СРПСКА АКАДЕМИЈА НАУКА И УМЕТНОСТИ

# ЗБОРНИК РАДОВА

Књ. LXIX

## МАТЕМАТИЧКИ ИНСТИТУТ

Књ. 8

БЕОГРАД
1960

З Б О Р Н И К   Р А Д О В А

Књ. LXIX

МАТЕМАТИЧКИ ИНСТИТУТ

Књ. 8

ACADÉMIE SERBE DES SCIENCES ET DES ARTS

# RECUEIL DE TRAVAUX

TOME LXIX

## L'INSTITUT MATHÉMATIQUE

№ 8

Rédacteur
*RADIVOJE KAŠANIN*
Membre de l'Académie

Présenté à la IV Séance du 24 mai 1960 de la Section des Sciences Mathématiques et Naturelles de l'Académie Serbe des Sciences et des Arts

BEOGRAD
1960

СРПСКА АКАДЕМИЈА НАУКА И УМЕТНОСТИ

# ЗБОРНИК РАДОВА

Књ. LXIX

## МАТЕМАТИЧКИ ИНСТИТУТ

Књ. 8

Уредник
Академик *РАДИВОЈЕ КАШАНИН*

Примљено на IV скупу 24 маја 1960 Одељења природно-математичких наука
Српске академије наука и уметности

ИЗДАВАЧКА УСТАНОВА
Научно дело
БЕОГРАД
1960

Слог: Издавачке установе „Научно дело“, Београд, Вука Караџића 5
Штампа и повез: Графичког предузећа „Академија“, Београд, Космајска 28.

## САДРЖАЈ — TABLE DE MATIÈRES


Страна

1. ЈОВАН КАРАМАТА — О Cantor-овим бројним системима . . . . . . . 1
JOVAN KARAMATA — Sur les systèmes numériques de Cantor . . . . . 7

2. СЛОБОДАН АЉАНЧИЋ — О неким новијим резултатима из тригонометриске апроксимације . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 9
SLOBODAN ALJANČIĆ — Quelques résultats récents sur l'approximation par polynômes trigonométriques . . . . . . . . . . . . . . . . . 51

3. ВЛАДЕТА ВУЧКОВИЋ — Један $O$-инверзан став . . . . . . . . . . . 53
VLADETA VUČKOVIĆ — Ein $O$-Inversionssatz . . . . . . . . . . . . 58

4. ЂОРЂЕ МУШИЦКИ — Једна аксиоматика електродинамике . . . . . . 59
DJORDJE MUŠICKI — Une axiomatique de l'électrodynamique . . . . . 72

5. ВЛАДЕТА ВУЧКОВИЋ и ВЕЛИМИР СИМОНОВИЋ — Збирљивост Fourier-ових редова Stirling-овим поступцима збирљивости . . . . . 73
VLADETA VUČKOVIĆ und VELIMIR SIMONOVIĆ — Limitierbarkeit Fourierscher Reihen mittels Stirlingscher Verfahren . . . . . . . . . . . 82

6. ЗОРА ПЕТРИЋ — О апсолутној конвергенцији неких ортогоналних редова . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 83
ZORA PETRIĆ — Sur la convergence absolue de certaines séries orthogonales . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 92

7. РАСТКО СТОЈАНОВИЋ — О кретању непрекидних деформабилних материјалних система са коначним бројем параметара . . . . . . . . . 93
RASTKO STOJANOVITCH — On the motion of continuous deformable material systems with a finite number of parameters . . . . . . . . . . 109

8. ДРАГОМИР СИМЕУНОВИЋ — О критеријумима за решавање Riccati-еве једначине помоћу квадратура . . . . . . . . . . . . . . . . . . 109
DRAGOMIR SIMEUNOVIĆ — Sur la solution de l'équation différentielle de Riccati à l'aide de quadratures . . . . . . . . . . . . . . . . . 114

9. БОГДАН БАЈШАНСКИ — Увођење топологије фамилијом релација . . 115
BOGDAN BAJŠANSKI — L'introduction de topologie par une famille de relations . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 130

10. БРАНИСЛАВ МАРТИЋ — Примедба на једну стереометриску неједначину М. Петровића . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 131
BRANISLAV MARTIĆ — Remarque sur une inégalité stéréometrique de M. Petrovitch . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 132

11. NEDELJKO PAREZANOVICH and JOVAN PETRICH — A solution of the system of balance equations of gaseous combustion products by „Univac 60" digital computing machine . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 133
НЕДЕЉКО ПАРЕЗАНОВИЋ и ЈОВАН ПЕТРИЋ — Решење система једначина равнотеже гасних продуката сагоревања помоћу дигиталне машине "Univac 60" . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 148

12. ВЕЉКО ВУЈИЧИЋ — Идентификовање трајекторија тачке променљиве масе са аутопаралелама . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 151
VELJKO VUJIČIĆ — Identification of dynamical trajectories of a variable mass as autoparallels . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 156

*Зборник радова Српске академије наука и уметности LXIX*
*Математички институт књ. 8, 1960*
*Recueil des travaux de l'Académie Serbe des Sciences et d'Arts LXIX*
*Institut Mathématique № 8, 1960*

J. КАРАМАТА

# О CANTOR-ОВИМ БРОЈНИМ СИСТЕМИМА

CANTOR-ови ставови о развијању реалних бројева у редове облика (2) су нешто допуњени и дат је прегледнији доказ.

У једном од својих првих радова G. CANTOR [2] (види и [1], [3], [5] и [6]) је проучавао могућност једнозначног претстављања реалних бројева редовима облика

$$\frac{d_1}{q_1}+\frac{d_2}{q_1 q_2}+\frac{d_3}{q_1 q_2 q_3}+\cdots$$

и добио ове резултате[1]:

*Нека је* $\{q_n\}$ *низ природних бројева подвргнутих једино услову*

$$q_n \geqq 2, \ \forall\, n \varepsilon N. \tag{1}$$

*Сваки реалан број* $t$, $0 < t \leqq 1$, *може се претставити на један и само један начин бесконачним редом облика*

$$t=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{q_1 q_2 \cdots q_n}, \tag{2}$$

*тако да су „децимале"* $d_n$ *цели бројеви који задовољавају услов*

$$0 \leqq d_n \leqq q_n-1, \ \forall\, n \varepsilon N. \tag{3}$$

Претпоставка да је ред (2) бесконачан садржи у себи услов

$$d_n>0 \ \text{за бесконачно много } n \varepsilon N. \tag{4}$$

---

[1] У овом раду систематски употребљавамо ове ознаке и скраћенице: $N$ — низ природних бројева, $0 \bar{\varepsilon} N$; $Q$ — скуп рационалних бројева; $R$ — скуп реалних бројева; $A \Longrightarrow B$ — „$A$ имплицира $B$" или „из $A$ следи $B$"; $A \rightleftarrows B$ — „из $A$ следи $B$ и обрнуто"; $\exists$ — постоји (најмање један); $\forall$ — ма који (ма какав био); $\forall\, x \varepsilon N$ — ма који природни број $x$; $(a, b)$ — највећи заједнички делитељ бројева $a$ и $b$.

Овај став следи из чињенице што су при оваквом развитку децимале $d_n$ дате изразима

$$d_n=[q_1 q_2 \dots q_n t]^* - q_n [q_1 q_2 \dots q_{n-1} t]^*, \quad n \varepsilon N, \tag{5}$$

где је

$$[x]^* = \text{највећи цео број који је} < x.$$

Заиста, ако ставимо

$$t_n = q_1 q_2 \dots q_{n-1} t - [q_1 q_2 \dots q_{n-1} t]^*, \quad n=2, 3, \dots, \quad t_1 = t, \tag{6}$$

и из (5) и (6) елиминишемо заграде [ ]*, биће

$$q_n t_n = d_n + t_{n+1}, \quad \forall n \varepsilon N, \tag{7}$$

а отуда следи

$$t_n = \frac{d_n}{q_n} + \frac{d_{n+1}}{q_n q_{n+1}} + \frac{d_{n+2}}{q_n q_{n+1} q_{n+2}} + \cdots, \quad \forall n \varepsilon N, \tag{8}$$

што за $n=1$ даје $t_1 = t$, тј. ред (2).

При томе

$$(5) \Longrightarrow (3)$$

јер је

$$0 \leqq [nx]^* - n[x]^* \leqq n-1, \quad \forall n \varepsilon N \text{ и } x \varepsilon R,$$

а

$$(6) \text{ и } (8) \Longrightarrow (4)$$

јер је

$$x - [x]^* > 0, \quad \forall x \varepsilon R.$$

Исто тако лако можемо увидети да је под условима (3) и (4) развитак (2) једнозначан, јер

$$(3), (4) \text{ и } (8) \Longrightarrow 0 < t_n \leqq 1, \quad \forall n \varepsilon N, \tag{9}$$

а према (2) и (8) је

$$t = \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{d_\nu}{q_1 q_2 \dots q_\nu} + \frac{t_n}{q_1 q_2 \dots q_{n-1}};$$

отуда следи да је са (3) и (4) низ $\{d_n\}$ једнозначно одређен изразима (5).

Напомињемо да све ово важи за $\forall q_n \varepsilon R$ ако је само

$$0 < q_1 q_2 \dots q_n \to \infty, \quad n \to \infty;$$

тада децимале $d_n$ нису дате обрасцем (5) већ са (7) и

$$d_n = [q_n t_n]^*,$$

(види W. Sierpinski [4]).

Поред овог става Cantor даје и два критеријума да би $t \varepsilon Q$, и то:

a. *Ако низ природних бројева* $\{q_n\}$ *задовољава поред услова* (1) *још и услов*

$$\forall\ k \varepsilon N,\ \exists\ n_k \varepsilon N,\ \text{такво да } k \text{ дели } q_1 q_2 \ldots q_n,\ \forall\, n \geqq n_k, \tag{10}$$

*тада, да би* $t \varepsilon Q$, *потребно је и довољно да*

$$\exists\ n_0 \varepsilon N \ \text{такво да је } d_n = q_n - 1,\ \forall\, n \geqq n_0 .$$

b. *Ако низ* $\{q_n\}$ *задовољава услов* (1) *и ако је он периодичан почев од извесног n-a, да би* $t \varepsilon Q$, *потребно је и довољно да и низ децимала* $\{d_n\}$ *буде периодичан почев од извесног индекса n.*

Приметимо најпре да је и критеријум a. непосредна последица обрасца (5), и да из овога можемо добити и следећи нешто прецизнији резултат:

c. *Нека је* $C \subseteq Q$, *такав да* $a/b \varepsilon C$ ако је $(a, b) = 1$ *и ако*

$$\exists\ k \varepsilon N \ \text{такво да } b \text{ дели } q_1 q_2 \ldots q_{n-1},\ \forall\, n \geqq k.$$

*Да би збир t реда* (2) *био број скупа C, тј. да би* $t \varepsilon C$, $0 < t \leqq 1$, *потребно је и довољно да*

$$\exists\ k \varepsilon N \ \text{такво да је } d_n = q_n - 1,\ \forall\, n \geqq k.$$

Јер, ако $b$ дели $q_1 q_2 \ldots q_{n-1}$, биће, према (5),

$$d_n = q_1 q_2 \ldots d_n t - 1 - q_n (q_1 q_2 \ldots q_{n-1} t - 1) = q_n - 1,\ \forall\, n \geqq k\,;$$

обрнуто, ако ово важи, биће

$$t = \sum_{n=1}^{k-1} \frac{d_n}{q_1 \ldots q_n} + \sum_{n=k}^{\infty} \frac{q_n - 1}{q_1 \ldots q_n} = \sum_{n=1}^{k-1} \frac{d_n}{q_1 \ldots q_n} + \frac{1}{q_1 \ldots q_{k-1}} \varepsilon C.$$

Ако низ $\{q_n\}$ испуњава услов (10) тада је $C = Q$, па је према томе Cantor-ов став a. садржан у c.

Изгледа, међутим, да се у општем случају, тј. кад се о низу $\{q_n\}$ ништа не претпостави, не могу добити задовољавајући критеријуми за рационалност збира $t$ редова облика (2).

Ипак постоји потпуна аналогија између развијања рационалних бројева у редове облика (2) и у периодичне децималне разломке ако при томе, правило које важи за децималне разломке овако формулишемо:

Сваки рационални број

$$t = \frac{a}{b},\ \ 0 < a < b,\ \ (a, b) = 1 \ \text{ или } \ t = a = b = 1, \tag{11}$$

1*

може се једнозначно развити у бесконачан периодичан децималан разломак облика

$$t=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d_n}{10^n}, \quad d_n\in\{0, 1, 3,\ldots, 9\}, \quad \forall n\in N;$$

ако са $l$ означимо дужину периоде а са $k-1$ број цифара које претходе периоду, тада су $k$ и $l$ најмањи природни бројеви такви да

$$b \text{ дели } 10^{k-1}(10^l-1);$$

најзад, $\exists\, t'\in Q$ такво да је

$$d_n\, 10^{l-1}+d_{n+1}\, 10^{l-2}+\cdots+d_{n+l-1}=t'\,(10^l-1), \quad \forall\, n\geqq k.$$

Познато је наиме да

$$\forall \quad b\in N, \quad \exists \quad k, l\in N \text{ такви да } b \text{ дели } 10^{k-1}(10^l-1),$$

и, ма како изгледало на први поглед изненађујуће, слично важи и кад низ десетица ($q_n=10$, $\forall\, n\in N$) заменимо произвољним низом $\{q_n\}$ ако је само $q_n\geqq 2$, $\forall\, n\in N$; наиме,

$$\left.\begin{array}{l}\forall\, b\in N, \ \exists \text{ бесконачан скуп } N_b\subseteq N, \text{ такав да } b \text{ дели} \\ q_1\, q_2\ldots q_{n-1}\,(q_n\, q_{n+1}\ldots q_{m-1}-1), \quad \forall\, n, m\in N_b.\end{array}\right\} \tag{12}$$

Шта више, ако је $t\in Q$, облика (11), и ако образујемо ма који од скупова $N_b$ који одговара имениоцу $b$ броја $t$, тада $\exists\, t'\in Q$ такво да је

$$\begin{aligned}d_n\, q_{n+1}\cdots q_{m-1}+d_{n+1}\, q_{n+2}\cdots q_{m-1}+\cdots+d_{m-2}\, q_{m-1}+d_{m-1}=\\ =t'\,(q_n\, q_{n+1}\cdots q_{m-1}-1), \quad \forall\, n, m\in N_b.\end{aligned} \tag{13}$$

Да бисмо ово увидели, приметимо најпре да према (6)

$$t\in Q \Longrightarrow t_n\in Q, \quad \forall\, n\in N,$$

тако да можемо, према (9), ставити

$$t_n=\frac{a_n}{b_n} \quad \text{са} \quad a_n, b_n\in N, \ 0< a_n< b_n,$$

$$(a_n, b_n)=1 \text{ или } a_n=b_n=1$$

и

$$t=t_1=\frac{a_1}{b_1}=\frac{a}{b},$$

а тада се (6) своди на

$$\frac{a\, q_1\, q_2\cdots q_{n-1}}{b}=[q_1\, q_2\cdots q_{n-1}\, t]^{*}+\frac{a_n}{b_n}. \tag{14}$$

Из (14) видимо да

$$b_n \text{ дели } b, \ \forall n \in N,$$

и да се, према томе, низ $\{t_n\}$ састоји само из коначног броја различитих чланова.

Даље можемо показати да је

$$t_n = t_m \rightleftharpoons b \text{ дели } q_1 q_2 \dots q_{n-1}(q_n q_{n+1} \dots q_{m-1} - 1). \tag{15}$$

Ово следи непосредно из

$$q_1 q_2 \dots q_{n-1}(q_n q_{n+1} \dots q_{m-1} - 1)\frac{a}{b} = [q_1 q_2 \dots q_{m-1} t]^* - [q_1 q_2 \dots q_{n-1} t]^* + t_m - t_n .$$

а ову једначину добићемо из (6).

Како низ $\{t_n\}$ може имати само коначно много различитих чланова, то се извесни чланови морају поновити бесконачно много пута, па ако означимо са $N_b \subseteq N$ скуп индекса једног таквог бесконачног низа, тј.

$$t_n = t_m \rightleftharpoons n, m \in N_b, \tag{16}$$

тада видимо да

$$(15) \text{ и } (16) \Longrightarrow (12),$$

јер број $b \in N$ можемо произвољно бирати.

Ако ставимо још

$$t_n = t_m = t', \ \forall \ n, m \in N_b,$$

и ако приметимо да из (8) следи

$$t_n = \frac{d_n}{q_n} + \frac{d_{n+1}}{q_n q_{n+1}} + \dots + \frac{d_{m-1}}{q_n q_{n+1} \dots q_{m-1}} + \frac{t_m}{q_n q_{n+1} \dots q_{m-1}},$$

то из (15) и ове једначине добивамо и тврђење (13).

Напоменимо још да услов облика (13) претставља истовремено и критеријум, иако веома сложен, за рационалност збира редова облика (2). Јер, ако постоји број $t' \in Q$ и бесконачан скуп $N_b \subseteq N$ такав да (13) важи, тада је $t \in Q$. Заиста, ако са

$$n < m < r < s < \dots$$

означимо један бесконачан низ бројева из $N_b$, биће, према (13),

$$\frac{d_n}{q_n} + \frac{d_{n+1}}{q_n q_{n+1}} + \dots + \frac{d_{m-1}}{q_n q_{n+1} \dots q_{m-1}} = t'\left(1 - \frac{1}{q_n \dots q_{m-1}}\right),$$

$$\frac{d_m}{q_m} + \frac{d_{m+1}}{q_m q_{m+1}} + \dots + \frac{d_{r-1}}{q_m q_{m+1} \dots q_{r-1}} = t'\left(1 - \frac{1}{q_m \dots q_{r-1}}\right),$$

$$\frac{d_r}{q_r} + \frac{d_{r+1}}{q_r q_{r+1}} + \dots + \frac{d_{s-1}}{q_r q_{r+1} \dots q_{s-1}} = t'\left(1 - \frac{1}{q_r \dots q_{s-1}}\right),$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$$

а како је, према (8),

$$t_n = \frac{d_n}{q_n} + \ldots + \frac{d_{m-1}}{q_n q_{n+1} \cdots q_{m-1}} + \frac{t_m}{q_n q_{n+1} \cdots q_{m-1}},$$

$$t_m = \frac{d_m}{q_m} + \ldots + \frac{d_{r-1}}{q_m q_{m+1} \cdots q_{r-1}} + \frac{t_r}{q_m q_{m+1} \cdots q_{r-1}},$$

$$t_r = \frac{d_r}{q_r} + \ldots + \frac{d_{s-1}}{q_r q_{r+1} \cdots q_{s-1}} + \frac{t_s}{q_r q_{r+1} \cdots q_{s-1}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

то је

$$t_n = t' \left(1 - \frac{1}{q_n q_{n+1} \cdots q_{m-1}} + \frac{1}{q_n q_{n+1} \cdots q_{m-1}} - \frac{1}{q_n q_{n+1} \cdots q_{r-1}} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{q_n q_{n+1} \cdots q_{r-1}} - \ldots \right) = t' \varepsilon Q, \quad \text{а} \quad t_n \varepsilon Q \Longrightarrow t \varepsilon Q.$$

Одавде можемо добити и CANTOR-ов критеријум b. Јер ако су низови $\{q_n\}$ и $\{d_n\}$ периодични са периодом $l_1$, односно $l_2$, тада ће (13) бити испуњено ако за скуп $N_b$ узмемо извесну аритметичку прогресију чија је разлика једнака најмањем заједничком садржатељу бројева $l_1$ и $l_2$.

Обрнуто, ако је $t \varepsilon Q$ и низ $\{q_n\}$ периодичан са периодом $l$, тада из (5) и (12) следи да и низ $\{d_n\}$ мора бити периодичан са периодом која је дељива са $l$. Јер, ако ставимо

$$q = q_n q_{n+1} \cdots q_{n+l-1},$$

и (12) применимо на низ

$$q_1, q_2, \ldots, q_{n-1}, q, q, q, \ldots,$$

добићемо да

$$\exists\, r \varepsilon N \text{ тако да } b \text{ дели } q_1 q_2 \ldots q_{n-1} (q^r - 1),$$

а отуда следи, према (15), да је

$$t_n = t_{n+rl}, \quad \forall\, n \geqq n_0.$$

Како, према (5),

$$q_n = q_m \text{ и } t_n = t_m \Longrightarrow d_n = d_m,$$

јер је

$$d_m = [q_1 q_2 \ldots q_{n-1} (q_n q_{n+1} \ldots q_{m-1} - 1)\, t + q_1 q_2 \ldots q_{n-1} q_m t]^\star -$$

$$- q_m [q_1 q_2 \ldots q_{n-1} (q_n q_{n+1} \ldots q_{m-1} - 1)\, t + q_1 q_2 \ldots q_{n-1} t]^\star =$$

$$= [q_1 q_2 \ldots q_{n-1} q_m t]^\star - q_m [q_1 q_2 \ldots q_{n-1} t]^\star,$$

то мора и низ $[d_n]$ бити периодичан, са периодом дужине $rl$.

*(Примљено 17-VI-1960)*

## НАВОДИ

[1] T. BRODEN — Über Darstellung von reellen Funktionen mit ... *Math. Ann.* **51** (1889), 299—320, § 1.

[2] G. CANTOR — Über die einfachen Zahlensysteme. *Zeitschr. für Math. u. Phys.* **14** (1869), 121—128, или *Gesammelte Abhandl.* Berlin, 1932, 35—42.

[3] G. FABER — Über die Abzählbarkeit der rationalen Zahlen. *Math. Ann.* **60** (1905), 196—203.

[4] W. SIERPINSKI — Sur quelques algorithmes pour développer les nombres réels en séries. *C. R. Soc. Sciences de Varsovie* (1911), 66—77.

[5] M. STEPHANOS — Sur une propriété remarquable des nombres incommensurables. *Bull. Soc. Math. France* **7** (1878—79), 81—83.

[6] E. STRAUSS — Eine Verallgemeinerung der dekadischen Schreibweise nebst funktionentheoretischer Anwendung. *Acta Math.* **11** (1887—8), 13—18.

# SUR LES SYSTÈMES NUMÉRIQES DE CANTOR

Par J. KARAMATA (Genève)

Soit $\{q_n\}$ une suite de nombres naturels satisfaisant à l'unique condition

$$q_n \geqq 2, \ \forall n \varepsilon N.$$

G. CANTOR [2] a montré que tout nombre réel $t$, $0 < t \leqq 1$, est développable d'une seule manière en série de la forme

$$t = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{q_1 q_2 \cdots q_n}, \tag{1}$$

à condition que la suite des „décimales" $\{d_n\}$ soit une suite d'entiers tels que

$$0 \leqq d_n \leqq q_n - 1,$$

et que

$$0 < d_n, \text{ pour une infinité de } n.$$

Il montre en outre que, a) si

$$\forall k, \ \exists n_k \varepsilon N \text{ tel que } k \text{ divise } q_1 q_2 \ldots q_n, \ \forall n \geqq n_k \tag{2}$$

alors, $t \varepsilon Q$ si et seulement si

$$d_n = q_n - 1, \text{ à partir d'un } n,$$

b) si la suite $\{q_n\}$ est périodique à partir d'un $n$, alors $t \varepsilon Q$ si et seulement si la suite $\{d_n\}$ est périodique à partir d'un $n$.

On montre que le premier théorème est une conséqueuce très simple du fait que la suite des décimales $\{d_n\}$ est donnée par

$$d_n = [q_1 q_2 \dots q_n t]^\star - q_n [q_1 q_2 \dots q_{n-1} t]^\star, \tag{3}$$

où $[x]^\star$ désigne le plus grand entier $< x$. Il suffit en effet de poser

$$t_n \overset{\text{def}}{=\!=} q_1 q_2 \dots q_{n-1} t - [q_1 q_2 \dots q_{n-1} t]^\star,$$

pour $n = 2, 3, \dots$, et $t_1 = t$.

La proposition a) est de même une conséquence immédiate de (3), car on en déduit sans peine la suivante.

Soit $C \subseteq Q$ tel que $\frac{a}{b} \varepsilon C$ si et seulement si $(a, b) = 1$ et s'il existe $k$ tel que

$$b \text{ divise } q_1 q_2 \dots q_{n-1}, \ \forall n \geqq k;$$

pour que $t \varepsilon C$, $0 < t \leqq 1$, il faut et il suffit que

$$\exists \ k \varepsilon N \text{ tel que } d_n = q_n - 1, \ \forall n \geqq k.$$

Ce résultat contient la proposition a) de Cantor car $(2) \Longrightarrow C = Q$.

On peut de même en déduire la proposition b) en montrant au préalable que $\forall b \varepsilon N$, $\exists$ un ensemble infini $N_b \subseteq N$ tel que

$$b \text{ divise } q_1 q_2 \dots q_{n-1} (q_n q_{n+1} \dots q_{m-1} - 1), \quad \forall n, m \varepsilon N_b;$$

il en découle une analogie presque complète entre les développements des nombres rationnels en séries de la forme (1) et leur développement en fractions décimales.

*Зборник радова Српске академије наука и уметности LXIX*
*Математички институт књ. 8, 1960*
*Recueil des travaux de l'Académie Serbe des Sciences et d'Arts LXIX*
*Institut Mathématique № 8, 1960*

С. АЉАНЧИЋ

# О НЕКИМ НОВИЈИМ РЕЗУЛТАТИМА ИЗ ТРИГОНОМЕТРИСКЕ АПРОКСИМАЦИЈЕ[1]

1. УВОД. (i) Нека је $C$ простор непрекидних и периодичких функција периоде $2\pi$. Једном за свагда претпоставићемо да је средња вредност функције $f \varepsilon C$ једнака нули, тј.

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = 0\,.^{2}$$

Нека је $T_n(f)\,(n=1,2,\ldots)$ *поступак апроксимације* који свакој функцији $f \varepsilon C$ координира одређени тригонометриски полином $T_n(f; x)$ реда $\leqq n$. Такав поступак апроксимације је, например, низ *делимичних сума* $s_n(f)$ и низ *аритметичких средина* $\sigma_n(f)$ Fourier-овог реда функције $f$ или низ тригонометриских полинома *најбоље апроксимације* $T_n^*(f)$ *функције* $f$.

