UNIVERZITET U BEOGRADU
MATEMATIČKI FAKULTET

Danijela Stanojević

OPTIMIZACIJA PORTFOLIJA U PRISUSTVU SINGULARNE KOVARIJACIONE MATRICE PRINOSA

master rad

Beograd, 2024.

Mentor:

prof. dr Bojana Milošević, vanredni profesor
Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet

Članovi komisije:

dr Miljan Knežević, docent
Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet

dr Marija Cuparić, docent
Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet

Datum odbrane: ____________________

Sadržaj

Predgovor **v**

1 Uvod **1**

1.1 Polja i vektorski prostori 1

1.2 Matrice i determinante 4

1.3 Linearni operatori na normiranim prostorima 10

1.4 Osnovni pojmovi teorije verovatnoće 12

2 Standardni pristup optimizaciji portfolija **17**

2.1 Markovicov model 17

2.2 Drugi način Markovicovog originalnog pristupa optimizaciji portfolija 24

2.3 Tangentni portfolio 26

2.4 Problemi Markovicove optimalne portfolio teorije 28

2.5 Geometrijska interpretacija metoda 29

3 Mur-Penrozov generalizovani inverz **31**

3.1 Definicija Mur-Penrozovog inverza 32

3.2 Osobine $\{3\}$ i $\{4\}$-inverza 33

3.3 Konstrukcija $\{1, 3, 4\}$ i $\{2, 3, 4\}$-inverza 40

3.4 Konstrukcija Mur-Penrozovog inverza 42

3.5 Osobine Mur-Penrozovog inverza 46

3.6 Primena Mur-Penrozovog inverza 48

3.7 SVD metod 49

3.8 Primeri 51

4 Optimalni izbor portfolija korišćenjem regularizacije **63**

4.1 Regularizacija kao aproksimacija inverznog problema 65

4.2 Šema regularizacije kao kazneni metod najmanjih kvadrata 69

4.3 Optimalni izbor regularizacionog parametra 70
4.4 Primer (regularizacija) 74

5 Zaključak **81**

Bibliografija **83**

Predgovor

„*Dobar portfolio je više od duge liste dobrih akcija i obveznica. To je balansirana celina, koja štiti investitora i obezbeđuje mogućnosti u skladu sa širokim spektrom nepredviđenih situacija.*" - H.Markovic[1]

Portfolio predstavlja kolekciju finansijskih instrumenata, tj. dobara (novca, hartija od vrednosti...) koje poseduje pojedinac ili institucija. Aktiva predstavlja skup svih finansijskih sredstava koje invenstitor poseduje u datom trenutku. Matematički gledano, portfolio se može predstaviti kao uređena k-torka, pri čemu k prestavlja broj različitih vrsta aktiva u koje je invenstitor uložio svoj kapital. Danas je investitorima na raspolaganju širok spektar hartija od vrednosti, pri čemu svaka ima svoj potencijalni rizik i dobit. Uloga finansijskih analitičara je nalaženje najbolje strategije za investiranje kapitala. Optimalno upravljanje rizikom portfolija je ključna komponenta modernog upravljanja dobrima. Tržište je "bogato" investitorima među kojima svako gleda svoj interes, svako želi što veći prinos uz što manji rizik.

Kovarijaciona matrica prinosa vrednosnih papira je ključna tačka prilikom izbora portfolija u finansijama. Koristi se za izračunavanje optimalnih težina portfolija.

Osnovna ideja Markovicove optimizacije portfolija je da se postigne ravnoteža između očekivanog prinosa i rizika. Prema ovoj teoriji, investitori žele da postignu što veći očekivani prinos uz minimalan rizik. Pristup se zasniva na odnosu očekivanog prinosa i disperzije, gde se analiziraju očekivani prinosi i kovarijacije različitih finansijskih instrumenata. Markovicova optimizacija portfolija je i danas široko korišćena u praksi i predstavlja važan alat za investitore i portfolio menadžere u donošenju investicionih odluka.

Međutim, javljaju se određeni problemi i poteškoće prilikom primene Markovicovog modela u praksi, na primer postojanje singularne kovarijacione matrice kada

[1]Harry Max Markowitz (1927-2023), američki ekonomista

su finansijski instrumeti u portfoliju visoko korelisani ili postoji linearna zavisnost između njih. To dovodi do problema u izračunavanju optimalne raspodele aktiva i može dovesti do nestabilnih rezultata. Takođe, neadekvatnost podataka uzrokuje netačne ocene očekivanog prinosa i disperzije aktiva, što dovodi do loših rezultata optimizacije.

Markovicova teorija optimizacije portfolija se oslanja na nekoliko pretpostavki, kao što su pretpostavka normalne raspodele prinosa i pretpostavka konstantnih očekivanih prinosa i kovarijacije tokom vremena. Međutim, ove pretpostavke su i suviše restriktivne, te uobičajeno ni ne reflektuju realnost tržišta.

U ovom radu nam je cilj da prikažemo moguća rešenja problema optimizacije portfolija u slučaju kada su kovarijacione matrice prinosa singularne ili loše uslovljene i bliske singularnim matricama. Tom prilikom predstavljamo primenu generalizovane inverzne matrice na problem izbora portfolija, a potom i regularizacione metode.

Kada je reč o generalizovanim inverzima, koristićemo *Mur*[2]*-Penrozov*[3] *inverz*, dok među regularizacionim metodama razmatramo *regularizaciju spektralnog odsecanja*, *Landveber*[4]*-Fridmanovu*[5] *regularizaciju* i *grebenu regularizaciju*.

U ovom radu razmatramo najpre standardni Markovicov pristup optimizacije portfolija i dajemo geometrijsku interpretaciju tog standardnog pristupa. Zatim se posebna pažnja posvećuje teoriji koja se tiče Mur-Penrozovog inverza matrice, a potom primerima ilustrujemo primenu generalizovanog inverza u optimizaciji portfolija. Na kraju, razmatramo korišćenje regularizacije pri optimalnom izboru portfolija. Korišćenje regularizacije daje veoma dobre rezultate u situacijama kada je kovarijaciona matrica prinosa bliska singularnoj, u šta ćemo se i uveriti razmatranjem vrednosti očekivanog gubitka u korisnosti. Upoređivaćemo rezultate dobijene primenom regularizacije sa rezultatima dobijenim primenom standardnog pristupa u pogledu odnosa empirijskog Šarpovog[6] količnika.

---

[2]Robert Lee Moore (1882-1974), američki matematičar

[3]Roger Penrose (1931), britanski matematičar

[4]Louis Landweber (1912-1998), američki matematičar

[5]Jerome Harold Friedman (1939), američki matematičar

[6]William F. Sharpe (1934), američki ekonomista

Veliku zahvalnost dugujem svom mentoru, prof. Bojani Milošević na pomoći, podršci i strpljenju prilikom pisanja ovog rada.

Zahvalila bih se i članovima komisije, prof. Miljanu Kneževiću i prof. Mariji Cuparić, na strpljenju prilikom čitanja rada i svim korisnim sugestijama.

Glava 1

Uvod

Kako nam je primarni fokus u ovom radu usmeren prema singularnim kovarijacionim matricama prinosa, to ćemo, pre svega, uvesti osnovne pojmove i pomenuti rezultate iz linearne algebre koji se odnose na matrice. Nakon toga, osvrnućemo se na teoriju operatora, što će nam biti od značaja pri radu sa singularnim matricama, odnosno preciznije, pri određivanju generalizovanog inverza (o čemu će biti više reči kasnije). Na kraju ovog poglavlja uvodimo pojmove iz teorije verovatnoće koje ćemo koristiti u ovom radu. Rezultate u ovoj glavi navodimo bez dokaza, a dokazi se mogu pronaći u [7], [9], [10], [16] i [20].

1.1 Polja i vektorski prostori

Definicija 1.1.1. Neka je A skup i $n \in \mathbb{N}$. Tada svako preslikavanje $\omega : A^n \to A$ nazivamo *n-arna operacija* na skupu A. Specijalno, ako je $n = 2$, kažemo da je ω binarna operacija.

Definicija 1.1.2. Neka je K skup na kome su definisane binarne operacije $+$ i $\cdot$. Tada je $\mathbb{K} = (K, +, \cdot)$ *polje* ako važi:

1. $(\forall x, y, z \in K)\ (x + y) + z = x + (y + z)$,
2. $(\forall x, y \in K)\ x + y = y + x$,
3. $(\exists 0 \in K)(\forall x \in K)\ x + 0 = 0 + x = x$,
4. $(\forall x \in K)(\exists (-x) \in K)\ x + (-x) = (-x) + x = 0$,
5. $(\forall x, y, z \in K)(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$,

6. $(\forall x, y \in K)\ x \cdot y = y \cdot x$,

7. $(\exists 1 \in K)(\forall x \in K)\ x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$,

8. $(\forall x \in K \setminus \{0\})(\exists x^{-1} \in K)\ x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$,

9. $(\forall x, y, z \in K)\ x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

Definicija 1.1.3. Neka je $\mathbb{K}$ polje i V skup na kome su definisane binarne operacije $+$ i $\cdot$. Tada je $\mathbb{V} = (V, +, \cdot)$ *vektorski prostor* nad $\mathbb{K}$ ako važi:

1. $(\forall u, v, w \in V)\ (u + v) + w = u + (v + w)$,

2. $(\forall u, v \in V)\ u + v = v + u$,

3. $(\exists 0 \in V)(\forall u \in V)\ u + 0 = 0 + u = u$,

4. $(\forall u \in V)(\exists (-u) \in V)\ u + (-u) = (-u) + u = 0$,

5. $(\forall \alpha, \beta \in K)(\forall u \in V)\ (\alpha + \beta) \cdot u = \alpha \cdot u + \beta \cdot u$,

6. $(\forall \alpha \in K)(\forall u, v \in V)\ \alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$,

7. $(\forall \alpha, \beta \in K)(\forall u \in V)\ (\alpha \cdot \beta) \cdot u = \alpha \cdot (\beta \cdot u)$,

8. $(\forall u \in V)\ 1 \cdot u = u$.

Napomena. U nastavku poistovećujemo oznake K i $\mathbb{K}$.

Definicija 1.1.4. Neka je $\mathbb{K}$ polje i $n \in \mathbb{N}$. Tada:

$$\mathbb{K}^n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{K}\}.$$

Definicija 1.1.5. Za $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in \mathbb{K}^n$ i $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \mathbb{K}^n$ i $\alpha \in \mathbb{K}$ definišemo:

$$u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n),$$
$$\alpha \cdot u = (\alpha \cdot u_1, \alpha \cdot u_2, \ldots, \alpha \cdot u_n).$$

Definicija 1.1.6. Neka je $\mathbb{V}$ vektorski prostor nad $\mathbb{K}$ i $n \in \mathbb{N}$. Za $v_1, v_2, \ldots, v_n \in \mathbb{V}$ i $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, vektor $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n$ je *linearna kombinacija* vektora $v_1, v_2, \ldots, v_n$.
Za dati skup $S \subseteq \mathbb{V}$, skup svih linearnih kombinacija vektora iz S je *linearni omotač* skupa S, odnosno:

$$\mathcal{L}(S) = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n \mid n \in \mathbb{N},\ (\forall i,\ 1 \le i \le n)(v_i \in S \wedge \alpha_i \in K)\}.$$

Definicija 1.1.7. Neka je $\mathbb{V}$ vektorski prostor nad $\mathbb{K}$. Za skup vektora $S \subseteq \mathbb{V}$ kažemo da je:

- *linearno zavisan* ako postoji $v \in S$ tako da je $v \in \mathcal{L}(S \setminus \{v\})$,
- *linearno nezavisan* ako nije linearno zavisan.

Lema 1.1.1. Važi da je $S \subseteq \mathbb{V}$ linearno nezavisan ako za svaki skup $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subseteq S$ važi:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0.$$

Definicija 1.1.8. Sistem vektora, u oznaci $\mathbf{e} = [e_1, e_2, \ldots, e_n]$, je uređena n-torka vektora $e_1, e_2, \ldots, e_n \in \mathbb{V}$.
Za sistem vektora $\mathbf{e} = [e_1, e_2, \ldots, e_n]$ definišemo $\underline{\mathbf{e}} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$.

Definicija 1.1.9. Za dati sistem vektora $\mathbf{e} = [e_1, e_2, \ldots, e_n]$, gde je $e_i \in \mathbb{V}$, za sve $i \in \{1, \ldots, n\}$, kažemo da je *linearno nezavisan sistem vektora* ako su svi e_i, za $i \in \{1, \ldots, n\}$ međusobno različiti i $\underline{\mathbf{e}}$ je linearno nezavisan skup.

Definicija 1.1.10. Skup $S \subseteq \mathbb{V}$ je *generatrisa* vektorskog prostora $\mathbb{V}$ ako $\mathbb{V} = \mathcal{L}(S)$. Sistem vektora $\mathbf{e}$ je *generatrisa* za $\mathbb{V}$ ako $\mathbb{V} = \mathcal{L}(\underline{\mathbf{e}})$.

Definicija 1.1.11. Sistem vektora $\mathbf{e}$ vektorskog prostora $\mathbb{V}$ je *baza* za $\mathbb{V}$ ako je istovremeno linearno nezavisan sistem vektora i generatrisa za $\mathbb{V}$.

Stav 1.1.1. Sistem vektora $\mathbf{e} = [e_1, e_2, \ldots, e_n]$ je baza vektorskog prostora $\mathbb{V}$ ako i samo ako za svako $v \in \mathbb{V}$ postoji jedinstvena n-torka $v_e = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ takva da je $v = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n$.

Definicija 1.1.12. Dimenzija vektorskog prostora $\mathbb{V}$ je kardinalnost skupa vektora koji sačinjavaju njegovu bazu $\mathbf{e}$, što zapisujemo kao:

$$dim(\mathbb{V}) = card(\underline{\mathbf{e}}).$$

Definicija 1.1.13. Skup $\mathbb{W} \subseteq \mathbb{V}$ je potprostor vektorskog prostora $\mathbb{V}$ ukoliko su ispunjeni sledeći uslovi:

- $\mathbb{W} \neq \varnothing$,
- $u + v \in \mathbb{W}$, za sve $u, v \in \mathbb{W}$,

- $\alpha u \in \mathbb{W}$, za sve $\alpha \in \mathbb{K}$ i sve $u \in \mathbb{W}$.

Tada pišemo $\mathbb{W} \leq \mathbb{V}$.

Shodno tome da su potprostori skupovi, to se nad njima mogu vršiti standardne skupovno operacije. Međutim, novodobijeni skupovi neće nužno biti vektorski potprostori. Nad familijom potprostora vektorskog prostora $\mathbb{V}$ definisane su operacije *preseka* i *sabiranje*, pri kojima su novodobijeni skupovi vektorski potprostori. Operacija *preseka* vektorskih potprostora predstavlja standardnu skupovnu operaciju preseka, odnosno, važi sledeći stav.

Stav 1.1.2. Neka je $\{\mathbb{W}_i\}_{i\in I}$ familija potprostora vektorskog prostora $\mathbb{V}$, pri čemu je I proizvoljan skup skalara, tada važi:

$$\mathbb{W} = \bigcap_{i\in I} \mathbb{W}_i \leq \mathbb{V}.$$

Za razliku od preseka, unija vektorskih potprostora nije nužno i sama potprostor, te se definiše *suma* (odnosno *sabiranje*) vektorskih potprostora na sledeći način.

Definicija 1.1.14. Suma potprostora $\mathbb{W}_1$ i $\mathbb{W}_2$ je lineal nad njihovom unijom, tj.

$$\mathbb{W}_1 + \mathbb{W}_2 \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{L}(\mathbb{W}_1 \cup \mathbb{W}_2).$$

Ukoliko je $\mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2 = \emptyset$, tada njihov zbir nazivamo *direktnom* (*unutrašnjom*) sumom i označavamo sa $\mathbb{W}_1 \oplus \mathbb{W}_2$. Potprostori $\mathbb{W}_1$ i $\mathbb{W}_2$ čine *dekompoziciju* (*razlaganje*) vektorskog prostora $\mathbb{V}$ ukoliko važi $\mathbb{W}_1 \oplus \mathbb{W}_2 = \mathbb{V}$.

1.2 Matrice i determinante

Definicija 1.2.1. Matrica dimenzija $m \times n$ nad poljem $\mathbb{K}$ je sistem $A = \{a_{i,j} | \ 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n\}$ elemenata iz $\mathbb{K}$.

Definicija 1.2.2. $M_{m,n}(\mathbb{K})$ je skup svih matrica dimenzija $m \times n$ nad poljem $\mathbb{K}$, dok $M_n(\mathbb{K})$ predstavlja skup svih matrica dimenzija $n \times n$ nad poljem $\mathbb{K}$.

Definicija 1.2.3. *Transponovana matrica* za $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ je matrica $A^T \in M_{n,m}(\mathbb{K})$ takva da $[A^T]_{i,j} = [A]_{j,i}$, za $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$.

Stav 1.2.1. Ako su A i B matrice nad poljem $\mathbb{K}$ takve da su sve navedene operacije dobro definisane i $a \in \mathbb{K}$, onda važi:

1. $(A+B)^T = A^T + B^T$,
2. $(A^T)^T = A$,
3. $(aA)^T = aA^T$,
4. $(AB)^T = B^T A^T$.

Definicija 1.2.4. Matrica $A \in M_n(\mathbb{K})$ je *simetrična* ako je $A^T = A$.

Definicija 1.2.5. Neka je $A \in M_n(\mathbb{K})$, tada se zbir elemenata sa glavne dijagonale matrice A naziva *tragom matrice* A i označava se sa $tr(A)$, odnosno:

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}.$$

Lema 1.2.1. Za matricu $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ važi da je najveći broj njenih linearno nezavisnih vrsta jednak najvećem broju njenih linearno nezavisnih kolona, i taj broj predstavlja rang matrice A, u oznaci $rang(A)$.

Definicija 1.2.6. Matrica $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ je *regularna sleva* ako za sve $l \in \mathbb{N}$ i sve $X, Y \in M_{n,l}(\mathbb{K})$ važi: $AX = AY \Rightarrow X = Y$.
Matrica $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ je *regularna zdesna* ako za sve $l \in \mathbb{N}$ i sve $X, Y \in M_{l,m}(\mathbb{K})$ važi: $XA = YA \Rightarrow X = Y$.

Definicija 1.2.7. *Jedinična matrica* je matrica $E_n \in M_n(\mathbb{K})$ za koju važi:

$$[E_n]_{i,j} = 1, \ za\ i = j,$$
$$[E_n]_{i,j} = 0, \ za\ i \neq j.$$

Definicija 1.2.8. Matrica $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ ima *levi inverz* ako postoji $P \in M_{n,m}(\mathbb{K})$ takvo da $P \cdot A = E_n$.

Definicija 1.2.9. Matrica $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ ima *desni inverz* ako postoji $Q \in M_{n,m}(\mathbb{K})$ takvo da $A \cdot Q = E_m$.

Definicija 1.2.10. Matrica A je *invertibilna* ako ima i levi i desni inverz. Za matircu A kažemo da je *singularna* ukoliko nije invertibilna.

Lema 1.2.2. Ako je A invertibilna, onda su joj levi i desni inverz jednaki i jedinstveni su, odnosno $(\exists! A^{-1} \in M_n(\mathbb{K}))\ A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E_n$.

Definicija 1.2.11. Matrica $A \in M_n(\mathbb{K})$ je *ortogonalna* ako je $A^T \cdot A = A \cdot A^T = E_n$.

Definicija 1.2.12. Matrica $A \in M_n(\mathbb{K})$ je *idempotentna* ako je $A \cdot A = A$ i tada za A kažemo da je *matrica projekcije* ili *projektor*.

Definicija 1.2.13. Matrica $A \in M_n(\mathbb{K})$ je *pozitivno definitna*, u oznaci $A > 0$, ako važi:

$$x^T A x > 0, \text{ za sve } x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Matrica $A \in M_n(\mathbb{K})$ je *pozitivno semidefinitna*, u oznaci $A \geq 0$, ako važi:

$$x^T A x \geq 0, \text{ za sve } x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Teorema 1.2.1. Sledeće tvrdnje su ekvivalentne:

1. A je pozitivno definitna,
2. sopstvene vrednosti od A su strogo pozitivne,
3. postoji invertibilna matrica P tako da je $A = P^T P$.

Definicija 1.2.14. Matrica $D \in M_n(\mathbb{K})$ čiji su elementi na glavnoj dijagonali jednaki $d_1, d_2, \ldots, d_n$, a ostali elementi nule, naziva se *dijagonalna* matrica i označavamo je sa $D = diag(d_1, d_2, \ldots, d_n)$.

Definicija 1.2.15. Označimo sa $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$. *Permutacija* nepraznog skupa X je svaka bijekcija $\pi : X \to X$. Skup permutacija skupa $[n]$ označavamo sa S_n. Permutaciju $\pi \in S_n$ zapisujemo kao:

$$\pi : \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \ldots & \pi(n) \end{pmatrix}.$$

Definicija 1.2.16. *Znak permutacije* $\pi \in S_n$ je $sgn(\pi) = (-1)^k$, gde je k *broj inverzija* za π, tj. broj parova (i, j), $1 \leq i \leq j \leq n$, takvih da $\pi(i) > \pi(j)$.

Definicija 1.2.17. Neka je $A \in M_n(\mathbb{K})$. Tada je *determinanta* matrice A jednaka:

$$det(A) = \sum_{\pi \in S_n} sgn(\pi)[A]_{1,\pi(1)}[A]_{2,\pi(2)} \ldots [A]_{n,\pi(n)}.$$

Definicija 1.2.18. Za $A \in M_n(\mathbb{K})$ matrica $M_{i,j} \in M_{n-1}(\mathbb{K})$ je matrica koja se dobija brisanjem i-te vrste i j-te kolone. *Minor* matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ je $m_{i,j} = det(M_{i,j})$. *Kofaktor* matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ je $A_{i,j} = (-1)^{i+j} m_{i,j}$.

Teorema 1.2.2 (Laplasov[1] razvoj determinante)**.** Neka je $A = [a_{i,j}] \in M_n(\mathbb{K})$, $1 \leq i, j \leq n$. Tada je:

$$det(A) = a_{i,1}A_{i,1} + a_{i,2}A_{i,2} + \cdots + a_{i,n}A_{i,n},$$
$$det(A) = a_{1,j}A_{1,j} + a_{2,j}A_{2,j} + \cdots + a_{n,j}A_{n,j}.$$

Definicija 1.2.19. *Adjungovana matrica* za $A \in M_n(\mathbb{K})$ je matrica:

$$adj(A) = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{2,1} & \dots & A_{n,1} \\ A_{1,2} & A_{2,2} & \dots & A_{n,2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1,n} & A_{2,n} & \dots & A_{n,n} \end{bmatrix}.$$

Teorema 1.2.3 (Laplas)**.** $adj(A) \cdot A = A \cdot adj(A) = det(A) \cdot E_n$.

Posledica 1.2.1. Ako je A invertibilna, tada je $A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \cdot adj(A)$.

Definicija 1.2.20. Neka je $A \in M_n(\mathbb{K})$. Ako postoje $v \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ i $\lambda \in \mathbb{R}$ takvi da važi:

$$Av = \lambda v,$$

onda je v *sopstveni vektor*, a λ *sopstvena vrednost* matrice A.

Definicija 1.2.21. Skup svih sopstvenih vrednosti matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ naziva se *spektar* matrice A i označava se sa $\sigma(A)$.

Stav 1.2.2 (Spektralna dekompozicija matrice)**.** Neka su za $A \in M_n(\mathbb{K})$ njene sopstvene vrednosti $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ i njeni sopstveni vektori $v_1, v_2, \dots, v_n$. Tada matrica A može da se zapiše u obliku:

$$A = Q \cdot D \cdot Q^T,$$

gde je $D = diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ i $Q = [v_1|v_2|\dots|v_n]$ (odnosno, Q je matrica čije su kolone sopstveni vektori matrice A). Matrica Q je ortogonalna.

---

[1]Pierre Simon Laplace (1749-1827), francuski matematičar

Lema 1.2.3. [Ažuriranje inverza matrice] Neka je $A \in M_n(\mathbb{K})$ i neka su $u, v \in M_{n,1}(\mathbb{C})$. Ukoliko je matrica $A + uv^T$ invertibilna, tada:

$$(A + uv^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}uv^TA^{-1}}{1 + u^TA^{-1}v}.$$

Definicija 1.2.22. *Standardni skalarni (unutrašnji) proizvod* vektora $x, y \in \mathbb{R}^n$, pri čemu je $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ i $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ definiše se kao:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Standardni skalarni (unutrašnji) proizvod vektora $x, y \in \mathbb{C}^n$, pri čemu je $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ i $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ definiše se kao:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}.$$

Vektori $x, y \in \mathbb{K}^n$ su *ortogonalni* ako je $\langle x, y \rangle = 0$.

Za $\boldsymbol{X} = \mathbb{K}^n$, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, i proizvoljno $M \subseteq \boldsymbol{X}$ pod ortogonalnim komplementom skupa M podrazumevaćemo skup $M^\perp$ definisan kao:

$$M^\perp = \{x \in \boldsymbol{X} : (\forall y \in M)\langle x, y \rangle = 0\},$$

pri čemu je $\langle \cdot, \cdot \rangle$ standardni skalarni proizvod nad poljem skalara $\mathbb{K}$.

Posmatrajmo sada slučaj $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Neka je $x \in \mathbb{R}^n$, u nastavku navodimo neke od najčešće korišćenih normi na $\mathbb{R}^n$:

1. Za $p \in \mathbb{N}$ definišemo p-normu na sledeći način:

$$||x||_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

   Specijalno, za $p = 1$ imamo 1-normu datu sa $||x||_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$, dok za $p = 2$ imamo 2-normu datu sa $||x||_2 = (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)^{\frac{1}{2}} = (x^Tx)^{\frac{1}{2}}$ (uobičajeni naziv je Euklidska norma i obično se označava sa $|| \cdot ||$).

2. Za $p = +\infty$ definišemo ∞-normu na sledeći način:

$$||x||_{+\infty} = \max_{i=1,\ldots,n} |x_i|.$$

Za proizvoljnu normu $||\cdot||_p$, gde je $p \in \mathbb{N} \cup +\infty$ definišemo matričnu normu za proizvoljnu matricu $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ na sledeći način:

$$||A|| = \sup_{x\neq 0} \frac{||Ax||}{||x||}.$$

Eksplicitne formule ovih matričnih normi za $p \in \{1, 2, +\infty\}$ su sledeće:

$$||A||_1 = \max_{j=1,\dots,n} \sum_{i=1}^{m} |[A]_{i,j}|,$$

$$||A||_2 = \lambda_{max}(A^T A)^{\frac{1}{2}}, \text{ gde je } \lambda_{max} \text{ najveća sopstvena vrednost matrice } A,$$

$$||A||_\infty = \max_{i=1,\dots,m} \sum_{j=1}^{n} |[A]_{i,j}|.$$

Definicija 1.2.23. *Uslovni broj* matrice A, pri normi $||\cdot||$ definišemo kao:

$$\mathcal{K}(A) = ||A|| \cdot ||A^{-1}||.$$

Ukoliko je $\mathcal{K}(A)$ jako veliki broj, tada kažemo da je matrica A *loše uslovljena*. U suprotnom, matrica A je *dobro uslovljena*. Ako je matrica A singularna, tada $\mathcal{K}(A) = +\infty$.
Ukoliko je $||\cdot|| = ||\cdot||_2$, tada je $||A|| = \lambda_{max}$ i $||A^{-1}|| = \frac{1}{\lambda_{min}}$, gde je λ_{max} najveća, a λ_{min} najmanja sopstvena vrednost matrice A, te je onda:

$$\mathcal{K}(A) = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}.$$

Odavde jasno vidimo da je $\mathcal{K}(A) \geq 1$, i što je taj uslovni broj matrice A bliže jedinici, to matricu A smatramo bolje uslovljenom. Uobičajeno, razgraničenje dobre i loše uslovljenosti vrši se na sledeći način:

- Ukoliko je $1 \leq \mathcal{K}(A) \leq 10$, tada matricu A smatramo dobro uslovljenom.
- Za $10 < \mathcal{K}(A) \leq 100$ matrica A se i dalje najčešće smatra dobro uslovljenom, te je gornja granica 100 najčešće prihvatljiva za većinu numeričkih izračunavanja.
- Što više uslovni broj premašuje granicu 100, to je matrica sve lošije uslovljena, te se narušava numerička stabilnost i tačnost u računanju.

Definicija 1.2.24. Neka je $X \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ matrica i f skalarna funkcija. Tada je *matrično diferenciranje* definisano sa:

$$\frac{\partial f(X)}{\partial X} = \left(\frac{\partial f(X)}{\partial [X]_{i,j}}\right).$$

Od značaja će nam biti sledeća svojstva matričnog diferenciranja:

1. $\frac{\partial a^T x}{\partial x} = a$,

2. $\frac{\partial x^T x}{\partial x} = 2x$,

3. $\frac{\partial x^T A x}{\partial x} = (A + A^T)x$,

4. $\frac{\partial x^T A y}{\partial x} = Ay$.

1.3 Linearni operatori na normiranim prostorima

Pre svega uvodimo pojam sigma algebre:

Definicija 1.3.1. Familija $\mathfrak{M}$ podskupova skupa X je *σ-algebra* na X ako važe sledeća svojstva:

1. $X \in \mathfrak{M}$,

2. ako $A \in \mathfrak{M}$, onda $X \setminus A \in \mathfrak{M}$,

3. ako je $\{A_n\}_{n=1}^{+\infty}$ niz skupova iz $\mathfrak{M}$, onda $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathfrak{M}$.

U tom slučaju kažemo da je $(X, \mathfrak{M})$ merljiv prostor, a skupove iz $\mathfrak{M}$ nazivamo $\mathfrak{M}$-merljivim skupovima (ili samo merljivim skupovima, ako je jasno o kojoj σ-algebri se radi).

