalji oblik zavisi od oblika konstitutivne jednačine za $\boldsymbol{T}_R$. Tako se u slučaju linearne teorije termoelastičnosti podintegralna funkcija zapreminskog integrala desne strane može korišćenjem $(5.31)_3$ pisati u obliku

$$\begin{aligned} tr \, (\boldsymbol{T}_R \nabla \dot{\boldsymbol{u}}) &= tr \, (\dot{\widetilde{\boldsymbol{E}}} \boldsymbol{L}_\varkappa [\widetilde{\boldsymbol{E}}] + \vartheta \boldsymbol{M}_\varkappa \dot{\widetilde{\boldsymbol{E}}}) \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} tr \, (\widetilde{\boldsymbol{E}} \boldsymbol{L}_\varkappa [\widetilde{\boldsymbol{E}}]) + \vartheta \, tr \, \boldsymbol{M}_\varkappa \dot{\widetilde{\boldsymbol{E}}}, \end{aligned} \tag{6.2}$$

s obzirom na simetrična svojstva tenzora $\boldsymbol{L}_\varkappa$ i $\boldsymbol{M}_\varkappa$, $(5.31)_5$ i (5.4).

Dalje se može, pomoću $(5.31)_2$, pokazati da je

$$\begin{aligned}\vartheta \, tr\, \boldsymbol{M}_{\varkappa}\dot{\tilde{\boldsymbol{E}}} &= \frac{c}{\theta_0}\vartheta\dot{\vartheta} - \frac{\vartheta}{\theta_0}(\operatorname{Div}\boldsymbol{q} + \varrho_0 h) \\ &= \frac{c}{2\theta_0}\frac{d}{dt}\vartheta^2 - \frac{1}{\theta_0}[\operatorname{Div}(\vartheta\boldsymbol{q}) - \boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{G} + \varrho_0\vartheta h] \\ &= \frac{c}{2\theta_0}\frac{d}{dt}\vartheta^2 - \frac{1}{\theta_0}[\operatorname{Div}(\vartheta\boldsymbol{q}) - \boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{K}\boldsymbol{G} + \varrho_0\vartheta h],\end{aligned} \tag{6.3}$$

gde smo koristili (5.4) i $(5.31)_4$.

Iz (6.2) i (6.3) se sada vidi da je

$$\begin{aligned}\int_V tr(\boldsymbol{T}_R\nabla\dot{\boldsymbol{u}})dV = \dot{\mathcal{U}}(\tilde{\boldsymbol{E}},\vartheta) - \frac{1}{\theta_0}\int_S \vartheta\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{N}\,dA \\ - \frac{1}{\theta_0}\int_V \varrho_0\vartheta h dV + \frac{1}{\theta_0}\int_V \boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{K}\boldsymbol{G}\,dV,\end{aligned} \tag{6.4}$$

gde smo koristili teoremu o divergenciji i gde je

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2}\int_V \left\{tr(\tilde{\boldsymbol{E}}\boldsymbol{L}_{\varkappa}[\tilde{\boldsymbol{E}}]) + \frac{c}{\theta_0}\vartheta^2\right\} dV. \tag{6.5}$$

Uvodeći dalje oznake

$$\begin{aligned}\boldsymbol{s} &= \boldsymbol{T}_R\boldsymbol{N}, \\ q &= \boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{N},\end{aligned} \tag{6.6}$$

za površinski napon i toplotni fluks u referentnoj konfiguraciji, smenom (6.4) u (6.1) dobijamo da je

$$\begin{aligned}\int_V \operatorname{Div}\boldsymbol{T}_R\cdot\dot{\boldsymbol{u}}\,dV = \int_S \boldsymbol{s}\dot{\boldsymbol{u}}\,dA + \frac{1}{\theta_0}\int_S \vartheta q\,dA - \dot{\mathcal{U}} \\ + \frac{1}{\theta_0}\int_V \varrho_0\vartheta\, h\,dV - \frac{1}{\theta_0}\int_V \boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{K}\boldsymbol{G}\,dV.\end{aligned} \tag{6.7}$$

To nam omogućuje da postavimo ***teoremu*** *o snazi i energiji:*

Neka je $\{\boldsymbol{u}, \tilde{\boldsymbol{E}}, \boldsymbol{T}_R, \vartheta, \boldsymbol{G}, \boldsymbol{q}\}$ termoelastični proces koji odgovara dejstvu spoljnih termičkih i mehaničkih efekata datih skupovima veličina $\{h, q\}$ i $\{\boldsymbol{f}, \boldsymbol{s}\}$ respektivno. Onda je

$$\begin{aligned}\int_S \boldsymbol{s}\cdot\dot{\boldsymbol{u}}\,dA + \int_V \varrho_0\boldsymbol{f}\cdot\dot{\boldsymbol{u}}\,dV + \frac{1}{\theta_0}\int_S \vartheta q\,dA \\ + \frac{1}{\theta_0}\int_V \varrho_0\vartheta h\,dV - \frac{1}{\theta_0}\int_V \boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{K}\boldsymbol{G}\,dV = \dot{\mathcal{T}},\end{aligned} \tag{6.8}$$

gde je $\mathcal{T}$ ukupna energija definisana izrazom

$$\mathcal{T} \equiv \mathcal{U} + \mathcal{K} = \frac{1}{2} \int_V \left\{ \varrho_0 \dot{\boldsymbol{u}} \cdot \dot{\boldsymbol{u}} + tr\,(\tilde{\boldsymbol{E}} \boldsymbol{L}_\times [\tilde{\boldsymbol{E}}]) + \frac{c}{\theta_0} \vartheta^2 \right\} dV. \tag{6.9}$$

Dokaz:

Već smo ranije u okviru dokaza leme odeljka 5 glave VII pokazali da je

$$\int_V \mathrm{Div}\, \boldsymbol{T}_R \cdot \dot{\boldsymbol{u}} dV + \int_V \varrho_0 \boldsymbol{f} \cdot \dot{\boldsymbol{u}}\, dV = \dot{\mathcal{K}}$$

što važi u opštem slučaju. Koristeći ovaj izraz u (6.7), dobijamo (6.8) i (6.9). □

Iz (6.8) sledi vrlo važna nejednakost

$$\int_S \boldsymbol{s} \cdot \dot{\boldsymbol{u}}\, dA + \int_V \varrho_0 \boldsymbol{f} \cdot \dot{\boldsymbol{u}}\, dV + \frac{1}{\theta_0} \int_S \vartheta q\, dA$$

$$+ \frac{1}{\theta_0} \int_V \varrho \vartheta h\, dV - \mathcal{T} \geqslant 0, \tag{6.10}$$

s obzirom da je tenzor toplotne provodljivosti pozitivno semi-definitan. Ona nam omogućuje da postavimo sledeću *posledicu teoreme* o snazi i energiji koja je od suštinskog značaja za egzistenciju jedinstvenosti rešenja mešovitog problema linearne termoelastičnosti.

Neka je $\{\boldsymbol{u}, \tilde{\boldsymbol{E}}, \boldsymbol{T}_R, \vartheta, \boldsymbol{G}, \boldsymbol{q}\}$ termoelastični proces koji odgovara dejstvu spoljnih termičkih i mehaničkih efekata $\{h, q\}$ i $\{\boldsymbol{f}, \boldsymbol{s}\}$ respektivno. Pretpostavimo da je $\boldsymbol{s} \cdot \dot{\boldsymbol{u}} = \vartheta q = 0$ na $S_0 \times [0, t_0)$ i da je $\boldsymbol{f} = 0$, $h = 0$ na $V \times [0, t_0)$. Onda je

$$\mathcal{T}(t) \leqslant \mathcal{T}(0), \quad 0 \leqslant t < t_0. \tag{6.11}$$

Grubo govoreći ova nejednačina tvrdi da totalna energija izolovanog tela opada sa vremenom.

7. MEŠOVITI PROBLEM LINEARNE TERMOELASTIČNOSTI. JEDINSTVENOST REŠENJA

Pri rešavanju osnovnih jednačina (5.31) linearizovane teorije termoelastičnosti mi pretpostavljamo da su *poznate veličine*

1) zapreminska sila $\boldsymbol{f}$ i specifična proizvodnja toplote h — neprekidni na $V \times [0, t_0)$;
2) početno pomeranje $\boldsymbol{u}_0$, brzina $\boldsymbol{v}_0$ i temperatura ϑ_0 — neprekidni u V;
3) pomeranje $\hat{\boldsymbol{u}}$ — neprekidno na $S_1 \times [0, t_0)$;
4) površinski napon $\hat{\boldsymbol{S}}$ — regularan na $S_2 \times [0, t_0)$ i neprekidan po vremenu;
5) površinska temperatura $\hat{\vartheta}$ — neprekidna na $S_3 \times [0, t_0)$;
6) površinski toplotni fluks $\hat{q}$ — regularan na $S_4 \times [0, t_0)$ i neprekidan po vremenu.

Pri tome pretpostavljamo da je $S = S_1 \cup S_2 = S_3 \cup S_4$ i da su površi S_1 i S_2, odnosno, S_3 i S_4 komplementarne u odnosu na S.

Onda se *mešoviti problem* linearne termoelastičnosti sastoji u nalaženju termoelastičnog procesa $\{\boldsymbol{u}, \widetilde{\boldsymbol{E}}, \boldsymbol{T}_R, \vartheta, \boldsymbol{G}, \boldsymbol{q}\}$ koji odgovara zapreminskoj sili $\boldsymbol{b}$ i specifičnoj proizvodnji toplote h i koji zadovoljava:

početne uslove

$$\boldsymbol{u}(\cdot, 0) = \boldsymbol{u}_0; \quad \dot{\boldsymbol{u}}(\cdot, 0) = \boldsymbol{v}_0; \quad \vartheta(\cdot, 0) = \vartheta_0 \text{ u } V,$$

granične uslove

po pomeranju

$$\boldsymbol{u} = \widehat{\boldsymbol{u}} \qquad na\ S_1 \times [0, t_0),$$

po naponu

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{T}_R \boldsymbol{N} = \widehat{\boldsymbol{S}} \quad na\ S_2 \times [0, t_0),$$

po temperaturi

$$\vartheta = \widehat{\vartheta} \qquad na\ S_3 \times [0, t_0),$$

po toplotnom fluksu

$$q = \boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{N} = \widehat{q} \quad na\ S_4 \times [0, t_0).$$

Ako takav termoelastični proces postoji, onda se on naziva *rešenje mešovitog problema.*

Da je takvo rešenje jednoznačno tvrdi ***teorema*** *o jedinstvenosti rešenja mešovitog problema:*

> *Neka je tenzor elastičnosti $\boldsymbol{L}_\varkappa$ pozitivno semi-definitan i neka je specifična toplota pozitivna. Onda mešoviti problem ima najviše jedno rešenje.*

Dokaz: Pretpostavimo da postoje dva rešenja. Onda njihova razlika $\{\boldsymbol{u}, \widetilde{\boldsymbol{E}}, \boldsymbol{T}_R, \vartheta, \boldsymbol{G}, \boldsymbol{q}\}$ odgovara početnim i graničnim uslovima koji su svi nule tako da je

$$\boldsymbol{u}(\cdot, 0) = \dot{\boldsymbol{u}}(\cdot, 0) = 0, \quad \vartheta(\cdot, 0) = 0 \quad \text{u } V \tag{7.1}$$

i

$$\boldsymbol{s} \cdot \dot{\boldsymbol{u}} = q = \vartheta = 0 \text{ na } S \times [0, t_0), \qquad \boldsymbol{f} = 0,\ h = 0. \tag{7.2}$$

Koristeći (7.2) i (6.10) u (6.11) dobijamo da je

$$\mathcal{T}(t) = \frac{1}{2} \int_V \left\{ \varrho_0 \dot{\boldsymbol{u}} \cdot \dot{\boldsymbol{u}} + tr\,(\widetilde{\boldsymbol{E}} \boldsymbol{L}_\varkappa [\widetilde{\boldsymbol{E}}]) + \frac{c}{\theta_0} \vartheta^2 \right\} dv \leqslant \mathcal{T}(0), \quad 0 \leqslant t \leqslant t_0. \tag{7.3}$$

Međutim, iz (7.1) i (6.9) se vidi da je

$$\mathcal{T}(0) = 0,$$

pa je prema tome i

$$\mathcal{T}(t) = 0, \quad 0 \leqslant t < t_0,$$

jer je $\varrho_0 > 0$, $tr\, \widetilde{\boldsymbol{E}} \boldsymbol{L}_\varkappa [\widetilde{\boldsymbol{E}}] \geqslant 0$ i $c > 0$.

Kao posledica toga mora biti

$$\dot{\boldsymbol{u}} = 0, \quad \vartheta = 0 \qquad \text{na } V \times [0, t_0).$$

Ali, kako je $\boldsymbol{u}$ jednako nuli u početnom trenutku, sledi da je

$$\boldsymbol{u} = 0 \qquad \text{na } V \times [0, t_0).$$

Znači

$$\{\boldsymbol{u}, \widetilde{\boldsymbol{E}}, \boldsymbol{T}_R, \vartheta, \boldsymbol{G}, \boldsymbol{q}\} = \{0, \boldsymbol{O}, \boldsymbol{O}, 0, 0, 0\}. \quad \square$$

8. IZOTROPNI TERMOELASTIČNI MATERIJALI

U slučaju izotropnih materijala tenzori $\boldsymbol{L}_\varkappa$, $\boldsymbol{M}_\varkappa$ i $\boldsymbol{K}$ u konstitutivnim jednačinama (5.17) i (5.18) su izotropni. Preciznije

$$\begin{aligned} \boldsymbol{L}_\varkappa [\widetilde{\boldsymbol{E}}] &= \lambda (tr\, \widetilde{\boldsymbol{E}}) \boldsymbol{I} + 2\mu \widetilde{\boldsymbol{E}} \\ \boldsymbol{M}_\varkappa &= m\boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{K} &= k\boldsymbol{I} \end{aligned} \tag{8.1}$$

Skalari λ i μ su poznate Lameove konstante, m je *modul temperaturskog napona*, a k — *modul toplotne provodljivosti*.

Tada osnovne jednačine linearne termoelastičnosti (5.31) postaju

$$\begin{aligned} \operatorname{Div} \boldsymbol{T}_R + \varrho_0 \boldsymbol{f} &= \varrho_0 \ddot{\boldsymbol{u}} \\ c\dot{\theta} &= m\theta_0 tr \dot{\widetilde{\boldsymbol{E}}} + \operatorname{Div} \boldsymbol{q} + \varrho_0 h \\ \boldsymbol{T}_R &= \lambda (tr\, \widetilde{\boldsymbol{E}}) \boldsymbol{I} + 2\mu \widetilde{\boldsymbol{E}} + m(\theta - \theta_0) \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{q} &= k\boldsymbol{I}. \end{aligned} \tag{8.2}$$

Razmotrimo neke specijalne slučajeve.

Iz $(8.2)_3$ sledi da je za izotropno telo napon jednak *pritisku* kada deformacija iščezava, tj.,

$$\boldsymbol{T}_R = m(\theta - \theta_0) \boldsymbol{I}, \qquad \text{kada je } \widetilde{\boldsymbol{E}} = \boldsymbol{O}. \tag{8.3}$$

Kako je $\mu \neq 0$ i $3\lambda + 2\mu \neq 0$ onda se $(8.2)_3$ može rešiti po $\widetilde{\boldsymbol{E}}$ tako da je

$$\widetilde{\boldsymbol{E}} = \frac{1}{2\mu} \boldsymbol{T}_R - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} (tr\, \boldsymbol{T}_R) \boldsymbol{I} + \alpha (\theta - \theta_0) \boldsymbol{I}, \tag{8.4}$$

gde je

$$\alpha = -\frac{m}{3\lambda + 2\mu}. \tag{8.5}$$

Tako definisano α nazivamo *koeficijent termičiog širenja*. Upoređujući (8.4) sa (5.21) vidimo da je u slučaju izotropnih materijala

$$\boldsymbol{N}_\varkappa = \alpha \boldsymbol{I}. \tag{8.6}$$

Tada (5.24) postaje

$$\widetilde{E} = \alpha(\theta - \theta_0)\,I, \quad \text{kada je } T_R = O, \tag{8.7}$$

tj., deformacija je jednaka *dilataciji* kada napon iščezava.

Pri rešavanju konkretnih problema, osnovne jednačine linearne termoelastičnosti (8.2) se izražavaju preko pomeranja i temperature. Napisane u tom obliku glase

$$\begin{aligned} &\mu\triangle u + (\lambda + \mu)\nabla \operatorname{Div} u + m\nabla\vartheta + \varrho_0 f = \varrho_0 \ddot{u}, \\ &k\triangle\vartheta + m\theta_0 \operatorname{Div}\dot{u} + \varrho_0 h = c\dot{\vartheta}, \end{aligned} \tag{8.8}$$

gde je sada $\nabla=$Grad, $\triangle=$Div Grad i $\vartheta=\theta-\theta_0$. Očigledno da je $(8.8)_1$ *diferencialna jednačina kretanja po pomeranju i temperaturi*, a $(8.8)_2$ *spregnuta jednačina toplotnog provođenja.*

Ovaj sistem jednačina ima u slučaju mešovitog problema jedinstveno rešenje na osnovu teoreme koja je dokazana u prethodnom odeljku.

9. HIPERELASTIČNI MATERIJALI

U slučaju kada su termodinamičke promenljve θ ili η konstantne, tj., u slučaju kada je reč o izotermičkom ili izentropskom kretanju, naponske relacije (2.7) i $(4.11)_2$ odgovaraju čisto mehaničkoj konstitutivnoj jednačini oblika

$$T = \varrho F\sigma_F^T(F), \quad T^k{}_l = \varrho x^k_{;K}\frac{\partial\sigma}{\partial x^l_{;K}}. \tag{9.1}$$

Očigledno da je (9.1) samo specijalan slučaj konstitutivne jednačine (7.1.2) za elastične materijale. Radi definisanosti:

> *Elastični materijal čija konstitutivna jednačina ima oblik* (9.1) *nazivamo* ***hiperelastični materijal.***

Prema tome, hiperelastični materijal je onaj čiji je funkcionel reagovanja izvod skalarne funkcije po gradijentu deformacije. Skalarna funkcija $\sigma(F)$ se često naziva *funkcija energije deformacije* ili *nagomilane energije.*

Saglasno tome iz (2.7) sledi da je u slučaju prostih materijala u termičkoj ravnoteži pri uniformnoj temperaturi funkcija energije deformacije jednaka $\hat{\psi}$. Ona je jednaka funkciji $\bar{\varepsilon}$ u slučaju prostih materijala u termičkoj ravnoteži pri uniformnoj specifičnoj entropiji što sledi iz $(4.11)_2$.

S obzirom na simetričnost tenzora napona T iz (9.1) imamo

$$F\sigma_F^T(F) = \sigma_F(F)\,F^T. \tag{9.2}$$

Ova relacija zajedno sa (4.9.8a) i (9.1) omogućuje nam da dobijemo konstitutivnu jednačinu za prvi Piola-Kirhofov tenzor u obliku

$$T_R = \varrho_0\sigma_F(F), \quad T_R{}_k{}^K = \varrho_0\frac{\partial\sigma}{\partial x^k_{;K}}. \tag{9.3}$$

U slučaju nestišljivih hiperrelastičnih materijala tenzor napona $\boldsymbol{T}$ je definisan izrazom

$$\boldsymbol{T} = -p\boldsymbol{I} + \varrho \boldsymbol{F}\sigma_{\boldsymbol{F}}^{T}(\boldsymbol{F}). \tag{9.4}$$

Ova konstitutivna jednačina sledi iz (4.14) kada se uzme u obzir (9.1). Ona je definisana samo za one vrednosti gradijenta deformacije $\boldsymbol{F}$ za koje je $\det \boldsymbol{F} = 1$.

Sve ovde navedene konstitutivne jednačine moraju zadovoljavati princip materijalne indiferentnosti. Kada je u pitanju funkcija reagovanja koja je određena desnom stranom relacije (9.1) ništa novo ne možemo da izvedemo jer je ceo postupak primene ovog principa već razmatran u trećem odeljku ove glave. Zbog toga samo navodimo modifikovane izraze tog odeljka koji važe u našem slučaju. Takvi su izrazi (3.21), (3.23), (3.24) i (3.25) koji sada glase

$$\sigma(\boldsymbol{F}) = \sigma(\boldsymbol{U}) = \hat{\sigma}(\boldsymbol{C}) \tag{9.5}$$

$$\sigma_{\boldsymbol{F}}^{T}(\boldsymbol{F}) = 2\hat{\sigma}_{\boldsymbol{C}}(\boldsymbol{C})\,\boldsymbol{F}^{T} \tag{9.6}$$

$$\boldsymbol{T} = 2\varrho \boldsymbol{F}\;\hat{\sigma}_{\boldsymbol{C}}(\boldsymbol{C})\,\boldsymbol{F}^{T} \tag{9.7}$$

$$\boldsymbol{T}_{R} = 2\varrho_0 \boldsymbol{F}\;\hat{\sigma}_{\boldsymbol{C}}(\boldsymbol{C}). \tag{9.8}$$

U slučaju linearne teorije iz (5.17) za $\theta = \theta_0$ sledi da je

$$\boldsymbol{T}_{R} = \boldsymbol{L}_{\varkappa}[\widetilde{\boldsymbol{E}}], \tag{9.9}$$

gde je

$$\boldsymbol{L}_{\varkappa} = \varrho_0 \left(\frac{\partial^2 \widetilde{\psi}}{\partial \boldsymbol{E}^2}\right)\Bigg|_{\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}} \tag{9.10}$$

tenzor elastičnosti. Iz (9.10) se vidi da on identički zadovoljava uslove simetričnosti (7.3.13) i (7.3.14) i da ima 21 nezavisnu komponentu. U teoriji hiperelastičnih materijala ili Grinovoj teoriji u kojoj, po pretpostavci, postoji energija deformacije, to će biti uvek slučaj.

Za razliku od ove teorije, linearna Košijeva teorija ne pretpostavlja postojanje funkcije energije deformacije. U takvoj teoriji tenzor elastičnosti $\boldsymbol{L}_{\varkappa}$ ima 36 nezavisnih komponenata jer ne postoji osnova po kojoj bi se moglo zaključiti da $\boldsymbol{L}_{\varkappa}$ zadovoljava uslov simetričnosti (7.3.14).

10. GRUPA IZOTROPIJE ZA FUNKCIJU ENERGIJE DEFORMACIJE

Grupa izotropije $g_{\varkappa}$ elastičnog materijala za datu česticu i datu referentnu konfiguraciju $\varkappa$ se dobija određivanjem svih unimodularnih tenzora $\boldsymbol{H}$ za koje (7.1.15) važi za svako regularno $\boldsymbol{F}$. Za hiperelastične materijale, iz (9.1) i (9.2) sledi da (7.1.15) glasi

$$\begin{aligned}\sigma_{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{F})\,\boldsymbol{F}^{T} &= \sigma_{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{F}\boldsymbol{H})\,(\boldsymbol{F}\boldsymbol{H})^{T} \\ &= \sigma_{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{F}\boldsymbol{H})\,\boldsymbol{H}^{T}\boldsymbol{F}^{T},\end{aligned} \tag{10.1}$$

odakle se dobija

$$\sigma_F(F) = \sigma_F(FH)\, H^T. \tag{10.2}$$

Za fiksno H ova jednačina se može integraliti tako da dobijamo

$$\sigma(F) = \sigma(FH) + \varphi(H). \tag{10.3}$$

Za $F = I$ imamo $\varphi(H) = \sigma(I) - \sigma(H)$ tako da (10.3) postaje

$$\sigma(F) = \sigma(FH) + \sigma(I) - \sigma(H). \tag{10.4}$$

Prema tome elementi grupe izotropije $g_\varkappa$ su svi unimodularni tenzori H za koje je (10.4) identički zadovoljeno po F.

Definicija: *U slučaju funkcije energije deformacije σ hiperelastičnog materijala, grupa izotropije g_σ je, saglasno sa razmatranjima glave VI, odnosno VII, grupa svih unimodularnih tenzora za koje je*

$$\sigma(F) = \sigma(FH) \tag{10.5}$$

zadovoljeno za svako regularno F.

Sa fizičkog stanovišta, razlika između grupe izotropije $g_\varkappa$ i g_σ je u sledećem:

Elementi grupe $g_\varkappa$ određuju deformacije koje materijal iz referentne konfiguracije $\varkappa$ prevode u druge konfiguracije koje se ne mogu razlikovati od referentne na osnovu bilo koje simetričnosti koja se odnosi na napon.

Elementima, pak, grupe g_σ odgovaraju konfiguracija između kojih se ne može ustanoviti razlika pomoću eksperimenata koji se odnose na energiju.

U opštem slučaju, ove dve grupe nisu iste, tj. $g_\varkappa \neq g_\sigma$. Ako je (10.5) zadovoljeno za neko posebno H, onda stavljajući $F = I$ dobijamo da je $\sigma(I) = \sigma(H)$. Tada se za bilo koje F (10.4) svodi na (10.5). Znači svako takvo H zadovoljava (10.4), tj. u tom slučaju je $g_\sigma \subset g_\varkappa$.

Razmotrimo slučajeve kada je $g_\sigma = g_\varkappa$. Prvo, na osnovu (6.6.9) se vidi da za funkciju energije deformacije $\sigma_\varkappa$ i $\sigma_{\hat{\varkappa}}$, koja odgovara dvema referentnim konfiguracijama $\varkappa$ i $\hat{\varkappa}$, važi relacija

$$\sigma_\varkappa(F) = \sigma_{\hat{\varkappa}}(FP^{-1})$$

gde je P, prema (6.6.5), gradijent transformacije referentne konfiguracije $\varkappa$ u $\hat{\varkappa}$. Iz nje sledi da su grupe izotropije g_σ od σ za dve različite referentne konfiguracije vezane relacijom oblika (6.7.7) kojom se izražava Nolovo pravilo. Na osnovu toga sledi da je $g_\varkappa = g_\sigma$ za jednu konfiguraciju ako i samo ako je $g_\varkappa = g_\sigma$ za sve konfiguracije.

Drugo, na osnovu principa materijalne indiferentnosti funkcija energije deformacije mora zadovoljavati relaciju

$$\sigma(F) = \sigma(QF) \tag{10.6}$$

za svako F u domenu definisanosti σ i za svako ortogonalno Q. Ako je $H = Q$, onda iz (10.4) i (10.6) takođe sledi da je $\sigma(H) = \sigma(I)$ tako da se (10.4) ponovo svodi na (10.5). Znači, ortogonalne transformacije u g_σ i $g_\varkappa$ su iste. Ako je materijal čvrsto telo, onda je po definiciji $g_\varkappa \subset o$ kada je referentna konfiguracija neizobličeno stanje. Tada sledi da je $g_\sigma = g_\varkappa$ što se može iskazati rečima:

> *Za hiperelastično čvrsto telo grupa izotropije funkcije energije deformacije je grupa izotropije materijala.*

Ako se dalje u (10.6) izabere $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{R}^T$ i uzme u obzir (2.5.14), onda se dobija da je

$$\sigma(\boldsymbol{F}) = \sigma(\boldsymbol{U}). \tag{10.7}$$

Kao i ranije, umesto tenzora $\boldsymbol{U}$ mi možemo koristiti desni Koši-Grinov tenzor $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{U}^2 = \boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F}$ i pisati

$$\sigma(\boldsymbol{F}) = \sigma(\boldsymbol{U}) = \bar{\sigma}(\boldsymbol{C}). \tag{10.8}$$

Ako se sada uzme da je $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{Q}$, onda se iz (10.7), (10.8) i (10.5) dobija

$$\sigma(\boldsymbol{U}) = \sigma(\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{U}\boldsymbol{Q}) \tag{10.9}$$

ili

$$\bar{\sigma}(\boldsymbol{C}) = \bar{\sigma}(\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{C}\boldsymbol{Q}). \tag{10.10}$$

Prema tome, grupa izotropije hiperelastičnog čvrstog tela u odnosu na neizobličeno referentno stanje je grupa svih ortogonalnih transformacija za koje je funkcija energije deformacije invarijantna ili kratko rečeno, grupa $g_\varkappa$ se sastoji od svih ortogonalnih $\boldsymbol{Q}$ za koje važi (10.9) i (10.10).

Invarijantnost funkcije energije deformacije pod dejstvom grupe izotropije nameće ograničenja na njen mogući oblik. Za izotropne materijale, u tom smislu, možemo izvesti vrlo važan zaključak. On se zasniva na prethodnim opštim razmatranjima, a posebno na pokazanoj činjenici da sve ortogonalne transformacije u $g_\varkappa$ pripadaju takođe i g_σ. U stvari $g_\varkappa \supset o$ ako i samo ako je $g_\sigma \supset o$. Kao posledica toga sledi:

Hiperelastičan materijal je izotropan ako i samo ako je energija deformacije $\sigma(\boldsymbol{U}) = \bar{\sigma}(\boldsymbol{C})$ izotropna funkcija, tj. ortogonalna invarijanta, pri čemu su $\boldsymbol{U}$ i $\boldsymbol{C}$ određeni u odnosu na referentno stanje.

To znači da su, u slučaju izotropnih materijala, (10.9) i (10.10) identiteti po $\boldsymbol{Q}$. Ako u ovim relacijama uzmemo da je $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{R}^T$, onda se, s obzirom na (2.5.16) i (2.7.15), može pokazati da je

$$\sigma(\boldsymbol{F}) = \sigma(\boldsymbol{U}) = \sigma(\boldsymbol{V}) = \bar{\sigma}(\boldsymbol{C}) = \bar{\sigma}(\boldsymbol{B}). \tag{10.11}$$

Prema tome, za izotropne hiperelastične materijale energija deformacije može biti izražena kao izotropna funkcija desnog tenzora izduženja $\boldsymbol{U}$, ili levog tenzora izduženja $\boldsymbol{V}$, ili desnog Koši-Grinovog tenzora $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^T$ ili levog Koši-Grinovog tenzora $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^T$.

Ako se na $\sigma(\boldsymbol{F}) = \bar{\sigma}(\boldsymbol{B}) = \bar{\sigma}(\boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^T)$ primeni pravilo o određivanju gradijenta tenzorske funkcije (vidi Dodatak), onda dobijamo

$$\begin{aligned} tr\,[\sigma_{\boldsymbol{F}}^T(\boldsymbol{F})\,\boldsymbol{A}] &= tr\,[\bar{\sigma}_{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{B})\,(\boldsymbol{A}\boldsymbol{F}^T + \boldsymbol{F}\boldsymbol{A}^T)] \\ &= 2tr\,[\bar{\sigma}_{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{B})\,\boldsymbol{A}\boldsymbol{F}^T] = 2tr\,[\boldsymbol{F}^T\bar{\sigma}_{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{B})\,\boldsymbol{A}]. \end{aligned}$$

Pošto ova jednačina mora da važi za svako $\boldsymbol{A}$, sledi da je

$$\sigma_{\boldsymbol{F}}^T(\boldsymbol{F}) = 2\boldsymbol{F}^T\bar{\sigma}_{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{B}). \tag{10.12}$$

Smenom (10.12) u (9.1) dobijamo da je

$$\boldsymbol{T} = 2\varrho\boldsymbol{B}\bar{\sigma}_{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{B}) = 2\varrho\bar{\sigma}_{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{B})\,\boldsymbol{B}. \tag{10.13}$$

Ova konstitutivna jednačina se može napisati u obliku

$$T = \varrho V \sigma_V(V) = \varrho \sigma_V(V)\, V \tag{10.14}$$

ako se iskoristi identičnost $\bar{\sigma}(B) = \bar{\sigma}(V^2) = \sigma(V)$. Takođe se može pokazati da se, za $\bar{\sigma}(B) = \tilde{\sigma}(B^{-1})$, (10.13) svodi na oblik

$$T = -2\varrho B^{-1}\tilde{\sigma}_{B^{-1}}(B^{-1}) = -2\varrho\tilde{\sigma}_{B^{-1}}(B^{-1})\, B^{-1}. \tag{10.15}$$

Na osnovu teoreme o reprezentaciji (vidi Dodatak) energija deformacije može biti izražena kao funkcija glavnih invarijanti I_V, II_V, III_V tenzora V ili tenzora U, tj.,

$$\sigma(V) = \sigma(U) = \sigma(I_V, II_V, III_V). \tag{10.16}$$

ili kao funkcija glavnih invarijanti I_B, II_B, III_B tenzora B ili C, tj.

$$\bar{\sigma}(B) = \bar{\sigma}(C) = \bar{\sigma}(I_B, II_B, III_B). \tag{10.17}$$

Lako je pokazati da je

$$I_B = I_V^2 - 2II_V, \quad II_B = II_V^2 - 2I_V III_V, \quad III_B = III_V^2. \tag{10.18}$$

Tada iz (10.16—18) sledi da je

$$\sigma(I_V, II_V, III_V) = \bar{\sigma}(I_V^2 - 2II_V, II_V^2 - 2I_V III_V, III_V^2). \tag{10.19}$$

Energija deformacije može takođe biti izražena kao funkcija tri momentne invarijante $\bar{I}_V$, $\overline{II}_V$, $\overline{III}_V$ ili $\bar{I}_B$, $\overline{II}_B$, $\overline{III}_B$ tenzora izduženja ili Koši-Grinovog tenzora, respektivno, ili kao funkcija raznih drugih invarijanti.