За одређени поступак апроксимације $T_n(f)$, величина

$$\Delta_C(f; T_n) = \|f - T_n\|_C = \max_{0 \leqq x \leqq 2\pi} |f(x) - T_n(f; x)|$$

је *отступање* полинома $T_n(f)$ од функције $f$.

Нека је $M \subset C$. Скуп отступања

$$\{\Delta_C(f; T_n)\}_{f \varepsilon M} \tag{1.1}$$

карактерише поступак апроксимације $T_n(f)$ у односу на класу M *у целини*. У вези са овим скупом могу се поставити неколико питања:

---

[1] У овом експозиторном чланку изложена су нека питања из тригонометриске апроксимације, о којој, нарочито у најновије време, постоји богата литература. Чланак је нешто употпуњени семинар из наведене области који је одржан у летњем семестру 1960 на Природно-математичком факултету у Београду.

[2] Ово није никакво битно ограничење за $f$.

(А) За одређени поступак апроксимације $T_n(f)$ и дату класу функција М оценити с горње стране скуп (1.1). Такав исказ, типа[3]

$$f \varepsilon M \Longrightarrow \Delta_C(f; T_n) \leqq K\varphi(n)$$

зове се *директан став*.

(В) За одређени поступак апроксимације $T_n(f)$ и дату функцију $\varphi(n)$, одредити класу функција М, за коју је $\varphi(n)$ мајоранта скупа (1.1). Такав исказ, типа

$$\Delta_C(f; T_n) \leqq K\varphi(n) \Longrightarrow f \varepsilon M$$

зове се *инверзан став*.

(С) За одређени поступак апроксимације $T_n(f)$ одредити класу функција М и функцију $\varphi(n)$, тако да за пар $(M, \varphi)$ важи и директан и инверзан став. Такав исказ, типа

$$f \varepsilon M \Longleftrightarrow \Delta_C(f; T_n) \leqq K\varphi(n)$$

зове се *став еквиваленције*.

На исказе ове природе указали су још 1908 године H. Lebesgue [22*a*] и de la Vallée Poussin [40*b*], а први директан став (за поступак $s_n(f)$) потиче од H. Lebesgue-а [22*b*, *c*]. Значајан корак унапред претстављају радови D. Jackson-а [19*b*] и С. Н. Бернштейн-а [7*a*, *b*], који су дали први директан односно инверзан став за најбољу апроксимацију функције $E_n(f)$. A. Zygmund-у [44*b*] припада први нетривијалан став еквиваленције за $E_n(f)$.

(ii) Код директних ставова поставља се и питање најбоље могуће константе $K$ за одређену класу М, или, што је исто, да се одреди величина

$$E_C[M; T_n(f)] = \sup_{f \varepsilon M} \Delta_C(f; T_n).$$

$E_C[M; T_n(f)]$ је *најбоља апроксимација класе* М *поступком* $T_n(f)$. Само изузетно могуће је ову тачно израчунати; зато се прибегава одређивању њеног асимптотског понашања или њеног реда величине када $n \to \infty$.

Први асимптотски образац за најбољу апроксимацију класе функција (за поступак $s_n(f)$) дао је А. Н. Колмогоров [21], а прва тачна вредност најбоље апроксимације једне класе функција (за поступак $E_n(f)$) потиче од J. Favard-а [13*a*, *b*].

(iii) Могло би се очекивати да ће за одређени поступак апроксимације $T_n(f)$ најбоља апроксимација класе М, $E_C[M; T_n(f)]$, брже тежити нули када $n \to \infty$ уколико је класа М ужа, тј. уколико о њеним елементима $f$ више претпоставимо. Међутим, ово није увек случај. Има поступака апроксимације $T_n(f)$, например $\sigma_n(f)$ (E. Hille [18]), који сужавањем класе М дају све бољу апроксимацију, али само до извесне границе — свако даље сужавање класе М ту апроксимацију

[3] $K$ на разним местима уопште означава различите константе. $K_{p,q,r}, \dots$ значи да оне зависе од параметара $p, q, r, \dots$ Ако није од интереса да се истакне константа $K$, писаћемо $O[\varphi(n)]$.

више не побољшава сем у тривијалном случају функције идентички једнаке нули. Прецизније, извесним поступцима апроксимације $T_n(f)$ одговара функција $\varphi_T(n) \to 0$, $n \to \infty$, и класа функција $M_T$, тако да

1° $\Delta_C(f; T_n) = o[\varphi_T(n)] \Longrightarrow f(x) \equiv 0$;

2° за пар $(M_T, \varphi_T)$ важи став еквиваленције.

За такве поступке $T_n(f)$ кажемо да се *засићују (сатурирају)*. $\varphi_T(n)$ је *најбоља апроксимација поступка* $T_n(f)$. Класа $M_T$ је *класа засићења (сатурације)* поступка $T_n(f)$.

Исказ о класи сатурације неког поступка који се засићује је, дакле, један став еквиваленције. Но тај став еквиваленције (коме одговара пар $(M_T, \varphi_T)$) битно се разликује од ставова еквиваленције тог истог поступака за парове $(M, \varphi)$ такве да $\varphi_T/\varphi \to 0$ када $n \to \infty$. Зато код поступака који се засићују овом специјалном ставу еквиваленције дајемо нарочито име — *став сатурације*.

Појам сатурације увео је J. Favard [13 *c*]. За поступке апроксимације који су остварени неким поступком збирљивости $\Gamma_n(f)$ примењеним на Fourier-ов ред функције $f$,

$$\Gamma_n(f) = \Gamma_n(f; x) = \sum_{\nu=1}^{n} \gamma_\nu^n (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x),$$

од реда величине $1 - \gamma_\nu^n$ зависи најбоља апроксимација тим поступком. Прецизније (J. Favard [13 *d*]), поступак $\Gamma_n(f)$ се засићује и најбоља апроксимација тим поступком је реда $\varphi_\Gamma(n)$ ако постоје две позитивне константе $K_\nu^{(1)}$ и $K_\nu^{(2)}$ такве да је

$$(1.2) \qquad 0 < K_\nu^{(1)} \varphi_\Gamma(n) \leqq |1 - \gamma_\nu^n| \leqq K_\nu^{(2)} \varphi_\Gamma(n) \text{ за свако } \nu = 1, 2, \ldots, n.$$

Први став сатурације (за поступак $\sigma_n(f)$) следио је из резултата до којих су дошли G. Alexits [3*a*] и M. Zamansky [42*a*].

(iv) Поред простора $C$, аналогна разматрања могу се спровести и у другим просторима. Ми ћемо се овде задржати још и на *апроксимацији у средњем*, тј. на апроксимацији у смислу метрике у $L^p$, $1 \leqq p \leqq \infty$ [4]. Уводећи *отступање у средњем*, полинома $T_n(f)$ од функције $f \varepsilon L^p$,

$$\Delta_{L^p}(f; T_n) = \| f - T_n \|_{L^p} = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} | f(x) - T_n(f; x) |^p \, dx \right\}^{1/p}$$

[4] $L^\infty$ је простор $M$ скоро свуда ограничених функција у коме је

$$\| f \|_M = \underset{0 \leqq x \leqq 2\pi}{\sup \operatorname{ess}} | f(x) |$$

коначан број. Кад пишемо $p \geqq 1$ под тим подразумевамо само $1 \leqq p < \infty$.

постављају се аналогни проблеми за скуп

$$\{\Delta_{L^p}(f; T_n)\}_{f \in M},$$

где је сада $M \subset L^p$, односно за величину

$$E_{L^p}[M; T_n(f)] = \sup_{f \in M} \Delta_{L^p}(f; T_n).$$

(v) Овде ћемо (уз већ класичне) изложити најновије резултате о исказима типа (A), (B), (C), и још неке који са овима стоје у вези, за неке специјалне поступке апроксимације: најбољу апроксимацију функције, делимичне суме Fourier-ова реда, њене средине Cesàro-вог, Hölder-овог, Riesz-овог, Rogozinski-евог, de la Vallée-Poussin-овог типа, затим за de la Vallée-Poussin-ов и Jackson — de la Vallée Poussin-ов интеграл, као и за опште линеарне поступке и оне дефинисане суматорном функцијом. Уопште неће бити речи о апроксимацији интерполационим тригонометриским полиномима; за ова, као и друга питања тригонометриске апроксимације упућујемо на монографије DE LA VALLÉE-POUSSIN-а [40*a*], D. JACKSON-а [19*a*], Н. И. АХИЕЗЕР-а [1] и И. П. НАТАНСОН-а [26*a*].

## 2. КЛАСЕ ФУНКЦИЈА

2.1. КЛАСЕ ДЕФИНИСАНЕ МОДУЛОМ НЕПРЕКИДНОСТИ. (i) Нека $f \in C$. Величина

$$\omega(\delta) = \omega(\delta; f) = \max_{|h| \leq \delta} \max_{0 \leq x \leq 2\pi} |f(x+h) - f(x)| = \max_{|h| \leq \delta} \| f(x+h) - f(x) \|_C$$

је *модул непрекидности* функције $f$.

За свако $f \in C$, модул непрекидности, посматран као функција од $\delta$, не опада и тежи нули када $\delta \to 0$. Међутим, ово нису једине карактеристичне особине модула непрекидности. Да би дата функција $\varphi(\delta)$ била модул непрекидности неке функције $f$, *потребно* је и *довољно* (С. М. Никольский [27*d*]) да је

1) $\varphi(0) = 0$,

2) $\varphi(\delta)$ не опада,

3) $\varphi(\delta)$ је непрекидна функција од $\delta$,

4) $\varphi(\delta + \eta) \leqq \varphi(\delta) + \varphi(\eta)$ за свако $\delta \geqq 0$ и $\eta \geqq 0$.

Функције које задовољавају услове 1—4) зовемо модулима непрекидности. Ови услови ће сигурно бити испуњени ако уз 1—3) важи и да $\varphi(\delta)/\delta$ не расте.[5]

Нека је $\varphi(\delta)$ функција која је модул непрекидности. Класу функција $f$ за које је $\omega(\delta; f) \leqq \varphi(\delta)$ означаваћемо са $\Lambda_\varphi$.

[5] За детаље о модулу непрекидности и његовим особинама види DE LA VALLÉE POUSSIN [40*a*], И. П. НАТАНСОН [26*a*], С. М. НИКОЛЬСКИЙ [27*d*] и Н. К. БАРИ и С. Б. СТЕЧКИН [6].

Као што смо већ напоменули, за свако $f \varepsilon C$, $\omega(\delta) \to 0$. Прецизирајући брзину којом $\omega(\delta) \to 0$, долазимо до специјалних класа функција у $C$. Например;

1° *Lipschitz-ову класу* ${}^1\Lambda_\alpha$, $0 < \alpha \leqq 1$, образују функције код којих је

$$\omega(\delta; f) \leqq K\delta^\alpha .$$

С обзиром на дефиницију модула непрекидности, ово је еквивалентно захтеву

$$|f(x+h) - f(x)| \leqq K|h|^\alpha .$$

Ако нарочито желимо да истакнемо константу $K$ у овој неједначини, пишемо $K\,{}^1\Lambda_\alpha$; специјално, $1\,{}^1\Lambda_\alpha$ значи да је ова константа једнака јединици.[6]

Функција која задовољава Lipschitz-ов услов са $\alpha > 1$ своди се на константу. Од нарочитог интереса је класа ${}^1\Lambda_1$: $f \varepsilon {}^1\Lambda_1$ тада и само тада ако је апсолутно непрекидна и $|f'(x)| \leqq K$ скоро свуда.[7]

2° Класу $\mathbf{W}$ образују функције за које је

$$\omega(\delta; f) \leqq K\delta\,|\log\delta\,| .$$

Између класе $\mathbf{W}$ и Lipschitz-ових класа ${}^1\Lambda_\alpha$ постоји стриктна инклузија:

$${}^1\Lambda_1 \subset \mathbf{W} \subset {}^1\Lambda_\alpha \text{ за свако } 0 < \alpha < 1 .$$

(ii) Модул непрекидности $\omega_2(\delta; f)$ другог реда дефинисан је са

$$\omega_2(\delta) = \omega_2(\delta; f) = \max_{|h| \leqq \delta} \max_{0 \leqq x \leqq 2\pi} |f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)|$$
$$= \max_{|h| \leqq \delta} \| f(x+h) + f(x-h) - 2f(x) \|_C .$$

*Zygmund-ову класу* ${}^2\Lambda_\alpha$ (A. Zygmund [44b]) образују функције $f$ за које је

$$\omega_2(\delta; f) \leqq K|h|^\alpha ,$$

---

[6] Под ${}^1\Lambda_0$ подразумевамо класу ограничених функција.

[7] Заиста, ако $f \varepsilon K\,{}^1\Lambda_1$, она је апсолутно непрекидна и ограничене варијације, те има извод скоро свуда; из $\left|\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}\right| \leqq K$ тада следи $|f'(x)| \leqq K$ скоро свуда. Обрнуто, ако је $f$ апсолутно непрекидна и $|f'(x)| \leqq K$ скоро свуда, $f$ је интеграл, тј. $f(x) = \int_a^x \varphi(t)\,dt$ и $f'(x) = \varphi(x)$ скоро свуда, па према томе и $|\varphi(x)| \leqq K$ скоро свуда; дакле, $|f(x+h) - f(x)| = \left|\int_x^{x+h} \varphi(t)\,dt\right| \leqq K|h|$. — Наравно, ако $|f'(x)| \leqq K$ *за свако* $x$, тада $f \varepsilon {}^1\Lambda_1$. Али ако је $|f'(x)| \leqq K$ само скоро свуда, мора се *претпоставити* да је $f$ апсолутно непрекидна, јер постоји (види, например, E. C. Titchmarsh [39], § 11.72) непрекидна функција која има извод скоро свуда једнак нули а ипак није апсолутно непрекидна.

или, што је исто,

$$|f(x+h)+f(x-h)-2f(x)|\leqq K|h|^{\alpha}.$$

За $0<\alpha<1$ класе ${}^1\Lambda_\alpha$ и ${}^2\Lambda_\alpha$ се поклапају (A. Zygmund [44*a*], т. I, стр. 120). Међутим, ${}^1\Lambda_1\neq{}^2\Lambda_1$; наиме, функције класе ${}^1\Lambda_1$ имају скоро свуда ограничен извод, док класи ${}^2\Lambda_1$ припадају и функције које нигде немају извод (A. Zygmund [44*b*]). Прецизније:

$$f\varepsilon\,{}^2\Lambda_1 \Longrightarrow \omega(\delta;f)\leqq K\delta\,|\log\delta| \tag{2.1}$$

(A. Zygmund [44*a*], т. I, стр. 44) и ова процена се не може побољшати. Према томе,

$${}^1\Lambda_1\subset{}^2\Lambda_1\subset\mathbf{W}.$$

Примећујемо да је и други знак инклузије у стриктном смислу.

(iii) Модуле непрекидности вишег реда[8]

$$\omega_k(\delta)=\omega_k(\delta;f)=\max_{|h|\leqq\delta}\left\|\sum_{\varkappa=0}^{k}(-1)^{k-\varkappa}\binom{k}{\varkappa}f(x+\varkappa h)\right\|_C$$

увео је С. Н. Бернштейн [7*a*]. О особинама $\omega_k(\delta;f)$ види A. Marchaud [24], С. Б. Стечкин [33*a*, *c*], Н. К. Бари и С. Б. Стечкин [6].

(iv) Појам модула непрекидности преноси се из простора $C$ у простор $L^p$, $p\geqq 1$. *Интегрални модул непрекидности* $k$-тог реда функције $f$ дефинисан је са[9]

$$\omega_k^p(\delta)=\omega_k^p(\delta;f)=\sup_{|h|\leqq\delta}\left\|\sum_{\varkappa=0}^{k}(-1)^{k-\varkappa}\binom{k}{\varkappa}f(x+\varkappa h)\right\|_{L^p}.$$

За свако $f\varepsilon L^p$, $\omega^p(\delta;f)\to 0$ када $\delta\to+0$. Ако $f\varepsilon C$, $\omega^p(\delta;f)\to\omega(\delta,f)$ када $p\to\infty$. У простору $L^p$ дефинишу се класе ${}^1\Lambda_\alpha^p$ и ${}^2\Lambda_\alpha^p$, $0<\alpha\leqq 1$, са $\omega_p(\delta;f)\leqq K\delta^\alpha$ односно $\omega_2^p(\delta;f)\leqq K\delta^\alpha$; оне су различите само за $\alpha=1$. Примећујемо да, насупрот исказу (2.1) у простору $C$, који је ту најбољи могући, у простору $L^p$ важи

$$f\varepsilon\,{}^2\Lambda_1^p,\ 1\leqq p<\infty \Longrightarrow \omega^p(\delta;f)\leqq\begin{cases}K\delta\,|\log\delta|^{1/p}, & 1\leqq p\leqq 2;\\ K\delta\,|\log\delta|^{1/2}, & p\geqq 2;\end{cases}$$

и ова процена се не може побољшати (А. Ф. Тиман и М. Ф. Тиман [38] за $p=2$, а за остале вредности A. Zygmund [44*e*]).

2.2. КЛАСЕ ФУНКЦИЈА ДЕФИНИСАНЕ ИЗВОДОМ. (i) Једна од класа које се најчешће сусрећу је класа функција које имају ограничени $r$-ти извод, тј. $|f^{(r)}(x)|\leqq K$ за свако $x$. Општије, $W^{(r)}$ $(r=1,2,\dots)$ је класа функ-

---

[8] $\omega_1(\delta;f)=\omega(\delta;f)$.

[9] $\omega_1^p(\delta;f)=\omega^p(\delta;f)$.

ција које имају апсолутно непрекидан $(r-1)$-и извод а $r$-ти извод им је скоро свуда ограничен, тј.

$$\|f^{(r)}\|_M = \sup_x \operatorname{ess} |f^{(r)}(x)| \leqq K.$$

С обзиром на примедбу[7], $f \varepsilon W^{(r)}$ тада и само тада ако $f$ има $(r-1)$-и извод који припада $^1\Lambda_1$.

Уводећи појам интеграла и извода реда $r > 0$, где $r$ не мора да буде цео позитиван број, могу се дефинисати још општије класе.

(ii) Нека је $f$ $L$-интеграбилна периодичка функција периоде $2\pi$ (и као увек, средње вредности једнаке нули) и нека је

$$f(x) \sim \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x$$

њен Fourier--ов ред.

*Weyl-ов интеграл* $f_r(x)$ реда $r > 0$ функције $f(x)$ дефинише се са (види A. Zygmund [44 *a*] Ch. XII, § 8 и 9)

$$f_r(x) = \cos \frac{r\pi}{2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x}{\nu^r} + \sin \frac{r\pi}{2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu \sin \nu x - b_\nu \cos \nu x}{\nu^r}.$$

Тригонометриски ред на десној страни конвергира за скоро свако $x$ и Fourier-ов је ред своје суме $f_r(x)$. Из дефиниције следи $(f_r)_s = f_{r+s}$. Како се за $r = 1, 2, \ldots$ Weyl-ов интеграл своди на $r$ пута поновљени обични интеграл, то је, с обзиром на претходну особину, нарочито интересантан случај $f_r(x)$, $0 < r < 1$.

Weyl-ов интеграл може се изразити и у облику

$$f_r(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \Psi_r(x-t)\, dt, \tag{2.2}$$

где је

$$\Psi_r(x) = \cos \frac{r\pi}{2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\cos \nu x}{\nu^r} + \sin \frac{r\pi}{2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin \nu x}{\nu^r} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\cos(\nu x - r\pi/2)}{\nu^r}.$$

Ред на десној страни конвергира за $x \neq 0$ и он је Fourier-ов ред своје суме $\Psi_r(x)$.

*Weyl-ов извод* $f^{(r)}(x)$ реда $r$, $0 < r < 1$, функције $f(x)$ дефинише се са (види A. Zygmund [44 *a*], Ch. XII, §§ 8 и 9)

$$f^{(r)}(x) = \frac{d}{dx} f_{1-r}(x).$$

Општије, ако је $r>0$ и $n$ најмањи цео број који је већи од $r$,

$$f^{(r)}(x)=\frac{d^n}{dx^n}f_{n-r}(x).$$

Нарочито је важан специјалан случај (једноставности ради, узећемо $0<r<1$) када је $f_{1-r}(x)$ апсолутно непрекидна функција. Тада се, наиме, Fourier-ов ред од $f^{(r)}(x)$ добија формалним диференцирањем Fourier-овог реда од $f_{1-r}(x)$. Шта више, у овом специјалном случају, могуће је (С. М. Никольский [27c]) функције која имају Weyl-ов извод овако окарактерисати:

$L$-интеграбилна периодичка функција $\varphi(x)$, периоде $2\pi$ и средње вредности једнаке нули, је Weyl-ов извод $r$-тог реда функције $f(x)$, ако између $f(x)$ и $\varphi(x)$ постоји веза

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(t)\,\Psi_r(x-t)\,dt,\quad (r>0).$$

Заиста, поредећи овај образац са (2.2), следи да је $f=\varphi_r$, па је $f_{1-r}=(\varphi_r)_{1-r}=\varphi_1=\int\varphi\,dx$; дакле, $f_{1-r}$ је као интеграл апсолутно непрекидна функција и $\frac{d}{dx}(f_{1-r})=\varphi$ скоро свуда.

У овом раду ми ћемо под Weyl-овим изводом увек подразумевати овај специјалан случај.

(iii) Нека је $r>0$ и $\beta$ реалан број и ставимо

$$\Psi_r(x;\beta)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\cos(\nu x-\beta\pi/2)}{\nu^r}.$$

Са $W^{(r)}(\beta)$ означићемо класу непрекидних функција које имају репрезентацију (С. Б. Стечкин [33e])

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(t)\,\Psi_r(x-t;\beta)\,dt \tag{2.3}$$

где је

$$\int_0^{2\pi}\varphi(x)\,dx=0 \quad\text{и}\quad \|\varphi\|_M\leqq K.$$

Ако желимо да истакнено константу $K$ пишемо $K\,W^{(r)}(\beta)$; специјално, $1\,W^{(r)}(\beta)$ значи да је она једнака јединици.

Нарочито су интересантни ови специјални случајеви класе $W^{(r)}(\beta)$: $W^{(r)}(r)=W^{(r)}$ и $W^{(r)}(0)$. Прва је класа функција које имају Weyl-ов извод $f^{(r)}$ реда $r>0$ (у смислу прецизираном у (ii)) за који је $\|f^{(r)}\|_M\leqq K$.

Примећујемо да за $0 < r < 1$ класа $W^{(r)}$ стоји према класи ${}^1\Lambda_r$ у истом односу као класа ${}^1\Lambda_1$ према класи ${}^2\Lambda_1$. Наиме, с једне стране је по дефиницији

$$f \varepsilon W^{(r)} \text{ еквивалентно са } f_{1-r} \varepsilon {}^1\Lambda_1,$$

док је с друге стране (A. Zygmund [44], Ch. XII, Th.8.13 и 8.14)

$$f \varepsilon {}^1\Lambda_r \text{ еквивалентно са } f_{1-r} \varepsilon {}^2\Lambda_1.$$

Дакле, за $0 < r < 1$, важи стриктна инклузија

$$W^{(r)} \subset {}^1\Lambda_r,$$

док је $W^{(1)} = {}^1\Lambda_1$. Ово даје повода, а и други резултати на то указују, да је природно продужење класе ${}^1\Lambda_\alpha \,(= {}^2\Lambda_\alpha)$, $0 < \alpha < 1$, класа ${}^2\Lambda_1$, а не класа ${}^1\Lambda_1$, која је природно продужење класе $W^{(r)}$, $0 < r < 1$. У том смислу говорићемо да је $W^{(r)}$, $0 < r < 1$, класа типа ${}^1\Lambda_1$, а да је ${}^1\Lambda_\alpha$, $0 < \alpha < 1$, класа типа ${}^2\Lambda_1$.

Аналогон класе $W^{(r)}(\beta)$ у простору $L$ образују $L$-интеграбилне функције $f$ које имају репрезентацију (2.3) са

$$\int_0^{2\pi} \varphi(x)\, dx = 0 \text{ и } \|\varphi\|_L \leqq K.$$

Ову класу означавамо са $W_L^{(r)}(\beta)$. Специјално, $W_L^{(r)}(r) = W_L^{(r)}$ је класа функција које имају Weyl-ов извод $f^{(r)}$ реда $r > 0$ за који је $\|f^{(r)}\|_L \leqq K$.

(iv) Комбинујући класе дефинисане изводом и оне дефинисане модулом непрекидности, могу се формирати сложене класе:

$W^{(r)}\Lambda_\varphi$, $r > 0$, је класа функција које имају непрекидан Weyl-ов извод $f^{(r)}$ чији је модул непрекидности $\omega(\delta; f^{(r)}) \leqq \varphi(\delta)$.

$W^{(r)}\,{}^1\Lambda_\alpha$, $r > 0$, $0 < \alpha < 1$, је класа функција које имају Weyl-ов извод $f^{(r)}$ који $\varepsilon\, {}^1\Lambda_\alpha$; по дефиницији коју смо дали $W^{(r)}\,{}^1\Lambda_1 = W^{(r+1)}$.

$W^{(r)}\,{}^2\Lambda_\alpha$, $r > 0$, $0 < \alpha \leqq 1$, је класа функција које имају Weyl-ов извод $f^{(r)}$ који $\varepsilon\, {}^2\Lambda_\alpha$.

Аналогно се дефинишу сложене класе функција у простору $L^p$, $p \geqq 1$: $W^{(r)}\Lambda_\varphi^p$, $W^{(r)}\,{}^1\Lambda_\alpha^p$, $W^{(r)}\,{}^2\Lambda_\alpha^p$.