Definicija 1.3.2. Neka je X vektorski prostor nad poljem $\mathbb{K}$, gde $\mathbb{K}$ označava polje $\mathbb{R}$ ili polje $\mathbb{C}$. Funkcija $||\cdot|| : X \to [0, +\infty)$ koja ima osobine:

1. $||x|| = 0 \iff x = 0$,

2. $||\alpha x|| = |\alpha| \cdot ||x||$, za svaki skalar $\alpha \in \mathbb{K}$ i svaki vektor $x \in X$ i

3. $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$, za svaka dva vektora $x, y \in X$,

naziva se *normom* na X, a prostor X zajedno sa datom normom naziva se *normirani vektorski prostor.*

U svakom normiranom prostoru X moguće je definisati metriku $d : X \times X \to [0, +\infty)$ formulom:

$$d(x, y) = ||x - y||,$$

za sve $x, y \in X$.

Definicija 1.3.3. Kompletan normiran prostor naziva se *Banahovim*[2] *prostorom.*

Definicija 1.3.4. Funkcija $A : X \to Y$ između dva vektorska prostora X i Y nad istim poljem skalara $\mathbb{K}$ se naziva *linearnom* ako za svako $x, y \in X$ i sve $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ važi:

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y).$$

U slučaju linearnog preslikavanja $A : X \to Y$ između vektorskih prostora X i Y često umesto $A(x)$ koristimo oznaku Ax, i izraz *linearni operator* umesto izraza linearna funkcija, odnosno linearno preslikavanje. Ukoliko je $Y = \mathbb{K}$, tada govorimo o *linearnom funkcionalu* $f^* : X \to \mathbb{K}$.
Skup svih linearnih preslikavanja iz prostora X u prostor Y označavamo sa $L(X, Y)$. Ukoliko je $Y = X$, tada umesto $L(X, X)$ pišemo $L(X)$.
Skup $\mathcal{N}(A) = \{x \in X : Ax = 0\}$ nazivamo *jezgrom linearnog operatora* A, dok skup $\mathcal{R}(A) = \{Ax : x \in X\}$ predstavlja *sliku linearnog operatora* A. Specijalno, jezgro linearnog funkcionala f^* označavamo sa $ker(f^*)$.

Napomena. Ukoliko je $A \in M_n(\mathbb{K})$, tada je sa $A(x) = Ax$, za $x \in \mathbb{K}^n$ definisano linearno preslikavanje $A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$. Neka je, dodatno, matrica A idempotentna. Ukoliko važi $\mathcal{R}(A) = W$ i $\mathcal{N}(A) = \mathcal{L}(Q)$, za $W \leq \mathbb{K}^n$ i $Q \subset \mathbb{K}^n$, kažemo da je linearno preslikanje A projektor na W paralelno sa Q.

Stav 1.3.1. Za matricu $A \in M_{r,m}(\mathbb{K})$ važi: ako je preslikavanje $f : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^r$ definisano sa $f(x) = Ax$, $x \in \mathbb{K}^m$, tada je $rang(A) = dim(\mathcal{R}(A))$.

Stav 1.3.2. Linearni operator A je "1-1" ako i samo ako je njegovo jezgro trivijalno, tj. $\mathcal{N}(A) = 0$.

Neka su, u nastavku, X i Y dva normirana prostora nad istim poljem skalara.

Stav 1.3.3. Ako je $A : X \to Y$ linearan operator i ako je neprekidan u jednoj tački, tada je on neprekidan na čitavom prostoru.
Takve operatore zovemo neprekidnim linearnim operatorima. S obzirom da je polje skalara Banahov prostor, u slučaju $Y = \mathbb{K}$ govorimo o neprekidnim linearnim funkcionalima $f^* : X \to \mathbb{K}$.

---

[2]Stefan Banach (1892-1945), poljski matematičar

Definicija 1.3.5. Linearni operator $A : X \to Y$ je *ograničen* ako postoji pozitivan broj M takav da za svako $x \in X$ važi $||Ax|| \leq M||x||$. Infimum brojeva M za koje važi prethodna nejednakost naziva se *normom* operatora A i kratko označava sa $||A||$.
Skup svih linearnih ograničenih operatora iz normiranog prostora X u normiran prostor Y označavamo sa $B(X,Y)$. Ukoliko je $Y = X$, tada umesto $B(X,X)$ pišemo $B(X)$.

Stav 1.3.4. Ako je A linearan operator tada važi

$$||A|| = \sup_{x \neq 0} \frac{||Ax||}{||x||} = \sup_{||x|| \leq 1} ||Ax|| = \sup_{||x||=1} ||Ax||.$$

Stav 1.3.5. Prostor svih ograničenih linearnih operatora $B(X,Y)$ je normirani prostor sa operatorskom normom datom sa:

$$||A|| = \sup_{x \neq 0} \frac{||Ax||}{||x||},$$

za $A \in B(X,Y)$.

Za linearne operatore na normiranim prostorima pojmovi neprekidnosti i ograničenosti su ekvivalentni.

Stav 1.3.6. Linearan operator $A : X \to Y$ je neprekidan ako i samo ako je ograničen.

1.4 Osnovni pojmovi teorije verovatnoće

Definicija 1.4.1. Neka je Ω skup elementarnih događaja i neka je $\mathcal{F}$ σ-algebra nad Ω. Funkcija $\mathcal{P} : \mathcal{F} \to [0,1]$ se naziva *verovatnoća* na $(\Omega, \mathcal{F})$ ako važi:

1. $\mathcal{P}(\Omega) = 1$,
2. $\mathcal{P}(\emptyset) = 0$,
3. ako su $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$ po parovima disjunktni, tj. $A_i \cap A_j = \emptyset$, za $i \neq j$, onda je $\mathcal{P}(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mathcal{P}(A_i)$.

Trojku $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ nazivamo *prostor verovatnoće.*

Definicija 1.4.2. Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ prostor verovatnoće i neka je $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ par čije su komponente skup realnih brojeva i Borelova σ-algebra podskupova skupa realnih brojeva. Funkcija $X : \Omega \to \mathbb{R}$ zove se *slučajna veličina*, ako je merljiva u odnosu na σ-algebre $\mathcal{F}$ i $\mathcal{B}$, tj. ako za svaki Borelov skup $B \in \mathcal{B}$ važi

$$X^{-1}(B) = \{\omega \mid X(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}.$$

Definicija 1.4.3. Preslikavanje $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ je *funkcija raspodele* slučajne veličine X ako važi

$$F_X(x) = \mathcal{P}\left(\{\omega \mid \omega \in \Omega, X(\omega) < x\}\right),$$

za sve $x \in \mathbb{R}$.

Razlikujemo dva važna tipa slučajnih veličina.
Slučajna veličina $X : \Omega \to \mathbb{R}$ je *diskretna* ako postoji konačan ili prebrojiv skup $\mathcal{R}_X \subset \mathbb{R}$ takav da je

$$\mathcal{P}(\{X \in \mathcal{R}_X\}) = 1.$$

Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je *Borelova*[3] *funkcija* ako važi $f^{-1}(S) \in \mathfrak{B}$ za svako $S \in \mathfrak{B}$, gde je $\mathfrak{B}$ Borelova σ-algebra.
Slučajna veličina je *apsolutno neprekidnog tipa* ako postoji Borelova nenegativna funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takva da je

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, d\lambda(t), x \in \mathbb{R},$$

gde je $\int_{-\infty}^{x} f(t)\, d\lambda(t)$ Lebegov[4] integral funkcije f u odnosu na Lebegovu meru λ. Funkcija f se naziva *gustina raspodele* slučajne veličine X.

Definicija 1.4.4. Neka je X diskretna slučajna veličina

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots \end{pmatrix}.$$

Ako je $\sum_i |x_i| p_i < \infty$, onda je

$$E(X) = \sum_i x_i p_i$$

matematičko očekivanje slučajne veličine X.

[3]Félix Édouard Justin Émile Borel (1871-1956), francuski matematičar

[4]Henri Léon Lebesgue (1875-1941), francuski matematičar

Neka je X slučajna veličina apsolutno neprekidnog tipa sa gustinom raspodele f takva da je

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x)\, dx < \infty.$$

Tada je

$$E\left(X\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx$$

matematičko očekivanje slučajne veličine X.

Osobine matematičkog očekivanja:

1. Ako je $X \geq 0$, onda je $E\left(X\right) \geq 0$.
2. $E\left(aX + bY\right) = aE\left(X\right) + bE\left(Y\right)$, za $a, b \in \mathbb{R}$.
3. Ako je $X \geq Y$, onda je $E\left(X\right) \geq E\left(Y\right)$.
4. $|E\left(X\right)| \leq E\left(|X|\right)$.
5. Ako su X i Y nezavisne slučajne veličine, onda je $E\left(XY\right) = E\left(X\right) E\left(Y\right)$.
6. Važi *Koši*[5]*-Švarcova*[6] *nejednakost*, tj. $\left(E\left(|XY|\right)\right)^2 \leq E\left(X^2\right) E\left(Y^2\right)$.

Definicija 1.4.5. *Disperzija* D slučajne veličine X definiše se kao:

$$D\left(X\right) = E\left(\left(X - E\left(X\right)\right)^2\right).$$

U izračunavanjima obično se koristi sledeća jednostavna formula za disperziju:

$$D\left(X\right) = E\left(\left(X - E\left(X\right)\right)^2\right) = E\left(X^2\right) - 2E\left(X\right)E\left(X\right) + E\left(X\right)^2 = E\left(X^2\right) - E\left(X\right)^2.$$

Osobine disperzije:

1. $D\left(X\right) \geq 0$.
2. $D\left(X\right) = 0 \iff X$ je konstanta skoro sigurno.

[5]Augustin Louis Cauchy (1789-1857), francuski matematičar

[6]Karl Hermann Amandus Schwarz (1843-1921), nemački matematičar

3. $D(cX) = c^2 D(X)$, za $c \in \mathbb{R}$.

4. $D(X + c) = D(X)$, za $c \in \mathbb{R}$.

5. Ako su slučajne veličine X i Y nezavisne i imaju disperzije, onda je

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y).$$

Definicija 1.4.6. *Standardno odstupanje (standardna devijacija)* slučajne veličine X, u oznaci σ_X, definiše se na sledeći način:

$$\sigma_X = \sqrt{D(X)}.$$

Definicija 1.4.7. *Kovarijacija* slučajnih veličina X i Y, u oznaci σ_{XY}, definiše se na sledeći način:

$$\sigma_{XY} = cov(X, Y) = E\left((X - E(X))(Y - E(Y))\right).$$

Alternativna formula koja se koristi u izračunavanjima je

$$cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y).$$

Ako je $\sigma_{XY} = 0$, kažemo da su slučajne veličine X i Y *nekorelisane.* Za $\sigma_{XY} > 0$, kažemo da su X i Y *pozitivno korelisane*, a za $\sigma_{XY} < 0$, X i Y su *negativno korelisane.*

Važi:

$$\sigma_{XX} = \sigma_X^2.$$

Definicija 1.4.8. Neka je $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ n-dimenzionalna slučajna veličina. *Kovarijaciona matrica*, u oznaci Σ, je kvadratna matrica definisana na sledeći način:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} cov(X_1, X_1) & cov(X_1, X_2) & \ldots & cov(X_1, X_n) \\ cov(X_2, X_1) & cov(X_2, X_2) & \ldots & cov(X_2, X_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ cov(X_n, X_1) & cov(X_n, X_2) & \ldots & cov(X_n, X_n) \end{bmatrix},$$

ili

$$\Sigma = E\left((X - E(X))(X - E(X))^T\right).$$

Definicija 1.4.9. *Koeficijent korelacije* slučajnih veličina X i Y, u oznaci ρ_{XY}, definiše se formulom

$$\rho_{XY} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}.$$

Za koeficijent korelacije bilo koje dve slučajne veličine važi

$$|\rho_{XY}| \leq 1.$$

Ako su X i Y nezavisne slučajne veličine, onda važi:

$$\rho_{XY} = 0.$$

Definicija 1.4.10. Neka je $D(X_i) > 0$, $i = 1, \ldots, n$. *Matrica korelacije* n-dimenzionalne slučajne veličine $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ je kvadratna matrica oblika

$$R = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{X_1X_2} & \cdots & \rho_{X_1X_n} \\ \rho_{X_2X_1} & 1 & \cdots & \rho_{X_2X_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \rho_{X_nX_1} & \rho_{X_nX_2} & \cdots & 1, \end{bmatrix},$$

gde je $\rho_{X_iX_j}$ koeficijent korelacije komponenata X_i i X_j, $i \neq j$.

Glava 2

Standardni pristup optimizaciji portfolija

2.1 Markovicov model

Pionirski rad H.Markovica [15] o postupku optimizacije portfolija predstavlja prekretnicu moderne finansijske teorije za optimalnu izgradnju portfolija, alokaciju aktiva i diversifikaciju investicija. Prema njegovoj teoriji, problem selekcije portfolija je kao kompromis između prinosa i rizika. Polazeći od pretpostavke da većina investitora teži da maksimizira dobit portfolija i minimizira njegov rizik, Markovic je formulisao koncept *očekivani prinos-disperzija*, gde je dobit modelirana očekivanim prinosom portfolija, a rizik njegovom disperzijom. Po osnovnom Markovicovom modelu investitior bira jednu od dve moguće strategije, za fiksirani rizik maksimizira dobit ili za fiksiranu dobit minimizira rizik.

Važna poruka njegove teorije je da dobra ne mogu biti izabrana samo na osnovu svojih pojedinačnih karakteristika, nego investitior treba da uzme u obzir kako se vrednost svakog dobra menja u odnosu na kretanja vrednosti svih ostalih dobara u portfoliju. Uzimajući u obzir ove uzajamne promene, Markovic je bio u mogućnosti da konstruiše portfolio sa istim očekivanim prinosom i manjim rizikom nego kod portfolija konstruisanog ignorišući interakcije između dobara. Osnovni Markovicov model postao je osnova za brojna buduća istraživanja, primene, proširenja i poboljšanja.

Teorija osnovnog Markovicovog modela razvijena je da bi se pronašao optimalni portfolio kada investitora zanima raspodela prinosa tokom jednog perioda investiranja. Ovaj model uzima za pretpostavku da u početnom trenutku ulažemo novac, a na kraju perioda očekujemo isplatu. Početni ulog nam je poznat, a povraćaj novca je neizvestan.

Na početku posmatramo model u kome se razmatraju cene akcija samo u vremenskim trenucima $t = 0, 1$. Označimo sa R intenzitet dobiti, a sa $X(t)$ vrednost portfolija u trenutku t. Tada je

$$R = \frac{X(1) - X(0)}{X(0)},$$

te je dobit $X(1) - X(0) = R \cdot X(0)$. Dobit može biti pozitivna ili negativna (profit ili gubitak). Ako je u pitanju gubitak (tj. ako je dobit negativna), onda je $L = -R \cdot X(0)$, gde je sa L označen gubitak portfolija za naredni dan. U nastavku, pretpostavimo da intenzitet dobiti ima normalnu raspodelu.

Pretpostavimo da se berza sastoji od N različitih vrednosnih papira i neka je bezrizična kamatna stopa r_f. Označimo sa R_i intenzitet dobiti (prinos) za jedan period za i-ti vrednosni papir, $(i = 1, \ldots, N)$, a sa R_m prinos portfolija koji se sastoji od tih vrednosnih papira. Želimo da uložimo iznos A u vrednosne papire sa berze. Označimo sa A_i sumu novca koja je uložena u i-ti vrednosi papir. Tada je $\omega_i = \frac{A_i}{A}$ težina i-tog vrednosnog papira u celom portfoliju. Prinos portfolija je

$$R_m = \sum_{i=1}^{N} \omega_i R_i.$$

Očekivani intenzitet dobiti i disperzija portfolija dati su sa:

$$\begin{aligned} r_m &= \sum_{i=1}^{N} \omega_i r_i \\ \sigma_m^2 &= \sum_{i=1}^{N} \omega_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq N} \omega_i \omega_j \sigma_{ij} \end{aligned}$$

gde je $r_i = ER_i$, $\sigma_i^2 = DR_i$ i $\sigma_{ij} = cov(R_i, R_j)$.
U situacijama kada je dozvoljena kratka prodaja investitor može pozajmiti akcije od brokera i prodati ih. Investitor ostvaruje profit ako cena pozamljenih akcija opada. Tada težinski koeficijenti ω_i mogu biti negativni.
Potrebno je rešiti problem kako investirati a da snosimo što je moguće manji rizik, odnosno kako odrediti portfolio sa minimalnom disperzijom. Neka je $\Sigma = cov(R)$ matrica definisana sa $[\Sigma]_{i,j} = cov(R_i, R_j)$, $1 \leq i, j \leq N$, tada Σ predstavlja kovarijacionu matricu rizičnih vrednosnih papira, gde je $R = (R_1, \ldots, R_N)$ vektor

intenziteta dobiti vrednosnih papira, $\mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_N)^T$ vektor očekivanih prinosa i $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_N)^T$ vektor udela koji tražimo. Ukoliko dopuštamo kratku prodaju rešavamo sledeći optimizacioni problem

$$\min_{\omega} \frac{1}{2}\omega^T \Sigma \omega : \; \mathbf{e}^T \omega = \omega^T \mathbf{e} = 1, \tag{2.1}$$

gde je $\mathbf{e} = (1, \ldots, 1)^T$ N-dimenzionalni vektor jedinica. Faktor $\frac{1}{2}$ je tu iz tehničkih razloga, a $\omega^T \Sigma \omega = \sigma^2$ je disperzija portfolija.

Za ovaj pristup neophodno je da uvedemo dodatnu pretpostavku o pozitivnoj definitnosti forme $\Phi : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}$ koja je određena matricom

$$M(\Phi) = \begin{bmatrix} \Sigma & -\mathbf{e} \\ -\mathbf{e}^T & 0 \end{bmatrix}, \tag{2.2}$$

odnosno, zahtevamo da glavni minori matrice $M(\Phi)$ budu strogo pozitivni.

Formiraćemo Lagranževu[1] funkciju

$$L(\omega, \lambda) = \frac{1}{2}\omega^T \Sigma \omega - \lambda(\mathbf{e}^T \omega - 1)$$

i rešavamo sledeći sistem

$$\nabla_\omega L(\omega, \lambda) = \Sigma\omega - \lambda \mathbf{e} = 0, \tag{2.3}$$

$$\nabla_\lambda L(\omega, \lambda) = 1 - \mathbf{e}^T \omega = 0. \tag{2.4}$$

Iz jednakosti (2.4) imamo $\mathbf{e}^T\omega = 1$, dok iz jednakosti (2.3) sledi:

$$\begin{aligned} \omega &= \lambda \Sigma^{-1} \mathbf{e}, \\ \mathbf{e}^T \omega &= \lambda \mathbf{e}^T \Sigma^{-1} \mathbf{e}, \end{aligned}$$

odnosno dobija se da je

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{1}{\mathbf{e}^T \Sigma^{-1} \mathbf{e}}, \\ \omega &= \frac{\Sigma^{-1}\mathbf{e}}{\mathbf{e}^T \Sigma^{-1} \mathbf{e}}. \end{aligned}$$

Pokažimo da je dobijeno rešenje optimizacije portfolija optimalno, odnosno da je $\omega = \dfrac{\Sigma^{-1}\mathbf{e}}{\mathbf{e}^T \Sigma^{-1} \mathbf{e}}$ zaista minimum funkcije $\frac{1}{2}\omega^T \Sigma \omega$ uz uslove kao u (2.1).

[1] Joseph-Louis, comte de Lagrange (1736-1813), italijansko-francuski matematičar i astronom

Neka je kovarijaciona matrica prinosa Σ oblika

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \dots & \sigma_{nn} \end{bmatrix},$$

pri čemu imamo na umu da je Σ simetrična, odnosno važi $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, za $1 \leq i, j \leq n$. Koristeći svojstva matričnog diferenciranja iz (2.3) i (2.4) dobijamo

$$\begin{aligned} \nabla_\omega \nabla_\lambda L(\omega, \lambda) = -\mathbf{e}, \quad & \nabla_\lambda \nabla_\omega L(\omega, \lambda) = -\mathbf{e}, \\ (\nabla_\omega)^2 L(\omega, \lambda) = \Sigma, \quad & (\nabla_\lambda)^2 L(\omega, \lambda) = 0, \end{aligned}$$

odnosno sledi da važi

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 L(\omega, \lambda)}{\partial \omega_i \partial \lambda} = -1, \quad & \frac{\partial^2 L(\omega, \lambda)}{\partial \lambda \partial \omega_i} = -1, \\ \frac{\partial^2 L(\omega, \lambda)}{\partial \omega_i \partial \omega_j} = \sigma_{ij}, \quad & \frac{\partial^2 L(\omega, \lambda)}{\partial \lambda^2} = 0, \end{aligned}$$

za $1 \leq i, j \leq n$. Shodno tome, uočavamo kvadratnu formu

$$\Phi(\omega_1, \dots, \omega_n, \lambda) = \sum_{i,j=1}^{n} \sigma_{ij} \omega_i \omega_j - 2 \sum_{i=1}^{n} \lambda \omega_i,$$

a za ovu kvadratnu formu smo na početku pretpostavili da je pozitivno definitna (jer je Φ određena matricom kao u (2.2)), te je dobijeno ω zaista argument za koji se dostiže minimum iz problema (2.1).

Ukoliko kratka prodaja nije dozvoljena u optimizacioni problem (2.1) se dodaje uslov $\omega \geq 0$, i tada se on najčešće rešava numerički.
Optimizacioni problem portfolija, kako je Markovic definisao, je:

$$\min_{\omega} \frac{1}{2} \omega^T \Sigma \omega : \mathbf{e}^T \omega = 1, \mathbf{r}^T \omega = r_m. \tag{2.5}$$

pri čemu je $r_m = \omega^T \mathbf{r} = \mathbf{r}^T \omega$ očekivani prinos portfolija, a $\mathbf{r}$ je vektor očekivanih prinosa akcija. Negativni elementi od ω upućuju na kratku prodaju. Zadržavamo pretpostavku o pozitivnoj definitnosti kovarijacione matrice Σ. Formiramo funkciju Lagranža

$$L(\omega, \lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{2} \omega^T \Sigma \omega - \lambda_1 (\mathbf{e}^T \omega - 1) - \lambda_2 (\mathbf{r}^T \omega - r_m)$$

i rešavamo sledeći sistem

$$\nabla_\omega L(\omega, \lambda_1, \lambda_2) = \Sigma\omega - \lambda_1 \mathbf{e} - \lambda_2 \mathbf{r} = 0, \tag{2.6}$$

$$\nabla_{\lambda_1} L(\omega, \lambda_1, \lambda_2) = 1 - \mathbf{e}^T \omega = 0, \tag{2.7}$$

$$\nabla_{\lambda_2} L(\omega, \lambda_1, \lambda_2) = r_m - \mathbf{r}^T \omega = 0. \tag{2.8}$$

Iz jednakosti (2.6) sledi

$$\omega = \lambda_1 \Sigma^{-1} \mathbf{e} + \lambda_2 \Sigma^{-1} \mathbf{r}.$$

Množenjem prethodne jednakosti sa leve strane sa $\mathbf{e}^T$, a onda i sa $\mathbf{r}^T$, dobijamo sledeće jednakosti

$$\begin{aligned} 1 &= \lambda_1 \mathbf{e}^T \Sigma^{-1} \mathbf{e} + \lambda_2 \mathbf{e}^T \Sigma^{-1} \mathbf{r}, \\ r_m &= \lambda_1 \mathbf{r}^T \Sigma^{-1} \mathbf{e} + \lambda_2 \mathbf{r}^T \Sigma^{-1} \mathbf{r}. \end{aligned}$$

Odnosno, dobija se rešenje

$$\lambda_1 = \frac{1 - \mathbf{e}^T \Sigma^{-1} \mathbf{r} \lambda_2}{\mathbf{e}^T \Sigma^{-1} \mathbf{e}}, \tag{2.9}$$

$$\lambda_2 = \frac{\mathbf{r}^T \Sigma^{-1} \mathbf{e} - \mathbf{e}^T \Sigma^{-1} \mathbf{e} r_m}{\mathbf{r}^T \Sigma^{-1} \mathbf{e} \mathbf{e}^T \Sigma^{-1} \mathbf{r} - \mathbf{r}^T \Sigma^{-1} \mathbf{r} \mathbf{e}^T \Sigma^{-1} \mathbf{e}}, \tag{2.10}$$

$$\omega = \Sigma^{-1}(\mathbf{e}\lambda_1 + \mathbf{r}\lambda_2). \tag{2.11}$$

Iz jednačine (2.11) možemo zaključiti da optimalne težine portfolija zavise od inverzne vrednosti matrice kovarijacije. To ponekad stvara poteškoće ako kovarijaciona matrica nije invertibilna, bliska singularnoj ili numerički loše uslovljena i sve ove situacije pojačavaju grešku ocene.

Za kvadratnu matricu $A \in M_n(\mathbb{K})$ kažemo da je bliska singularnoj ukoliko za $det(A)$ važi da je različita od nule, ali i jako blizu nuli. Ovde je dobar trenutak da objasnimo razliku između matrica bliskih singularnoj i loše uslovljenih.

Napomena. Lošu uslovljenost matrice A posmatramo u odnosu na uslovni broj matrice pri Euklidskoj normi, odnosno $\mathcal{K}(A) = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}$.

Matrica bliska singularnoj nije obavezno uvek loše uslovljena, što vidimo na primeru sledeće matrice:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.01 & 0.02 \\ 0.05 & 0.011 \end{bmatrix}.$$

Naime, važi da je $det(A_1) = -0.00089$, što znači da je matrica bliska singularnoj, a sa druge strane je $\mathcal{K}(A_1) = 3.18386$, što implicira da je matrica dobro uslovljena.

Ne važi ni obrnuto, odnosno, ukoliko je neka matrica loše uslovljena, odatle ne sledi nužno da je ta matrica bliska singularnoj. Pokazujemo i to na primeru sledeće matrice:

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1000 & 1001 \\ 999 & 1000 \end{bmatrix}.$$

Važi da je $\mathcal{K}(A_2) = 4002002$, što ukazuje na to da je ova matrica loše uslovljena, dok iz $det(A_2) = 1$ sledi da ova matrica nije bliska singularnoj.

Jedan od načina za rešavanje problema optimizacije portfolija u slučajevima kada je kovarijaciona matrica singularna, bliska singularnoj ili loše uslovljena jeste upotreba Mur-Penrozovog inverza (pojavljuje se i naziv pseudo-inverz ili generalizovani inverz). Korišćenjem Mur-Penrozovog inverza uzoračke kovarijacione matrice prinosa umesto običnog inverza (koji u singularnom slučaju ne postoji) u jednačini (10), dobijaju se dobro definisane težine portfolija. U praksi se kovarijaciona matrica ocenjuje na osnovu istorijskih podataka dostupnih do određenog datuma, optimalne težine portfolija se izračunavaju korišćenjem te ocene, portfolio se formira do tog datuma i održava se do sledećeg rebalansa. Prekomerno uklapanje podataka iz uzorka može prouzrokovati loš izbor portfolija, te je iz tog razloga korisno nametanje neke strukture. Osvrnimo se ukratko na ocenjivanje kovarijacione matirice prinosa.

Ocenjivanje kovarijacione matrice prinosa predstavlja važan korak u analizi portfolija, upravljanju rizikom i optimizaciji portfolija. Kovarijaciona matrica prinosa sadrži kovarijacije između finansijskih instrumenata ili akcija u portfoliju. Pri ocenjivanju kovarijacione matrice prinosa često se uvode pretpostavke o raspodeli prinosa finansijskih instrumenata. Evo nekoliko uobičajenih pretpostavki o raspodeli koje se u praksi najčešće uvode:

1. **Normalnost raspodele prinosa**: Ova pretpostavka podrazumeva da su prinosi finansijskih instrumenata raspodeljeni u skladu sa normalnom raspodelom, a to bi značilo da su svi momenti raspodele (npr. očekivanje i standardna devijacija) dovoljni za opisivanje raspodele.

2. **Stacionarnost**: Pretpostavka o stacionarnosti podrazumeva da statističke karakteristike prinosa ostaju konstantne tokom vremena.

3. **Nezavisnost**: Ova pretpostavka sugeriše da su prinosi različitih finansijskih instrumenata nezavisni u različitim vremenskim trenucima.

Definicija 2.1.1. Slučajni vektor $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \dots, X_p)^T$ ima p-dimenzionalnu normalnu raspodelu sa srednjom vrednošću μ i kovarijacionom matricom Σ, u oznaci $X \sim \mathcal{N}_p(\mu, \Sigma)$, ako je njegova gustina raspodele verovatnoća data sa:

$$f(\boldsymbol{x} \mid \mu, \Sigma) = \frac{1}{|2\pi|^{\frac{p}{2}}|\Sigma|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\mu)^T\Sigma^{-1}(\boldsymbol{x}-\mu)}, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^p.$$

Pretpostavimo da je naš uzorak $\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{X}_1, \dots, \boldsymbol{X}_N)$ nezavisan i jednako raspodeljen, iz populacije sa multivarijacionom normalnom raspodelom $\mathcal{N}_p(\mu, \Sigma)$. Kako su slučajne promenljive nezavisne, zajednička gustina raspodele biće proizvod pojedinačnih gustina:

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_N \mid \mu, \Sigma) &= \prod_{i=1}^{N} \frac{1}{|2\pi|^{\frac{p}{2}}|\Sigma|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}_i-\mu)^T\Sigma^{-1}(\boldsymbol{x}_i-\mu)} \\ &= \frac{1}{|2\pi|^{\frac{N\cdot p}{2}}|\Sigma|^{\frac{N}{2}}} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}(\boldsymbol{x}_i-\mu)^T\Sigma^{-1}(\boldsymbol{x}_i-\mu)}. \end{aligned}$$

Ako $(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_N)$ posmatramo kao realizaciju slučajnog uzorka $\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{X}_1, \dots, \boldsymbol{X}_N)$, odnosno, kao fiksirane vrednosti, tada funkcija zajedničke gustine postaje funkcija po μ i Σ i naziva se *funkcijom verodostojnosti slučajnog uzorka* i obično se označava sa L, pa važi:

$$L(\mu, \Sigma) = \frac{1}{|2\pi|^{\frac{N\cdot p}{2}}|\Sigma|^{\frac{N}{2}}} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}(\boldsymbol{x}_i-\mu)^T\Sigma^{-1}(\boldsymbol{x}_i-\mu)}$$

Vrednosti μ i Σ za koje ova funkcija dostiže maksimum se nazivaju ocenama maksimalne verodostojnosti za μ i Σ i te vrednosti ćemo označvati sa $\hat{\mu}$ i $\hat{\Sigma}$. Izvođenjem, čiji se dokaz može naći u [1], dobija se da su ove ocene:

$$\begin{aligned} \hat{\mu} &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{X}_i, \\ \hat{\Sigma} &= \frac{1}{N-1}\sum_{j=1}^{N}\left(\boldsymbol{X}_j - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{X}_i\right)\left(\boldsymbol{X}_j - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{X}_i\right)^T. \end{aligned}$$

Napomena. Identične ocene $\hat{\mu}$ i $\hat{\Sigma}$ dobijamo i metodom zamene, pri čemu tada pretpostavka $X \sim \mathcal{N}_p(\mu, \Sigma)$ nije neophodna, stoga zaključujemo da su ocene koje smo dobili smislene i za druge raspodele prinosa, s tim što se ne nasleđuju uvek sva svojstva.