Diferencirajući (10.17) po B i koristeći rezultate odeljka u dodatku o gradijentima tenzorske funkcije — preciznije (4.11—12) — možemo (10.13) izraziti u obliku

$$T = \varphi_0 I + \varphi_1 B + \varphi_2 B^2 \tag{2.7}$$

gde je

$$\begin{gathered} \varphi_0 = 2\varrho III_B \frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial III_B}, \quad \varphi_1 = 2\sigma\left(\frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial I_B} + I_B\frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial II_B}\right) \\ \varphi_2 = -2\varrho\frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial II_B}. \end{gathered} \tag{10.20}$$

Za nestišljive izotropne materijale funkcija energije deformacije $\sigma(V) = \bar{\sigma}(B)$ je definisana samo za unimodularne tenzore V ili B, tj., kada je

$$\det V = III_V = 1, \quad \det B = III_B = 1. \tag{10.21}$$

U tom slučaju je

$$T = -pI + \varrho\sigma_V(V)\, V = -pI + \varrho\bar{\sigma}_B(B)\, B, \tag{10.22}$$

gde je

$$\sigma(V) = \sigma(I_V, II_V), \quad \bar{\sigma}(B) = \bar{\sigma}(I_B, II_B) \tag{10.23}$$

s obzirom na (10.16), (10.17) i (10.21).

Sada je lako pokazati da se $(10.22)_2$ svodi na

$$\boldsymbol{T} = -p\boldsymbol{I} + 2\varrho \left(\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial I_{\boldsymbol{B}}} + I_{\boldsymbol{B}} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial II_{\boldsymbol{B}}} \right) \boldsymbol{B} - 2\varrho \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial II_{\boldsymbol{B}}} \boldsymbol{B}^2. \tag{10.24}$$

U slučaju linearne teorije konstitutivna jednačina za izotropne hiperelastične materijale je data sa (7.3.15) kada su u pitanju nestišljivi materijali, odnosno sa (7.4.3) kada su u pitanju stišljivi materijali.

Uopšte, u slučaju linearne teorije, svi rezultati odeljka 3, 4 i 5 glave VII važe i za linearnu teoriju hiperelastičnih materijala.

IX NEKE KLASE PROSTIH FLUIDA

1. OPŠTA RAZMATRANJA

Definicija prostog fluida je data u odeljku 9 glave VI. Zasniva se, kao što smo videli, na dve fizičke pretpostavke:

a) trenutno stanje napona je određeno istorijom gradijenta (funkcije) deformacije,

b) prosti fluid poseduje maksimalno moguću materijalnu simetriju.

Na osnovu toga i aksioma konstitutivne teorije, izveden je redukovani oblik konstitutivne jednačine prostog fluida koji je dat sa (6.9.22) u slučaju stišljivog prostog fluida, odnosno sa (6.9.25) u slučaju nestišljivog prostog fluida. U oba slučaja oblik konstitutivne jednačine je

$$\boldsymbol{T}(t) = -p\boldsymbol{I} + \underset{s=0}{\overset{\infty}{\mathcal{R}}}[\boldsymbol{G}(s)] \tag{1.1}$$

gdje je, s obzirom na (6.8.2),

$$\boldsymbol{G}(s) = \boldsymbol{C}_t(t-s) - \boldsymbol{I} \tag{1.2}$$

Za stišljive fluide ravnotežni pritisak p je određena funkcija gustine ϱ. Pri tome se podrazumeva da i funkcionel reagovanja $\mathcal{R}$ može takođe zavisiti od ϱ kao parametra.

Za nestišljive fluide p je neodređeno, a funkcionel $\mathcal{R}$ je određen do na skalarni funkcionel. Neodređenost $\mathcal{R}$ može biti otklonjena ako se uzme da je

$$tr\, \underset{s=0}{\overset{\infty}{\mathcal{R}}}[\boldsymbol{G}(s)] = 0. \tag{1.3}$$

U tom slučaju se neodređeni pritisak p poklapa sa srednjim normalnim naponom, tj. u tom slučaju je

$$p = -\frac{1}{3}\, tr\, \boldsymbol{T}. \tag{1.4}$$

Vrednost funkcionela reagovanja $\mathcal{R}$ iščezava kada se fluid nalazi u miru. Saglasno tome biće

$$\overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathcal{R}}}(\boldsymbol{O}) = \boldsymbol{O} \tag{1.5}$$

uvek kada je $\boldsymbol{G}(s) = \boldsymbol{O}$. Očigledno da je (1.5) ekvivalentno relaciji (6.9.24). To znači da funkcionel $\mathcal{R}$ opisuje ponašanje fluida u slučaju kada fluid nije u ravnoteži.

Funkcionel reagovanja $\mathcal{R}$ u svakom slučaju mora zadovoljavati uslov izotropnosti, tj.

$$\boldsymbol{Q}\overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathcal{R}}}[\boldsymbol{G}(s)]\,\boldsymbol{Q}^T = \overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathcal{R}}}[\boldsymbol{Q}\boldsymbol{G}(s)\,\boldsymbol{Q}^T] \tag{1.6}$$

za svako ortogonalno $\boldsymbol{Q}$ i sve istorije $\boldsymbol{G}(s)$ u domenu definisanosti $\mathcal{R}$.

Dalja redukcija konstitutivne jednačine nije moguća ukoliko se ne precizira klasa prostih fluida o kojoj je reč. U tom slučaju pogodnije je, umesto opštih razmatranja, direktno pristupiti izvođenju konstitutivne jednačine.

2. RAJNER-RIVLINOVI (REINER-RIVLIN) FLUIDI

Već je ranije bilo reči o elastičnim ili Ojlerovim fluidima koji su se karakterisali konstitutivnom jednačinom oblika

$$\boldsymbol{T} = -p\boldsymbol{I}, \tag{2.1}$$

gde je $p = p(\varrho)$ za stišljive fluide, odnosno, neodređeni hidrostatički pritisak za nestišljive fluide. Odsustvo smičućeg napona kod takvih fluida ukazuje na odsustvo trenja između fluidnih čestica koje utiče na njihova relativna kretanja. Zbog toga se takvi fluidi nazivaju i *neviskozni, idealni* ili *savršeni.*

Kako je mera relativnog kretanja fluidnih čestica određena tenzorom $\boldsymbol{L}$, tj., gradijentom brzine (vidi odeljak 8, glava III), logično je da se takva veličina kao konstitutivna promenjiva javlja u konstitutivnoj jednačini viskoznih fluida. Takva je konstitutivna jednačina

$$\boldsymbol{T} = -p(\varrho)\,\boldsymbol{I} + \widehat{\boldsymbol{T}}(\varrho, \boldsymbol{L}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{x}, t) \tag{2.2}$$

u kojoj smo, radi opštosti, uključili i sve veličine nižeg reda od $\boldsymbol{L}$. Klasa fluida koja se karakteriše ovom konstitutivnom jednačinom očigledno je opštija od Ojlerovih fluida i nije podklasa elastičnih materijala. Za funkciju reagovanja $\widehat{\boldsymbol{T}}$ kojom je određen dodatni napon mi pretpostavljamo, saglasno sa prethodnom diskusijom, da zadovoljava uslov

$$\widehat{\boldsymbol{T}}(\varrho, \boldsymbol{O}, 0, \boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{O}. \tag{2.3}$$

Zavisnost funkcije reagovanja $\widehat{\boldsymbol{T}}$ od skupa promenljivih $\{\varrho, \boldsymbol{L}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{x}, t\}$ omogućuje nam da na ovom primeru ilustrujemo snagu principa materijalne indiferentnosti. Tačnije, primenjujući ovaj princip, pokazaćemo da $\widehat{\boldsymbol{T}}$ ne može da zavisi od $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{x}$ i t.

Zaista, na osnovu principa materijalne indiferentnosti, relacije

$$p(\varrho^*) = p(\varrho)$$

$$Q\widehat{T}(\varrho, L, v, x, t)\, Q^T = \widehat{T}(\varrho^*, L^*, v^*, x^*, t^*) \tag{2.4}$$

moraju biti zadovoljene pri svakom kretanju

$$\begin{aligned} x^* &= Q(t)\, x + c(t) \\ t^* &= t - a, \end{aligned} \tag{2.5}$$

gde su, dakle, $Q(t)$ — proizvoljan ortogonalan tenzor, $c(t)$ — proizvoljan vektor i a — proizvoljna realna konstanta.

Pri takvim kretanjima je

$$\begin{gathered} \varrho^* = \varrho, \\ L^* = QLQ^T + A, \qquad A = \dot{Q}Q^T = -A^T \\ v^* = \dot{c} + Qv + \dot{Q}x \end{gathered} \tag{2.6}$$

s obzirom na (6.3.24), (6.3.27) i (6.3.39).

Očigledno je da je $(2.4)_1$ identičnost, dok se $(2.4)_2$ svodi na relaciju

$$\begin{aligned} Q\widehat{T}(\varrho, L, v, x, t)\, Q^T &= \widehat{T}(\varrho^*, L^*, v^*, x^*, t^*) \\ &= \widehat{T}(\varrho, QLQ^T + A, \dot{c} + Qv + \dot{Q}x, c + Qx, t - a) \end{aligned} \tag{2.7}$$

koja mora biti zadovoljena za svaki ortogonalni tenzor $Q(t)$, svaki vektor $c(t)$ i svaki konstantni skalar a. Prema tome, ova relacija mora da važi i za takav izbor tenzorske funkcije $Q(t)$ za koju je

$$Q = I, \qquad \dot{Q} = -W = -\frac{1}{2}(L - L^T). \tag{2.8}$$

Tada se (2.7) svodi na

$$\widehat{T}(\varrho, L, v, x, t) = \widehat{T}(\varrho, D, \dot{c} - Wx + v, c + x, t - a).$$

Dalje redukovana konstitutivna jednačina se dobija kada se za funkcije $c(t)$ i $\dot{c}(t)$ i konstantu a izabere da su

$$c(t) = -x, \qquad \dot{c}(t) = Wx - v \tag{2.9}$$

i

$$a = t. \tag{2.10}$$

Tada imamo da je

$$\widehat{T}(\varrho, L, v, x, t) = \widehat{T}(\varrho, D), \tag{2.11}$$

tj. funkcija reagovanja $\widehat{T}$ ne može da zavisi od v, x i t. Iz (2.11) i $(2.4)_1$ sledi

$$Q\widehat{T}(\varrho, D)\, Q^T = \widehat{T}(\varrho^*, D^*)$$

ili

$$Q\widehat{T} = (\varrho, \boldsymbol{D})\, Q^T = \widehat{T}(\varrho, QDQ^T) \tag{2.12}$$

s obzirom na $(2.5)_1$ i (6.3.41), koja mora biti zadovoljena za svako ortogonalno $\boldsymbol{Q}$ i svako simetrično $\boldsymbol{D}$.

Fizička interpretacija primene principa materijalne indeferentnosti u ovom slučaju bi bila sledeća:

Posmatrač u položaju $\boldsymbol{x}$ u odnosu na polazni sistem referencije pretpostavlja da tenzor napona zavisi od skupa promenljivih $\{\varrho, \boldsymbol{L}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{x}, t\}$ na način koji je iskazan jednačinom (2.1). Drugi posmatrač u položaju $\boldsymbol{x}^*$ u odnosu na svoj sistem referencije se tako rotira i translatorno kreće u prostoru i vremenu sa materijalom da su u odnosu na njega brzina $\boldsymbol{v}^*$ i tenzor vrtložnosti $\boldsymbol{W}^*$ jednaki nuli. On uočava zavisnost $\widehat{\boldsymbol{T}}$ samo od ϱ i $\boldsymbol{D}$. Ali na osnovu principa materijalne indiferentnosti i svi ostali posmatrači moraju da dođu do istog zaključka kada je u pitanju ponašanje materijala. Prema tome zaključujemo da se (2.2) svodi na

$$\boldsymbol{T} = -p(\varrho)\,\boldsymbol{I} + \widehat{\boldsymbol{T}}(\varrho, \boldsymbol{D}). \tag{2.13}$$

na koji se dalje primenjuje princip materijalne indiferentnosti koji je iskazan relacijom (2.12). Ona, kratko rečeno, kazuje da funkcija reagovanja $\widehat{\boldsymbol{T}}(\varrho, \boldsymbol{D})$ mora biti izotropna funkcija od $\boldsymbol{D}$. Na osnovu fundamentalne teoreme o predstavljanju tenzorske izotropne funkcije sledi da je

$$\widehat{\boldsymbol{T}} = \varphi_0\boldsymbol{I} + \varphi_1\boldsymbol{D} + \varphi_2\boldsymbol{D}^2 \tag{2.14}$$

gde su funkcije φ_k $(k = 0, 1, 2)$ skalarne invarijante glavnih invarijanti tenzora $\boldsymbol{D}$ i gustine ϱ, tj.

$$\varphi_k = \varphi_k(\varrho, I_D, II_D, III_D). \tag{2.15}$$

Lako je sada videti da je uslov (2.3) zadovoljen ako je

$$\varphi_0 = 0 \tag{2.16}$$

kada je $I_D = II_D = III_D = 0$.

Sumirajući ovde izvedene rezultate iskazane relacijama (2.13), (2.14) i (2.16) konačno možemo pisati

$$\begin{gathered} \boldsymbol{T} = -p(\varrho)\,\boldsymbol{I} + \varphi_0\boldsymbol{I} + \varphi_1\boldsymbol{D} + \varphi_2\boldsymbol{D}^2 \\ \varphi_0(\varrho, 0, 0, 0) = 0 \end{gathered} \tag{2.17}$$

što predstavlja najopštiji redukovani oblik konstitutivne jednačine (2.2). Materijali za koje važi ova konstitutivna jednačina nazivaju se *Rajner-Rivlinovi fluidi.*

U slučaju nestišljivog Rajner-Rivlinovog fluida, tj. u slučaju kada je $\varrho = \varrho_0$, (2.17) postaje

$$\boldsymbol{T} = -p\boldsymbol{I} + \varphi_1(II_D, III_D)\,\boldsymbol{D} + \varphi_2(II_D, III_D)\,\boldsymbol{D}^2; \tag{2.18}$$

samo tečenje za koje je $I_D = tr\,\boldsymbol{D} = 0$ je dopustivo.

Napomena: Konstitutivna jednačina (2.13) predstavlja prošireni oblik konstitutivne jednačine

$$\boldsymbol{T} = -p\boldsymbol{I} + \widehat{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{D}), \qquad \widehat{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{O}) = \boldsymbol{O} \tag{2.19}$$

koju je 1845. godine predložio Stoks (Stokes) za nelinearni viskozni fluid. U toku proteklih 100 godina, sve do formulisanja principa materijalne indiferentnosti, nije postojao sistematičan prilaz izvođenja redukovanog oblika (2.18).

U tom periodu bile su predložene razne nelinearne teorije viskoznog fluida od kojih najveći broj nije počivao na čvrstim osnovama konstitutivne teorije mehanike kontinuuma.

3. NJUTNOVI (NEWTON) FLUIDI

Iz (2.17) neposredno sledi da najopštija linearna relacija između tenzora napona i tenzora brzine deformacije, koja je saglasna sa principom materijalne indiferentnosti, glasi

$$\boldsymbol{T} = -p(\varrho)\boldsymbol{I} + \lambda I_{\boldsymbol{D}}\boldsymbol{I} + 2\mu\boldsymbol{D}. \tag{3.1}$$

Koeficijenti λ i μ se nazivaju *koeficijenti viskoznosti*, preciznije μ je *smičući koeficijent viskoznosti*, $\varkappa = \lambda + \frac{2}{3}\mu$ *zapreminski koeficijent viskoznosti.*

Materijali za koje važi konstitutivna jednačina (3.1) nazivaju se *stišljivi Njutnovi fluidi.*

U slučaju kada je reč o nestišljivim fluidima, tj. u slučaju kada je $\varrho = \varrho_0$, iz (3.1) dobijamo da je

$$\boldsymbol{T} = -p\boldsymbol{I} + 2\mu\boldsymbol{D}, \tag{3.2}$$

što predstavlja konstitutivnu jednačinu koja karakteriše *nestišljive Njutnove fluide.* Iz (3.2) se lako pokazuje da je tada

$$p = -\frac{1}{3} tr\,\boldsymbol{T}. \tag{3.3}$$

Konstitutivne jednačine Njutnovog fluida svode se u dva slučaja na

$$\boldsymbol{T} = -p\boldsymbol{I}.$$

Prvi je kada je $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{O}$, tj. kada se fluid kruto kreće, a drugi kada je $\lambda = \mu = 0$. U drugom slučaju linearan viskozni fluid se pretvara u elastičan fluid zbog čega se, saglasno uvedenoj terminologiji, naziva neviskozni ili savršen.

Napomena: Upoređujući jednačine (2.17), (2.18) sa jednačinama (3.1) i (3.2), možemo kazati da je Njutnov viskozni fluid Rajner-Rivlinov fluid kod koga je zavisnost dodatnog (extra) napona, određena funkcijom reagovanja $\hat{\boldsymbol{T}}(\varrho, \boldsymbol{D})$, linearna po tenzoru brzine deformacije $\boldsymbol{D}$. Ustvari, istorijski posmatrano, Njutnov fluid se definisao kao materijal za koji važi konstitutivna jednačina u obliku

$$\boldsymbol{T} = -p\boldsymbol{I} + \mathbf{C}[\boldsymbol{L}] \tag{3.4}$$

gde je $\mathbf{C}$ — linearan operator kojim se tenzor drugog reda preslikava u tenzor drugog reda. Njutnov fluid, sa tog stanovišta je najprostiji i vrlo koristan model viskoznog fluida. Primenom principa materijalne indiferentnosti lako se pokazuje da se (3.4) svodi na

$$\boldsymbol{T} = -p\boldsymbol{I} + \mathbf{C}[\boldsymbol{D}] \tag{3.5}$$

gde je sada **C** — izotropan tenzor četvrtog reda simetričan posebno po prva dva, odnosno, druga dva indeksa. Zbog toga je

$$C_{ijkl} = \lambda g_{ij} g_{kl} + \mu (g_{ik} g_{jl} + g_{il} g_{jk}). \tag{3.6}$$

Smenom ovog izraza u (3.5) dobijamo ponovo (3.1) u slučaju nestišljivog fluida, odnosno (3.2) u slučaju Njutnovog stišljivog fluida jer je tada $I_D = 0$.

4. NAVIJE-STOKSOVE JEDNAČINE. JEDINSTVENOST REŠENJA

Linearna teorija viskoznog fluida zasniva se na jednačini kontinuiteta (3.13.6), jednačinama kretanja (4.8.17), konstitutivnoj jednačini (3.1) i tenzoru brzine deformacije $\boldsymbol{D}$, tj. na jednačinama

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho \boldsymbol{v}) = 0 \\ &\varrho \dot{\boldsymbol{v}} = \operatorname{div} \boldsymbol{T} + \varrho \boldsymbol{f} \\ &\boldsymbol{T} = -p(\varrho)\boldsymbol{I} + \lambda I_D \boldsymbol{I} + 2\mu \boldsymbol{D} \\ &\boldsymbol{D} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{L} + \boldsymbol{L}^T), \quad \boldsymbol{L} = \operatorname{grad} \boldsymbol{v}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Za svođenje ovog sistema jednačina na sažetiji oblik, nužno je odrediti $\dot{\boldsymbol{v}}$ i div $\boldsymbol{D}$ Tako je

$$\dot{\boldsymbol{v}} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\operatorname{grad} \boldsymbol{v})\, \boldsymbol{v} \tag{4.2}$$

dok je

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{div} \boldsymbol{D} &= \operatorname{div} [\operatorname{grad} \boldsymbol{v} + (\operatorname{grad} \boldsymbol{v})^T] \\ &= \operatorname{div}(\operatorname{grad} \boldsymbol{v}) + \operatorname{grad}(\operatorname{div} \boldsymbol{v}) \\ &= \triangle \boldsymbol{v} + \operatorname{grad}(\operatorname{div} \boldsymbol{v}) \end{aligned} \tag{4.3}$$

jer je

$$2d^{ij}{}_{,j} = v^{i,j}{}_{j} + v^{j,i}{}_{j}.$$

Takođe je

$$\operatorname{grad} I_D = \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{v}. \tag{4.4}$$

Tada se div $\boldsymbol{T}$ može izraziti u obliku

$$\operatorname{div} \boldsymbol{T} = -\operatorname{grad} p + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{v} + \mu \triangle \boldsymbol{v}. \tag{4.5}$$

Koristeći (4.2) i (4.5) u (4.1) posmatrani sistem jednačina se svodi na

$$\varrho \left[\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\operatorname{grad} \boldsymbol{v})\, \boldsymbol{v}\right] = -\operatorname{grad} p + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{v} + \mu \triangle \boldsymbol{v} + \varrho \boldsymbol{f}. \tag{4.6}$$

Jednačina (4.6) određuje *Navije-Stoksovu jednačinu stišljivog linearnog viskoznog fluida.*

U slučaju nestišljivog fluida, kada je $\varrho = \varrho_0$, $(4.1)_1$ i (4.6) se svode na jednačine

$$\begin{aligned} \varrho_0 \left[\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\operatorname{grad} \boldsymbol{v})\, \boldsymbol{v}\right] &= \mu \triangle \boldsymbol{v} - \operatorname{grad} p + \varrho_0 \boldsymbol{f} \\ \operatorname{div} \boldsymbol{v} &= 0, \end{aligned} \tag{4.7}$$

koje predstavljaju *Navije-Stoksove jednačine nestišljivog fluida.*

Sistem jednačina (4.7) definiše nelinearni sistem parcijalnih diferencijalnih jednačina po $\boldsymbol{v}$ i pritisku p za date vrednosti μ, ϱ_0 i $\boldsymbol{f}$.

Definišući *kinematičku viskoznost* ν sa

$$\nu = \frac{\mu}{\varrho_0}$$

i pišući

$$\pi = \frac{p}{\varrho_0}, \qquad \boldsymbol{b} = \frac{\boldsymbol{f}}{\varrho_0}$$

možemo Navije-Stoksove jednačine (4.7) pisati u obliku

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\operatorname{grad} \boldsymbol{v})\, \boldsymbol{v} &= \nu(\triangle \boldsymbol{v}) - \operatorname{grad} \pi + \boldsymbol{b}. \\ \operatorname{div} \boldsymbol{v} &= 0. \end{aligned} \tag{4.8}$$

U klasičnom problemu viskoznog tečenja za rešavanje Navije-Stoksovih jednačina (4.8) pretpostavljamo da su

poznati: *zatvorena granična oblast v, kinematička viskoznost $\nu > 0$, polje zapreminske sile $\boldsymbol{b}$ na $v \times [0, \infty)$, početna raspodela brzine $\boldsymbol{v}_0$ u v i granična raspodela brzine $\hat{\boldsymbol{v}}$ na $\mathscr{S} \times [0, \infty)$.*

Traži se:

polje brzine $\boldsymbol{v}$ klase C^2 i polje neprekidnog pritiska π u $v \times [0, \infty)$ koji zadovoljavaju Navije-Stoksove jednačine (4.8), ***početni uslov***

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, 0) = \boldsymbol{v}_0(\boldsymbol{x}) \tag{4.9}$$

za svako $\boldsymbol{x} \in v$ i ***granični uslov***

$$\boldsymbol{v} = \hat{\boldsymbol{v}} \quad \text{na} \quad \mathscr{S} \times [0, \infty). \tag{4.10}$$

Par $(\boldsymbol{v}, \pi)$ koji ima ovde tražena svojstva nazivamo *rešenje* tako formulisanog problema.

Teorema o jedinstvenosti rešenja:

Neka su $(\boldsymbol{v}_1, \pi_1)$ i $(\boldsymbol{v}_2, \pi_2)$ rešenja (istog) problema viskoznog tečenja. Onda je

$$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_2, \quad \pi_1 = \pi_2 + \alpha \tag{4.11}$$

i

$$\operatorname{grad} \alpha = 0. \tag{4.12}$$

Dokaz teoreme zasniva se na sledećoj ***lemi:***

Neka su $\boldsymbol{w}$ i β glatko vektorsko i glatko skalarno polje, respektivno, u v. Pretpostavljamo da je

$$\operatorname{div} \boldsymbol{w} = 0 \tag{4.13}$$

i da je u svakoj tački na $\mathcal{S}$ ili $\boldsymbol{w} = 0$ ili $\beta = 0$. Onda je

$$\int_v \boldsymbol{w} \cdot \operatorname{grad} \beta \, dv = 0. \tag{4.14}$$

Dokaz leme: Koristeći identičnost

$$\boldsymbol{w} \cdot \operatorname{grad} \beta = \operatorname{div} (\beta \boldsymbol{w}) - \beta \operatorname{div} \boldsymbol{w}, \tag{4.15}$$

teoremu o divergenciji i pretpostavke o $\boldsymbol{w}$ i β lako je pokazati da je

$$\int_v \boldsymbol{w} \cdot \operatorname{grad} \beta \, dv = \int_{\mathcal{S}} \beta \boldsymbol{w} \cdot d\boldsymbol{a} - \int_v \beta \operatorname{div} \boldsymbol{w} \, dv = 0$$

čime je lema dokazana.

Dokaz teoreme: Neka je $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2$ i $\alpha = \pi_1 - \pi_2$. Onda je

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, 0) = 0, \quad \boldsymbol{u} = 0 \text{ na } S \times [0, \infty), \quad \operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0 \tag{4.16}$$

pošto su $(\boldsymbol{v}_1, \pi_1)$ i $(\boldsymbol{v}_2, \pi_2)$ rešenja tog problema. Kao takva ona zadovoljavaju jednačine (4.8) tako da je

$$\begin{gathered} \frac{\partial \boldsymbol{v}_k}{\partial t} + (\operatorname{grad} \boldsymbol{v}_k) \boldsymbol{v}_k = \nu \triangle \boldsymbol{v}_k - \operatorname{grad} \pi_k + \boldsymbol{b} \\ \operatorname{div} \boldsymbol{v}_k = 0 \qquad (k = 1, 2). \end{gathered} \tag{4.17}$$

Ako se od sistema jednačina za $k = 1$ oduzme sistem jednačina za $k = 2$ dobijamo, s obzirom na uvedene oznake,

$$\begin{gathered} \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\operatorname{grad} \boldsymbol{v}_1) \boldsymbol{v}_1 - (\operatorname{grad} \boldsymbol{v}_2) \boldsymbol{v}_2 = \nu \triangle \boldsymbol{u} - \operatorname{grad} \alpha \\ \operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0. \end{gathered} \tag{4.18}$$

Kako je

$$(\operatorname{grad} \boldsymbol{v}_1) \boldsymbol{v}_1 = (\operatorname{grad} \boldsymbol{u}) \boldsymbol{v}_1 + (\operatorname{grad} \boldsymbol{v}_2) \boldsymbol{v}_1$$

može se prva od jednačina izraziti u obliku

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\operatorname{grad} \boldsymbol{u}) \boldsymbol{v}_1 + (\operatorname{grad} \boldsymbol{v}_2) \boldsymbol{u} = \nu \triangle \boldsymbol{u} - \operatorname{grad} \alpha. \tag{4.19}$$

Množeći ovu jednačinu skalarno sa $\boldsymbol{u}$ i koristeći identitete

$$\begin{gathered} \boldsymbol{u} \cdot \triangle \boldsymbol{u} = \operatorname{div} [(\operatorname{grad} \boldsymbol{u})^T \boldsymbol{u}] - |\operatorname{grad} \boldsymbol{u}|^2, \\ \boldsymbol{u} \cdot (\operatorname{grad} \boldsymbol{u}) \boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_1 \cdot (\operatorname{grad} \boldsymbol{u})^T \boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}_1 \cdot \operatorname{grad} \left(\frac{\boldsymbol{u}^2}{2}\right), \\ \boldsymbol{u} \cdot (\operatorname{grad} \boldsymbol{v}_2) \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u} \boldsymbol{D}_2 \boldsymbol{u}, \end{gathered} \tag{4.20}$$

gde je

$$\boldsymbol{D}_2 = \frac{1}{2}\,[\text{grad}\,\boldsymbol{v}_2 + (\text{grad}\,\boldsymbol{v}_2)^T],$$

dobijamo

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}\frac{\partial \boldsymbol{u}^2}{\partial t} + \boldsymbol{v}_1 \cdot \text{grad}\left(\frac{\boldsymbol{u}^2}{2}\right) + \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{D}_2\boldsymbol{u} \\ = \nu\, \text{div}\,[(\text{grad}\,\boldsymbol{u})^T\,\boldsymbol{u}] - \nu\,|\text{grad}\,\boldsymbol{u}|^2 - \boldsymbol{u} \cdot \text{grad}\,\alpha.\end{gathered} \tag{4.21}$$

Ako integralimo ovu jednakost po v dobićemo

$$\frac{1}{2}\int_v \frac{\partial \boldsymbol{u}^2}{\partial t}\,dv + \int_v \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{D}_2\boldsymbol{u}\,dv = -\nu \int_v |\text{grad}\,\boldsymbol{u}|^2\,dv \tag{4.22}$$

jer je

$$\int_v \boldsymbol{v}_1 \cdot \text{grad}\left(\frac{\boldsymbol{u}^2}{2}\right) dv = 0$$

$$\int_v \text{div}\,[(\text{grad}\,\boldsymbol{u})^T\,\boldsymbol{u}]\,dv = \int_{\mathscr{S}} (\text{grad}\,\boldsymbol{u})^T\,\boldsymbol{u}\,da = 0$$

$$\int_v \boldsymbol{u} \cdot \text{grad}\,\alpha\,dv = 0$$

s obzirom na lemu, (4.16), $(4.17)_2$ i $(4.18)_2$.

Uvodeći oznaku

$$||\boldsymbol{u}||^2\,(t) = \int_v \boldsymbol{u}^2\,(\boldsymbol{x}, t)\,dv, \tag{4.23}$$

i koristeći činjenicu da je

$$\nu \int_v |\text{grad}\,\boldsymbol{u}|^2\,dv \geqslant 0.$$

lako se iz (4.22) i definicije izvoda funkcije koja se izražava pomoću integrala može zaključiti da je

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\,||\boldsymbol{u}||^2 + \int_v \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{D}_2\boldsymbol{u}\,dv \leqslant 0. \tag{4.24}$$

Pošto je div $\boldsymbol{v}_2 = tr\,\boldsymbol{D}_2 = 0$, sledi da je najmanja karakteristična vrednost simetričnog tenzora $\boldsymbol{D}_2\,(\boldsymbol{x}, t)$ najviše jednaka nuli. Označavajući je sa $-\gamma\,(\boldsymbol{x}, t)$ sledi da je $\gamma \geqslant 0$ i

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{D}_2\boldsymbol{u} \geqslant -\gamma \boldsymbol{u}^2.$$

Dalje, izaberimo $\tau > 0$; neka je

$$\lambda = 2 \sup_{\substack{\boldsymbol{x} \in v \\ 0 \leqslant t \leqslant \tau}} \gamma\,(\boldsymbol{x}, t)$$

Pošto je $\boldsymbol{v}_2$ glatko, $\boldsymbol{D}_2$ je neprekidno i $0 \leqslant \lambda < \infty$. Tada je

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{D}_2 \boldsymbol{u} \geqslant -\frac{\lambda}{2} \boldsymbol{u}^2 \qquad \text{na } v \times [0, \tau]$$

i

$$\frac{d}{dt} \|\boldsymbol{u}\|^2 - \lambda \|\boldsymbol{u}\|^2 \leqslant 0 \qquad \text{na } [0, \tau],$$

s obzirom na (4.23) i (4.24), ili

$$\frac{d}{dt} \{\|\boldsymbol{u}\|^2 e^{-\lambda t}\} \leqslant 0 \qquad \text{na } [0, \tau].$$

Odavde je

$$\|\boldsymbol{u}\|^2 (\tau) \leqslant \|\boldsymbol{u}\|^2 (0)\, e^{\lambda \tau}.$$

Međutim, iz (4.23) i $(4.16)_1$, sledi da je

$$\|\boldsymbol{u}\|^2 (0) = 0$$

tako da se iz prethodnog izraza dobija da je

$$\|\boldsymbol{u}\|^2 (\tau) = 0$$

što povlači za sobom, s obzirom na (4.23), da je

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, \tau) = 0$$

za svako $\boldsymbol{x} \in v$. Pošto smo τ birali proizvoljno, biće $\boldsymbol{u} \equiv 0$ i $\boldsymbol{v}_1 \equiv \boldsymbol{v}_2$. Ali tada iz (4.18) sledi da je i $\operatorname{grad} \alpha = 0$. $\square$

X DODATAK

A. Elementi vektorskog računa

1. VEKTORSKI PROSTOR

Vektorski prostor v nad poljem realnih brojeva R je skup elemenata $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, ... proizvoljne prirode, koje nazivamo vektorima. Vektorski prostor V u kome su definisane dve algebarske operacije: sabiranje vektora i množenje vektora brojem nazivamo *linearni vektorski* prostor L od n dimenzija.