2.3. КОЊУГОВАНЕ КЛАСЕ ФУНКЦИЈА. (i) Нека $f \varepsilon L$ и нека је

$$S[f] = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x$$

Fourier-ов ред функције $f(x)$; *коњуговани ред* овоме је

$$\tilde{S}[f] = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \sin \nu x - b_\nu \cos \nu x.$$

За скоро свако $x$ постоји[10]

$$\tilde{f}(x) = -\frac{2}{\pi} \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{\varepsilon}^{\pi} \frac{f(x+t) - f(x-t)}{2 \operatorname{tg} t/2} dt;$$

$\tilde{f}(x)$ је *коњугована функција* функцији $f(x)$. Оправдање за ове називе лежи у томе што постоји известан паралелизам између $f$ и $S[f]$ с једне и $\tilde{f}$ и $\tilde{S}[f]$ с друге стране. Но тај паралелизам није потпун. Тако, $\tilde{f}(x)$ не мора бити $L$-интеграбилна, нити ограничена или непрекидна ако је таква $f(x)$.

(ii) Нека је дата класа функција M. Њој *коњуговану класу* $\overline{\mathrm{M}}$ образују оне функције $f$ чија коњугована функција $\tilde{f}$ припада M. Операција коњуговања класе не доводи увек до нове класе, тј. ова може бити *рефлексивна*. Искази „$\overline{\mathrm{M}} = \mathrm{M}$" су ставови Приваловљева типа.

И. И. Привалов [29] јо показао да

$$f \varepsilon {}^1\Lambda_\alpha, \quad 0 < \alpha < 1 \Longrightarrow \tilde{f} \varepsilon {}^1\Lambda_\alpha.$$

Како је $\left(\tilde{\tilde{f}}\right) = -f$, то важи и обрнут исказ, тј.

$$\overline{{}^1\Lambda_\alpha} = {}^1\Lambda_\alpha \quad \text{за } 0 < \alpha < 1. \tag{2.4}$$

За $\alpha = 1$ ово више није тачно, тј. класе ${}^1\Lambda_1$ и $\overline{{}^1\Lambda_1}$ су неупоредиве. Међутим, као што је то показао A. Zygmund [44 *b*], класа ${}^2\Lambda_1$ је рефлексивна, тј. $f \varepsilon {}^2\Lambda_1 \Longleftrightarrow \tilde{f} \varepsilon {}^2\Lambda_1$, што заједно са (2.4) даје

$$\overline{{}^2\Lambda_\alpha} = {}^2\Lambda_\alpha \quad \text{за } 0 < \alpha \leqq 1. \tag{2.5}$$

Из изложеног следи да су и класе $W^{(r)}\,{}^1\Lambda_\alpha$, $0 < \alpha < 1$, и $W^{(r)}\,{}^2\Lambda_\alpha$, $0 < \alpha \leqq 1$, рефлексивне, док то није случај са класом $W^{(r)}$ или $W^{(r)}(0)$, у чију дефиницију имплицитно улази класа ${}^1\Lambda_1$.

Уопштењем Приваловљева става на класе функција дефинисане модулом непрекидности бавили су се Н. К. Бари и С. Б. Стечкин.

Н. К. Бари [5] је доказала да за свако $\alpha > 0$ и $k > \alpha$

$$\omega_k(\delta; f) = O(\delta^\alpha) \Longrightarrow \omega_k(\delta; \tilde{f}) = O(\delta^\alpha),$$

што садржи претходни резултат Привалов-а и Zygmund-а.

Још општије, Н. К. Бари [5] је дала *довољне* услове, а Н. К. Бари и С. Б. Стечкин [6] заједно, *потребне* и *довољне* услове које мора да испуњава функција $\varphi(\delta)$ да би се класе функција за које је

$$\omega(\delta; f) = O[\varphi(\delta)] \text{ и } \omega(\delta; \tilde{f}) = O[\varphi(\delta)]$$

поклапале. Прецизније:

[10] За ово и даље види, например, A. Zygmund [44*a*], Ch II, § 5.

Нека функција $\varphi(\delta)$, $0 \leqq \delta \leqq \pi$, задовољава ове услове: 1) $\varphi(\delta)$ је непрекидна у $[0, \pi]$; 2) $\varphi(\delta)$ не опада; 3) $\varphi(\delta) \neq 0$ за $0 < \delta \leqq \pi$; 4) $\varphi(\delta) \to 0$ када $\delta \to +0$; 5) $\varphi(\delta)/\delta$ не расте. Потребан и довољан услов да би искази

$$\omega(\delta; f) = O[\varphi(\delta)] \quad \text{и} \quad \omega(\delta; \tilde{f}) = O[\varphi(\delta)]$$

били еквивалентни јесте да је

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{1}{\nu} \varphi\left(\frac{1}{\nu}\right) = O\left[\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right] \quad \text{и} \quad \sum_{\nu=1}^{n} \varphi\left(\frac{1}{\nu}\right) = O\left[n\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right].$$

Аналогни искази важе и у простору $L^p, p \geqq 1$, за интегралне модуле непрекидности. Међутим, у простору $L^p$, $p > 1$, такви искази су неинтересантни (С. Б. Стечкин [33*d*]), јер на основу познатог M. Riesz-овог резултата

$$\|\tilde{f}\|_{L^p} \leqq K_p \|f\|_{L^p} \qquad (p > 1)$$

непосредно следи

$$\omega_k^p(\delta; \tilde{f}) \leqq K_p\, \omega_k^p(\delta; f) \qquad (p > 1).$$

Како важи и обрнути исказ, то су у $L^p$, $p > 1$, модули $\omega_k^p(\delta; f)$ и $\omega_k^p(\delta; \tilde{f})$ увек величине истог реда.

3. НАЈБОЉА АПРОКСИМАЦИЈА ФУНКЦИЈЕ. (i) Нека је $H_n$ скуп тригонометриских полинома $T$ реда $\leqq n$. За дато $f \in C$, скуп бројева $\Delta_C(f; T)$, када $T$ пролази све полиноме из $H_n$, ограничен је с доње стране, те има инфимум; овај ћемо означити са

$$E_n = E_n(f) = \inf_{T \in H_n} \Delta_C(f; T).$$

$E_n(f)$ је *најбоља апроксимација функције* $f$ полинонима из $H_n$. E. Borel [8] је показао да за свако $n$ *постоји* у $H_n$ полином $T_n^*(f)$ такав да је

$$\Delta_C(f; T_n^*) = E_n(f)$$

и тиме оправдао уведену терминологију. Из Чебышев-љевих резултата (види, например, И. П. Натансон [26*a*]) следи да за свако $n$ постоји само један такав полином $T_n^*(f)$. Низ $T_n^*(f)$, $n = 1, 2, \ldots$, је низ *тригонометриских полинома најбоље апроксимације функције* $f$ реда $\leqq n$, и њиме је, дакле, остварен један поступак апроксимације $T_n(f)$.

Јасно је да $E_n$ не расте са $n$, а из Weierstrass-овог става следи да $E_n \to 0$ када $n \to \infty$.

На аналоган начин се дефинише најбоља апроксимација функције у простору $L^p$, $p \geqq 1$:

$$E_n(f)_{L^p} = \inf_{T \in H_n} \Delta_{L^p}(f; T).$$

(ii) Од D. Jackson-а [19*a*, *b*] потичу прве процене најбоље апроксимације. Ако $f \varepsilon C$ ... има модул непрекидности $\omega(\delta; f)$, тада је

$$E_n(f) \leqq K\,\omega(n^{-1}; f).$$

Одавде специјално следи:

$$f \varepsilon {}^1\Lambda_\alpha,\ 0<\alpha\leqq 1 \Longrightarrow E_n(f) = O(n^{-\alpha}), \tag{3.1}$$

$$f \varepsilon \mathbf{W} \Longrightarrow E_n(f) = O(n^{-1}\log n). \tag{3.2}$$

Општије, ако $f$ има има непрекидан $r$-ти извод $f^{(r)}$, $r=1, 2, \ldots$, тада је

$$E_n(f) \leqq K_r\, n^{-r}\,\omega(n^{-1};\ f^{(r)})$$

и специјално

$$f^{(r)} \varepsilon {}^1\Lambda_\alpha,\ 0<\alpha\leqq 1 \Longrightarrow E_n(f) = O(n^{-r-\alpha}). \tag{3.3}$$

Ове резултате пренео је у простор $L^p$, $p \geqq 1$,[11] E. S. Quade [30]. Он је показао да ако $f$ има извод $f^{(r)}$ у $L^p$ да је тада

$$E_n(f)_{L^p} \leqq K_{r,p}\, n^{-r}\,\omega^p(n^{-1};\ f^{(r)}),\quad r=0, 1, 2, \ldots,$$

и специјално

$$f \varepsilon {}^1\Lambda_\alpha^p,\ p\geqq 1,\ 0<\alpha\leqq 1 \Longrightarrow E_n(f)_{L^p} = O(n^{-\alpha}).$$

(iii) Jackson-ови ставови закључују из диференцијалних особина функције о њеној најбољој апроксимацији $E_n(f)$. С. Н. Бернштейн [7*a*, *b*] је, обрнуто, полазећи од најбоље апроксимације функције закључио о њеним диференцијалним особинама. Он је показао да

$$E_n(f) = O(n^{-\alpha}),\ 0<\alpha\leqq 1 \Longrightarrow \begin{cases} f\varepsilon {}^1\Lambda_\alpha, & 0<\alpha<1; \\ f\varepsilon\mathbf{W}, & \alpha=1; \end{cases} \tag{3.4}$$

и општије, да

$$E_n(f) = O(n^{-r-\alpha}),\ r=1,2,\ldots,\ 0<\alpha\leqq 1 \Longrightarrow \begin{cases} f^{(r)}\varepsilon {}^1\Lambda_\alpha, & 0<\alpha<1; \\ f^{(r)}\varepsilon\mathbf{W}, & \alpha=1. \end{cases} \tag{3.5}$$

Инверзне ставове у којима се закључује о модулу непрекидности функције или њеног извода дао је de la Vallée Poussin [40*a*]:

Нека је $\Omega(x)$ монотона функција која $\to 0$ када $x \to \infty$ и нека је

$$\int^{\infty} \Omega(x)\frac{dx}{x} < \infty.$$

Ако је

$$E_n(f) \leqq n^{-r}\,\Omega(n),\quad r=0,1,\ldots,$$

---

[11] И у друге општије просторе.

тада $f$ има непрекидан $r$-ти извод и

$$\omega(\delta; f^{(r)}) \leqq K_r \left\{ \delta \int_a^{a/\delta} \Omega(x)\, dx + \int_{1/\delta}^{\infty} \Omega(x) \frac{dx}{x} \right\},$$

где $K_r$ и $a$ не зависе од $\delta$.

Специјално, ако се, поред већ наведених услова за $\Omega(x)$, може наћи константа $\alpha$ таква да $x^{\alpha}\Omega(x)$ не опада (од извесног $x_0$), тада је

$$\omega(\delta; f^{(r)}) \leqq K_r \int_{1/\delta}^{\infty} \Omega(x) \frac{dx}{x}.$$

Услов $\int^{\infty} x^{-1}\Omega(x)\, dx < \infty$ је битан; например, за $r=1$ од њега зависи да ли ће $f'$ бити непрекидна или прекидна функција.

Овај DE LA VALLÉE POUSSIN-ов резултат важи и у простору $L^p$, $p \geqq 1$. E. S. QUADE [30] је показао да из

$$E_n(f)_{L^p} \leqq n^{-r}\Omega(n), \quad r=0, 1, \ldots,$$

следи да $f$ има апсолутно непрекидан извод $f^{(r-1)}$, да постоји $f^{(r)}$ скоро свуда и да је

$$\omega^p(\delta; f^{(r)}) \leqq K_{r,p} \left\{ \delta \int_a^{a/\delta} \Omega(x)\, dx + \int_{1/\delta}^{\infty} \Omega(x) \frac{dx}{x} \right\}.$$

Специјално, одавде следи

$$E_n(f)_{L^p} = O(n^{-\alpha}) \Longrightarrow \begin{cases} f \varepsilon^1 \Lambda_\alpha^p, & 0<\alpha<1; \\ \omega^p(\delta; f) = O(\delta |\log \delta|), & \alpha=1. \end{cases}$$

Примећујемо да се исказ за $\alpha=1$ може побољшати када је $p>1$, користећи ZYGMUND-ов резултат за простор $L^p$ из наредне тачке (iv) и § 2.1 (iv).

(iv) Из (3.1) и (3.4) непосредно следи став еквиваленције

(3.6) $$f \varepsilon^1 \Lambda_\alpha \Longleftrightarrow E_n(f) = O(n^{-\alpha}) \text{ за } 0<\alpha<1.$$

За $\alpha=1$ овај исказ више не важи. Могло би се зато помислити да било исказ

(3.7) $$f \varepsilon^1 \Lambda_1 \Longrightarrow E_n(f) = O(n^{-1}),$$

било исказ

(3.8) $$E_n(f) = O(n^{-1}) \Longrightarrow f \varepsilon \mathbf{W},$$

није довољно прецизан. Међутим, оба су у извесном смислу најбоља могућа, као што то показују функције $\varphi = |\sin x|$ и $\psi = \Sigma \nu^{-2} \sin \nu x$. (види И. П. НАТАНСОН [26 $a$], стр. 92-94). Наиме, с једне стране,

$\varphi \varepsilon {}^1\Lambda_1$, а за њу је $E_n(\varphi) > [2\pi(2n+1)]^{-1}$ те се (3.7) не може побољшати; с друге стране, $E_n(\psi) = O(n^{-1})$, а $\psi$ не прииада ${}^1\Lambda_1$, тако да се у (3.8) $\mathbf{W}$ не може заменити са ${}^1\Lambda_1$.

Питање карактеризације класе функција за коју је $E_n(f) = O(n^{-1})$ решио је A. Zygmund [44*b*] уводећи класу ${}^2\Lambda_1$; он је показао да важи став еквиваленције:

$$(3.9) \qquad f \varepsilon {}^2\Lambda_1 \Longleftrightarrow E_n(f) = O(n^{-1}).$$

С обзиром на ${}^1\Lambda_\alpha = {}^2\Lambda_\alpha$, $0 < \alpha < 1$, (3.6) и (3.9) можемо овако написати:

$$(3.10) \qquad f \varepsilon {}^2\Lambda_\alpha \Longleftrightarrow E_n(f) = O(n^{-\alpha}) \text{ за } 0 < \alpha \leqq 1.$$

Општије, из (3.3) и првог исказа у (3.5) следи

$$f^{(r)} \varepsilon {}^1\Lambda_\alpha \Longleftrightarrow E_n(f) = O(n^{-r-\alpha}) \text{ за } r = 1, 2, \ldots;\ 0 < \alpha < 1.$$

што заједно са Zygmund-овим резултатом

$$f^{(r)} \varepsilon {}^2\Lambda_1 \Longleftrightarrow E_n(f) = O(n^{-r-1}) \text{ за } r = 1, 2, \ldots,$$

можемо писати у облику

$$(3.11) \qquad f^{(r)} \varepsilon {}^2\Lambda_\alpha \Longleftrightarrow E_n(f) = O(n^{-r-\alpha}) \text{ за } r = 1, 2, \ldots; 0 < \alpha \leqq 1.$$

Слични резултати постоје у простору $L^p$, $p \geqq 1$. Из E. S. Quade-ових резултата у (ii) и (iii), непосредно следи

$$f \varepsilon {}^1\Lambda_\alpha^p \Longleftrightarrow E_n(f)_{L^p} = O(n^{-\alpha}) \text{ за } 0 < \alpha < 1.$$

Примећујемо да су овај став еквиваленције, без доказа, исказали G. H. Hardy и J. E. Littlewood [17]. Нетривијалан став еквиваленције

$$f \varepsilon {}^2\Lambda_1^p \Longleftrightarrow E_n(f)_{L^p} = O(n^{-1})$$

дао је A. Zygmund [44*b*]. Слични искази важе и за извод $f^{(r)}$.

(v) Zygmund-ов резултат указао је на значај модула непрекидности другог реда када је реч о најбољој апроксимацији. То је потстакло многе ауторе, да уведу и модуле непрекидности вишег реда. Тако је С. Б. Стечкин [33*a*] дао најопштију формулацију Jackson-овом ставу:

$$(3.12) \quad f^{(r)} \varepsilon C \Longrightarrow E_n(f) \leqq K_{r,k}\, n^{-r}\, \omega_k(n^{-1}; f^{(r)}),\ r = 0, 1, \ldots; k = 1, 2, \ldots$$

Слично важи у простору $L^p$, $p \geqq 1$:

$$f^{(r)} \varepsilon L^p \Longrightarrow E_n(f)_{L^p} \leqq K_{r,k,p}\, n^{-r}\, \omega_k^p(n^{-1}; f^{(r)}),\ r = 0, 1, \ldots; k = 1, 2, \ldots$$

Из Jackson-овог директног и de la Vallée Poussin-овог инверзног става за модуле непрекидности, не може се простим спајањем добити став еквиваленције. Зато су даље испитивања ишла у правцу да се погодно ограничи функција $\Omega(x)$ у de la Vallée Poussin-овом ставу тако да инверзни став заједно са директним да непосредно став еквиваленције.

С. Б. Стечкин [33*a*] дао је *довољне* услове за функцију $\varphi(\delta)$ да би

$$E_n(f)=O[\varphi(n^{-1})] \Longrightarrow \omega_k(\delta;f)=O[\varphi(\delta)].$$

Ово заједно са исказом (3.12) за $r=0$, даје став еквиваленције.

С. М. Лозинский [23] је дао *потребне* и *довољне* услове за функцију $\varphi(\delta)$ да би важио став еквиваленције:

Нека је $\Phi$ класа функција $\varphi$, таквих да је: 1) $\varphi(\delta)$ непрекидна за $0\leqq\delta<\infty$; 2) $0<\varphi(\delta')\leqq\varphi(\delta'')$ за $0<\delta'\leqq\delta''$; 3) $\varphi(0)=0$.

1° Нека је $k$ цео позитиван број, $\varphi\in\Phi$ и нека постоји број $K>1$ такав да је

$$\limsup_{\delta\to+0}\frac{\varphi(K\delta)}{\varphi(\delta)}<K^k. \tag{3.13}$$

Тада је за сваку непрекидну функцију $f$

$$\omega_k(\delta;f)=O[\varphi(\delta)] \Longleftrightarrow E_n(f)=O[\varphi(n^{-1})]. \tag{3.14}$$

Ако (3.13) није испуњено, тада постоји непрекидна функција $f$ таква да важи исказ на десној страни у (3.14), али не важи онај на левој.

2° Нека је $k$ цео позитиван број, $\varphi\in\Phi$, и нека постоји број $K>1$ такав да је

$$1<\liminf_{\delta\to+0}\frac{\varphi(K\delta)}{\varphi(\delta)}\leqq\limsup_{\delta\to+0}\frac{\varphi(K\delta)}{\varphi(\delta)}<K^k. \tag{3.15}$$

Тада је за сваку непрекидну функцију $f$

$$f^{(r)}\in C \text{ и } \omega_k(\delta;f^{(r)})=O[\varphi(\delta)] \Longleftrightarrow E_n(f)=n^{-r}O[\varphi(n^{-1})]. \tag{3.16}$$

Ако услов (3.15) није испуњен, постоји непрекидна функција $f$ таква да важи исказ на десној страни у (3.16), али не важи онај на левој.

(vi) С. Б. Стечкин [33*a*], А. Ф. Тиман [36*a*], као и А. Ф. Тиман и М. Ф. Тиман [38] заједно, формулисали су инверзне ставове аналогно ономе како је то учинио de la Vallée Poussin (види (iii)), употребљујући при томе суме уместо интеграла. Прецизније:

1° Ако $f\in L^p$, $1\leqq p\leqq\infty$, тада је

$$\omega_k^p(n^{-1};f)\leqq K_{p,k}\,n^{-k}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{k-1}E_{\nu-1}(f)_{L^p}\qquad(k=1,2,\ldots).$$

2° Ако $f\in L^p$, $1\leqq p\leqq\infty$, и за неко фиксирано $r$ $(=1,2,\ldots)$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\nu^{r-1}E_{\nu-1}(f)_{L^p}<\infty$$

тада $f$ има $r$-ти извод $f^{(r)}\in L^p$ и

$$\omega_k^p(n^{-1};f^{(r)})\leqq K_{p,k,r}\left\{n^{-k}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{k+r-1}E_{\nu-1}(f)_{L^p}+\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{r-1}E_{\nu-1}(f)_{L^p}\right\}(k=1,2,\ldots)$$

Стеклов-љев резултат се односи само на случај $p=\infty$, тј. када је реч о простору $M$. Искази 1° и 2° садрже Бернштейн-ов, Zygmund-ов, de la Vallée Poussin-ов и Quade-ов резултат из (iii) и (iv).

Процене у последња два исказа су за $p=1$ и $p=\infty$ најбоље могуће; за $1<p<\infty$ то, међутим, више није случај (види и А. Ф. Тиман и М. Ф. Тиман [38] и A. Zygmund [44e]). М. Ф. Тиман [37] побољшао је ове исказе за $1<p<\infty$:

1° Ако $f \in L^p$, $1<p<\infty$,

$$\omega_k^p(n^{-1}; f) \leqq \begin{cases} K_{p,k}\, n^{-k} \left\{ \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{kp-1} E_{\nu-1}^p(f)_{L^p} \right\}^{1/p}, & 1<p\leqq 2; \\ K_{p,k}\, n^{-k} \left\{ \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{2k-1} E_{\nu-1}^2(f)_{L^p} \right\}^{1/2}, & 2\leqq p<\infty. \end{cases}$$

2° Ако $f \in L^p$, $1<p<\infty$, и за неко фиксирано $r$ $(=1, 2, \ldots)$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{r-1} E_{\nu-1}(f)_{L^p} < \infty,$$

тада $f$ има $r$-ти извод $f^{(r)} \in L^p$ и важи

$$\omega_k^p(n^{-1}, f^{(r)}) \leqq$$

$$\leqq \begin{cases} K_{p,k,r} \left\{ n^{-k} \left( \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{p(k+r)-1} E_{\nu-1}^p(f)_{L^p} \right)^{1/p} + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{r-1} E_{\nu-1}(f)_{L^p} \right\}, & 1<p\leqq 2; \\ K_{p,k,r} \left\{ n^{-k} \left( \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{2(k+r)-1} E_{\nu-1}^2(f)_{L^p} \right)^{1/p} + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{r-1} E_{\nu-1}(f)_{L^p} \right\}, & 2\leqq p<\infty. \end{cases}$$

(vii) J. Favard [13a, b] први је поставио питање најбоље могуће константе у директним ставовима за $E_n(f)$ и успео да одреди ову за класу функција $W^{(r)}$. Наиме, он је показао да је[12]

$$\mathrm{E}_C[1\, W^{(r)}; E_n(f)] = \sup_{f \in 1 W^{(r)}} \|f - T_n^*\|_C = \mathbf{K}_r\, n^{-r} \quad \begin{pmatrix} r = 1, 2, \ldots \\ n = 1, 2, \ldots \end{pmatrix},$$

где је

$$\mathbf{K}_r = \frac{4}{\pi} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{(-1)^{\nu(r+1)}}{(2\nu+1)^{r+1}}.$$

Слично важи за класу $\overline{W^{(r)}}$ (Н. И. Ахиезер и М. Г. Крейн [2])

$$\mathrm{E}_C[\overline{1\, W^{(r)}}; E_n(f)] = \tilde{\mathbf{K}}_r\, n^{-r} \quad \begin{pmatrix} r = 1, 2, \ldots \\ n = 1, 2, \ldots \end{pmatrix},$$

[12] Види и § 9 (ii).

где је

$$\tilde{\mathbf{K}}_r = \frac{4}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu r}}{(2\nu+1)^{r+1}}.$$

Аналогни резултати постоје (Н. И. Ахиезер [1], стр. 210) и за апроксимацију у средњем ($p \geqq 1$):

$$\mathrm{E}_{L^p}[1\, W^{(r)}; E_n(f)] = \mathbf{K}_r n^{-r} \text{ и } \mathrm{E}_{L^p}[\overline{1\, W^{(r)}}; E_n(f)] = \tilde{\mathbf{K}} n^{-r}, \begin{pmatrix} r=1,2,\ldots \\ n=1,2,\ldots \end{pmatrix}$$

са истим константама $\mathbf{K}_r$ и $\tilde{\mathbf{K}}_r$.

Favard-ова испитивања продужили су Н. И. Ахиезер и М. Г. Крейн [2], B. Sz. Nagy [25a] и други (види Н. И. Ахиезер [1], стр. 191 и даље).

Аналоган проблем за класе $W^{(r)}$ и $W_L^{(r)}$, $0 < r < 1$, решио је В. К. Дзядык [11b]. Он је показао да је

$$\mathrm{E}_C[1\, W^{(r)}; E_n(f)] = \mathrm{E}_C[1\, W_L^{(r)}; E_n(f)] = \frac{4}{\pi} \mathbf{C}_r \sin \frac{r\pi}{2} n^{-r} \quad (n=1,2,\ldots),$$

где је

$$\mathbf{C}_r = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(2\nu+1)^{r+1}}.$$

С. Б. Стечкин [33e] одредио је најбољу апроксимацију класе $W^{(r)}(\beta)$; $0<r<1$, $r<\beta \leqq 2-r$:

$$\mathrm{E}_C[1\, W^{(r)}(\beta); E_n(f)] = \mathrm{E}_L[1\, W_L^{(r)}(\beta); E_n(f)] = \frac{4}{\pi} \mathbf{C}_r \sin \frac{\beta\pi}{2} n^{-r},$$

где је $\mathbf{C}_r$ иста константа као у претходном Дзядык-овом резултату.

В. К. Дзядык [11a] посматрао је класу функција које имају апсолутно непрекидан $(r-1)$-и извод $f^{(r-1)}$ који је са своје стране интеграл функције $\varphi = f^{(r)}$ ограничене варијације. Нека је $\varphi = g + h$, где је $g$ функција скока и $h$ апсолутно непрекидна. Тада је

$$E_n(f)_L = \frac{4}{\pi^2} \mathbf{K}_{r+1} n^{-r-1} \sum_{\nu} |\delta_\nu| \qquad \left(\sum_{\nu} |\delta_\nu| > 0\right)$$

где су $\delta_\nu$ скокови функције $g$ у $[-\pi, \pi)$ а $\mathbf{K}_r$ Favard-ова константа.

(viii) Све процене, како у директним тако и у инверзним ставовима, које смо до сада навели биле су са горње стране.