2.2 Drugi način Markovicovog originalnog pristupa optimizaciji portfolija

Ovim pristupom investitor želi da maksimizira funkciju korisnosti

$$U(\omega) = r_m(\omega) - \frac{\gamma}{2}\sigma_m^2(\omega) = \omega^T \mathbf{r} - \frac{\gamma}{2}\omega^T \Sigma \omega, \tag{2.12}$$

gde je γ *koeficijent averzije prema riziku*. Pretpostavljamo da su težine portfolija nenegativne, $\omega_i \geq 0$ za svako $i = 1, \ldots, N$. Znamo da treba da važi $\omega^T \mathbf{e} = \mathbf{e}^T \omega = 1$. Formiramo funkciju Lagranža

$$L(\omega, \lambda) = \omega^T \mathbf{r} - \frac{\gamma}{2}\omega^T \Sigma \omega - \lambda(\omega^T \mathbf{e} - 1).$$

Rešavamo sledeći sistem

$$\nabla_\omega L(\omega, \lambda) = \mathbf{r} - \gamma \Sigma \omega - \lambda \mathbf{e} = 0, \tag{2.13}$$

$$\nabla_\lambda L(\omega, \lambda) = 1 - \mathbf{e}^T \omega = 0. \tag{2.14}$$

Iz jednakosti (2.14) imamo $\mathbf{e}^T \omega = 1$. Jednakost (2.13) množimo sa leve strane sa Σ^{-1} i rešavamo

$$\begin{aligned} \Sigma^{-1}\mathbf{r} - \gamma\omega - \lambda\Sigma^{-1}\mathbf{e} &= 0, \\ \omega &= \frac{1}{\gamma}(\Sigma^{-1}\mathbf{r} - \lambda\Sigma^{-1}\mathbf{e}), \\ 1 &= \frac{1}{\gamma}(\mathbf{e}^T\Sigma^{-1}\mathbf{r} - \lambda\mathbf{e}^T\Sigma^{-1}\mathbf{e}). \end{aligned}$$

Dobijamo rešenje

$$\lambda = \frac{\mathbf{e}^T\Sigma^{-1}\mathbf{r} - \gamma}{\mathbf{e}^T\Sigma^{-1}\mathbf{e}},$$

$$\omega = \frac{1}{\gamma}(\Sigma^{-1}\mathbf{r} - \frac{\mathbf{e}^T\Sigma^{-1}\mathbf{r} - \gamma}{\mathbf{e}^T\Sigma^{-1}\mathbf{e}}\Sigma^{-1}\mathbf{e}). \tag{2.15}$$

Sada kada smo izneli dva načina za rešavanje problema optimizacije portfolija, razmatrajmo ukratko i odnose između ta dva rešenja. Rešenje metodom minimizacije rizika (koje je dato jednačinama (2.9),(2.10) i (2.11)) pogodno je za investitore koji stavljaju naglasak na očuvanje kapitala i koji izbegavaju rizik. Dakle ovaj metod smanjuje potencijal za značajne gubitke. Sa druge strane, kako se investitor korišćenjem ovog metoda fokusira na minimizaciju rizika, kao krajnji ishod će uslediti niži očekivani prinosi no što bi bio slučaj da su primenjene neke agresivnije strategije.

Metod koji smo u ovom poglavlju izneli daje rešenje optimizacije portfolija koje maksimizira funkciju korisnosti. Dakle, dato rešenje nema za cilj da maksimizira profit, ma kakav rizik bio, već se i rizik kontroliše koeficijentom averzije prema riziku koji se pojavljuje u funkciji korisnosti.

Međutim, ispostavlja se da pristup koji minimizuje rizik za zadati prinos i pristup koji maksimizuje funkciju korisnosti za zadati koeficijent averzije γ generišu istu efikasnu granicu. Fiksirajmo koeficijent averzije γ, tada pristup koji se zasniva na maksimizaciji funkcije korisnosti rezultuje rešenjem optimizacije koje je dato formulom (2.15), te je očekivani prinos portfolija

$$r_m = \mathbf{r}^T\omega = \frac{1}{\gamma}\mathbf{r}^T(\Sigma^{-1}\mathbf{r} - \frac{\mathbf{e}^T\Sigma^{-1}\mathbf{r} - \gamma}{\mathbf{e}^T\Sigma^{-1}\mathbf{e}}\Sigma^{-1}\mathbf{e}).$$

Uvodimo sledeće oznake:

$$A = \mathbf{e}^T\Sigma^{-1}\mathbf{e},\ B = \mathbf{e}^T\Sigma^{-1}\mathbf{r},\ C = \mathbf{r}^T\Sigma^{-1}\mathbf{r},$$

tada je očekivani prinos portfolija dat jednačinom:

$$r_m = \frac{1}{\gamma}\frac{AC - B^2 + \gamma B}{A}. \tag{2.16}$$

Koristeći uvedene oznake i zamenom (2.16) u formule (2.9) i (2.10), dobijamo sledeće jednačine:

$$\lambda_1 = \frac{1 - B\frac{1}{\gamma}}{A},$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{\gamma},$$

odnosno, rešenje dobijeno minimizacijom rizika za zadati prinos kao u (2.16) je:

$$\omega = \Sigma^{-1}(\mathbf{e}\lambda_1 + \mathbf{r}\lambda_2) = \frac{1}{\gamma}(\Sigma^{-1}\mathbf{r} - \Sigma^{-1}\mathbf{e}\frac{B-\gamma}{A}). \tag{2.17}$$

Primetimo da se rešenje dobijeno maksimizacijom funkcije korisnosti dato jednačinom (2.15) poklapa sa rešenjem dato formulom (2.17), što smo zapravo i hteli da pokažemo.

2.3 Tangentni portfolio

Investitor često ulaže u neku kombinaciju bezrizičnog vrednosnog papira (na primer obveznicu) i rizičnog portfolija M. Pretpostavimo da je r_f prinos bezrizičnog aseta, a π udeo novca uložen u rizični portfolio. Tada su očekivani prinos portfolija i njegova disperzija dati sa:

$$\begin{aligned} r_p &= (1-\pi)r_f + \pi r_m, \\ \sigma_p^2 &= \pi^2 \sigma_m^2. \end{aligned}$$

Disperzija bezrizičnog dela je jednaka nuli. Dobijamo da važi sledeća veza između očekivanog prinosa i odgovarajućeg standardnog odstupanja:

$$r_p = r_f + \sigma_p \frac{r_m - r_f}{\sigma_m}.$$

Koeficijent pravca ove prave $\frac{r_m - r_f}{\sigma_m}$ naziva se *Šarpov količnik*, a prava se naziva *linija alociranog kapitala*. Šarpov količnik je finansijska mera koja se koristi za procenu efikasnosti portfolija ili investicione strategije. Šarpov količnik se izračunava kao odnos prosečnog viška prinosa portfolija (prinosa iznad bezrizične stope) i standardnog odstupanja portfolija, tj. predstavlja koliki je prinos po jedinici rizika. Što je veći Šarpov količnik, to je portfolio efikasniji, jer pruža veći prinos po jedinici rizika. Prava sa najvećim Šarpovim količnikom naziva se *linija tržišnog kapitala* (CML[2]). Možemo primetiti da je CML tangenta na skup efikasnih portfolija. *Efikasni portfolio* je portfolio sa najmanjim mogućim rizikom za unapred zadati očekivani prinos. On se može predstaviti kao linearna kombinacija tangentnog portfolija i bezrizičnog finansijskog instrumenta.

Želimo da odredimo tangentni portfolio. Koeficijent pravca CML se može prikazati u obliku

$$\frac{\omega^T \mathbf{r} - r_f}{(\omega^T \Sigma \omega)^{\frac{1}{2}}}, \quad \omega^T \mathbf{e} = 1.$$

Hoćemo da odredimo ω za koje se u prethodnom izrazu postiže maksimum. Formirajmo funkciju Lagranža

$$L(\omega, \lambda) = \frac{\omega^T \mathbf{r} - r_f}{(\omega^T \Sigma \omega)^{\frac{1}{2}}} - \lambda(\omega^T \mathbf{e} - 1)$$

[2]CML - Capital Market Line

i rešimo sledeći sistem

$$
\begin{aligned}
\nabla_\omega L(\omega,\lambda) &= \frac{r\left(\omega^T\Sigma\omega\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\omega^T\mathbf{r}-r_f\right)\left(\omega^T\Sigma\omega\right)^{-\frac{1}{2}}\Sigma\omega}{\omega^T\Sigma\omega} - \lambda\mathbf{e} = 0,\\
\nabla_\lambda L(\omega,\lambda) &= 1-\omega^T\mathbf{e} = 0.
\end{aligned}
$$

Sledi da je

$$
\frac{r\left(\omega^T\Sigma\omega\right) - \left(\omega^T\mathbf{r}-r_f\right)\Sigma\omega}{\left(\omega^T\Sigma\omega\right)^{\frac{3}{2}}} - \lambda\mathbf{e} = 0,
$$

a uvođenjem smene da je $A=\left(\omega^T\Sigma\omega\right)^{\frac{1}{2}}$ dobijamo

$$
A^2\mathbf{r} - \left(\omega^T\mathbf{r}-r_f\right)\Sigma\omega = \lambda A^3\mathbf{e},
$$

odnosno, množenjem sa leve strane sa ω^T

$$
\begin{aligned}
A^2\omega^T\mathbf{r} - \left(\omega^T\mathbf{r}-r_f\right)A^2 &= \lambda A^3,\\
\omega^T\mathbf{r} - \left(\omega^T\mathbf{r}-r_f\right) &= \lambda A.
\end{aligned}
$$

Koristeći da je $A^2\mathbf{r} - \left(\omega^T\mathbf{r}-r_f\right)\Sigma\omega = \lambda A^3\mathbf{e}$ i da iz $r_f=\lambda A$ sledi da je $\lambda=\frac{r_f}{A}$ imamo da važi

$$
A^2\mathbf{r} - \left(\omega^T\mathbf{r}-r_f\right)\Sigma\omega = \frac{r_f}{A}A^3\mathbf{e} = r_fA^2\mathbf{e}.
$$

Sada množenjem sa leve strane sa Σ^{-1}, a potom sa $\mathbf{e}^T$ dobijamo

$$
\begin{aligned}
A^2\Sigma^{-1}\mathbf{r} - \left(\omega^T\mathbf{r}-r_f\right)\omega &= r_fA^2\Sigma^{-1}\mathbf{e},\\
A^2\left(\Sigma^{-1}\mathbf{r}-r_f\Sigma^{-1}\mathbf{e}\right) &= \left(\omega^T\mathbf{r}-r_f\right)\omega,\\
A^2\left(\mathbf{e}^T\Sigma^{-1}\mathbf{r}-r_f\mathbf{e}^T\Sigma^{-1}\mathbf{e}\right) &= \omega^T\mathbf{r}-r_f,
\end{aligned}
$$

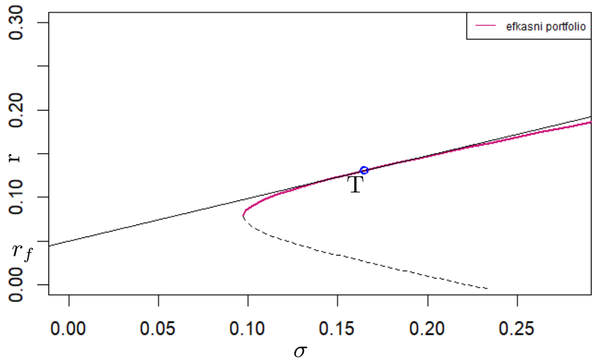
odnosno,

$$
A^2\left(\Sigma^{-1}\mathbf{r}-r_f\Sigma^{-1}\mathbf{e}\right) = A^2\left(\mathbf{e}^T\Sigma^{-1}\mathbf{r}-r_f\mathbf{e}^T\Sigma^{-1}\mathbf{e}\right)\omega.
$$

Dakle, kandidat za rešenje optimizacionog problema jeste

$$
\omega = \frac{\Sigma^{-1}\left(\mathbf{r}-r_f\mathbf{e}\right)}{\mathbf{e}^T\Sigma^{-1}\left(\mathbf{r}-r_f\mathbf{e}\right)} = const\cdot\left(\Sigma^{-1}\left(\mathbf{r}-r_f\mathbf{e}\right)\right).
$$

Odredivši ω, možemo dobiti i očekivani prinos rizičnog dela, tj. $r_m=\omega^T\mathbf{r}$. Na Slici 2.1 je tangentni portfolio označen sa T a prava koja spaja tačke $(0,r_f)$ i T je CML. Na toj pravoj se nalaze investicije koje su optimalne u Markovicovom smislu.



Slika 2.1: Grafik zavisnosti očekivanog prinosa portfolija od rizika portfolija.

2.4 Problemi Markovicove optimalne portfolio teorije

Teorijske prednosti Markovicovog modela su nesporne, međutim, nekoliko problema se javlja u njegovoj praktičnoj primeni. U praksi to je procedura sklona greškama i nestabilnosti koje često rezultiraju neupotrebljivim konstrukcijama portfolija.
Loša je navika da se koriste istorijski podaci za određivanje uzoračke sredine i da se njome zameni očekivani prinos. Ovaj u praksi ukorenjen postupak u velikoj meri doprinosi maksimizaciji greške Markovicovog modela.
Markovicov model ne uzima u obzir težine tržišne kapitalizacije. Tržišna kapitalizacija predstavlja tržišnu vrednost izdvojenih akcija preduzeća kojom se trguje na berzi. To znači da ako aseti sa niskim nivoom kapitalizacije imaju visoke očekivane prinose i negativno su korelisani sa ostalim asetima u portfoliju, model može predložiti visoke težine u portfoliju. To je problem, pogotovu kada se dodaju ograničenja za kratku prodaju. Model često sugeriše veoma visoke težine za asete sa niskim nivoom kapitalizacije.
Metod koristi disperziju kao meru rizika, što se obično smatra previše pojednostavljenom merom kada prinosi dobara ne prate normalne raspodele, što je često slučaj u praksi. Postupak ocenjivanja kovarijacija između aktiva je takođe problematičan. Na primer, u portfoliju koji sadrži 50 aktiva, broj disperzija koji treba da bude ocenjen je 50, ali broj kovarijacija je 1225, što predstavlja prilično obiman posao. Kovarijaciona matrica sadrži više parametara za ocenu i u vezi sa tim javljaju se

dva glavna problema. Prvo, vrlo je verovatno da će podaci imati autlajere koji će ozbiljno uticati na dobijenu matricu kovarijacije. Mali procenat autlajera, u nekim slučajevima i čak samo jedan, može izobličiti konačne ocenjene disperzije i kovarijacije. Drugo, sa toliko parametara za ocenu, potreban je veliki broj istorijskih opservacija prinosa, dok priroda tržišta može značajno da se promeni tokom tako dugog perioda.

Osnovni Markovicovi modeli su često nestabilni, što znači da male promene u ulaznim veličinama mogu dramatično da promene strukturu portfolija. Model je naročito nestabilan u pogledu ulaznih očekivanih prinosa. Jedna mala, statistički beznačajna promena u očekivanom prinosu jedne aktive može generisati radikalno drugačiji portfolio. Ova pojava pre svega je prouzrokovana lošom uslovljenošću matrice kovarijacije. Na primer, loše uslovljenom matricom kovarijacije može se smatrati matrica dobijena na osnovu nepotpunih istorijskih podataka. U suštini, optimizacija portfolija zahteva traženje inverzne matrice za matricu kovarijacije. Kovarijaciona matrica može biti nesingularna i zato invertibilna, ali ipak loše uslovljena. U tom slučaju optimizacija je vrlo nestabilna. Broj perioda opservacija trebalo bi da bude reda veličine većeg od broja hartija od vrednosti ukjučenih u optimizaciju.

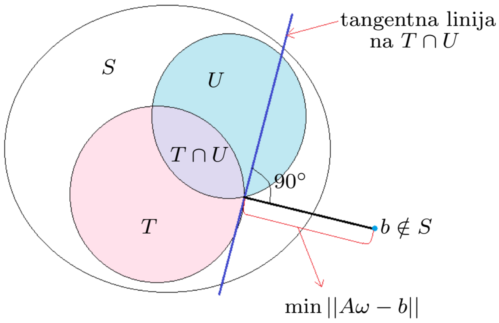
Kada je broj akcija N istog reda veličine kao i broj prinosa po akciji T, ukupan broj parametara za ocenu je istog reda kao i ukupna veličina skupa podataka. Takođe, kada broj opservacija T premaši broj aseta N, broj ocena za popunjavanje kovarijacione matrice eksponencijalno raste kako se broj aseta povećava ili greške u oceni parametara dovode do nestabilnih i ekstremnih težina portfolija tokom vremena. Još gora situacija je kada je N veće od T ili kada su prinosi aseta linearno zavisni, tada je kovarijaciona matrica uvek singularna. U ovom slučaju je problem kako odrediti inverz matrice koji ne postoji. Jedan od načina jeste korišćenje generalizovanog inverza.

2.5 Geometrijska interpretacija metoda

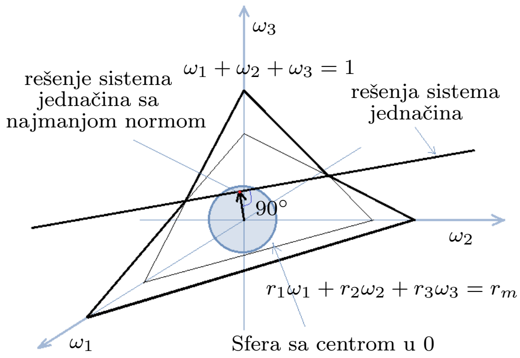
Razmotrimo rizične asete čiji su prinosi R_{it}, $i = 1, \ldots, N, t = 1, \ldots, T$. Označimo uzoračku sredinu svakog rizičnog aseta sa r_i, $i = 1, \ldots, N$ i neka je $r_m = \sum_{i=1}^{N} \omega_i r_i$ očekivani prinos portfolija, gde su ω_i težine portfolija za koje važi $\sum_{i=1}^{N} \omega_i = 1$. Prinos portfolija u vremenu t može se izraziti na sledeći način: $\sum_{i=1}^{N} \omega_i R_{it} = r_m + \varepsilon_t$, $t = 1, \ldots, T$, gde su ε_t reziduali. Neka je A matrica dimenzije $T \times N$ definisana sa $[A]_{t,i} = R_{it}$, $i = 1, \ldots, N,\ t = 1, \ldots, T$, a b označava $T-$dimenzioni vektor definisan kao $r_m\mathbf{e} = b$, pri čemu je $\mathbf{e} = (1, 1, \ldots, 1)^T$ T-dimenzioni vektor jedinica. Sistem jednačina koji posmatramo je sledeći:

$$A\omega - b = \varepsilon.$$

Markovicov pristup minimizuje grešku $||A\omega - b||$ pokušavajući da pronađe optimalno ω^*.



Slika 2.2: Markovicov model i rešenje najmanjih kvadrata.



Slika 2.3: Geometrijska interpretacija rešenja za $T = 1$ i $N = 3$.

Slika 2.2 pokazuje da, geometrijski gledano, greška predstavlja udaljenost b od tačke $A\omega$ u prostoru kolona S, gde je $S = \mathcal{L}\{A_1, A_2, \ldots, A_N\}$, pri čemu je A_i i-ta kolona matrice A, za $i = 1, \ldots, N$.
Definišimo U i T na sledeći način:

$$U = \{v \in S : v = \sum_{i=1}^{N} \omega_i A_i \ \wedge \sum_{i=1}^{N} \omega_i = 1\},$$
$$T = \{v \in U : v = \sum_{i=1}^{N} \omega_i A_i \ \wedge \sum_{i=1}^{N} \omega_i r_i = r_m\}.$$

Rešenje Markovicovog problema je tačka koja se nalazi na granici skupa $T \cap U$ i za koju važi da je tangenta u toj tački na $T \cap U$ ortogonalna na pravu dobijenu spajanjem te tačke i tačke b.

Slika 2.3 prikazuje ideju geometrijskog pristupa kada je $T = 1$ i $N = 3$. U trenutku $T = 1$ očekivani prinosi neka 3 aseta su r_1, r_2, r_3, redom. Tražimo rešenje koje minimizuje rastojanje od 0 do tangentne linije koja je u preseku ravni koja je određena sa $\{r_1\omega_1 + r_2\omega_2 + r_3\omega_3 = r_m\}$ i ravni određenom sa $\{\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 1\}$.

Glava 3

Mur-Penrozov generalizovani inverz

U ovoj glavi definišemo Mur-Penrozov generalizovani inverz matrice, koji ima veliku primenu u rešavanju matričnih jednačina, kao i u određivanju približnih rešenja sistema linearnih jednačina, onda kada sistemi nemaju rešenja.

Godine 1920. Mur objavljuje rad [17] u vezi sa generalizovanim inverzima matrica, međutim, ovaj rad prolazi nezapaženo. Penroz objavljuje rad [18] 1955. godine na istu temu, nezavisno od Mura, s tim što generalizovani inverz definiše na drugačiji način u odnosu na Mura. Sa Penrozovim radom počinje širenje ove teorije velikom brzinom.

Ova teorija je od izuzetne važnosti za naš krajnji cilj (odnosno, za optimizaciju portfolija u prisustvu singularne kovarijacione matrice prinosa), te ćemo iz tog razloga ovom delu rada posvetiti veliku pažnju.

Rezultate ove teorije prikazujemo za $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, te će, specijalno, sve važiti i kada polje skalara čini skup $\mathbb{R}$.

Definicija 3.0.1. Za matricu $A = [a_{i,j}] \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ definišemo njen konjugovani transponat kao $A^* = [\overline{a}_{j,i}] \in M_{n,m}(\mathbb{C})$.

Definicija 3.0.2. Za matricu $A \in M_n(\mathbb{C})$ kažemo da je *ermitska matrica*, ukoliko je jednaka svojoj konjugovano transponovanoj matrici, odnosno ukoliko važi $A = A^*$.

Napomena. Ukoliko je $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, tada važi $A^* = A^T$.

Prisetimo se, u pregledu osnovnih pojmova definisali smo projektor kao matricu $A \in M_n(\mathbb{C})$ za koju važi da je idempotentna, tj. $A \cdot A = A$. Sada će nam biti potreban i pojam ortogonalnog projektora. Matricu A nazivamo *ortogonalnim projektorom* ili *matricom ortogonalne projekcije* ukoliko je projektor i ukoliko za nju važi $\mathcal{R}(A) =$

$\mathcal{N}(A)^{\perp}$. Važi da je $\mathcal{R}(A) = \mathcal{N}(A)^{\perp}$ ako i samo ako je A ermitska, odnosno $A^* = A$. Specijalno, ukoliko govorimo o matricama ortogonalne projekcije nad poljem $\mathbb{R}$, to znači da su one idempotentne i simetrične.

Napomena. Za standardni skalarni proizvod nad poljem $\mathbb{C}$ i proizvoljne $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$, $a \in \mathbb{C}^n$ i $b \in \mathbb{C}^m$ važi:

$$\langle Aa, b \rangle = \langle a, A^* b \rangle,$$

što jednostavno pokazujemo raspisivanjem.

3.1 Definicija Mur-Penrozovog inverza

Neka je $M_{m,n}(\mathbb{R})$, kao što smo ranije već definisali, vektorski prostor svih realnih matrica dimenzija $m \times n$. Za matricu $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ važi: ako je preslikavanje $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ definisano sa $f(x) = Ax$, $x \in \mathbb{R}^n$, tada je $rang(A) = dim(\mathcal{R}(A))$.

Generalizovani inverz $A^{\dagger}$ (poznat kao Mur-Penrozov inverz) matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ je jedinstvena matrica koja je rešenje sledećeg sistema (jednačine koje u nastavku navodimo nazivaju se Penrozove jednačine):

$$AX = (AX)^* \tag{3.1}$$

$$XA = (XA)^* \tag{3.2}$$

$$AXA = A \tag{3.3}$$

$$XAX = X \tag{3.4}$$

U svom radu [18] iz 1955. godine Penroz je pokazao da za svaku matricu $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ postoji jedinstvena matrica $A^{\dagger}$ koja zadovoljava prethodne četiri jednačine.

Neka je $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ proizvoljno i $S \subseteq \{1, 2, 3, 4\}$, tada sa A^S označavamo matrice koje zadovoljavaju Penrozove jednačine koje nose oznake $(3.i)$, za $i \in S$ i njih nazivamo S-inverzima za A.

Primeri:

1. Ukoliko je $S = \{3\}$, tada razmatramo $\{3\}$-inverze matrice A i označavamo ih sa $A^{\{3\}}$. Preciznije, sa $A^{\{3\}}$ označavamo matrice koje zadovoljavaju Penrozovu jednačinu (3.3), to jest važi:

$$AA^{\{3\}}A = A.$$

2. Za $S = \{2, 4\}$ razmatramo $\{2, 4\}$-inverze matrice A, koje označavamo sa $A^{\{2,4\}}$ i za njih važi:

$$A^{\{2,4\}}A = (A^{\{2,4\}}A)^*,$$
$$A^{\{2,4\}}AA^{\{2,4\}} = A^{\{2,4\}}.$$

3. Za $S = \{1, 2, 3, 4\}$ razmatramo $\{1, 2, 3, 4\}$-inverze matrice A, odnosno $A^{\{1,2,3,4\}}$, a to je upravo jedinstveni Mur-Penrozov inverz $A^\dagger$.

3.2 Osobine $\{3\}$ i $\{4\}$-inverza

Za rezultate koji slede u nastavku od značaja će nam biti Gausova teorema o eliminaciji i teorema o faktorizacijama punog ranga koje nećemo dokazivati (a čije dokaze možemo naći u [21] i [19]).

Teorema 3.2.1 (Gausova eliminacija)**.** Za svaku matricu $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ takvu da $rang(A) = r$, postoje regularne matrice P i Q tako da važi:

$$PAQ = \begin{bmatrix} E_r & K \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

za neku matricu $K \in M_{m-r,n-r}(\mathbb{C})$.

Do matrice $\begin{bmatrix} E_r & K \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$ iz prethodne teoreme možemo doći primenom elementarnih operacija nad vrstama matrice A.

Teorema 3.2.2 (Faktorizacija punog ranga)**.** Ako je $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ takva da $r = rang(A) > 0$, tada postoje matrice $F \in M_{m,r}(\mathbb{C})$ i $G \in M_{r,n}(\mathbb{C})$ takve da $rang(F) = rang(G) = r$ i za koje važi $A = FG$.

Stav 3.2.1. Neka je $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ i $rang(A) = r$ i neka su $P \in M_m(\mathbb{C})$ i $Q \in M_n(\mathbb{C})$ punog ranga (odnosno regularne), takve da je:

$$A = P^{-1} \begin{bmatrix} E_r & K \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} Q^{-1}.$$

Tada je $\{3\}$-inverz matrice A oblika:

$$X = Q \begin{bmatrix} E_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & L \end{bmatrix} P,$$

gde je $L \in M_{n-r,m-r}(\mathbb{C})$ proizvoljna.

Dokaz. Direktnom proverom dobijamo da važi:

$$\begin{aligned} AXA &= P^{-1} \begin{bmatrix} E_r & K \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} Q^{-1} \cdot Q \begin{bmatrix} E_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & L \end{bmatrix} P \cdot P^{-1} \begin{bmatrix} E_r & K \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} Q^{-1} = \\ &= P^{-1} \begin{bmatrix} E_r & K \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} Q^{-1} = A. \end{aligned}$$

□

Kako su P i Q regularne matrice, to je $rang(X) = rang\left(\begin{bmatrix} E_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & L \end{bmatrix}\right) = r + rang(L)$, te odatle primećujemo da za matricu A možemo konstruisati $A^{\{3\}}$ bilo kog ranga između r i $\min\{m, n\}$.

Stav 3.2.2. Neka je $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ takva da $rang(A) = r$ i neka je $\lambda \in \mathbb{C}$ proizvoljno. Neka je $A^{\{3\}}$ proizvoljan $\{3\}$-inverz matrice A, tada važi:

1. $(A^{\{3\}})^*$ je $\{3\}$-inverz matrice A^*;

2. Ako je A regularna matrica, tada je A^{-1} jedinstveni $\{3\}$-inverz matrice A;

3. $\lambda^\dagger A^{\{3\}}$ je $\{3\}$-inverz matrice λA, pri čemu je $\lambda^\dagger = \frac{1}{\lambda}$ ukoliko $\lambda \neq 0$, odnosno $\lambda^\dagger = 0$, ako je $\lambda = 0$;

4. $rang(A^{\{3\}}) \geq rang(A)$;

5. Ako su S i T regularne matrice, tada je $T^{-1}A^{\{3\}}S^{-1}$ $\{3\}$-inverz matrice SAT.

Dokaz. 1. $A^*(A^{\{3\}})^*A^* = (AA^{\{3\}}A)^* = A^*$.

2. Kako važi $AA^{-1}A = EA = A$, to je A^{-1} zaista jedan $\{3\}$-inverz matrice A. Neka je X proizvoljan $\{3\}$-inverz matrice A, tada važi $AXA = A$, pa množeći ovu jednakost i sa leve i sa desne strane sa A^{-1} dobijamo $X = A^{-1}$, čime je pokazana jedinstvenost $\{3\}$-inverza.