Pri tome su zadovoljene ove grupe aksioma:

a) ***Aksiome sabiranja vektora***

Svakom paru vektora $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ pridružuje se vektor $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. Tada važi

1. $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$ komutativnost
2. $\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}$ distributivnost (1.1)
3. Postoji nula vektor $\mathbf{0}$ takav da je $\boldsymbol{a}+\mathbf{0}=\boldsymbol{a}$ za svako $\boldsymbol{a}$.
4. Svakom vektoru $\boldsymbol{a}$ odgovara njemu suprotan vektor $-\boldsymbol{a}$ tako da je $\boldsymbol{a}+$ $+(-\boldsymbol{a})=0$

za svako $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}\in V$.

b) ***Aksiome množenja skalarom***

Svakom vektoru $\boldsymbol{a}$ i skalaru λ odgovara vektor $\lambda\boldsymbol{a}$. Tada važi

1. $1\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$
2. $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$ asocijativnost
3. $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$
4. $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$

$\Big\}$ distributivnost (1.2)

za svako $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}\in V$, λ, $\mu\in R$.

Definicija: *Za n vektora* $\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \ldots, \boldsymbol{g}_n$ *kažemo da čine skup* ***linearno nezavisnih vektora*** *ako je njihova linearna kombinacija nula vektor, tj.*

$$\lambda^i \boldsymbol{g}_i = \lambda^1 \boldsymbol{g}_1 + \ldots + \lambda^n \boldsymbol{g}_n = 0 \tag{1.3}$$

samo ako su koeficijenti λ^i $(i = 1, 2, \ldots n)$ *jednaki nuli.*

Ako postoji u (1.3) bar jedno $\lambda^i \neq 0$, $(i = 1, 2, \ldots n)$, onda je posmatrani skup vektora $\{\boldsymbol{g}_1, \ldots, \boldsymbol{g}_n\}$ linearno zavisan.

Bitno je naglasiti da se u (1.3) i dalje po ponovljenim indeksima podrazumeva sabiranje.

c) ***Aksiome dimenzionalnosti***

1. Postoji n linearno nezavisnih vektora u L.
2. Svaki skup od $n + 1$ vektora je linearno zavisan. Broj n u tom skupu nazivamo *dimenzijom vektorskog prostora L.*

Sistem od n linearno nezavisnih vektora $\boldsymbol{g}_i$ $(i = 1, 2, \ldots n)$ naziva se *baza* vektorskog prostora L.

2. SKALARNI I VEKTORSKI PROIZVOD

Skalarni i vektorski proizvod, koji su čitaocu dobro poznati, možemo takođe definisati sistemima aksioma.

Prostor L nazivamo Euklidski vektorski prostor E ako je nad njegovim elementima definisana operacija *skalarnog proizvoda* kojom se svakom paru vektora $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ u $\boldsymbol{E}$ na određeni način pripisuje skalar u R. Za skalarni proizvod vektora $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$, koji označavamo sa $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ važe sledeće

aksiome skalarnog proizvoda

$$\begin{array}{rl} \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a} & \text{komutativnost} \\ (\alpha \boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b} = \alpha (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) & \text{asocijativnost} \\ \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} & \text{distributivnost} \\ \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} \geqslant 0 & \text{za svako } \boldsymbol{a} \in L, \text{ pri čemu je} \\ \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = 0 & \text{ako i samo ako je } \boldsymbol{a} = 0. \end{array} \tag{2.1}$$

za svako $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in L$ i $\alpha \in R$.

Norma ili ***intezitet***, $|\boldsymbol{a}|$, vektora $\boldsymbol{a}$ se definiše sa

$$|\boldsymbol{a}| = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a})^{\frac{1}{2}} \tag{2.2}$$

Vektor čija je norma jedinica naziva se *jedinični vektor*.

Za dva vektora $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ se kaže da su ortogonalni ako je $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$.

Fundamentalno svojstvo konačno dimenzionalnog vektorskog prostora u kome je definisan unutrašnji ili skalarni proizvod je egzistencija *ortonormirane baze*.

Tako u euklidskom vektorskom prostoru svaki sistem od n vektora $\boldsymbol{e}_i$ za koji je

$$\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \delta_{ij} \tag{2.3}$$

određuje *ortonormiranu* bazu. U (2.3) sa δ_{ij} smo obeležili Kronekerov δ sistem za koji važi

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j. \end{cases} \tag{2.4}$$

Kako je

$$a_i \delta_{ij} = a_j$$

za svaki sistem a_i Kronekerov sistem se naziva *supstitucioni*.

U odnosu na ortonormiranu bazu $\boldsymbol{e}_i$ svaki vektor $\boldsymbol{a}$ u E se može jednoznačno predstaviti u obliku

$$\boldsymbol{a} = a_i \boldsymbol{e}_i; \tag{2.5}$$

a_i nazivamo *komponente* vektora $\boldsymbol{a}$ u odnosu na bazu $\boldsymbol{e}_i$. Očigledno je iz (2.3) i (2.5) da je

$$a_i = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{e}_i \tag{2.6}$$

i

$$\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{e}_i)\, \boldsymbol{e}_i \tag{2.7}$$

ortonormirana baza $\boldsymbol{e}_i$ zajedno sa tačkom O, koju nazivamo koordinatni početak, definiše *Dekartov koordinatni sistem*. Ose tog sistema obeležavamo sa z_k.

U trodimenzionalnom euklidskom prostoru E_3 sem skalarnog proizvoda definišemo i *vektorski proizvod* kojim svakom paru vektora $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ u E_3 na potpuno određeni način pridružujemo vektor u E_3 koji označavamo sa $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$, a za koji važi:

$$\begin{gathered} \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} \\ (\alpha \boldsymbol{a} + \beta \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = \alpha (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}) + \beta (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) \\ \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{0} \\ (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a})(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{b}) - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})^2 \end{gathered} \tag{2.8}$$

za svako $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ i $\boldsymbol{c}$ u E_3 i α, β u R.

3. TENZOR. TENZORSKI PROIZVOD

Tenzor drugog reda $\boldsymbol{A}$ definiše se kao linearna transformacija euklidskog prostora E u samog sebe tako da je

$$\boldsymbol{A}(\alpha \boldsymbol{a} + \beta \boldsymbol{b}) = \alpha (\boldsymbol{A}\boldsymbol{a}) + \beta (\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}) \tag{3.1}$$

za svako $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ u E i α, β u R.

Takođe je

$$\begin{gathered} (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})\, \boldsymbol{a} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{a} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{a} \\ (\alpha \boldsymbol{A})\, \boldsymbol{a} = \alpha (\boldsymbol{A}\boldsymbol{a}) \\ (\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})\, \boldsymbol{a} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{a}) \end{gathered} \tag{3.2}$$

za svako $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ u $\mathcal{L}$, gde smo sa $\mathcal{L}$ označili skup svih tenzora nad E, svako $\boldsymbol{a}$ u E i svako α u R.

Svakom tenzoru $\boldsymbol{A}$ može se pridružiti jedinstven tenzor $\boldsymbol{A}^T$, koji se naziva *transponovan tenzor* tenzora $\boldsymbol{A}$, takav da je

$$\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{b} \cdot (\boldsymbol{A}\boldsymbol{a}) \tag{3.3}$$

za svako $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ u E.

Nula tenzor $\boldsymbol{O}$ pridružuje svakom vektoru $\boldsymbol{a}$ nula vektor, dok jedinični tenzor $\boldsymbol{I}$ pridružuje vektor $\boldsymbol{a}$ samom sebi, tj.,

$$\boldsymbol{O}\boldsymbol{a} = 0, \qquad \boldsymbol{I}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} \tag{3.4}$$

za svako $\boldsymbol{a} \in E$.

Uređen par vektora $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ kome odgovara tenzor označen sa $\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b}$ nazivamo *tenzorski* ili *otvoreni proizvod* ili *dijada* vektora $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$. Dijada se definiše kao *tenzor* koji svakom vektoru $\boldsymbol{v}$ pridružuje vektor $(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{v})\, \boldsymbol{a}$, tj.,

$$(\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b})\, \boldsymbol{v} = (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{v})\, \boldsymbol{a} \tag{3.5}$$

za svako $\boldsymbol{v} \in E$.

Lako je, s obzirom na (2.1), pokazati da za tenzorski proizvod važi

$$\begin{aligned} (\alpha \boldsymbol{a} + \beta \boldsymbol{b}) \otimes \boldsymbol{v} &= \alpha (\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{v}) + \beta (\boldsymbol{b} \otimes \boldsymbol{v}) \\ \boldsymbol{a} \otimes (\alpha \boldsymbol{v} + \beta \boldsymbol{w}) &= \alpha (\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{v}) + \beta (\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{w}) \end{aligned} \tag{3.6}$$

za svako $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{v}$ i $\boldsymbol{w}$ u E i α, β u R.

Na osnovu ovih izraza možemo formulisati čitav niz interesantnih zadataka.

Zadatak 1. Pokazati da je

$$(\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v})^T = \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{u}. \tag{3.7}$$

Rešenje: Iz (3.3) i (3.5) sledi da je

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v})^T \boldsymbol{b} &= \boldsymbol{b} \cdot (\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v})\, \boldsymbol{a} \\ &= (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{v})\,(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{u}) \\ &= \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{u})\, \boldsymbol{b} \end{aligned}$$

za svako $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ u E, odakle sledi (3.7).

Zadatak 2. Neka je $\boldsymbol{e}_i$ sistem ortonormiranih vektora u E. Onda je

$$\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{I}. \tag{3.8}$$

Dokazati.

Rešenje: Uzmimo da je ortonormirani sistem vektora $\boldsymbol{e}_i$ vektorska baza u E. Tada je za svaki vektor $\boldsymbol{a}$ u E

$$\boldsymbol{a} = a_i \boldsymbol{e}_i,$$

gde je

$$a_i = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{e}_i$$

i

$$(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_i)\, \boldsymbol{a} = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{e}_i)\, \boldsymbol{e}_i = a_i \boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{a} = \boldsymbol{I}\boldsymbol{a}$$

s obzirom na (2.1) i (2.6).

Zadatak 3: Neka su $\boldsymbol{g}_i$ bazni vektori u E. Neka su $\boldsymbol{g}^i$ vektori koji obrazuju recipročnu bazu u odnosu na $\boldsymbol{g}_i$, tj.,

$$\boldsymbol{g}_i \cdot \boldsymbol{g}^j = \delta_i^j \tag{3.9}$$

Onda je

$$\boldsymbol{g}_i \otimes \boldsymbol{g}^i = \boldsymbol{I} \tag{3.10}$$

Dokazati.

Rešenje: Za bilo koji vektor $\boldsymbol{a}$ u E je

$$\boldsymbol{a} = a^i \boldsymbol{g}_i, \quad a^i = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{g}^i$$

s obzirom na (3.9), i

$$(\boldsymbol{g}_i \otimes \boldsymbol{g}^i)\, \boldsymbol{a} = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{g}^i)\, \boldsymbol{g}_i = a^i \boldsymbol{g}_i = \boldsymbol{a} = \boldsymbol{I}\boldsymbol{a}.$$

Zadatak 4: Pokazati da je

$$(\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b})\,(\boldsymbol{c} \otimes \boldsymbol{d}) = (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})\, \boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{d}. \tag{3.11}$$

Rešenje: Neka je $\boldsymbol{e}$ proizvoljan vektor u E. Onda je

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b})\,(\boldsymbol{c} \otimes \boldsymbol{d})\, \boldsymbol{e} &= (\boldsymbol{d} \cdot \boldsymbol{e})\,(\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b})\, \boldsymbol{c} \\ &= (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})\,(\boldsymbol{d} \cdot \boldsymbol{e})\, \boldsymbol{a} \\ &= (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})\,(\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{d})\, \boldsymbol{e}\end{aligned}$$

s obzirom na (2.1).

Zadatak 5: Pokazati da je

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\,(\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v}) &= (\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}) \otimes \boldsymbol{v}, \\ (\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v})\, \boldsymbol{A} &= \boldsymbol{u} \otimes (\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{v}).\end{aligned} \tag{3.12}$$

Rešenje: Neka je $\boldsymbol{w}$ proizvoljan vektor. Onda je

$$\boldsymbol{A}\,(\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v})\, \boldsymbol{w} = (\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{v})\, \boldsymbol{A}\boldsymbol{u} = \{(\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}) \otimes \boldsymbol{v}\}\, \boldsymbol{w};$$

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v})\, \boldsymbol{A}\boldsymbol{w} &= \{\boldsymbol{v} \cdot (\boldsymbol{A}\boldsymbol{w})\}\, \boldsymbol{u} = (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{A}\boldsymbol{w})\, \boldsymbol{u} = \\ &= \{\boldsymbol{w} \cdot (\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{v})\}\, \boldsymbol{u} = \{\boldsymbol{u} \otimes (\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{v})\}\, \boldsymbol{w}.\end{aligned}$$

s obzirom na (2.1) i (3.5).

4. KOMPONENTE TENZORA. TRAG TENZORA

Za proizvoljan tenzor $\boldsymbol{A}$ biće $\boldsymbol{A}\boldsymbol{g}_j$ vektor koji u odnosu na bazne vektore $\boldsymbol{g}_i$ možemo pisati u obliku

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{g}_j = a^i{}_j\, \boldsymbol{g}_i. \tag{4.1}$$

Iz (4.1) i (3.9) se odmah vidi da je

$$a^i{}_j = \boldsymbol{g}^i \cdot \boldsymbol{A}\boldsymbol{g}_j. \tag{4.2}$$

Takođe iz (4.1) i (3.10) dobijamo

$$\boldsymbol{A} = a^i{}_j\, \boldsymbol{g}_i \otimes \boldsymbol{g}^j \tag{4.3}$$

s obzirom na (3.12).

U odnosu na bazne vektore $\boldsymbol{e}_i$ Dekartovog sistema koordinata (4.3) se očigledno svodi na

$$\boldsymbol{A} = a_{ij}\,\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j \tag{4.4}$$

U slučaju kada se množe dva proizvoljna tenzora $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{B}$ biće

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{AB} &= (a^i{}_j\,\boldsymbol{g}_i \otimes \boldsymbol{g}^j)\,(b^p{}_q\boldsymbol{g}_p \otimes \boldsymbol{g}^q)\\
&= a^i{}_j\,b^p{}_q\,(\boldsymbol{g}_i \otimes \boldsymbol{g}^j)\,(\boldsymbol{g}_p \otimes \boldsymbol{g}^q)\\
&= a^i{}_j\,b^p{}_q\,(\boldsymbol{g}_p\boldsymbol{g}^j)\,(\boldsymbol{g}_i \otimes \boldsymbol{g}^q)\\
&= a^i{}_j\,b^p{}_q\delta^j_p\,(\boldsymbol{g}_i \otimes \boldsymbol{g}^q)\\
&= a^i{}_j\,b^j{}_q\,\boldsymbol{g}_i \otimes \boldsymbol{g}^q.
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Odavde se vidi da su komponente proizvoda tenzora $\boldsymbol{AB}$ date sa $a^i{}_j b^j{}_q$. Na sličan način se mogu odrediti komponente proizvoda proizvoljnog broja tenzora.

Trag je linearna operacija koja svakom tenzoru $\boldsymbol{A}$ pridružuje skalar $tr\,\boldsymbol{A}$, a za koji je

$$tr\,(\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \tag{4.6}$$

za sve vektore $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ u E.

Iz (4.6) i linearnosti tr sledi da je

$$\begin{aligned}
tr\,\boldsymbol{A} &= tr\,(a^i{}_j\boldsymbol{g}_i \otimes \boldsymbol{g}^j) =\\
&= a^i{}_j\,tr\,\boldsymbol{g}_i \otimes \boldsymbol{g}^j = a^i{}_j\boldsymbol{g}_i \cdot \boldsymbol{g}^j\\
&= a^i{}_j\,\delta^j_i = a^i{}_i
\end{aligned}$$

gde smo koristili (4.3) i (3.9). Znači, trag tenzora $\boldsymbol{A}$ je definisan sa

$$tr\,\boldsymbol{A} = a^i{}_i. \tag{4.7}$$

Ova operacija ima sledeće osobine

$$tr\,\boldsymbol{A} = tr\,\boldsymbol{A}^T$$

$$tr\,\boldsymbol{AB} = tr\,\boldsymbol{BA} = a^i{}_j b^j{}_i.$$

U literaturi se susreće i oznaka $\boldsymbol{A} \cdot\cdot\, \boldsymbol{B}$ za $tr\,\boldsymbol{AB}$.

Za razliku od $tr\,\boldsymbol{AB}$ sa

$$\boldsymbol{A} : \boldsymbol{B} = a^i{}_j\,b^j{}_i \tag{4.8}$$

definišemo unutrašnji (skalarni proizvod) tenzora $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{B}$.

Očigledno je

$$\boldsymbol{A} : \boldsymbol{B} = tr\,\boldsymbol{AB}^T. \tag{4.9}$$

Nije teško pokazati da je

$$\begin{gathered}
\boldsymbol{I} : \boldsymbol{A} = tr\,\boldsymbol{A}\\
\boldsymbol{A} : (\boldsymbol{BC}) = (\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{B}) : \boldsymbol{A} = (\boldsymbol{AC}^T) : \boldsymbol{B}\\
\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{Av} = \boldsymbol{A} : (\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v})\\
(\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b}) : (\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{u})\,(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{v}).
\end{gathered} \tag{4.10}$$

Za dalja izvođenja usvajamo sledeće definicije.

Tenzor A je *simetričan* ako je

$$A = A^T \tag{4.11}$$

a *antisimetričan* ako je

$$A = -A^T. \tag{4.12}$$

Determinanta tenzora A je determinanta matrice $[A]$

$$\det A = \det [A]. \tag{4.13}$$

Svakom tenzoru A čija je $\det A \neq 0$ odgovara *inverzan tenzor* A^{-1} takav da je

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I \tag{4.14}$$

Tenzor Q je *ortogonalan* ako očuvava unutrašnji proizvod

$$Qu \cdot Qv = u \cdot v \tag{4.15}$$

za svako u i v u E. Odavde sledi da je

$$QQ^T = Q^TQ = I \tag{4.16}$$

ili ekvivalentno tome

$$Q^T = Q^{-1} \tag{4.17}$$

što predstavlja potreban i dovoljan uslov da bi tenzor Q bio ortogonalan.

Za ortogonalan tenzor Q je

$$\det Q = \pm 1. \tag{4.18}$$

Tenzor Q, za koji je $\det Q = 1$, predstavlja *rotaciju*, a za koji je $\det Q = -1$ *ogledanje*. Svaki ortogonalan tenzor je ili rotacija ili ogledanje, tj. proizvod rotacije sa $-I$.

Tenzor A je *pozitivno definitan* ako je

$$v \cdot Av > 0$$

za svako $v \neq 0$ u E.

5. KARAKTERISTIČNE VREDNOSTI I KARAKTERISTIČNI VEKTORI TENZORA

Neka je A proizvoljan tenzor drugog reda. Skalar a je *karakteristična vrednost* tenzora A ako postoji jedinični vektor e za koji je

$$Ae = ae \tag{5.1}$$

Za takav vektor e se kaže da je *karakterističan vektor* tenzora A.

Iz (5.1) sledi da je a karakteristična vrednost tenzora A ako i samo ako je

$$\det (A - aI) = 0 \tag{5.2}$$

ili, u razvijenom obliku,

$$a^n - I_1(A)\, a^{n-1} + I_2(A)\, a^{n-2} + \ldots + (-1)^n I_n(A) = 0 \tag{5.3}$$

gde su $I_k(\boldsymbol{A})$, $(k = 1, 2, \ldots, n)$, koeficijenti polinoma definisani sa

$$I_k(\boldsymbol{A}) = \frac{1}{k!}\, \delta^{l_1 \ldots l_k}_{m_1 \ldots m_k}\, a^{m_1}{}_{l_1} \ldots a^{m_k}{}_{l_k} \tag{5.4}$$

Polinom n-tog reda u (5.3) se naziva *karakteristični polinom* tenzora $\boldsymbol{A}$. Prema tome, rešenja jednačine (5.3), koja se naziva karakteristična jednačina, su karakteristične vrednosti tenzora $\boldsymbol{A}$.

Karakterističan prostor tenzora $\boldsymbol{A}$, koji odgovara karakterističnoj vrednosti a je prostor V koji čine svi vektori $\boldsymbol{u}$, a koji zadovoljavaju karakterističnu jednačinu

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{u} = a\boldsymbol{u}.$$

Ako taj prostor ima dimenziju n onda se kaže da a ima *multiplicitet* n.

Spektar tenzora $\boldsymbol{A}$ je skup $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ gde su $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$ karakteristične vrednosti a tenzora $\boldsymbol{A}$ pri čemu je svaka od njih ponovljena onoliko puta koliko iznosi njen multiplicitet.

Od značaja za dalja izvođenja su teoreme 1, 2 i 3, koje su formulisane i dokazane u odeljku 10, glave II.

6. SPEKTRALNA TEOREMA

Na osnovu prethodnih teorema dokazuje se jedna od najvažnijih teorema linearne algebre, tzv. ***spektralna teorema:***

Neka je $\boldsymbol{A}$ simetričan tenzor. Onda u E postoji ortonormirana baza $\boldsymbol{e}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, koju čine karakteristični vektori tenzora $\boldsymbol{A}$. Uređen skup $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ karakterističnih vrednosti, koji odgovara takvoj bazi $\boldsymbol{e}_i$, obrazuje potpun spektar tenzora $\boldsymbol{A}$, tako da je

$$\boldsymbol{A} = \sum_{i=1}^{n} a_i \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_i. \tag{6.1}$$

Obrnuto, ako je $\boldsymbol{A}$ dato sa (6.1), gde je skup vektora $\{\boldsymbol{e}_i\}$ ortonormiran, onda su a_i, $(i = 1, 2, \ldots, n)$, karakteristične vrednosti tenzora $\boldsymbol{A}$ kojima odgovaraju karakteristični vektori $\boldsymbol{e}_i$.

Preciznije,

a) *$\boldsymbol{A}$ ima n međusobno različitih karakterističnih vrednosti ako i samo ako karakteristični prostori od $\boldsymbol{A}$ su n uzajamno upravnih pravih:*

b) *$\boldsymbol{A}$ ima $m < n$ različitih karakterističnih vrednosti ako i samo ako $\boldsymbol{A}$ dopušta reprezentaciju*

$$\boldsymbol{A} = \sum_{\alpha=1}^{m-1} a_\alpha \boldsymbol{e}_\alpha \otimes \boldsymbol{e}_\alpha + a_m \Big(\boldsymbol{I} - \sum_{\alpha=1}^{m-1} \boldsymbol{e}_\alpha \otimes \boldsymbol{e}_\alpha\Big). \tag{6.2}$$

$$|\boldsymbol{e}_i| = 1.$$

U tom slučaju a_σ $(\sigma = 1, 2, \ldots, m)$ su m međusobno različitih karakterističnih vrednosti, a njima odgovarajući prostori su međusobno upravne prave određene karakterističnim vektorima $\boldsymbol{e}_\alpha$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, m - 1)$ i na njih upravan prostor od $n - (m - 1)$ dimenzija, tj., $E_{n-(m-1)}$.

Obrnuto, ako su $m - 1$ međusobno upravnih pravih i na nju upravan prostor $E_{n-(m-1)}$ karakteristični prostori tenzora $\boldsymbol{A}$ onda $\boldsymbol{A}$ mora imati oblik (6.2).

c) *$\boldsymbol{A}$ ima samo jednu karakterističnu vrednost ako i samo ako je*

$$\boldsymbol{A} = a\boldsymbol{I}. \tag{6.3}$$

U tom slučaju je a karakteristična vrednost od $\boldsymbol{A}$ a E njoj odgovarajući karakteristični prostor. Obrnuto, ako je E karakteristični prostor tenzora $\boldsymbol{A}$ onda $\boldsymbol{A}$ ima oblik (6.3).

Dokaz: Neka su a_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ karakteristične vrednosti tenzora $\boldsymbol{A}$ i neka su $\boldsymbol{e}_i$ njima odgovarajući karakteristični vektori. Onda je, po definiciji

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_i = a_i\boldsymbol{e}_i.$$

Neka su, dalje, karakteristične vrednosti a_i međusobno različite. Tada su, saglasno sa teoremom 1, odeljka 10, glave II, njima odgovarajući karakteristični vektori $\boldsymbol{e}_i$ međusobno upravni tako da je $\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{I}$ i

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{I} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_i = \sum_{i=1}^{n} a_i\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_i.$$

Obrnuto, ako je $\boldsymbol{A}$ dato sa (6.1) i $\{\boldsymbol{e}_i\}$ ortonormiran skup vektora, onda je

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_j = \sum_{i=1}^{n} a_i (\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_i)\, \boldsymbol{e}_j = \sum_{i=1}^{n} a_i (\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j)\, \boldsymbol{e}_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i \delta_{ij} \boldsymbol{e}_i = a_j \boldsymbol{e}_j,$$

tj., a_j su karakteristične vrednosti $\boldsymbol{A}$, a $\boldsymbol{e}_j$ njima odgovarajući karakteristični vektori.

a) Dokaz je sadržan u dokazu teoreme 1, odeljka 10, glave II.

b) Neka su a_σ $(\sigma = 1, 2, \ldots, m)$ svi međusobno različiti i neka je $a_m = a_{m+1} = \ldots = a_n$. Onda se iz (6.1) dobija

$$\boldsymbol{A} = \sum_{\alpha=1}^{m-1} a_\alpha \boldsymbol{e}_\alpha \otimes \boldsymbol{e}_\alpha + \sum_{\tau=m}^{n} a_\tau \boldsymbol{e}_\tau \otimes \boldsymbol{e}_\tau$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{m-1} a_\alpha \boldsymbol{e}_\alpha \otimes \boldsymbol{e}_\alpha + a_m \sum_{\tau=m}^{n} \boldsymbol{e}_\tau \otimes \boldsymbol{e}_\tau.$$

Koristeći u ovom izrazu

$$\boldsymbol{I} = \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_i = \sum_{\alpha=1}^{m-1} \boldsymbol{e}_\alpha \otimes \boldsymbol{e}_\alpha + \sum_{\tau=m}^{n} \boldsymbol{e}_\tau \otimes \boldsymbol{e}_\tau$$

dobijamo (6.2).

Obrnuto, neka važi (6.2). Onda je sigurno

$$Ae = a_\alpha e_\alpha, \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, m-1).$$

Takođe je

$$Ae = a_m e$$

za svaki jedinični vektor za koji je $e \cdot e_\alpha = 0$. Među njima se uvek može naći jedan skup ortonormiranih vektora e_σ $(\sigma = m, m+1, \ldots, n)$ koji rastežu prostor $E_{n-(m-1)}$ svih vektora u za koji je $u \cdot e_\alpha = 0$.

c) Neka važi (6.3). Onda je

$$Ae = ae$$

za svaki vektor e u E. Znači, E je karakterističan prostor takvog tenzora A.

Obrnuto, neka je E karakterističan prostor simetričnog tenzora A. Onda je za bilo koja dva linearno nezavisna vektora u i v u E

$$Au = \lambda u, \quad Av = \omega v.$$

Takođe je

$$A(u + v) = \nu(u + v) =$$
$$= \lambda u + \omega v$$

ili

$$(\lambda - \nu) u + (\omega - \nu) v = 0$$

odakle sledi, s obzirom na linearnu nezavisnost,

$$\lambda = \omega = \nu.$$

Znači, tenzor A ima samo jednu karakterističnu vrednost; označimo je sa a.

Tada je

$$A = AI = Ae_i \otimes e_i = ae_i \otimes e_i = aI$$

gde je e_i neka ortonormirana baza E. □

U daljem ćemo sa u_α $(\alpha = 1, 2, \ldots, p \leqslant n)$ označavati karakteristične prostore tenzora A. Tada se bilo koji vektor v u E može predstaviti u obliku

$$v = \sum_\alpha v_\alpha \tag{6.4}$$

gde su $v_\alpha \in u_\alpha$.

Teorema o komutativnosti

*Neka je **A** simetričan tenzor i neka je komutativan sa nekim tenzorom **B**, tj. **AB** = **BA**. Onda **B** ostavlja svaki karakterističan prostor tenzora **A** invarijantnim, tj., ako **v** pripada karakterističnom prostoru **A** onda i **Bv** pripada istom karakterističnom prostoru.*

*Obrnuto, ako **B** ostavlja svaki karakterističan prostor simetričnog tenzora **A** invarijantnim, onda su **A** i **B** komutativni.*

Dokaz *:* Neka su $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{B}$ komutativni. Pretpostavimo da je $\boldsymbol{Av} = \lambda\boldsymbol{v}$ Onda je

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Bv}) = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{Av}) = \lambda\boldsymbol{Bv}$$

tj., $\boldsymbol{Bv}$ pripada takođe karakterističnom prostoru kome pripada $\boldsymbol{v}$.

Za dokaz obrnutog stava polazimo od (6.4), tj., od izraza koji pokazuje da se bilo koji vektor $\boldsymbol{v}$ u E može razložiti preko vektora $\boldsymbol{v}_\alpha$ karakterističnih prostora u_α. Ako $\boldsymbol{B}$ ostavlja svaki karakteristični prostor u_α od $\boldsymbol{A}$ invarijantni onda je $\boldsymbol{Bv}_\alpha$ u u_α i

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Bv}_\alpha) = \lambda_\alpha(\boldsymbol{Bv}_\alpha) = \boldsymbol{B}(\lambda_\alpha\boldsymbol{v}_\alpha) = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{Av}_\alpha)$$

gde je λ_α karakteristična vrednost koja odgovara $\boldsymbol{v}_\alpha$. Na osnovu toga i (6.4) možemo zaključiti da je

$$\boldsymbol{ABv} = \sum_\alpha \boldsymbol{ABv}_\alpha = \sum_\alpha \boldsymbol{BAv}_\alpha = \boldsymbol{BAv}.$$

Pošto je $\boldsymbol{v}$ proizvoljno, sledi da je $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$. □

Postoji samo jedan podprostor od E koji svaka rotacija ostavlja invarijantnim. To je sam prostor E. Na osnovu toga je moguće pokazati da važi sledeća *posledica spektralne teoreme*

Simetričan tenzor $\boldsymbol{A}$ *je komutativan sa svakom rotacijom ako i samo ako je*

$$\boldsymbol{A} = a\boldsymbol{I}. \tag{6.5}$$

7. TEOREMA O POLARNOJ DEKOMPOZICIJI

Svaki regularan tenzor drugog reda $\boldsymbol{A}$ *može biti predstavljen jednoznačno u obliku*

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{QU} = \boldsymbol{VQ}, \tag{7.1}$$

gde je $\boldsymbol{Q}$ *ortogonalan tenzor, a* $\boldsymbol{U}$ *i* $\boldsymbol{V}$ *pozitivno definitni simetrični tenzori.*

Dokaz: Pošto je $\boldsymbol{Av}\cdot\boldsymbol{Av} = \boldsymbol{vA}^T\boldsymbol{Av} > 0$ za svako $\boldsymbol{v} \neq 0$ i $(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})^T = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$ sledi da je $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$ pozitivno definitan i simetričan tenzor. Tada je i $\boldsymbol{U}$ definisano kao njegov kvadratni koren, tj.

$$\boldsymbol{U} = (\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})^{\frac{1}{2}}, \tag{7.2}$$

takođe simetričan i pozitivno definitan tenzor. Ako sa $\boldsymbol{Q}$ definišemo tenzor

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{AU}^{-1}, \tag{7.3}$$

onda imamo da je

$$\boldsymbol{QQ}^T = \boldsymbol{AU}^{-1}(\boldsymbol{AU}^{-1})^T = \boldsymbol{AU}^{-1}\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{U}^2)^{-1}\boldsymbol{A}^T =$$

$$= \boldsymbol{AA}^{-1}(\boldsymbol{A}^{-1})^T\boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{I},$$

tj. tako definisano $\boldsymbol{Q}$ je ortogonalan tenzor. Iz (7.2) i (7.3) se vidi da su $\boldsymbol{U}$ i $\boldsymbol{Q}$ u potpunosti određeni preko polaznog tenzora $\boldsymbol{A}$.

Da je QU jednoznačna desna dekompozicija tenzora A pokazujemo na sledeći način. Pretpostavimo da se A može takođe izraziti u obliku $\bar{Q}\bar{U}$, gde je $\bar{Q}$ ortogonalno, a $\bar{U}$ simetrično i pozitivno definitno. Tada je $QU = \bar{Q}\bar{U}$. Transponovanjem ovog izraza dobijamo $UQ^T = \bar{U}\bar{Q}^T$ i

$$U^2 = UQ^TQU = \bar{U}\bar{Q}^T\bar{Q}\bar{U} = \bar{U}^2,$$

odakle sledi da je $\bar{U} = U$, jer A^TA ima samo jedan pozitivno definitan simetričan koren, i

$$\bar{Q} = A\bar{U}^{-1} = AU^{-1} = Q.$$

Na sličan način se može pokazati da je leva dekompozicija

$$A = VR,$$

jednoznačna, gde je

$$V = (AA^T)^{\frac{1}{2}},$$

simetričan i pozitivno definitan tenzor, a

$$R = V^{-1}A,$$

ortogonalan tenzor.