Прву процену с доње стране дао је још С. Н. Бернштейн [7b]. Он је показао да ако су $a_\nu$ и $b_\nu$ Fourier-ови коефицијенти од $f$ да је тада

$$E_n(f) \geqq \left( \frac{1}{2} \sum_{\nu=n+1}^{\infty} (a_\nu^2 + b_\nu^2) \right)^{1/2}.$$

С. Б. Стечкин дао је процене с доње стране сасвим другог карактера. У два своја рада [33a, b] он је показао да када је реч о *реду величине* модула непрекидности односно најбоље апроксимације важе следећи ставови[13]:

1° Ако је $k$ цео позитиван број и $0 < \alpha < k$, тада је

$$E_n(f) \sim n^{-\alpha} \iff \omega_k(\delta; f) \sim \delta^{\alpha}.$$

2° Ако је $\alpha > 0$, $k$ и $r$ цели позитивни бројеви такви да је $0 \leqq r < \alpha$ и $k + r > \alpha$, тада је

$$E_n(f) \sim n^{-\alpha} \iff \omega_k(\delta; f^{(r)}) \sim \delta^{\alpha - r}.$$

С. М. Лозинский [23] уопштио је ове Стечкин-ове резултате, узимајући уместо степена општије поредбене функције. Он је показао да његови резултати које смо навели у (v) под 1° и 2° важе непромењено и за обострану процену; треба једино знак $O$ свуда заменити са $\sim$.

(ix) Ако је $f$ непрекидна функција, таква не мора да буде њој коњугована функција $\tilde{f}$. Другим речима, из $E_n(f) \to 0$ уопште не следи $E_n(\tilde{f}) \to 0$ када $n \to \infty$. Али, ако и претпоставимо да је $\tilde{f}$ непрекидна, остаје отворено питање шта се може рећи о брзини којом $E_n(\tilde{f}) \to 0$ кад се зна брзина којом $E_n(f) \to 0$. Овим проблемом бавила се Н. К. Бари [5] и дала следећи одговор:

Нека је $\Phi$ класа функција $\varphi$ таквих да $\varphi(\delta)$ не опада, $\varphi(0) = 0$ и $\varphi(\delta) > 0$ за $0 < \delta < 2\pi$. Ако $\varphi \varepsilon \Phi$, из $E_n(f) = O[\varphi(n^{-1})]$ следи непрекидност коњуговане функције $\tilde{f}$ тада и само тада ако је

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu} \varphi\left(\frac{1}{\nu}\right) < \infty. \tag{3.17}$$

Услов[14]

$$\sum_{\nu=n}^{\infty} \frac{1}{\nu} \varphi\left(\frac{1}{\nu}\right) = O\left[\varphi\left(\frac{1}{\nu}\right)\right]. \tag{3.18}$$

је потребан и довољан да би

$$E_n(f) = O[\varphi(n^{-1})] \iff E_n(\tilde{f}) = O[\varphi(n^{-1})]. \tag{3.19}$$

---

[13] Било да су у питању функције или низови, $\varphi \sim \psi$ значи да постоје две позитивне константе $K_1$ и $K_2$ такве да је $0 < K_1 \leqq \varphi/\psi \leqq K_2$.

[14] Услов (3.18) еквивалентан је Лозинский-евом услову: постоји константа $K > 1$ таква да је

$$\liminf_{\delta \to +0} \frac{\varphi(K\delta)}{\varphi(\delta)} > 1.$$

Функција $\varphi(\delta)=\delta^{\alpha}$, $0<\alpha\leqq 1$, очигледно задовољава услове (3.17) и (3.18). Исказ (3.19) може се, у овом специјалном случају, добити и примењујући редом инверзни део исказа (3.10), затим исказ (2.5) и најзад директни део исказа (3.10) по схеми:

$$E_n(f)=O(n^{-\alpha}) \Longrightarrow f\varepsilon^2\Lambda_\alpha \Longrightarrow \tilde{f}\varepsilon^2\Lambda_\alpha \Longrightarrow E_n(\tilde{f})=O(n^{-\alpha}).$$

Примећујемо да под истим условима исказ (3.19) важи у простору, $L^p$, $p\geqq 1$, тј.

$$E_n(f)_{L^p}=O[\varphi(n^{-1})] \Longleftrightarrow E_n(\tilde{f})_{L^p}=O[\varphi(n^{-1})].$$

Овај резултат није интересантанза $p>1$, јер из познатог M. Riesz-овог става, $\|\tilde{f}\|_{L^p}\leqq K_p\|f\|_{L^p}$ $(p>1)$, следи

$$E_n(\tilde{f})_{L^p}\leqq K_p E_n(f)_{L^p},$$

па су за $p>1$ величине $E_n(f)_{L^p}$ и $E_n(\tilde{f})_{L^p}$ увек истог реда.

Наведене резултате уопштили су у једном заједничком раду Н. К. Бари и С. Б. Стечкин [6]. Они су показали: Ако $\varphi\varepsilon\Phi$ и задовољен је услов (3.18), тада су $2r+2$ исказа (за фиксирано $r=0,1,\ldots$)

$$E_n(f^{(p)})=n^{p-r}O[\varphi(n^{-1})],\quad p=0,1,\ldots,r;$$

$$E_n(\tilde{f}^{(q)})=n^{q-r}O[\varphi(n^{-1})],\quad q=0,1,\ldots,r;$$

међу собом еквивалентни.

Услов (3.18) је овде неопходан. Наиме, ако он за неко $\varphi\varepsilon\Phi$ није испуњен, тада за свако $r$ постоји функција $f$ таква да $r$-ти исказ из прве групе важи а да $r$-ти исказ из друге групе не важи.

Примећујемо да овај Бари-Стечкин-ов резултат важи и ако свуда знак $O$ заменимо са $\sim$.

На други начин поредио је С. Б. Стечкин [33*d*] величине $E_n(f)$ и $E_n(\tilde{f})$. Он је показао:

Ако $f\varepsilon C$ и ако је за неко фиксирано $r=0,1,\ldots$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\nu^{r-1}E_\nu(f)<\infty,$$

тада $\tilde{f}$ има непрекидан $r$-ти извод $\tilde{f}^{(r)}$ и

$$E_n(\tilde{f}^{(r)})\leqq K_r\left\{(n+1)^r E_n(f)+\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{r-1}E_\nu(f)\right\}.$$

Сличан исказ важи и у простору $L^p$, $p\geqq 1$. За $p>1$ такав исказ није интересантан.

(х) У дефиницији најбоље апроксимације функције $f$

(3.20)
$$E_n(f) = \inf_{T \varepsilon H_n} \| f - T \|$$

$H_n$ је класа тригонометриских полинома реда $\leqq n$, који иначе не подлежу никаквом ограничењу. Говоримо од *једностраној* најбољој апроксимацији $E_n^+(f)$ функције $f$ ако inf узимамо преко класе $H_n^+$ тригонометриских полионома $T$ реда $\leqq n$ за које важи $T \geqq f$ (или $T \leqq f$). Појам једностране најбоље апрексимације у простору $C$ није интересантан, јер је ту

$$E_n^+(f) \leqq 2\, E_n(f);$$

међутим, он се показао веома корисним у простору $L^p$, а специјално у простору $L$.[15]

T. Ganelius [16] је испитивао једнострану најбољу апроксимацију тригонометриским полиномима у простору $L$ и показао:

Нека је $H_r$, $r = 1, 2, \ldots$, класа функција које имају непрекидан $(r-1)$-и извод $f^{(r-1)}$ и овај је интеграл неке функције $f_r$ ограничене варијације. Тада за $f \varepsilon H_r$ и свако $n$ постоји полином $T_n$ реда $(n-1)$ тако да је

$$T_n \geqq f$$

и

(3.21)
$$\| f - T_n \|_L \leqq \mathbf{C}_r\, V(f_r)\, n^{-r-1}.$$

$V(f)$ је тотална варијација функције $f$, а

$$\mathbf{C}_r = \frac{1}{4\pi (r+1)!} \left\{ \sup\, b_{r+1} - \inf\, b_{r+1} \right\}$$

где је

$$b_m(x) = -2\, m! \sum_{k=1}^{\infty} k^{-m} \cos(kx - m\pi/2), \quad m = 1, 2, \ldots$$

Константа $\mathbf{C}_r$ у (3.21) је најбоља могућа. Примећујемо да тада важи и $V(T_n - f) \leqq K_r\, V(f_r)\, n^{-r}$.

4. АПРОКСИМАЦИЈА FOURIER-ОВИМ СУМАМА. (i) Нека је

(4.1)
$$s_n(f) = s_n(f; x) = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x$$

низ делимичних сума Fourier-овог реда функције $f$.

H. Lebesgue-ов [22 *b*, *c*] резултат

(4.2)
$$|f(x) - s_n(f; x)| \leqq (3 + \log n)\, E_n(f) \qquad (n \geqq 2).$$

[15] H. Weyl [41], L. Fejér [14], J. Karamata [20] и G. Freud [15] користили су једнострану апроксимацију *алгебарским* полиномима у разним гранама Анализе.

показује да је апроксимација поступком $s_n(f)$ незнатно слабија од најбоље могуће апроксимације $E_n(f)$.

Користећи процене за $E_n(f)$ за разне класе функција (§ 3), добијамо из (4.2) одговарајуће процене за поступак $s_n(f)$. Например, користећи директни део исказа (3.10) односно (3.11), добијамо

$$f \varepsilon {}^2\Lambda_\alpha, \ 0 < \alpha \leqq 1 \implies f - s_n(f) = O(n^{-1} \log n),$$

односно

$$f^{(r)} \varepsilon {}^2\Lambda_\alpha, \ r = 1, 2, \ldots; \ 0 < \alpha \leqq 1 \implies f - s_n(f) = O(n^{-r-\alpha} \log n).$$

Нигде се овде симбол $O$ не може заменити симболом $o$. Примећујемо да се за $\alpha = 1$, заменом класе ${}^2\Lambda_1$ класом ${}^1\Lambda_1$ не може добити ништа бољи резултат.

У простору $L^p$, $p \geqq 1$, аналогон исказа (4.2) се битно разликује према томе да ли је $p > 1$ или је $p = 1$. E. S. Quade [30] је показао да је

$$\|f - s_n(f)\|_{L^p} \leqq \begin{cases} K_p E_n(f)_{L^p} & \text{за } p > 1; \\ K(1 + \log n) E_n(f)_L & \text{за } p = 1; \end{cases}$$

одакле специјално следи

$$f \varepsilon {}^1\Lambda_\alpha^p, \ p \geqq 1, \ 0 < \alpha \leqq 1 \implies \|f - s_n(f)\|_{L^p} = \begin{cases} O(n^{-\alpha}), & p > 1; \\ O(n^{-\alpha} \log n), & p = 1. \end{cases}$$

(ii) Најбоља могућа константа у директним исказима за поступак $s_n(f)$ није до данас одређена ни за једну специјалну класу функција Међутим, А. Н. Колмогоров-у [21] успело је да нађе асимптотско понашање најбоље могуће апроксимације за класу $W^{(r)}$, $r = 1, 2, \ldots$; наиме,

$$\mathrm{E}_C[1\, W^{(r)}; s_n(f)] = \sup_{f \varepsilon 1 W^{(r)}} \|f - s_n(f)\|_C = \frac{4}{\pi^2} \frac{\log n}{n^r} + O(n^{-r}).$$

Аналоган резултат важи и у простору $L$; у горњем исказу треба само $C$ формално заменити са $L$ (С. М. Никольский [27*e*].

С. М. Никольский [27*b*, *c*] и В. Т. Пинкевич [28] уопштили су Колмогоров-љев резултат у два корака: први га је пренео на класу $W^{(r)}$, $r > 0$, а други на још општију класу $W^{(r)\,1}\Lambda_\alpha$, $r \geqq 0$, $0 \leqq \alpha \leqq 1$. Њихов резултат гласи:

$$\mathrm{E}_C[1\, W^{(r)}\, {}^1\Lambda_\alpha; s_n(f)] = \mathrm{E}_C[\overline{1\, W^{(r)}\, {}^1\Lambda_\alpha}; s_n(f)] =$$

$$(4.3) \qquad = \frac{2^{\alpha+1}}{\pi^2} \frac{\log n}{n^{r+\alpha}} \int_0^{\pi/2} t^\alpha \sin t \, dt + O(n^{-r-\alpha}).$$

И. Г. Соколов [32] и С. Г. Селиванова [31] дали су прецизнију границу за константу која зависи од $r$ и $\alpha$ у другом члану асимптотског обрасца (4.3).

Даље уопштење постигао је С. М. Никольский [27 $c$] уводећи, уместо Lipschitz-ове, класу $\Lambda_\varphi$ функција чији је модул непрекидности $\omega(\delta; f) \leqq \varphi(\delta)$, где је $\varphi(\delta)$ непрекидна, неопадајућа и конвексна функција за коју је $\varphi(0)=0$. Он је показао да је

$$E_C[\Lambda_\varphi; s_n(f)] = \frac{2}{\pi^2} \log n \int_0^{\pi/2} \varphi\left(\frac{4t}{2n+1}\right) \sin t \, dt + O\left[\varphi\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right)\right].$$

Аналогон исказа (4.3) за класу $W^{(r)\,2}\Lambda_\alpha$ потиче од А. В. Ефимов-а [11$a$]. Како класе ${}^1\Lambda_\alpha$ и ${}^2\Lambda_\alpha$ дају најбољу апроксимацију $E_n(f)$ истог реда величине (види (3.3) и (3.11)), то ће на основу (4.2), то бити случај и код апроксимације поступком $s_n(f)$; једина разлика је у константи првог члана и у процени другог:

$$E_C[1\, W^{(r)\,2}\Lambda_\alpha; s_n(f)] = E_C[\overline{1\, W^{(r)\,2}\Lambda_\alpha}; s_n(f)] =$$

$$= \frac{\mathbf{K}_2(\alpha)}{\pi^2} \frac{\log n}{n^{r+\alpha}} + O\left(\frac{\log\log n}{n^{r+\alpha}}\right)$$

$$(r \geqq 0, \quad 0 < \alpha \leqq 1)$$

где је

$$\mathbf{K}_2(\alpha) = \sup_{f \in 1\,{}^2\Lambda_\alpha} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos x \, dx \right| .$$

Што се тиче константе $\mathbf{K}_2(\alpha)$ примећујемо, да у исказу (4.3) фигурише константа

$$\mathbf{K}_1(\alpha) = 2^{1+\alpha} \int_0^{\pi/2} t^\alpha \sin t \, dt = \sup_{f \in 1\,{}^1\Lambda_\alpha} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos x \, dx \right| .$$

А. В. Ефимов [12 $a$] је дао аналогне резултате и за класу $W^{(r)}(\beta)\,{}^2\Lambda_\alpha$.[16]

(iii) С. М. Никольский [27 $f$] добио је интересантне резултате за функције које имају $r$-ти извод $f^{(r)}$, $r \geqq 0$, ограничене варијације. Навешћемо неке од њих:

1° Нека су $x_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots$, тачке прекида од $f^{(r)}$ у $[0, 2\pi]$ и нека су $\delta_\nu$ скокови у тим тачкама. Тада је

$$\| f - s_n(f) \|_{L^p} = \mathbf{C}_{r,p} \left(\sum_\nu |\delta_\nu|^p\right)^{1/p} n^{-r-1/p} + o\left(n^{-r-1/p}\right), \quad 1 < p \leqq \infty,$$

где је константа $\mathbf{C}_{r,p}$ дата одређеним интегралом; нарочито једноставна је $\mathbf{C}_{0,\infty} = {}^1/_2$.

2° Ако са $V(f)$ означимо тоталну варијацију од $f$ у $[0, 2\pi]$, тада у простору $L$ важи

$$\| f - s_n(f) \|_L \leqq K\, V(f^{(r)})\, n^{-r-1} \log n .$$

[16] Види и најновији рад А. В. Ефимов-а [12 $c$] где се третирају аналогна питања за класу функција чији Weyl-ов извод $f^{(r)}$ има модул непрекидности $\omega_1(\delta)$ односно $\omega_2(\delta)$.

5. АПРОКСИМАЦИЈА FEJÉR-ОВИМ СУМАМА. (i) Fejér-ови полиноми $\sigma_n(f)$ функције $f$ дефинисани су са

$$\sigma_n(f) = \sigma_n(f; x) = \frac{s_0(f) + s_1(f) + \ldots + s_n(f)}{n+1}$$
$$= \sum_{\nu=1}^{n} \left(1 - \frac{\nu}{n+1}\right) (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x),$$

тј. добијају се применом Cesàro-вог (C, 1) поступка збирљивости на на Fourier-ов ред функције $f$. Како је код овог поступка збирљивост, матрица поступка дата са $\gamma_\nu^n = 1 - \dfrac{\nu}{n+1}$, то се, на основу (1.2), поступак $\sigma_n(f)$ засићује и његова најбоља апроксимација је реда $1/n$.

(ii) Први директан став за поступак $\sigma_n(f)$ потиче од С. Н. Бернштейн-а [7a]:

$$(5.1) \qquad f \in {}^1\Lambda_\alpha, \; 0 < \alpha \leqq 1 \Longrightarrow f - \sigma_n(f) = \begin{cases} O(n^{-\alpha}), & 0 < \alpha < 1; \\ O(n^{-1} \log n), & \alpha = 1. \end{cases}$$

Овде се $O$ не може заменити са $o$.

Аналогон овог Бернштейн-овог става у простору $L^p, p \geqq 1$, дао је E. S. Quade [30]:

$$f \in {}^1\Lambda_\alpha^p, \; p \geqq 1, \; 0 < \alpha \leqq 1 \Longrightarrow \|f - \sigma_n(f)\|_{L^p} = \begin{cases} O(n^{-\alpha}) & \text{за } \begin{array}{l} \alpha < 1 \text{ и } p \geqq 1, \\ \alpha = 1 \text{ и } p > 1, \end{array} \\ O(n^{-1} \log n) & \text{за } \alpha = p = 1. \end{cases}$$

С. М. Никольский је посветио неколико својих радова директним ставовима за поступак $\sigma_n(f)$. Тако је показао

1° у раду [27a]:

$$(5.2) \qquad \mathrm{E}_C[1\,{}^1\Lambda_\alpha; \sigma_n(f)] = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi} \dfrac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)} \sin \dfrac{\alpha\pi}{2} \cdot n^{-\alpha} + o(n^{-\alpha}), & 0 < \alpha < 1; \\ \dfrac{2}{\pi} \dfrac{\log n}{n} + o\left(\dfrac{\log n}{n}\right), & \alpha = 1; \end{cases}$$

2° у раду [27c]:

$$f \in W^{(r)}, \; r \geqq 0 \Longrightarrow f - \sigma_n(f) = \begin{cases} O(n^{-r}), & 0 \leqq r < 1; \\ O(n^{-1} \log n), & r = 1; \\ O(n^{-1}), & r > 1; \end{cases}$$

и

$$f \in W^{(r)}\,{}^1\Lambda_\alpha, \; r \geqq 0, \; 0 \leqq \alpha \leqq 1 \Longrightarrow f - \sigma_n(f) = \begin{cases} O(n^{-r-\alpha}), & 0 \leqq r + \alpha < 1; \\ O(n^{-1} \log n), & r + \alpha = 1; \\ O(n^{-1}), & r + \alpha > 1; \end{cases}$$

3° у радовима [27$c$, $e$]:

$$\mathrm{E}_C[1\,W^{(r)};\,\sigma_n(f)] = \mathrm{E}_L[1\,W^{(r)};\,\sigma_n(f)] = \mathbf{K}_r\, n^{-1} + O(n^{-r}),\ r > 1, \tag{5.3}$$

где, када је $r$ цео број $= 2, 3, \ldots$, константа $\mathbf{K}_r$ има једноставан облик

$$\mathbf{K}_r = \frac{4}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu(r-1)}}{(2\nu+1)^r}.$$

Примећујемо да се ни у једном од исказа у 1° и 2° симбол $O$ не не може заменити симболом $o$.

Прегледа ради, наводимо овде и неке резултате А. В. Ефимов-а [12$a$], који падају у најновије време:

$$1^\circ\quad f(x) - \sigma_{n-1}(f;x) = -\frac{1}{2\pi} \int_a^{\infty} \left[ f\left(x + \frac{2t}{n}\right) + f\left(x - \frac{2t}{n}\right) - 2f(x) \right] \frac{dt}{t^2} + $$
$$+ O[\omega_2(n^{-1}; f)],$$

где је $a$ произвољна константа. Овај резултат за $\omega_2(\delta; f) = \delta$ дао је M. Zamansky [42$a$].

$$2^\circ\qquad \tilde{f}(x) - \tilde{\sigma}_{n-1}(f;x) =$$
$$= -\frac{1}{\pi} \int_0^{a_1} \left[ f\left(x + \frac{t}{n}\right) - f\left(x - \frac{t}{n}\right) \right] \frac{\sin t}{t^2}\, dt + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

где је $a_1$ најмањи корен једначине $\int_0^u t^{-1} \sin t\, dt = \pi/2$.

$$3^\circ\qquad \mathrm{E}_C[\overline{1\,{}^2\Lambda_1};\,\sigma_n(f)] = \frac{1}{2\log(\sqrt{2}+1)} \frac{\log n}{n} + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Са гледишта најбоље апроксимације поступком $\sigma_n(f)$, нарочито је интересантан исказ (5.3); он показује да за $r > 1$ сужавање класе више не утиче на апроксимацију већ само на процену другог члана. Међутим, питање нетривијалне класе функција која постиже најбољу апроксимацију поступка $\sigma_n(f)$, овим резултатом није решено. То је постигао G. Alexits [3$a$], показавши да

$$f \in \overline{{}^1\Lambda_1} \Longrightarrow f - \sigma_n(f) = O(n^{-1}). \tag{5.4}$$

Због ратних прилика, овај резултат који је претходио Никольский-евим наведеним под 2° и 3°, остао је дуго незапажен, тако да су у истом правцу чињени и други покушаји.

Тако је A. Zygmund [44c] показао да за функције типа потенцијалног реда, тј. оне чији је Fourier-ов ред облика

$$f(x) \sim \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu e^{i\nu x}, \tag{5.5}$$

важи

$$|f(x) - \sigma_n(f)| \leqq K\omega\left(\frac{2\pi}{n}\right) \tag{5.6}$$

где је $\omega(\delta)$ модул непрекидности од $f$. Одавде специјално следи

$$f \varepsilon\, {}^1\Lambda_1 \Longrightarrow f - \sigma_n(f) = O(n^{-1}).$$

Аналогон ставу (5.6) важи и у простору $L^p, p \geqq 1$.

(iii) Један неинтересантан став еквиваленције за поступак $\sigma_n(f)$ следи непосредно из Бернштейн-овог инверзног става (3.4) за најбољу апроксимацију $E_n(f)$. Наиме, ако је $f - \sigma_n(f) = O(n^{-\alpha})$, $0 < \alpha < 1$, тим пре је $E_n(f) = O(n^{-\alpha})$, па на основу поменутог Бернштейн-овог става следи $f \varepsilon\, {}^1\Lambda_\alpha$. Заједно са првим исказом у (5.1) ово даје став еквиваленције

$$f \varepsilon\, {}^1\Lambda_\alpha \Longleftrightarrow f - \sigma_n(f) = O(n^{-\alpha}) \text{ за } 0 < \alpha < 1. \tag{5.7}$$

Овакав начин закључивања ефикасан је увек када одређени поступак $T_n(f)$ даје за неку класу функција M апроксимацију реда $\varphi(n)$, а за поступак најбоље апроксимације $E_n(f)$ и пар $(M, \varphi)$ важи став еквиваленције. Ниједан од исказа 2° у (ii), а специјално исказ (5.4), не може се на овај начин обрнути. Међутим, M. Zamansky [42a] је показао да

$$f - \sigma_n(f) = O(n^{-1}) \Longrightarrow f \varepsilon\, \overline{{}^1\Lambda_1},$$

што заједно са (5.4) даје став сатурације за поступак $\sigma_n(f)$:

$$f \varepsilon\, \overline{{}^1\Lambda_1} \Longleftrightarrow f - \sigma_n(f) = O(n^{-1}). \tag{5.8}$$

Оба исказа, (5.7) и (5.8), су ставови еквиваленције за поступак $\sigma_n(f)$, али, по класи функција која у њима фигурише, став сатурације (5.8) отступа од ставова еквиваленције (5.7), што оправдава увођење специјалног назива за исказ (5.8).

(iv) G. Alexits [3b] пренео је став сатурације за поступак $\sigma_n(f)$ у простор $L^p$, $p \geqq 1$, а J. Favard [13d] га је уопштио на апроксимацију Cesàro-вим сумама $k$-тог реда $\sigma_n^k(f)$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Ове су дефинисане са

$$\sigma_n^k(f) = \sigma_n^k(f; x) =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n} \left(1 - \frac{\nu}{n+1}\right)\left(1 - \frac{\nu}{n+2}\right) \ldots \left(1 - \frac{\nu}{n+k}\right)(a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x).$$

Из (1.2) следи да се поступак $\sigma_n^k(f)$ засићује и да је његова најбоља апроксимација реда $1/n$. Класа сатурације за поступак $\sigma_n^k(f)$

1) у простору $C$ је класа оних функција $f$ чија коњугована функција $\tilde{f}\varepsilon\, {}^1\Lambda_1$;

2) у простору $L$ је класа оних функција $f$ чија коњугована функција $\tilde{f}$ је ограничене варијације;

3) у простору $L^p$, $p>1$, је класа оних функција $f$ чија је коњугована функција $\tilde{f}$ еквивалентна апсолутно непрекидној функцији $g$ која има извод $g'\varepsilon L^p$.

Другим речима, став сатурације за поступак $\sigma_n^k(f)$ гласи:

$$\|f-\sigma_n^k(f)\|_{C,L^p}=O(n^{-1}) <=> \begin{cases} \tilde{f}\varepsilon\overline{{}^1\Lambda_1} \text{ (у простору } C); \\ \tilde{f} \text{ ограничене варијације (у простору } L); \\ \tilde{f} \text{ еквивалентна апсолутно непрекидној} \\ \text{функцији } g \text{ чији извод } g'\varepsilon L^p \text{ (у про-} \\ \text{стору } L^p, p>1). \end{cases}$$

Познато је да је поступак $\sigma_n^k(f)$ као поступак *збирљивости* утолико ефикаснији уколико је $k$ веће. Наведени резултат показује да је он као поступак *апроксимације*, бар у погледу реда величине апроксимације, еквивалентан за свако $k$. Разлика постоји само у најбољој могућој константи која до данас није одређена.