3. Slučaj $\lambda = 0$ je trivijalan. Neka je $\lambda \neq 0$, tada važi:
$$(\lambda A) \cdot \left(\frac{1}{\lambda} A^{\{3\}}\right) \cdot (\lambda A) = \lambda \frac{1}{\lambda} \lambda (AA^{\{3\}}A) = \lambda A.$$

4. Važi $rang(A^{\{3\}}) \geq rang(AA^{\{3\}}A)$, jer ukoliko A nije punog ranga vrsta ili kolona, onda množenjem $A^{\{3\}}$ sa A i sa desne i sa leve strane dobijamo matricu manjeg ranga. S druge strane, kako je $AA^{\{3\}}A = A$, to važi $rang(AA^{\{3\}}A) = rang(A)$, pa dobijemo $rang(A^{\{3\}}) \geq rang(A)$.

5. Ovo pokazujemo direktnom proverom.

□

Primetimo da za proizvoljan $\{3\}$-inverz matrice A, iz $AA^{\{3\}}A = A$ sledi da važe jednakosti: $AA^{\{3\}}AA^{\{3\}} = AA^{\{3\}}$ i $A^{\{3\}}AA^{\{3\}}A = A^{\{3\}}A$, odnosno važi da su $AA^{\{3\}}$ i $A^{\{3\}}A$ idempotentne matrice.

Stav 3.2.3. Važe sledeće jednakosti:
$$rang(AA^{\{3\}}) = rang(A^{\{3\}}A) = rang(A),$$
$$\mathcal{R}(AA^{\{3\}}) = \mathcal{R}(A),$$
$$\mathcal{N}(A^{\{3\}}A) = \mathcal{N}(A).$$

Dokaz. Kako je $rang(A) \geq rang(A^{\{3\}}A) \geq rang(AA^{\{3\}}A) = rang(A)$, otuda sledi $rang(A^{\{3\}}A) = rang(A)$, a slično se pokazuje da je i $rang(AA^{\{3\}}) = rang(A)$. Analogno pokazujemo i jednakosti sa slikama i jezgrima. Važi da je $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(AA^{\{3\}}A) \subseteq \mathcal{R}(AA^{\{3\}}) \subseteq \mathcal{R}(A)$, i odatle sledi $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(AA^{\{3\}})$. Slično, $\mathcal{N}(A) \subseteq \mathcal{N}(A^{\{3\}}A) \subseteq \mathcal{N}(AA^{\{3\}}A) = \mathcal{N}(A)$, što implicira da važi $\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(A^{\{3\}}A)$. □

Matrica A je punog ranga vrsta, odnosno punog ranga kolona, ako i samo ako $\{3\}$-inverzi matrice A predstavljaju njene leve, odnosno desne inverze. O tome govori sledeći stav.

Stav 3.2.4. Neka je $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ takva da $rang(A) = r$. Tada važi:

(a) $A^{\{3\}}A = E_n$ ako i samo ako je $r = n$;

(b) $AA^{\{3\}} = E_m$ ako i samo ako je $r = m$.

Dokaz. Pokazujemo samo deo (a), dok se dokaz dela (b) izvodi analogno. Neka je $A^{\{3\}}A = E_n$. Iz prethodnog stava znamo da važi $rang(A) = rang(A^{\{3\}}A) = rang(E_n) = n$, odnosno sledi $r = n$.
Neka je sada $rang(A) = n$, tada je $rang(A^{\{3\}}A) = rang(A) = n$ i kako je $A^{\{3\}}A$ matrica dimenzije $n \times n$, to zaključujemo da je $A^{\{3\}}A$ regularna, odnosno invertibilna. Koristimo činjenicu da je $A^{\{3\}}A$ idempotentna, to jest da važi $(A^{\{3\}}A)^2 = A^{\{3\}}A$ i množimo ovu jednakost sa desne strane sa $(A^{\{3\}}A)^{-1}$ i dobijamo $A^{\{3\}}A = E_n$. $\square$

Pomoću $\{3\}$-inverza matrice A, možemo konstruisati $\{3,4\}$-inverz matrice A postupkom koji je opisan u sledećem stavu.

Stav 3.2.5. Neka su Y, Z $\{3\}$-inverzi matrice A, tada je $X = YAZ$ $\{3,4\}$-inverz matrice A.

Dokaz. Direktnom proverom dobijamo:

$$AXA = (AYA)ZA = AZA = A,$$
$$XAX = Y(AZA)YAZ = Y(AYA)Z = YAZ = X.$$

$\square$

Kao što je već rečeno $\{3\}$ i $\{4\}$-inverzi matrice A su sve one matrice X koje zadovoljavaju sledeće jednačine, redom:

$$AXA = A$$
$$XAX = X.$$

Primetimo da su prethodne dve jednačine simetrične po X i A, pa je zato matrica X $\{3\}$-inverz matrice A ako i samo ako je matrica A $\{4\}$-inverz matrice X. Takođe, primećujemo da je matrica X $\{3,4\}$-inverz matrice A ako i samo ako je matrica A $\{3,4\}$-inverz matrice X i zato tada kažemo da su matrice A i X $\{3,4\}$-inverzi jedna drugoj. Iz Stava 3.2.2 deo 4. zaključujemo, zbog navedene simetrije, da za $\{3,4\}$-inverze važi da imaju jednake rangove. Takođe zbog navedene simetrije važi $rang(A^{\{4\}}) \leq rang(A)$, jer je matrica A $\{3\}$-inverz matrice $A^{\{4\}}$.

U nastavku sledi pomoćno tvrđenje iz linearne algebre, koje će nam biti od značaja.

Lema 3.2.1. Za proizvoljnu matricu $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ važi:

$$dim\mathcal{R}(A) + dim\mathcal{N}(A) = n.$$

Lema 3.2.2. Za matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ i $B \in M_{n,p}(\mathbb{C})$ važi:

(a) $\mathcal{R}(AB) = \mathcal{R}(A)$ ako i samo ako je $rang(AB) = rang(A)$. U tom slučaju, postoji matrica $C \in M_{p,n}$, takva da je $ABC = A$;

(b) $\mathcal{N}(AB) = \mathcal{N}(B)$ ako i samo ako je $rang(AB) = rang(B)$. U tom slučaju, postoji matrica $C \in M_{n,m}$, takva da je $CAB = B$.

Dokaz. (a) Kako za proizvoljnu matricu X važi $dim\mathcal{R}(X) = rang(X)$, iz $\mathcal{R}(AB) = \mathcal{R}(A)$ sledi $rang(AB) = rang(A)$. Što se drugog smera tiče, kako uvek važi $\mathcal{R}(AB) \subseteq \mathcal{R}(A)$, to iz jednakosti $rang(AB) = rang(A)$, odnosno $dim\mathcal{R}(AB) = dim\mathcal{R}(A)$ i shodno činjenici da su $\mathcal{R}(AB)$ i $\mathcal{R}(A)$ vektorski potprostori, odatle sledi $\mathcal{R}(AB) = \mathcal{R}(A)$.

Za pokazivanje drugog dela pod (a) koristimo činjenicu da je potprostor $\mathcal{R}(AB)$ razapet nad vektorima koji predstavljaju kolone matrice AB, dok je potprostor $\mathcal{R}(A)$ razapet nad vektorima koji predstavljaju kolone matrica A (ovo jednostavno sledi iz definicije slike linearnog preslikavanja). Kako je $\mathcal{R}(AB) = \mathcal{R}(A)$, to linearnom kombinacijom kolona matrice AB možemo dobiti svaku kolonu matrice A. Zato postoji matrica C takva da je $ABC = A$, pri čemu kolone matrice C čine koeficijente u pomenutim linearnim kombinacijama.

(b) Neka je $\mathcal{N}(AB) = \mathcal{N}(B)$. Korišćenjem Leme 4.1 zaključujemo da važi:

$$rang(AB) + dim\mathcal{N}(AB) = p = rang(B) + dim\mathcal{N}(B), \tag{3.5}$$

pa je $rang(AB) = rang(B)$. Neka je sada $rang(AB) = rang(B)$, uopšteno važi $\mathcal{N}(B) \subseteq \mathcal{N}(AB)$, pa korišćenjem jednakosti (3.5) sledi i $dim\mathcal{N}(B) = dim\mathcal{N}(AB)$. Kako je jezgro linearnog preslikavanja vektorski potprostor, iz prethodnog sledi $\mathcal{N}(B) = \mathcal{N}(AB)$.

Za pokazivanje drugog dela pod (b), koristimo deo (a). Naime, iz $rang(AB) = rang(B)$, sledi $rang(B^*A^*) = rang(B^*)$, pa postoji matrica C^* takva da je $B^*A^*C^* = B^*$, odnosno $CAB = B$.

□

Stav 3.2.6. Konjunkcija bilo koja dva od navedena tri iskaza implicira treći:

1. X je $\{3\}$-inverz matrice A.
2. X je $\{4\}$-inverz matrice A.
3. Matrice A i X imaju isti rang.

Dokaz. Ranije je već pokazano da iz prva dva iskaza sledi treći.
Pretpostavimo da važe prvi i treći iskaz. Iz Stava 3.2.3 sledi da važi $rang(XA) = rang(A)$, pa, shodno početnoj pretpostavci važi i $rang(XA) = rang(X)$. Iz Leme 3.2.2 potom sledi da postoji matrica Y takva da $XAY = X$, te je onda:

$$XAX = XA(XAY) = X(AXA)Y = XAY = X,$$

odnoso, X je $\{4\}$-inverz matrice A.
Pretpostavimo sada da važe drugi i treći iskaz. U dokazu ovog dela koristimo prethodno. Naime, X je $\{4\}$-inverz matrice A ako i samo ako je A $\{3\}$-inverz matrice X i kako važi $rang(A) = rang(X)$, to po već dokazanom, implicira da je X $\{3\}$-inverz matrice A. $\square$

Posledica 3.2.1. Neka je $A^{\{3,4\}}$ proizvoljan $\{3, 4\}$-inverz matrice A, tada važi:

1. matrica $AA^{\{3,4\}}$ je projektor na $\mathcal{R}(A)$, paralelno sa $\mathcal{N}(A^{\{3,4\}})$;
2. matrica $A^{\{3,4\}}A$ je projektor na $\mathcal{R}(A^{\{3,4\}})$ paralelno sa $\mathcal{N}(A)$.

Dokaz. Pokazujemo samo prvi deo tvrđenja, dok se drugi deo pokazuje analogno. Kako je $A^{\{3,4\}}$ specijalno i $\{3\}$-inverz matrice A, to je $AA^{\{3,4\}}$ idempotentna, što je pokazano neposredno pre Stava 3.2.3, odakle sledi da je $AA^{\{3,4\}}$ projektor. Iz Stava 3.2.3 sledi da je $\mathcal{R}(AA^{\{3,4\}}) = \mathcal{R}(A)$, pa odavde zaključujemo da je $AA^{\{3,4\}}$ projektor na $\mathcal{R}(A)$. Kako je A jedan $\{3\}$-inverz matrice $A^{\{3,4\}}$, odatle iz istog stava sledi da je $\mathcal{N}(AA^{\{3,4\}}) = \mathcal{N}(A^{\{3,4\}})$, čime je pokazano da je matrica $AA^{\{3,4\}}$ projektor paralelno sa $\mathcal{N}(A^{\{3,4\}})$. $\square$

Iz prethodne posledice vidimo da za svaku matricu $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ važi:

$$\mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{N}(A^{\{3,4\}}) = \mathbb{C}^m,$$
$$\mathcal{R}(A^{\{3,4\}}) \oplus \mathcal{N}(A) = \mathbb{C}^n.$$

Dakle, slika matrice A i jezgro nekog $\{3, 4\}$-inverza te matrice su komplementarni potprostori, a isto važi i za jezgro matrice A i sliku nekog $\{3, 4\}$-inverza matrice A.

Razmotrimo bliže matrice koje su $\{1,3\}$ i $\{2,3\}$-inverzi matrice A, imajući u vidu sledeće:

- X je $\{1,4\}$-inverz matrice A ako i samo ako je matrica A $\{2,3\}$-inverz matrice X,
- X je $\{2,4\}$-inverz matrice A ako i samo ako je A $\{1,3\}$-inverz matrice X.

Ukoliko je X $\{1,3\}$-inverz matrice A, tada je AX ermitska matrica. Takođe, važi da je X specijalno i $\{3\}$-inverz matrice A, pa je AX idempotentna (pokazano neposredno pre Stava 3.2.3) i time smo pokazali da je AX ortogonalni projektor. Iz Stava 3.2.3 zaključujemo da je AX ortogonalni projektor na $\mathcal{R}(A)$. Shodno činjenici da je ortogonalni projektor na $\mathcal{R}(A)$ jednoznačno određen, sledi da, ma koji god $\{1,3\}$-inverz X matrice A izabrali, proizvod AX će uvek biti isti i jednak ortogonalnom projektoru na $\mathcal{R}(A)$.

Do sličnog zaključka možemo doći i ako posmatramo $\{2,3\}$-inverze matrice A. Naime, za poizvoljno X koje je $\{2,3\}$-inverz matrice A, važi da je XA ortogonalni projektor sa jezgrom $\mathcal{N}(A)$, te će matrica XA biti konstantna ma koji $\{2,3\}$-inverz X matrice A izabrali.

Formulišemo ove zaključke u sledećem stavu.

Stav 3.2.7. Neka su $A^{\{1,3\}}$ i $A^{\{2,3\}}$ proizvoljni $\{1,3\}$ i $\{2,3\}$-inverzi matrice A. Tada važi:

(a) X je $\{1,3\}$-inverz matrice A ako i samo ako je $AX = AA^{\{1,3\}}$,

(b) X je $\{2,3\}$-inverz matrice A ako i samo ako je $XA = A^{\{2,3\}}A$.

Dokaz. Dokazujemo samo deo (a), dok dokaz dela (b) sledi analogno. Ukoliko je X jedan $\{1,3\}$-inverz matrice A, već smo ustanovili da je AX jednako ortogonalnom projektoru na $\mathcal{R}(A)$, te je AX konstantno za ma koji $\{1,3\}$-inverz X matrice A. Pretpostavimo sada da je $AX = AA^{\{1,3\}}$. Važi da je $(AX)^* = (AA^{\{1,3\}})^* = AA^{\{1,3\}} = AX$, pa je X $\{1\}$-inverz matrice A. Takođe, važi $AXA = AA^{\{1,3\}}A = A$, pa je X i $\{3\}$-inverz matrice A. Ovim smo pokazali da je X $\{1,3\}$-inverz matrice A. $\square$

3.3 Konstrukcija $\{1, 3, 4\}$ i $\{2, 3, 4\}$-inverza

Koristeći $\{3\}$-inverz matrica A^*A i AA^* možemo konstrusati $\{1, 3, 4\}$ i $\{2, 3, 4\}$-inverz matrice A. Pre nego što pokažemo ovo, pokazujemo sledeću lemu koja nam je neophodna.

Lema 3.3.1. Za svaku matricu $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ važi $\mathcal{N}(A^*A) = \mathcal{N}(A)$.

Dokaz. Neka je $x \in \mathcal{N}(A)$ proizvoljno, tada je $Ax = 0$, odnosno važi i $(A^*A)x = A^*(Ax) = A^*(0) = 0$, čime smo pokazali $\mathcal{N}(A) \subseteq \mathcal{N}(A^*A)$.
Preostaje da pokažemo i obrnutu inkluziju. Neka je $x \in \mathcal{N}(A^*A)$, tada je $A^*Ax = 0$, odnosno $Ax \in \mathcal{N}(A^*)$. Jasno je $Ax \in \mathcal{R}(A)$, pa je iz prethodnog

$$Ax \in \mathcal{N}(A^*) \cap \mathcal{R}(A).$$

Pokažimo prvo da važi $\mathcal{N}(A^*) = (\mathcal{R}(A))^\perp$:

$$\begin{aligned}(\mathcal{R}(A))^\perp &= \{b \in \mathbb{C}^m : (\forall a \in \mathbb{C}^n)\langle Aa, b\rangle = 0\}\\ &= \{b \in \mathbb{C}^m : (\forall a \in \mathbb{C}^n)\langle a, A^*b\rangle = 0\}\\ &= \{b \in \mathbb{C}^m : A^*b = 0\}\\ &= \mathcal{N}(A^*).\end{aligned}$$

Iz $\mathcal{N}(A^*) = (\mathcal{R}(A))^\perp$ zatim sledi da je $\mathcal{N}(A^*) \cap \mathcal{R}(A) = \{0\}$, pa važi da je $Ax = 0$, čime je pokazana i obrnuta inkluzija. Dakle, važi $\mathcal{N}(A^*A) = \mathcal{N}(A)$. $\square$

Teorema 3.3.1. Za proizvoljnu matricu A važi:

1. Matrica $Y = (A^*A)^{\{3\}}A^*$ je $\{1, 3, 4\}$-inverz matrice A;

2. Matrica $Z = A^*(AA^*)^{\{3\}}$ je $\{2, 3, 4\}$-inverz matrice A.

Dokaz. Pokazujemo samo prvi deo teoreme, dok se drugi pokazuje analogno. Iz Leme 3.3.1 znamo da je $\mathcal{N}(A^*A) = \mathcal{N}(A)$, dok iz Leme 3.2.2 sledi da postoji matrica U takva da je $A = UA^*A$, te stoga važi:

$$AYA = UA^*A((A^*A)^{\{3\}})A^*)A = U(A^*A(A^*A)^{\{3\}}A^*A) = UA^*A = A,$$

pa je Y jedan $\{3\}$-inverz matrice A. Po Stavu 3.2.6 dovoljno je pokazati da je $rang(Y) = rang(A)$, da bi Y bio jedan $\{3, 4\}$-inverz matrice A. Važi $rang(Y) = rang((A^*A)^{\{3\}}A^*) \leq rang(A^*) = rang(A)$. S druge strane, pokazali smo već da je Y

$\{3\}$-inverz matrice A, pa iz Stava 3.2.2 deo 4. sledi $rang(Y) \geq rang(A)$. Ovim smo pokazali da je $rang(Y) = rang(A)$, pa sledi i da je Y jedan $\{3,4\}$-inverz matrice A. Preostaje još da pokažemo da je Y i $\{1\}$-inverz matrice A. Kako je $A = UA^*A$, to je $A^* = A^*AU^*$, pa važi:

$$AY = UA^*A(A^*A)^{\{3\}}A^* = UA^*A(A^*A)^{\{3\}}A^*AU^* = UA^*AU^*.$$

Iz prethodnog je $(AY)^* = (UA^*AU^*)^* = UA^*AU^* = AY$, te smo ovim konačno pokazali da je Y jedan $\{1,3,4\}$-inverz matrice A. □

Pokazali smo da za proizvoljnu matricu A postoje $\{1,3,4\}$ i $\{2,3,4\}$-inverzi, te stoga postoje i $\{1,3\}$, $\{1,4\}$, $\{2,3\}$ i $\{2,4\}$-inverzi.

Pojačavamo uslove iz Posledice 3.2.1 (jer su takvi uslovi potrebni za rezultate u nastavku), odnosno umesto $\{3,4\}$-inverza posmatramo $\{1,3,4\}$ i $\{2,3,4\}$-inverze i imajući u vidu zapažanja koja su usledila nakon Posledice 3.2.1, formulišemo posledicu koja sledi u nastavku.

Posledica 3.3.1. Neka je $A^{\{1,3,4\}}$ proizvoljan $\{1,3,4\}$-inverz matrice A i neka je $A^{\{2,3,4\}}$ proizvoljan $\{2,3,4\}$-inverz matrice A, tada važi:

1. matrica $AA^{\{1,3,4\}}$ je ortogonalni projektor na $\mathcal{R}(A)$, i tada važi:

$$\mathcal{N}(A^{\{1,3,4\}}) = (\mathcal{R}(A))^{\perp};$$

2. matrica $A^{\{2,3,4\}}A$ je ortogonalni projektor na $\mathcal{R}(A^{\{2,3,4\}})$ i tada važi:

$$\mathcal{N}(A) = (\mathcal{R}(A^{\{2,3,4\}}))^{\perp}.$$

Dokaz. Pokazujemo samo prvi deo tvrđenja, dok se drugi deo pokazuje analogno. Kako je $A^{\{1,3,4\}}$ dodatno i $\{3,4\}$-inverz matrice A, to iz Posledice 3.2.1 sledi da je $AA^{\{1,3,4\}}$ projektor na $\mathcal{R}(A)$, paralelno sa $\mathcal{N}(A^{\{1,3,4\}})$. Takođe, važi da je matrica $AA^{\{1,3,4\}}$ ermitska, jer je to karakteristika $\{1\}$-inverza, i ovim je pokazano da je $AA^{\{1,3,4\}}$ ortogonalni projektor, iz čega sledi i da je $\mathcal{N}(A^{\{1,3,4\}}) = (\mathcal{R}(A))^{\perp}$. □

Iz prethodne posledice vidimo da za svaku matricu $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ važi:

$$\mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{N}(A^{\{1,3,4\}}) = \mathbb{C}^m,$$
$$\mathcal{R}(A^{\{2,3,4\}}) \oplus \mathcal{N}(A) = \mathbb{C}^n,$$

ali i više od toga, slika matrice A i jezgro nekog $\{1,3,4\}$-inverza te matrice su komplementarni potprostori koji su međusobno ortogonalni, a isto važi i za jezgro matrice A i sliku nekog $\{2,3,4\}$-inverza.

Motivisani Posledicom 3.3.1 razmatrajmo sledeći problem. Neka su potprostori S i T takvi da je $\mathcal{R}(A) \oplus S = \mathbb{C}^m$ i $\mathcal{N}(A) \oplus T = \mathbb{C}^n$, za neku matricu $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$. Zanima nas da li postoji $\{3,4\}$-inverz matrice A, takav da je $\mathcal{R}(X) = T$ i $\mathcal{N}(X) = S$. Odgovor na to pitanje je potvrdan, odnosno takav inverz uvek postoji i jedinstven je, što pokazujemo teoremom koja sledi u nastavku. Šta više, ispostaviće se da za takav $\{3,4\}$-inverz matrice A važi i da je $\{1,2,3,4\}$-inverz matrice A i to će zapravo biti jedinstveni Mur-Penrozov inverz $A^\dagger$, što ćemo kasnije i dokazati.

3.4 Konstrukcija Mur-Penrozovog inverza

Teorema 3.4.1. Neka je $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$. Tada postoji jedinstveni $\{1,2,3,4\}$-inverz X matrice A takav da je $\mathcal{R}(X) = \mathcal{N}(A)^\perp$ i $\mathcal{N}(X) = \mathcal{R}(A)^\perp$.

Dokaz. Prvo konstruišemo $\{1,2,3,4\}$-inverz matrice A sa navedenom osobinom, a potom pokazujemo da je on jedinstven. Neka je $P \in M_m(\mathbb{C})$ ortogonalni projektor na $\mathcal{R}(A)$. Kako je $Ax \in \mathcal{R}(A)$ za svako $x \in \mathbb{C}^n$ to važi da je $P(Ax) = Ax$ za svako $x \in \mathbb{C}^n$, odnosno $PA = A$. Neka je $Q \in M_n(\mathbb{C})$ ortogonalni projektor na $\mathcal{N}(A)^\perp$. Za matrice A i Q važi $AQ = A$, što u nastavku pokazujemo. Pokazaćemo, pre svega, da je $E - Q$ ortogonalni projektor na $\mathcal{N}(A)$:

- Važi da je $E - Q$ ermitska matrica, odnosno $(E - Q)^* = E^* - Q^* = E - Q$.
- Kako je $(E - Q)^2 = E^2 - 2Q + Q^2 = E - 2Q + Q = E - Q$, to je $E - Q$ idempotentna matrica.
- Neka je $x \in \mathcal{N}(A)$, tada $(E - Q)x = Ex - Qx = x - 0 = x \in \mathcal{N}(A)$, pri čemu koristimo činjenicu da je Q ortogonalni projektor na $\mathcal{N}(A)^\perp$ (odnosno projektor paralelno sa $\mathcal{N}(A)$). Ovim je pokazano da je $E - Q$ projektor na $\mathcal{N}(A)$.

Sada zaključujemo da za svako $x \in \mathbb{C}^n$ važi $(E - Q)x \in \mathcal{N}(A)$, odakle sledi $A(E - Q) = 0$, odnosno $A = AQ$.
Neka je $A^{\{2,3,4\}}$ proizvoljan $\{2,3,4\}$-inverz matrice A. Pokazali smo Teoremom 3.3.1 da takav inverz postoji za svaku matricu A. Iz Posledice 3.2.1 znamo da je matrica

$AA^{\{2,3,4\}}$ projektor na $\mathcal{R}(A)$, pa važi $AA^{\{2,3,4\}}P = P$. Takođe na osnovu Posledice 3.2.1, matrica $A^{\{2,3,4\}}A$ je projektor sa jezgrom $\mathcal{N}(A)$, pa je $E - A^{\{2,3,4\}}A$ projektor sa slikom $\mathcal{N}(A)$, što pokazujemo slično kao malo pre za $E - Q$, te je $Q(E - A^{\{2,3,4\}}A) = 0$, odnoso $Q = QA^{\{2,3,4\}}A$. Neka je $X = QA^{\{2,3,4\}}P$, pokazaćemo da je X upravo tražena matrica. Pokazujemo prvo da je X $\{1, 2, 3, 4\}$-inverz matrice A:

1. Iz jednakosti $AXA = (AQ)A^{\{2,3,4\}}(PA) = AA^{\{2,3,4\}}A = A$ sledi da je X $\{3\}$-inverz matrice A.

2. Iz jednakosti

$$\begin{aligned} XAX &= QA^{\{2,3,4\}}(PA)QA^{\{2,3,4\}}P = QA^{\{2,3,4\}}(AQ)A^{\{2,3,4\}}P = \\ &= QA^{\{2,3,4\}}(AA^{\{2,3,4\}}P) = QA^{\{2,3,4\}}P = X \end{aligned}$$

   sledi da je X $\{4\}$-inverz matrice A.

3. Iz jednakosti $(AX)^* = ((AQ)A^{\{2,3,4\}}P)^* = (AA^{\{2,3,4\}}P)^* = P^* = P$, i činjenice da je P ermitska matrica, sledi da je i $(AX)^*$ ermitska matrica, odnosno $(AX)^* = (AX)$. Ovim smo pokazali da je X jedan $\{1\}$-inverz matrice A.

4. Iz jednakosti

$$\begin{aligned} (XA)^* &= A^*X^* = A^*P^*(A^{\{2,3,4\}})^*Q^* = (PA)^*(A^{\{2,3,4\}})^*Q^* = \\ &= A^*(A^{\{2,3,4\}})^*Q^* = (A^{\{2,3,4\}}A)^*Q = A^{\{2,3,4\}}(AQ) = A^{\{2,3,4\}}A, \end{aligned}$$

   i iz činjenice da je matrica $A^{\{2,3,4\}}A$ ermitska sledi da je X jedan $\{2\}$-inverz matrice A.

Ovim smo pokazali da je X $\{1, 2, 3, 4\}$-inverz matrice A.

Iz činjenice da je X $\{1, 2, 3, 4\}$-inverz matrice A, sledi da je X specijalno i $\{3, 4\}$-inverz matrice A, a kao što smo ranije prokomentarisali, X je $\{3, 4\}$-inverz matrice A ako i samo ako je matrica A $\{3, 4\}$-inverz matrice X, te odatle i primenom Stava 3.2.3 zaključujemo da važi $\mathcal{R}(X) = \mathcal{R}(XA)$ i $\mathcal{N}(X) = \mathcal{N}(AX)$. Imajući u vidu još da važi $XA = QA^{\{2,3,4\}}PA = QA^{\{2,3,4\}}A = Q$ i $AX = AQA^{\{2,3,4\}}P = AA^{\{2,3,4\}}P = P$, sledi da je $\mathcal{R}(X) = \mathcal{R}(Q) = \mathcal{N}(A)^{\perp}$ i $\mathcal{N}(X) = \mathcal{N}(P) = \mathcal{R}(A)^{\perp}$.
Ostaje još da pokažemo da je X jedinstveni $\{1, 2, 3, 4\}$-inverz matrice A sa navedenom osobinom. Pretpostavimo da je Y $\{1, 2, 3, 4\}$-inverz matrice A za koji važi $\mathcal{R}(Y) = \mathcal{N}(A)^{\perp}$ i $\mathcal{N}(Y) = \mathcal{R}(A)^{\perp}$. Iz Posledice 3.2.1 sledi da je AY projektor na $\mathcal{R}(A)$, paralelno sa $\mathcal{N}(Y) = \mathcal{R}(A)^{\perp}$, a tako smo definisali projektor P, pa je

$AY = P$. Takođe, iz Posledice 3.2.1 sledi da je YA projektor na $\mathcal{R}(Y) = \mathcal{N}(A)^{\perp}$, paralelno sa $\mathcal{N}(A)$, a tako smo definisali projektor Q, pa je $YA = Q$. Na osnovu prethodnog važi:

$$X = XAX = XP = XAY = QY = YAY = Y,$$

čime smo dokazali i jedinstvenost ovakvog $\{1, 2, 3, 4\}$-inverza matrice A. $\square$

U nastavku prikazujemo nekoliko načina za konstrukciju Mur-Penrozovog inverza.

Teorema 3.4.2. Ako su $A^{\{1,3\}}$ i $A^{\{2,3\}}$ proizvoljni $\{1, 3\}$ i $\{2, 3\}$-inverzi matrice A, tada je $A^{\{2,3\}}AA^{\{1,3\}}$ jedan $\{1, 2, 3, 4\}$-inverz matrice A. Sem toga, važi da je to jedini $\{1, 2, 3, 4\}$-inverz matrice A.