Preostalo je da se dokaže da je $Q = R$. S obzirom na ortogonalnost R i pozitivnu definitnost V biće

$$A = QU = (RR^T)\,VR = R(R^TVR) = R\,\{(V^{\frac{1}{2}}R)^T(V^{\frac{1}{2}}R)\}.$$

Prema tome QU i $R\,(R^TVR)$ su alternativne leve dekompozicije tenzora A. Ali, s obzirom na jednoznačnost te dekompozicije (koju smo dokazali), sledi da je $Q = R$ i

$$U = R^TVR = Q^TVQ. \ \square \tag{7.4}$$

Napomenimo da je det $Q = 1$ ili det $Q = -1$ u zavisnosti od toga da li je det A pozitivna ili negativna.

Iz (7.4) se lako može pokazati da su karakteristične vrednosti tenzora U i V iste, dok su njihovi karakteristični vektori u_i i v_i, respektivno, vezani relacijom

$$v_i = Qu_i.$$

Dekompozicija (7.1) se naziva polarnom zbog analogije sa polarnom reprezentacijom kompleksnog broja

$$z = re^{i\theta}.$$

Poteg r je pozitivan realan broj i predstavlja modul broja z. Analogno tome V (ili U) je pozitivno definitan tenzor (realnih karakterističnih vrednosti) i određuje veličinu tenzora A. Veličina $e^{i\theta}$ je kompleksan broj na jediničnom krugu rotiran u odnosu na realnu osu za ugao θ, dok ortogonalan tenzor Q određuje rotaciju u E_3 oko neke ose.

8. KOVARIJANTNE, KONTRAVARIJANTNE I FIZIČKE KOMPONENTE TENZORA

U opštem slučaju, krivolinijske koordinate x^k se definišu preko Dekartovih kordinata funkcionalnim relacijama

$$z^k = z^k(x^l), \tag{8.1}$$

za koje je Jakobijan transformacije u nekoj oblasti prostora E

$$\left| \frac{\partial z^l}{\partial x^l} \right| \neq 0. \tag{8.2}$$

Tada u toj oblasti postoji i inverzna relacija

$$x^k = x^k(z^l). \tag{8.3}$$

Za vektor položaja $\boldsymbol{p}$ neke tačke u E pišemo

$$\boldsymbol{p} = z^k \boldsymbol{e}_k = z^k(x^l)\, \boldsymbol{e}_k = \boldsymbol{p}(x^l). \tag{8.4}$$

Neka je

$$\boldsymbol{g}_k \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial x^k} = \frac{\partial z^l}{\partial x^k} \boldsymbol{e}_l. \tag{8.5}$$

Tako definisani sistem vektora je linearno nezavisan, s obzirom na linearnu nezavisnost vektora $\boldsymbol{e}_k$ i (8.2), i predstavlja novu bazu u E. Njemu recipročan sistem vektora $\boldsymbol{g}^k$, tj. vektora za koje važi

$$\boldsymbol{g}_k \cdot \boldsymbol{g}^l = \delta_k^l, \tag{8.6}$$

je takođe linearno nezavisan, s obzirom na (8.6), i kao takav definiše novu bazu, tzv. recipročnu bazu u odnosu na $\boldsymbol{g}_k$.

Neka je

$$g_{kl} \overset{\text{def}}{=} \boldsymbol{g}_k \cdot \boldsymbol{g}_l, \qquad g^{kl} \overset{\text{def}}{=} \boldsymbol{g}^k \cdot \boldsymbol{g}^l. \tag{8.7}$$

Tada je

$$\boldsymbol{g}^k = g^{kl} \boldsymbol{g}_l, \qquad \boldsymbol{g}_k = g_{kl} \boldsymbol{g}^l, \tag{8.8}$$

odakle sledi da je

$$g_{kl} g^{lm} = \delta_k^m. \tag{8.9}$$

Svaki vektor i tenzor se mogu predstaviti u odnosu na polaznu i njoj recipročnu bazu. Tako je

$$\begin{gathered} \boldsymbol{v} = v_k \boldsymbol{g}^k = v^k \boldsymbol{g}_k, \\ \boldsymbol{A} = a_{kl} \boldsymbol{g}^k \otimes \boldsymbol{g}^l = a^{kl} \boldsymbol{g}_k \otimes \boldsymbol{g}_l = a^k{}_l \boldsymbol{g}_k \otimes \boldsymbol{g}^l. \end{gathered} \tag{8.10}$$

Ako se tenzor $\boldsymbol{A}$ predstavi u odnosu na polaznu bazu vektora $\boldsymbol{g}_k$, onda kažemo da su a^{kl} njegove *kontravarijantne komponente*; ako se tenzor $\boldsymbol{A}$ predstavlja u odnosu na recipročnu bazu vektora $\boldsymbol{g}^k$, onda su a_{kl} njegove *kovarijantne komponente*; kada se tenzor $\boldsymbol{A}$ predstavlja u odnosu na obe baze jednovremeno onda se kaže da su $a^k{}_l$ njegove *mešovite komponente* — kontravarijantne po gornjem, a kovarijantne po donjem indeksu. Saglasno sa ovim definicijama v_k su kovarijantne, a v^k kontravarijantne komponente vektora $\boldsymbol{v}$.

Kako je

$$I = g_k \otimes g^k = g_{kl} g^k \otimes g^l =$$

$$= g^{kl} g_k \otimes g_l = \delta^l_k g_l \otimes g^k \tag{8.11}$$

sledi da su g_{kl} kovarijantne, g^{kl} kontravarijantne, a δ^k_l mešovite komponente metričkog tenzora $\boldsymbol{I}$ u E.

Neka je $\boldsymbol{f}_k$ jedinični vektor baznog vektora $\boldsymbol{g}_k$, tj.

$$\boldsymbol{f}_k = \frac{\boldsymbol{g}_k}{|\boldsymbol{g}_k|} = \frac{\boldsymbol{g}_k}{\sqrt{g_{kk}}}. \tag{8.12}$$

Tako definisani vektor je bezdimenzioni.

Dalje, neka je

$$v_{\langle k \rangle} = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{f}_k =$$

$$= \frac{v_k}{\sqrt{g_{kk}}} = \frac{g_{kl} v^l}{\sqrt{g_{kk}}}. \tag{8.13}$$

Tada $v_{\langle k \rangle}$ nazivamo *fizičke komponente* vektora $\boldsymbol{v}$, jer imaju istu dimenziju kao sam vektor.

Neka su $\boldsymbol{h}^k$ jedinični vektori recipročne baze $\boldsymbol{g}^k$, tj.

$$\boldsymbol{h}^k = \frac{\boldsymbol{g}^k}{|\boldsymbol{g}^k|} = \frac{\boldsymbol{g}^k}{\sqrt{g^{kk}}}. \tag{8.14}$$

Tada su

$$v^{\langle k \rangle} = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{h}^k = \frac{v^k}{\sqrt{g^{kk}}} = \frac{g^{kl} v_l}{\sqrt{g^{kk}}}, \tag{8.15}$$

takođe fizičke komponente vektora $\boldsymbol{v}$.

U slučaju tenzora $\boldsymbol{A}$ njegove fizičke komponente su

$$\begin{aligned}
a^{\langle kl \rangle} &= \boldsymbol{h}^k \cdot \boldsymbol{A}\boldsymbol{h}^l = \frac{a^{kl}}{\sqrt{g^{kk}}\sqrt{g^{ll}}} = \dots \\
a_{\langle kl \rangle} &= \boldsymbol{f}_k \cdot \boldsymbol{A}\boldsymbol{f}_l = \frac{a_{kl}}{\sqrt{g_{kk}}\sqrt{g_{ll}}} = \dots \\
a_{\langle k}{}^{l \rangle} &= \boldsymbol{f}_k \cdot \boldsymbol{A}\boldsymbol{h}^l = \frac{a_k{}^l}{\sqrt{g_{kk}}\sqrt{g^{ll}}} = \dots \\
a^{\langle k}{}_{l \rangle} &= \boldsymbol{h}^k \cdot \boldsymbol{A}\boldsymbol{f}_l = \frac{a^l{}_k}{\sqrt{g^{ll}}\sqrt{g_{kk}}} = \dots
\end{aligned} \tag{8.16}$$

pri čemu smo sa tačkicama naznačili i druge moguće komponentalne reprezentacije tenzora $\boldsymbol{A}$.

Reprezentacija tenzora preko njegovih fizičkih komponenata nije jedinstvena, ako se ima u vidu da su to komponente tenzora koje imaju istu dimenziju kao i sam tenzor. Npr.: u reprezentacijama

$$\boldsymbol{v} = v^{\hat{k}} \boldsymbol{f}_k = v_{\hat{k}} \boldsymbol{h}^k \tag{8.17}$$

$v^{\hat{k}}$ i $v_{\hat{k}}$ su takođe fizičke komponente vektora $\boldsymbol{v}$.

9. SKALARNA, VEKTORSKA I TENZORSKA POLJA

Skalarnu funkciju $\varphi(x^k)$ definisanu za svako $\boldsymbol{x}(x^k)$ u nekoj oblasti $\mathcal{R}$ u E nazivamo skalarno polje φ nad $\mathcal{R}$.

Na isti način se definiše vektorsko polje $\boldsymbol{v}$, odnosno tenzorsko polje $\boldsymbol{A}$, nad $\mathcal{R}$ u E.

Nas uglavnom interesuju promene polja nad $\mathcal{R}$. Za njihovu komponentalnu reprezentaciju bitno je odrediti promenu baznih vektora duž koordinatnih linija, tj. $\dfrac{\partial \boldsymbol{g}_k}{\partial x^l}$. Iz same definicije baznih vektora $\boldsymbol{g}_k$ sledi da je

$$\frac{\partial \boldsymbol{g}_k}{\partial x^l} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{p}}{\partial x^k \partial x^l} = \frac{\partial \boldsymbol{g}_l}{\partial x^k}, \tag{9.1}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{g}_k}{\partial x^l} \cdot \boldsymbol{g}_k = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{lm}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{km}}{\partial x^l} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m}\right) \equiv [kl, m]. \tag{9.2}$$

Sistem trećeg reda $[kl, m]$ se naziva *Kristofelov* (Christoffel) *simbol prve vrste.*

Po definiciji je

$$\begin{Bmatrix} m \\ k\ l \end{Bmatrix} = g^{mn} [kl, n] \tag{9.3}$$

i naziva se *Kristofelov simbol druge vrste.*

Promene baznih vektora duž koordinatnih linija su takođe vektori i kao takvi se mogu predstaviti u odnosu na bazne vektore $\boldsymbol{g}_k$. Lako je pokazati da je

$$\frac{\partial \boldsymbol{g}_k}{\partial x^l} = \begin{Bmatrix} m \\ k\ l \end{Bmatrix} \boldsymbol{g}_m. \tag{9.4}$$

Za vektore recipročne baze je

$$\frac{\partial \boldsymbol{g}^k}{\partial x^l} = -\begin{Bmatrix} k \\ l\ m \end{Bmatrix} \boldsymbol{g}^m. \tag{9.5}$$

Iz $(8.10)_2$ i (9.4) sledi da je

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x^k} &= \frac{\partial}{\partial x^k}(v^l \boldsymbol{g}_l) = \frac{\partial v^l}{\partial x^k} \boldsymbol{g}_l + v^l \frac{\partial \boldsymbol{g}_l}{\partial x^k} \\ &= \left(\frac{\partial v^l}{\partial x^k} + v^m \begin{Bmatrix} l \\ m k \end{Bmatrix}\right) \boldsymbol{g}_l. \end{aligned}$$

Neka je

$$v^l_{,k} \equiv \frac{\partial v^l}{\partial x^k} + v^m \begin{Bmatrix} l \\ m\ k \end{Bmatrix}. \tag{9.6}$$

Tako definisani sistem $v^l_{,k}$ nazivamo *kovarijantni izvod kontravarijantnih komponenata* vektora $\boldsymbol{v}$. Očigledno je

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x^k} = v^l_{,k} \boldsymbol{g}_l. \tag{9.7}$$

Na isti način, polazeći od $(8.10)_1$, možemo pokazati da je

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x^k} = v_{l,k} \boldsymbol{g}^l. \tag{9.8}$$

gde je

$$v_{l,k} \equiv \frac{\partial v_l}{\partial x^k} - v_m \begin{Bmatrix} m \\ l\ k \end{Bmatrix}. \tag{9.9}$$

Sistem $v_{l,k}$ nazivamo *kovarijantni izvod kovarijantnih komponenata* vektora $\boldsymbol{v}$.

Polazeći od komponentalne reprezentacije tenzorskog polja $\boldsymbol{A}$ lako je pokazati da je

$$\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial x^k} = a^{lm}{}_{,k} \boldsymbol{g}_l \otimes \boldsymbol{g}_m = a^l{}_{m,k} \boldsymbol{g}_l \otimes \boldsymbol{g}^m = a_{lm,k} \boldsymbol{g}^l \otimes \boldsymbol{g}^m \tag{9.10}$$

gde su

$$\begin{aligned} a^{lm}{}_{,k} &= \frac{\partial a^{lm}}{\partial x^k} + a^{rm} \begin{Bmatrix} l \\ r\ k \end{Bmatrix} + a^{lr} \begin{Bmatrix} m \\ r\ k \end{Bmatrix} \\ a^l{}_{m,k} &= \frac{\partial a^l{}_m}{\partial x^k} + a^r{}_m \begin{Bmatrix} l \\ r\ k \end{Bmatrix} - a^l{}_r \begin{Bmatrix} r \\ m\ k \end{Bmatrix} \\ a_{lm,k} &= \frac{\partial a_{lm}}{\partial x^k} - a_{rm} \begin{Bmatrix} r \\ l\ k \end{Bmatrix} - a_{lr} \begin{Bmatrix} r \\ m\ k \end{Bmatrix} \end{aligned} \tag{9.11}$$

i predstavlja kovarijantne izvode tenzora a^{lm}; $a^l{}_m$; a_{lm} redom.

Kovarijantni izvod se definiše i kao gradijent odgovarajućih skalarnih, vektorskih i tenzorskih polja.

Tako je

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} \varphi &= \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} \boldsymbol{g}^k \\ \operatorname{grad} \boldsymbol{u} &= u^k_{,l} \boldsymbol{g}_k \otimes \boldsymbol{g}^l \\ \operatorname{grad} \boldsymbol{A} &= a^k{}_{l,m} \boldsymbol{g}_k \otimes \boldsymbol{g}^l \otimes \boldsymbol{g}^m. \end{aligned} \tag{9.12}$$

Po definiciji je

$$\operatorname{div} \boldsymbol{u} = \operatorname{tr} \operatorname{grad} \boldsymbol{u} = u^k_{,k}. \tag{9.13}$$

Iz (9.2) i izraza $g = \det \{g_{ij}\}$, sledi da je

$$\frac{\partial g}{\partial x^k} = \frac{\partial g}{\partial g_{ij}} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = g g^{ij} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = 2g \begin{Bmatrix} i \\ k\ j \end{Bmatrix}$$

ili

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^k} = \begin{Bmatrix} j \\ k\ j \end{Bmatrix}.$$

Tada iz (9.13) i (9.6) sledi da je

$$\operatorname{div} \boldsymbol{u} = u^k{}_{,k} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}\, u^k}{\partial x^k}. \tag{9.13a}$$

U slučaju tenzorskog polja $\boldsymbol{A}$ definišemo div $\boldsymbol{A}$ kao vektorsko polje za koje je

$$\boldsymbol{a} \cdot \operatorname{div} \boldsymbol{A} = \operatorname{div} \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{a}, \tag{9.14}$$

za svako konstantno $\boldsymbol{a} \in E$. Iz (9.14) sledi da je

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} = A^{ij}{}_{,j}\, \boldsymbol{g}_i. \tag{9.15}$$

Na osnovu tako definisanih pojmova može se pokazati da je

$$\begin{aligned}
&\operatorname{grad}(\varphi \boldsymbol{u}) = \varphi \operatorname{grad} \boldsymbol{u} + \boldsymbol{u} \otimes \operatorname{grad} \varphi,\\
&\operatorname{div}(\varphi \boldsymbol{u}) = \varphi \operatorname{div} \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \cdot \operatorname{grad} \varphi,\\
&\operatorname{grad}(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}) = (\operatorname{grad} \boldsymbol{u})^T \cdot \boldsymbol{v} + (\operatorname{grad} \boldsymbol{v})^T \cdot \boldsymbol{u},\\
&\operatorname{div}(\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{u} \operatorname{div} \boldsymbol{v} + (\operatorname{grad} \boldsymbol{u})\, \boldsymbol{v},\\
&\operatorname{div}(\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u} \cdot \operatorname{div} \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A} : \operatorname{grad} \boldsymbol{u},\\
&\operatorname{div}(\varphi \boldsymbol{A}) = \varphi \operatorname{div} \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A} \operatorname{grad} \varphi.
\end{aligned} \tag{9.16}$$

10. DVOSTRUKA TENZORSKA POLJA

Skalarnu funkciju $\varphi(x^k;\, X^K)$, koja je definisana za svako $\boldsymbol{x} \in \mathcal{R}_x$ i $\boldsymbol{X} \in \mathcal{R}_X$, gde su $\mathcal{R}_x$ i $\mathcal{R}_X$ neke oblasti prostora E nazivamo *dvostrukim skalarnim poljem*. Na sličan način se definišu dvostruka *vektorska i tenzorska polja.*

Neka su $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})$ i $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{X})$ vektori položaja tačaka $\boldsymbol{x} \in \mathcal{R}_x$ i $\boldsymbol{X} \in \mathcal{R}_X$, respektivno, i neka su

$$\boldsymbol{g}_k = \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial x^k}, \qquad \boldsymbol{G}_K = \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial X^K} \tag{10.1}$$

sistemi baznih vektora u $\mathcal{R}_x$ i $\mathcal{R}_X$. Obeležimo sa $\boldsymbol{g}^k$ i $\boldsymbol{G}^K$ njima recipročne sisteme vektora, tj. vektora za koje je

$$\boldsymbol{g}_k \cdot \boldsymbol{g}^l = \delta^l_k, \quad \boldsymbol{G}_K \cdot \boldsymbol{G}^L = \delta^L_K. \tag{10.2}$$

Neka je

$$\boldsymbol{A} = a^l{}_L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{X})\, \boldsymbol{g}_l \otimes \boldsymbol{G}^L \tag{10.3}$$

dvostruko tenzorsko polje. Interesuje nas promena tenzorskog polja $\boldsymbol{A}$ u slučaju kada je $x^k = x^k(X^K)$. Tada je

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial X^K} &= \left(\frac{\partial a^l{}_L}{\partial X^K} + \frac{\partial a^l{}_L}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial X^K}\right) \boldsymbol{g}_l \otimes \boldsymbol{G}^L\\
&+ a^l{}_L \frac{\partial \boldsymbol{g}_l}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial X^K} \otimes \boldsymbol{G}^L + a^l{}_L \boldsymbol{g}_l \otimes \frac{\partial \boldsymbol{G}^L}{\partial X^K}
\end{aligned}$$

$$= \left(\frac{\partial a^l{}_L}{\partial X^K} + \frac{\partial a^l{}_L}{\partial x^k} x^k_{;K}\right) \boldsymbol{g}_l \otimes \boldsymbol{G}^L +$$

$$+ a^m{}_L \begin{Bmatrix} l \\ k\ m \end{Bmatrix} x^k_{;K} \boldsymbol{g}_l \otimes \boldsymbol{G}^L - a^l{}_L \left\{ {L \atop KM} \right\} \boldsymbol{g}_l \otimes \boldsymbol{G}^M$$

$$= \left[\frac{\partial a^l{}_L}{\partial X^K} - a^l{}_M \left\{ {M \atop LK} \right\} + \left(\frac{\partial a^l{}_L}{\partial x^k} + a^m{}_L \begin{Bmatrix} l \\ m\ k \end{Bmatrix}\right) x^k_{;K}\right] \boldsymbol{g}_l \otimes \boldsymbol{G}^L$$

$$= (a^l{}_{L,K} + a^l{}_{L,k} x^k_{;K}) \boldsymbol{g}_l \otimes \boldsymbol{G}^L$$

$$= a^l{}_{L;K} \boldsymbol{g}_l \otimes \boldsymbol{G}^L,$$

pri čemu smo koristili pojam kovarijantnog parcijalnog izvoda tenzora $a^l{}_L$ po koordinatama x^k i X^K i uveli oznaku

$$a^l{}_{L,K} \equiv a^l{}_{L,K} + a^l{}_{L,K} x^k_{;K}; \qquad x^k_{;K} \equiv \frac{\partial x^k}{\partial X^K}. \tag{10.4}$$

Tako definisanu tenzorsku veličinu $a^l{}_{L;K}$ nazivamo *totalni kovarijantni izvod* tenzora $a^l{}_L$.

Na isti način se može pokazati da je, za $X^K = X^K(x^l)$,

$$a^l{}_{L;k} = a^l{}_{L,k} + a^l{}_{L,K} X^K_{;k}; \qquad X^K_{;k} \equiv \frac{\partial X^K}{\partial x^k}. \tag{10.5}$$

Takođe je

$$a^l{}_{L;K} = a^l{}_{L;k} x^k_{;K}; \qquad a^l{}_{L;k} = a^l{}_{L;K} X^K_{;k}. \tag{10.6}$$

Primeri dvostrukih tenzorskih polja su tenzori

$$\boldsymbol{F} = \frac{\partial x^k (X^L)}{\partial X^K} \boldsymbol{g}_k \otimes \boldsymbol{G}^K, \quad \boldsymbol{G} = g^k_K \boldsymbol{g}_k \otimes \boldsymbol{G}^K \tag{10.7}$$

gde je $g^K_k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{X}) = \boldsymbol{g}_k(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{G}^K(\boldsymbol{X})$.

11. INTEGRALNE TEOREME

Teorema o divergenciji: *Neka je V jednostruko povezana oblast prostora E, čija je granična površ S. Neka je $\boldsymbol{n}$ jedinični vektor spoljne normale površi S i neka je $\boldsymbol{T}$ tenzorsko polje, neprekidno i diferencijabilno u V. Onda je*

$$\int_S \boldsymbol{T}\boldsymbol{n}\, dA = \int_V \operatorname{div} \boldsymbol{T}\, dV. \tag{11.1}$$

Dokaz teoreme se zasniva na poznatoj teoremi o divergenciji vektorskih polja

$$\int_S \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n}\, dA = \int_V \operatorname{div} \boldsymbol{u}\, Vd. \tag{11.2}$$

Onda je

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\int_S \boldsymbol{T}\boldsymbol{n}\,dA &= \int_S \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{T}\boldsymbol{n}\,dA = \int_S (\boldsymbol{T}^T\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{n}\,dA\\ &= \int_V \operatorname{div}(\boldsymbol{T}^T\boldsymbol{a})\,dv = \int_V \boldsymbol{a}\cdot\operatorname{div}\boldsymbol{T}\,dv\\ &= \boldsymbol{a}\cdot\int_S \operatorname{div}\boldsymbol{T}\,dA,\end{aligned}$$

za svako konstantno $\boldsymbol{a}$. □

U specijalnom slučaju kada je $\boldsymbol{T} = \varphi\boldsymbol{I}$, gde je φ skalarno polje iz (11.1) sledi da je

$$\int_S \varphi\boldsymbol{n}dA = \int_V \operatorname{grad}\varphi\, dV. \tag{11.3}$$

Stoksova (Stokes) teorema: *Neka je S deo pnvrši ograničen zatvorenom glatkom krivom lnijom C i neke je* $\boldsymbol{u}$ *vektorsko polje neprekidno i diferencijabilno nad S. Onda je*

$$\int_S \operatorname{rot}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}\,dA = \oint_C \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{t}ds, \tag{11.4}$$

gde je $\boldsymbol{t}$ *jedinični vektor na C, a s njen luk.*

Dokaz teoreme je opšte poznat.

B. Tenzorske funkcije

1. OSNOVNI POJMOVI I DEFINICIJE

Iz praktičnih razloga najčešće ćemo razmatrati tenzore drugog i nižeg reda. Skup svih tenzora drugog reda $\boldsymbol{A}$ formira prostor $\mathscr{L}$ od n^2 dimenzija, dok skup simetričnih tenzora formira prostor $\mathscr{S}$ od $\frac{1}{2}\, n(n+1)$ dimenzija. Prostor $\mathscr{S}$ je podprostor prostora $\mathscr{L}$, tj. $\mathscr{S} \subset \mathscr{L}$.

> ***Definicija:*** *Bilo koja funkcija čije su promenljive i vrednosti tenzori naziva se* ***tenzorska funkcija.***

Specijalno, tenzorska funkcija nultog reda naziva se *skalarna funkcija.*

Skalarna funkcija

$$\varphi = \varphi(\boldsymbol{A}) \tag{1.1}$$

tj., funkcija čija je vrednost skalar, a nezavisno promenljiva tenzor $\boldsymbol{A}$ iz $\mathscr{L}$ ili $\mathscr{S}$ biće za nas od posebnog interesa. Ista funkcija se može pisati u komponentalnom obliku

$$\varphi = \varphi(A_{kl}, \boldsymbol{g}_m) \tag{1.2}$$

gde su A_{kl} kovarijantne komponente tenzora $\boldsymbol{A}$, a $\boldsymbol{g}_m$ sistem baznih vektora. U (1.2) φ je realna funkcija n^2 promenljivih A_{kl} ako je $\boldsymbol{A} \in \mathscr{L}$, odnosno $\dfrac{n(n+1)}{2}$ promenjivih A_{kl}, $k \leqslant l$, ako je $\boldsymbol{A} \in \mathscr{S}$. Zavisnost funkcije φ od $\boldsymbol{g}_k$ je neminovna kada se tenzorsko polje $\boldsymbol{A}$ izražava u odnosu na krivolinijske koordinate. U tom slučaju $\boldsymbol{g}_m$, A_{kl} pa prema tome i vrednost funkcije φ se, u opštem slučaju, menjaju od tačke do tačke.

Mi ćemo pisati (1.2) u obliku

$$\varphi = \varphi(A_{kl}) \tag{1.2a}$$

kada naglašavanje eksplicitne zavisnosti od $\boldsymbol{g}_k$ nije bitno. Na isti način se postupa i u slučaju kada je φ skalarna funkcija više tenzorskih promenljivih.

Primeri takvih funkcija su

$$\varphi = tr\, \boldsymbol{A}^m, \quad \varphi(\boldsymbol{A}) = \det \boldsymbol{A}, \quad \varphi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) = tr\, \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^n. \tag{1.3}$$

Za nas je, dalje, od interesa tenzorska funkcija

$$\boldsymbol{M} = \widetilde{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{A}) \tag{1.4}$$

čija je vrednost tenzor $\boldsymbol{M}$ a promenljiva tenzor $\boldsymbol{A}$. Komponentalni oblik od (1.4) je

$$M_{kl} = \widetilde{M}_{kl}(A_{pq}; \boldsymbol{g}_r) \quad \text{ili} \quad M_{kl} = \widetilde{M}_{kl}(A_{pq}) \tag{1.5}$$

u zavisnosti od toga da li želimo ili ne da naglasimo zavisnost od baze $\boldsymbol{g}_r$. Očigledno je da (1.5) sadrži n^2 ili $\frac{n(n+1)}{2}$ funkcija $\widetilde{M}_{kl}$ u zavisnosti od toga da li je $\boldsymbol{M} \in \mathscr{L}$ ili $\boldsymbol{M} \in \mathscr{S}$. $\widetilde{\boldsymbol{M}}$ je funkcija n^2 ili $\frac{n(n+1)}{2}$ promenljivih A_{kl} u zavisnosti od toga da li je $\boldsymbol{A} \in \mathscr{L}$ ili $\boldsymbol{A} \in \mathscr{S}$. U slučaju da je $\widetilde{\boldsymbol{M}}$ funkcija više tenzorskih promenljivih razmatranja bi bila analogna.

Primeri tenzorskih funkcija su *tenzorski polinomi*. Oni su linearna kombinacija, sa konstantnim koeficijentima, proizvoda promenljivih $\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \ldots, \boldsymbol{A}_r$. Svaki član tenzorskog polinoma je oblika

$$c\boldsymbol{A}_{\alpha_1}^{p_1}\, \boldsymbol{A}_{\alpha_2}^{p_2} \ldots \boldsymbol{A}_{\alpha_s}^{p_s} \tag{1.6}$$

gde je c konstanta, $p_1, p_2, \ldots, p_s$ prirodni brojevi, a $\alpha_1, \ldots, \alpha_r = 1, \ldots, r$.

Drugi primer su *tenzorski redovi* koji predstavljaju beskonačan zbir članova datih sa (1.6) koji konvergira. U slučaju jedne tenzorske promenljive tenzorski red ima oblik

$$\boldsymbol{M} = \widetilde{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{A}) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \boldsymbol{A}^k. \tag{1.7}$$

Ako je samo konačan broj komponenti različit od nule, tenzorski red (1.7) se svodi na tenzorski polinom jedne tenzorske promenljive. Ako je $\boldsymbol{A} \in \mathscr{S}$ onda je i $\boldsymbol{M} \in \mathscr{S}$.

Tenzorski redovi predstavljaju usku klasu tenzorskih funkcija. Čak i u slučaju kada su komponente $M_{kl}(A_{pq})$ tenzorske funkcije predstavljene konvergentnim redom ili polinomom, tenzorska funkcija ne mora biti tenzorski red ili polinom što se vidi iz sledećih primera

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A}^T, \quad \boldsymbol{M}(\boldsymbol{A}) = (tr\, \boldsymbol{A})\boldsymbol{I}, \quad \boldsymbol{M}(\boldsymbol{A}) = \sqrt{\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I}}. \tag{1.8}$$

U poslednjem primeru $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I}$ mora biti pozitivno semidefinitno i simetrično.

2. INVARIJANTE I IZOTROPNE TENZORSKE FUNKCIJE

Definicija 1: *Skalarna funkcija* $\varphi(\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \ldots, \boldsymbol{A}_r)$ *se naziva* ***izotropnom*** *ako relacija*

$$\varphi(\boldsymbol{A}_1, \ldots, \boldsymbol{A}_r) = \varphi(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{Q}^T, \ldots, \boldsymbol{Q}\boldsymbol{A}_r\boldsymbol{Q}^T) \tag{2.1}$$

važi za svaki ortogonalni tenzor $\boldsymbol{Q}$ *i svako* $\boldsymbol{A}_s$ $(s = 1, \ldots, r)$ *u domenu definisanosti funkcije* φ.

Kažemo da je φ izotropna funkcija u odnosu na g, gde je g podgrupa ortogonalne grupe $\mathcal{O}$ ako (2.1) važi za svako $\boldsymbol{Q}$ iz g.

Skalarna izotropna funkcija $\varphi(\boldsymbol{A})$ jedne nezavisno promenljive se naziva *ortogonalna invarijanta*, ili kratko *invarijanta* od $\boldsymbol{A}$. U slučaju više nezavisno promenljivih $\boldsymbol{A}_s$, $(s = 1, 2, \ldots)$, koristi se termin *simultana invarijanta*. Svi primeri u (1.3) predstavljaju invarijante.

Od posebnog značaja za nas su *glavne invarijante* $I_k(\boldsymbol{A})$, $(k = 1, 2, \ldots, n)$, tenzora $\boldsymbol{A}$ koje su definisane kao koeficijenti $(a\boldsymbol{I} + \boldsymbol{A})$ polinoma $\det(a\boldsymbol{I} + \boldsymbol{A})$ po a. Mi pišemo

$$\det(a\boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}) = a^n + I_1(\boldsymbol{A})\, a^{n+1} + \ldots + I_{n-1}(\boldsymbol{A})\, a + I_n(\boldsymbol{A})$$

$$= \sum_{k=0}^{n} I_k(\boldsymbol{A})\, a^{n-k}, \tag{2.2}$$

gde je

$$I_k(\boldsymbol{A}) = \frac{1}{k!}\, \delta^{l_1 \ldots l_k}_{m_1 \ldots m_k}\, a^{m_1}_{l_1} \ldots a^{m_k}_{l_k} \tag{2.2a}$$

i $I_0 \equiv 1$.