(v) С обзиром на последњу примедбу, од интереса је упоредити у погледу апроксимације поступак $\sigma_n^k(f)$ са Hölder-овим поступком $H_n^k(f)$, јер су ова два поступка, с гледишта збирљивости, еквивалентни.

Hölder-ов поступак $H_n^k(f)$, примењен на Fourier-ов ред функције $f$, дефинисан је $k$-тоструком интерацијом поступка $\sigma_n(f)$. Експлицитно он је дат са

$$H_n^k(f)=H_n^k(f;x)=\sum_{\nu=1}^{n} h_\nu^n(k)\,(a_\nu\cos\nu x+b_\nu\sin\nu x)\quad (k=1,2,\ldots)$$

где је

$$h_\nu^n(k)=1-\frac{\nu}{n+1}-\frac{\nu}{n+1}\left\{\pi_{\nu,n}^{(1)}+\ldots+\pi_{\nu,n}^{(k-1)}\right\}$$

и

$$\pi_{\nu,n}^{(m)}=\sum_{i_m=\nu}^{n}\frac{1}{i_m+1}\sum_{i_{m-1}=\nu}^{i_m}\frac{1}{i_{m-1}+1}\cdots\sum_{i_2=\nu}^{i_3}\frac{1}{i_2+1}\sum_{i_1=\nu}^{i_2}\frac{1}{i_1+1}\,.$$

Како је

$$|\,1-h_\nu^n(k)\,|\sim A_\nu\frac{\log^{k-1}n}{n}\,,\quad n\to\infty\ (A_\nu>0)$$

то се поступак $H_n^k(f)$ засићује и његова најбоља апроксимација је реда $n^{-1}\log^{k-1} n$. С. Аљанчић [4a, b] је дао став сатурације за поступак $H_n^k(f)$:

$$\|f-H_n^k(f)\|_{C,\,L^p}=O\left(\frac{\log^{k-1} n}{n}\right) \Longleftrightarrow \begin{cases} f\varepsilon\,\overline{{}^1\Lambda_1} \text{ (у простору } C); \\ \tilde{f} \text{ ограничене варијације (у простору } L); \\ \tilde{f} \text{ еквивалентна апсолутно непрекидној функцији } g \text{ чији извод } g'\varepsilon L^p \text{ (у простору } L^p, \\ p>1). \end{cases}$$

У сваком од наведених простора, класа сатурације је, дакле, иста као код поступка $\sigma_n^k(f)$, али одговарајућа апроксимација је слабија. Поредећи, за исто $k$, поступке $\sigma_n^k(f)$ и $H_n^k(f)$, видимо да два поступка еквивалентна у погледу збирљивости то не морају бити и у погледу апроксимације. Слично, поредећи поступке $H_n^k(f)$, за две различите вредности $k$, видимо да од два поступка један може бити ефикаснији у погледу збирљивости а да је при томе ефективно слабији у погледу апроксимације. Другим речима, ефикасност неког поступка у погледу збирљивости не мора да утиче на ред апроксимације коју он пружа, и обрнуто.

6. АПРОКСИМАЦИЈА RIESZ-ОВИМ ТИПИЧНИМ СРЕДИНАМА. (i) Riesz-ов поступак типичних средина је нарочито погодан да се илуструје место става сатурације у оквиру ставова еквиваленције за поступке који се засићују.

Нека је $\lambda_n$ низ бројева који монотоно тежи бесконачности и нека је $p>0$. Riesz-ов поступак, примењен на Fourier-ов ред функције $f$, дефинисан је са

$$R(f;x;\lambda_n;p)=\sum_{\nu=1}^{n}\left(1-\frac{\lambda_\nu}{\lambda_n}\right)^p(a_\nu\cos\nu x+b_\nu\sin\nu x).$$

Овај поступак се засићује и најбоља апроксимација му је реда $1/\lambda_n$. Специјално, $R(f;x;n^\lambda;1)$ где је $\lambda>0$, означаваћемо са $R_n^\lambda(f)$; његова најбоља апроксимација је реда $1/n^\lambda$. Примећујемо да је $R_n^1(f)=\sigma_{n-1}(f)$.

(ii) Поступак $R_n^\lambda(f)$ испитивало је у погледу апроксимације више аутора. A. Zygmund [44d], се ограничио на $\lambda=1, 2, \ldots$ и показао:

1° За *парно* $\lambda$ и цео број $r\leqq\lambda$

(6.1) $$f\varepsilon W^{(r)}\Longrightarrow f-R_n^\lambda(f)=O(n^{-r}).$$

2° За *непарно* $\lambda$ и $r\leqq\lambda-1$ опет важи (6.1), али za $r=\lambda$ следи само

$$f\varepsilon W^{(r)}\Longrightarrow f-R_n^\lambda(f)=O(n^{-r}\log n),$$

и логаритам на десној страни не може се уклонити.

3° Општије, ако је $r < \lambda$

$$f \varepsilon \overline{W^{(r)}}\,{}^1\Lambda_\alpha,\ 0 < \alpha < 1 \Longrightarrow f - R_n^\lambda(f) = O(n^{-r-\alpha}).$$

Овај резултат важи и за $\alpha = 1$ уколико $\lambda$ није непарно и $r = \lambda - 1$.

Аналогни искази важе и за класе $\overline{W^{(r)}}$ односно $\overline{W^{(r)}\,{}^1\Lambda_\alpha}$; формално треба једино реч „паран" заменити са „непаран" и обрнуто.

Специјално, ако је $f$ типа потенцијалног реда [види (5.5)], када је $\tilde{f} = -if$, (6.1) важи независно да ли је $\lambda$ парно или непарно.

(iii) B. Sz. Nagy [25b] испитивао је апроксимацију поступцима који су дефинисани суматорном функцијом (види § 9). Општи резултати до којих је дошао садрже и исказе о апроксимацији поступком $R_n^\lambda(f), \lambda > 0$ (не обавезно цео број). У том раду B. Sz. Nagy је увео класу функција $W^{(r)}(0)$, $r > 0$ (види § 2.2), као класу оних функција

$$f \sim \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x$$

за које је

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^r (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x)$$

Fourier-ов ред неке ограничене функције. Примећујемо да се класа $W^{(r)}(0)$ може и овако дефинисати: $f \varepsilon W^{(r)}(0)$ ако

$$f \cos \frac{r\pi}{2} + \tilde{f} \sin \frac{r\pi}{2} \ \varepsilon\ W^{(r)}.$$

Одавде се види да се $W^{(r)}(0)$ за целе парне вредности $r$ своди на $W^{(r)}$ а за целе непарне на $\overline{W^{(r)}}$. Обрнуто је случај код коњуговане класе $\overline{W^{(r)}(0)}$.

Нека су $\lambda$ и $r$ позитивни бројеви; тада

$$1^\circ \quad f \varepsilon {}^1\Lambda_\alpha,\ 0 < \alpha < 1 \Longrightarrow f - R_n^\lambda(f) = \begin{cases} O(n^{-\alpha}), & \lambda > \alpha; \\ O(n^{-\alpha}\log n), & \lambda = \alpha; \\ O(n^{-\lambda}), & \lambda < \alpha; \end{cases}$$

$$2^\circ \quad f \varepsilon W^{(r)}(0) \Longrightarrow f - R_n^\lambda(f) = \begin{cases} O(n^{-r}), & \lambda \geqq r; \\ O(n^{-\lambda}), & \lambda < r; \end{cases}$$

$$3^\circ \quad f \varepsilon \overline{W^{(r)}(0)} \Longrightarrow f - R_n^\lambda(f) = \begin{cases} O(n^{-r}), & \lambda > r; \\ O(n^{-r}\log n), & \lambda = r; \\ O(n^{-\lambda}), & \lambda < r; \end{cases}$$

$$4^\circ \quad f \varepsilon W^{(r)}(0)\,{}^1\Lambda_\alpha,\ 0 < \alpha < 1 \Longrightarrow f - R_n^\lambda(f) = \begin{cases} O(n^{-r-\alpha}), & \lambda > r + \alpha; \\ O(n^{-r-\alpha}\log n), & \lambda = r + \alpha; \\ O(n^{-\lambda}), & \lambda < r + \alpha. \end{cases}$$

Нигде се у исказима 1—4° симбол $O$ не може заменити симболом $o$.

Неке од ових резултата B. Sz. Nagy дао је и у прецизнијем облику. Нека је

$$\mathbf{K}_{r,\lambda} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{(2\nu+1)^{r-\lambda+1}}.$$

Тада је

$$E_C\left[\overline{1\,W^{(r)}(0)};\ R_n^\lambda(f)\right] = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}\dfrac{\log n}{n^r} + O(n^{-r}), & \lambda = r; \\ \mathbf{K}_{r,\lambda}\, n^{-\lambda} + O(n^{-r}), & \lambda < r; \end{cases}$$

$$E_C\left[\overline{1\,W^{(r)}(0)\,{}^1\Lambda_\alpha};\ R_n^\lambda(f)\right] = \begin{cases} \dfrac{2^\alpha}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{t^\alpha}{\sin t}\,dt\cdot n^{-\lambda} + O(n^{-r-\alpha}), & \lambda = r; \\ \mathbf{K}_{r,\lambda}\; n^{-\lambda} + O(n^{-r-\alpha}), & \lambda < r. \end{cases}$$
$$(0 < \alpha < 1)$$

Од наведених директних ставова само се први исказ у 1° може тривијално обрнути (види § 5 (iii)) и тако добити став еквиваленције

$$f \,\varepsilon\, {}^1\Lambda_\alpha \Longleftrightarrow f - R_n^\lambda(f) = O(n^{-\alpha}) \text{ за } 0 < \alpha < 1 \text{ и } \lambda > \alpha.$$

M. Zamansky [42*b*] је дао за поступак $R_n^\lambda(f)$, $\lambda = 1, 2, \ldots$, нетривијални став еквиваленције, и то став сатурације:

$$f - R_n^\lambda(f) = O(n^{-\lambda}) \Longleftrightarrow \begin{cases} f^{(\lambda-1)}\,\varepsilon\,{}^1\Lambda_1, & \lambda \text{ парно}, \\ f^{(\lambda-1)}\,\varepsilon\,\overline{{}^1\Lambda_1}, & \lambda \text{ непарно}. \end{cases}$$

Примећујемо да је директни део овог исказа садржан већ у Zygmund-овим резултатима из (ii).

(iv) У § 3 (iv) видели смо да је код ставова еквиваленције за поступак $E_n(f)$ адекватна класа функција типа ${}^2\Lambda_1$ (види § 2.2 (iii)). С. Аљанчић [4 *d*] је показао да је то случај и код ставова еквиваленције поступка $R_n^\lambda(f)$, с изузетком става сатурације код кога је адекватна класа функција типа ${}^1\Lambda_1$. Другим речима, поступци $E_n(f)$ и $R_n^\lambda(f)$, од којих се само други засићује, показују у погледу ставова еквиваленције подједнако понашање све до тренутка засићења поступка $R_n^\lambda(f)$. Прецизније:

Нека је $\lambda > 0$, $\beta \leqq \lambda$ и ставимо $\beta = r + \alpha$ са $r = 0, 1, \ldots$ и $0 < \alpha \leqq 1$. Тада је

$$f - R_n^\lambda(f) = O(n^{-\beta}) \Longleftrightarrow \begin{cases} f^{(r)}\,\varepsilon\,{}^2\Lambda_\alpha, & \beta < \lambda; \\ f\,\varepsilon\,W^{(\beta)}(0), & \beta = \lambda. \end{cases}$$

Специјално, ако је $f$ типа потенцијалног реда (види (5.5)), када је $\tilde{f} = -if$, класа сатурације $W^{(\beta)}(0)$ своди се на $W^{(\beta)}$.

С. Аљанчић [$4a, c$] је дао став сатурације и за поступак $R(f;x;\lambda_n;1)$, а из општих резултата G. Sunouchi-а и C. Watari-а [34] следи, као специјални случај, класа сатурације за поступак $R(f;x;n^\lambda;p)$, $\lambda>0$. Последња два аутора одредила су класу сатурације и у простору $L^p$, $p\geqq 1$.

(v) Однос става сатурације према другим ставовима еквиваленције који постоји код поступака $R_n^\lambda(f)$, није ограничен само на овај поступак. Слично важи и за поступак $\rho_n(f)$ који је дао Rogosinski; овај је дефиносан са

$$\rho_n(f)=\rho_n(f;x)={}^1/_2\{s_n(f;x+\pi/2n)+s_n(f;x-\pi/2n)\}$$
$$=\sum_{\nu=1}^{n-1}\cos\frac{\pi\nu}{2n}(a_\nu\cos\nu x+b_\nu\sin\nu x).$$

Поступак $\rho_n(f)$ се засићује и најбоља апроксимација му је реда $n^{-2}$.

С. Н. Бернштейн [$7c$] је показао да

$$f\varepsilon{}^1\Lambda_\alpha,\ 0<\alpha\leqq 1 \Longrightarrow f-\rho_n(f)=O(n^{-\alpha}),\tag{6.2}$$

а према једној A. Zygmund-овој [$36d$] примедби

$$f'\varepsilon{}^1\Lambda_\alpha,\ 0<\alpha\leqq 1 \Longrightarrow f-\rho_n(f)=O(n^{-1-\alpha}).\tag{6.3}$$

Оба ова исказа се могу тривијално обрнути када је $0<\alpha<1$ и тако добити ставови еквиваленције. Но за $\alpha=1$ ситуација у ова два исказа је битно различита. Наиме, први се може побољшати (С. Аљанчић [$4d$])

$$f\varepsilon{}^2\Lambda_1 \Longrightarrow f-\rho_n(f)=O(n^{-1})$$

и тек као такав тривијално обрнути, док се други исказ може (нетривијално) обрнути (G. Sunouchi и C. Watari [34]), тако да је $W^{(1)1}\Lambda_1=W^{(2)}=W^{(2)}(0)$ класа сатурације поступка $\rho_n(f)$.

7. Апроксимација de la Vallée Poussin-овим сумама. (i) De la Vallée Poussin-ове суме $V_n(f)$ (види [$40a$]) дефинисане су са

$$V_n(f)=V_n(f;x)=2\sigma_{2n-1}(f)-\sigma_{n-1}(f)=\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{2n-1}s_\nu(f)$$
$$=\sum_{\nu=1}^{2n-1}\gamma_\nu^n(a_\nu\cos\nu x+b_\nu\sin\nu x),$$

где је

$$\gamma_\nu^n=\begin{cases}1, & 0\leqq\nu\leqq n;\\ 2-\nu/n, & n\leqq\nu\leqq 2n.\end{cases}$$

Основни резултат за de la Vallée Poussin-ове суме $V_n(f)$ јесте да оне дају апроксимацију истог реда као полиноми најбоље апроксимације $T_n^*$, тј.

$$f - V_n(f) = O\,[E_n(f)]. \tag{7.1}$$

Примећујемо једино да су тригонометриски полиноми $V_n(f)$ реда $2n-1$ за разлику од $T_n^*$ који су реда $\leqq n$.

Исказом (7.1) у принципу је код поступка $V_n(f)$ решено питање директних, инверзних и ставова еквиваленције за поједине класе функција. Наиме, сваком директном ставу за $E_n(f)$ одговара на основу (7.1) и директан став за $V_n(f)$. Исто тако, сваком ставу еквиваленције за $E_n(f)$, на основу (7.1), тривијално одговара став еквиваленције за поступак $V_n(f)$ (види примедбу после (5.7)). Једино питање које остаје отворено то је најбоља могућа константа у директним ставовима.

(ii) Уопштена de la Vallée Poussin-ова сума

$$\tau_{n,\,p}(f) \quad (p = p\,(n) = 0, 1, \ldots, n)$$

дефинисана је са

$$\tau_{n,p}(f) = \tau_{n,\,p}(f\,;\,x) = \frac{(n+1)\,\sigma_n(f) - (n-p)\,\sigma_{n-p-1}(f)}{p+1} = \frac{1}{p+1}\sum_{\nu=n-p}^{n} s_\nu(f)$$
$$= \sum_{\nu=1}^{n} \gamma_\nu^n(p)\,(a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x)\,,$$

где је

$$\gamma_\nu^n(p) = \begin{cases} 1, & 0 \leqq \nu \leqq n-p\,; \\ \dfrac{n-\nu+1}{p+1}, & n-p \leqq \nu \leqq n\,. \end{cases}$$

Специјално

$$\tau_{2n-1,\,n-1}(f) = V_n(f), \quad \tau_{n,\,0}(f) = s_n(f)\,, \quad \tau_{n,\,n}(f) = \sigma_n(f). \tag{7.2}$$

De la Vallée Poussin [40*c*, *a*] је показао да је

$$|\,f(x) - \tau_{n,\,p}(f\,;\,x)\,| \leqq 2\,\frac{n+1}{p+1}\,E_{n-p}(f)\,. \tag{7.3}$$

Одавде се види да апроксимација de la Vallée Poussin-овим сумама битно зависи од односа бројева $n$ и $p = 0, 1, \ldots, n$. Ако $p/n \to \theta$, $n \to \infty$, у принципу треба разликовати случајеве: $1^\circ\ \theta = 0$; $2^\circ\ 0 < \theta < 1$ и $3^\circ\ \theta = 1$. За $\theta = 0$ суме $\tau_{n,\,p}(f)$ су „блиске“ Fourier-овим сумама $s_n(f)$, а за $\theta = 1$ оне су „блиске“ Fejér-овим сумама $\sigma_n(f)$ (види (7.2)).

Случај $\theta = 0$ испитао је А. Ф. Тиман [36 *b*] и показао да је

$$\mathrm{E}_C[1\, W^{(r)}\, {}^1\Lambda_\alpha;\, \tau_{n,p}(f)] = \mathrm{E}_C[\overline{1\, W^{(r)}\, {}^1\Lambda_\alpha};\, \tau_{n,p}(f)] =$$

$$= \frac{2^{\alpha+1}}{\pi^2}\, \frac{1}{n^{r+\alpha}} \log \frac{n}{p+1} \int_0^{\pi/2} t^\alpha \sin t\, dt + O(n^{-r-\alpha})$$

$$(r \geqq 0,\ 0 < \alpha \leqq 1)$$

Интересантно је упоредити овај резултат са одговарајућом проценом (4.3) за $s_n(f)$.

Случај $0 < \theta \leqq 1$ посматрао је С. А. Теляковский [38 *a*, *b*]. За $0 < \theta \leqq 1$ већ из (7.3) следи

$$f \,\varepsilon\, W^{(r)} \text{ или } \overline{W^{(r)}} \implies f - \tau_{n,p}(f) = O(n^{-r})\quad (r = 1, 2, \ldots).$$

Теляковский је прецизирао овај резултат, показавши да је

$$\mathrm{E}_C[1\, W^{(r)};\, \tau_{n,p}(f)] = \mathbf{C}_{r,\theta}\, n^{-r} + o(n^{-r})\quad (r = 1, 2, \ldots)$$

где је константа $\mathbf{C}_{r,\theta}$ дата вишеструким одређеним интегралом. За $\theta = 1$, Теляковский је разликовао два случаја, према томе да ли је $n - p = \text{const}$ или $n - p \to \infty$.

А. В. Ефимов [12 *b*] испитивао је апроксимацију поступком $\tau_{n,p}(f)$ не претпостављајући да постоји гранична вредност количника $p/n$ када $n \to \infty$. Он је показао:

1° Нека је $\varphi(\delta)$ позитивна функција која је модул непрекидности (види § 2.1) и означимо са $\Lambda_\varphi$ класу функција чији је модул непрекидности $\omega(\delta) \leqq \varphi(\delta)$. Тада је

$$\mathrm{E}_C[{}^1\Lambda_\varphi;\, \tau_{n,p}(f)] = \begin{cases} \dfrac{C_1^{(n)}(\varphi)}{\pi} \log \dfrac{n}{p+1} + O\left[\varphi\left(\dfrac{1}{n}\right)\right], & 0 \leqq p \leqq \dfrac{n}{2}; \\[2ex] \dfrac{2}{\pi(p+1)} \displaystyle\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n-p}} \dfrac{\varphi(t)}{t^2}\, dt + O\left[\varphi\left(\dfrac{1}{n}\right)\right], & \dfrac{n}{2} \leqq p \leqq n-1; \end{cases}$$

где је

$$C_1^{(n)}(\varphi) = \sup_{f \varepsilon \Lambda_\varphi} \left| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx \right|.$$

2° За свако $0 \leqq p \leqq n-1$ и $0 < \alpha \leqq 1$ важи

$$\mathbf{E}_C[1\, {}^2\Lambda_\alpha;\, \tau_{n,p}(f)] = B_{n,p}(\alpha) + O(n^{-\alpha})$$

где је

$$B_{n,p}(\alpha)=\begin{cases} C_2^{(n)}(\alpha)\log\dfrac{n}{p+1}+O\left(\dfrac{\log\log n}{n^{\alpha}}\right), & 0\leqq p\leqq\dfrac{n}{2},\ 0<\alpha\leqq 1;\\ O(n^{-\alpha}),\ n/2\leqq p\leqq n-1,\ 0<\alpha<1; & \\ \dfrac{1}{\pi(p+1)}\log\dfrac{n+1}{n-p}, & \dfrac{n}{2}\leqq p\leqq n-1,\ \alpha=1; \end{cases}$$

и

$$C_2^{(n)}(\alpha)=\sup_{f\varepsilon 1^2\Lambda_\alpha}\left|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx\right|.$$

Не постављајући никаква ограничења у погледу односа бројева $n$ и $p$, А. Д. Щербина [45] је показала да

$$|\tilde{f}(x)|\leqq 1 \Longrightarrow |f(x)-\tau_{n,p}(f;x)|\leqq\frac{4}{\pi^2}\log\frac{n}{p+1}+O(1).$$

8. АПРОКСИМАЦИЈА DE LA VALLÉE POUSSIN-ОВИМ ИНТЕГРАЛОМ. De la Vallée Poussin-ов интегралом (види [40 *a*] и [26 *a*], стр. 183)

$$\mathbf{V}_n(f)=\mathbf{V}_n(f;x)=\frac{h_n}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\cos^{2n}\frac{t}{2}\,dt$$

$$=\sum_{\nu=1}^{n}\gamma_\nu^n(a_\nu\cos\nu x+b_\nu\sin\nu x),$$

где је

$$h_n=\frac{2n(2n-2)\ldots 4.2}{(2n-1)(2n-3)\ldots 3.1}$$

и

(8.1) $$\gamma_\nu^n=\frac{(n!)^2}{(n-\nu)!\,(n+\nu)!}=1-\frac{\nu^2}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

дефинисан је поступак апроксимације тригонометриским полиномима. На основу (8.1) он се засићује и његова најбоља апроксимације је реда $1/n$.

И. П. Натасон [26 *b*] је показао да је за $0<\alpha\leqq 1$

$$\mathrm{E}_C[^1\Lambda_\alpha;\mathbf{V}_n(f)]=\frac{2^\alpha}{\sqrt{\pi}}\,\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)n^{-\alpha/2}+o(n^{-\alpha}).$$

Општије директне ставове дао је P. L. Butzer [10 *a*]. Он је показао да је у простору $C$

$$f-\mathbf{V}_n(f)=O[\omega_2(n^{-1/2};f)]$$

и

$$f-\mathbf{V}_n(f)=n^{-1/2}O[\omega_1(n^{-1/2};f')],$$

а у простору $L^p, p \geqq 1$,

$$\| f - \mathbf{V}_n(f) \|_{L^p} = O[\omega_2^p(n^{-1/2}; f)]$$

и

$$f' \varepsilon^1 \Lambda_\alpha^p, \ 0 < \alpha \leqq 1 \implies \| f - \mathbf{V}_n(f) \|_{L^p} = O(n^{-\frac{1}{2}(1+\alpha)}).$$

P. L. Butzer[17] [10 c] је наслутио, а G. Sunouchi и C. Watari [34] су доказали став сатурације за de la Vallée Poussin-ов интеграл:

$$\| f - \mathbf{V}_n(f) \|_{C, L^p} = O(n^{-1}) \iff \begin{cases} f' \varepsilon^1 \Lambda_1 \text{ (у простору } C), \\ f' \text{ ограничене варијације (у простору } L) \\ f'' \varepsilon L^p \text{ (у простору } L^p, \ p > 1). \end{cases}$$

9. АПРОКСИМАЦИЈА СУМАТОРНОМ ФУНКЦИЈОМ. (i) Нека је функција $g(t)$ дефинисана у размаку $[0,1]$ и нека је $g(0) = 1$ и $g(1) = 0$. Овом „суматорном" функцијом дефинисан је поступак апроксимације

$$G_n(f) = \sum_{\nu=1}^{n-1} g\left(\frac{\nu}{n}\right)(a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x).$$

Ако је $g(t)$ непрекидна у тачки $t = 0$ и ограничене варијације у $[0,1]$, поступак $G_n$, као поступак збирљивости, је регуларан.

Суматорни поступак $G_n$ садржи као специјалне случајеве:

1° Fourier-ове суме када је $g(t) = 1, \ 0 \leqq t < 1$;

2° Fejér-ове суме када је $g(t) = 1 - t$;

3° Rogosinski-еве суме када је $g(t) = \cos(\pi t/2)$;

4° Riesz-ове суме $R_n(f; n^\lambda; p)$ када је $g(t) = (1 - t^\lambda)^p$;

5° De la Vallée Poussin-ове суме спадају исто тако у суматорне поступке, само како су оне тригонометриски полиноми $(2n-1)$-ог реда, то је код одговарајуће суматорне функције $g$ размак $[0,2]$ а не $[0,1]$ основан и

$$V_n(f) = \sum_{\nu=1}^{2n-1} g\left(\frac{\nu}{n}\right)(a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x), \tag{7.4}$$

где је

$$g(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leqq t \leqq 1; \\ 2 - t, & 1 \leqq t \leqq 2. \end{cases}$$

6° Jackson-de la Vallée Poussin-ов интеграл

$$J_n(f) = J_n(f; x) = \frac{A}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x + \frac{2t}{n}\right) \frac{\sin^4 t}{t^4} \, dt,$$

где је

$$A = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^4 t}{t^4} \, dt,$$

---

[17] Појам сатурације пренео је P. L. Butzer [10 b, c] и на сингуларне интеграле који нису тригонометриски полиноми.