Dokaz. Neka je $X = A^{\{2,3\}}AA^{\{1,3\}}$. Iz Stava 3.2.5 direktno sledi da je X $\{3, 4\}$-inverz matrice A. Pored toga iz $AX = (AA^{\{2,3\}}A)A^{\{1,3\}} = AA^{\{1,3\}}$, sledi da je $(AX)^* = (AA^{\{1,3\}})^* = AA^{\{1,3\}} = AX$, odnosno važi da je X jedan $\{1\}$-inverz matrice A. Slično iz $XA = A^{\{2,3\}}(AA^{\{1,3\}}A) = A^{\{2,3\}}A$ sledi da je $(XA)^* = (A^{\{2,3\}}A)^* = A^{\{2,3\}}A = XA$, odakle vidimo da je X i $\{2\}$-inverz za A.
Dakle, pokazali smo da je X $\{1, 2, 3, 4\}$-inverz matrice A, pokažimo još i da je jedinstven. Neka su X i Y $\{1, 2, 3, 4\}$-inverzi matrice A, tada važi:

$$\begin{aligned} X = XAX = XX^*A^* = XX^*(A^*Y^*A^*) = (XAX)(AY)^* = XAY = \\ = A^*X^*YAY = (A^*X^*A^*)Y^*Y = A^*Y^*Y = YAY = Y, \end{aligned}$$

čime smo pokazali i jedinstvenost Mur-Penrozovog inverza. $\square$

Napomena. Ukoliko je A nula matrica, tada je jednostavno uočiti da je njen jedinstveni Mur-Penorz inverz $A^{\{1,2,3,4\}}$ takođe nula matrica.

U nastavku prikazujemo konstrukciju koja će važiti za nenula matrice A. Takođe korisitmo teoremu 3.2.2, tj. teoremu o faktorizaciji punog ranga.

Teorema 3.4.3. Neka je A nenula matrica i neka je $A = FG$ faktorizacija punog ranga matrice A. Tada je F^*AG^* regularna matrica i važi:

$$A^{\dagger} = G^*(F^*AG^*)^{-1}F^*.$$

Dokaz. Kako je $F^*AG^* = (F^*F)(GG^*)$ i kako su F^*F, GG^* matrice dimenzije $r\times r$, za koje važi $rang(F^*F) = rang(GG^*) = r$, tj. regularne su, sledi da je F^*AG^* regularna matrica i važi $(F^*AG^*)^{-1} = (GG^*)^{-1}(F^*F)^{-1}$. Neka je $X = G^*(F^*AG^*)^{-1}F^*$, tada zamenom A sa FG dobijamo $X = G^*(GG^*)^{-1}(F^*F)^{-1}F^*$. Kako su F^*F i GG^* ermitske matrice (jer je $(F^*F)^* = F^*(F^*)^* = F^*F$ i $(GG^*)^* = (G^*)^*G^* = GG^*$), to će i njihovi inverzi biti ermitske matrice (jer $((F^*F)^{-1})^* = ((F^*F)^*)^{-1} = (F^*F)^{-1}$ i $((GG^*)^{-1})^* = ((GG^*)^*)^{-1} = (GG^*)^{-1}$). Uzimajući ovo u obzir, dobijamo sledeće:

- Važi da je $AXA = F(GG^*)(GG^*)^{-1}(F^*F)^{-1}(F^*F)G = FG = A$, pa odatle sledi da je X $\{3\}$-inverz matrice A,

- Iz $XAX = G^*(GG^*)^{-1}(F^*F)^{-1}(F^*F)(GG^*)(GG^*)^{-1}(F^*F)^{-1}F^* = X$, dobijamo da je X $\{4\}$-inverz matrice A.

- Kako je
$$\begin{aligned}(AX)^* &= (F(GG^*)(GG^*)^{-1}(F^*F)^{-1}F^*)^* = F(F^*F)^{-1}(GG^*)^{-1}GG^*F^* = \\ &= F(F^*F)^{-1}F^* = FGG^*(GG^*)^{-1}(F^*F)^{-1}F^* = AX,\end{aligned}$$
to sledi da je X $\{1\}$-inverz matrice A.

- Kako je
$$\begin{aligned}(XA)^* &= (G^*(GG^*)^{-1}(F^*F)^{-1}(F^*F)G)^* = G^*(F^*F)(F^*F)^{-1}(GG^*)^{-1}G = \\ &= G^*(GG^*)^{-1}G = G^*(GG^*)^{-1}(F^*F)^{-1}F^*FG = XA,\end{aligned}$$
to sledi da je X $\{2\}$-inverz matrice A.

Na osnovu pretodnog važi da je X $\{1,2,3,4\}$-inverz matrice A, a kako smo ranije pokazali takav inverz je jedinstven, pa sledi da je $X = A^\dagger$. □

Prikazujemo u nastavku zapažanja koja je Penroz naveo u svom radu [18].

Važi da su jednačine (3.4) i (3.1) ekvivalentne jednačini:

$$XX^*A^* = X.$$

Naime, zamenom (3.1) u (3.4) dobijamo da važi $XX^*A^* = X$. Sa druge strane, ako X zadovoljava jednačinu $XX^*A^* = X$, tada množenjem ove jednačine sa A sa leve strane dobijamo $AXX^*A^* = AX$, te je AX erimitska matrica (jer $(AX)^* = (AXX^*A^*)^* = AXX^*A^* = AX$), odnoso X zadovoljava jednačinu (3.1), pa imajući ovo u vidu dobijamo $X = XX^*A^* = X(AX)^* = XAX$, čime smo pokazali da X zadovoljava jednačinu (3.4).

Na sličan način možemo pokazati da su jednačine (3.3) i (3.2) ekvivalentne jednačini:

$$XAA^* = A^*.$$

Na osnovu prethodnog, pri nalaženju Mur-Penrozovog inverza za matricu A, dovoljno je pronaći matricu X koja zadovoljava jednačine $XX^*A^* = X$ i $XAA^* = A^*$. Šta više, primetimo da je dovoljno pronaći matricu B za koju će važiti:

$$BA^*AA^* = A^*,$$

jer će onda $X = BA^*$ biti tražena matrica. Zaista, iz $BA^*AA^* = A^*$ i $X = BA^*$ direktno će slediti $XAA^* = A^*$. Rekli smo da je jednačina $XAA^* = A^*$ ekvivalentna sa (3.3) i (3.2), tj. X zadovoljava jednačine (3.3) i (3.2). Dakle, važi $AXA = A$, odnosno $(A(XA))^* = A^*$, pa je $(XA)^*A^* = A^*$, tj. $A^*X^*A^* = A^*$. Konačno dobijamo i $XX^*A^* = BA^*X^*A^* = BA^* = X$, te matrica X zadovoljava i jednačine (3.4) i (3.1).

3.5 Osobine Mur-Penrozovog inverza

U ovom poglavlju dokazaćemo nekoliko osnovnih osobina Mur-Penrozovog inverza.

Stav 3.5.1. Za proizvoljnu matricu A i $\lambda \in \mathbb{C}$ važi:

(a) $(A^\dagger)^\dagger = A$,

(b) $(A^\dagger)^* = (A^*)^\dagger$, kao i $(A^\dagger)^T = (A^T)^\dagger$,

(c) Ako je A regularna matrica, tada je $A^\dagger = A^{-1}$,

(d) $(\lambda A)^\dagger = \lambda^\dagger A^\dagger$,

(e) $(A^*A)^\dagger = A^\dagger(A^\dagger)^*$ i $A^\dagger = (A^*A)^\dagger A^* = A^*(AA^*)^\dagger$.

Dokaz. Deo (a) sledi zbog simetrije jednačina (3.3) i (3.4), kao i (3.1) i (3.2) u odnosu na A i X. Delovi (b) i (d) takođe slede direktno. Deo (c) sledi iz Stava 3.2.2 deo 2. Jedini deo ovog stava, koji nije tako očigledan jeste (e) i njega u nastavku pokazujemo.
Pokazujemo da je $(A^*A)^\dagger = A^\dagger(A^\dagger)^*$:

- Primetimo da važi

$$(A^*A)A^\dagger(A^\dagger)^*(A^*A) = A^*(AA^\dagger((A^\dagger)^*A^*)A) = A^*AA^\dagger AA^\dagger A =$$
$$= A^*AA^\dagger A = A^*A,$$

  pa sledi da je $A^\dagger(A^\dagger)^*$ $\{3\}$-inverz matrice A^*A.

- Shodno činjenici da je

$$A^\dagger(A^\dagger)^*(A^*A)A^\dagger(A^\dagger)^* = A^\dagger((A^\dagger)^*A^*)(AA^\dagger)(A^\dagger)^* = A^\dagger((AA^\dagger)^*)(AA^\dagger)(A^\dagger)^* =$$
$$= A^\dagger(AA^\dagger A)A^\dagger(A^\dagger)^* = A^\dagger AA^\dagger(A^\dagger)^* = A^\dagger(A^\dagger)^*,$$

  sledi da je $A^\dagger(A^\dagger)^*$ $\{4\}$-inverz matrice A^*A.

- Kako je

$$((A^*A)(A^\dagger(A^\dagger)^*))^* = A^\dagger(A^\dagger)^*A^*A = A^\dagger(AA^\dagger)^*A = (A^\dagger AA^\dagger)A = A^\dagger A,$$

  a znamo da je $A^\dagger A$ ermitska matrica jer je $A^\dagger$ između ostalog i $\{2\}$-inverz matrice A, te je stoga $(A^*A)(A^\dagger(A^\dagger)^*)$ ermitska matrica, odnosno $A^\dagger(A^\dagger)^*$ je $\{1\}$-inverz matrice A^*A.

- Sobzirom da važi

$$((A^\dagger(A^\dagger)^*)(A^*A))^* = A^*AA^\dagger(A^\dagger)^* = A^*(AA^\dagger)^*(A^\dagger)^* = (A^*(A^\dagger)^*A^*)(A^\dagger)^* =$$
$$= (A(A^\dagger)A)^*(A^\dagger)^* = A^*(A^\dagger)^* = (A^\dagger A)^* = A^\dagger A,$$

  slično kao malo pre, zaključujemo da je $A^\dagger(A^\dagger)^*$ je $\{2\}$-inverz matrice A^*A.

Dakle, pokazali smo $(A^*A)^\dagger = A^\dagger(A^\dagger)^*$, pa koristeći to, dobijamo i $(A^*A)^\dagger A^* = A^\dagger((A^\dagger)^*A^*) = A^\dagger AA^\dagger = A^\dagger$. Opet koristeći $(A^*A)^\dagger = A^\dagger(A^\dagger)^*$, zamenom uloga za A i A^* i iz dela (b), dobijamo $(AA^*)^\dagger = (A^\dagger)^*A^\dagger$, pa je $A^*(AA^*)^\dagger = A^*(A^\dagger)^*A^\dagger = A^\dagger AA^\dagger = A^\dagger$. □

U nastavku slede važna svojstva Mur-Penrozovog inverza, a to su $\mathcal{R}(A^\dagger) = \mathcal{R}(A^*)$ i $\mathcal{N}(A^\dagger) = \mathcal{N}(A^*)$.

Teorema 3.5.1. Za svaku matricu A važi:

- $AA^\dagger$ je ortogonalni projektor na $\mathcal{R}(A)$,

- $A^\dagger A$ je ortogonalni projektor na $\mathcal{R}(A^*)$.

Pored toga, važi $\mathcal{R}(A^\dagger) = \mathcal{R}(A^*)$ i $\mathcal{N}(A^\dagger) = \mathcal{N}(A^*)$.

Dokaz. Na osnovu Posledice 3.3.1 znamo da je $AA^\dagger$ ortogonalni projektor na $\mathcal{R}(A)$ i da važi $\mathcal{N}(A^\dagger) = \mathcal{R}(A)^\perp$, a kako je $\mathcal{R}(A)^\perp = \mathcal{N}(A^*)$, to sledi $\mathcal{N}(A^\dagger) = \mathcal{N}(A^*)$. Takođe na osnovu Posledice 3.3.1 znamo da je $A^\dagger A$ ortogonalni projektor na $\mathcal{R}(A^\dagger)$ i važi $\mathcal{R}(A^\dagger) = \mathcal{N}(A)^\perp$, a kako je $\mathcal{N}(A)^\perp = \mathcal{R}(A^*)$, to važi $\mathcal{R}(A^\dagger) = \mathcal{R}(A^*)$. □

3.6 Primena Mur-Penrozovog inverza

Razmotrimo jednačinu $Ax = b$, pri čemu je $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, a $b \in \mathbb{R}^m$. Ako je A kvadratna i invertibilna matrica, tada je prethodnu jednačinu generalno lako rešiti. Ako je A proizvoljna matrica, tada razmatrana jednačina možda nema rešenja, ima jedno ili ima beskonačno mnogo rešenja, u zavisnosti da li $b \in \mathcal{R}(A)$ ili ne, i od ranga A. Ako $b \notin \mathcal{R}(A)$, onda jednačina nema rešenje.

Teorema 3.6.1 (Kroneker[1]-Kapelijeva[2])**.** Posmatrajmo sistem jednačina $Ax = b$, gde je $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, a $b \in \mathbb{R}^m$. Jedna od sledeće tri mogućnosti mora da važi:
(1) Ako je rang proširene matrice $[A\ b]$ veći od ranga A, to znači da b ne pripada prostoru kolona matrice A, a tada ne postoji rešenje za $Ax = b$.
(2) Ako je rang proširene matrice $[A\ b]$ jednak rangu A i jednak broju nepoznatih, tada sistem $Ax = b$ ima tačno jedno rešenje.
(3) Ako je rang proširene matrice $[A\ b]$ jednak rangu A i strogo manji od broja nepoznatih, tada sistem $Ax = b$ ima beskonačno mnogo rešenja.

U slučaju (1) najpribližnije rešenje sistema se može dobiti metodom najmanjih kvadrata. Za slučaj (2) rešenje dobijeno opštom metodom za rešavanje sistema jednačina je isto kao i ono dobijeno metodom najmanjih kvadrata, dok za slučaj (3) metoda najmanjih kvadrata ne radi, a kovarijaciona matrica je singularna i postoji beskonačno mnogo rešenja koja zadovoljavaju $||Ax - b|| = 0$.

Prema tome, drugo gledište ovog problema je sledeće: umesto da se pokuša rešiti jednačina $||Ax - b|| = 0$ mi ćemo tražiti vektor u koji minimizuje normu $||Ax - b||$. Ispostaviće se da je traženi vektor u jedinstven (što je i pokazano nakon Teoreme 3.6.2). Pošto nas zanima rastojanje između Ax i b, prirodno je koristiti 2-normu.

[1]Leopold Kronecker (1823-1891), nemački matematičar

[2]Alfredo Capelli (1855-1910), italijanski matematičar

Dakle, posmatraćemo jednačinu $Ax = P_{\mathcal{R}(A)}b$, gde je $P_{\mathcal{R}(A)}$ ortogonalni projektor na $\mathcal{R}(A)$.

Teorema 3.6.2. Neka je $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ i $b \in \mathbb{R}^m$, $b \notin \mathcal{R}(A)$. Tada su, za $u \in \mathbb{R}^n$, sledeći iskazi ekvivalentni:

(a) $Au = P_{\mathcal{R}(A)}b$,

(b) $||Au - b|| \leq ||Ax - b||, \forall x \in \mathbb{R}^m$,

(c) $A^T Au = A^T b$

Neka je $\mathcal{B} = \{u \in \mathbb{R}^n : A^T Au = A^T b\}$. Ovaj skup rešenja je konveksan i zatvoren, stoga ima jedinstveni vektor sa minimalnom normom. Ukoliko pretpostavimo suprotno, da $\mathcal{B}$ ima dva vektora $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x \neq y$, sa minimalnom normom, tada su zbog konveksnosti $\mathcal{B}$ sve tačke na pravoj koja spaja x i y takođe u $\mathcal{B}$. Razmatrajmo trougao xOy, pri čemu je O nula vektor u $\mathbb{R}^n$, tada su dužine stranica Ox i Oy jednake i iznose $||x|| = ||y||$, te su uglovi posmatranog trougla na pravoj xy jednaki, pa su stoga manji od pravog ugla. Shodno tome, normala iz O na pravu xy se nalazi između „tačaka" x i y, i preseca pravu xy u nekom $z \in \mathcal{B}$, za koga će važiti $||z|| < ||x|| = ||y||$, čime smo dobili kontradikciju. Te je vektor minimalne norme u $\mathcal{B}$ zaista jedinstven.

Teorema 3.6.3. Neka su $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ i $b \in \mathbb{R}^m$, $b \notin \mathcal{R}(A)$ i posmatrajmo sistem oblika $Ax = b$. Tada, ako je $A^\dagger$ Mur-Penrozov inverz matrice A, sledi da važi da je $A^\dagger b = u$, gde je u prethodno definisano rešenje minimalne norme.

Koristićemo ovo svojstvo kod Mur-Penrozovog inverza kako bismo minimizovali rizik prilikom izbora portfolija. Pošto je kovarijaciona matrica simetrična, tj. važi $\Sigma = \Sigma^T$, sledi da važi i $\Sigma^\dagger = \Sigma^{\dagger T}$.

Za rešavanje linearnog sistema $A\omega = b$ može se koristiti metoda dekompozicije singularne vrednosti (SVD[3]).

3.7 SVD metod

Postoji nekoliko metoda za izračunavanje Mur-Penrozovog inverza matrice. Jedna od najčešće korišćenih tehnika je singularna dekompozicija vrednosti (SVD me-

[3] *engl.* Singular value decomposition

tod). Ovaj metod je vrlo tačan, ali takođe, i vremenski zahtevan, jer zahteva veliku količinu računarskih resursa, posebno u slučaju velikih matrica. Poznato je da je SVD dobra metoda za numerički stabilno računanje. Uobičajena upotreba SVD-a je za izračunavanje rešenja sistema linearnih jednačina koji nema rešenje, metodom najmanjih kvadrata, ili za pronalaženje najboljeg rešenja sistema linearnih jednačina koji ima beskonačno mnogo rešenja.
Označimo sa S, D, V matrice dimenzije $T \times T$, $T \times N$ i $N \times N$, redom. Tada se matrica A može predstaviti na sledeći način:

$$A = SDV = (ortogonalna)(dijagonalna)(ortogonalna) \tag{3.6}$$

Kolone matrice S su sopstveni vektori od AA^T, a vrste matrice V su sopstveni vektori od A^TA. Singularne vrednosti $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r$ na dijagonali matrice D su kvadratni koreni nenula sopstvenih vrednosti od AA^T i A^TA. Matrice S i V iz jednačine (3.6) su ortogonalne.

Neka je $A^\dagger$ Mur-Penrozov inverz od A i neka je $D^\dagger$ matrica dimenzije $N \times T$ koja na svojoj dijagonali ima recipročne singularne vrednosti $\frac{1}{\sigma_1}, \frac{1}{\sigma_2}, \dots, \frac{1}{\sigma_r}$. Tada Mur-Penrozov inverz $A^\dagger$ matrice A možemo računati, koristeći SVD metod, po formuli:

$$A^\dagger = V^T D^\dagger S^T \tag{3.7}$$

Generalizovani inverz od $A^\dagger$ je $(A^\dagger)^\dagger = A$. Generalizovani inverz $A^\dagger$ je generalizacija inverzne matrice A^{-1}. Generalizovani inverz je definisan da bude jedinstven za sve matrice čiji su unosi realni ili kompleksni brojevi.

Tada možemo rešiti $A\omega = b$ koristeći generalizovani inverz, dat jednačinom (3.7), prateći sledeća 3 moguća slučaja:

1. Ako je $T = N$, tada je A punog ranga što podrazumeva da važi $A^\dagger = A^{-1}$. U ovom slučaju sledi da je $\omega = A^\dagger b = A^{-1}b$.

2. Ako je $T > N$, tada je $\omega = A^\dagger b$ onaj vektor koji minimizuje $||A\omega - b||$. Odnosno, u ovom slučaju, postoji više ograničavajućih jednačina nego promenljivih ω, tako da generalno nije moguće pronaći tačno rešenje za ove jednačine. Prema tome, generalizovani inverz dat jednačinom (3.7) daje rešenje ω tako da je $A\omega$ "najbliže" željenom vektoru b.

3. Ako je $T < N$, generalno postoji beskonačno mnogo rešenja, a među mnogim rešenjima $\omega = A^\dagger b$ je posebno rešenje koje minimizuje 2-normu od ω. Prednost je u pronalaženju rešenja koje minimizuje $||\omega||_2$, što je značajno za smanjenje troškova transakcija kod učestalih trgovanja.

3.8 Primeri

Razmotrićemo 3 slučaja, kada je kovarijaciona matrica bliska singularnoj i dobro uslovljena, bliska singularnoj ali numerčki loše uslovljena i kada je singularna. Kada je kovarijaciona matrica bliska singularnoj i dobro uslovljena, onda, ako zamenimo Σ^{-1} sa $\Sigma^{\dagger}$ rezultati se poklapaju. U slučaju kada je kovarijaciona matrica bliska singularnoj i loše uslovljena upotreba Mur-Penrozovog inverza $\Sigma^{\dagger}$ daje neznatno bolji rezultat od Σ^{-1}. Na kraju, kada je matrica Σ singularna, da bi se postigao optimalni portfolio podstiče se korišćenje $\Sigma^{\dagger}$.

Probleme optimizacije portfolija rešavamo koristeći statistički softver R.

Dobro uslovljena kovarijaciona matrica bliska singularnoj

Posmatrajmo portfolio koji se sastoji od 27 akcija, iz *DJIA*[4] *Index*. Period razmatranja počinje danom 01.01.2015. i traje zaključno sa danom 31.12.2022, sa ukupno 2014 opservacija[5]. Kovarijaciona matrica prinosa Σ je matrica dimenzija 27×27, veoma bliska singularnoj ($det\Sigma = 1.13 \cdot 10^{-39}$) i sa uslovnim brojem jednakim 33.195, što implicira da je ova kovarijaciona matrica dobro uslovljena. Važi da je:

$$||\Sigma^{\dagger} - \Sigma^{-1}||_2 = 3.09 \cdot 10^{-13}.$$

Na Slici 3.1 prikazujemo grafik cena na zatvaranju za posmatranih 27 kompanija, dok je na Slici 3.2 prikazan dijagram srednjih vrednosti prinosa istih kompanija.

Na početku određujemo optimalni portfolio korišćenjem Markovicovog metoda koji je prikazan u poglavlju 2.1. Uvodimo sledeće oznake:

$$A = \mathbf{e}^T\Sigma^{-1}\mathbf{e},\ B = \mathbf{e}^T\Sigma^{-1}\mathbf{r},\ C = \mathbf{r}^T\Sigma^{-1}\mathbf{r},$$

tada je optimani portfolio dat jednačinom:

$$\omega = \frac{Br_m - C}{B^2 - AC}\Sigma^{-1}\mathbf{e} + \frac{B - Ar_m}{B^2 - AC}\Sigma^{-1}\mathbf{r}.$$

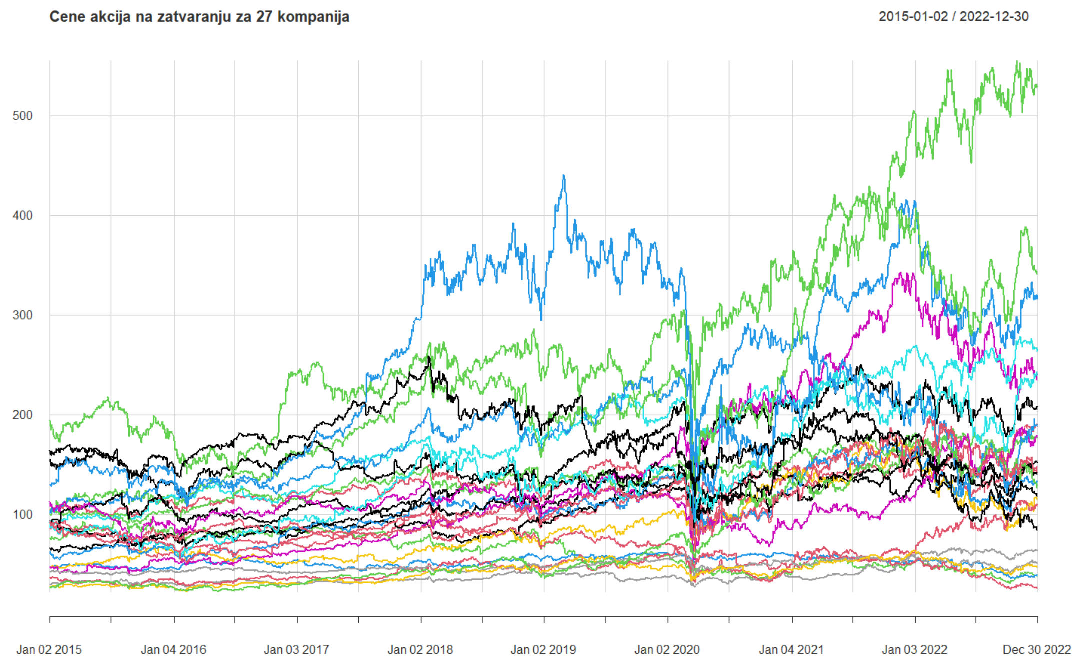
Ukoliko pri optimizaciji portfolija koristimo generalizovani inverz, tada za oznake:

$$\hat{A} = \mathbf{e}^T\Sigma^{\dagger}\mathbf{e},\ \hat{B} = \mathbf{e}^T\Sigma^{\dagger}\mathbf{r},\ \hat{C} = \mathbf{r}^T\Sigma^{\dagger}\mathbf{r},$$

---

[4]Industrijski indeks Dow Jones Industrial Average (DJIA) se sastoji od deonica najvećih 30 kompanija u SAD kojima se trguje na berzi. U ovom primeru razmatramo samo 27 akcija usled nedostatka podataka za preostale tri akcije u posmatranom vremenskom intervalu.

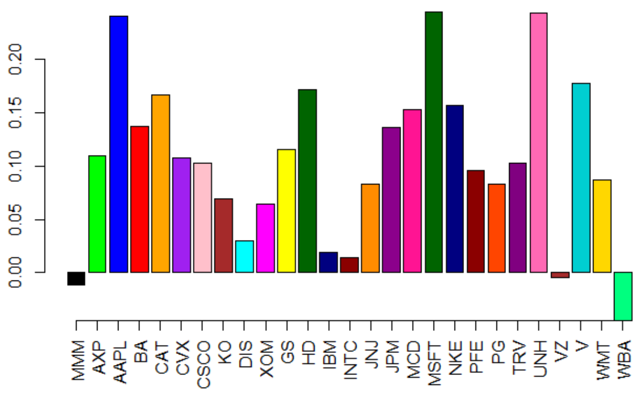
[5]Podaci su preuzeti sa https://finance.yahoo.com/.



Slika 3.1: Cene akcija na zatvaranju za 27 kompanija iz *DJIA* indeksa.

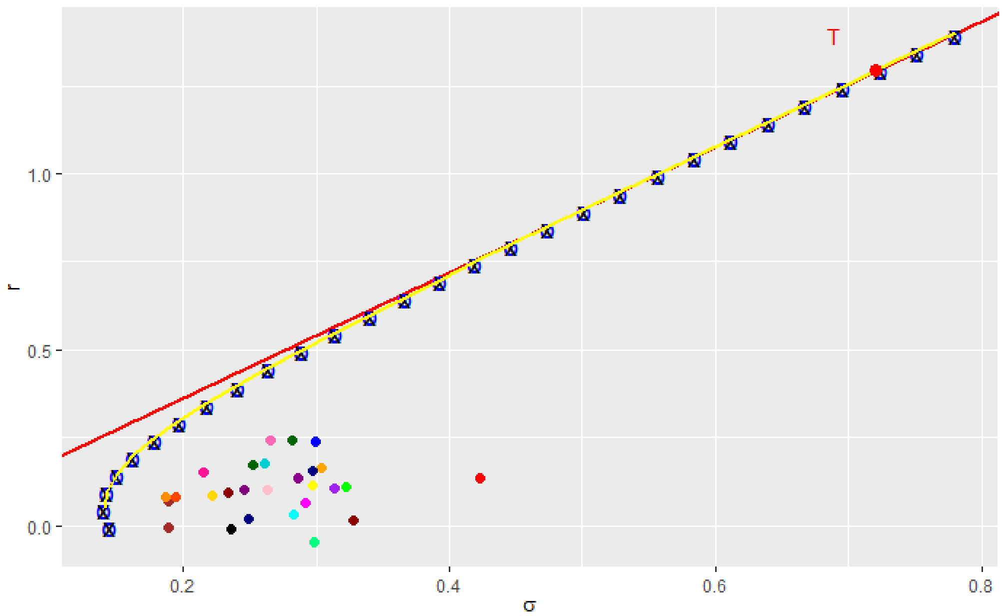
optimalni portfolio računamo po formuli:

$$\hat{\omega} = \frac{\hat{B}r_m - \hat{C}}{\hat{B}^2 - \hat{A}\hat{C}}\Sigma^\dagger \mathbf{e} + \frac{\hat{B} - \hat{A}r_m}{\hat{B}^2 - \hat{A}\hat{C}}\Sigma^\dagger \mathbf{r}.$$



Slika 3.2: Srednje vrednosti prinosa za 27 kompanija iz *DJIA* indeksa.

Za očekivani prinos portfolija r_m koji uzima vrednosti od 0 do 1.4 sa razmakom 0.05, možemo videti da dobijamo rezultate optimizacije portfolija koji imaju gotovo istu disperziju pri korišćenju običnog inverza kovarijacione matrice prinosa, kao i pri korišćenju Mur-Penrozovog inverza iste matrice (Slika 3.3). Dobijamo neznatno različite rezultate optimizacije portfolija, što jasno vidimo na Slici 3.4 na kojoj prikazujemo beskonačnu normu razlike dobijenih rešenja ω korišćenjem običnog inverza i $\hat{\omega}$ korišćenjem Mur-Penrozovog inverza, tj. $||\omega-\hat{\omega}||_\infty$, u zavisnosti od prinosa portfolija r_m, gde su navedene razlike reda 10^{-15}.



Slika 3.3: Grafik zavisnosti standardnog odstupanja od očekivanog prinosa upotrebom običnog (o) i Mur-Penrozovog (x) inverza kovarijacione matrice prinosa. Žuta linija označava efikasni portfolio. Oznaka T predstavlja tangentni portfolio pri bezrizičnoj kamatnoj stopi $r_f = 1\%$.