Glavne invarijante $I_k(\boldsymbol{A})$, $(k = 1, 2, \ldots, n)$, možemo definisati i kao koeficijente *karakteristične jednačine*

$$\det(a\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = a^n - I_1(\boldsymbol{A})\, a^{n-1} + \ldots + (-1)^n I_n(\boldsymbol{A})$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k I_k(\boldsymbol{A})\, a^{n-k} = 0. \tag{2.3}$$

Ista jednačina se može izraziti u obliku

$$\prod_{k=1}^{n} (a - a_k) = 0, \tag{2.3a}$$

gde su a_k rešenja karakteristične jednačine (2.3) poznate pod imenom *karakteristične vrednosti tenzora* $\boldsymbol{A}$, koje ne moraju biti sve međusobno različite. Upoređivanjem koeficijenata u izrazima (2.3) i (2.3a) lako je pokazati da je

$$\begin{aligned} I_1(\boldsymbol{A}) &= a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \\ I_2(\boldsymbol{A}) &= a_1 a_2 + a_1 a_3 + \ldots + a_{n-1} a_n, \\ &\;\;. \\ &\;\;. \\ &\;\;. \\ I_n(\boldsymbol{A}) &= a_1 a_2 \ldots a_n. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Desne strane izraza (2.4) predstavljaju *elementarne simetrične funkcije*. Prema tome možemo kazati:

> *Glavne invarijante se mogu predstaviti odgovarajućim elementarnim simetričnim funkcijama.*

Specijalno, iz (2.2a) za $k = 1$ i $k = n$ sledi

$$I(\boldsymbol{A}) = tr\,\boldsymbol{A}, \quad I_n(\boldsymbol{A}) = \det \boldsymbol{A}, \tag{2.5}$$

respektivno.

Od značaja su i *momentne invarijante* $\bar{I}_k(A)$ definisane izrazom

$$\bar{I}_k(A) = tr\,\boldsymbol{A}^k. \tag{2.6}$$

U slučaju trodimenzionalnih prostora koriste se oznake

$$I_1(\boldsymbol{A}) = I_A, \quad I_2(\boldsymbol{A}) = II_A, \quad I_3(\boldsymbol{A}) = III_A \tag{2.7}$$

za glavne invarijante i

$$\bar{I}_A, \overline{II}_A, \overline{III}_A \tag{2.8}$$

za momentne invarijante. Ako se zna da je reč samo o invarijantama tenzora $\boldsymbol{A}$ može se u (2.7) i (2.8) označavanje uprostiti ispuštanjem oznake tenzora $\boldsymbol{A}$.

Na osnovu (2.4) i (2.6) moguće je uspostaviti vezu između glavnih i momentnih invarijanti. U prostoru od tri dimenzije date su izrazima

$$\bar{I}_A = I_A, \quad \overline{II}_A = I_A^2 - 2II_A, \quad \overline{III}_A = I_A^3 - 3I_A III_A + 3III_A. \tag{2.9}$$

Kada je reč o simultanim invarijantama, nas će najčešće interesovati invarijanta u obliku

$$\varphi(\boldsymbol{A}_1, \ldots, \boldsymbol{A}_r) = tr\,\boldsymbol{A}_{\alpha_1}^{p_1}, \boldsymbol{A}_{\alpha_2}^{p_2} \ldots \boldsymbol{A}_{\alpha_r}^{p_r}. \tag{2.10}$$

Definicija 2: *Za tenzorsku funkciju $\widetilde{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{A}_1, \ldots \boldsymbol{A}_r)$ se kaže da je* ***izotropna*** *ako relacija*

$$\boldsymbol{Q}\widetilde{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{A}_1, \ldots, \boldsymbol{A}_r)\boldsymbol{Q}^T = \widetilde{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{Q}^T, \ldots, \boldsymbol{Q}\boldsymbol{A}_r\boldsymbol{Q}^T) \tag{2.11}$$

važi za sve ortogonalne tenzore $\boldsymbol{Q}$ i sve $\boldsymbol{A}_s$, $(s = 1, \ldots, r)$, u domenu definisanosti $\widetilde{\boldsymbol{M}}$. Kažemo da je $\widetilde{\boldsymbol{M}}$ izotropno u odnosu na g ako (2.11) važi za sve $\boldsymbol{Q}$ grupe g koja je podgrupa svih ortogonalnih tenzora $\mathcal{O}$.

Primeri izotropnih tenzorskih funkcija su tenzorski polinomi, tenzorski redovi i prve dve funkcije u (1.8).

Pojam izotropije i izotropije u odnosu na podgrupu g, $g \subset \mathcal{O}$, može biti proširen na funkcije čije su promenljive skalari, vektori ili tenzori bilo kog reda.

U slučaju tenzora višeg reda od dva nužna je komponentalna reprezentacija. U tom slučaju izotropija u odnosu na g znači da funkcionalna relacija ostaje nepromenjena kada se svaki nezavisno promenljivi tenzor $\boldsymbol{A}$ zameni tenzorom $\bar{\boldsymbol{A}}$ čije su komponente $\bar{A}_{k_1 \ldots k_\gamma}$ vezane sa komponentama $A_{k_1 \ldots k_\gamma}$ tenzora $\boldsymbol{A}$ preko transformacionog pravila

$$\bar{A}_{k_1 \ldots k_\gamma} = Q_{k_1}{}^{m_1} \ldots Q_{k_\gamma}{}^{m_\gamma} A_{m_1 \ldots m_\gamma} \tag{2.12}$$

gde je $\boldsymbol{Q}\,\{Q_k{}^l\}$ bilo koji element g.

Tako je skalarna funkcija $\varphi(A_{k_1 \ldots k_\gamma})$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, \gamma)$ izotropna u odnosu na g ako i samo ako funkcionalna relacija

$$\varphi(A_{k_1 \ldots k_\gamma}) = \varphi(Q_{k_1}{}^{m_1} \ldots Q_{k_\gamma}{}^{m_\gamma} A_{m_1 \ldots m_\gamma}) \tag{2.13}$$

važi za svako ortogonalno $\boldsymbol{Q}$ iz g i svako $A_{k_1 \ldots k_\gamma}$ iz domena definisanosti φ. Za tenzorsku funkciju $M_{i_1 \ldots i_\alpha}(A_{k_1 \ldots k_\gamma})$ se kaže da je izotropna u odnosu na g ako i samo ako relacija

$$Q_{i_1}{}^{j_1} \ldots Q_{i_\alpha}{}^{j_\alpha} M_{j_1 \ldots j_\alpha}(A_{k_1 \ldots k_\gamma}) = M_{i_1 \ldots i_\alpha}(Q_{k_1}{}^{l_1} \ldots Q_{k_\gamma}{}^{l_\gamma} A_{l_1 \ldots l_\gamma}) \tag{2.14}$$

važi za svako $\boldsymbol{Q} \in g$ i svako $A_{k_1 \ldots k_\gamma}$ iz domena definisanosti $M_{i_1 \ldots i_\alpha}$.

Na analogan način se definiše izotropna tenzorska funkcija više nezavisno promenljivih. Samo po sebi se razume da se (2.11) takođe može predstaviti u komponentalnom obliku.

U specijalnom slučaju kada je reč o vektoru $\boldsymbol{v}$ ili tenzoru drugog reda $\boldsymbol{A}$, (2.12) daje

$$\bar{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{v}, \quad \bar{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}^T \tag{2.15}$$

respektivno. Tada je vektorska funkcija $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{v})$ izotropna u odnosu na g ako i samo ako je

$$\boldsymbol{Q}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}^T, \boldsymbol{Q}\boldsymbol{v}) \tag{2.16}$$

za svako $\boldsymbol{A} \in \mathscr{L}$, sve vektore $\boldsymbol{v}$ i sve $\boldsymbol{Q} \in g$.

Ako je g potpuno ortogonalna grupa $\mathcal{O}$ onda funkciju izotropnu u odnosu na $\mathcal{O}$ nazivamo jednostavno *izotropnom*. Ako je g svojstvena grupa ortogonalnih transformacija ($\det \boldsymbol{Q} = +1$) onda se funkcija izotropna u odnosu na g naziva *hemitropna*. Primer hemitropne ali ne i izotropne funkcije je vektorski proizvod vektora $\boldsymbol{v}$ i $\boldsymbol{w}$ jer je tada za svako ortogonalno $\boldsymbol{Q}$

$$\boldsymbol{Q}\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{Q}\boldsymbol{w} = (\det \boldsymbol{Q})\, \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}). \tag{2.17}$$

Primer skalarne funkcije koja je hemitropna ali ne i izotropna predstavlja funkcija

$$\varphi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{v}) = \varepsilon^{klm} A_{kl} v_m \tag{2.18}$$

gde je ε^{klm} Ričijev (Ricci) tenzor alternacije. Ona je ujedno primer simultane invarijante koja je hemitropna, a ne i izotropna.

Kada je dimenzija prostora neparna i kada su zavisno promenljive i nezavisno promenljive tenzori parnog reda ne postoji razlika između hemitropnih i izotropnih funkcija. U tom slučaju transformacija (2.14), za α i γ parno ostaje nepromenjena kada se $\boldsymbol{Q}$ zameni sa $-\boldsymbol{Q}$.

3. UNUTRAŠNJI IZVOD TENZORSKE FUNKCIJE

Za funkcije koje ovde razmatramo pretpostavljamo da su neprekidne i diferencijabilne po svojim argumentima u domenu definisanosti do reda koji nam treba.

Podsetimo se prvo izvoda $f'(x)$ realne funkcije realne promenljive $y = f(x)$ koji je, kao što znamo, definisan sa

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} [f(x+h) - f(x)] \tag{3.1}$$

gde je h realan broj. Postavlja se pitanje: kako bi glasila definicija izvoda tenzorske funkcije čija je promenljiva tenzor. Primera radi posmatrajmo vektorsku funkciju vektorske promenljive $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{v})$. Formalno, po analogiji sa (3.1), možemo pisati

$$\lim_{\boldsymbol{u}\to 0} \frac{1}{\boldsymbol{u}} [\boldsymbol{f}(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{v})]$$

iz čega se vidi da takav izraz sadrži operaciju deljenja sa vektorom što nema nikakvog smisla.

Ponovo se vratimo izvodu realne funkcije realne promenljive. Njega možemo izračunati i na način koji se malo razlikuje od (3.1). Označimo sa $f'(x; z)$ veličinu koja je definisana izrazom

$$f'(x; z) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} [f(x + hz) - f(x)] = \frac{d}{dh} f(x + hz)\Big|_{h=0}. \tag{3.2}$$

Lako je pokazati da je ovako definisana veličina linearna funkcija z i da je

$$f'(x; z) = f'(x)\, z. \tag{3.3}$$

Ova relacija daje vezu između $f'(x; z)$ i $f'(x)$.

Analogno tome, u slučaju vektorske funkcije $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{v})$ obeležimo sa $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{v}; \boldsymbol{u})$ graničnu vrednost

$$\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{v}; \boldsymbol{u}) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} [\boldsymbol{f}(\boldsymbol{v} + h\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{v})] = \frac{d}{dh} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{v} + h\boldsymbol{u})\Big|_{h=0} \tag{3.4}$$

kada ova vrednost postoji.

Tako određena vektorska veličina $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{v}; \boldsymbol{u})$ se naziva *unutrašnji izvod* funkcije $\boldsymbol{w}$ u $\boldsymbol{v}$ pri priraštaju $\boldsymbol{u}$.

> ***Teorema:*** *Unutrašnji izvod vektorske funkcije vektorske promenljive je linearna funkcija po priraštaju, tj.,*
>
> $$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{v}; a\boldsymbol{u}) &= a\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{v}; \boldsymbol{u}) \\ \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{v}; \boldsymbol{u} + \boldsymbol{t}) &= \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{v}; \boldsymbol{u}) + \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{v}; \boldsymbol{t}) \end{aligned}\right\} \tag{3.5}$$
>
> *za svako realno a i svaki vektor $\boldsymbol{u}$ i svaki vektor $\boldsymbol{t}$.*

Dokaz: Prvo ćemo pokazati da važi $(3.5)_1$. Prema (3.4) je

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{v}; a\boldsymbol{u}) &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} [\boldsymbol{f}(\boldsymbol{v} + ha\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{v})] \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{a}{ah} [\boldsymbol{f}(\boldsymbol{v} + ha\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{v})] \\ &= a \lim_{k\to 0} \frac{1}{k} [\boldsymbol{f}(\boldsymbol{v} + k\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{v})] \\ &= a\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{v}; \boldsymbol{u}). \end{aligned}$$

Takođe, saglasno sa (3.4), je

$$f'(\boldsymbol{v}; \boldsymbol{u} + \boldsymbol{t}) = \lim_{h\to 0} [\boldsymbol{f}(\boldsymbol{v} + h\boldsymbol{u} + h\boldsymbol{t}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{v})]$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} [\boldsymbol{f}(\boldsymbol{v} + h\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{v})] +$$

$$+ \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{v} + h\boldsymbol{u} + h\boldsymbol{t}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{v} + h\boldsymbol{u})]$$

$$= \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{v}; \boldsymbol{u}) + \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{v}; \boldsymbol{t})$$

čime je dokazano tvrđenje (3.5).

Na osnovu ove teoreme sledi da je $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{v}; \boldsymbol{u})$ linearna transformacija od $\boldsymbol{u}$. Drukčije rečeno:

$$\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{v}; \boldsymbol{u}) = \frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{v})}{\partial \boldsymbol{v}} [\boldsymbol{u}] \tag{3.6}$$

gde je $\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{v}}$ linearna transformacija, tenzor drugog reda i naziva se *gradijent* funkcije $\boldsymbol{f}$ po $\boldsymbol{v}$. Označava se takođe sa $\boldsymbol{f}_v$, $\boldsymbol{f}_v(\boldsymbol{v})$ i $D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{v})$.

Iz (3.6) i (3.4) sledi da je

$$\boldsymbol{f}_v(\boldsymbol{v})[\boldsymbol{u}] = D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{v})[\boldsymbol{u}] = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} [\boldsymbol{f}(\boldsymbol{v} + h\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{v})]. \tag{3.7}$$

Tada za svaku funkciju $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{v})$ koja ima izvod u $\boldsymbol{v}$ možemo pisati

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{v}) + \boldsymbol{f}_v(\boldsymbol{v})[\boldsymbol{u}] + \boldsymbol{0}(\boldsymbol{u}) \tag{3.8}$$

gde $\boldsymbol{0}(\boldsymbol{u}) \to 0$ kada $\boldsymbol{u} \to 0$. Ovaj izraz se koristi pri direktnom izračunavanju $\boldsymbol{f}_v(\boldsymbol{v})$.

Pri određivanju izvoda vektorske funkcije važe uobičajna pravila diferenciranja. Na primer: za $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{v}))$ važi pravilo složenog diferenciranja

$$\boldsymbol{g}_v = \boldsymbol{g}_f \boldsymbol{f}_v \tag{3.9}$$

pri čemu se poredak proizvoda $\boldsymbol{g}_f\boldsymbol{f}_v$ ne može menjati. Takođe se i u slučaju izvoda proizvoda vektorskih funkcija ne može menjati mesto činilaca.

U specijalnom slučaju kada je $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{f}(t)$, gde je t parametar, iz (3.7) dobijamo da je

$$\boldsymbol{f}_t(t)[\alpha] = \alpha \boldsymbol{f}'(t). \tag{3.10}$$

Sva ova razmatranja se mogu primeniti na tenzorske funkcije uopšte. Mi ćemo se dalje zadržati na tenzorskim funkcijama čija je promenljiva tenzor drugog reda.

4. GRADIJENT TENZORSKE FUNKCIJE

Prvo ćemo razmotriti skalarnu funkciju $\varphi(\boldsymbol{A}) \equiv \varphi(A_{kl})$ pretpostavljajući da je neprekidna i diferencijabilna funkcija svojih argumenata A_{kl}. Funkcije f^{kl} definisane sa $f^{kl} \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial A_{kl}}$ su kontravarijantne komponente tenzorske funkcije koju označavamo sa

$$\frac{\partial\varphi}{\partial A} = \varphi_A(\boldsymbol{A}) = \varphi_A \tag{4.1}$$

i koju nazivamo *gradijent* funkcije φ. Jasno je da gradijent φ_A može biti definisan na direktan način preko unutrašnjeg izvoda:

$$\frac{d}{ds}\varphi(\boldsymbol{A}+s\boldsymbol{C})|_{s=0} = \frac{\partial\varphi}{\partial A_{kl}} C_{kl} = tr\,(\varphi_A^T\boldsymbol{C}) = tr\,(\varphi_A\boldsymbol{C}^T) \tag{4.2}$$

gde je $\boldsymbol{C}$ proizvoljan tenzor.

U slučaju kada je $\varphi(\boldsymbol{A})$ definisano samo za simetrične tenzore $\boldsymbol{A}\in\mathcal{S}$ mora biti i $\boldsymbol{C}$ simetrično u (4.2). Tada je i φ_A simetrično, tj., $\varphi_A = \varphi_A^T$, pri čemu se za dobijanje komponenata $\frac{\partial\varphi}{\partial A_{kl}}$ od φ_A mora proširiti domen definisanosti φ na prostor $\mathcal{L}$ stavljanjem $\bar{\varphi}(\boldsymbol{A}) = \varphi\left(\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^T)\right)$ i uzimanjem izvoda $\bar{\varphi}(\boldsymbol{A})$ u odnosu na n^2 komponenata A_{kl} od $\boldsymbol{A}\in\mathcal{L}$. Kada se nađu ovi izvodi, ponovo se $\boldsymbol{A}$ ograničava na $\mathcal{S}$ za dobijanje φ_A. Npr.: ako je $\varphi(\boldsymbol{A}) = A_{12}$ za $\boldsymbol{A}\in\mathcal{S}$ onda je $\frac{\partial\varphi}{\partial A_{12}} = \frac{\partial\varphi}{\partial A_{21}} = \frac{1}{2}$. O tome nismo morali voditi računa kada je nezavisno promenljiva veličina bila vektor ili parametar.

Teorema 1: *Ako je $\varphi(\boldsymbol{A})$ invarijanta, onda je φ_A izotropna funkcija.*

Dokaz: Ako je $\varphi(\boldsymbol{A})$ invarijanta, onda, saglasno sa (2.1), relacija

$$\varphi(\boldsymbol{A}) = \varphi(\boldsymbol{QAQ}^T), \tag{4.3}$$

ili, saglasno sa (2.13), njena komponentalna reprezentacija

$$\varphi(A_{kl}) = \varphi(\bar{A}_{kl}) = \varphi(Q_k{}^m Q_l{}^n A_{mn}) \tag{4.4}$$

važi za svako ortogonalno $\boldsymbol{Q}$ i svako $\boldsymbol{A}$ u domenu definisanosti f-je φ. Tada je

$$\frac{\partial\varphi}{\partial A_{kl}} = \frac{\partial\varphi}{\partial\bar{A}_{mn}}\frac{\partial\bar{A}_{mn}}{\partial A_{kl}} = Q_m{}^k Q_n{}^l \frac{\partial\varphi}{\partial\bar{A}_{mn}}$$

ili

$$\varphi_A = \boldsymbol{Q}^T\varphi_{\bar{A}}\boldsymbol{Q}.$$

Kako je $\bar{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{QAQ}^T$ i $\boldsymbol{QQ}^T = \boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{I}$ prethodna relacija postaje

$$\varphi_{QAQ^T} = \boldsymbol{Q}\varphi_A\boldsymbol{Q}^T \tag{4.5}$$

i važi za svako ortogonalno $\boldsymbol{Q}$ i svako $\boldsymbol{A}$ u domenu definisanosti. f-je φ Znači, prema definiciji izotropnih funkcija, φ_A je izotropna funkcija.

Ova teorema se može primeniti i na simultane invarijante kada se može pokazati da su parcijalni gradijenti simultane invarijante takođe izotropne funkcije.

Za nas su od posebnog interesa gradijenti glavnih invarijanti $I_k(\boldsymbol{A})$. Neka je $\det\boldsymbol{A}\neq 0$. Potražimo gradijent invarijante $\varphi(\boldsymbol{A}) = I_n(\boldsymbol{A}) = \det\boldsymbol{A}$ koristeći (4.2).

Pišemo

$$\det(\boldsymbol{A} + s\boldsymbol{C}) = s^n (\det \boldsymbol{A}) \det\left(\frac{1}{s}\boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}\right)$$

$$= (\det \boldsymbol{A}) \{1 + I_1(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}) s + \ldots + I_n(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}) s^n\}.$$

Druga jednakost se dobija iz prve kada se u (2.2) a identifikuje sa $\frac{1}{s}$, a $\boldsymbol{A}$ sa $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}$. Tada je

$$\frac{d}{ds}\det(\boldsymbol{A} + s\boldsymbol{C})\,|_{s=0} = (\det \boldsymbol{A})\, I_1(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C})$$

$$= tr\,\{(\det \boldsymbol{A})\, \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}\}.$$

Pošto je $\boldsymbol{C}$ proizvoljno, prema (4.2), sledi da je

$$\frac{\partial I_n(\boldsymbol{A})}{\partial \boldsymbol{A}} = \frac{\partial \det \boldsymbol{A}}{\partial \boldsymbol{A}} = \det_{\boldsymbol{A}} \boldsymbol{A} = (\det \boldsymbol{A})\,(\boldsymbol{A}^{-1})^T. \tag{4.6}$$

U odnosu na ortonormiranu bazu, (4.6) možemo predstaviti u sledećem komponentalnom obliku

$$\frac{\partial}{\partial A_{kl}} \det ||A_{pq}|| = \mathcal{A}_{lk} \tag{4.7}$$

gde je $\mathcal{A}_{lk}$ kofaktor elementa A_{kl} matrice $||A_{kl}||$. Važno je uočiti da gradijent $\det_{\boldsymbol{A}} \boldsymbol{A}$ predstavlja takođe primer izotropne tenzorske funkcije koja nije tenzorski polinom mada su njegove komponentne polinomi.

Za određivanje gradijenata drugih glavnih invarijanti $I_k(\boldsymbol{A})$ možemo poći od $(2.2)_2$ odakle imamo

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{A}} \det(a\boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}) = \sum_{k=0}^{n} a^{n-k} \frac{\partial I_k}{\partial \boldsymbol{A}}.$$

Takođe je, s obzirom na (4.6)

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{A}} \det(a\boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}) = \det(a\boldsymbol{I} + \boldsymbol{A})\,[(a\boldsymbol{I} + \boldsymbol{A})^{-1}]^T.$$

Iz ove dve jednakosti sledi da je

$$\boldsymbol{I} \det(a\boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}) = (a\boldsymbol{I} + \boldsymbol{A})^T \sum_{k=0}^{n} a^{n-k} \frac{\partial I_k}{\partial \boldsymbol{A}}$$

ili, s obzirom na $(2.2)_2$

$$\boldsymbol{I} \sum_{k=0}^{n} a^{n-k} I_k = \boldsymbol{I} \sum_{k=0}^{n} a^{n-k+1} \frac{\partial I_k}{\partial \boldsymbol{A}} + \boldsymbol{A}^T \sum_{k=0}^{n} a^{n-k} \frac{\partial I_k}{\partial \boldsymbol{A}}.$$

Izjednačavajući koeficijente uz iste stepene po a dobijamo rekurentni obrazac

$$\frac{\partial I_{k+1}}{\partial \boldsymbol{A}} = I_k \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}^T \frac{\partial I_k}{\partial \boldsymbol{A}}, \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n), \tag{4.8}$$

gde je $I_0 \equiv 1$ i $I_{n+1} \equiv 0$. Dalje, korišćenjem matematičke indukcije lako se pokazuje da je

$$\frac{\partial I_k(\boldsymbol{A})}{\partial \boldsymbol{A}} = \sum_{p=0}^{k-1} (-1)^p I_{k-p-1}(\boldsymbol{A})(\boldsymbol{A}^p)^T. \tag{4.9}$$

Ova formula važi i za $k = n + 1$ kada je $I_{n+1} \equiv 0$. Tada je

$$\sum_{p=0}^{n} (-1)^p I_{n-p}(\boldsymbol{A}) \boldsymbol{A}^p = \boldsymbol{O}$$

ili

$$\boldsymbol{A}^n - I_1 \boldsymbol{A}^{n-1} + \ldots + (-1)^n I_n \boldsymbol{I} = \boldsymbol{O} \tag{4.10}$$

što je identičkog oblika kao i (2.3).

Na taj način smo dokazali *Kejli-Hamiltonovu* (Cayley-Hamilton) *teoremu:*

Svaki tenzor drugog reda $\boldsymbol{A}$ *zadovoljava svoju karakterističnu jednačinu.*

U trodimenzionalnom prostoru (4.9), (4.6) i (4.10) se svode na sledeće izraze

$$\begin{aligned} &\frac{\partial I_A}{\partial \boldsymbol{A}} = \boldsymbol{I}; \quad \frac{\partial II_A}{\partial \boldsymbol{A}} = I_A \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}^{-1}; \quad \frac{\partial III_A}{\partial \boldsymbol{A}} = III_A (\boldsymbol{A}^{-1})^T = \\ &= [\boldsymbol{A}^2 - I_A \boldsymbol{A} + II_A \boldsymbol{I}]^T \end{aligned} \tag{4.11}$$

$$\boldsymbol{A}^3 - I_A \boldsymbol{A}^2 + II_A \boldsymbol{A} - III_A \boldsymbol{I} = \boldsymbol{O} \tag{4.12}$$

Njihove komponentalne reprezentacije glase

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial I_A}{\partial A_{kl}} = g^{kl}, \quad \frac{\partial II_A}{\partial A_{kl}} = I_A g^{kl} - A^{lk}, \\ &\frac{\partial III_A}{\partial A_{kl}} = III_A (A^{-1})^{lk} = A^l_{\ m} A^{mk} - I_A A^{lk} + II_A g^{lk} \end{aligned}\right\} \tag{4.13}$$

$$A^k_{\ m} A^m_{\ n} A^{nl} - I_A A^k_{\ m} A^{ml} + II_A A^{kl} - III_A g^{kl} = 0. \tag{4.14}$$

Osnovna posledica Kejli-Hamiltonove toereme je mogućnost izražavanja tenzora $\boldsymbol{A}^r$, $r \geqslant n$, kao linearne kombinacije tenzora $\boldsymbol{I}, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}^2, \ldots, \boldsymbol{A}^{n-1}$ pri čemu koeficijenti te linearne kombinacije su polinomijalne funkcije glavnih invarijanti $I_k(\boldsymbol{A})$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Tako se u trodimenzionalnom prostoru iz (4.12) dobija da je

$$\boldsymbol{A}^3 = III_A \boldsymbol{I} - II_A \boldsymbol{A} + I_A \boldsymbol{A}^2. \tag{4.15}$$

Množenjem ove relacije sa $\boldsymbol{A}$ i korišćenjem (4.15) u tako dobijenom izrazu, posle sređivanja članova po stepenima tenzora $\boldsymbol{A}$, dobijamo

$$\boldsymbol{A}^4 = I_A III_A \boldsymbol{I} + (III_A - I_A II_A) \boldsymbol{A} + (I_A^2 - II_A) \boldsymbol{A}^2.$$

Istim postupkom se može pokazati da je

$$\boldsymbol{A}^r = \alpha_0 \boldsymbol{I} + \alpha_1 \boldsymbol{A} + \alpha_2 \boldsymbol{A}^2 \tag{4.16}$$

gde su koeficijenti α_0, α_1 i α_2 polinomijalne funkcije glavnih invarijanti I_A, II_A i III_A.

Za određivanje gradijenata momentnih invarijanti definisanih sa (2.6) polazimo od izraza

$$tr\,(\boldsymbol{A} + s\boldsymbol{C})^k = tr\,[\boldsymbol{T}^k + s\,(\boldsymbol{C}\boldsymbol{T}^{k-1} + \boldsymbol{T}\boldsymbol{C}\boldsymbol{T}^{k-2} + \ldots + \boldsymbol{T}^{k-1}\boldsymbol{C}) + s^2\,(\ldots) + \ldots]$$
$$= tr\,\boldsymbol{T}^k + s\,tr\,\boldsymbol{T}^{k-1}\,\boldsymbol{C} + s^2\,(\ldots) + \ldots$$

Odavde se, s obzirom na (4.2), dobija

$$\frac{d}{ds}\,tr\,(\boldsymbol{T} + s\boldsymbol{C})^k\Big|_{s=0} = tr\left[\left(\frac{\partial\, tr\,\boldsymbol{T}^k}{\partial \boldsymbol{A}}\right)^T \boldsymbol{C}\right] = k\,tr\,\boldsymbol{T}^{k-1}\,\boldsymbol{C}.$$

Pošto ova relacija važi za svako $\boldsymbol{C}$ sledi da je

$$\frac{\partial\, tr\,\boldsymbol{T}^k}{\partial \boldsymbol{A}} = \frac{\partial \bar{I}_k}{\partial \boldsymbol{A}} = k\,(\boldsymbol{T}^{k-1})^T \tag{4.17}$$

za $k = 1, 2, \ldots, n$. Specijalno za $k = 1$ biće

$$\frac{\partial\, tr\,\boldsymbol{A}}{\partial \boldsymbol{A}} = tr_{\boldsymbol{A}}\,\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}. \tag{4.17a}$$

Za trodimenzionalni prostor odgovarajući gradijenti momentnih invarijanti u komponentalnom obliku su dati izrazima

$$\frac{\partial \overline{I}_A}{\partial A_{kl}} = g^{kl}; \qquad \frac{\partial \overline{II}_A}{\partial A_{kl}} = 2A^{lk}; \qquad \frac{\partial \overline{III}_A}{\partial A_{kl}} = 3A^l{}_m A^{mk}. \tag{4.17b}$$

U slučaju tenzorske funkcije $\boldsymbol{M}\,(\boldsymbol{A})$, ili u komponentalnom obliku $M_{kl}\,(A_{pq})$, koja je neprekidna funkcija svojih argumenata, sa

$$(\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{A}})_{kl}{}^{pq} \equiv \frac{\partial M_{km}}{\partial A_{pq}} \tag{4.18}$$

definišemo komponente tenzora četvrtog reda koji se naziva *gradijent od* $\boldsymbol{M}$ i koji obeležavamo sa

$$\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial \boldsymbol{A}} = \boldsymbol{M}_{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{M}_{\boldsymbol{A}}\,(\boldsymbol{A}). \tag{4.19}$$

Na isti način kao i u slučaju gradijenta skalarne funkcije gradijent tenzorske funkcije možemo definisati direktno sa

$$\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial \boldsymbol{A}}\,[\boldsymbol{C}] = \boldsymbol{M}_{\boldsymbol{A}}\,[\boldsymbol{A}]\,[\boldsymbol{C}] = \boldsymbol{M}_{\boldsymbol{A}}\,[\boldsymbol{C}] = \frac{d}{ds}\,\boldsymbol{M}\,(\boldsymbol{A} + s\boldsymbol{C})\Big|_{s=0}. \tag{4.20}$$

Nije teško pokazati da je $\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{A}}\,[\boldsymbol{C}]$ linearna tenzorska funkcija od $\boldsymbol{C}$ i da u komponentalnom obliku glasi

$$(\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{A}}\,[\boldsymbol{C}])_{kl} = \frac{\partial M_{kl}}{\partial A_{pq}}\,C_{pq}. \tag{4.21}$$

Ako je $\boldsymbol{M}\,(\boldsymbol{A})$ definisano samo za simetrične tenzore $\boldsymbol{A} \in \mathscr{S}$ onda pristupamo izračunavanju izvoda $\dfrac{\partial M_{kl}}{\partial A_{pq}}$ na isti način kao i u slučaju gradijenta skalarne funkcije

$\varphi(\boldsymbol{A})$. Naime, prvo se mora proširiti domen definisanosti $\boldsymbol{M}$ na prostor $\mathscr{L}$ stavljanjem $\overline{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{M}\left(\frac{1}{2}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^T)\right)$. Zatim se $\overline{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{A})$ diferencira po n^2 komponenata $\boldsymbol{A} \in \mathscr{L}$ i onda $\boldsymbol{A}$ ograniči na $\mathscr{S}$.

Na isti način kao i u slučaju invarijante može se *dokazati* ***teorema*** 2:

Ako je $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{A})$ izotropna funkcija onda je i $\boldsymbol{M}_A(\boldsymbol{A})[\boldsymbol{C}]$ izotropna funkcija.

U slučaju tenzorske funkcije više promenljivih mogu postojati izvodi po svakoj promenljivoj koje tada nazivamo *parcijalni gradijenti*. U tom slučaju važe uobičajna pravila diferenciranja među koja spada i pravilo složenog diferenciranja.

Na sličan način se mogu definisati i parcijalni izvodi višeg reda.

U slučaju izvoda proizvoda tenzorskih funkcija mora se voditi računa o mestu svakog činoca proizvoda.