такође одређује један суматорни поступак, истог типа као што су de la Vallée Poussin-ове суме. Наиме (види Н. И. Ахиезер [1]),

$$J_n(f)=\sum_{\nu=1}^{2n-1} g\left(\frac{\nu}{n}\right)(a_\nu \cos \nu x+b_\nu \sin \nu x)$$

где је

$$g(t)=\begin{cases} 1-\dfrac{3}{2}t^2+\dfrac{3}{4}t^3, & 0\leqq t\leqq 1\,; \\[2ex] \dfrac{1}{4}(2-t)^3, & 1\leqq t\leqq 2\,. \end{cases}$$

(ii) У § 3 (vi) смо навели да је J. Favard одредио најбољу могућу константу за поступмк $E_n(f)$ и класу $W^{(r)}$. Он је то постигао на тај начин што је ефективно конструисао поступак апроксимације $G_n^\star(f)$, који се за класу $W^{(r)}$ поклапа са најбољом апроксимације функције не само по реду величине апроксимације већ и по најбољој могућој константи. За поступак $G_n^\star(f)$, дакле, важи

$$\sup_{f\varepsilon 1\,W^{(r)}} \|f-G_n^\star(f)\|_C=\sup_{f\varepsilon 1\,W^{(r)}} E_n(f).$$

Favard-ов поступак $G_n^\star(f)$ је један суматорни поступак дефинисан функцијом

$$g^\star(t)=1-t^r\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu+1}\left\{\frac{1}{(2\nu-t)^r}+\frac{1}{(2\nu+t)^r}\right\}$$

када је $r$ парно, и

$$g^\star(t)=1-t^r\sum_{\nu=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{(2\nu-t)^r}-\frac{1}{(2\nu+t)^r}\right\}$$

када је $r$ непарно.

(iii) B. Sz. Nagy [26 *b*] испитивао је апроксимацију општим суматорним функцијама и дао низ директних ставова за класе ${}^1\Lambda_\alpha$, $W^{(r)}(0)$, $\overline{W^{(r)}(0)}$, $W^{(r)}(0)\,{}^1\Lambda_\alpha\,(r\geqq 0,\ 0<\alpha\leqq 1)$. За те опште ставове упућујемо на оригинални рад, а овде, примера ради, наводимо само један:

Нека је

1) $g(t)$ апсолутно непрекидна у $[0,1]$ и нека је $g'(t)$ ограничене варијације сем у околини коначно много тачака;

2) $|g'(+0)|+\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{+0}^{1-0}(1-u)\left\{2+\log\frac{1+u}{1-u}\right\}|dg'(t)|<\infty$;

3) $\int |t-a|^{1-\alpha}|dg'(t)|<\infty$ у околини сваке изузетне тачке $a$ из 1).

Тада

$$f\varepsilon^1\Lambda_\alpha\,,\ 0<\alpha<1 \Longrightarrow f-G_n(f)=O(n^{-\alpha})\,.$$

Из Nagy-ових општих ставова добија се за специјалне суматорне поступке $s_n(f), \sigma_n(f), R(f; n\lambda; p), \rho_n(f)$ читав низ резултата, већ познатих и нових. Оне за поступак $R_n^\lambda(f)$ навели смо § 6.

(iv) Овде ћемо се задржати још на Jackson-de la Vallée Poussin-овом интегралу $J_n(f)$. Овај поступак апроксимације се засићује и његова најбоља апроксимација је реда $1/n^2$. Поменућемо само став сатурације, у коме инверзни део потиче од G. Sunouchi-a и C. Watari-a [34]:

$$\|f-J_n(f)\|_{C,\,L^p}=O(n^{-2}) \Longleftrightarrow \begin{cases} f'(x)\,\varepsilon^1\Lambda_1 \text{ (у простору } C); \\ f'(x) \text{ огран. варијације (у простору } L); \\ f''(x)\,\varepsilon L^p \text{ (у простору } L^p,\ p>1) \end{cases}$$

10. ЛИНЕАРНИ ПОСТУПЦИ АПРОКСИМАЦИЈЕ. (i) Нека је

$$\gamma_\nu^n\,(\nu=0,1,\dots,n+1;\ \gamma_0^n=1;\ \gamma_{n+1}^n=0)$$

произвољна троугаона матрица бројева и нека је

$$\Gamma_n(f)=\sum_{\nu=1}^{n}\gamma_\nu^n\,(a_\nu\cos\nu x+b_\nu\sin\nu x)\,.$$

*линеарни поступак апроксимације* примењен на Fourier-ов ред функције $f$.

А. Ф. Тиман [36 *b*] је испитивао апроксимацију линеарним поступцима. Он је поставио питање које услове треба да задовољава матрица $\gamma_\nu^n$ да би одговарајући линеарни поступак $\Gamma_n(f)$ давао апроксимацију истог реда величине као најбоља апроксимација $E_n(f)$. А. Ф. Тиман је дошао до ових резултата:

1° Да би линеарни поступак $\Gamma_n(f)$ када $n\to\infty$ давао за *све* класе $W^{(r)\,1}\Lambda_\alpha$ и $\overline{W^{(r)\,1}\Lambda_\alpha}$ $(0\leqq\alpha<1)$ апроксимацију истог реда величине као $\sup_f E_n(f)$, *потребно* је да је

$$\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1-\gamma_\nu^n}{\nu^r(n-\nu+1)}=\frac{\log n}{n^r}+O\left(\frac{1}{n^r}\right). \tag{9.1}$$

Услов (9.1) није довољан као што показује линеарни поступак $\bar\Gamma_n(f)$ дефинисан матрицом

$$\bar\gamma_\nu^n=\begin{cases}1, & 0\leqq\nu\leqq[n/2]\,;\\ 0, & [n/2]<\nu\leqq n+1\,,\end{cases}$$

који задовољава (9.1) а за који је

$$E_C[W^{(r)}{}^1\Lambda_\alpha;\overline{\Gamma}_n(f)] \sim \frac{\log n}{n^{r+\alpha}}.$$

2° Нека је матрица $\gamma_\nu^n$ линеарног поступка $\Gamma_n(f)$ таква да бројеви

$$\delta_\nu^n = \frac{1-\gamma_\nu^n}{\nu},\ 0<\nu\leqq n+1;\ \delta_0^n=0,$$

задовољавају

(9.2)
$$\delta_\nu^n \leqq \delta_{\nu+1}^n,\quad \delta_\nu^n - 2\delta_{\nu+1}^n + \delta_{\nu+2}^n \geqq 0.$$

Тада је услов (9.1) *потребан* и *довољан* да би поступак $\Gamma_n(f)$ за све класе $W^{(r)}{}^1\Lambda_\alpha$ и $\overline{W^{(r)}{}^1\Lambda_\alpha}$ $(0\leqq\alpha<1)$ давао апроксимацију истог реда величине као $\sup\limits_f E_n(f)$.

А. Ф. Тиман је дао и неколико општих процена за апроксимацију линеарним поступком, и то како с горње тако и с доње стране. Овде ћемо навести само две најједноставније.

1° Ако матрица $\gamma_\nu^n$ поступка $\Gamma_n(f)$ задовољава услове

$$\gamma_\nu^n \geqq \gamma_{\nu+1}^n \quad\text{и}\quad \gamma_\nu^n - 2\gamma_{\nu+1}^n + \gamma_{\nu+2}^n \leqq 0,$$

тада је за $0<\alpha<1$

$$\left.\begin{array}{l} E_C[1\,{}^1\Lambda_\alpha;\Gamma_n(f)] \\ E_C[\overline{1\,{}^1\Lambda_\alpha};\Gamma_n(f)] \end{array}\right\} = \frac{2^{\alpha+1}}{\pi^2 n^\alpha}\int_0^{\pi/2} t^\alpha \sin t\,dt\cdot\sum_{\nu=1}^n \frac{\gamma_\nu^n}{n-\nu+1} + O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right).$$

2° Ако матрица $\gamma_\nu^n$ поступка $\Gamma_n(f)$ задовољава услове (9.2), тада је за $0<\alpha<1$

$$E_C[W^{(r)}{}^1\Lambda_\alpha;\Gamma_n(f)] =$$

$$= \frac{2^{\alpha+1}}{\pi^2 n^\alpha}\int_0^{\pi/2} t^\alpha \sin t\,dt\cdot\left|\sum_{\nu=1}^n \frac{1-\gamma_\nu^n}{\nu^r(n-\nu+1)} - \frac{\log n}{n^r}\right| + O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha}}\right).$$

Овај резултат важи и за $\alpha=1$ ако десну страну помножимо са 2.

(ii) G. Sunouchi и C. Watari [34] дали су читав низ ставова сатурације за специјалне поступке апроксимације (види §§ 6 (iv), 8, 9 (iv)) користећи један општи инверзан став. Нека је *квадратном* матрицом $\gamma_\nu^n$ $(\nu=0,1,\ldots;\ n=0,1,\ldots)$ дефинисан поступак апроксимације

$$\Gamma_n(f)=\Gamma_n(f;x)=\sum_{\nu=1}^\infty \gamma_\nu^n(a_\nu\cos\nu x+b_\nu\sin\nu x)$$

Ако постоје позитивни бројеви $c$, $r$ и $\rho$ такви да је

$$\lim_{n\to\infty} n^r [1-\gamma_\nu^n] = c\,\nu^\rho \quad (\nu=0, 1, \ldots)$$

и ако са $F$ означимо тригонометриски ред

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^\rho (a_\nu \sin \nu x - b_\nu \cos \nu x)\,,$$

тада из

$$\|f-\Gamma_n(f)\|_{C,L^p} = O(n^{-r})$$

следи да је

1) $F$ Fourier-ов ред неке скоро свуда ограничене функције (у простору $C$),

2) $F$ Fourier-Sieltjes-ов ред неке функције ограничене варијације (у простору $L$),

3) $F$ Fourier-ов ред неке функције из $L^p$ (у простору $L^p$, $p>1$).

Још општији став сатурације за квадратне поступке $\Gamma_n(f)$ дао је недавно H. Buchwalter [9 a]:

Нека је $\varphi(n)$ позитивна функција која тежи нули када $n\to\infty$ и нека је низ $\lambda_\nu$ такав да је

$$0 \leqq \lambda_0 < \lambda_\nu < \lambda_{\nu+1} \to \infty\,, \quad \lambda_{\nu+1} = O(\lambda_\nu)\,.$$

Претпоставимо још да је

1) $\sum_{\nu=0}^{\infty} |\gamma_\nu^n| < \infty$ за свако $n=0, 1, \ldots;$

2) $1-\gamma_\nu^n \sim \lambda_\nu\,\varphi(n)$ за свако $\nu=0, 1, \ldots$ и $n\to\infty$;

3) $\gamma_\nu^n$ и $\dfrac{\gamma_\nu^n-\gamma_{\nu+1}^n}{\lambda_{\nu+1}-\lambda_\nu}$ монотоно теже нули када $\nu\to\infty$ за свако довољно велико $n$;

4) $\sum_{\nu=1}^{n-1} \nu\,|\lambda_{\nu-1} - 2\lambda_\nu + \lambda_{\nu+1}| + n(\lambda_n - \lambda_{n-1}) = O(\lambda_n)\,.$

Под наведеним условима поступак $\Gamma_n(f)$ се засићује, најбоља апроксимација му је реда $\varphi(n)$, и

$$\|f-\Gamma_n(f)\|_{C,L^p} = O[\varphi(n)]$$

Код G. Sunouchi-а и C. Watari-а параметар $n$ не мора да буде цео позитиван број, те су могући и други гранични прелази а не само $n\to\infty$. Например, за $\gamma_\nu^n = n^\nu$, $0<n<1$ и $n\to 1-0$ обухваћен је Abel-ов поступак.

тада и само тада ако је

1) $g = \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu \nu^{-1} (a_\nu \sin \nu x - b_\nu \cos \nu x) \varepsilon^1 \Lambda_1$ (у простору $C$);

2) $g \sim \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu \nu^{-1} (a_\nu \sin \nu x - b_\nu \cos \nu x)$ ограничене варијације (у простору $L$);

3) $g \sim \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x) \varepsilon L^p$ (у простору $L^p$, $p > 1$).

(iii) Појам сатурациј̇е третирало је у општим просторима више аутора (J. Favard [13 *d*], P. L. Butzer [10 *a, b, c*], K. Zeller [43], H. Buchwalter [9 *b, c*]), но то излази из оквира овог приказа. Овде наводимо само да из општих Buchwalter-ових резултата следи класа сатурације за Hölder-ове (§ 5 (v)) и Riesz-ове (§ 6 (iv)) суме, као и за Nörlund-ове суме у простору $L$,$^p$ $p > 1$.

## НАВОДИ[1]


[1] Ахиезер, Н. И. — Лекции по теории апроксимации. Москва-Ленинград, 1947.

[2] Ахиезер, Н. И. и Крейн, М. Г. — О наилучшем приближении тригонометричкими суммами дифференцируемих периодических функций. *Доклады* **15** (1937), 107—112.

[3] Alexits, G. — *a.* Sur l'ordre de grandeur de l'approximation d'une fonction par les moyennes de sa série de Fourier. *Matematikai es Fezikai Lapok* **48** (1941), 410—422.

*b.* Sur l'ordre de grandeur de l'approximation d'une fonction périodique par les sommes de Fejér. *Acta. math. Hungaricae* **3** (1952), 29—42.

[4] Aljančić, S. — *a.* Classe de saturation des procédés de sommation de Hölder et de Riesz. *C. R.* **246** (1958), 2567—9.

*b.* Meilleure approximation et classes de saturation du procédé de Hölder dans les espaces $C$ et $L^p$. *Publ. Inst. Math. Acad. Serbe Sci.* **12** (1958), 109—124.

*c.* Classe de saturation du procédé des moyennes typiques de Riesz. *Publ. Inst. Math. Acad. Serbe Sci.* **13** (1959), 113—122.

*d.* Approximation des fonetions continues par les moyennes typiques de leurs séries de Fourier (још необјављено).

[5] Бари, Н. К. — О наилучшем приближении тригонометрическими полиномами двух сопряженных функций. *Известия* **19** (1955), 285—302.

[6] Бари, Н. К. и Стечкин, С. Б. — Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций. *Труды Моск. мат. общ.* **5** (1956), 483—522.


[1] Доклады=Доклады Академии Наук СССР.
Известия=Известия Академии Наук СССР — Серия математическая.
C. R.=Comptes rendus Paris

[7] Бернштейн, С. Н. — *a*. О наилучшем приближении непрерывных функций посредством многочленов данной степени. *Сообщ. Харьк. мат. общ.* (2) **13** (1912), 49—194.
*b*. Sur l'ordre de la meilleure approximation des fonctions continues par des polynômes de degré donné. *Mém. Acad. Roy. Belgique* (2) **4** (1912), 1—104.
*c*. Sur un procédé de sommation des séries trigonométriques. *C. R.* **191** (1930). 976—979.

[8] Borel, E. — Leçons sur les fonctions de variables réelles. Paris, 1905.

[9] Buchwalter H. — *a*. Saturation de certains procédés de sommation. *C. R.* **248** (1959), 909—912.
*b*. Saturation dans un espace normé. *C. R.* **250** (1960), 651—653.
*c*. Saturation sur un groupe abélien localement compact. *C. R.* **250** (1960), 808—811.

[10] Butzer, P. L. — *a*. On the singular integral of de la Vallée-Poussin. *Arch. Math.* **7** (1956), 295—309.
*b*. Über den Grad der Approximation des Identitätsoperators durch Halbgruppen von linearen Operatoren und Anwendungen auf die Theorie der singulären Integrale. *Math. Ann.* **133** (1957), 410—425.
*c*. Zur Frage der Saturationsklassen singulärer Integraloperatoren. *Math. Zeitschrift.* **70** (1958), 93—112.

[11] Дзядык, В. К. — *a*. О наилучшем приближении в среднем периодических функций с особенностями. *Доклады* **77** (1951), 949—952.
*b*. О наилучшем приближении на классе периодических функций имеющих ограниченную $s$-ю производню $(0 < s < 1)$. *Известия* **17** (1953), 135—162.

[12] Ефимов, А. В. — *a*. О приближении некоторых классов непрерывных функций суммами Фурье и суммами Фейера. *Известия* **22** (1958), 81—116.
*b*. О приближении периодических функций суммами Валле-Пуссена. *Известия* **23** (1959) 737—770.
*c*. Приближение непрерывных периодических функций суммами Фурье. *Известия* **24** (1960), 243—296.

[13] Favard, J. — *a*. Sur l'approximation des fonctions périodiques par les polynômes trigonométriques. *C. R.* **203** (1936), 1122—1124.
*b*. Sur les meilleurs procédés d'approximation de certaines classes de fonctions par les polynômes trigonométriques. *Bull. Soc. Math. France* (2) **61** (1937), 209—224, 243—256.
*c*. Colloques d'Analyse Harmonique Nancy, Paris, **15**, (1949), 97—110.
*d*. Sur la saturation des procédés de sommation. *Math. pures et appl.* **36** (1957), 359—372.

[14] Fejér, L. — Mechanische Quadraturen mit positiven Cotesschen Zahlen. *Math. Zeitschrift* **37** (1933), 287—309.

[15] Freud, G. — Restglied eines Tauberschen Satzes. *Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae* **2** (1951), 299—308; **3** (1952), 299—307.

[16] Ganelius, T. — On one-sided approximation by trigonometrical polynomials. *Math. Scand.* **4** (1956), 247—258.

[17] Hardy, G. H. and Littlewood, J. E. — A convergence criterion for Fourier series. *Math. Zeitschr.* **28** (1928), 612—634.

[18] Hille, E. — On the analytical theory of semi-groups. *Proc. Acad. U. S. A.* **28** (1942), 421—424.

[19] Jackson, D. — *a*. The theory of approximation. *American Math. Soc. Coll. Publ.* **XI** (1930).
*b*. Über die Genauigkeit der Annäherung stetiger Funktionen durch ganze rationale Funktionen gegebenen Grades und trigonometrische Summen gegebener Ordnung. Diss. Göttingen, 1911.

*c*. On approximations by trigonometrical sums and polynomials. *Trans. Amer. Math. Soc.* **13** (1912), 491—515.

[20] Karamata, J. — Neuer Beweis und Verallgemeinerung der Tauberschen Sätze welche eine Laplacesche und Stieltjessche Transformation betreffen. *Journal für die reine u. angew. Math.* **164** (1931), 27—29.

[21] Kolmogoroff, A. N. — Zur Grössenordnung des Restgliedes Fourierscher Reihen differenzierbarer Funktionen. *Ann. of Math.* **36** (1935), 521—526.

[22] Lebesgue, H. — *a*. Sur la reppré sentation approchée des fonctions. *Rend. Palermo* (1908).

*b*. Sur les intégrales singulières. *Ann. de Toulouse* **1** (1909), 25—117.

*c*. Sur la représentation trigonométrique approchée des fonctions satisfaisant à une condition de Lipschitz. *Bull. Soc. Math. France* **38** (1910), 184—210.

[23] Лозинский, С. М. — Обращение теорем Джексона. *Доклады* **83** (1952), 645—647.

[24] Marchaud, A. — Sur les dérivées et sur les différences des fonctions de variables réelles. *Journ. Math. pures et appl.* (9) **6** (1927), 337—425.

[25] Nagy, B. Sz. — *a*. Über gewisse Extremalfragen bei transformierten trigonometrischen Entwicklungen, I. Periodischer Fall. *Berichte d. math.-phys. Kl. Acad. d. Wiss. zu Leipzig* **90** (1938), 103—134.

*b*. Sur une classe générale de procédés de sommation pour les séries de Fourier. *Hungarica Acta math.* **1** (1948), 14—52.

[26] Натансон, И. П. — *a*. Конструктивная теория функций. Москва—Ленинград, 1951.

*b*. О приближённом представлении функций, удовлетворяющих условию Липшица, с помощью интеграла Валле-Пуссена. *Доклады* **54** (1946), 11—14.

[27] Никольский, С. М. — *a*. Об асимптотическом поведении остатка при приближении функций, удовлетворящих условию Липшица, суммами Фейера. *Известия* **4** (1940), 501—508.

*b*. Асимптотическая оценка остатка при приближении суммами Фурье. *Доклады* **32** (1941), 386—389.

*c*. Приближение периодических функций тригонометрическими многочленами. *Труды мат. инст. Стеклова* **15** (1945), 1—76.

*d*. Ряды Фурье функций с данным модулем непрерывности. *Доклады* **52** (1946), 191—194.

*e*. Приближение функций, тригонометрическими полиномами в среднем. *Известия* **10** (1946), 207—256.

*f*. Ряды Фурье функций, имеющих производную ограниченной вариации. *Известия* **13** (1949), 513—532.

[28] Пинкевич, В. Т. — О порядке остаточного члена ряда Фурье функций дифференцируемых в смысле Вейла. *Известия* **4** (1940), 521—528.

[29] Privaloff, I. I. — Sur les fonctions conjuguées. *Bull. Soc. Math. France* **44** (1916), 100—103.

[30] Quade, E. S. — Trigonometric approximation in the mean. *Duke Math. Journ.* **3** (1937), 529—543.

[31] Селиванова, С. Г. — Приближение суммами Фурье функций имеющих производную, удовлетворяющую условию Липшица. *Доклады* **105** (1955), 909—912.

[32] Соколов, И. Г. — Остаточный член ряда Фурье дифференцируемых функций. *Доклады* **103** (1955), 23—26.

[33] Стечкин, С. Б. — *a*. О порядке наилучших приближений непрерывных функций. *Известия* **15** (1951), 219—242.

*b*. О наилучших приближениях периодических функций тригонометрическими полиномами. *Доклады* **83** (1952), 651—654.

*c*. Об абсолютной сходимости рядов Фурье. *Известия* **19** (1955), 221—246.

*d*. О наилучшем приближении сопряженных функций тригонометрическими полиномами. *Известия* **20** (1956), 197—206.

*e*. О наилучшем приближении некоторых классов функций тригонометрическими полиномами. *Известия* **20** (1956), 643—648.

[34] SUNOUCHI, G. and WATARI, C. — On the determination of the class of saturation in the theory of approximation of functions. *Proc. Japan Academy* **34** (1958), 477—481.

[35] ТЕЛЯКОВСКИЙ, С. А. — *a*. Приближение дифференцируемых функций суммами Валле-Пуссена. *Доклады* **121** (1958), 426—429.

*b*. О приближении дифференцируемых функций линейным средними их рядов Фурье. *Известия* **24** (1960), 213—242.

[36] ТИМАН, А. Ф. — *a*. Исследования по теории приближения функций. Днепропетровск, 1951.

*b*. Аппроксимативные свойства линейных методов суммирования рядов Фурье. *Известия* **17** (1953), 99—134.

[37] ТИМАН, М. Ф. — Обратные теоремы конструктивной теории функций в пространствах $L^p(1 \leqq p \leqq \infty)$. *Маш. сборник* **46** (1958), 125—132.

[38] ТИМАН, А. Ф. и ТИМАН, М. Ф. — Обобщенный модуль непрерывности и наилучшее приближение в среднем. *Доклады* **71** (1950), 17—20.

[39] TITCHMARSH, E. C. — The theory of functions, sec. ed., Oxford University Press, 1939.

[40] VALLÉE-POUSSIN, J. DE LA — *a*. Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle. Paris, 1919.

*b*. Note sur l'approximation par un polynôme d'une fonction dont la dérivée est à variation bornée. *Bull. Acad. Belgique* (1908).

*c*. Sur la meilleure approximation des fonctions d'une variable réelle par des expressions d'ordre donné. *C. R.* **166** (1918), 799—802.

[41] WEYL, H. — Über die Gleichverteilung der Zahlen mod. Eins. *Math. Annalen* **77** (1916), 313—352.

[42] ZAMANSKY, M. — *a*. Classes de saturation de certains procédés d'approximation des séries de Fourier. *Ann. Ec. Norm. Sup.* **66** (1949), 19—93.

*b*. Classes de saturation des procédés de sommation des séries de Fourier et applications aux séries trigonométriques. *Ann. Ec. Norm. sup.* (3) **67** (1950), 161—198.

[43] ZELLER, K. — Saturation bei äquivalenten Summierungsverfahren. *Math. Zeitschrift* **71** (1959), 109—112.

[44] ZYGMUND, A. — *a*. Trigonometric series, sec. ed., Cambridge 1959.

*b*. Smooth functions. *Duke Math. Journal* **12** (1945), 47—76.

*c*. On the degree of approximation of functions by Fejér means. *Bull. Amer. Math. Soc.* **51** (1945), 274—278.

*d*. The approximation of functions by typical means of their Fourier series. *Duke Math. Journal* **12** (1945), 695—704.

*e*. A remark on the integral modules of continuity. *Univ. Nac. Tucuman Revista* **A-7** (1950), 259—269.

[45] ЩЕРБИНА, А. Д. — Об одном методе суммирования рядов сопряженных рядам Фурье. *Маш. сборник* **27** (1950), 156—170.

# QUELQUES RÉSULTATS RÉCENTS SUR L'APPROXIMATION PAR POLYNOMES TRIGONOMÉTRIQUES

S. ALJANČIĆ (Belgrade)

Soit $C$ l'espace des fonctions continues périodiques de période $2\pi$ et à valeur moyenne nulle. Soit $T_n(f)$ un procédé d'approximation qui à tout $f \varepsilon C$ fait correspondre un polynome trigonométrique d'ordre $\leqq n$. Soit $M \subset C$. L'ensemble

$$(\star) \qquad \{\|f - T_n(f)\|_C\}_{f \varepsilon M}$$

caractérise le procédé $T_n(f)$ par rapport à la classe de fonctions continues M. Les problèmes suivants se posent:

(A) Pour un procédé $T_n(f)$ particulier et une classe M donnée, déterminer une majorante de l'enssmble $(\star)$. Un tel énoncé,

$$f \varepsilon M \Longrightarrow \|f - T_n(f)\|_C \leqq K \varphi(n),$$

est un théorème directe.