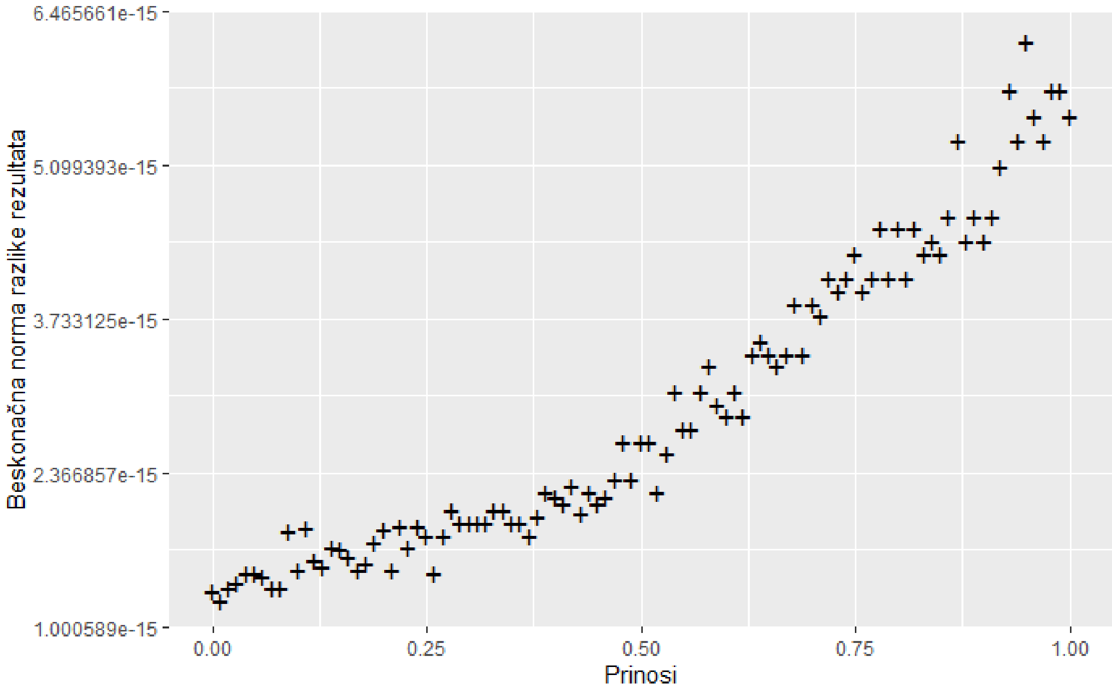
Napomena. Pre nego što dalje nastavimo sa razmatranjem primera, osvrnimo se na rezultat koji će nam biti od značaja. Neka je $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ i neka je $b \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, tada za $p \in \mathbb{N}$ važi $||Ab||_p \leq ||A||_p||b||_p$, što jednostavno važi iz definicije $||\cdot||_p$:

$$||A||_p = \sup_x \frac{||Ax||_p}{||x||_p} \geq \frac{||Ab||_p}{||b||_p}.$$

Korišćenjem svojstava $||\cdot||_\infty$ poput homogenosti i nejednakosti trougla, kao i svojstva koje smo malo pre naveli u napomeni, dobijamo:

$$||\omega||_p \leq \left\| \frac{\Sigma^{-1}}{AC-B^2} \right\|_p (||(C - r_m B)\mathbf{e}||_p + ||(r_m A - B)\mathbf{r}||_p),$$

$$||\hat{\omega}||_p \leq \left\| \frac{\Sigma^{\dagger}}{\hat{A}\hat{C}-\hat{B}^2} \right\|_p \left(||(\hat{C} - r_m \hat{B})\mathbf{e}||_p + ||(r_m \hat{A} - \hat{B})\mathbf{r}||_p\right),$$



Slika 3.4: Grafik zavisnosti $||\omega - \hat{\omega}||_\infty$ od prinosa r_m.

pa još jednom, korišćenjem homogenosti za $||\cdot||_p$ i nejednakost trougla dobijamo:

$$||\omega||_p \leq \frac{||\Sigma^{-1}||_p}{|AC - B^2|} \left(|r_m| \left(|B| \cdot ||\mathbf{e}||_p + |A| \cdot ||\mathbf{r}||_p\right) + |C| \cdot ||\mathbf{e}||_p + |B| \cdot ||\mathbf{r}||_p\right),$$
$$||\hat{\omega}||_p \leq \frac{||\Sigma^{\dagger}||_p}{|\hat{A}\hat{C} - \hat{B}^2|} \left(|r_m| \left(|\hat{B}| \cdot ||\mathbf{e}||_p + |\hat{A}| \cdot ||\mathbf{r}||_p\right) + |\hat{C}| \cdot ||\mathbf{e}||_p + |\hat{B}| \cdot ||\mathbf{r}||_p\right).$$

Konačno, za posmatrane akcije, imamo sledeća gornja ograničenja:

$$||\omega||_2 \leq 28.9291793929203358 \cdot r_m + 10.9715856621582048 = M(r_m),$$
$$||\hat{\omega}||_2 \leq 28.9291793929202647 \cdot r_m + 10.9715856621582368 = \hat{M}(r_m).$$

Zanima nas kada je $\hat{M}(r_m) \leq M(r_m)$, pa rešavanjem te nejednakosti dobijamo $r_m \leq 0.45$, te u tom slučaju upotreba Mur-Penorz inverza daje bolje rezultate. Naime, manja norma težina portfolija implicira da su i troškovi transakcija manji, što je od velike važnosti kod učestalijih trgovanja.

Osvrnimo se ukratko na uticaj troškova transakcije. Trošak transakcije je iznos novca koji se naplaćuje ili odbija prilikom obavljanja određene finansijske transakcije. Ovaj trošak može biti vezan za različite vrste transakcija, poput transfera novca, kupovine deonica ili drugih finansijskih instrumenata i slično. Trošak transakcije može varirati u zavisnosti od vrste transakcije, institucije koja obavlja transakciju, od iznosa transakcije i drugih faktora. Na primer, banke mogu naplaćivati naknade za prenos novca, kreditne kartice imaju provizije za transakcije usmerene ka inostranstvu, a brokerske kuće naplaćuju proviziju za kupovinu i prodaju akcija. Takođe, važno je napomenuti da su troškovi transakcija pri ulasku u kratke pozicije veći nego li kod dugih pozicija.

Pretpostavimo da imamo portfolio koji čine tri aseta i neka je dozvoljena kratka prodaja. Razmatrajmo sledeće dve raspodele kapitala:

$$\omega_1 = (0.3, 0.3, 0.4), \quad \omega_2 = (-100, -100, 201),$$

gde očigledno važi $||\omega_2||_2 > ||\omega_1||_2$. S obzirom da je iznos transakcije vrlo važan faktor pri određivanju cene transakcije, to pri ω_2 imamo značajno veće troškove transakcije, nego pri ω_1.

γ	0.5	1	5	30	50	100	200
MMM.Close	-7.9080	-3.9332	-0.75342	-0.0910	-0.0380	0.0018	0.0217
AXP.Close	-1.6681	-0.8501	-0.1957	-0.0593	-0.0484	-0.0402	-0.0361
AAPL.Close	3.2448	1.6362	0.3492	0.0811	0.0597	0.0436	0.0355
BA.Close	0.1914	0.0742	-0.0195	-0.0390	-0.0406	-0.0418	-0.0424
CAT.Close	5.9643	2.9938	0.6174	0.1224	0.0828	0.0531	0.0382
CVX.Close	-0.5242	-0.2911	-0.1047	-0.0658	-0.0627	-0.0604	-0.0593
CSCO.Close	0.1848	0.0691	-0.0235	-0.0428	-0.0443	-0.0455	-0.0460
KO.Close	0.2568	0.1990	0.1527	0.1431	0.1423	0.1418	0.1415
DIS.Close	-3.8908	-1.9158	-0.3358	-0.0066	0.0197	0.0395	0.0494
XOM.Close	-0.2635	-0.0883	0.0519	0.0811	0.0834	0.0852	0.0860
GS.Close	-2.9231	-1.4518	-0.2748	-0.0296	-0.0010	0.0048	0.0121
HD.Close	2.9251	1.4566	0.2818	0.0370	0.0174	0.0028	-0.0046
IBM.Close	-3.6177	-1.8021	-0.3495	-0.0469	-0.0227	-0.0046	0.0045
INTC.Close	-5.0339	-2.5233	-0.5147	-0.0963	-0.0628	-0.0377	-0.0252
JNJ.Close	0.2688	0.2253	0.1905	0.1833	0.1827	0.1822	0.1820
JPM.Close	5.0160	2.4786	0.4487	0.0258	-0.0081	-0.0334	-0.0461
MCD.Close	3.0091	1.5863	0.4480	0.2108	0.1919	0.1776	0.1705
MSFT.Close	5.0388	2.5011	0.4709	0.0479	0.0141	-0.0113	-0.0240
NKE.Close	0.5003	0.2591	0.0661	0.0258	0.0226	0.0202	0.0190
PFE.Close	0.3118	0.2033	0.1165	0.0984	0.0969	0.0958	0.0953
PG.Close	1.0717	0.5649	0.1595	0.0750	0.0683	0.0632	0.0607
TRV.Close	0.0770	0.0508	0.0298	0.0254	0.0251	0.0248	0.0247
UNH.Close	6.0784	3.0332	0.5970	0.0895	0.0489	0.0184	0.0032
VZ.Close	-5.7332	-2.7511	-0.3653	0.1317	0.1715	0.2013	0.2162
V.Close	1.5715	0.7846	0.1551	0.0240	0.0135	0.0056	0.0017
WMT.Close	0.4520	0.3007	0.1796	0.1544	0.1523	0.1508	0.1501
WBA.Close	-3.6000	-1.8099	-0.3778	-0.0794	-0.0555	-0.0376	-0.0287

Tabela 3.1: Optimalne težine raspodele kapitala dobijene Markovicovom optimizacijom portfolija upotrebom običnog inverza.

Pronađimo sada optimalni portfolio korišćenjem metoda koji je prikazan u poglavlju 2.2, pri čemu koeficijent averzije prema riziku γ uzima vrednosti 0.5, 1, 5, 30, 50, 100 i 200. U pronalaženju optimalnog portfolija prvo koristimo obični inverz matrice Σ. Podsetimo se rezultata iz glave 2.2. Tamo smo dobili da je optimalni portfolio dat jednačinom:

$$\omega = \frac{1}{\gamma}(\Sigma^{-1}\mathbf{r} - \frac{\mathbf{e}^T\Sigma^{-1}\mathbf{r} - \gamma}{\mathbf{e}^T\Sigma^{-1}\mathbf{e}}\Sigma^{-1}\mathbf{e}),$$

pri čemu je $\lambda = \frac{\mathbf{e}^T\Sigma^{-1}\mathbf{r}-\gamma}{\mathbf{e}^T\Sigma^{-1}\mathbf{e}}$.

Tabelom 3.1 dati su rezultati Markovicove optimizacije portfolija pri pomenutim vrednostima koeficijenata averizije prema riziku. Možemo videti da je u svih sedam dobijenih rešenja prisutna kratka prodaja.

U Tabeli 3.2 možemo videti da sa porastom koeficijenta averzije prema riziku, opada disperzija portfolija, kao i prinos, što smo i očekivali.

γ	0.5	1	5	30	50	100	200
Prinos	6.1581	3.1085	0.6688	0.1605	0.1199	0.0894	0.0741
Disperzija	12.2183	3.0694	0.1418	0.0232	0.0210	0.0201	0.0198

Tabela 3.2: Prinosi i disperzije portfolija dobijeni Markovicovom optimizacijom portfolija upotrebom običnog inverza

Ukoliko pri nalaženju optimalnog portfolija koristimo $\Sigma^\dagger$ umesto Σ^{-1}, odnosno, ukoliko optimalni portfolio računamo kao:

$$\omega = \frac{1}{\gamma}\left(\Sigma^\dagger\mathbf{r} - \frac{\mathbf{e}^T\Sigma^\dagger\mathbf{r} - \gamma}{\mathbf{e}^T\Sigma^\dagger\mathbf{e}}\Sigma^\dagger\mathbf{e}\right),$$

pri čemu je $\lambda = \frac{\mathbf{e}^T\Sigma^\dagger\mathbf{r}-\gamma}{\mathbf{e}^T\Sigma^\dagger\mathbf{e}}$, dobijamo gotovo iste rezultate kao malo pre kada smo koristili običan inverz.

Loše uslovljena kovarijaciona matrica bliska singularnoj

U ovom delu razmatramo akcije sa tržišta trgovine valutama, odnosno sa takozvnog FOREX[6] tržišta. Vrednost valute, odnosno njena vrednost u odnosu na druge valute, zavisi od toga koliko je ta valuta atraktivna na tržištu. Ako je potražnja za njom velika i njena cena raste. Nagle i brze promene deviznih kurseva obično su znak da je privreda u haosu, da nekontrolisano raste stopa inflacije, da se ne podmiruju kreditne obaveze i da postoji ozbiljan deficit u trgovinskom bilansu. Političke prilike takođe mogu da utiču na rast ili pad deviznih kurseva. Opasnost od izbijanja rata ili

[6] *engl.* Foreign Exchange

građanskih nemira uslovljavaju smanjenje kursa valute zemlje u kojoj se to događa u odnosu na druge valute.

Kompletna transakcija na FOREX tržištu predstavlja prodaju jedne valute i istovremenu kupovinu druge. Svaka valuta se obično označava sa tri slova, od kojih su prva dva oznaka za državu, a treće slovo naziv valute. Kada je valuta kotirana, to se uvek čini u odnosu na drugu valutu, tako da je vrednost jedne valute iskazana kroz vrednost druge. Tako na primer, ako želimo da utvrdimo koji je kurs evra (EUR) u odnosu na britansku funtu (GBP), kvota, odnosno cena će u određenom trenutku izgledati ovako:

$$EUR/GBP = 0.858,$$

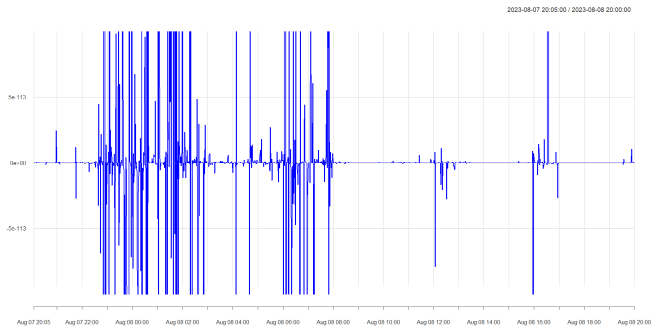
što znači da se jedan evro može kupiti za 0.858 britanskih funti. Valuta sa leve strane naziva se osnovnom valutom, dok je valuta sa desne strane kotirana ili kontra valuta. Ukoliko osnovna i kotirana valuta zamene mesta dobijamo indirektnu kotaciju. Za iznad navedeni valutni par EUR/GBP indirektna kotacija bi bila $GBP/EUR = 1/0.858 \approx 1.166$.

Posmatramo portfolio koji se sastoji od sedam valutnih parova, pri čemu posmatramo cene na zatvaranju u jednominutnim intervalima. Podaci o cenama na zatvaranju koje posedujemo potiču iz perioda od 07.08.2023. počev od 20:00h do 08.08.2023. do 20:00h, što znači da imamo 1440 opservacija[7]. Valutni parovi koji se posmatraju su sledeći:

- Evro / Švajcarski franak ($EURCHF$),
- Evro / Britanska funta ($EURGBP$),
- Evro / Japanski jen ($EURJPY$),
- Evro / Američki dolar ($EURUSD$),
- Britanska funta / Američki dolar ($GBPUSD$),
- Američki dolar / Švajcarski franak ($USDCHF$),
- Američki dolar / Japanski jen ($USDJPY$).

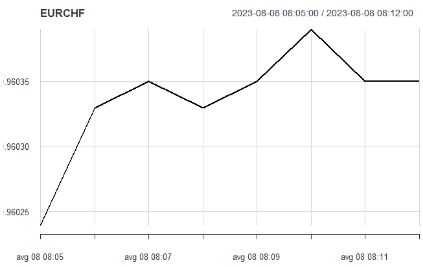
[7]Podaci su preuzeti sa https://finance.yahoo.com/.

Ukoliko razmatramo 5 uzastopnih jednominutnih intervala, kojih ima 1436, u velikom broju slučajeva, tačnije za 186 takvih opservacija, će kovarijaciona matrica prinosa biti singularna, što vidimo na Slici 3.5.

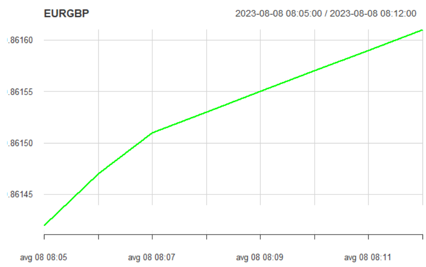


Slika 3.5: Determinante kovarijacionih matrica prinosa razmatranih valutnih parova na 5 uzastopnih jednominutnih intervala u periodu od 07.08.2023. počev od 20:00h do 08.08.2023. do 20:00h.

Fokusirajmo se u nastavku na rešavanje problema optimizacije portfolija analizirajući cene na zatvaranju za posmatrane valutne parove u 8 uzastopnih jednominutnih intervala u periodu od 08.08.2023. počev od 08:05h do 08:13h istog dana. Na Slikama 3.6, 3.7, 3.8, 3.9, 3.10, 3.11, 3.12 prikazane su vrednosti posmatranih valutnih parova u pomenutim intervalima. Kovarijaciona matrica Σ u ovom slučaju je iz $M_7(\mathbb{R})$ i važi da je $det(\Sigma) = -1.16 \cdot 10^{-54}$, što znači da je veoma bliska singularnoj matrici, a njen uslovni broj pri 2-normi iznosi $\mathcal{K}(\Sigma) = 4.77 \cdot 10^{16}$, što implicira da je ova kovarijaciona matrica loše uslovljena.



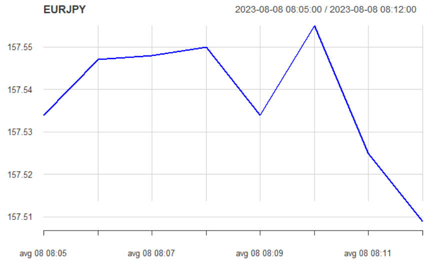
Slika 3.6: Vrednost valutnog para *EURCHF*.



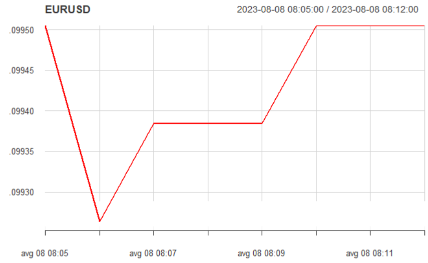
Slika 3.7: Vrednost valutnog para *EURGBP*.

Portfolio ćemo optimizovati na dva načina, koristeći običan inverz Σ^{-1} i generalizovani inverz $\Sigma^{\dagger}$ kovarijacione matrice prinosa Σ. U ovom slučaju se Σ^{-1} i $\Sigma^{\dagger}$ značajno razlikuju jer važi

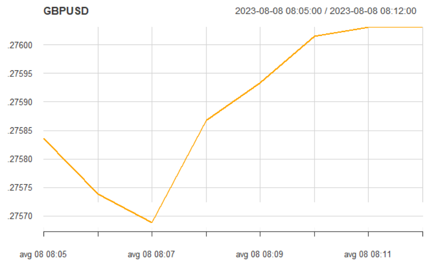
$$||\Sigma^{-1} - \Sigma^{\dagger}||_2 = 9.20 \cdot 10^{20}.$$



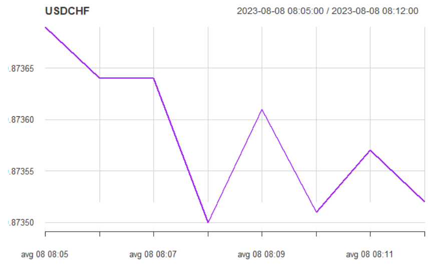
Slika 3.8: Vrednost valutnog para *EURJPY*.



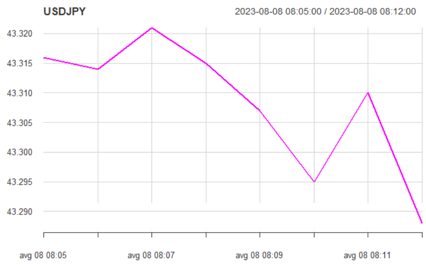
Slika 3.9: Vrednost valutnog para *EURUSD*.



Slika 3.10: Vrednost valutnog para *GBPUSD*.



Slika 3.11: Vrednost valutnog para *USDCHF*.

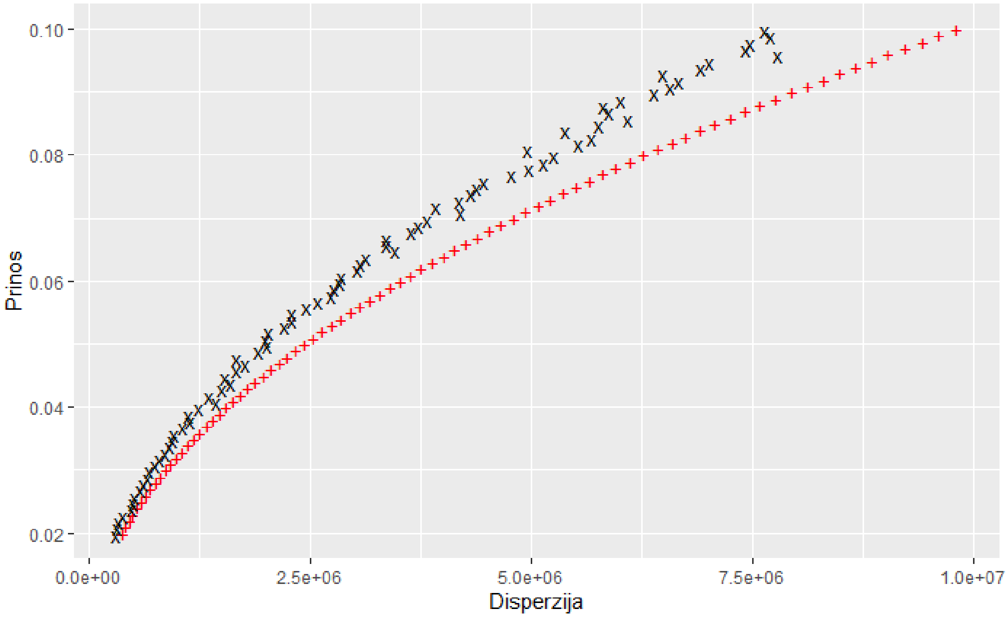


Slika 3.12: Vrednost valutnog para *USDJPY*.

Problem optimizacije portfolija rešavamo korišćenjem Markovicovog metoda koji je opisan u poglavlju 2.1.

Kod optimizacije upotrebom Mur-Penrozovog inverza, na grafiku zavisnosti očekivanog prinosa od disperzije, koji je prikazan na Slici 3.13, dobijamo krivu koja je glatka, što ukazuje na numeričku stabilnost rešenja, odnosno na ravnotežu između očekivanog prinosa i disperzije. Sa druge strane, upotrebom običnog inverza pri optimizaciji portfolija može doći do većih oscilacija očekivanog prinosa kako disperzija raste, što ukazuje na numeričku nestabilnost rešenja.

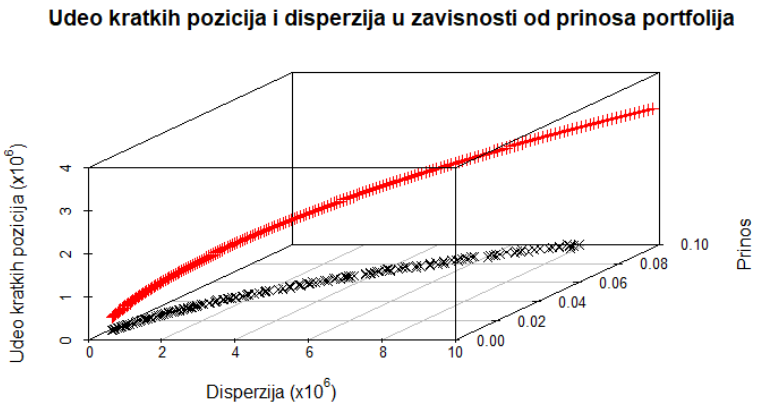
Udeo kapitala investiran u kratke pozicije takođe može poslužiti kao mera za upoređivanje rezultata optimizacije portfolija. Naime, kratka prodaja nije uvek ni dozvoljena, i u tom slučaju rešenja optimizacije portfolija koja sadrže kratke po-



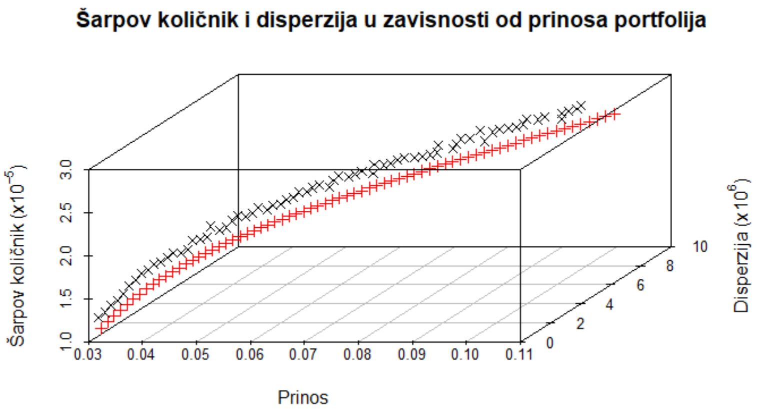
Slika 3.13: Grafik zavisnosti očekivanog prinosa od disperzije upotrebom običnog (x) i Mur-Penrozovog (+) inverza kovarijacione matrice prinosa.

zicije nam nisu od značaja. Još jedna velika mana kratkih pozicija jeste to što je kod njih potencijalni gubitak neograničen. Kod dugih pozicija najviše što možemo da izgubimo jeste iznos koji smo uložili, dok kod kratkih pozicija cene akcija neograničeno mogu da rastu. Na Slici 3.14 je prikazana vrednost udela kratkih pozicija i disperzije u zavisnosti od očekivanog prinosa portfolija. Možemo videti da se za isti očekivani prinos, u zavisnosti od toga da li koristimo običan ili Mur-Penrozov inverz kovarijacione matrice prinosa pri optimizaciji, dobijaju rešenja čije su razlike u udelima kratkih pozicija reda 10^6, te se u tom pogledu rešenja značajno razlikuju.

Uporedićemo još rezultate optimizacije, dobijene korišćenjem običnog i generalizovanog inverza, analizom vrednosti Šarpovog količnika. Pri bezrizičnoj kamatnoj stopi $r_f = 2\%$, za očekivane prinose koji uzimaju vrednosti od 0.03 do 0.1, sa razmakom 0.001, prikazujemo na Slici 3.15 vrednosti Šarpovog količnika i disperzije u zavisnosti od očekivanog prinosa. Za razmatrane vrednosti očekivanog prinosa, najveća razlika Šarpovih količnika navedenih optimizacionih strategija biće jednaka $3.73 \cdot 10^{-6}$ i dostiže se za očekivani prinos portfolija $r_m = 0.087$. Kako su razlike između Šarpovih količnika reda 10^{-6}, to možemo reći da su dobijeni rezultati optimizacije gotovo podjednako dobri, ako poređenje vršimo analizom vrednosti Šarpovog količnika.



Slika 3.14: Grafik zavisnosti udela kratkih pozicija i disperzije od prinosa upotrebom običnog (x) i Mur-Penrozovog (+) inverza kovarijacione matrice prinosa.



Slika 3.15: Grafik zavisnosti Šarpovog količnika i disperzije od prinosa upotrebom običnog (x) i Mur-Penrozovog (+) inverza kovarijacione matrice prinosa.

Singularna kovarijaciona matrica prinosa

Slično kao u prethodnom primeru, posmatramo portfolio koji se sastoji od istih sedam valutnih parova. Razmatramo cene na zatvaranju u pet jednominutnih intervala od 21:24h do 21:29h dana 07.08.2023. godine[8]. Kovarijaciona matrica prinosa je

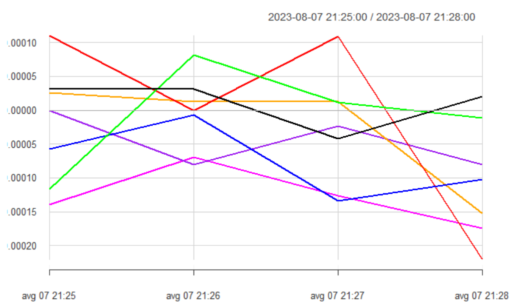
[8]Podaci su preuzeti sa https://finance.yahoo.com/.

iz $M_7(\mathbb{R})$ i ona, sa zaokruženim vrednostima njenih elemenata na 2 decimale, iznosi:

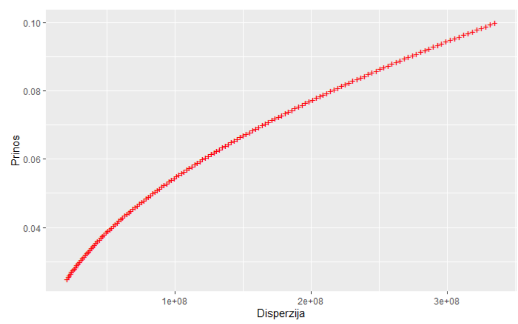
$$\Sigma = 10^{-6} \cdot \begin{bmatrix} 1.78 & -0.70 & 2.20 & -2.74 & -0.69 & -0.63 & 0.17 \\ -0.70 & 9.66 & 1.52 & -4.32 & -0.46 & -3.57 & 3.20 \\ 2.20 & 1.52 & 4.42 & 0.69 & 2.26 & -0.94 & 2.35 \\ -2.74 & -4.32 & 0.69 & 34.81 & 18.10 & 7.24 & 4.42 \\ -0.69 & -0.46 & 2.26 & 18.10 & 10.37 & 3.00 & 3.65 \\ -0.63 & -3.57 & -0.94 & 7.24 & 3.00 & 2.38 & -0.42 \\ 0.17 & 3.20 & 2.35 & 4.42 & 3.65 & -0.42 & 2.73 \end{bmatrix}.$$

Za ovu kovarijacionu matricu prinosa važi da je singularna, tj. $det(\Sigma) = 0$, pa njen inverz ne postoji. Kao što smo ranije pomenuli u ovom slučaju podstiče se korišćenje Mur-Penrozovog inverza, umesto običnog inverza, pri Markovicovoj optimizaciji portfolija.