Npr.: gradijent proizvoda $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{A})\,\boldsymbol{N}(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{S}(\boldsymbol{A})$ je po definiciji

$$\begin{aligned} \boldsymbol{S}_A[\boldsymbol{C}] &= \frac{d}{ds}\boldsymbol{S}(\boldsymbol{A} + s\boldsymbol{C})\Big|_{s=0} = \frac{d}{ds}[\boldsymbol{M}(\boldsymbol{A} + s\boldsymbol{C})(\boldsymbol{A} + s\boldsymbol{C})]\Big|_{s=0} \\ &= \frac{d}{ds}[\boldsymbol{M}(\boldsymbol{A} + s\boldsymbol{C})]\Big|_{s=0} \boldsymbol{N}(\boldsymbol{A}) + \boldsymbol{M}(\boldsymbol{A})\frac{d}{ds}\boldsymbol{N}(\boldsymbol{A} + s\boldsymbol{C})\Big|_{s=0} \\ &= \boldsymbol{M}_A[\boldsymbol{C}]\,\boldsymbol{N} + \boldsymbol{M}\boldsymbol{N}_A[\boldsymbol{C}] \end{aligned}$$

tj.,

$$(\boldsymbol{M}\boldsymbol{N})_A[\boldsymbol{C}] = \boldsymbol{M}_A[\boldsymbol{C}]\,\boldsymbol{N} + \boldsymbol{M}\boldsymbol{N}_A[\boldsymbol{C}]. \tag{4.22}$$

Sada je lako pokazati da je

$$\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial \boldsymbol{A}}[\boldsymbol{C}] = \boldsymbol{C}, \quad \frac{\partial \boldsymbol{A}^T}{\partial \boldsymbol{A}}[\boldsymbol{C}] = \boldsymbol{C}^T \tag{4.23}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{A}^k}{\partial \boldsymbol{A}}[\boldsymbol{C}] = \frac{d}{ds}(\boldsymbol{A} + s\boldsymbol{C})^k\Big|_{s=0} = \sum_{m=0}^{k} \boldsymbol{A}^m\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{k-1-m}, \tag{4.24}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{A}^{-1}}{\partial \boldsymbol{A}}[\boldsymbol{C}] = -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}. \tag{4.25}$$

Relacija (4.23) sledi neposredno iz (4.20) za $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{A}$; (4.24) se može dokazati metodom matematičke indukcije. Za izvođenje (4.25) polazimo od izraza $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{I}$ na koji primenjujemo pravilo (4.22) i $(4.23)_1$ i činjenicu da je $\frac{\partial \boldsymbol{I}}{\partial \boldsymbol{A}}[\boldsymbol{C}] = \boldsymbol{O}$.

5. TAJLOROV RED

U nekim slučajevima će biti nužno razviti tenzorsku funkciju tenzorske promenljive u red. Kao i u odeljku 3 počećemo prvo sa realnim funkcijama realne promenljive $y = f(x)$. Za takve funkcije znamo da njihov Tajlorov red glasi

$$f(x + h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!} f^k(x) + 0(h^n) \tag{5.1}$$

gde je

$$\lim_{h\to 0}\frac{0\,(h^n)}{h^n}=0. \tag{5.2}$$

Takođe znamo da je za vektorsku funkciju $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{f}(x)$ realnog parametra x Tajlorov red dat izrazom

$$\boldsymbol{f}(x+h)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{h^k}{k!}\boldsymbol{f}^{(k)}(x)+\boldsymbol{0}\,(h^n) \tag{5.3}$$

gde je

$$\lim_{h\to 0}\frac{\boldsymbol{0}(h^n)}{h^n}=0 \tag{5.4}$$

i

$$\boldsymbol{f}^{(k)}(x)\equiv\frac{d^k}{dx^k}\boldsymbol{f}(x). \tag{5.5}$$

U slučaju vektorske funkcije vektorske promenljive $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{v})$ možemo $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{v}+h\boldsymbol{u})$ posmatrati kao vektorsku funkciju realnog parametra h. U okolini $h=0$ Tajlorov red funkcije $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{v}+h\boldsymbol{u})$, s obzirom na (5.3), sada postaje

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{v}+h\boldsymbol{u})=\sum_{k=0}^{n}\frac{h^k}{k!}\frac{d^k}{dh^k}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{v}+h\boldsymbol{u})\Big|_{h=0}+\boldsymbol{0}\,(h^n). \tag{5.6}$$

Uvodeći oznaku

$$\boldsymbol{f}^{(k)}(\boldsymbol{v};\boldsymbol{u})\equiv\frac{d^k}{dh^k}(\boldsymbol{v}+h\boldsymbol{u})\Big|_{h=0}. \tag{5.7}$$

može se (5.6) pisati u obliku

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{v}+h\boldsymbol{u})=\sum_{k=0}^{n}\frac{h^k}{k!}\boldsymbol{f}^{(k)}(\boldsymbol{v};\boldsymbol{u})+\boldsymbol{0}\,(h^n). \tag{5.8}$$

Nije teško pokazati da je $\boldsymbol{f}^{(k)}(\boldsymbol{v};\boldsymbol{u})$ homogen i simetričan polinom k-tog stepena po $\boldsymbol{u}$. Tada iz (5.8) sledi da je

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u})=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\boldsymbol{f}^{(k)}(\boldsymbol{v};\boldsymbol{u})+\boldsymbol{0}\,(|\boldsymbol{u}|^n) \tag{5.9}$$

gde je

$$\lim_{|\boldsymbol{u}|\to 0}\frac{\boldsymbol{0}\,(|\boldsymbol{u}|^n)}{|\boldsymbol{u}|^n}=0. \tag{5.10}$$

Sva ova razmatranja mogu se trivijalno proširiti na tenzorske funkcije tenzorskih promenljivih proizvoljnog reda.

6. PREDSTAVLJANJE INVARIJANTI IZOTROPNIH TENZORSKIH FUNKCIJA

Neka su $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{B}$ u $\mathscr{S}$ i neka su $I_k(\boldsymbol{A})$ i $I_k(\boldsymbol{B})$ njihove glavne invarijante respektivno. Označimo sa a_k, $(k = 1, 2, \ldots, n)$, karakteristične vrednosti tenzora $\boldsymbol{A}$ koje su, po definiciji, rešenja karakteristične jednačine (2.3) tenzora $\boldsymbol{A}$. Analogno tome karakteristična jednačina tenzora $\boldsymbol{B}$ je

$$a^n - I_1(\boldsymbol{B})\, a^{n-1} + \ldots + (-1)^n I_n(\boldsymbol{B}) = 0. \tag{6.1}$$

Rešenja ove jednačine, tj., karakteristične vrednosti tenzora $\boldsymbol{B}$, označimo sa b_k, $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

Teorema 1: *Glavne invarijante simetričnih tenzora* $\boldsymbol{A}$ *i* $\boldsymbol{B}$ *se poklapaju, tj.,*

$$I_k(\boldsymbol{A}) = I_k(\boldsymbol{B}), \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{6.2}$$

ako i samo ako je

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}^T \tag{6.2a}$$

za neko ortogonalno $\boldsymbol{Q}$.

Dokaz: Neka (6.2) važi. Tada su karakteristične jednačine tenzora $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{B}$, s obzirom na (2.3) i (6.1), iste a njihove karakteristične vrednosti se poklapaju. Možemo uvek urediti skup vrednosti b_k tako da je

$$a_k = b_k, \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{6.3}$$

Pošto je $\boldsymbol{A}$ simetrično onda postoji ortonormirana baza karakterističnih vektora takvih da je

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_k = a_k \boldsymbol{e}_k \tag{6.4}$$

Isto tako postoji ortonormirana baza $\boldsymbol{f}_k$ takva da je

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{f}_k = b_k \boldsymbol{f}_k = a_k \boldsymbol{f}_k. \tag{6.5}$$

Za ortonormirane baze $\boldsymbol{e}_k$ i $\boldsymbol{f}_k$ postoji jednoznačno ortogonalno $\boldsymbol{Q}$ koje prevodi bazu $\boldsymbol{e}_k$ u $\boldsymbol{f}_k$ tako da je

$$\boldsymbol{Q}\boldsymbol{e}_k = \boldsymbol{f}_k. \tag{6.6}$$

Tada iz (6.4—6.6) sledi da je

$$\boldsymbol{Q}\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_k = a_k \boldsymbol{Q}\boldsymbol{e}_k = a_k \boldsymbol{f}_k = \boldsymbol{B}\boldsymbol{f}_k = \boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{e}_k$$

ili

$$\boldsymbol{Q}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}$$

odakle se dobija (6.2a).

Obrnuto, neka (6.2a) važi za neku ortogonalnu transformaciju $\boldsymbol{Q}$. Tada je

$$\begin{aligned} \det(a\boldsymbol{I} + \boldsymbol{B}) &= \det(a\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q}^T + \boldsymbol{Q}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}^T) \\ &= \det(a\boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}). \end{aligned} \tag{6.7}$$

Koristeći to u (2.2) dobijamo (6.2). □

Drugi deo dokaza teoreme 1, tačnije (6.7), očigledno važi za svako $\boldsymbol{Q}$ i svako $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{B}$ (ne neophodno simetrične) za koje važi (6.2a). Zbog toga on predstavlja dokaz ***teoreme*** *2:*

Glavne invarijante $I_k(\boldsymbol{A})$ tenzora $\boldsymbol{A}$ su invarijantne.

Sada smo u situaciji da dokažemo ***teoremu o predstavljanju invarijanti:***

Skalarna funkcija $\varphi(\boldsymbol{A})$ simetričnog tenzora $\boldsymbol{A}$ je invarijantna ako i samo ako se može izraziti kao funkcija glavnih invarijanti tenzora $\boldsymbol{A}$, tj., ako i samo ako je

$$\varphi(\boldsymbol{A}) = \tilde{\varphi}(I_1, \ldots, I_n). \tag{6.8}$$

Dokaz: Neka je $\varphi(\boldsymbol{A})$ invarijanta. Onda je, saglasno sa (2.1)

$$\varphi(\boldsymbol{A}) = \varphi(\boldsymbol{B}) \tag{6.9}$$

uvek kada je

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}^T \tag{6.10}$$

gde je $\boldsymbol{A}$ bilo koji ortogonalni tenzor. Ali tada na osnovu teoreme 1, prema kojoj kada važi (6.10) važi (6.2) i obrnuto, možemo kazati da (6.9) važi uvek kada je $I_k(\boldsymbol{A}) = I_k(\boldsymbol{B})$, $(k = 1, 2, \ldots, n)$. To će biti sigurno za svako $\boldsymbol{Q}$ kada je $\varphi(\boldsymbol{A}) = \varphi[I_1(\boldsymbol{A}), I_2(\boldsymbol{A}), \ldots, I_n(\boldsymbol{A})]$.

Obrnuto, neka je $\varphi(\boldsymbol{A})$ dato sa (6.8). Tada je $\varphi(\boldsymbol{A})$ sigurno invarijanta jer je, na osnovu teoreme 2, $\tilde{\varphi}(I_1, \ldots, I_n)$ invarijanta. □

Na osnovu (2.4) smo zaključili da su glavne invarijante $I_k = I_k(\boldsymbol{A})$ elementarne simetrične funkcije elementarnih simetričnih funkcija karakterističnih brojeva a_k od $\boldsymbol{A}$. Funkcionalna teorema o simetričnim funkcijama tvrdi da ako je φ polinom po a_k onda je $\varphi(I_1, \ldots, I_n)$ polinom po I_k. Ali karakteristične vrednosti a_k su elementi na glavnoj dijagonali matrice koja odgovara tenzoru $\boldsymbol{A}$ u odnosu na prethodno pomenutu bazu $\boldsymbol{g}_k$. Tada se teorema o predstavljanju invarijanti može dopuniti sledećim ***stavom***:

Ako je $\varphi(\boldsymbol{A})$ polinomijalna invarijanta, tj., invarijanta koja je polinom po komponentama $\boldsymbol{A}$, onda se može izraziti kao polinom po glavnim invarijantama I_k od $\boldsymbol{A}$.

Umesto glavnih invarijanti možemo u (6.8) koristiti prvih n momentnih invarijanti $\bar{I}_k(\boldsymbol{A})$. Mi tada kažemo:

Bilo koja invarijanta $\varphi(\boldsymbol{A})$ se može izraziti kao funkcija prvih n momentnih invarijanti $\bar{I}_k(\boldsymbol{A}) = tr\, \boldsymbol{A}^k$ od $\boldsymbol{A}$, tj.,

$$\varphi(\boldsymbol{A}) = \varphi(\bar{I}_1, \ldots, \bar{I}_n). \tag{6.9}$$

Ako je $\varphi(\boldsymbol{A})$ polinomijalna invarijanta po I_k onda je $\varphi(\bar{I}_1, \ldots, \bar{I}_k)$ polinom po $\bar{I}_k$.

Specijalno, kada je $\varphi(\boldsymbol{A})$ linearna invarijanta po $\boldsymbol{A}$ biće

$$\varphi(\boldsymbol{A}) = c\, tr\, \boldsymbol{A}, \tag{6.10}$$

gde je c konstanta.

7. PREDSTAVLJANJE SIMULTANIH INVARIJANTI

Prvo ćemo razmatrati singularne invarijante čije su promenljive vektori. U tom slučaju značajnu ulogu ima

Teorema 1: *Za dva skupa vektora $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ i $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m$ skalarne funkcije $\boldsymbol{v}_i\boldsymbol{v}_j$ i $\boldsymbol{u}_i\boldsymbol{u}_j$ se poklapaju, tj.,*

$$\boldsymbol{v}_i\boldsymbol{v}_j = \boldsymbol{u}_i\boldsymbol{u}_j, \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n), \tag{7.1}$$

ako i samo ako je

$$\boldsymbol{Q}\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{u}_i$$

za neko ortogonalno $\boldsymbol{Q}$.

Dokaz: Neka je v prostor rastegnut vektorima $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m$. Dimenzija ovog prostora određena je brojem linearno nezavisnih vektora $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m$. Neka ih ima p. Bez gubljenja u opštosti možemo uzeti da su to vektori $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_p$. Tada je sigurno

$$\det \|\boldsymbol{v}_\alpha \cdot \boldsymbol{v}_\beta\| \neq 0, \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, p) \tag{7.2}$$

er se time izražava potreban i dovoljan uslov linearne nezavisnosti vektora $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_p$.

Neka (7.1) važi. Iz (7.1) i (7.2) sledi da su vektori $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_p$ takođe linearno nezavisni. Onda postoji jednoznačno određena linearna transformacija $\boldsymbol{Q}$ koja prevodi vektore $\boldsymbol{v}_\alpha$ u $\boldsymbol{u}_\alpha$, tj.,

$$\boldsymbol{Q}\boldsymbol{v}_\alpha = \boldsymbol{u}_\alpha, \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, p), \tag{7.3}$$

a koja se svodi na identičnost u odnosu na ortogonalni komplement $\boldsymbol{w}$ od $\boldsymbol{v}$. (Pokazati!)

Iz (7.3) i (7.1) se dobija

$$\boldsymbol{Q}\boldsymbol{v}_\alpha \cdot \boldsymbol{Q}\boldsymbol{v}_\beta = \boldsymbol{u}_\alpha \cdot \boldsymbol{u}_\beta = \boldsymbol{v}_\alpha \cdot \boldsymbol{v}_\beta, \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, p), \tag{7.4}$$

odakle sledi da je $\boldsymbol{Q}$ ortogonalno.

U odnosu na linearno nezavisne vektore $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_p$ svaki vektor $\boldsymbol{v}_k, p < k \leqslant m$, se može izraziti kao njihova linearna kombinacija, tj.,

$$\boldsymbol{v}_k = \sum_{\alpha=1}^{p} \lambda_\alpha \boldsymbol{v}_\alpha. \tag{7.5}$$

Za određivanje koeficijenata λ_α pomnožimo skalarno (7.5) sa $\boldsymbol{v}_\beta$. Tada dobijamo

$$\boldsymbol{v}_k \cdot \boldsymbol{v}_\beta = \sum_{\alpha=1}^{p} \lambda_\alpha \boldsymbol{v}_\alpha \cdot \boldsymbol{v}_\beta, \qquad (\beta = 1, 2, \ldots, p). \tag{7.6}$$

S obzirom na (7.2) sistem jednačina (7.6) jednoznačno određuje koeficijente λ_α. Lako je pokazati, s obzirom na (7.5) i (7.1), da je

$$\boldsymbol{u}_k = \sum_{\alpha=1}^{p} \lambda_\alpha \boldsymbol{u}_\alpha. \tag{7.7}$$

Tada iz (7.5), (7.3) i (7.7) dobijamo

$$Q\boldsymbol{v}_k = \sum_{\alpha=1}^{p} \lambda_\alpha \boldsymbol{u}_\alpha = \boldsymbol{u}_k \tag{7.8}$$

za svako $p < k \leqslant m$. Kratko rečeno, kada (7.1) važi onda iz (7.3) i (7.8) sledi da je $Q\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{u}_i$ za $i = 1, 2, \ldots, m$.

Obrnuto, ako je $Q\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{u}_i$ za $i = 1, 2, \ldots, m$ onda je

$$\boldsymbol{u}_i \cdot \boldsymbol{u}_j = Q\boldsymbol{v}_i \cdot Q\boldsymbol{v}_j = \boldsymbol{v}_i Q^T Q \boldsymbol{v}_j = \boldsymbol{v}_i \boldsymbol{v}_j \tag{7.9}$$

tj., (7.1) važi. □

Saglasno definiciji izotropnih funkcija za skalarnu funkciju $\varphi(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m)$ se kaže da je izotropna ako je

$$\varphi(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m) = \varphi(Q\boldsymbol{v}_1, \ldots, Q\boldsymbol{v}_m) \tag{7 10}$$

za svako ortogonalno Q i svako $\boldsymbol{v}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ iz domena definisanosti funkcije φ.

Za takve funkcije važi ***osnovna teorema o predstavljanu simultanih invarijanti*** koju je postavio Koši.

> *Skalarna funkcija $\varphi(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m)$ je izotropna ili invarijantna u odnosu na potpunu grupu $\mathfrak{o}$ ako i samo ako se može predstaviti kao funkcija skalarnog proizvoda vektora*
>
> $$\boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{v}_j, \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, m), \tag{7.11}$$
>
> *za svako $\boldsymbol{v}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ iz domena definisanosti φ.*

Dokaz ove teoreme spada u domen teorije grupa. Dajemo njegov kratak prikaz.

Neka je φ izotropno. Tada je, s obzirom na (7.10)

$$\varphi(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m) = \varphi(\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m) \tag{7.12}$$

uvek kada je

$$\boldsymbol{u}_i = Q\boldsymbol{v}_i \tag{7.13}$$

gde je Q proizvoljan ortogonalan tenzor. Ali tada, na osnovu teoreme 1 koja tvrdi da je

$$\boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{v}_j = \boldsymbol{u}_i \cdot \boldsymbol{u}_j \tag{7.3}$$

uvek kada važi (7.13), i obrnuto, možemo kazati: (7.12) važi uvek kada važi (7.3). To će biti sigurno kada je $\varphi(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m)$ funkcija od $\boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{v}_j$ $(i, j = 1, 2, \ldots, m)$.

Obrnuto, neka je φ funkcija od $\boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{v}_j$ $(i, j = 1, 2, \ldots, m)$. Tada je φ izotropno jer je, prema (7.9),

$$\boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{v}_j = Q\boldsymbol{v}_i \cdot Q\boldsymbol{v}_j$$

za svako ortogonalno Q. □

Kada $\varphi(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m)$ nije izotropno nego hemitropno, tj., invarijantno u odnosu na svojstvenu grupu ortogonalnih transformacija, onda listi skalarnog proizvoda $\boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{v}_j$ moraju biti dodati „proizvodi" $[\boldsymbol{v}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{v}_{i_n}]$. U slučaju $n = 3$ biće

$$[\boldsymbol{v}_{i_1}, \boldsymbol{v}_{i_2}, \boldsymbol{v}_{i_3}] = \boldsymbol{v}_{i_1} \cdot (\boldsymbol{v}_{i_2} \times \boldsymbol{v}_{i_3}). \tag{7.14}$$

Koristeći Košijevu teoremu možemo dokazati ***teoremu 2:***

Tenzorska funkcija je izotropna ako i samo ako funkcije njenih komponenata zavise od baze $\boldsymbol{g}_k$ *samo preko komponenata jediničnog tenzora* $g_{kl} = \boldsymbol{g}_k \cdot \boldsymbol{g}_l$.

Dokaz ove teoreme ćemo izvesti za invarijantu

$$\varphi = \varphi(\boldsymbol{A}) = \varphi(A^{kl}\boldsymbol{g}_k \otimes \boldsymbol{g}_l) = \varphi(A^{kl}; \boldsymbol{g}_m). \tag{7.15}$$

Polazimo od toga da ortogonalna transformacija $\boldsymbol{Q}$ prevodi sistem baznih vektora $\boldsymbol{g}_k$ u drugi sistem linearno nezavisnih vektora $\boldsymbol{f}_k$ tako da je

$$\boldsymbol{Q}\boldsymbol{g}_k = \boldsymbol{f}_k. \tag{7.16}$$

Pošto je $\varphi(\boldsymbol{A})$ izotropno, tj.,

$$\varphi(\boldsymbol{A}) = \varphi(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}^T)$$

za svako ortogonalno $\boldsymbol{Q}$, sledi da je, s obzirom na (7.15) i (7.16),

$$\begin{aligned}\varphi(A^{kl}; \boldsymbol{g}_m) &= \varphi(\boldsymbol{Q}A^{kl}\boldsymbol{g}_k \otimes \boldsymbol{g}_l\boldsymbol{Q}^T)\\ &= \varphi(A^{kl}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{g}_k \otimes \boldsymbol{Q}\boldsymbol{g}_l)\\ &= \varphi(A^{kl}\boldsymbol{f}_k \otimes \boldsymbol{f}_l),\end{aligned}$$

tj.,

$$\varphi(A^{kl}; \boldsymbol{g}_k) = \varphi(A^{kl}; \boldsymbol{Q}\boldsymbol{g}_k). \tag{7.17}$$

Na osnovu Košijeve teoreme invarijanta φ zavisi od $\boldsymbol{g}_k$ samo preko ortogonalnih invarijanti $g_{kl} = \boldsymbol{g}_k \cdot \boldsymbol{g}_l$ baznih vektora $\boldsymbol{g}_k$.

Isti postupak za dokazivanje teoreme se primenjuje u slučaju bilo koje izotropne tenzorske funkcije. □

Posledica teoreme 2: *U specijalnom slučaju tenzorska funkcija je izotropna ako i samo ako su funkcije njenih komponenata iste za sve ortogonalne baze.*

U slučaju simultanih invarijanti koje su funkcije tenzora znamo neke rezultate. Bez upuštanja u dokaz navodimo sledeći rezultat koji važi za n-dimenzioni prostor.

Skalarna funkcija $\varphi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{v})$ *simetričnog tenzora* $\boldsymbol{A}$ *i vektora* $\boldsymbol{v}$ *je ortogonalna invarijanta ako i samo ako može biti izražena kao funkcija* $2n$ *posebnih invarijanti*

$$I_1(\boldsymbol{A}), \ldots, I_n(\boldsymbol{A}), \quad \boldsymbol{v}^2, \quad \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}, \ldots, \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{v}. \tag{7.15}$$

Ako je φ *polinom po* $\boldsymbol{A}$ *i* $\boldsymbol{v}$ *onda je zavisnost odgovarajuće funkcije od invarijanata* (7.15) *takođe u obliku polinoma.*

8. TENZORSKA FUNKCIJA JEDNE PROMENLJIVE

Za nas je tenzorska funkcija $\widetilde{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{A})$ od posebnog interesa. Ako je $\widetilde{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{A})$ izotropna f-ja onda je, na osnovu definicije izotropnih tenzorskih funkcija

$$\boldsymbol{Q}\widetilde{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{A})\boldsymbol{Q}^T = \widetilde{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}^T) \tag{8.1}$$

za svako ortogonalno $\boldsymbol{Q}$.

Teorema 1: *Ako je* $\widetilde{M}(A)$ *izotropna funkcija simetričnog tenzora* $A \in \mathscr{S}$ *onda je svaki karakteristični vektor tenzora* A *takođe karakterističan vektor tenzora* $\widetilde{M}(A)$.

Dokaz: Neka je e karakterističan vektor tenzora A i neka je $Q \in \mathscr{O}$ određeno tako da je

$$Qe = -e, \quad Qf = f \text{ ako je } f \cdot e = 0. \tag{8.2}$$

Tako određeno ortogonalno Q predstavlja ogledanje (refleksiju) u odnosu na ravan upravnu na e.

Tenzoru A, kao i svakom drugom simetričnom tenzoru, odgovara n karakterističnih vektora koji su međusobno upravni. Jedan takav vektor je e, a preostali $f_2, \ldots, f_n$ su takvi da je

$$e \cdot f_\alpha = 0, \quad (\alpha = 2, \ldots, n).$$

Za takve vektore je, prema $(8.2)_2$

$$Qf_\alpha = f_\alpha, \quad (\alpha = 2, \ldots, n). \tag{8.3}$$

Tenzor A, koristeći spektralnu teoremu, možemo predstaviti u obliku

$$A = a_1 e \otimes e + \sum_{\alpha=2}^{n} a_\alpha f_\alpha \otimes f_\alpha$$

gde su $a_1, a_2, \ldots, a_n$ karakteristične vrednosti tenzora A.

Sada je lako pokazati, koristeći $(8.2)_1$ i (8.3) da je

$$QAQ^T = A. \tag{8.4}$$

Pošto je $\widetilde{M}(A)$ izotropna f-ja za takvu tenzorsku funkciju važi relacija (8.1). Iz (8.1) i (8.4) sledi da je

$$Q\widetilde{M}(A)\,Q^T = \widetilde{M}(A)$$

ili

$$Q\widetilde{M}(A) = \widetilde{M}(A)\,Q.$$

Tada je

$$Q\widetilde{M}(A)\,e = \widetilde{M}(A)\,Qe = -\widetilde{M}(A)\,e,$$

tj., Q transformiše $\widetilde{M}(A)\,e$ u njemu suprotan vektor. Ali to je, prema $(8.2)_1$, moguće samo onda kada je $\widetilde{M}(A)$ kolinearno sa e, tj.,

$$\widetilde{M}(A)\,e = \omega e. \tag{8.5}$$

Znači e je karakteristični vektor tenzora $\widetilde{M}(A)$. □

Pored ove teoreme veliki značaj u predstavljanju izotropnih tenzorskih funkcija ima

__Vangova (Wang) lema:__ Neka je $\boldsymbol{A} \in \mathscr{S}$ i neka je njegova spektralna dekompozicija

$$\boldsymbol{A} = \sum_{i=1}^{n} a_i \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_i \tag{8.6}$$

gde su a_i karakteristične vrednosti, a $\boldsymbol{e}_i$ njima odgovarajući karakteristični vektori takvi da je $\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_i = \delta_{ij}$.

Neka $\boldsymbol{A}$ ima $m+1 \leqslant n$ međusobno različitih karakterističnih brojeva takvih da je bez gubljenja u opštosti

$$a_1 \neq a_2 \neq \ldots \neq a_{m+1} = a_{m+2} = \ldots = a_n,$$

tako da je

$$\boldsymbol{A} = \sum_{\alpha=1}^{m} a_\alpha \boldsymbol{e}_\alpha \otimes \boldsymbol{e}_\alpha + a_{m+1} \left(\boldsymbol{I} - \sum_{\alpha=1}^{m} \boldsymbol{e}_\alpha \otimes \boldsymbol{e}_\alpha \right). \tag{8.7}$$

Onda je skup $\{\boldsymbol{I}, \boldsymbol{A}, \ldots, \boldsymbol{A}^m\}$ linearno nezavisan i može se izraziti kao linearna kombinacija elemenata skupa

$$\{\boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_m \otimes \boldsymbol{e}_m, \boldsymbol{I} - \sum_{\alpha=1}^{m} \boldsymbol{e}_\alpha \otimes \boldsymbol{e}_\alpha\}.$$

Dokaz leme: Prema definiciji, skup $\{\boldsymbol{I}, \boldsymbol{A}, \ldots, \boldsymbol{A}^m\}$ je linearno nezavisan ako je linearna kombinacija njegovih elemenata jednaka nula tenzoru, tj.

$$c_0 \boldsymbol{I} + c_1 \boldsymbol{A} + \ldots + c_m \boldsymbol{A}^m = \boldsymbol{O} \tag{8.8}$$

samo kada su svi koeficijenti $c_0, c_1, \ldots, c_m$ jednovremeno jednaki nuli.

Saglasno sa tim, a u cilju dokaza linearne nezavisnosti skupa $\{\boldsymbol{I}, \boldsymbol{A}, \ldots, \boldsymbol{A}^m\}$, primenimo (8.8) na karakteristične vektore $\boldsymbol{e}_i$. Tada dobijamo

$$\sum_{i=1}^{n} [c_0 + c_1 a_i + \ldots + c_m (a_i)^m] \, \boldsymbol{e}_i = 0$$

ili

$$c_0 + c_1 a_i + \ldots + c_m (a_i)^m = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{8.9}$$

U homogenom sistemu n linearnih jednačina ima samo $m+1$ nezavisnih i one odgovaraju međusobno različitim karakterističnim brojevima $a_1, a_2, \ldots, a_{m+1}$. To su

$$\begin{aligned} c_0 + c_1 a_1 + \ldots + c_m (a_1)^m &= 0 \\ c_0 + c_1 a_2 + \ldots + c_m (a_2)^m &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_0 + c_1 a_{m+1} + \ldots + c_m (a_{m+1})^m &= 0. \end{aligned}$$

Ovom sistemu $m+1$ homogenih jednačina po $m+1$ koeficijenata $c_0, c_1, \ldots, c_m$ odgovara jedinstveno rešenje

$$c_0 = c_1 = \ldots = c_m = 0, \tag{8.10}$$

jer je determinanta sistema različita od nule, tj.

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & \dots & (a_1)^m \\ 1 & a_2 & \dots & (a_2)^m \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ 1 & a_{m+1} & \dots & (a_{m+1})^m \end{vmatrix} = \prod_{j<k} (a_j - a_k) \neq 0, \quad (k = 1, 2, \dots, m+1). \tag{8.11}$$

Time smo dokazali da je skup $\{\boldsymbol{I}, \boldsymbol{A}, \dots, \boldsymbol{A}^m\}$ linearno nezavisan.

Da se elementi ovog skupa mogu izraziti preko elemenata skupa

$$\left\{\boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_m \otimes \boldsymbol{e}_m, \boldsymbol{I} - \sum_{\alpha=1}^{m} \boldsymbol{e}_\alpha \otimes \boldsymbol{e}_\alpha\right\}$$

sledi iz činjenice da je

$$\boldsymbol{I} = \sum_{\alpha=1}^{m} \boldsymbol{e}_\alpha \otimes \boldsymbol{e}_\alpha + \left(\boldsymbol{I} - \sum_{\alpha=1}^{m} \boldsymbol{e}_\alpha \otimes \boldsymbol{e}_\alpha\right) \tag{8.12}$$

i

$$\boldsymbol{A}^p = \sum_{i=1}^{n} (a_i)^p \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_i = \sum_{\alpha=1}^{m} (a_\alpha)^p \boldsymbol{e}_\alpha \otimes \boldsymbol{e}_\alpha + (a_{m+1})^p \left(\boldsymbol{I} - \sum_{\alpha=1}^{m} \boldsymbol{e}_\alpha \otimes \boldsymbol{e}_\alpha\right) \tag{8.13}$$

za svako $p = 1, 2, \dots, m$. □

Od značaja su dva specijalna slučaja koji slede kao posledice Vangove leme:

Posledica 1: Ako su sve karakteristične vrednosti tenzora $\boldsymbol{A} \in \mathscr{S}$ međusobno različite onda je skup $\{\boldsymbol{I}, \boldsymbol{A}, \dots, \boldsymbol{A}^{n-1}\}$ linearno nezavisan. Elementi toga skupa se mogu izraziti kao linearna kombinacija elemenata skupa $\{\boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n \otimes \boldsymbol{e}_n\}$ gde su $\boldsymbol{e}_i$ karakteristični vektori tenzora $\boldsymbol{A}$ takvi da je $\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \delta_{ij}$.

Posledica 2: Ako su sve karakteristične vrednosti tenzora $\boldsymbol{A} \in \mathscr{S}$ jednake, onda je $\boldsymbol{A} = a\boldsymbol{I}$, a ceo prostor je karakterističan prostor tenzora $\boldsymbol{A}$.

Sada smo u situaciji da dokažemo ***fundamentalnu teoremu o predstavljanju tenzorske izotropne funkcije*** koju su postavili Rivlin i Eriksen (Ericksen):

Tenzorska funkcija $\boldsymbol{M} = \widetilde{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{A})$, $\boldsymbol{M}, \boldsymbol{A} \in \mathscr{S}$, je izotropna ako i samo ako se može predstaviti u obliku

$$\boldsymbol{M} = \widetilde{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{A}) = \varphi_0 \boldsymbol{I} + \varphi_1 \boldsymbol{A} + \dots + \varphi_{n-1} \boldsymbol{A}^{n-1}, \tag{8.14}$$

gde su φ_k izotropne funkcije od $\boldsymbol{A}$ i prema tome mogu biti izražene kao funkcije glavnih invarijanata tenzora $\boldsymbol{A}$, tj.,

$$\varphi_k = \varphi_k (I_1, I_2, \dots, I_n), \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1). \tag{8.15}$$

Dokaz: Neka je $\boldsymbol{M} = \widetilde{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{A})$ dato sa (8.14), gde su funkcije φ_k date sa (8.15). Na osnovu teoreme o predstavljanju invarijanata funkcije φ_k su invarijante. Tada je

$$\begin{aligned}\widetilde{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{QAQ}^T) &= \varphi_0\boldsymbol{I} + \varphi_1\boldsymbol{QAQ}^T + \ldots + \varphi_{n-1}\boldsymbol{QA}^{n-1}\boldsymbol{Q}\\ &= \boldsymbol{Q}(\varphi_0\boldsymbol{I} + \varphi_1\boldsymbol{A} + \ldots + \varphi_{n-1}\boldsymbol{A}^{n-1})\boldsymbol{Q}^T\\ &= \boldsymbol{Q}\widetilde{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{A})\boldsymbol{Q}^T\end{aligned}$$

tj. $\widetilde{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{A})$ je izotropno.