(B) Pour un procédé $T_n(f)$ particulier et une fonction positive $\varphi(n)$ qui tend vers zéro lorsque $n \to \infty$, déterminer la classe de fonction M pour laquelle $\varphi(n)$ est une majorante de l'ensemble $(\star)$. Un tel énoncé,

$$\|f - T_n(f)\|_C \leqq K \varphi(n) \Longrightarrow f \varepsilon M$$

est un téorème inverse.

(C) Pour un procédé $T_n(f)$ particulier, déterminer une classe M et une fonction $\varphi(n)$, de sorte que pour M et $\varphi$ a lieu simultanément le théorème directe et le théorème inverse. Un tel énoncé,

$$f \varepsilon M \Longleftrightarrow \|f - T_n(f)\|_C \leqq K \varphi(n),$$

est un théorème d'équivalence.

Dans le cas des théorèmes directes on peut poser aussi la question de la meilleure constante $K$ pour la classe M donnée, ce qui revient à déterminer

$$E_C[M; T_n(f)] = \sup_{f \varepsilon M} \|f - T_n(f)\|_C .$$

En général on n'arrive qu'à déterminer le comportement asymptotique de $E_C[M; T_n(f)]$ lorsque $n \to \infty$.

Certains procédés d'approximation $T_n(f)$ sont saturés, c. à. d. il existe une fonction $\varphi_T(n)$ et une classe $M_T$ (dite de saturation) telle que

1° $\|f - T_n(f)\|_C = o[\varphi_T(n)] \Longrightarrow f \equiv 0$;

2° $\|f - T_n(f)\|_C = O[\varphi_T(n)] \Longleftrightarrow f \varepsilon M_T$.

L'énoncé sur la classe de saturation d'un tel procédé est donc un théorème d'équivalence de nature particulière; on lui donne le nom du théorème de saturation.

On pose des questions analogues dans l'espace $L^p$, $p \geqq 1$.

Dans le présent exposé on donne un aperqu sur les théorèmes directes, inverses, d'équivalence et de saturation, et sur quelques questions qui s'y rattachent, pour quelques procédés d'approximation particuliers: meilleure approximation $E_n(f)$ (§ 3), sommes de Fourier $s_n(f)$ (§ 4), de Fejér $\sigma_n(f)$ (§ 5), de Hölder $H_n^k(f)$ (§ 5), de Riesz $R_n^\lambda(f)$ (§ 6), de Rogosinski $\rho_n(f)$ (§ 6), de de la Vallée Poussin $\tau_{n,p}(f)$ (§ 7), intégrale de de la Vallée Poussin $V_n(f)$ (§ 8), intégrale de Jackson—de la Vallée Poussin $J_n(f)$ (§ 9) et pour les procédés linéaires $\Gamma_n(f)$ (§ 10) et ceux définis par une fonctions sommatoire $G_n(f)$ (§ 9).

*Зборник радова Српске академије наука и уметности LXIX*
*Математички институт књ. 8, 1960*
*Recueil des travaux de l'Académie Serbe des Sciences et d'Arts LXIX*
*Institut Mathématique № 8, 1960*

ВЛАДЕТА ВУЧКОВИЋ

# ЈЕДАН *O*-ИНВЕРЗАН СТАВ

**1.** Предмет овог рада је доказ следећег става:

*Нека је функција $A(u)$, дефинисана за $u \geqq 0$, ограничене варијације у сваком коначном размаку, нека је $A(0)=0$ и нека интеграл*

$$S(x)=\int_0^{\infty}\frac{dA(u)}{(u+x)^{\rho-1}}, \quad \rho>1, \tag{1.1}$$

*конвергира за једно (и тиме свако) $x>0$.*

*Ако функција $A(u)$ задовољава услов конвергенције*

$$A(v)-A(u) > -m u^{\gamma} \quad \text{за свако} \quad u \leqq v \leqq \lambda u, \tag{1.2}$$

*где је $\gamma$ произвољан реалан број а $\lambda>1$, тада из*

$$S(x)=O(x^{\gamma-\rho+1}), \quad x\to\infty, \tag{1.3}$$

*следи*

$$A(u)=O(u^{\gamma}), \quad u\to\infty. \tag{1.4}$$

Овај став употребили су у једном раду Р. Бојанић и В. Вучковић [1], упућујући за његов доказ на расправу [2] O. Szasz-а, у којој додуше став није формулисан, али се може извести аналогним поступком. И аутор овог чланка је у више наврата користио исти став (в. [3], [4]), опет без доказа. Како је методика доказа сличних ставова у наведеном раду O. Szasz-а прилично компликована, извешћу овде елементарни доказ наведеног става, применом једног општег поступка за доказ *O*-инверзних ставова који потиче од J. Карамате (в. [5]).

Случај $\gamma=0$ познат је те ћемо га искључити из даљег разматрања, јер се поступак доказивања мора за њега нешто изменити. Осим тога можемо без ограничења општости претпоставити да је $\gamma<\rho-1$, јер већ из конвергенције интеграла (1.1) следи

$$A(u)=o(u^{\rho-1}), \quad u\to\infty,$$

(в. [6] стр. 330).

**2.** Пре него што пређемо на доказ става извешћемо две леме.

Лема 1. *Из услова* (1.2) *следи да функција* $A(u)$ *за свако* $0 \leqq x \leqq y$ *задовољава и услов*

$$A(y)-A(x) > -m x^{\gamma} \frac{\left(\frac{\lambda y}{x}\right)^{\lambda}-1}{\lambda^{\gamma}-1}, \quad (\gamma \neq 0). \tag{2.1}$$

*Доказ.* За свако $y > x$ могу наћи природан број $k$ такав да је

$$\lambda^k x < y \leqq \lambda^{k+1} x. \tag{2.2}$$

Из услова (1.2) следи да важе неједначине:

$$A(y)-A(\lambda^k x) > -m x^{\gamma} \lambda^{k\gamma}$$

$$A(\lambda^k x)-A(\lambda^{k-1} x) > -m x^{\gamma} \lambda^{(k-1)\gamma}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$A(\lambda x)-A(x) > -m x^{\gamma},$$

па се њиховим сабирањем добија

$$A(y)-A(x) > -m \frac{\lambda^{(k+1)\gamma}-1}{\lambda^{\gamma}-1}.$$

Применом неједначина (2.2) следи одавде тврђење леме.

*Напомена.* Кад је $\gamma=0$ услов (2.1) има облик

$$A(y)-A(x) > -\frac{m}{\log \lambda} \log\left(\lambda \frac{y}{x}\right)$$

и због тога се рачуни у којима се он примењује разликују од оних за $\gamma \neq 0$. Међутим, методски поступак је исти.

Лема 2. *Нека је*

$$\alpha(x) = \operatorname*{Max}_{0 \leqq t \leqq x} \{-A(t)\}. \tag{2.3}$$

*Тада функција* $\alpha(x)$ *задовољава за све* $0 \leqq x \leqq y$ *услов*

$$0 \leqq \alpha(y)-\alpha(x) \leqq m x^{\gamma} \frac{\left(\frac{\lambda y}{x}\right)^{\gamma}-1}{\lambda^{\gamma}-1}, \quad (\gamma \neq 0). \tag{2.4}$$

*Доказ* нећемо наводити јер је идентичан са доказом лемеа 2 у [5].

**3.** Прелазимо сада на доказ самог става. Као што смо приметили претпоставићемо да је $\gamma \neq 0$ и да је, без ограничења општости, $\gamma < \rho - 1$.

Парцијалном интеграцијом интеграла (1.1) добија се

$$S(x) = -(1-\rho)\int_0^\infty \frac{A(u)\,du}{(u+x)^\rho}. \tag{3.1}$$

Из процене (1.3) следи да постоји број $M>0$ такав да је

$$M\,x^{\gamma-\rho+1} > \int_0^\infty \frac{A(u)\,du}{(u+x)^\rho} = \int_0^{px} \frac{A(u)\,du}{(u+x)^\rho} + \int_{px}^\infty \frac{A(u)\,du}{(u+x)^\rho},$$

где је $p$ позитиван број који ћемо касније прецизније одредити.

Према дефиницији функције $\alpha(x)$ и леми 1 добија се из горње неједначине

$$Mx^{\gamma-\rho+1} > -\alpha(px)\int_0^{px} \frac{du}{(u+x)^\rho} + A(px)\int_{px}^\infty \frac{du}{(u+x)^\rho} - \tag{3.2}$$

$$-\frac{mp^\gamma x^\gamma}{\lambda^\gamma-1}\int_{px}^\infty \left[\left(\frac{u\lambda}{px}\right)^\gamma - 1\right](u+x)^{-\rho}\,du.$$

Како је

$$\left\{\begin{aligned} &\int_0^{px} \frac{du}{(u+x)^\rho} = \frac{1}{\rho-1}\left[1-\frac{1}{(p+1)^{\rho-1}}\right]\cdot\frac{1}{x^{\rho-1}} = \frac{a}{x^{\rho-1}},\\ &\int_{px}^\infty \frac{du}{(u+x)^\rho} = \frac{1}{(\rho-1)\,(p+1)^{\rho-1}}\cdot\frac{1}{x^{\rho-1}} = \frac{b}{x^{\rho-1}},\\ &x^\gamma\int_{px}^\infty \left[\left(\frac{u\lambda}{px}\right)^\gamma - 1\right](u+x)^{-\rho}\,du = O\left(x^{\gamma-\rho+1}\right). \end{aligned}\right. \tag{3.3}$$

то из (3.2) добијамо

$$Mx^{\gamma-\rho+1} > -\alpha(px)\frac{a}{x^{\rho-1}} + A(px)\frac{b}{x^{\rho-1}} + O\left(x^{\gamma-\rho+1}\right).$$

и на крају

$$A(x) < \frac{a}{b}\,\alpha(x) + O(x^\gamma), \quad x\to\infty. \tag{3.4}$$

С друге стране, опет на основу неједначине (1.3), је

$$-M\,x^{\gamma-\rho+1} < \int_0^{qx} \frac{A(u)\,du}{(u+x)^\rho} + \int_{qx}^\infty \frac{A(u)\,du}{(u+x)^\rho} = J_1 + J_2, \tag{3.5}$$

где је $q$ позитиван број који ћемо касније прецизније одредити.

Применом леме 1 добија се из (3.5)

$$J_1 < A(qx)\int_0^{qx}\frac{du}{(u+x)^\rho} + \frac{m}{\lambda^\gamma - 1}\int_0^{qx} u^\gamma\left[\left(\frac{qx\lambda}{u}\right)^\gamma - 1\right](u+x)^{-\rho}\,du. \tag{3.6}$$

Како je

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^{qx}\frac{du}{(u+x)^\rho} = \frac{1}{\rho-1}\left[1 - \frac{1}{(q+1)^{\rho-1}}\right]\cdot\frac{1}{x^{\rho-1}} = \frac{a_1}{x^{\rho-1}}, \\ \displaystyle\int_0^{qx} u^\gamma\left[\left(\frac{qx\lambda}{u}\right)^\gamma - 1\right](u+x)^{-\rho}\,du = O\left(x^{\gamma-\rho+1}\right), \end{cases} \tag{3.7}$$

то е

$$J_1 < A(qx)\frac{a_1}{x^{\rho-1}} + O\left(x^{\gamma-\rho+1}\right). \tag{3.8}$$

Применом неједначине (3.4) и леме 2 добија се даље

$$\begin{cases} \displaystyle J_2 < \frac{a}{b}\int_{qx}^{\infty}\frac{\alpha(u)}{(u+x)^\rho}\,du + O(1)\int_{qx}^{\infty}\frac{u^\gamma}{(u+x)^\rho}\,du < \frac{a}{b}\,\alpha(qx)\int_{qx}^{\infty}\frac{du}{(u+x)^\rho} \\ \displaystyle\qquad + \frac{a}{b}\cdot\frac{mq^\gamma x^\gamma}{\lambda^\gamma - 1}\int_{qx}^{\infty}\left[\left(\frac{u\lambda}{qx}\right)^\gamma - 1\right](u+x)^{-\rho}\,du + O\left(x^{\gamma-\rho+1}\right). \end{cases} \tag{3.9}$$

Како je

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{qx}^{\infty}\frac{du}{(u+x)^\rho} = \frac{1}{(\rho-1)(q+1)^{\rho-1}x^{\rho-1}} = \frac{d}{x^{\rho-1}}, \\ \displaystyle x^\gamma\int_{qx}^{\infty}\left[\left(\frac{u\lambda}{qx}\right)^\gamma - 1\right](u+x)^{-\rho}\,du = O\left(x^{\gamma-\rho+1}\right), \end{cases} \tag{3.10}$$

то из (3.9) и (3.10) следи

$$J_2 < \frac{ad}{b}\frac{\alpha(qx)}{x^{\rho-1}} + O\left(x^{\gamma-\rho+1}\right), \quad x \to \infty. \tag{3.11}$$

Из (3.8) и (3.11), уношењем у (3.5), добија се

$$-Mx^{\gamma-\rho+1} < A(qx)\frac{a_1}{x^{\rho-1}} + \frac{ad}{q}\cdot\frac{\alpha(qx)}{x^{\rho-1}} + O(x^{\gamma-\rho+1}),$$

тј.

$$-A(qx) < \frac{ad}{a_1 b}\alpha(qx) + O(x^{\gamma})$$

и најзад

$$-A(x) > \frac{ad}{a_1 b}\alpha(x) + O(x^{\gamma}), \quad x\to\infty . \tag{3.12}$$

Како је $\alpha(x)$ најмања монотона функција која је већа од $-A(x)$, то из (3.12) следи

$$\alpha(x) \leqq \frac{ad}{a_1 b}\alpha(x) + O(x^{\gamma}), \quad x\to\infty . \tag{3.13}$$

Како је

$$\frac{ad}{a_1 b} = \frac{(p+1)^{\rho-1}-1}{(q+1)^{\rho-1}-1},$$

узевши $p<q$, добија се

$$\alpha(x) = O(x^{\gamma}), \quad x\to\infty,$$

а одавде, према (3.4) и дефиницији функције $\alpha(x)$, следи коначно

$$A(x) = O(x^{\gamma}), \quad x\to\infty,$$

што је и требало доказати.

*(Саопштено 30-XII-1959)*

## ЛИТЕРАТУРА


[1] Р. Бојанић и В. Вучковић — О сопственим функцијама граничног задатка малих осцилација еластичне плоче. *Зборник радова Мат. Инст. САН.* **3** (1953), 107—128.

[2] O. Szász — Über einige Sätze von Hardy und Littlewood. *Nachrihten Gesell. der Wiss. Göttingen, Math. Phys. Klasse* (1930), 311—333.

[3] В. Вучковић — Стилтјесова трансформација која опада брзином експоненцијалне функције. *Зборник радова Мат. Инст. САН.* **3** (1953), 255—288.

[4] V. Vučković — Quelques théorèmes relatifs à la transformation de Stieltjes. *Publ. Inst. Math. Acad. Serbe Sci.* **6** (1954), 63—74.

[5] J. Карамата — О једном општем $O$-инверзном ставу. *Рад Југ. Акад. Загреб,* **261** (81) (1938), 1—22.

[6] D. V. Widdder — The Laplace Transform. Princeton, 1946.

# EIN $O$-INVERSIONSSATZ

VLADETA VUČKOVIĆ (Zrenjanin)

Es wird folgender Satz bewiesen:

*Sei* $A(u)$ *von beschränkter Schwankung auf jeder endlichen Strecke,* $A(0)=0$ *und*

$$S(x)=\int_0^\infty \frac{d\,A(u)}{(u+x)^{\rho-1}}, \quad (\rho>1)$$

*konvergiere für ein (und somit für alle)* $x>0$.

*Aus*

$$S(x)=O\,(x^{\gamma-\rho+1}), \quad x\to\infty$$

*und der Konvergenzbedingung*

$$A(v)-A(u)>-m\,u^{\gamma} \text{ für jedes } u\leqq v\leqq \lambda u \quad (\lambda>1)$$

*folgt dan*

$$A(u)=O(u^{\gamma}), \quad u\to\infty\,.$$

Dieser Satz wurde mehrmals vom Verfasser in [3] und [4] und zusammen mit R. Bojanić in [1] ohne Beweis angewandt, jedoch mit dem Hinweis auf die Note [2] von O. Szász, nach deren Muster man einen Beweis herleiten könnte. Hier wird der Satz, als Anwendung der allgemeinen Methode zur Herleitung der $O$-Inversionssätze, die von J. Karamata herrührt, elementar bewiesen.

*Зборник радова Српске академије наука и уметности LXIX*
*Математички институт књ. 8, 1960*
*Recueil des travaux de l'Académie Serbe des Sciences et des Arts LXIX*
*Institut Mathématique № 8, 1960*

Ђ. МУШИЦКИ

# ЈЕДНА АКСИОМАТИКА ЕЛЕКТРОДИНАМИКЕ

УВОД. — Ма да је електродинамика већ одавно постала класична дисциплина теориске физике, мало је рађено на проблему њене аксиоматизације, тј. на њеном строго логичком заснивању на извесном низу основних закона као аксиома. У већини уџбеника електродинамике овом питању се не посвећује пажња, а уколико се то и чини, обично се то чини прећутно или непотпуно. При томе се обично полази од Coulomb-овог закона, закона непостојања магнетних полова, Faraday-евог закона, Ampère-ове теореме и хипотезе допунске-померајне струје, која се одређује на основу закона о одржању наелектрисања, али се може поћи и од других закона. W. Panofsky и M. Phillips [1] у свом уџбенику узимају као основне законе Coulomb-ов, Ampère-ов, Faraday-ев закон, хипотезу допунске струје и закон о одржању наелектрисања. Л. Ландау и Е. Лифшиц [2] полазе чак од сасвим друге основе, од варијационог принципа са погодно изабраном Lagrange-евом функцијом и на тој бази заснивају своје излагање електродинамике. A. Sommerfeld [3] узима као основне законе Faraday-ев закон и Ampère-ову теорему и назива их основним аксиомама електродинамике, а њима прикључује и закон непостојања магнетних полова као допунску аксиому, међутим при томе уводи *a priori* егзистенцију и вредност померајне струје. J. Stratton [4] постулира као аксиоме Maxwell-ове једначине за $\operatorname{rot} \vec{E}$ и $\operatorname{rot} \vec{H}$ и закон о одржању наелектрисања и помоћу њих изводи Maxwell-ове једначине за $\operatorname{div} \vec{E}$ и $\operatorname{div} \vec{B}$ под допунским условом да постоји бар један тренутак у коме нема електромагнетног поља у посматраној области. У свим овим формулацијама електродинамике поред наведених основних закона морају се узети и допунске једначине, које карактеришу стање средине и зависе од њене природе. A. Mercier [5] први је дао једну строгу, али врло апстрактну аксиоматику електродинамике, која базира на Clifford-овим бројевима у Minkovski-евом простору, при чему се за укупну струју и електромагнетно поље постулира да су Clifford-ови бројеви који задовољавају извесне одређене услове. Недавно је J. Horváth [6] дао једну исцрпну аксиоматику Maxwell-ове електродинамике, која је формулисана по угледу на Hammel-ову аксиоматику механике и у њој се узима пет група аксиома: аксиоме произвођења, аксиоме егзистенције, аксиоме стања, аксиоме везе и аксиоме материје.

Све наведене аксиоматике базирају на Maxwell-овом тумачењу електромагнетизма и постулирају *a priori* померајну струју. У овом раду покушаћемо да дамо једну такву аксиоматику која задовољава следеће услове: 1) заснива се доследно на Lorentz-овом микрофизичком тумачењу електромагнетизма, 2) не постулира *a priori* померајну струју, 3) не захтева никакве допунске услове, 4) има интегрални облик који садржи само мерне величине, 5) узима у најопштијем облику допунске једначине које карактеришу стање средине, 6) уводи појам енергије електромагнетног поља на основу механичких закона без икакве допунске хипотезе. При томе ћемо аксиоме електродинамике према њиховој природи поделити у три групе: основне аксиоме, аксиоме везе и аксиому енергије, а у оквиру овог система аксиома изложићемо и одговарајући систем дефиниција и основних образаца електродинамике.

ДЕФИНИЦИЈЕ ОПШТИХ ПОЈМОВА ЕЛЕКТРОДИНАМИКЕ. — Као основни појам електродинамике изаберимо *наелектрисање*, при чему јединица наелектрисања зависи од избора система јединица. У даљем излагању употребићемо *Giorgi-ев систем*, у коме су основни појмови дужина, маса, време и наелектрисање, а одговарајуће јединице метар, килограм, секунд и кулон.

Дефинишимо сад помоћу појма наелектрисања опште појмове електродинамике. Ако уочимо неко врло мало пробно наелектрисање $e'$ у миру и ако на њега дејствује извесна сила $\vec{F}_1$, кажемо да у овом простору постоји *електрично поље* и помоћу ових величина дефинише се *јачина електричног поља* $\vec{E}$ обрасцем

$$\vec{F}_1 = e' \vec{E}. \tag{1}$$

Ако се ово пробно наелектрисање налази у кретању са брзином $\vec{v}'$ и ако на њега тада дејствује још извесна допунска сила $\vec{F}_2$, кажемо да у овом простору постоји и *магнетно поље* и помоћу ових величина дефинише се *јачина магнетног поља* $\vec{B}$ обрасцем

$$\vec{F}_2 = e' \left(\vec{v}' \times \vec{B}\right) \tag{2}$$

под условом да овај образац важи за свако $\vec{v}'$. Линије код којих се у свакој тачки правац тангенте поклапа са правцем јачине електричног или магнетног поља називају се *електричне линије сила* односно *магнетне линије сила*. Према конвенцији узима се толико линија сила кроз нормално постављену јединицу површине колико износи јачина електричног односно магнетног поља на том месту.

Ако уочимо око неке тачке $M$ малу запремину $\Delta V$ у којој се налази наелектрисање $\Delta e$, *густина наелектрисања* дефинише се обрасцем

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta e}{\Delta V} \tag{3}$$

и претставља количину наелектрисања по јединици запремине. Израз

$$\vec{j} = \rho \vec{v}, \tag{4}$$

где је $\vec{v}$ брзина наелектрисања, назива се *густина струје* и по свом интензитету претставља количину наелектрисања која прође кроз нормално постављену јединицу површине на том месту у јединици времена, а израз

$$J = \int_S \vec{j}\, d\vec{S} \tag{5}$$

где је $S$ ма каква површина, назива се *јачина струје* и претставља укупну количину наелектрисања која прође кроз површину $S$ у јединици времена.

Ако уочимо извесну затворену линију $L$, израз

$$\mathbf{E} = \int_L \vec{E}\, d\vec{l} \tag{6}$$

назива се *електромоторна сила* и претставља рад који је потребан да се јединично наелектрисање обнесе једанпут по контури $L$, а на сличан начин дефинише се и *магнетомоторна сила* обрасцем

$$\mathbf{B} = \int_L \vec{B}\, d\vec{l} \tag{7}$$

Ако уочимо извесну површину $S$, израз

$$\Phi_E = \int_S \vec{E}\, d\vec{S} \tag{8}$$

назива се *флукс електричног поља* и према наведеној конвенцији претставља број електричних линија сила које пролазе кроз површину $S$, а на сличан начин дефнните се и *флукс магнетног поља* обрасцем

$$\Phi_B = \int_S \vec{B}\, d\vec{S}. \tag{9}$$

ОСНОВНЕ АКСИОМЕ ЕЛЕКТРОДИНАМИКЕ. — За основне аксиоме електродинамике узмимо следеће законе електромагнетизма, које можемо сматрати као резултате експерименталног проучавања електромагнетннх појава.

Аксиома 1: *Флукс електричног поља кроз ма коју малу затворену површину сразмеран је количини наелектрисања у унутрашњости те површиче*

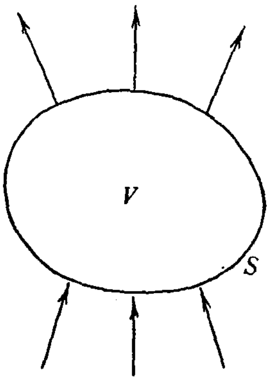
$$\int_S \vec{E}\, d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} e \qquad (10)$$

*где је* $\varepsilon_0 = 8{,}854 \cdot 10^{-12}$ *фарад/м* (сл. 1). Овај закон назива се *Gauss-ова теорема.*

Аксиома 2: *Флукс магнетног поља кроз ма коју малу затворену површину увек је једнак нули без обзира на расподелу наелектрисања*

$$\int_S \vec{B}\, d\vec{S} = O \qquad (11)$$

(сл. 1). Овај закон назива се *Ampère-ова хипотеза* или *закон непостојања магнетних полова.*

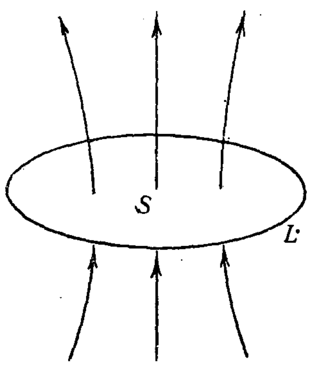



Сл. 1

Аксиома 3: *Свака промена флукса магнетног поља кроз ма коју малу отворену површину ствара електромоторну силу дуж контуре те површине, која је сразмерна промени флукса магнетног поља у јединици времена*

$$\int_L \vec{E}\, d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B}\, d\vec{S} \qquad (12)$$

(сл. 2). Овај закон назива се *Faraday-ев закон.*




Сл. 2

Аксиома 4: *Свака промена флукса електричног поља кроз ма коју малу отворену површину ствара магнетомоторну силу дуж контуре те површине, која је сразмерна промени флукса електричног поља у јединици времена*

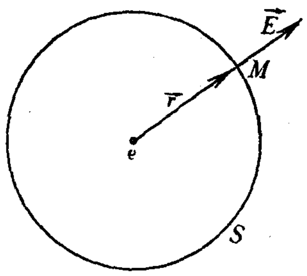
$$\int_L \vec{B}\, d\vec{l} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{E}\, d\vec{S} \qquad (13),$$

*где је* $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ *henry/m* (сл. 2). Овај закон назива се *Maxwell-ов закон.*

Ове аксиоме претстављају основне, независне и довољне законе, из којих се могу добити *Maxwell*-ове једначине, као што ћемо видети из даљег излагања, и стога ћемо ове аксиоме звати *основне аксиоме електродинамике*. Оне се заснивају на *Lorentz*-овом микрофизичком тумачењу електромагнетизма, не постулирају *a priori* померајну струју, не захтевају никакве допунске услове и имају интегрални облик који садржи само мерне величине.