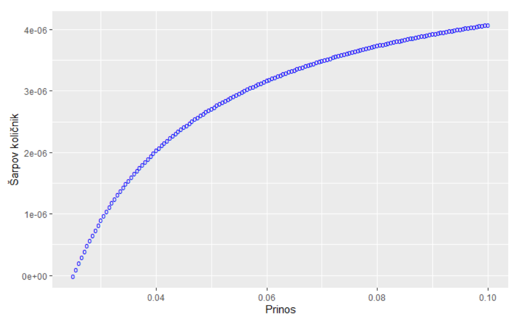
Na Slici 3.16 prikazane su minutne stope prinosa za posmatrane valutne parove.



Slika 3.16: Vrednosti minutnih prinosa posmatranih valutnih parova.



Slika 3.17: Grafik zavisnoti prinosa od disperzije pri korišćenju Mur-Penrozovog (+) inverza kovarijacione matrice prinosa.



Slika 3.18: Vrednost Šarpovog količnika u zavisnosti od prinosa.

Na Slici 3.17 prikazan je grafik zavisnosti očekivanog prinosa portfolija od disperzije, a na Slici 3.18 je prikazan grafik zavisnosti Šarpovog količnika od očekivanog prinosa portfolija pri bezrizičnoj stopi prinosa $r_f = 2.5\%$.

Glava 4

Optimalni izbor portfolija korišćenjem regularizacije

Koncept *osnovnog Markovicovog modela* za izbor portfolija često ne daje lepe rezultate kada se očekivani prinos i disperzija zamene njihovim uzoračkim ocenama. Pored toga, korišćenje ovog koncepta dovodi do ocenjivanja kovarijacione matrice prinosa i njenog inverza, što rezultira greškom ocene, koja se dodatno pojačava iz dva razloga:

- broj hartija od vrednosti je obično veoma veliki,
- prinosi hartija od vrednosti mogu biti visoko korelisani.

To dovodi do numerički loše uslovljenih problema, u smislu da čak i blaga promena ciljnog prinosa portfolija implicira ogromnu promenu optimalnih težina portfolija.

U ovom odeljku prikazaćemo tri tehnike regularizacije pomoću kojih vršimo stabilizaciju inverza matrice kovarijacije: grebenu (nazubljenu) regularizaciju[1], regularizaciju spektralnog odsecanja[2] i Landveber-Fridmanovu regularizaciju[3]. U svim ovim metodama pojavljivaće se tzv. regularizacioni parametar i problem da na adekvatan način izaberemo taj parametar, te nam je cilj da prikažemo metod za optimalni izbor regularizacionog parametra u zavisnosti od podataka.

[1] *engl.* Ridge regularization

[2] *engl.* Spectral cut-off regularization

[3] *engl.* Landweber-Fridman regularization

Dobijena regularizaciona pravila ćemo upoređivati sa portfolijom zasnovanim na konceptu osnovnog Markovicovog modela u pogledu odnosa empirijskog Šarpovog količnika.

Kao što je ranije spomenuto, tri najčešće korišćene tehnike regularizacije koje ćemo predstaviti u daljem nastavku su:

- *Grebena (nazubljena) regularizacija*, poznata i kao L_2 regularizacija (jer se kažnjava 2-norma optimalnih težina), je tehnika koja se koristi u statistici i statističkom učenju kako bi se smanjili efekti preprilagođenosti u modelima[4], posebno u regresionim modelima. Ovaj oblik regularizacije možemo posmatrati kao dodavanje dijagonalne matrice matrici kovarijacije.

- *Regularizacija spektralnog odsecanja* je tehnika koja utiče na spektralnu strukturu matrice eliminacijom komponenti koje mogu dovesti do preprilagođenosti. Spektralna struktura matrice odnosi se na raspored i svojstva sopstvenih vrednosti te matrice. U kontekstu kovarijacione matrice prinosa, sopstvene vrednosti daju informacije o korelacijama između različitih investicija. Da bismo izbegli preprilagođenost, spektralni sadržaj matrice potrebno je "odseći" na određenom nivou. Ključno je odabrati odgovarajući prag, kako bi se postigla ravnoteža između smanjenja preprilagođenosti i očuvanja relevantnih informacija iz podataka. Ova tehnika se često koristi zajedno sa drugim tehnikama regularizacije kako bi se postigao optimalan balans između tačnosti i stabilnosti modela.

- *Landveber-Fridmanova regularizacija* predstavlja iterativnu metodu, koja se primenjuje u optimizaciji portfolija radi unapređenja stabilnosti i tačnosti raspodele sredstava. Ova tehnika kombinuje Landveberovu iterativnu metodu za rekonstrukciju kovarijacione matrice sa Fridmanovim pravilom za odabir optimalnog parametra regularizacije.

Glavni cilj ovog odeljka je izvesti metodu zasnovanu na podacima za selekciju regularizacionog parametra na optimalan način. Pretpostavljamo da se investitor pri odlučivanju oslanja na očekivanu vrednost funkcije korisnosti, pri čemu je funkcija korisnosti data kao u (2.12).

[4] *engl.* overfitting

4.1 Regularizacija kao aproksimacija inverznog problema

Optimizacija portfolija zasnovana na konceptu *osnovnog Markovicovog modela* zahteva ocenjivanje nepoznatog očekivanog prinosa i nepoznate matrice kovarijacije vektora prinosa hartija od vrednosti na osnovu dostupnih podataka. Posebno je potrebna ocena inverza matrice kovarijacije. Uzoračka kovarijaciona matrica možda nije odgovarajuća jer može biti približno singularna, a ponekad čak nije ni invertibilna. Problem loše uslovljene matrice kovarijacije mora se rešiti, jer inverz takve matrice dramatično povećava grešku ocene i čini rešenje dobijeno osnovnim Markovicovim modelom nepouzdanim. Mnoge tehnike regularizacije mogu stabilizovati inverz. One se mogu podeliti u dve klase: regularizacije koje se direktno primenjuju na matricu kovarijacije i regularizacije izražene kao kazneni metod najmanjih kvadrata.

Posmatrajmo N rizičnih aseta sa slučajnim vektorom prinosa R_{t+1} i bezrizični aset sa poznatim prinosom R_t^f. Definišemo dodatni prinos sa $r_{t+1} = R_{t+1} - R_t^f$. Pretpostavimo da su dodatni prinosi nezavisni i jednako raspodeljeni sa srednjom vrednošću $\mathbf{r}$ i matricom kovarijacije Σ. Neka je ω N-dimenzioni vektor koji predstavlja udeo novca koji investitor ulaže u rizične asete, te je preostali deo $(1 - \mathbf{e}_N^T\omega)$ uložen u bezrizični aset, gde je $\mathbf{e}_N$ N-dimenzioni vektor jedinica. Dodatni prinos portfolija je stoga $\omega^T r_{t+1}$. Pretpostavlja se da investitor bira vektor ω kako bi maksimizirao funkciju korisnosti pri osnovnom Markovicovom modelu (kao što smo i razmatrali u poglavlju 2.2.):

$$U(\omega) = \omega^T\mathbf{r} - \frac{\gamma}{2}\omega^T\Sigma\omega,$$

pri čemu je γ koeficijent relativne averzije prema riziku. Optimalni portfolio je dat sa

$$\omega^* = \frac{1}{\gamma}\Sigma^{-1}\mathbf{r}.$$

Napomenimo još jednom, u ovom pristupu nemamo uslov $\mathbf{e}_N^T\omega = 1$.

Neka su r_t, $t = 1, \dots, T$, realizovani prinosi aseta i R matrica dimenzije $T \times N$, gde je t-ta vrsta jednaka r_t^T. Označimo $\Omega = E(r_t r_t^T) = \frac{E(R^T R)}{T}$. Kako je $\Sigma = E(r_t r_t^T) - E(r_t)E(r_t^T) = \Omega - \mathbf{r}\mathbf{r}^T$, to dobijamo:

$$\Sigma^{-1}\mathbf{r} = \left(\Omega - \mathbf{r}\mathbf{r}^T\right)^{-1}\mathbf{r} = \left(\Omega^{-1} + \frac{\Omega^{-1}\mathbf{r}\mathbf{r}^T\Omega^{-1}}{1 - \mathbf{r}^T\Omega^{-1}\mathbf{r}}\right)\mathbf{r} = \frac{\Omega^{-1}\mathbf{r}}{1 - \mathbf{r}^T\Omega^{-1}\mathbf{r}}$$

gde druga jednakost sledi iz Leme 1.2.3 za ažuriranje inverza matrice. Stoga

$$\omega^* = \frac{\Omega^{-1}\mathbf{r}}{\gamma\left(1 - \mathbf{r}^T\Omega^{-1}\mathbf{r}\right)} = \frac{\beta}{\gamma\left(1 - \mathbf{r}^T\beta\right)}, \tag{4.1}$$

gde je

$$\beta = \Omega^{-1}\mathbf{r} = E(R^TR)^{-1}E(R^T\mathbf{e}_T).$$

Možemo zameniti nepoznatu očekivanu vrednost $\mathbf{r}$ sa uzoračkom srednjom vrednošću $\hat{\mathbf{r}} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} r_t$, a matricu kovarijacije Σ zameniti sa uzoračkom matricom kovarijacije:

$$\hat{\Sigma} = \frac{\left(R - \mathbf{e}_T\hat{\mathbf{r}}^T\right)^T\left(R - \mathbf{e}_T\hat{\mathbf{r}}^T\right)}{T} = \frac{\tilde{R}^T\tilde{R}}{T}.$$

Zamenjujući $\mathbf{r}$ i Σ njihovim uzoračkim ocenama, dobijamo uzoračko optimalno rešenje problema optimizacije portfolija $\hat{\omega} = \frac{1}{\gamma}\hat{\Sigma}^{-1}\hat{\mathbf{r}}$. Pokazano je da se $\hat{\omega}$ može preformulisati kao u radu [12] (jednačina (15)) i kasnije u radu [4] na sledeći način

$$\hat{\omega} = \frac{\hat{\beta}}{\gamma\left(1 - \hat{\mathbf{r}}^T\hat{\beta}\right)},$$

gde $\hat{\beta}$ predstavlja ocenu dobijenu metodom najmanjih kvadrata parametra β u regresiji

$$1 = \beta^T r_{t+1} + u_{t+1},$$

što je ekvivalentno sa

$$\mathbf{e}_T = R\beta + u,$$

gde je R, kao što smo ranije definisali, matrica dimenzija $T \times N$ sa vrstama koje čine vektori r_t^T i ona predstavlja nezavisnu promenljivu, pri čemu je e_T zavisna promenljiva (koja je u ovoj regresiji konstantna). Pronalaženje parametra β može se posmatrati kao pronalaženje minimalnog rešenja metodom najmanjih kvadrata jednačine:

$$R\beta = \mathbf{e}_T. \tag{4.2}$$

To je tipični inverzni problem. Stabilnost prethodnog problema zavisi od karakteristika matrice $\hat{\Omega} = \frac{R^TR}{T}$. Mogu se javiti dva problema: aseti mogu biti visoko korelisani (tada je kovarijaciona matrica Σ bliska singularnoj) ili broj aseta može biti prevelik u odnosu na veličinu uzorka (tada je uzoračka kovarijaciona matrica (bliska) singularna dok u velikom broju slučajeva kovarijaciona matrica ne mora biti bliska singularnoj). U takvim slučajevima, $\hat{\Omega}$ obično ima neke sopstvene vrednosti blizu nule, što rezultira loše postavljenim problemom, tako da optimizacija portfolija postaje izazov. Ovi problemi se mogu opisati uslovnim brojem $\mathcal{K}$ koji, pri 2-normi, predstavlja odnos maksimalne i minimalne sopstvene vrednosti $\hat{\Omega}$. Veliki uslovni broj dovodi do nepouzdane ocene vektora težina portfolija ω.

Postoje različite tehike regularizacije koje se koriste kako bi se stabilizovalo rešenje jednačine (4.2), mi ćemo u nastavku razmatrati tri pomenute tehnike. Svaka metoda će dati različitu ocenu parametra β, označenu sa $\hat{\beta}$, i ocenu optimalnog rešenja portfolija ω^*, označenu sa $\hat{\omega}_\tau = \frac{\hat{\beta}_\tau}{\gamma\left(1-\hat{\mathbf{r}}^T\hat{\beta}_\tau\right)}$.

Matrica R dimenzije $T \times N$ može se posmatrati kao operator iz $\mathbb{R}^N$ (gde je skalarni proizvod definisan sa $\langle v, u\rangle = v^T u$) u $\mathbb{R}^T$ (gde je skalarni proizvod definisan sa $\langle \phi, \varphi\rangle = \frac{\phi^T\varphi}{T}$). Važi da je $\frac{R^T}{T}$ adjungovana matrica od R. Neka je $\left(\hat{\lambda}_j, \hat{\phi}_j, \hat{v}_j\right)$, $j = 1, 2, \ldots, N$, singularni sistem matrice R, tj. $R\hat{\phi}_j = \hat{\lambda}_j\hat{v}_j$, $\frac{R^T\hat{v}_j}{T} = \hat{\lambda}_j\hat{\phi}_j$. Štaviše, $\left(\hat{\lambda}_j^2, \hat{\phi}_j\right)$ su sopstvene vrednosti i ortonormirani sopstveni vektori matrice $\frac{R^TR}{T}$, dok $\left(\hat{\lambda}_j^2, \hat{v}_j\right)$ su nenula sopstvene vrednosti i ortonormirani sopstveni vektori matrice $\frac{RR^T}{T}$. Ako je $N < T$, lakše je izračunati $\hat{\phi}_j$ i $\hat{\lambda}_j^2$, $j = 1, \ldots, N$, koji predstavljaju ortonormirane sopstvene vektore i sopstvene vrednosti matrice $\frac{R^TR}{T}$, i zaključiti o spektru matrice $\frac{RR^T}{T}$. Naime, sopstveni vektori matrice $\frac{RR^T}{T}$ su $\hat{v}_j = \frac{R\hat{\phi}_j}{\hat{\lambda}_j}$ koji su povezani sa istim nenula sopstvenim vrednostima $\hat{\lambda}_j^2$. Pretpostavimo u nastavku da je $\tau > 0$ parametar regularizacije.

Grebena (nazubljena) regularizacija je uvedena od strane Hoerla [5] i Kenarda [6] (1970) [8] kao stabilnija alternativa naspram standardne ocene dobijene metodom najmanjih kvadrata i sa potencijalno manjim rizikom. Sastoji se od dodavanja dijagonalne matrice matrici $\frac{R^TR}{T}$. Za grebenu regularizaciju, u zavisnosti od vrednosti regularizacionog parametra definišemo vektor $\hat{\beta}_\tau$ koji figuriše u rešenju optimizacije, na sledeći način:

$$\hat{\beta}_\tau = \left(\frac{R^TR}{T} + \tau E\right)^{-1} \frac{R^T\mathbf{e}_T}{T}, \tag{4.3}$$

[5] Arthur E. Hoerl

[6] Robert W. Kennard

ili, ekvivalentno

$$\hat{\beta}_\tau = \sum_{j=1}^{N} \frac{\hat{\lambda}_j}{\hat{\lambda}_j^2 + \tau} (\mathbf{e}_T^T \hat{v}_j) \hat{\phi}_j.$$

Regularizacija spektralnog odsecanja odbacuje sopstvene vektore koji su povezani sa najmanjim sopstvenim vrednostima. Kod ove regularizacione tehnike, vektor $\hat{\beta}_\tau$ biramo kao:

$$\hat{\beta}_\tau = \sum_{\hat{\lambda}_j^2 > \tau} \frac{1}{\hat{\lambda}_j} (\mathbf{e}_T^T \hat{v}_j) \hat{\phi}_j.$$

Pri *Landveber-Fridmanovoj regularizaciji* pre svega biramo konstantu c uz uslov $0 < c < \frac{1}{||R||^2}$, gde $||R||$ predstavlja najveću sopstvenu vrednost matrice R. Rešenje jednakosti (4.2) može se iterativno izračunati kao:

$$\psi_k = \left(E - c\frac{R^T R}{T} \right) \psi_{k-1} + c\frac{R^T \mathbf{e}_T}{T}, k = 1, 2, \ldots, \frac{1}{\tau} - 1 \tag{4.4}$$

pri čemu je $\psi_0 = \frac{cR^T \mathbf{e}_T}{T}$, što ekvivalentno možemo zapisati na sledeći način:

$$\hat{\beta}_\tau = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{\hat{\lambda}_j} \left[1 - \left(1 - c\hat{\lambda}_j^2 \right)^{\frac{1}{\tau}} \right] \left(\mathbf{e}_T^T \hat{v}_j \right) \hat{\phi}_j.$$

Ovde, parametar regularizacije τ je takav da $\frac{1}{\tau} - 1$ predstavlja broj iteracija.

Napomena. Sve tri metode uključuju parametar regularizacije τ koji treba da konvergira ka nuli određenom brzinom kako T raste, da bi rešenje konvergiralo.

Eksplicitni izraz za ocene

Za tri navedene tehnike regularizacije važi jednakost:

$$R\hat{\beta}_\tau = M_T(\tau)\mathbf{e}_T,$$

gde je

$$M_T(\tau)\eta = \sum_{j=1}^{T} q\left(\tau, \hat{\lambda}_j^2 \right) \left(\eta^T \hat{v}_j \right) \hat{v}_j,$$

za svaki T-vektor η. Štaviše, $trM_T(\tau) = \sum_{j=1}^{T} q\left(\tau, \hat{\lambda}_j^2 \right)$. Funkcija q poprima različit oblik u zavisnosti od vrste regularizacije. Za grebenu regularizaciju važi da je $q\left(\tau, \hat{\lambda}_j^2 \right) = \frac{\hat{\lambda}_j^2}{\hat{\lambda}_j^2 + \tau}$, za regularizaciju spektralnog odsecanja važi $q\left(\tau, \hat{\lambda}_j^2 \right) =$

$I\left(\hat{\lambda}_j^2 \geq \tau\right)$, dok za Landveber-Fridmanovu regularizaciju imamo da je $q\left(\tau, \hat{\lambda}_j^2\right) = 1 - \left(1 - c\hat{\lambda}_j^2\right)^{\frac{1}{\tau}}$.

4.2 Šema regularizacije kao kazneni metod najmanjih kvadrata

Tradicionalni optimalni Markovicov portfolio ω^* se dobija iz (4.1), pri čemu je

$$\beta = \arg\min_{\beta} E\left[|1 - \beta^T r_t|^2\right].$$

Ako se očekivanje zameni uzoračkom sredinom $\hat{\mathbf{r}}$, problem postaje:

$$\hat{\beta} = \arg\min_{\beta} ||\mathbf{e}_T - R\beta||_2^2.$$

Kao što je već pomenuto, rešenje ovog problema može biti veoma nepouzdano ako je $R^T R$ bliska singularnoj. Da bismo izbegli ekstremno velika rešenja, možemo kazniti velike vrednosti uvodeći dodatni član kazne koji se primenjuje na normu β. Zavisno o normi koju odaberemo, dolazimo do različitih tehnika regularizacije.

Metod mosta

Metod mosta[7] u kontekstu regularizacije se odnosi na kombinovanje različitih vrsta regularizacija kako bi se postigla bolja performansa u modelima.

Za $\zeta > 0$, ocena dobijena metodom mosta je data formulom:

$$\hat{\beta}_\tau = \arg\min_{\beta} \left(||\mathbf{e}_T - R\beta||_2^2 + \tau \sum_{i=1}^{N} |\beta_i|^\zeta \right),$$

gde je τ kazneni član.

Metod mosta uključuje dva posebna slučaja. Za $\zeta = 1$ imamo Laso[8] regularizaciju (koju nećemo detaljnije razmatrati), dok za $\zeta = 2$ imamo grebeni metod. Izraz $\sum_{i=1}^{N} |\omega_i|^\zeta$ može se interpretirati kao trošak transakcija. On je linearan za Laso, dok je kvadratan za grebenu regularizaciju. Portfolio će biti proređen čim je $\zeta \leq 1$. Funkcija cilja je strogo konveksna kada je $\zeta > 1$, konveksna za $\zeta = 1$, dok više nije konveksna za $\zeta < 1$. Slučaj za $\zeta < 1$ se razmatra u radu [11].

[7] Bridge method

[8] *engl.* Least Absolute Shrinkage and Selection Operator (LASSO)

Grebeni (nazubljeni) metod

Interesantno je da ocena dobijena grebenom regularizacijom opisana u (4.3) može biti alternativno napisana kao kažnjavanje najmanje srednje-kvadratne greške pri 2-normi. Ono što se time dobija je da kažnjavamo velike vrednosti koeficijenata, čime povećavamo stabilnost ocena. Metod grebene regularizacije se, na ovaj način, svodi na problem određivanja ocene date formulom:

$$\hat{\beta}_\tau = \arg\min_{\beta} ||\mathbf{e}_T - R\beta||_2^2 + \tau||\beta||_2^2.$$

Za razliku od pomenute Laso regularizacije, grebeni metod ne daje proređen portfolio, već bira sve hartije od vrednosti uz mogućnost kratke prodaje.

4.3 Optimalni izbor regularizacionog parametra

Pre svega, uvodimo pojmove koji će nam biti neophodni u nastavku.

Definicija 4.3.1. Neka je $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ data sa $A = [a_{\cdot,j}]_{1\leq j\leq n}$, gde $a_{\cdot,j}$, za $j \in \{1,\dots,n\}$ predstavljaju kolone matrice A. Pod ortogonalnom projekcijom na matricu A, u oznaci $\hat{E}_A$ podrazumevamo ortogonalnu projekciju na potprostor $\mathcal{L}(\{a_{\cdot,j} \mid 1 \leq j \leq n\})$.

Neka je prostor $\mathcal{H}$ snabdevan skalarnim proizvodom $\langle .,. \rangle_{\mathcal{H}}$. Primetimo da skalarni proizvod $\langle .,. \rangle_{\mathcal{H}}$ indukuje normu $||.||_{\mathcal{H}}$ na sledeći način:

$$||a||_{\mathcal{H}} = \sqrt{\langle a, a\rangle_{\mathcal{H}}}, \text{ za sve } a \in \mathcal{H},$$

a potom, data norma indukuje metriku $d_{\mathcal{H}}$. Ukoliko je $(\mathcal{H}, d_{\mathcal{H}})$ kompletan prostor, tada $\mathcal{H}$ nazivamo *Hilbertovim*[9] *prostorom*

Definicija 4.3.2 (Kompletan ortonormirani niz). Neka je $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ ortonormirani niz u prostoru $\mathcal{H}$ koji je snabdeven skalarnim proizvodom. Za niz $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ kažemo da je *kompletan*, ukoliko za svako $\varphi \in \mathcal{H}$ važi

$$\varphi = \sum_{j=1}^{\infty} \langle \varphi, \varphi_j \rangle_{\mathcal{H}} \varphi_j. \tag{4.5}$$

[9]David Hilbert (1862-1943), nemački matematičar

Napomena. Razvoj (4.5) nazivamo *generalizovanim Furijeovim*[10] *razvojem*. U opštem slučaju ovakav razvoj ne mora biti konvergentan.

Definicija 4.3.3 (Hilbert-Šmitov[11] operator). Neka je $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ kompletan ortonormiran niz u Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$. Za operator $K : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ kažemo da je Hilbert-Šmitov ukoliko važi:

$$||K||_{HS} = \left(\sum_{j=1}^{\infty} ||K\varphi_j||^2\right)^{1/2} < +\infty.$$

Tada, broj $||K||_{HS}$ nazivamo Hilbert-Šmitovom normom operatora K.

Optimalni izbor regularizacionog parametra zavisi od konkretnog problema i željenog cilja. Često se preporučuje eksperimentisanje sa različitim metodama i evaluacija njihovih performansi kako bi se odredio najpogodniji regularizacioni parametar.

Prirodno je pomisliti da bi investitor želeo da izabere parametar τ koji maksimizuje očekivanu korisnost $E(U(\hat{\omega}_\tau))$ ili, ekvivalentno, minimizuje očekivanje funkcije gubitka $E(L_T(\tau))$, gde je funkcija gubitka definisana kao:

$$\begin{aligned}
L_T(\tau) &= U(\omega^*) - U(\hat{\omega}_\tau) \\
&= (\omega^* - \hat{\omega}_\tau)^T \mathbf{r} + \frac{\gamma}{2}\left(\hat{\omega}_\tau^T \Sigma \hat{\omega}_\tau - \omega^{*T}\Sigma\omega^*\right) \\
&= (\omega^* - \hat{\omega}_\tau)^T (\mathbf{r} - \gamma\Sigma\omega^*) + \frac{\gamma}{2}(\hat{\omega}_\tau - \omega^*)^T \Sigma (\hat{\omega}_\tau - \omega^*) \\
&= \frac{\gamma}{2}(\hat{\omega}_\tau - \omega^*)^T \Sigma (\hat{\omega}_\tau - \omega^*) . \qquad (4.6)
\end{aligned}$$

Naš cilj je da pružimo prikladan izraz za τ pri kriterijumu minimizacije $E(L_T(\tau))$. Važi da je $\hat{\omega}_\tau = \frac{\hat{\beta}_\tau}{\gamma\left(1-\hat{\mathbf{r}}^T\hat{\beta}_\tau\right)}$, pri čemu je $\hat{\beta}_\tau$ dato sa

$$\hat{\beta}_\tau = \frac{\hat{\Omega}_\tau^{-1} R^T \mathbf{e}_T}{T},$$

gde je $\hat{\Omega}_\tau^{-1}$ regularizovani inverz od $\hat{\Omega} = \frac{R^T R}{T}$. Iz jednakosti (4.1) znamo da se optimalna alokacija ω^* može zapisati kao $\frac{\beta}{\gamma(1-\mathbf{r}^T\beta)}$.

[10] Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830), francuski matematićar

[11] Erhard Schmidt (1876-1959), baltički matematičar

Dalje, primetimo da važi:

$$\begin{aligned}\gamma\left(\hat{\omega}_\tau-\omega^*\right) &= \frac{\hat{\beta}_\tau}{1-\hat{\mathbf{r}}^T\hat{\beta}_\tau}-\frac{\beta}{1-\mathbf{r}^T\beta}\\ &= \frac{\hat{\beta}_\tau-\beta}{(1-\hat{\mathbf{r}}^T\hat{\beta}_\tau)(1-\mathbf{r}^T\beta)}-\frac{\hat{\beta}_\tau(\mathbf{r}^T\beta)-\beta(\hat{\mathbf{r}}^T\hat{\beta}_\tau)}{(1-\hat{\mathbf{r}}^T\hat{\beta}_\tau)(1-\mathbf{r}^T\beta)}. \end{aligned}\tag{4.7}$$

Neka su λ_j^2, ϕ_j, za $j = 1, 2, \ldots, N$, sopstvene vrednosti i odgovarajući sopstveni vektori matrice Ω. Da bismo procenili (4.6), želimo dobijeni izraz da zapišemo u obliku reda primenom generalizovanog Furijeovog razvoja pri ortonormiranom nizu ϕ_j (pod pretpostavkom da N i T teže ka beskonačnosti), koristeći (4.7). Shodno činjenici da je skalarni proizvod bilinearna forma i da se u (4.7) pojavljuje nekoliko sabiraka, to se dobijeni generalizovani Furijeov razvoj razbija na sumu nekoliko redova, čije brzine konvergencije želimo da razmatramo. Da bismo mogli to da uradimo, neophodno je da pretpostavimo da β (ili ekvivalentno $\mathbf{r}$) zadovoljava određeni uslov regularnosti. Ovaj tip uslova može se pronaći u radovima [5] i [3].

Pretpostavka A:

(a) Za neko $\nu > 0$, imamo da je

$$\sum_{j=1}^{N}\frac{\langle \mathbf{r}, \phi_j\rangle^2}{\lambda_j^{2\nu+4}} < +\infty;$$

gde ϕ_j i λ_j^2 predstavljaju sopstvene vektore i sopstvene vrednosti od Ω.

(b) Σ je Hilbert-Šmitova matrica.

Napomena. *Pretpostavka* A(a) je ekvivalentna sa $\sum_{j=1}^{N}\frac{\langle\beta,\phi_j\rangle^2}{\lambda_j^{2\nu}} < +\infty$, jer je $\beta = \Omega^{-1}\mathbf{r}$.

Napomena. *Pretpostavka* A implicira posebno da je $||\beta||^2 < +\infty$.

Kao što smo već definisali, $\hat{E}_R$ predstavlja ortogonalnu projekciju na potprostor koji je razapet nad kolonama matrice R. Uvedimo oznaku $\beta_\tau = \hat{E}_R(\hat{\beta}_\tau)$.

Stav 4.3.1. Pod *Pretpostavkom A* i pretpostavkom da N i T teže ka beskonačnosti, imamo da je

$$\gamma^2\left(1-\mathbf{r}^T\beta\right)^2 E\left[(\hat{\omega}_\tau-\omega^*)^T\,\Sigma\,(\hat{\omega}_\tau-\omega^*)\right]\approx$$
$$\approx\frac{1}{T}E||R\left(\hat{\beta}_\tau-\beta\right)||^2+\frac{\left(\mathbf{r}^T\left(\beta_\tau-\beta\right)\right)^2}{\left(1-\mathbf{r}^T\beta\right)}.$$

Koristeći Stav 4.3.1 izvodimo zaključak da je problem minimizacije $E(L_T(\tau))$ ekvivalentan problemu minimizacije zbira:

$$\frac{1}{T}E||R\left(\hat{\beta}_\tau-\beta\right)||^2\quad+\quad\frac{\left(\mathbf{r}^T\left(\beta_\tau-\beta\right)\right)^2}{\left(1-\mathbf{r}^T\beta\right)}.\tag{4.8}$$

Oba sabirka izraza (4.8) zavise od nepoznate β i stoga ih treba aproksimirati.