Obrnuto, neka je $\boldsymbol{M} = \widetilde{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{A})$ izotropna tenzorska funkcija. Na osnovu teoreme 1 karakteristični vektori $\boldsymbol{e}_i$ ($\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \delta_{ij}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$) tenzora $\boldsymbol{A}$ su takođe karakteristični vektori tenzorske funkcije $\widetilde{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{A})$, tj.,

$$\widetilde{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{A})\,\boldsymbol{e}_i = \omega_i\boldsymbol{e}_i \tag{8.16}$$

ili

$$\widetilde{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{A}) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_i \tag{8.17}$$

kada se uzme u obzir da je

$$\boldsymbol{I} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_i. \tag{8.18}$$

U slučaju kada za $\boldsymbol{A}$ u domenu definisanosti f-je $\widetilde{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{A})$ važi (8.7), sledi da je svaka linearna kombinacija vektora $\boldsymbol{e}_\sigma$ ($\sigma = m + 1, \ldots, n$) takođe karakterističan vektor tenzora $\boldsymbol{A}$ ali i funkcije $\widetilde{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{A})$ na osnovu teoreme 1. Tada se iz (8.16) odmah dobija da je $\omega_{m+1} = \omega_{m+2} = \ldots = \omega_n$, a iz (8.17) i (8.18) da je

$$\widetilde{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{A}) = \sum_{\alpha=1}^{m} \omega_\alpha\boldsymbol{e}_\alpha \otimes \boldsymbol{e}_\alpha + \omega_{m+1}\left(\boldsymbol{I} - \sum_{\alpha=1}^{m} \boldsymbol{e}_\alpha \otimes \boldsymbol{e}_\alpha\right). \tag{8.19}$$

To znači, na osnovu Vangove leme, da se $\widetilde{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{A})$ može predstaviti kao linearna kombinacija elemenata skupa $\{\boldsymbol{I}, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}, \ldots, \boldsymbol{A}^m\}$, tj.,

$$\widetilde{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{A}) = \varphi_0\boldsymbol{I} + \varphi_1\boldsymbol{A} + \ldots + \varphi_m\boldsymbol{A}^m. \tag{8.20}$$

Koeficijenti φ_k u (8.20) su funkcije od $\boldsymbol{A}$, tj.,

$$\varphi_k = \varphi_k(\boldsymbol{A}), \qquad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

i invarijante su. Zaista, na osnovu pretpostavke da je $\widetilde{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{A})$ izotropno, tj., da je

$$\boldsymbol{QM}(\boldsymbol{A})\,\boldsymbol{Q}^T - \widetilde{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{QAQ}^T) = \boldsymbol{O},$$

ili

$$\widetilde{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{A}) - \boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{M}(\boldsymbol{QAQ}^T)\,\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{O},$$

sledi, pomoću (8.20), da je

$$[\varphi_0(A) - \varphi_0(QAQ^T)]\, I + [\varphi_1(A) - \varphi_1(QAQ^T)]\, A + \ldots$$
$$+ [\varphi_m(A) - \varphi_m(QAQ^T)]\, A^m = O.$$

Ali tada je

$$\begin{aligned} \varphi_0(A) &= \varphi_0(QAQ^T) \\ \varphi_1(A) &= \varphi_1(QAQ^T) \\ &\ \ \vdots \\ \varphi_m(A) &= \varphi_m(QAQ^T) \end{aligned} \tag{8.21}$$

kao posledica linearne nezavisnosti elemenata skupa $\{I, A, \ldots, A^m\}$ tj., $\varphi_k(A)$, $(k = 0, 1, 2, \ldots, m)$, su invarijante. Očigledno je da se (8.20) može napisati u obliku (8.14) kada se uzme da je

$$\varphi_{m+1}(A) = \varphi_{m+2}(A) = \ldots = \varphi_{n-1}(A) = 0. \ \Box$$

Napominjemo još da se (8.20) i (8.14) poklapaju kada je $m = n - 1$. Kada je $m = 0$ iz (8.20) i (8.21) dobijamo

$$\widetilde{M}(A) = \varphi_0 I \tag{8.22}$$

i $\varphi_1(A) = \varphi_2(A) = \ldots = \varphi_{n-1}(A) = 0$. U tom slučaju ceo prostor je karakterističan prostor funkcije $\widetilde{M}(A)$.

U slučaju trodimenzionalnog prostora (8.14) postaje

$$\widetilde{M}(A) = \varphi_0 I + \varphi_1 A + \varphi_2 A^2, \quad \varphi_k = \varphi_k(I_A, II_A, III_A) \tag{8.23}$$

gde je $k = 0, 1, -2$.

Ako je tenzor A regularan (tj. det $A \neq 0$), onda se (8.23) može, pomoću Kejli-Hamiltonove teoreme, izraziti u obliku

$$\widetilde{M}(A) = \psi_0 I + \psi_1 A + \psi_{-1} A^{-1}, \quad \psi_l = \psi_l(I_A, II_A, III_A), \tag{8.24}$$

gde je $l = 0, 1, 1$.

Teorema o predstavljanju izotropnih linearnih funkcija

Linearna tenzorska funkcija $M = \widetilde{M}(A)$, $M, A \in \mathscr{S}$ je izotropna ako i samo ako postoje skalari λ i μ takvi da je

$$\widetilde{M}(A) = \lambda(tr\, A)\, I + 2\mu A \tag{8.25}$$

za svako $A \in \mathscr{S}$.

Dokaz: Teoremu ćemo dokazati koristeći rezultate prethodne teoreme.

Neka je $\widetilde{M}(A)$ izotropna f-ja i neka je $\mathscr{E}$ skup svih jediničnih vektora. Za $e \in \mathscr{E}$ tenzor $e \otimes e$ ima karakteristične vrednosti određene skupom $\{1, 0, \ldots, 0\}$. Koristeći (8.19) možemo sada pisati

$$\widetilde{M}(e \otimes e) = \lambda(e)\, I + 2\mu(e)\, e \otimes e \tag{8.26}$$

za svako e, gde je $\lambda = \omega_2$ i $2\mu = \omega_1 - \omega_2$.

Izaberimo e i $f \in \mathscr{E}$. Tada uvek postoji ortogonalno Q za koje je $Qe = f$. Pošto je $Qe \otimes eQ^T = f \otimes f$ i $\widetilde{M}(A)$ izotropna f-ja sledi da je

$$Q\widetilde{M}(e \otimes e) Q^T - M(f \otimes f) =$$

$$= [\lambda(e) - \lambda(f)] I + 2[\mu(e) - \mu(f)] f \otimes f = O,$$

ili

$$\lambda(e) = \lambda(f), \quad \mu(e) = \mu(f) \tag{8.27}$$

s obzirom na linearnu nezavisnost $\{I, f \otimes f\}$. Prema tome λ i μ moraju biti konstante tako da (8.26) postaje

$$\widetilde{M}(e \otimes e) = \lambda I + 2\mu e \otimes e. \tag{8.28}$$

Neka je sada A neki proizvoljan simetričan tenzor u $\mathscr{S}$. Na osnovu spektralne teoreme je

$$A = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i \otimes e_i$$

gde su karakteristični vektori e_i ortogonalni, tj., $e_i \cdot e_j = \delta_{ij}$. Tada s obzirom na (8.28) i linearnost $\widetilde{M}(A)$ imamo

$$\begin{aligned}\widetilde{M}(A) = \widetilde{M}\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i e_i \otimes e_i\Big) &= \sum_{i=1}^{n} a_i \widetilde{M}(e_i \otimes e_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i (\lambda I + 2\mu e_i \otimes e_i) \\ &= \lambda\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i\Big) I + 2\mu \sum_{i=1}^{n} a_i e_i \otimes e_i \\ &= \lambda (tr\, A) I + 2\mu A\end{aligned}$$

jer je $tr\, A = \sum_{i=1}^{n} a_i$.

Obrnuto, neka (8.25) važi. Tada je

$$\begin{aligned}Q\widetilde{M}(A) Q^T &= \lambda (tr\, A) I + 2\mu\, QAQ^T \\ &= \lambda [tr\,(QAQ^T)] I + 2\mu\, QAQ^T \\ &= \widetilde{M}(QAQ^T),\end{aligned}$$

tj., $\widetilde{M}(A)$ je izotropna f-ja. □

Pri predstavljanju izotropnih tenzorskih funkcija možemo koristiti teoremu 1 odeljka 4. Primenimo je na slučaj invarijante $\varphi(A) = \varphi(I_1, \ldots, I_n)$ koja je neprekidna i diferencijabilna funkcija glavnih invarijanti I_k. Na osnovu navedene teoreme 1 gradijent $\varphi_A(A)$ je izotropna tenzorska funkcija i data je izrazom

$$\frac{\partial \varphi}{\partial A} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial I_k} \frac{\partial I_k}{\partial A} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial I_k} \sum_{p=0}^{k-1} (-1)^p I_{k-p-1}(A) (A^p)^T \tag{8.29}$$

gde smo koristili (4.9). Za $n = 3$ dobijamo

$$\frac{\partial\varphi}{\partial \boldsymbol{A}} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial I} + \frac{\partial\varphi}{\partial II} I + \frac{\partial\varphi}{\partial III} II\right) \boldsymbol{I} - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial II} + \frac{\partial\varphi}{\partial III} I\right) \boldsymbol{A}^T + \frac{\partial\varphi}{\partial III} (\boldsymbol{A}^2)^T. \tag{8.30}$$

Za regularan tenzor $\boldsymbol{A}$ ova jednakost se može predstaviti u obliku

$$\frac{\partial\varphi}{\partial \boldsymbol{A}} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial I} + \frac{\partial\varphi}{\partial II} I\right) \boldsymbol{I} - \frac{\partial\varphi}{\partial II} \boldsymbol{A}^T + \frac{\partial\varphi}{\partial III} III\, (\boldsymbol{A}^{-1})^T \tag{8.31}$$

kada se, s obzirom na (4.15), uzme u obzir da je

$$\boldsymbol{A}^2 = I\boldsymbol{A} - II\,\boldsymbol{I} + III\,\boldsymbol{A}^{-1}. \tag{8.32}$$

Komponentalni oblik (8.31) je dat izrazom

$$\frac{\partial\varphi}{\partial A_{kl}} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial I} + \frac{\partial\varphi}{\partial II} I\right) g^{kl} - \frac{\partial\varphi}{\partial II} A^{lk} + \frac{\partial\varphi}{\partial III} III\, (A^{lk})^{-1}. \tag{8.33}$$

Ako je invarijanta $\varphi(\boldsymbol{A})$ izražena preko momentnih invarijanti, tj., ako je $\varphi(\boldsymbol{A}) = \varphi(\bar{I}_1, \ldots, \bar{I}_n)$, onda je

$$\frac{\partial\varphi}{\partial \boldsymbol{A}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial\varphi}{\partial \bar{I}_k} \frac{\partial \bar{I}_k}{\partial \boldsymbol{A}} = \sum_{k=1}^{n} k \frac{\partial\varphi}{\partial \bar{I}_k} (\boldsymbol{A}^{k-1})^T \tag{8.34}$$

kada se uzme u obzir (4.17).

Za $n = 3$ iz (8.34) se dobija

$$\frac{\partial\varphi}{\partial \boldsymbol{A}} = \frac{\partial\varphi}{\partial \bar{I}} \boldsymbol{I} + 2 \frac{\partial\varphi}{\partial \bar{II}} \boldsymbol{A}^T + 3 \frac{\partial\varphi}{\partial \bar{III}} (\boldsymbol{A}^2)^T \tag{8.35}$$

ili, u komponentalnom obliku,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial A_{kl}} = \frac{\partial\varphi}{\partial \bar{I}} g^{kl} + 2 \frac{\partial\varphi}{\partial \bar{II}} A^{lk} + 3 \frac{\partial\varphi}{\partial \bar{III}} A^l{}_m A^{mk}. \tag{8.36}$$

Koristeći teoremu 1 odeljka 4 može se pokazati da važe sledeći rezultati:

Vektorska funkcija $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{u})$ kao funkcija simetričnog tenzora $\boldsymbol{A}$ vektora $\boldsymbol{u}$ je izotropna ako i samo ako se može predstaviti u obliku

$$\boldsymbol{v} = (\varphi_0 \boldsymbol{I} + \varphi_1 \boldsymbol{A} + \ldots + \varphi_{n-1} \boldsymbol{A}^{n-1}) \cdot \boldsymbol{u}] \tag{8.37}$$

gde su φ_k $(k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$ simultane invarijante od $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{u}$ i mogui biti izražene kao funkcije invarijanti (7.15).

Na isti način se može pokazati da polinomijalna izotropna tenzorska funkcija $\boldsymbol{M} = \widetilde{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$, $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathcal{S}$, glasi

$$\begin{aligned} \boldsymbol{M} = \psi_0 \boldsymbol{I} + \psi_1 \boldsymbol{A} + \psi_2 \boldsymbol{B} + \psi_3 \boldsymbol{A}^2 + \psi_4 \boldsymbol{B}^2 + \psi_5 (\boldsymbol{AB} + \boldsymbol{BA}) \\ + \psi_6 (\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B} + \boldsymbol{BA}^2) + \psi_7 (\boldsymbol{AB}^2 + \boldsymbol{B}^2\boldsymbol{A}) + \psi_8 (\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}^2 + \boldsymbol{B}^2\boldsymbol{A}^2) \end{aligned} \tag{8.38}$$

gde su $\psi_0, \ldots, \psi_8$ polinomi deset osnovnih invarijanti

$$\begin{gathered} tr\,\boldsymbol{A},\ tr\,\boldsymbol{A}^2,\ tr\,\boldsymbol{A}^3,\ tr\,\boldsymbol{B},\ tr\,\boldsymbol{B}^2,\ tr\,\boldsymbol{B}^3, \\ tr\,(\boldsymbol{AB}),\ tr\,(\boldsymbol{AB}^2),\ tr\,(\boldsymbol{BA}^2),\ tr\,(\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}^2). \end{gathered} \tag{8.39}$$

U slučaju tenzorskih izotropnih funkcija više nezavisno promenljivih tenzora ili vektora problem je znatno složeniji. Potpunija literatura s tim u vezi može se naći u monografiji NLFT.

C. O Pfafovim jednačinama

PFAFOVA JEDNAČINA

Razmatranje ćemo vršiti u odnosu na Dekartove koordinate x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ n-dimenzionalnog euklidskog prostora E_n, s obzirom da je prostor naših fizičkih događaja euklidski.

Linearna diferencijalna jednačina

$$X_i dx_i = 0, \tag{1}$$

gde su veličine $X_i = X_i(x_j)$ neprekidne i diferencijabilne funkcije svojih argumenata, naziva se *Pfafova jednačina.*

Potpuno integrabilna Pfafova jednačina

Definicija: *Pfafova jednačina je potpuno integrabilna ako postoji funkcija*

$$\mu = \mu(x_j), \tag{2}$$

koja, pomnožena sa levom stranom jednačine (1), *ovu pretvara u totalni diferencijal neke funkcije* $\phi = \phi(x_i)$, *tj.*

$$d\phi = \mu X_i dx_i. \tag{3}$$

Takva funkcija μ se naziva *integracioni faktor.* Tada je

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_i} = \mu X_i, \tag{4}$$

pod uslovom da desna strana (4) zadovoljava uslove integrabilnosti

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i\, \partial x_j} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j\, \partial x_i} = 0. \tag{5}$$

S obzirom na (4) ovi uslovi postaju

$$X_{i,j} - X_{j,i} + X_i (\log \mu)_{,j} - X_j (\log \mu)_{,i} = 0,$$

gde »,« označava parcijalni izvod po x_i.

Množenjem ove relacije sa X_k dobiajmo

$$(X_{i,j} - X_{j,i}) X_k + X_i X_k (\log \mu)_{,j} - X_j X_k (\log \mu)_{,i} = 0,$$

odakle cikličkom permutacijom indeksa i, j i k sledi

$$(X_{j,k} - X_{k,j}) X_i + X_j X_i (\log \mu)_{,k} - X_k X_i (\log \mu)_{,j} = 0,$$

$$(X_{k,i} - X_{i,k}) X_j + X_k X_j (\log \mu)_{,i} - X_i X_j (\log \mu)_{,k} = 0.$$

Njihovim sabiranjem dobijamo sistem jednačina

$$a_{ijk} \equiv (X_{i,j} - X_{j,i}) X_k + (X_{j,k} - X_{k,j}) X_i + (X_{k,i} - X_{i,k}) X_j = 0 \tag{6}$$

koji predstavlja *uslove integrabilnosti* Pfafove jednačine (1).

Lako je pokazati da je a_{ijk} potpuno antisimetričan sistem trećeg reda i da, prema tome, broj jednačina (6) koje nisu identički jednake nuli iznosi

$$\binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}.$$

Ove jednačine nisu sve nezavisne. Zaista, ako bi napisali četiri jednačine koje sadrže tri od četiri veličine X_i, X_j, X_k, X_l svaka od ovih jednačina bi se mogla izvesti preko ostale tri. Zbog toga broj nezavisnih uslova intetgrabilnosti (6) iznosi svega

$$\frac{1}{2}(n-1)(n-2). \tag{7}$$

Odavde se vidi da su za $n = 1, 2$, tj. za slučaj Pfafove forme jedne ili dve nezavisno promenljive, uslovi integrabilnosti identički zadovoljeni.

> ***Teorema 1:*** *Uslovi* (6) *su i potrebni i dovoljni za potpunu integrabilnost Pfafove jednačine* (1).

Dokaz teoreme 1: Da su uslovi (6) potrebni sledi iz ovde iznetog njihovog izvođenja.

Za dokaz dovoljnosti uslova (6), tj., egzistencije integracionog faktora μ Pfafove jednačine (1), prethodno ćemo dokazati pomoćni ***stav***

> *Ako je*
>
> $$a_{ijk}(\boldsymbol{X}) = 0,$$
>
> *gde je a_{ijk} dato sa $(6)_1$, onda je i*
>
> $$a_{ijk}(\lambda \boldsymbol{X}) = 0, \tag{8}$$
>
> *gde je $\lambda(x_i)$ proizvoljna, neprekidna funkcija svojih argumenata.*

Dokaz stava: Prema definiciji a_{ijk} sledi, posle kratke i proste računice, da je

$$a_{ijk}(\lambda \boldsymbol{X}) = \lambda^2 a_{ijk},$$

čime je stav dokazan.

Dalje ćemo se iz praktičnih razloga ograničiti na slučaj tri nezavisno promenljive x, y i z; uvođenjem oznaka $P = X_1$, $Q = X_2$ i $R = X_3$, (1) i (6) mogu se izraziti u obliku

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0, \tag{9}$$

$$\boldsymbol{F} \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{F} = 0, \tag{10}$$

$$(\lambda \boldsymbol{F}) \cdot \operatorname{rot} \lambda \boldsymbol{F} = 0, \tag{11}$$

gde je $\boldsymbol{F} \equiv (P, Q, R)$.

Prema uslovu zadatka, uslovi integrabilnosti (10) su zadovoljeni. Dokazaćemo da je to i dovoljno za postojanje integracionog faktora μ jednačine (9) ili funkcije $\phi(x, y, z)$ čiji su odgovarajući parcijalni izvodi proporcionalni funkcijama P, Q i R. U tom cilju, privremeno, pretpostavimo da je z parametar koji se ne menja u (9), tako da (9) postaje

$$P(x, y, z)\, dx + Q(x, y, z)\, dy = 0. \tag{12}$$

Poznato je da je diferencijlna jednačina dve promenljive ovog oblika uvek integrabilna. To znači da postoji funkcija, recimo $U(x, y, z)$, takva da su njeni izvodi proporcionalni sa P i Q. Prema tome, možemo pisati

$$U(x, y, z) = C, \quad C = \text{const}, \tag{13}$$

i

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \mu P, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = \mu Q. \tag{14}$$

Smenom (14) u (9) dobijamo da je

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{1}{\mu} \frac{\partial U}{\partial y} dy + Rdz = 0,$$

za svako z. Dodavanjem i oduzimanjem člana $\frac{1}{\mu} Rdz$ ovaj izraz se može pisati u obliku

$$\frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz + \left(\mu R - \frac{\partial U}{\partial z}\right) dz = 0,$$

ili

$$dU + K(x, y, z)\, dz = 0, \tag{15}$$

gde je

$$K(x, y, z) = \mu R - \frac{\partial U}{\partial z}. \tag{16}$$

Iz ovog izraza i (14) sledi da je

$$\mu P = \frac{\partial U}{\partial x}, \qquad \mu Q = \frac{\partial U}{\partial y}, \qquad \mu R = \frac{\partial U}{\partial z} + K,$$

ili

$$\mu \boldsymbol{F} = \operatorname{grad} U + \boldsymbol{K},$$

gde je $\boldsymbol{K} \equiv (0, 0, K)$. Tada je

$$\operatorname{rot} \mu \boldsymbol{F} = \operatorname{rot} \boldsymbol{K},$$

jer je rot grad $U \equiv 0$. Koristeći ovu relaciju u (11) dobijamo da je

$$\mu \boldsymbol{F} \cdot \operatorname{grad} \mu \boldsymbol{F} = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial K}{\partial y} - \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial K}{\partial x} \equiv \frac{\partial (U, K)}{\partial (x, y)} = 0.$$

To znači da između U i K postoji funkcionalna relacija koja ne sadrži ni x ni y, tj.

$$K = K(U, z). \tag{17}$$

Tada jednačina (15) postaje

$$dU + K(U, z)\, dz = 0,$$

tj., diferencijalna jednačina dve promenljive koja je integrabilna. Njeno rešenje

$$\phi(U, z) = \text{const.} \tag{18}$$

posle smene (13) postaje funkcija

$$\Phi(x, y, z) = \phi(U(x, y, z), z)$$

koja je rešenje polazne diferencijalne jednačine (1) i koje glasi

$$\phi(x, y, z) = \text{const.} \tag{19}$$

Očigledno takva jednačina onda poseduje i integracioni faktor. Time je dokaz teoreme 1, u navedenom slučaju, završen.

Napomena 1. Integracioni faktor μ potpuno integrabilne Pfafove jednačine (1) nije jedinstven. Zaista, za integracioni faktor μ kome odgovara funkcija ϕ, takva da je

$$\mu X_i dx_j = d\phi$$

svaka funkcija μ' definisana sa

$$\mu' \equiv \mu \frac{d\Phi}{d\phi}$$

gde je $\Phi(\phi)$ proizvoljna, ali jednoznačna, neprekidna i diferencijabilna funkcija od ϕ, je takođe integracioni faktor. Tada

$$\mu' X_i dx_i = \mu X_i dx_i \frac{d\Phi}{d\phi} = d\Phi,$$

tj., tako određenom integracionom faktoru μ' odgovara funkcija Φ kao rešenje Pfafove diferencijalne jednačine (1). Jasno je da

$$\phi = k$$

povlači za sobom relaciju

$$\Phi \equiv k'$$

gde je $k' \equiv \Phi(k)$. Ove relacije definišu istu jednoparametarsku familiju hiperpovrši u E_n tako da kroz datu tačku u E_n prolazi samo jedna takva hiperpovrš.

Napomena 2. U opštem slučaju, sa teorijskog stanovišta, a posebno sa stanovišta njene primene u termodinamici na prvi zakon termodinamike, značajna je

Teorema 2: *Potreban i dovoljan uslov da Pfafova jednačina* (1) *bude integrabilna jeste da njene promenljive* x_i *zadovoljavaju relaciju*

$$f(x_i) = 0. \tag{a}$$

Dokaz: Oznake ćemo pirlagoditi tumačenju u termodinamici izvedenih rezultata, a posebno odeljka (V. 12).

Uslov (a) ***je potreban.*** Neka je (1) integrabilno. Tada važi (4) u obliku

$$X_i = T\frac{\partial \eta}{\partial x_i}. \tag{b}$$

Pfafova jednačina sada glasi

$$d\eta = 0$$

ili

$$\eta(x_i) = \text{const.}$$

što pokazuje potrebnost uslova (a).

Uslov (a) ***je dovoljan.*** Znači, ako (a) važi onda u E_n ono predstavlja hiperpovrš. U tom prostoru jednačina te hiperpovrši može biti data u parametarskom obliku

$$x^i = x^i(U^\alpha) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n-1)$$

gde su U^α koordinate na hiperpovrši.

Definišimo koordinatnu transformaciju

$$x_i = x_i(U^\alpha, \xi),$$

tako da je koordinatna linija ξ upravna na hiperpovrš (a). Njoj inverzne relacije su

$$U^\alpha = U^\alpha(x_i)$$

$$\xi = \xi(x_i).$$

Tada je, zbog ortogonalnosti ξ na hiperpovrš (a)

$$\frac{\partial U^\alpha}{\partial x_i}\frac{\partial \xi}{\partial x_i} = 0 \tag{c}$$

[Radi definisanosti, neka je hiperpovrš (a) određena sa $\xi = 0$ ili sa jednačinama

$$x_i = x_i(U^\alpha, 0) = x^i(U^\alpha).]$$

U odnosu na tako izabrani koordinatni sistem komponente vektora X_i postaju Y_i koje se određuju iz izraza

$$Y_\alpha = X_i\frac{\partial x_i}{\partial U^\alpha}$$

$$Y_\xi = X_i\frac{\partial x_i}{\partial \xi}.$$

Takođe je

$$X_i = \frac{\partial U^\alpha}{\partial x^i} Y_\alpha + \frac{\partial \xi}{\partial x_i} Y_\xi. \tag{d}$$

Koristeći ove relacije u (1) dobijamo odgovarajuću Pfafovu jednačinu u odnosu na novoizabrani koordinatni sistem (U^α, ξ), koja glasi

$$Y_\alpha \, dU^\alpha = 0$$

s obzirom na (c).

U ovoj jednačini su sada dU^α potpuno proizvoljne veličine zbog čega mora biti

$$Y_\alpha = 0$$

za svako $\alpha = 1, 2, \ldots, n-1$.

Tada se (d) svodi na oblik

$$X_i = \frac{\partial \xi}{\partial x_i} Y_\xi$$

što je potpuno ekvivalentno sa (b), tako da se Y_ξ može identifikovati sa T, a ξ sa η.

Time je dokaz dovoljnosti završen. □

Na osnovu ove teoreme vidi se, iz (b), da je

$$T = T(x_i),$$

zentropska površ, tj., površ za koju je $\eta = \text{const}$.

Uslov ortogonalnosti (c) nam omogućuje da se pokaže da su i kontravarijantne komponente $Y^\alpha = 0$, jer je

$$Y^\alpha = X_i \frac{\partial U^\alpha}{\partial x_i} = \frac{\partial \xi}{\partial x^i} \frac{\partial U^\alpha}{\partial x^i} Y_\xi = 0.$$

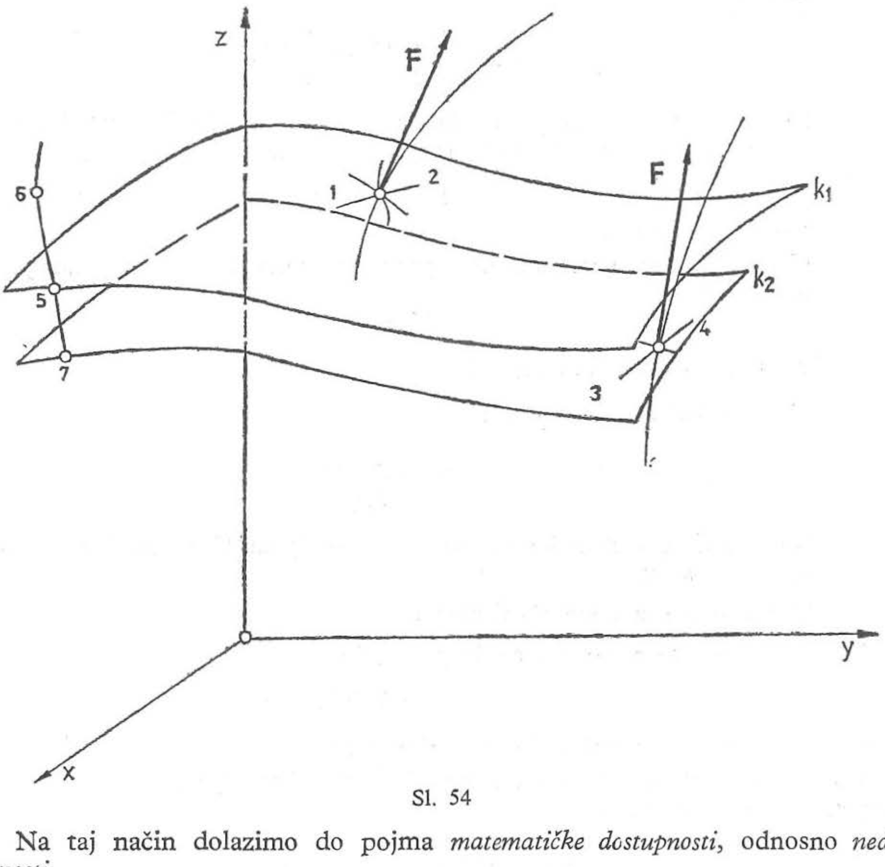
Dostupne i nedostupne tačke. Karateodorijeva teorema

U E_3 familija površi $\phi(x, y, z) = c$, koja je rešenje jednačine (9), je na slici 54.

Svaka od njih ima osobinu da je njihov linijski element $\boldsymbol{dr}$ (dx, dy, dz) upravan na vektor $\boldsymbol{F}(P, Q, R)$ u datoj tački površi, saglasno diferencijalnoj jednačini (9).

Do opštijeg zaključka možemo da dodajemo ako razmatramo vektorsko polje $\boldsymbol{F}$. Kao što je poznato, ono jednoznačno određuje vektorske linije koje su prikazane na slici. Za takve linije rešenja $\phi(x, y, z) = c$ potpuno integrabilne Pfafove diferencijalne jednačine predstavljaju jednoparametarsku familiju površi upravnu na vektorske linije vektorskog polja $\boldsymbol{F}$.

Očigledno je da i bilo koja linija u bilo kojoj površi $\phi = \text{const.}$ je takođe rešenje diferencijalne jednačine (9). Na osnovu toga i prethodne napomene, možemo zaključiti: sve takve moguće krive obrazuju jednoparametarsku familiju površi $\phi = c$. Prema tome, nemoguće je naći krivu, koja je rešenje potpuno integrabilne Pfafove diferencijalne jednačine, a koja bi pripadala dvema površima iz skupa površi $\phi = c$, bez obzira koliko te površi bile bliske.



Sl. 54

Na taj način dolazimo do pojma *matematičke dostupnosti*, odnosno *nedostupnosti*.

Definicija: *Dve tačke se nazivaju* ***dostupnim*** *ako može da se nađe kriva koja ih spaja a koja je rešenje Pfafove diferencijalne jednačine* (9). *Tačke za koje ne postoji takva kriva nazivaju se* ***nedostupnim.***

Jasno je, na osnovu svega do sada rečenog, da par dostupnih tačaka za potpuno integrabilnu diferencijalnu jednačinu (9) leži na istoj površi jedne od jednoparametarskih familija površi $\phi = c$. Na primer: tačke 1 i 2 kao i 3 i 4 su parovi takvih tačaka dok su tačke 6 i 7 nedostupne tački 5. Time je dokazana *Karateodorijeva teorema:*

> *U okolini bilo koje tačke A, bez obzira koliko ta okolina bila mala, u vektorskom polju kojem odgovara potpuno integrabilna diferencijalna jednačina* (9) *postoje tačke koje su nedostupne tački A duž krivih koje su rešenja diferencijalne jednačine* (9).

Pfafova jednačina nije potpuno integrabilna

U tom slučaju je

$$\boldsymbol{F} \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{F} \neq 0 \tag{20}$$

tj., nisu zadovoljeni uslovi integrabilnosti (10). Tada ne postoji integracioni faktor μ niti rešenje $\phi(x, y, z) = c$ koje predstavlja jednoparametarsku familiju površi.

Tada tražimo rešenje u obliku krive. U tom slučaju će u Pfafovoj jednačini (9) samo jedna od promenjivih x, y i z biti nezavisna. Njena integracija sadrži u sebi veliki stepen proizvoljnosti.