U nastavku prikazujemo rezultate iz radova [2], [13], [14] i [6] koji daju rešenje problema aproksimacije ovih izraza. U pomenutim radovima je pokazano da je prvi sabirak izraza (4.8) jednak grešci predikcije modela $\mathbf{e}_T=R\beta+u$ uvećan za konstantu i pokazano je da se ta reskalirana srednje-kvadratna greška (RMSE[12]) može aproksimirati kriterijumom generalizovane unakrsne validacije:

$$GCV(\tau)=\frac{1}{T}\frac{||\left(E_T-M_T(\tau)\right)\mathbf{e}_T||^2}{\left(1-\frac{tr(M_T(\tau))}{T}\right)^2}.$$

Kada je reč o minimizaciji drugog sabirka izraza (4.8), koristeći da važi:

$$\hat{\mathbf{r}}^T\left(\beta_\tau-\beta\right)=\frac{\mathbf{e}_T^T}{T}\left(M_T(\tau)-E_T\right)R\beta,$$

pokazano je da se problem svodi na minimizaciju izraza:

$$\frac{\left(\mathbf{e}_T^T(M_T(\tau)-E_T)R\hat{\beta}_{\tilde{\tau}}\right)^2}{T^2\left(1-\hat{\mathbf{r}}^T\hat{\beta}_{\tilde{\tau}}\right)},\tag{4.9}$$

pri čemu je $\hat{\beta}_{\tilde{\tau}}$ ocena za β dobijena za neki asimptotski nepristrasan parametar $\tilde{\tau}$ ($\tilde{\tau}$ se može dobiti minimizacijom $GCV(\tau)$).

Na osnovu tih rezultata, sledi da je optimalna vrednost parametra τ definisana kao:

$$\hat{\tau}=\arg\min_{\tau\in H_T}\left\{GCV(\tau)+\frac{\left(\mathbf{e}_T^T\left(M_T(\tau)-E_T\right)R\hat{\beta}_{\tilde{\tau}}\right)^2}{T^2\left(1-\hat{\mathbf{r}}^T\hat{\beta}_{\tilde{\tau}}\right)}\right\},$$

[12] *engl.* Rescaled Mean Squared Error

pri čemu uzimamo da je $H_T = \{1, 2, \dots, T\}$ za regularizaciju spektralnog odsecanja i Landveber-Fridmanovu regularizaciju, dok za grebenu regularizaciju uzimamo $H_T = (0, 1)$.

4.4 Primer (regularizacija)

Razmatramo cene na zatvaranju sedam valutnih parova *EURCHF*, *EURGBP*, *EURJPY*, *EURUSD*, *GBPUSD*, *USDCHF* i *USDJPY*, dana 08.08.2023. počev od 19:30h, pri čemu posmatramo $T \in \{6, 8, 10, 12, 14\}$ opservacija[13]. Portfolio optimizujemo koristeći regularizaciona pravila i dobijene rezultate upoređujemo sa portfolijom dobijenim primenom osnovnog Markovicovog modela (pri čemu koristimo i običan i generalizovani inverz matrice kovarijacije).

Portfoliji koji se razmatraju su: portfolio dobijen osnovnim Markovicovim modelom korišćenjem običnog inverza (M), portfolio dobijen osnovnim Markovicovim modelom korišćenjem generalizovanog inverza (GinvM) grebeni-regularizacioni portfolio (Rdg), portfolio dobijen spektralnim odsecanjem (SC) i Landveber-Fridmanov portfolio (LF).

#	Model	Oznaka
1	Osnovni Markovicov model sa običnim inverzom	M
2	Osnovni Markovicov model sa generalizovanim inverzom	GinvM
3	Optimalni grebeni portfolio	Rdg
4	Optimalni portfolio dobijen spektralnim odsecanjem	SC
5	Optimalni Landveber-Fridmanov portfolio	LF

Tabela 4.1: Lista investicionih metoda

Tri regularizacione tehnike (Rdg, SC, LF) koje su uvedene kako bi se poboljšala optimalnost portfolija uključuju parametar regularizacije τ, pri čemu za $\tau = 0$ dobijamo Markovicov portfolio. Šeme grebene regularizacije, regularizacije spektralnog odsecanja i Landveber-Fridmanove regularizacije imaju zajedničku karakteristiku da transformišu sopstvene vrednosti kovarijacione matrice prinosa tako da dobijena ocena ima stabilniji inverz. Ova transformacija se vrši pomoću *funkcije prigušenja* $q(\tau, \lambda)$ specifične za svaki pristup.

[13]Podaci su preuzeti sa https://finance.yahoo.com/.

Kada je $\tau = 0$, u tom slučaju možemo reći da nema regularizacije. Međutim, kako se parametar τ povećava, regularizacija počinje da igra ulogu i menja težine portfolija kako bi poboljšala stabilnost i performanse.

Za regularizaciju spektralnog odsecanja, problem odabira argumenta τ koji minimizuje izraz:

$$\frac{1}{T}\frac{||\left(E_T - M_T(\tau)\right)\mathbf{e}_T||^2}{\left(1 - \frac{tr(M_T(\tau))}{T}\right)^2} + \frac{\left(\mathbf{e}_T^T\left(M_T(\tau) - E_T\right)R\hat{\beta}_{\tilde{\tau}}\right)^2}{T^2\left(1 - \hat{\mathbf{r}}^T\hat{\beta}_{\tilde{\tau}}\right)},$$

zbog načina na koji je definisana funkcija prigušenja $q(\tau, \lambda_j^2) = I(\lambda_j^2 \geq \tau)$, ekvivalentan je problemu odabira broja p najvećih sopstvenih vrednosti koji figurišu u tom izrazu, a da se pritom vrednost tog izraza minimizuje. Što je veći broj zadržanih sopstvenih vektora, to smo bliži Markovicovom portfoliju. Za vrednosti τ koji su manji od najmanje sopstvene vrednosti, SC portfolio je identičan klasičnom M portfoliju.

Landveber-Fridmanova regularizacija može biti implementirana na dva ekvivalentna načina:

- *iterativno*: Koristimo formulu (4.4), pri čemu je parametar τ takav da $\frac{1}{\tau} - 1$ predstavlja broj iteracija;
- *analizom sopstvenih vrednosti*: Regularizacioni parametar tražimo analogno kao pri regularizaciji spektralnog odsecanja, pri čemu sada koristimo funkciju prigušenja oblika $q(\tau, \lambda_j^2) = 1 - (1 - c\lambda_j^2)^{\frac{1}{\tau}}$

Pri iterativnom pristupu, veći broj iteracija odgovara manjoj vrednosti regularizacionog parametra τ. Uz to, za veliki broj iteracija ($\tau \approx 0$), regularizovani portfolio postaje veoma blizak Markovicovom portfoliju. U slučaju Landveber-Fridmanove metode, tražimo optimalan broj iteracija tako da $\hat{\omega}_\tau$ bude što bliže teorijski optimalnom rešenju optimizacije ω^*. U slučaju loše postavljenog problema najčešće imamo veoma mali broj iteracija, što odgovara vrednosti $\tau \in (0,1)$ koje nisu previše bliske nuli. Drugim rečima, u tom slučaju je $\hat{\omega}_\tau$ daleko od Markovicove alokacije $\hat{\omega}$ koja je poznata po lošim performansama.

Kada je reč o grebenoj (nazubljenoj) regularizaciji, ona se implementira slično kao regularizacija spektralnog odsecanja, s tim što se sada regularizacioni parametar τ ne bira više na diskretnom skupu, već na $H_T = (0,1)$, uz funkciju prigušenja $q(\tau, \lambda_j^2) = \frac{\lambda_j^2}{\lambda_j^2 + \tau}$.

Razmatrajmo spektralna svojstva matrice $\frac{RR^T}{T}$, pri čemu je T broj opservacija, a za zadato T matrica R predstavlja matricu prinosa dimenzija $T \times 7$, za posmatranih sedam valutnih parova. U Tabeli 4.2 vidimo da za posmatrane vrednosti $T \in \{6, 8, 10, 12, 14\}$ broja opservacija, sve sopstvene vrednosti matrice $\frac{RR^T}{T}$ su bliske nuli, kao i da u svih pet slučajeva imamo kovarijacionu matricu Σ koja je bliska singularnoj i loše uslovljena.

T	$\hat{\lambda}^2_{min}$	$\hat{\lambda}^2_{max}$	$\det(\Sigma)$	$\mathcal{K}(\Sigma)$
6	$3.26 \cdot 10^{-10}$	$1.71 \cdot 10^{-07}$	$-1.05 \cdot 10^{-68}$	$7.09 \cdot 10^{17}$
8	$1.15 \cdot 10^{-24}$	$1.73 \cdot 10^{-07}$	$1.99 \cdot 10^{-37}$	750.56
10	$1.76 \cdot 10^{-23}$	$1.92 \cdot 10^{-07}$	$1.86 \cdot 10^{-37}$	694.81
12	$1.23 \cdot 10^{-26}$	$1.60 \cdot 10^{-07}$	$1.46 \cdot 10^{-37}$	637.17
14	$1.27 \cdot 10^{-24}$	$1.70 \cdot 10^{-07}$	$2.91 \cdot 10^{-37}$	611.23

Tabela 4.2: Spektralna svojstva matrice $\frac{RR^T}{T}$ i determinanta i uslovni broj kovarijacione matrice prinosa za posmatrane opservacije.

	T	$\tilde{\tau}$	$\hat{\tau}$
SC	6	$8.91 \cdot 10^{-10}$	$1.53 \cdot 10^{-09}$
	8	$3.81 \cdot 10^{-09}$	$5.97 \cdot 10^{-09}$
	10	$3.13 \cdot 10^{-09}$	$2.64 \cdot 10^{-08}$
	12	$2.72 \cdot 10^{-09}$	$2.72 \cdot 10^{-09}$
	14	$1.27 \cdot 10^{-24}$	$3.94 \cdot 10^{-10}$
LF	6	$2.20 \cdot 10^{-09}$	$2.20 \cdot 10^{-09}$
	8	$2.67 \cdot 10^{-10}$	$1.15 \cdot 10^{-24}$
	10	$3.13 \cdot 10^{-09}$	$2.73 \cdot 10^{-10}$
	12	$2.72 \cdot 10^{-09}$	$4.27 \cdot 10^{-09}$
	14	$3.94 \cdot 10^{-10}$	$1.21 \cdot 10^{-23}$

Tabela 4.3: Vrednost izabranih regularizacionih parametra $\tilde{\tau}$ i $\hat{\tau}$ pri investicionim metodama SC i LF, u zavisnosti od broja opservacija T.

U Tabeli 4.3 su prikazane vrednosti optimalno izabranih regularizacionih parametara. Optimalnu vrednost parametra τ pri korišćenu LF i SC investicionih metoda tražimo, kao što je već rečeno, u skupu sopstvenih vrednosti matrice $\frac{RR^T}{T}$, te je ovaj regularizacioni parametar jednostavnije izabrati u ovim slučajevima nego li pri Rdg investicionoj metodi, gde parametar biramo iz skupa $(0, 1)$.

investicioni metod	optimalne težine portfolija ω
M	$(89637.57,\ 872978.29,\ 151415.53,\ 628043.09,\ -1133214.74,\ -241554.16,\ -367304.58)$
GinvM	$(89637.57,\ 872978.29,\ 151415.53,\ 628043.09,\ -1133214.74,\ -241554.16,\ -367304.58)$
SC	$(-811288.76,\ 114600.69,\ -42329.47,\ -331727.85,\ -229664.92,\ 87244.09,\ -27862.37)$
LF	$(355139.6,\ 10602964.7,\ 3221100.5,\ 5976951.9,\ -5339191.0,\ -9017150.5,\ -1341708.5)$
Rdg	$(-2126388.32,\ 127347.63,\ -69210.98,\ -128982.15,\ -217523.88,\ 1027498.23,\ -208752.97)$

Tabela 4.4: Optimalne težine portfolija ω u zavisnosti od investicionog metoda, pri broju opservacija $T = 8$ i pri očekivanom prinosu $r_m = 0.03$.

Preostaje još da uporedimo rezultate optimizacije portfolija pri korišćenju M i GinvM strategija, kao i pri korišćenju regularizacionih metoda Rdg, SC i LF. Upoređivanje rezultata vršimo razmatranjem vrednosti Šarpovog količnika.

Pretpostavimo da imamo bezrizični aset sa prinosom $r_f = 0.02$. U Tabeli 4.4 prikazane su optimalne težine portfolija pri pomenutim investicionim metodima, za broj opservacija $T = 8$ i očekivani prinos $r_m = 0.03$. Možemo videti da u svih pet slučajeva dobijamo alokacije sa veliki udelima kratkih pozicija. Takođe primećujemo da pri metodima SC, LF i Rdg ne dobijamo da je suma težina portfolija jednaka 1, a to je i očekivano, jer se ove regularizacione tehnike ne zasnivaju na toj pretpostavci, već se deo kapitala $(1 - \mathbf{e}_N^T\omega)$ ulaže u bezrizični portfolio. U Tabeli 4.5 prikazane su vrednosti empirijskog Šarpovog količnika u zavisnosti od broja opservacija T i investicionog metoda, pri čemu očekivani prinos portfolija r_m uzima vrednosti 0.03, 0.04 i 0.05.

Nakon izbora optimalne vrednosti $\hat{\tau}$ za regularizacioni parametar τ, kao što je dato Tabelom 4.3, empirijski Šarpov količnik računamo po formuli:

$$SR_T(\hat{\omega}_{\hat{\tau}}) = \frac{\hat{\omega}_{\hat{\tau}}^T\mathbf{r} - r_f}{(\hat{\omega}_{\hat{\tau}}^T\Sigma\hat{\omega}_{\hat{\tau}})^{\frac{1}{2}}}.$$

Analizom vrednosti empirijskog Šarpovog količnika, možemo videti Rdg regularizacioni metod najčešće daje najgore rezultate optimizacije portfolia. Strategije GinvM i M daju najbolje rezultate, s tim što se strategija GinvM izdvaja kao bolja jer u slučaju $T = 6$ (kada je determinanta uzoračke kovarijacione matrice prinosa toliko bliska nuli, da uzoračku kovarijacionu matricu prinosa možemo smatrati singularnom) strategijom M nećemo dobiti nikakav rezultat.

		$r_m = 0.03$	$r_m = 0.04$	$r_m = 0.05$
T	investicioni metod	Šarpov količnik	Šarpov količnik	Šarpov količnik
6	M	/	/	/
	GinvM	$3.86 \cdot 10^{-06}$	$5.79 \cdot 10^{-06}$	$6.94 \cdot 10^{-06}$
	SC	$1.48 \cdot 10^{-06}$	$2.22 \cdot 10^{-06}$	$2.67 \cdot 10^{-06}$
	LF	$1.49 \cdot 10^{-06}$	$2.24 \cdot 10^{-06}$	$2.69 \cdot 10^{-06}$
	Rdg	$3.66 \cdot 10^{-06}$	$5.48 \cdot 10^{-06}$	$6.58 \cdot 10^{-06}$
8	M	$7.81 \cdot 10^{-06}$	$1.17 \cdot 10^{-05}$	$1.41 \cdot 10^{-05}$
	GinvM	$7.81 \cdot 10^{-06}$	$1.17 \cdot 10^{-05}$	$1.41 \cdot 10^{-05}$
	SC	$7.12 \cdot 10^{-07}$	$1.07 \cdot 10^{-06}$	$1.28 \cdot 10^{-06}$
	LF	$3.73 \cdot 10^{-07}$	$5.60 \cdot 10^{-07}$	$6.72 \cdot 10^{-07}$
	Rdg	$2.63 \cdot 10^{-07}$	$3.95 \cdot 10^{-07}$	$4.74 \cdot 10^{-07}$
10	M	$4.75 \cdot 10^{-06}$	$7.13 \cdot 10^{-06}$	$8.55 \cdot 10^{-06}$
	GinvM	$4.75 \cdot 10^{-06}$	$7.13 \cdot 10^{-06}$	$8.55 \cdot 10^{-06}$
	SC	$5.46 \cdot 10^{-07}$	$8.20 \cdot 10^{-07}$	$9.84 \cdot 10^{-07}$
	LF	$1.26 \cdot 10^{-06}$	$1.89 \cdot 10^{-06}$	$2.27 \cdot 10^{-06}$
	Rdg	$1.20 \cdot 10^{-07}$	$1.79 \cdot 10^{-07}$	$2.15 \cdot 10^{-07}$
12	M	$5.00 \cdot 10^{-06}$	$7.50 \cdot 10^{-06}$	$9.00 \cdot 10^{-06}$
	GinvM	$5.00 \cdot 10^{-06}$	$7.50 \cdot 10^{-06}$	$9.00 \cdot 10^{-06}$
	SC	$1.57 \cdot 10^{-06}$	$2.35 \cdot 10^{-06}$	$2.83 \cdot 10^{-06}$
	LF	$1.12 \cdot 10^{-06}$	$1.67 \cdot 10^{-06}$	$2.01 \cdot 10^{-06}$
	Rdg	$2.89 \cdot 10^{-07}$	$4.34 \cdot 10^{-07}$	$5.21 \cdot 10^{-07}$
14	M	$3.08 \cdot 10^{-06}$	$4.61 \cdot 10^{-06}$	$5.54 \cdot 10^{-06}$
	GinvM	$3.08 \cdot 10^{-06}$	$4.61 \cdot 10^{-06}$	$5.54 \cdot 10^{-06}$
	SC	$6.41 \cdot 10^{-07}$	$9.61 \cdot 10^{-07}$	$1.15 \cdot 10^{-06}$
	LF	$6.41 \cdot 10^{-07}$	$9.61 \cdot 10^{-07}$	$1.15 \cdot 10^{-06}$
	Rdg	$2.58 \cdot 10^{-07}$	$3.86 \cdot 10^{-07}$	$4.64 \cdot 10^{-07}$

Tabela 4.5: Vrednost Šarpovog količnika u zavisnosti od broja opservacija T i investicionog metoda, pri očekivanom prinosu portfolija r_m koji uzima vrednosti 0.03, 0.04 i 0.05.

Analiza empirijskog Šarpovog količnika dovela bi nas do zaključka da je GinvM strategija (odnosno strategija zasnovana na konceptu osnovnog Markovicovog modela dobijena korišćenjem generalizovanog inverza) najbolja strategija među razmatranim strategijama, međutim, to nije zaista tako. Naime, korišćenjem GinvM strategije, na osnovu dostupnih cena akcija, ocenjujemo kovarijacionu matricu prinosa i očekivani prinos, ne razmatrajući pri tom grešku ocene, a zatim maksimizujemo funkciju korisnosti. Dobijeni rezultat optimizacije postaje i suviše ambiciozan, te iz tog razloga, empirijski Šarpov količnik ne možemo smatrati naročito relevantnim za upoređivanje rezultata optimizacije pri različitim strategijama.

Na osnovu prethodnog razmatranja, koncept maksimizacije očekivanja funkcije korisnosti, odnosno, ekvivalentno, koncept minimizacije očekivanja funkcije gubitka biće strategija koja će dovesti do boljeg rešenja optimizacije portfolija. S obzirom na to, regularizacione strategije SC, LF i Rdg, koje se zasnivaju upravo na konceptu minimizacije očekivanja funkcije gubitka, pružaju bolje rezultate optimizacije od strategija M i GinvM.

U nastavku upoređujemo regularizacione stratergije SC, LF i Rdg.

Koristeći Stav 4.3.1 uočavamo da se očekivani gubitak može aproksimirati na sledeći način:

$$E(L_T(\tau)) \approx \frac{1}{2\gamma(1-\mathbf{r}^T\beta)^2}\left[\frac{1}{T}E||R\left(\hat{\beta}_\tau-\beta\right)||^2+\frac{\left(\mathbf{r}^T\left(\beta_\tau-\beta\right)\right)^2}{(1-\mathbf{r}^T\beta)}\right],$$

a potom, koristeći već pomenute rezultate iz radova [6], [13], [14] i [2], dobijamo aproksimaciju:

$$E(L_T(\tau)) \approx \Theta\cdot\left[\frac{1}{T}\frac{||\left(E_T-M_T(\tau)\right)\mathbf{e}_T||^2}{\left(1-\frac{tr(M_T(\tau))}{T}\right)^2}+\frac{\left(\mathbf{e}_T^T\left(M_T(\tau)-E_T\right)R\hat{\beta}_{\tilde{\tau}}\right)^2}{T^2\left(1-\hat{\mathbf{r}}^T\hat{\beta}_{\tilde{\tau}}\right)}\right], \quad (4.10)$$

pri čemu je

$$\Theta=\frac{1}{2\gamma(1-\mathbf{r}^T\beta)^2} \quad (4.11)$$

i parametar $\tilde{\tau}$ je takav da minimizuje izraz:

$$\frac{1}{T}\frac{||\left(E_T-M_T(\tau)\right)\mathbf{e}_T||^2}{\left(1-\frac{tr(M_T(\tau))}{T}\right)^2}.$$

U Tabeli 4.6 prikazana je vrednost očekivanog gubitka u korisnosti u zavisnosti od vrednosti koeficijenta averzije prema riziku γ, broja opservacija T i regularizacionog metoda SC, LF i Rdg.

	očekivani gubitak u korisnosti		
T	SC	LF	Rdg
6	$\Theta_1\cdot 0.8506$	$\Theta_1\cdot 0.7636$	Θ_1
8	$\Theta_2\cdot 0.7775$	$\Theta_2\cdot 0.9726$	Θ_2
10	$\Theta_3\cdot 1.1192$	$\Theta_3\cdot 1.2531$	Θ_3
12	$\Theta_4\cdot 0.8412$	$\Theta_4\cdot 0.9950$	Θ_4
14	$\Theta_5\cdot 0.5330$	$\Theta_5\cdot 1.0057$	Θ_5

Tabela 4.6: Vrednost očekivanog gubitka u korisnosti u zavisnosti od koeficijenta averzije prema riziku γ, broja opservacija T, pri investicionim metodama SC, LF i Rdg.

U tabeli se pojavljuju pozitivne konstante Θ_i, definisane kao u (4.11), koje zavise od koeficijenta averzije prema riziku γ. Primećujemo da uspeh razmatranih strategija zavisi od posmatranog uzorka, odnosno važi:

- strategija SC je najbolja u slučajevima $T \in \{8, 12, 14\}$,
- strategija LF je najbolja u slučaju $T = 6$,
- strategija Rdg je najbolja u slučaju $T = 10$.

Glava 5

Zaključak

Kroz ovaj master rad upoznali smo se sa problemom optimizacije portfolija u slučaju kada je kovarijaciona matrica prinosa finansijskih instrumenata, koji se razmatraju, singularna ili bilska singularnoj. Problem optimizacije portfolija, u tim situacijama, rešili smo upotrebom Mur-Penrozovog inverza kovarijacione matrice prinosa ili korišćenjem regularizacije.

Razmatranjem očekivanog gubitka u korisnosti, kao najmerodavnije strategije pri optimizaciji portfolija, ustanovili smo da razmatrane regularizacione strategije (grebena regularizacija, regularizacija spektralnog odsecanja i Landveber-Fridmanova regularizacija) daju bolje rezultate od osnovnog Markovicovog modela (bilo da se u Markovicovom modelu koristi običan ili Mur-Penrozov inverz kovarijacione matrice prinosa).

Uveli smo pojam Mur-Penrozovog inverza kao generalizaciju inverza matrica i predstavili njegove osobine. Za razliku od običnog inverza matrica, koji je definisan isključivo za kvadratne matrice čija je determinanta različita od nule, Mur-Penrozov inverz postoji za proizvoljnu, ne obavezno kvadratnu matricu. Primetili smo da, upotrebom Mur-Penrozovog inverza umesto običnog inverza kovarijacione matrice prinosa, u Markovicovom metodu, prevazilazimo problem numeričke nestabilnosti u slučajevima kada je kovarijaciona matrica bliska singularnoj i numerički loše uslovljena.

Kada govorimo o generalizovanim inverzima matrica, pored Mur-Penrozovog inverza postoji i Drazinov[1] inverz matrica, kao uopštenje inverza kvadratnih matrica. Pod Drazinovim inverzom kvadratne matrice A podrazumevamo matricu X, za koju

[1]Michael Peter Drazin (1929), američki matematičar

postoji fiksirano $k \in \mathbb{N}$ i koja zadovoljava jednačine:

$$A^k XA = A^k, \quad XAX = X, \quad AX = XA.$$

Ove generalizacije običnog inverza matrica mogu poslužiti za nalaženja optimalnog rešenja sistema linearnih jednačina (upotrebu Mur-Penrozovog inverza u ovu svrhu smo prikazali u ovom radu), a pored toga, Drazinov inverz može se koristiti za rešavanje sistema linearnih diferencijalnih jednačina prvog reda.

Generalizovani inverzi matrica poslužili su kao motivacija za razvoj *teorije generalizovanih inverza*, koja predstavlja mladu, ali istovremeno i popularnu oblast matematike.

Kada je reč o regularizaciji, razmatrali smo regularizaciju spektralnog odsecanja, grebenu (nazubljenu) regularizaciju i Landveber-Fridmanovu regularizaciju. Među ovim regularizacionim metodama ne postoji univerzalno najbolja, već njihova uspešnost zavisi od posmatranih podataka.

Postupak regularizacije nastao je sa idejom smanjenja preprilagođenosti u modelima. Naime, pri optimizaciji portfolija od suštinske važnosti su podaci o prinosu portfolija u posmatranim vremenskim intervalima, a na osnovu tih podataka mi želimo da procenimo prinos u budućnosti. Na prvi pogled, Lagranžov polinom za ekstrapolaciju vrednosti funkcije deluje kao dobra strategija za procenu prinosa u trenucima nakon dostupnih podataka. Međutim, na cenu nekog finansijskog instrumenta u određenom trenutku utiču brojni faktori, a primenom Lagranžovog polinoma pri određivanju prinosa u budućnosti, u potpunosti bismo zanemarili uticaj tih faktora (došlo bi do preprilagođenosti modela). Uloga regularizacije jeste da uzima u obzir uticaj tih spoljašnjih faktora (što se implementira kroz upotrebu funkcije prigušenja q, čiji je oblik bio specifičan za svaki regularizacioni metod) i na taj način se preprilagođenost u modelima smanjuje. Pored posmatranih regularizacionih metoda, često se koristi i Laso regularizacija, koja u ovom radu nije razmatrana, a o kojoj se može pročitati u radu [22].

Bibliografija

[1] Anderson and Theodore Wilbur. *An introduction to multivariate statistical analysis. Vol. 2.* New York: Wiley, 1958.

[2] Donald WK. Andrews. Asymptotic optimality of generalized cl, cross-validation, and generalized cross-validation in regression with heteroskedastic errors. *Journal of Econometrics 47.2-3*, pages 359–377, 1991.

[3] Richard Blundell, Xiaohong Chen, and Dennis Kristensen. Semi-nonparametric iv estimation of shape-invariant engel curves. *Econometrica 75.6*, pages 1613–1669, 2007.

[4] Mark Britten-Jones. The sampling error in estimates of mean-variance efficient portfolio weights. *The Journal of Finance 54.2*, pages 655–671, 1999.

[5] Marine Carrasco, Jean-Pierre Florens, and Eric Renault. Linear inverse problems in structural econometrics estimation based on spectral decomposition and regularization. *Handbook of econometrics 6*, pages 5633–5751, 2007.

[6] Peter Craven and Grace Wahba. Smoothing noisy data with spline functions: estimating the correct degree of smoothing by the method of generalized cross-validation. *Numerische mathematik 31.4*, pages 377–403, 1978.

[7] Werner H. Greub. Linear algebra. vol. 23. *Springer Science & Business Media*, 2012.

[8] Arthur E. Hoerl and Robert W. Kennard. Ridge regression: Biased estimation for nonorthogonal problems. *Technometrics 12.1*, pages 55–67, 1970.

[9] Roger A. Horn and Charles R. Johnson. Matrix analysis. *Cambridge university press*, 2012.

[10] Miloš Arsenović i Milutin Dostanić i Danko Jocić. *Teorija mere, funkcionalna analiza, teorija operatora.* Univerzitet u Beogradu, 2012.

[11] Huang Jian, Joel L. Horowitz, and Shuangge Ma. Asymptotic properties of bridge estimators in sparse high-dimensional regression models. *The Annals of Statistics*, pages 587–613, 2008.

[12] John D. Jobson and Bob Korkie. Statistical inference in two-parameter portfolio theory with multiple regression software. *Journal of Financial and Quantitative Analysis 18.2*, pages 189–197, 1983.

[13] Ker-Chau Li. Asymptotic optimality of cl and generalized cross-validation in ridge regression with application to spline smoothing. *The Annals of Statistics*, pages 1101–1112, 1986.

[14] Ker-Chau Li. Asymptotic optimality for cp, cl, cross-validation and generalized cross-validation: discrete index set. *The Annals of Statistics*, pages 958–975, 1987.

[15] Harry M. Markowitz. Portfolio selection. *Journal of finance*, 7.1:71–91, 1952.

[16] Pavle Mladenović. *Verovatnoća i statistika.* Univerzitet u Beogradu, 2008.

[17] Eliakim H. Moore. On the reciprocal of the general algebraic matrix. *Bulletin of the american mathematical society 26*, pages 294–295, 1920.

[18] Roger Penrose. A generalized inverse for matrices. In Cambridge University Press, editor, *Mathematical proceedings of the Cambridge philosophical society*, volume 51, No. 3, 1955.

[19] Odell Piziak. Full rank factorization of matrices. *Mathematics Magazine 72 no.3*, pages 193–201, 1999.

[20] Rana and K. Inder. An introduction to measure and integration. vol. 45. *American Mathematical Soc.*, 2002.

[21] G. W. Stewart. Gauss, statistics, and gaussian elimination. *Journal of Computational and Graphical Statistics, 4(1)*, pages 1–11, 1995.

[22] Robert Tibshirani. Regression shrinkage and selection via the lasso. *Journal of the Royal Statistical Society Series B: Statistical Methodology 58.1*, pages 267–288, 1996.

Biografija autora

Danijela Stanojević rođena je 14. marta 1999. godine u Jagodini, gde je završila Osnovnu školu „Goran Ostojić”, kao nosilac diplome „Vuk Karadžić” i učenica generacije. Gimnaziju „Svetozar Marković”, prirodno-matematički smer, završila je 2017.godine, takođe, kao nosilac diplome „Vuk Karadžić”. Učestvovala je na takmičenjima iz matematike, fizike i hemije i osvajala nagrade na regionalnim i republičkim takmičenjima iz ovih oblasti. U julu 2017.godine upisuje Matematički fakultet Univerziteta u Beogradu, smer Matematika, modul Statistika, aktuarska i finansijska matematika. Osnovne akademske studije završava 2022.godine i iste godine upisuje master akademske studije na istom smeru i modulu. Oblasti interesovanja su joj verovatnoća i statistika, finansijska matematika, kao i aktuarska matematika.