Možemo uzeti proizvoljnu funkciju

$$\psi(x, y, z) = 0, \tag{21}$$

koja predstavlja, sa geometrijskog stanovišta, neku površ u E_3 i potražiti na njoj krivu koja bi bila rešenje jednačine (9). Na toj površi je očigledno

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \psi}{\partial z} dz = 0. \tag{22}$$

Tada iz (22) i (9) dobijamo

$$\left(R \frac{\partial \psi}{\partial x} - P \frac{\partial \psi}{\partial z}\right) dx + \left(R \frac{\partial \psi}{\partial y} - Q \frac{\partial \psi}{\partial z}\right) dy = 0. \tag{23}$$

Eliminacijom z pomoću (21) u ovoj jednačini dobijamo jednačinu oblika

$$M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dx = 0 \tag{24}$$

koja je integrabilna. Neka je

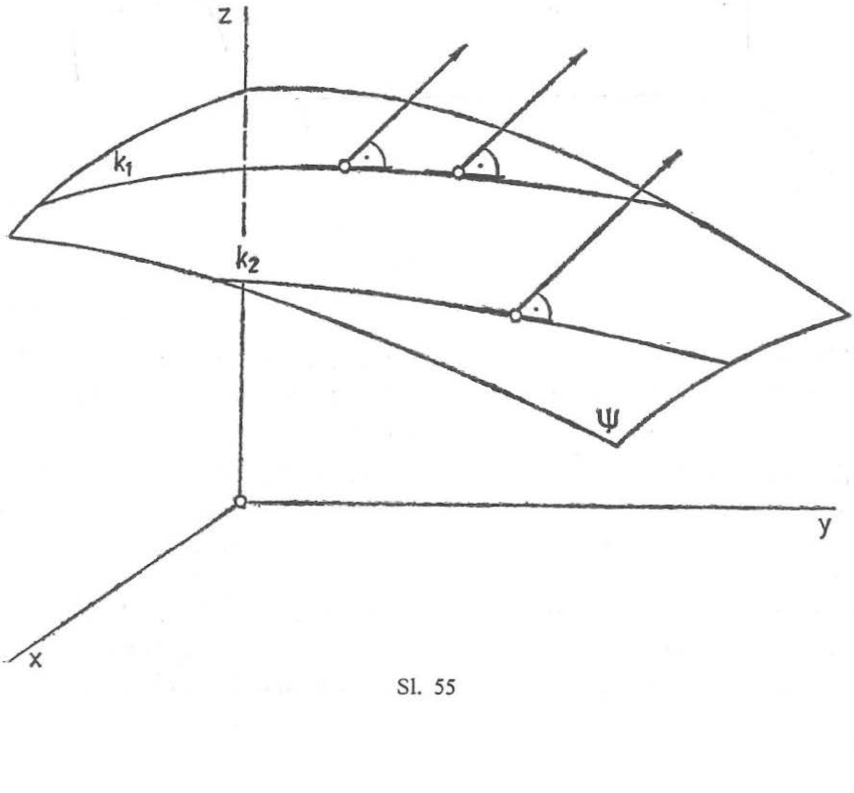
$$\phi(x, y) = k \tag{25}$$

rešenje ove jednačine. Tada presek površi

$$\psi(x, y) = 0 \quad \text{i} \quad \phi(x, y) = k, \tag{26}$$

određuje traženu jednoparametarsku familiju krivih na površi $\psi(x, y, z) = 0$. Jasno je da se tako određene krive na površi $\psi(x, y, z) = 0$ ne seku, jer se cilindrične površi (25), kao rešenje jednačine (24) ne seku.

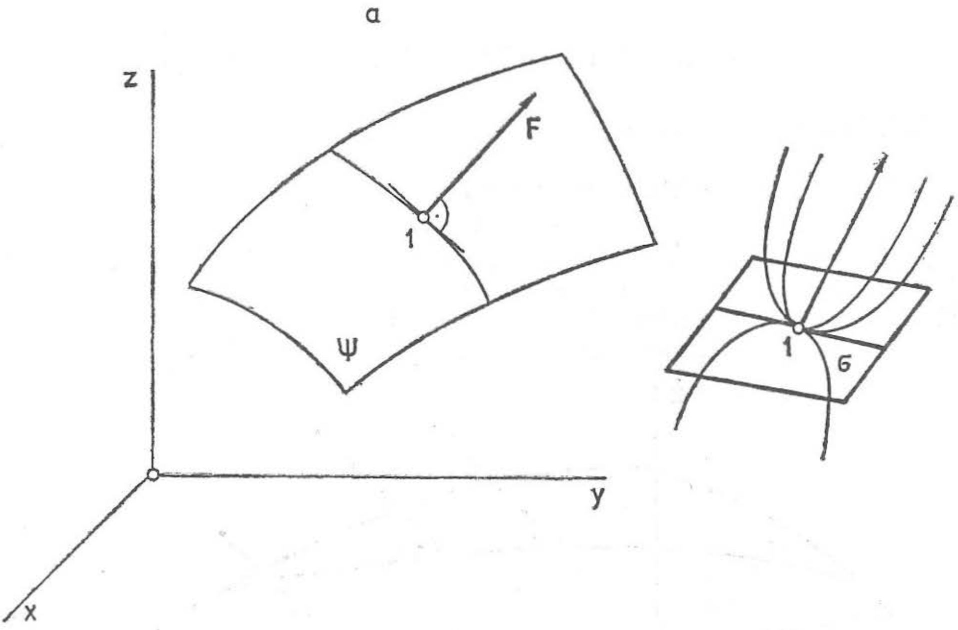
Na slici 55 je geometrijski prikaz krivih određenih sa (26).



Sl. 55

Tako dobijene krive su u svakoj svojoj tački upravne na vektor $\boldsymbol{F}$. Za površ $\psi = 0$ to ne važi, jer su za to potrebne najmanje dve krive na ψ koje se seku i na koje bi vektor $\boldsymbol{F}$ u njihovoj presečnoj tački bio upravan. Kako se krive na ψ, određene jednačinama (16), ne seku (kao što smo istakli) taj uslov nije zadovoljen.

Izborom druge površi, recimo $\varphi(x, y, z) = 0$, istim postupkom odredili bismo novu jednoparametarsku familiju krivih koje su rešenje polazne Pfafove jednačine (9). Jasno je da se te krive na površi $\varphi = 0$ ne seku i da njihov oblik zavisi od izbora površi $\varphi = 0$.



Sl. 56

To znači da za neku izabranu tačku u E_3, recimo tačku 1 na slici 56 a, i za neku proizvoljnu površ $\psi = 0$ kroz tu tačku uvek možemo odrediti krivu na toj površi kroz tu tačku koja bi bila rešenje jednačine (9).

Ako se kroz tu tačku povuku sve moguće površi, ili, što se svodi na isto, ako se površ $\psi = 0$, zamišljamo, neprekidno deformiše na sve moguće načine, onda tako dobijene sve moguće linije kroz tu tačku neće obrazovati element površi nego element prostora. U samoj tački sve one moraju biti upravne na vektor $\boldsymbol{F}$, tj. njihove tangente leže u ravni σ upravnoj na $\boldsymbol{F}$ u toj tački (sl. 56 b). To znači da su tački 1 dostupne sve tačke njene okoline, tj. da uvek postoji kriva koja spaja tačku 1 sa bilo kojom tačkom njene okoline, a koja je rešenje Pfafove jednačine (9).

Pfafova jednačina je integrabilna

U slučaju kada je $\boldsymbol{F} \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{F} = 0$, tj., kada je Pfafova jednačina (9) potpuno integrabilna, može se prethodni postupak primeniti za određivanje krivih koje su rešenje te jednačine. Međutim, u tom slučaju je Pfafova jednačina (9) potpuno integrabilna i prema definiciji postoji funkcija $\Phi(x, y, z)$ takva da je

$$\operatorname{grad} \Phi = \mu \boldsymbol{F} \quad \text{ili} \quad \mu = \frac{1}{p}\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{1}{Q}\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{1}{R}\frac{\partial \Phi}{\partial z}.$$

Površ $\Phi(x, y, z) = \text{const.}$ je, prema tome, u svakoj tački upravna na $\boldsymbol{F}$. Jednačina (23) se onda može napisati u obliku

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial z}\right) dx + \left(\frac{\partial \Phi}{z\partial}\frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial z}\right) dy = 0 \tag{27}$$

odakle se vidi da dalji postupak zavisi od odnosa funkcija Φ i ψ.

Za $\Phi \neq \psi$ prethodno izneti postupak u potpunosti važi. Ako je pak $\psi = \Phi$, onda se jednačina (27) svodi na identitet

$$0 \cdot dx + 0 \cdot dy = 0.$$

Tada ne postoji funkcija $\phi(x, y) = \text{const.}$ koja bi za tako izabranu funkciju ψ bila rešenje jednačine (24). To znači da je bilo koja kriva za tako izabrano ψ rešenje jednačine (9), ili, kratko rečeno, cela površ $\psi = \text{const.}$ je u svakoj svojoj tački upravna na vektorsko polje $\boldsymbol{F}$.

Sada možemo preći na ***obrnutu Karateodorijevu teoremu:***

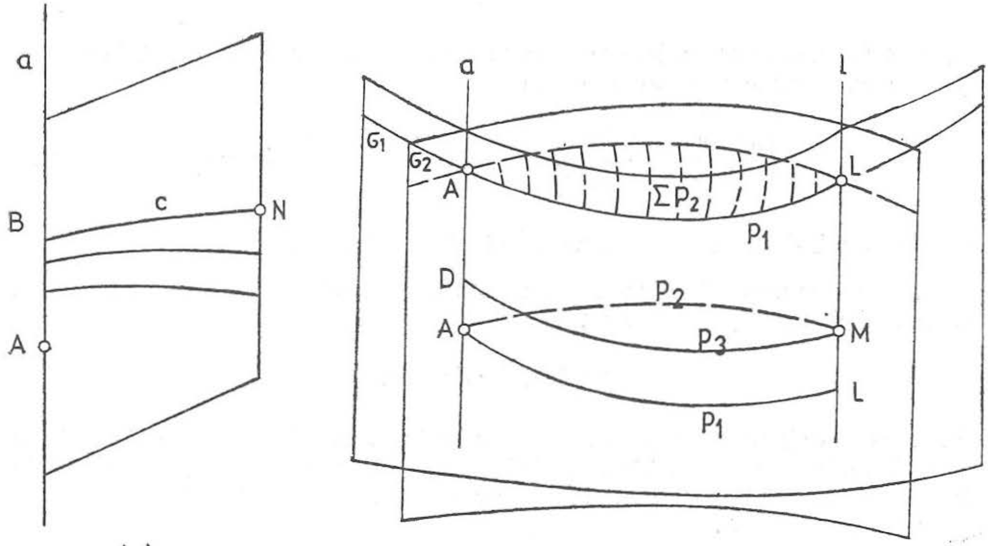
> *Ako vektorsko polje ima osobinu da, za proizvoljnu okolinu bilo koje tačke u tom polju (ma koliko ta okolina bila mala), postoje tačke koje su njoj nedostupne, onda je Pfafova jednačina, koja odgovara tom vektorskom polju, potpuno integrabilna.*

Ova i prethodna teorema mogu se sažeti u jednu ***matematičku formulaciju Karateodorijeve teoreme:***

> *Pfafova diferencijalna jednačina* (9) *je potpuno integrabilna ako i samo ako u okolini tačke A u vektorskom polju* $\boldsymbol{F}$, *kome odgovara diferencijalna jednačina* (9), *postoje njoj nedostupne tačke.*

Dokaz obrnute Karateodorijeve teoreme. Postoji više dokaza ove teoreme. Mi ćemo se zadržati na geometrijskom dokazu koji je dao Karateodori i koji je baziran na dosadašnjem geometrijskom prilazu.

Neka u okolini proizvoljne tačke A, u domenu definisanosti vektora $\boldsymbol{F}$, prema obrnutoj teoremi Karateodori, postoji beskonačno mnogo njoj nedostupnih tačaka, pri čemu je tačka N jedna od njih (sl. 57 a). Neka je a linija kroz A, koja nije rešenje Pfafove jednačine (9). Takve linije uvek postoje. Bez gubljenja u opštosti možemo uzeti da je a prava linija. Kroz tu pravu i tačku N možemo postaviti recimo, ravan π ili bilo koju drugu površ. Na toj ravni π, kao i na svakoj drugoj, površi, postojaće kriva c kroz N koja je rešenje jednačine (9). Ova kriva ne može prolaziti kroz A, jer bi tada tačka N njoj bila dostupna, što je suprotno pretpostavci. Neka kriva c preseca pravu a u tački B. Pogodnim izborom tačke N moguće je tačku B učiniti bliskom tački A koliko želimo. To dokazuje da u okolini tačke A na pravoj a postoje tačke nedostupne tački A, jer su dostupne tačkama N koje su nedostupne tački A. Ove tačke B ležaće sa obe strane tačke A na pravoj a, blisko tački A koliko želimo.



Sl. 57

Izaberimo sada pravu l paralelnu sa a, vodeći računa o tome da l takođe nije rešenje jednačine (9). Kroz ove dve prave, a i l, možemo provući cilindričnu površ σ_1. Na toj površi možemo, na poznati način, odrediti krivu p_1, kroz A koja je rešenje jednačine (9). Ova kriva seći će pravu l u tački L. Za neku drugu cilindričnu površ σ_2 kroz a i l postojaće druga kriva p_2 kroz A koja je rešenje jednačine (9). Ova kriva mora seći pravu l u istoj tački L kao i prava p_1. U protivnom, kao što je prikazano na slici 57 pod b, iz tačke M, $M \neq L$, bilo bi moguće pomoću krive p_3, kao rešenja jednačine (9), doći do tačke D ($D \neq A$) na pravoj a. Onda bi tačka D bila dostupna tački A duž pravih p_2 i p_3 kroz M. Međutim, to je suprotno onome što smo prethodno pokazali, naime, da tačke u okolini tačke A, na pravoj a, moraju biti njoj nedostupne.

Zamislimo sada neprekidan niz cilindričnih površi σ kroz prave a i l. Na svakoj od njih postojaće kriva p koja je rešenje jednačine (9) i koja prolazi kroz tačke A i L. Očigledno je da sve te krive obrazuju površ Σ koja prolazi kroz tačke A i L i prave p_1 i p_2.

Variranjem tačke A dobili bi familiju nepresecajućih površi, jer bi u protivnom tačke na pravoj a, u okolini tačke A, njoj bile dostupne. □

__Napomena 3.__ U slučaju kada ne bi postojale nedostupne tačke, bio bi moguć slučaj $Lp_1Ap_2Mp_3D$ koji je prikazan na sl. 57 b. Tada bi krive p_1, p_2 i p_3 ispunjavale element prostora i ne bi činile površ.

EGZISTENCIJA ENTROPIJE I TEMPERATURE

U odeljku (V.12), u slučaju reverzibilnih i ireverzibilnih sistema, uvedena je temperatura T kao promenljiva stanja. Dalje je pokazana, korišćenjem Karateodorijevih postulata i teoreme, egzistencija entropije η kao funkcije stanja.

Moguće je, pod određenim pretpostavkama, pokazati egzistenciju entropije (i temperature) za reverzibilne i ireverzibilne sisteme bez prethodnog uvođenja temperature kao promenljive stanja. To ćemo ovde ilustrovati.

Reverzibilan sistem

Definicija. *Za sistem se kaže da je reverzibilan:*

a) *ako je, za adijabatske procese, njegova unutrašnja energija ε funkcija samo deformacije x_i i*

b) *ako su sile X_i u Pfafovoj formi prvog zakona termodinamike funkcije unutrašnje energije ε i deformacije x_i.*

Ova definicija je u saglasnosti sa (5.12.5) kojom je definisan reverzibilan sistem i za koji je pretpostavljena a priori egzistencija temperature T. Zaista, iz $(5.12.5)_1$ sledi da je

$$T = T(\varepsilon, x_i). \tag{1}$$

Smenom ovog izraza u $(5.12.5)_2$ dobijamo

$$X_i = X_i(\varepsilon, x_i) \tag{2}$$

što je u saglasnosti sa stavom b) definicije.

Takođe, s obzirom na (5.12(i)) iz $(5.12.5)_1$ vidi se da je

$$\varepsilon = \varepsilon(x_i) \tag{3}$$

što je u saglasnosti sa stavom a) iste definicije.

Tada prvi zakon termodinamike (5.12.6) možemo pisati u obliku

$$d\varepsilon - X_i(\varepsilon, x_j)\, dx_i = đq. \tag{4}$$

Prema Karateodorijevoj teoremi Pfafova forma, definisana levom stranom ovog izraza, je integrabilna ako u okolini neke tačke G_0 u prostoru promenljivih ε i x_i postoje tačke koje su njoj nedostupne duž krivih koje su rešenje Pfafove jednačine

$$d\varepsilon - X_i(\varepsilon, x_j)\, dx_i = 0. \tag{5}$$

Međutim, kao posledica Karateodorijevog postulata, ovaj uslov je zadovoljen za reverzibilne i adijabatske procese. Prema tome, odgovarajuća Pfafova forma (4) je integrabilna. Saglasno definiciji integrabilnosti biće

$$d\varepsilon - X_i(\varepsilon, x_i)\, dx_i = \theta(\varepsilon, x_i)\, d\eta(\varepsilon, x_i), \tag{6}$$

gde je

$$\frac{1}{\theta}=\frac{\partial \eta}{\partial q}\bigg|_{x_i}, \qquad X_i = -\theta \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i}\bigg|_{\varepsilon}. \tag{7}$$

To znači da integrabilnost prvog zakona termodinamike za reverzibilne sisteme dovodi do egzistencije dve funkcije stanja θ i η takvih da je

$$\theta = \theta(\varepsilon, x_i), \qquad \eta = \eta(\varepsilon, x_i). \tag{8}$$

Ako se zameni uloga θ i ε kao zavisne i nezavisne promenljive i uvede slobodna energija $\psi(\theta, x_i)$ preko izraza

$$\psi = \varepsilon - \theta\eta, \tag{a}$$

onda se (7) može pisati u obliku

$$\begin{aligned} X_i &= \frac{\partial \psi}{\partial x_i}, \\ \eta &= -\frac{\partial \psi}{\partial \theta}. \end{aligned} \tag{10}$$

Ovi izrazi su identični sa (5.12.17—18) na osnovu čega zaključujemo da η i θ u (10) nisu ništa drugo nego entropija i temperatura respektivno.

Ireverzibilan sistem

Definicija. *Sistem je ireverzibilan ako je*

$$X_i = X_i(x_j, \varepsilon; q_\alpha), \tag{11}$$

i ε *nije funkcija od* x_j *i* q_α. Formalno,

$$\varepsilon \neq f(x_i; q_\alpha), \tag{12}$$

gde su q_α — unutrašnje promenljive stanja.

Prvi zakon termodinamike sada glasi

$$d\varepsilon - X_i(\varepsilon, x_j, q_\alpha)\, dx_i = đq. \tag{13}$$

Neka tačka G_0 u prostoru promenljivih ε i x_i reprezentuje termodinamičko stanje. Onda, prema Karateodorijevom postulatu, postoje tačke u okolini tačke G_0 koje joj nisu dostupne procesima koji su reverzibilni i adijabatski, tj. duž krivih koje su rešenje jednačine

$$d\varepsilon - X_i(\varepsilon, x_j, q_\alpha)\, dx_i = 0 \tag{14}$$

za $q_\alpha = \text{const.}$

Tada je, na osnovu Karateodorijeve teoreme, leva strana (13) integrabilna, tj.

$$d\varepsilon - X_i(\varepsilon, x_j, q_\alpha)\, dx_i = \theta(\varepsilon, x_i, q_\alpha)\, d\eta(\varepsilon, x_i, q_\alpha) \tag{15}$$

za $q_\alpha = \text{const.}$

Prema tome, važi ***stav***

Za ireverzibilne sisteme, za koje je $q_\alpha =$ const., *prvi zakon termodinamike je integrabilan. Tada za takve sisteme postoje funkcije* θ *koja se naziva temperatura i* η *koja se naziva entropija takve da su*

$$\theta = \theta(\varepsilon, x_i, q_\alpha); \quad \eta = \eta(\varepsilon, x_i, q_\alpha).$$

Razmenom uloga funkcija ε i θ kao zavisne i nezavisne promenljive, (14) postaje oblika

$$\left.\frac{\partial\varepsilon}{\partial\theta}\right|_{q_\alpha} d\theta + \left.\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_i}\right|_{q_\alpha} dx_i - X_i dx_i = \theta d\eta|_{q_\alpha}$$

što je identično sa (5.12.22). Tada ovde važe i dalji zaključci tog odeljka.

Napomena. Pretpostavka da je $\varepsilon = \varepsilon(x_i, q_\alpha)$ dovela bi nas do zaključka da bi prvi zakon termodinamike bio integrabilan u prostoru promenljivih $(\varepsilon, x_i, q_\alpha)$ sa posledicom da je tada $\frac{\partial\psi}{\partial q^\alpha} = 0$ što je suprotno pretpostavci da je sistem ireverzibilan. Otuda i zahtev (12).

PFAFOVA FORMA

Linearna diferencijalna forma oblika

$$\phi = X_i dx_i, \tag{1}$$

naziva se Pfafova forma. Analizirajmo tri moguća slučaja forme (1):

1. Ako je desna strana (1) totalni diferencijal neke funkcije w, tj. ako je

$$X_i dx_i = w \tag{2}$$

i

$$\frac{\partial w}{\partial x_i} = X_i, \tag{3}$$

funkcije X_i onda moraju zadovoljavati uslove

$$X_{i,j} - X_{j,i} = 0. \tag{4}$$

Nije teško pokazati da su ovi uslovi i dovoljni za egzistenciju takve funkcije w.

Tako, na primer, u slučaju tri promenljive x, y i z, kada se Pfafova forma može napisati u obliku

$$dw = P\,dx + Q\,dy + R\,dz, \tag{5}$$

tj. kada, prema uslovima (4) važi

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \qquad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \qquad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z} \tag{6}$$

iz jednačine (3) se dobija

$$w = \int_{x_0}^{x} P(x, y, z)\, dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y, z)\, dy + \int_{z_0}^{z} R(x_0, y_0 z)\, dz + C, \tag{7}$$

gde je C proizvoljna konstanta.

2. Moguć je i slučaj kada je

$$\mu X_i dx_i = dw, \tag{8}$$

tj., kada postoji funkcija $\mu(x_j)$ koja čini desnu stranu Pfafove forme totalnim diferencijalom funkcije w. Taj slučaj je detaljno razmatran u prethodnom odeljku kada je pokazano da funkcije X_i moraju da zadovoljavaju uslove

$$a_{ijk} = (X_{i,j} - X_{j,i})\, X_k + (X_{j,k} - X_{k,j})\, X_i + (X_{k,i} - X_{i,k})\, X_j = 0. \tag{9}$$

Takođe je pokazano da su uslovi (4) i dovoljni za dovođenje Pfafove forme (1) na oblik (8).

3. U opštem slučaju Pfafova forma se ne može izraziti u obliku totalnog diferencijala neke funkcije ali ju je moguće izraziti u prostijem tzv. kanonskom obliku.

Razmatrajmo to na slučaju forme tri nezavisne promenljive x, y i z

$$P(x, y, z)\, dx + Q(x, y, z)\, dy + R(x, y, z)\, dz = 0 \tag{10}$$

za koju nisu ispunjeni uslovi (6) i (9).

Potražimo funkciju $U(x, y, z)$ takvu da forma

$$P\, dx + Q\, dy + R\, dz - dU = P_1\, dx + Q_1\, dy + R_1\, dz \tag{11}$$

zadovoljava uslove (9) ili

$$P_1 \left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R_1}{\partial y}\right) + Q_1 \left(\frac{\partial R_1}{\partial x} - \frac{\partial P_1}{\partial z}\right) + R_1 \left(\frac{\partial P_1}{\partial y} - \frac{\partial Q_1}{\partial x}\right) = 0, \tag{12}$$

gde su P_1, Q_1 i R_1 dati izrazima

$$P_1 = P - \frac{\partial U}{\partial x}, \qquad Q_1 = Q - \frac{\partial U}{\partial y}, \qquad R_1 = R - \frac{\partial U}{\partial z}. \tag{13}$$

Tada (12), posle izvesnog sređivanja, postaje

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\frac{\partial U}{\partial x} + \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right)\frac{\partial U}{\partial y} + \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)\frac{\partial U}{\partial z} =$$

$$= P\left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}\right) + Q\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) + R\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right). \tag{14}$$

Ovoj parcijalnoj diferencijalnoj jednačini odgovara sistem običnih diferencijalnih jednačina

$$\frac{dx}{\dfrac{\partial Q}{\partial z}-\dfrac{\partial P}{\partial y}}=\frac{dy}{\dfrac{\partial R}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial z}}=\frac{dz}{\dfrac{\partial P}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial x}}=$$

$$=\frac{dU}{P\left(\dfrac{\partial Q}{\partial z}-\dfrac{\partial R}{\partial y}\right)+Q\left(\dfrac{\partial R}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial z}\right)+R\left(\dfrac{\partial P}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial x}\right)}. \tag{15}$$

Svi uslovi za postojanje rešenja ovog sistema diferencijatih jednačina su ispunjeni (diferencijabilnost, nijedan brojitelj nije jednak nuli). Kao funkciju w možemo uzeti bilo koje rešenje ovog sistema. Uočavajući da forma (10) potpada pod slučaj (2), dobijamo da je

$$P\,dx+Q\,dy+R\,dz=U+Vdw, \tag{16}$$

gde je $V\equiv\dfrac{1}{\mu}$.

Na osnovu svega se može zaključiti da se Pfafova forma (10) svodi na jedan od tri kanonska oblika

$$dU,\ VdV,\ dU+Vdw. \tag{17}$$

Najmanji broj promenljivih, preko kojih se izražava Pfafova forma, određuje njenu klasu. U slučaju tri promenljive, na osnovu (17) se vidi da ona može pıipadati prvoj, drugoj i trećoj klasi.

Izjednačavajući sa nulom Pfafovu formu dobijamo Pfafovu diferencijalnu jednačinu. U slučaju 1. i 2. ona je integrabilna dajući rešenja $U=\text{const.}$ i $w=$ $=\text{const.}$ U opštem slučaju Pfafova diferencijalna jednačina, kao što smo ranije zaključili, nije potpuno integrabilna.

LITERATURA

1. Ajzenhart, L. P.: *Uvod u diferencijalnu geometriju*, Naučna knjiga, Beograd, 1951.
2. Anđelić, T.: *Tenzorski račun*, Naučna knjiga, Beograd, 1973.
3. Aris, R.: *Vectors, Tensors and Basic Equation of Fluid Mechanics*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1962.
4. Boley, B. A. and J. H. Weiner: *Theory of Thermal Stresses*, J. Wiley & Sons, New York, 1960.
5. Brillouin, L.: *Wave propagation in periodic structures*, Dover Publications, 1953.
6. Chadwick, P.: *Continuum Mechanics*, John Wiley & Sons, New York, 1976.
7. Darby, R.: *Viscoelastic fluids*, Marcel Dekker, New York, 1976.
8. Diuelesaint, E. et D. Royer: *Ondes élastiques dans les solides*, Masson et C^{ie}, 1974.
9. Eisenhart, L. P.: *An Introduction to Differential Geometry*, Princeton University Press, Princeton, 1947.
10. Ericksen, J. L.: *Tensor Fields*, Handbuch der Physik, Bd. III/1 — Appendix, Springer-Verlag, Berlin, 1960.
11. Eringen, A. C.: *Nonlinear Theory of Continuous Media*, McGraw-Hill, New York, 1962.
12. Eringen, A. C.: *Mechanics of Continua*, John Wiley & Sons, New York, 1967.
13. Eringen, A. C.: *Continuum Physics*, Vol. 1 — Mathematics, Academic Press, New York, 1971.
14. Frederickson, A. G.: *Principles and Applications of Rheology*, Englewood Cliffs, N. J., 1964.
15. Fung, Y. C.: *Foundations of Solid Mechanics*, Englewood Cliffs, N. J., 1965.
16. Green, A. E. and J. E. Adkins: *Large Elastic Deformations and Non-linear Continuum Mechanics*, Oxford University Press, Fair Lawn, N. J., 1960.
17. Gurtin, M. E.: *The Linear Theory of Elasticity*, Handbuch der Physik, Bd VIa/2, Springer-Verlag, Berlin, 1972.
18. Gurtin, M. E.: *A Short Proof of the Representation Theorem for Isotropic, Linear Stress-Strain Relations*, J. Elasticity 4, 243—245, 1974.
19. Gurtin, M. E.: *An Introduction to Continuum Mechanics*, Academic Press, New York, 1981.
20. Huilgol, R. R.: *Continuum Mechanics of Viscoelastic Liquids*, John Wiley & Sons, New York, 1975.
21. Hunter, S. C.: *Mechanics of Continuous Media*, John Wiley & Sons, New York, 1976.
22. Jaunzemis, W.: *Continuum Mechanics*, Macmillan Company, New York, 1967.

23. Kestin, J.: *A Course in Thermodynamics* — Vol. 1, McGraw-Hill, New York, 1979.
24. Leigh, D. C.: *Non-linear Continuum Mechanics*, McGgraw-Hill, New York, 1968.
25. Lovelock, D. and H. Rund: *Tensors, Differential Forms and Variational Principles*, John, Wiley & Sons, New York, 1975.
26. Malić, D.: *Termodinamika i Termotehnika*, Građevinska knjiga, Beograd, 1975.
27. Malvern, L. E.: *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*, Prentice Hall, N. J. 1969.
28. McConnell, A. J.: *Applications of the Absolute Differential Calculus*, Blackie & Sons, London, 1946.
29. Noll, W.: *A Mathematical Theory of the Mechanical Behaviour of Continuous Media*, Arch. Rational Mech. Anal. 2, 1958.
30. Pearson, C. E.: *Theoretical Elasticity*, Harward University Press, Cambridge, 1959.
31. Pipkin, A. C. and R. S. Rivlin: *The Formulation of Constitutive Equations in Continuum Physics I*, Arch. Rational Mech. Anal. 4, 129—144, 1959.
32. Prigožin, I.: *Uvod u termodinamiku nepovratnih procesa*, Građevinska knjiga, Beograd, 1967.
33. Rivlin, R. S. and J. L. Ericksen: *Stress-Deformation Relations for Isotropic Materials*, J. Ratinal Mech. Anal. 4, 323—425, 1955.
34. Rivlin, R. S. and G. F. Smith: *Orthogonal Integrity Bases for N Symmetric Tensors*, in Contributaions to Mechanics (Reiner Anniversary Volume), ed. S. Abir, Pergamon Press, Oxford, 1969.
35. Schouten, J. A.: *Ricci-Calculus*, Springer-Verlag, Berlin, 1954.
36. Segel, L. A.: *Mathematics Applied to Continuum Mechnaics*, Macmilann Company, New York, 1977.
37. Sirs, L. A.: *Uvod u termodinamiku, kinetičku teoriju gasova i statističku mehaniku*, Vuk Karadžić, Beograd, 1969.
38. Slattery, J. C.: *Momentum, Energy, and Mass Transfer in Continua*, McGraw-Hill, New York, 1972.
39. Smith, G. F. and R. S. Rivlin: *Integrity Bases for Vectors. The Crystal Classes*, Arch. Rational Mech. Anal. 15, 169—221, 1964.
40. Smith, G. F., M. M. Smith and R. S. Rivlin: *Integrity Bases for a Symmetric Tensor and a Vector — the Crystal Classes*, Arch. Rational Mech. Anal. 12, 93—133, 1963.
41. Sokolnikoff, I. S.: *Tensor Analysis*, John Wiley & Sons, New York, 1951.
42. Sokolnikoff, I. S.: *Mathematical Theory of Elasticity*, McGraw-Hill, New York, 1956.
43. Spencer, A. J. M. and R. S. Rivlin: *The Theory of Matrix Polynomials and Its Application to the Mechanics of Isotropic Continua*, Arch. Rational Mech. Anal. 2, 309—336, 199.
44. Synge, J. L. and A. Shield: *Tensor Calculus*, University of Toronto Press, 1949.
45. Thomas, T. Y.: *Plastic Flow and Fracture in Solids*, Academic Press, New York, 1961.
46. Trusdell, C.: *Principles of Continuum Mechanics*, Socony Mobil, Dallas, 1960.
47. Truesdell, C.: *The Elements of Continuum Mechanics*, Springer-Verlag, New York, 1966.
48. Truesdell, C.: *A First Course in Rational Continuum Mechanics* — Vol. 1, Academic Press, New York, 1977.
49. Truesdell, C.: *Rational Mechanics of Deformation and Flow*, in Proc. 4th Intl. Congr. Rheol. 1963, Vol. 2, 3—50, 1965.
50. Truesdell, C. and W. Noll: *The Non-linear Field Theories of Mechanics*, Handbuch der Physik III/3, Springer-ćerlag, Berlin, 1965.
51. Truesdell, C. and R. A. Toupin: *The Classical Field Theories*, Handbuch der Physik III/1, Springer-Verlag, Berlin, 1965.
52. Valanis, K. C.: *Irreversible Thermodynamics of Continuous Media*, Inter. Centre for Mech. Sciences, No 77, Springer-Verlag, 1972.