ЕЛЕКТРИЧНО И МАГНЕТНО ПОЉЕ НАЕЛЕКТРИСАЊА. — Јачина електричног поља које ствара извесно мало наелектрисање $e$ у произвољној тачки $M$ (сл. 3) може се наћи на основу аксиоме 1, ако око овог наелектрисања опишемо сферу која пролази кроз тачку $M$. На основу обрасца (10) тада добијамо

$$\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e}{r^2}\vec{r}_0 \qquad (14).$$




Сл. 3

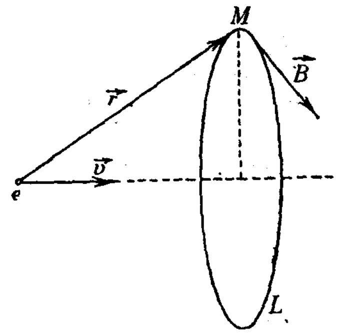
где је $\vec{r}_0$ јединични вектор вектора положаја тачке $M$. Сила којом наелектрисање $e$ дејствује на наелектрисање $e'$ на растојању $r$ према обрасцима (1) и (14) износи

$$\vec{F}_1=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e\,e'}{r^2}\vec{r}_0 \qquad (15)$$

и овај образац изражава *Coulomb-ов закон.*

Јачина магнетног поља које ствара наелектрисање $e$ крећући се брзином $\vec{v}$ у произвољној тачки $M$ (сл. 4) може се наћи на основу аксиоме 4 и обрасца (14). Електрично поље наелектрисања помера се кроз простор заједно са њим, што изазива мењање јачине електричног поља у тачки $M$, а то према аксиоми 4 изазива стварање магнетног поља. Ако за контуру $L$ узмемо круг приказан на слици, може се показати [7] да се на основу образаца (13) и (14) добија

$$\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e\,\vec{v}\times\vec{r}_0}{r^2} \qquad (16)$$

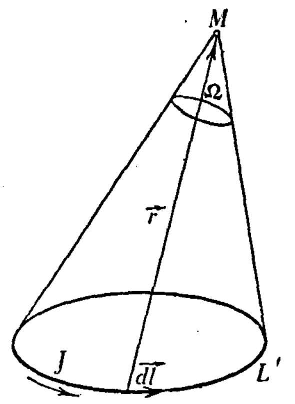



Сл. 4

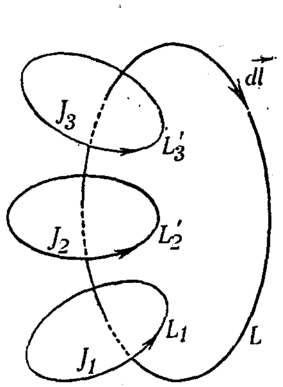
Тада допунска сила којом наелектрисање $e$ са брзином $\vec{v}$ дејствује на наелектрисање $e'$ са брзином $\vec{v}'$ на растојању $r$ према обрасцима (2) и (16) износи

$$\vec{F}_2=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e e'\,\vec{v}'\times(\vec{v}\times\vec{r}_0)}{r^2} \qquad (17)$$

и овај образац изражава *Ampère-ов закон.*




Сл. 5




Сл. 6

Ако уочимо елемент линиског проводника $\vec{dl}$ кроз који протиче струја јачине $J$ (сл. 5) и посматрамо магнетно поље елементарних наелектрисања у овом елементу, на основу обрасца (16) добијамо да јачина магнетног поља које потиче од овог елемента струје на растојању $r$ од њега износи

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{J\,\vec{dl} \times \vec{r}_0}{r^2} \tag{18}$$

и то је *Laplace-ов закон*. На основу овог закона може се показати [8] да се укупна јачина магнетног поља у произвољној тачки $M$ ван проводника може написати у облику

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 J}{4\pi} \operatorname{grad} \Omega, \tag{19}$$

где је $\Omega$ просторни угао под којим се из тачке $M$ види контура проводника $L'$. Тада за ма какву контуру $L$ која обавија низ проводника кроз које протичу струје јачине $J_1$, $J_2$, $J_3$.... (сл. 6) на основу обрасца (19) добијамо да магнетомоторна сила дуж контуре $L$ износи

$$\int_L \vec{B}\,\vec{dl} = \mu_0 J \tag{20}$$

где је $J$ збир јачина свих посматраних струја. Овај став, који је у извесном смислу аналог Gauss-овој теореми (10), назива се *Ampère-ова теорема*.

MAXWELL-ОВЕ ЈЕДНАЧИНЕ ЗА ВАКУУМ. — На основу основних аксиома електродинамике и наведених последица ових аксиома могу се добити Maxwell-ове једначине за вакуум. Посматрајмо електромагнетно поље у извесној области у којој се налазе слободна наелектрисања у вакууму са датом просторно-временском расподелом ових наелектрисања. Према обрасцу (10), који изражава аксиому 1, и Gauss-овој теореми из теорије вектора имамо

$$\int_V \operatorname{div} \vec{E}\, dV = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho\, dV \tag{21}$$

а због произвољности запремине $V$ одавде добијамо

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho \tag{22}$$

и то је прва Maxwell-ова једначина Према обрасцу (11), који претставља аксиому 2, и Gauss-овој теореми је

$$\int_V \operatorname{div} \vec{B}\, dV = 0 . \tag{23}$$

а одавде због произвољности запремине $V$ следује

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \tag{24}$$

а то је друга Maxwell-ова једначина. Према обрасцу (12), који исказује аксиому 3, и Stokes-овој теореми из теорије вектора биће

$$\int_S \operatorname{rot} \vec{E}\, d\vec{S} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S} \tag{25}$$,

а одавде због произвољности површине $S$ налазимо

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{26}$$

и то је трећа Maxwell-ова једначина. Најзад, означимо са $\vec{B}_1$ компоненту јачине магнетног поља која потиче од кретања наелектрисања, а са $\vec{B}_2$ ону њену компоненту која потиче од промене флукса електричног поља. Тада, према обрасцу (20), који је добијен на основу аксиома 1 и 4, и Stokes-овој теореми зо прву компоненту имамо

$$\int_S \operatorname{rot} \vec{B}_1\, d\vec{S} = \mu_0 \int_S \vec{j}\, d\vec{S}, \tag{27}$$

а одавде због произвољности површине $S$ добијамо

$$\operatorname{rot} \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j} . \tag{28}$$

За другу компоненту према обрасцу (13), који изражава аксиому 4, и Stokes-овој теореми биће

$$\int_S \operatorname{rot} \vec{B}_2\, d\vec{S} = \varepsilon_0 \mu_0 \int_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} d\vec{S}, \tag{29}$$

а одавде због произвољности површине $S$ следује

$$\operatorname{rot} \vec{B}_2 = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \tag{30}$$

За укупну јачину магнетног поља тада добијамо

$$\operatorname{rot}\vec{B}=\mu_0\vec{j}+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}, \tag{31}$$

а то је четврта Maxwell-ова једначина.

Одавде видимо да су Maxwell-ове једначине за вакуум добијене доследно на основу наведених основних аксиома електродинамике. При томе се посматране запремине и површине могу изабрати произвољно мале, те добијене Maxwell-ове једначине важе сасвим строго.

ДЕФИНИЦИЈЕ ПОЈМОВА ЕЛЕКТРОДИНАМИКЕ МАТЕРИЈАЛНИХ СРЕДИНА. — У материјалним срединама поред слободних постоје и везана наелектрисања и у том случају уводе се нови појмови електродинамике који карактеришу овакве средине. При томе величине које карактеришу право електромагнетно поље претстављају *микрофизичке величине*, а величине које се добијају мерењем претстављају средње вредности ових величина — *макрофизичке величине*. Замислимо око неке тачке $M(x,y,z)$ такав мали елемент запремине $\Delta V$ који је врло мали у односу на посматрану запремину а врло велики у односу на елементарне честице, а око извесног тренутка $t$ такав мали интервал времена $\Delta\tau$ који је врло мали у односу на посматрани интервал времена а врло велики у односу на периоде кретања елементарних честица. Ако микрофизичке величине означимо индексом $m$, вредност ма какве макрофизичке величине $\Psi$ у тачки $M$ у тренутку $t$ дефинисана је обрасцем

$$\Psi=\overline{\Psi_m}=\frac{1}{\Delta V.\,\Delta\tau}\int\limits_{\Delta V}\int\limits_{-\Delta\tau/2}^{\Delta\tau/2}\Psi_m(\vec{r}+\vec{r}',t+t')\,dV'\,dt', \tag{32}$$

где је $\vec{r}'$ вектор положаја елемента запремине $dV'$ у односу на тачку $M$.

Помоћу овог појма *јачина електричног поља* $\vec{E}$ и *јачина магнетног поља* $\vec{B}$ као макрофизичке величине дефинишу се обрасцима

$$\vec{E}=\overline{\vec{E}_m},\qquad \vec{B}=\overline{\vec{B}_m} \tag{33}$$

и ове величине карактеришу макрофизичко електромагнетно поље у материјалним срединама. Материјална средина у којој се јачина електричног или магнетног поља разликује од јачине одговарајућег поља у вакууму назива се *диелектрик* односно *магнетик*.

Ако уочимо произвољан систем везаних наелектрисања $e_1$, $e_2$, $e_3,\ldots$ и ако означимо њихове векторе положаја са $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, $\vec{r}_3,\ldots$, а њихове брзине са $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3,\ldots$, израз

$$\vec{p}=\sum e_i\vec{r}_i \tag{34}$$

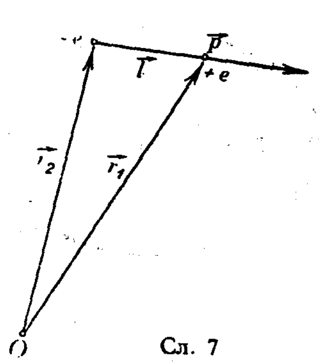
назива се *електрични моменат* овог система. Систем састављен од два једнака а супротна наелектрисања на блиском међусобном растојању (сл. 7) назива се *електрични дипол* и тада имамо

$$\vec{p} = e\,\vec{l}\,, \tag{35}$$

где је $\vec{l}$ вектор уперен од негативног ка позитивном наелектрисању. Ако око неке тачке $M$ замислимо малу запремину $\Delta V$ са електричним моментом $\Delta\vec{p}$, *јачина електричне поларизације* дефинише се обрасцем

$$\vec{P} = \lim_{\Delta V \to 0} \Delta\vec{p}/\Delta V \tag{36}$$

и претставља електрични момент по јединици запремине.



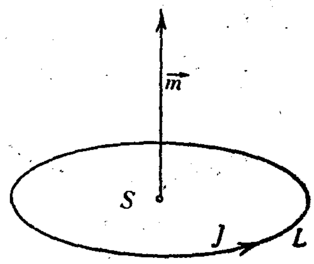
Сл. 7

За уочени систем везаних наелектрисања израз

$$\vec{m} = 1/2 \sum e_i (\vec{r}_i \times \vec{v}_i) \tag{37}$$

назива се *магнетни моменат* овог система. Систем састављен од наелектрисања која се крећу у виду елементарне струје у равни (сл. 8) назива се *магнетни дипол* и у том случају имамо

$$\vec{m} = J\vec{S}\,, \tag{38}$$



Сл. 8

где је $J$ јачина ове струје, а $S$ описана површина. На сличан начин као у претходном случају дефинише се *јачина магнетне поларизације* обрасцем

$$\vec{M} = \lim_{\Delta V \to 0} \Delta\vec{m}/\Delta V \tag{39}$$

и она претставља магнетни момент по јединици запремине.

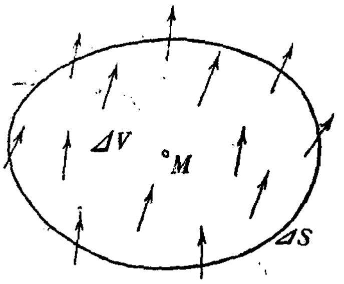
СРЕДЊА ГУСТИНА НАЕЛЕКТРИСАЊА И ГУСТИНА СТРУЈЕ. — Ако величине које се односе на слободна и везана наелектрисања означимо индексима $s$ и $v$, средње вредности густине наелектрисања и густине струје одређене су обрасцима

$$\overline{\rho_m} = \overline{\rho_s} + \overline{\rho_v}\,, \qquad \overline{\vec{j}_m} = \overline{\vec{j}_s} + \overline{\vec{j}_v}\,. \tag{40}$$

При томе су средње вредности густине наелектрисања и густине струје које потичу од слободних наелектрисања идентичне са раније уведеним појмовима густине наелектрисања и густине струје, које ћемо као и раније обележити са $\rho$ и $\vec{j}$

$$\rho = \overline{\rho_s}\,, \qquad \vec{j} = \overline{\vec{j}_s} \tag{41}$$

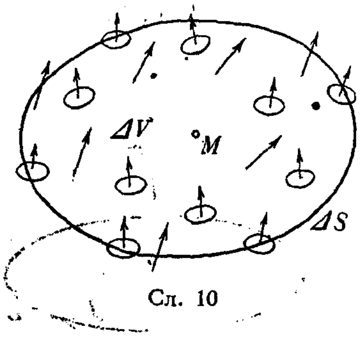
На основу дефиниције појма средње вредности видимо да средња вредност густине везаних наелектрисања потиче само услед промене њихових положаја при поларизацији диелектрика и ако посматрамо електричне диполе у малом елементу запремине око уочене тачке $M$ (сл. 9), може се показати [9] да се добија



Сл. 9

$$\overline{\rho_v} = -\operatorname{div} \vec{P}. \tag{42}$$

Средња вредност густине струје везаних наелектрисања потиче како услед њиховог кретања у молекулима диелектрика тако и услед елементарних струја у молекулима магнетика и ако посматрамо електричне и магнетне диполе у малом елементу запремине око тачке $M$ [сл. 10], може се показати [10] да се добија



Сл. 10

$$\overline{\vec{j}_v} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \operatorname{rot} \vec{M}. \tag{43}$$

На основу ових образаца налазимо да средње вредности густине наелектрисања и густине струје износе

$$\overline{\rho_m} = \rho - \operatorname{div} \vec{P}, \quad \overline{\vec{j}_m} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \operatorname{rot} \vec{M}. \tag{44}$$

MAXWELL-ОВЕ ЈЕДНАЧИНЕ ЗА МАТЕРИЈАЛНЕ СРЕДИНЕ. — Maxwell-ове једначине (22), (24), (26) и (31) важе само за праве, микрофизичке величине

$$\operatorname{div} \vec{E}_m = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho_m, \quad \operatorname{rot} \vec{E}_m = -\frac{\partial \vec{B}_m}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \vec{B}_m = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{B}_m = \mu_0 \vec{j}_m + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}_m}{\partial t}, \tag{45}$$

а ако узмемо средње вредности обеју страна ових једначина, на основу образаца (33) и (44) добијамо

$$\begin{gathered} \operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} (\rho - \operatorname{div} \vec{P}), \qquad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0, \qquad \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \left( \vec{j} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \operatorname{rot} \vec{M} \right) + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \end{gathered} \tag{46}$$

Ако уведемо величине

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}, \qquad \vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M}, \tag{47}$$

претходне једначине можемо написати у облику

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho, \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \tag{48}$$

и то су Maxwell-ове једначине за материјалне средине. Величина $\vec{D}$ назива се *јачина електричне индукције*, а величина $\vec{H}$ *јачина магнетне индукције*, при чему напомињемо да смо супротно уобичајеној традицији величину $\vec{B}$ назвали јачином магнетног поља, а величину $\vec{H}$ јачином магнетне индукције, јер овако употребљени називи много боље одговарају садржају ових појмова.

Одавде видимо да су Maxwell-ове једначине за материјалне средине добијене само на основу основних аксиома електродинамике без хипотезе о допунској, померајној струји и без икаквих допунских услова.

АКСИОМЕ ВЕЗЕ ЕЛЕКТРОДИНАМИКЕ. — У систему Maxwell-ових једначина има више непознатих него што има једначина и стога овим једначинама морамо додати још извесне допунске једначине. Ове допунске једначине увешћемо следећим аксиомама, које претстављају извесна уопштавања веза у облику линеарних функционела [11].

АКСИОМА 5: *Јачина електричне поларизације у некој тачки $M(x,y,z)$ у тренутку $t$ одређена је само вредностима јачине електричног поља у целој посматраној области и у целокупном претходном интервалу времена према закону*

$$\vec{P}(r,t)=\int\limits_{V}\int\limits_{-\infty}^{0} K_1(\vec{r}+\vec{r}',t+t')\,\vec{E}(\vec{r}',t)\,dV'dt', \tag{49}$$

*при чему облик језгра $\vec{K_1}(r,t)$ зависи од природе средине.*

АКСИОМА 6: *Јачина магнетне поларизације у некој тачки $M(x,y,z)$ у тренутку $t$ одређена је само вредностима јачине магнетног поља у целој посматраној области и у целокупном претходном интервалу времена према закону*

$$\vec{M}(\vec{r},t)=\int\limits_{V}\int\limits_{-\infty}^{0} K_2(\vec{r}+\vec{r}',t+t')\,\vec{B}(\vec{r}',t')\,dV'dt', \tag{50}$$

*где је $\vec{r}'$ вектор положаја елемента запремине $dV'$ у односу на тачку $M$, при чему облик језгра $\vec{K_2}(r,t)$ зависи од природе средине.*

АКСИОМА 7: *Густина струје слободних наелектрисања у некој тачки $M(x,y,z)$ у тренутку $t$ одређена је само вредностима јачине укупног електричног поља у целој посматраној области и у целокупном претходном интервалу времена према закону*

$$\vec{j}(\vec{r},t)=\int\limits_{V}\int\limits_{-\infty}^{0} K_3(\vec{r}+\vec{r}',t+t')\,[\vec{E}(\vec{r}',t')+\vec{E}'(\vec{r}',t')]\,dV'dt', \tag{51}$$

*где је $E'$ јачина страног електричног поља, при чему облик језгра $\vec{K_3}(r,t)$ зависи од природе средине.*

Ове аксиоме успостављају везе између величина које карактеришу појаве у материјалним срединама и величине које претстављају узроке ових појава. Стога ћемо ове аксиоме звати *аксиоме везе електродинамике* и из њих се могу добити тражене допунске једначине.

ЈЕДНАЧИНЕ СТАЊА СРЕДИНЕ. — На основу образаца (49), (50) и (51) који изражавају аксиоме 5, 6 и 7, и образаца (47) добијамо

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \varepsilon_0 \vec{E} + \int_V \int_{-\infty}^{0} K_1(\vec{r}+\vec{r}', t+t')\, \vec{E}(\vec{r}', t')\, dV'\, dt'. \\ \vec{H} &= \frac{1}{\mu_0}\vec{B} - \int_V \int_{-\infty}^{0} K_2(\vec{r}+\vec{r}', t+t')\, \vec{B}(\vec{r}', t')\, dV'\, dt'. \\ \vec{j} &= \int_V \int_{-\infty}^{0} K_3(\vec{r}+\vec{r}', t+t')\, [\vec{E}(\vec{r}', t') + \vec{E}'(\vec{r}', t')]\, dV'\, dt'. \end{aligned} \tag{52}$$

Ове једначине претстављају допунске једначине електродинамике и заједно са Maxwell-овим једначинама потпуно одређују посматрано електромагнетно поље. Теориским расуђивањем не може се наћи никакав општи облик језгара $K_1(\vec{r}, t)$, $K_2(\vec{r}, t)$ и $K_3(\vec{r}, t)$ који би важио за све материјалне средине, те ове једначине зависе од природе средине и стога се називају *једначине стања средине*. На пр. кôд кристалних средина облик језгра $K_1(\vec{r}, t)$ карактерише зависност поларизације од праваца кристалних оса, а код феромагнетних средина облик језгра $K_2(\vec{r}, t)$ зависност магнетизације од предисторије магнетика.

Ако су језгра $K_1(\vec{r}, t)$, $K_2(\vec{r}, t)$ и $K_3(\vec{r}, t)$ занемарљиво мала ван неке врло мале области $\Delta V$ око тачке $M$ и ван врло малог интервала времена $(t-\Delta\tau, t)$ и ако се може сматрати да су величине $\vec{E}$, $\vec{B}$ и $\vec{E}'$ константне у тој области и том интервалу времена, једначине (52) можемо написати у облику

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}, \quad \vec{H} = \frac{1}{\mu}\vec{B}, \quad \vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{E}'), \tag{53}$$

Ове услове задовољавају хомогене и неферомагнетне средине, а овако уведене величине $\varepsilon$, $\mu$ и $\sigma$ зависе од природе средине и називају се *диелектрична константа, магнетна пермеабилност* и *специфична проводљивост* посматране средине.

АКСИОМА ЕНЕРГИЈЕ ЕЛЕКТРОДИНАМИКЕ. — О постојању електромагнетног поља може се закључити само по извесним ефектима који су повезани са појављивањем других познатих облика енергије на рачун енергије електромагнетног поља. Међутим само на основу система Maxwell-ових једначина и једначина стања средине не може се одредити енергија електромагнетног поља и стога уведимо скаларни и векторски потецијал $\varphi$ и $\vec{A}$ обрасцима

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \partial \vec{A}/\partial t, \quad \vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}. \tag{54}$$

који дефинишу ове појмове, па поставимо следећу аксиому

Аксиома 8: *Ако се Maxwell-ове једначине могу добити из извесног варијационог принципа, при чему се за генералисане координате електромагнетног поља узимају скаларни и векторски потенцијал, из густине одговарајуће Lagrange-еве функције може се добити густина енергије електромагнетног поља на исти начин као у механици, тј. по закону*

$$w = \frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{\varphi}} \dot{\varphi} \frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{A}_x} \dot{A}_x + \frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{A}_y} \dot{A}_y + \frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{A}_z} \dot{A}_z - \Lambda . \tag{55}$$

Ова аксиома повезује механички појам енергије са појмовима електродинамике и на основу ње може се одредити енергија електромагнетног поља. Стога ћемо ову аксиому звати *аксиома енергије електродинамике* и она употпунава раније наведене основне аксиоме и аксиоме везе електродинамике.

ЕНЕРГИЈА ЕЛЕКТРОМАГНЕТНОГ ПОЉА — Може се показати[12] да се у случају хомогених и нефеpомагнетних средина Maxwell-ове једначине (48) могу добити из варијационог принципа

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L \, dt = 0 \tag{56}$$

са Lagrange-евом функцијом

$$L = \int_V \left[ \frac{1}{2} (\varepsilon E^2 - \frac{1}{\mu} B^2) + \vec{A} \vec{j} - \rho \varphi \right] dV. \tag{57}$$

Густина Lagrange-еве функције самог електромагнетног поља износи

$$\Lambda = \frac{1}{2} \left( \varepsilon E^2 - \frac{1}{\mu} B^2 \right), \tag{58}$$

а одговарајућа густина енергије електромагнетног поља добија се на основу обрасца (55), који изражава аксиому 8, у облику

$$w = -\varepsilon \vec{E} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \frac{\varepsilon}{2} E^2 + \frac{1}{2\mu} B^2 . \tag{59}$$

Тада укупна енергија електромагнетног поља у области која обухвата потпуно поље има вредност

$$W = \frac{1}{2} \int_V (\varepsilon E^2 + \frac{1}{\mu} B^2) \, dV. \tag{60}$$

и овај образац одређује енергију електромагнетног поља, локализовану у посматраном делу простора.

На тај начин на основу наведених осам аксиома електродинамике добили смо Maxwell-ове једначине (48), једначине стања средине (52) и образац за енергију електромагнетног поља (60). Скуп ових образаца претставља основне обрасце електродинамике, на којима се може изградити целокупна Maxwell-Lorentz-ова теорија електромагнетизма.

*(Саопштено 2-IX-1960)*

## ЛИТЕРАТУРА


[1] W. PANOFSKY and M. PHILLIPS — Classical Electricity and Magnetism, Cambridge 1955.

[2] Л. ЛАНДАУ и Е. ЛИФШИЦ — Теория поля, Москва 1948.

[3] A. SOMMERFELD — Elektrodynamik, Leipzig 1949, 26—7, 30—5.

[4] J. STRATTION — Electromagnetic Theory, New York 1941, 1—6.

]5] A. MERCIER — Leçons sur les principes de l'électrodynamique classique, Neuchatel 1952, 67—71.

[6] J. HORVÁTH — Eine Axiomatisierung der Maxwellschen Theorie des Elektromagnetischen Feldes, *Acta phys. Acad. scient. hung.* **VIII 4** (1958), 399—418.

[7] И. СУПЕК — Теоријска физика и структура материје I, Загреб 1951, 275—7.

[8] J. SLATER and N. FRANK — Elecromagnetism, New York 1957, 57—62.

[9] И. ТАММ — Основы теории электричества, Москва 1957, 123—6.

[10] И. ТАММ — Основы теории электричества, Москва 1957, 303—6, 405—7.

[11] А. ВЛАСОВ — Макроскопическая електродинамика, Москва 1955, 15—20.

[12] А. КОМПАНЕЕЦ —Теоретическая физика, Москва 1957, 109—15.


## UNE AXIOMATIQUE DE L'ELECTRODYNAMIQUE

Par Dj. MUŠICKI (Belgrade)

Dans cet article on donne une axiomatique de l'électrodynamique classique, qui est basée strictement à l'interprétation microphysique des phénomènes électromagnetiques de Lorentz et qui ne postule pas à priori le courant de deplacement. Le système des axiomes est divisé d'après leur nature en trois groupes: les axiomes fondamentaux, les axiomes de liason et l'axiome d'énergie. Pour les axiomes fondamentaux, sont choisis: le théorème de Gauss (10), l'hypothèse d'Ampère (11), la loi de Faraday (12) et la loi de Maxwell (13) dans le vide. Les axiomes de liaison sont pris sous la forme des fonctionnelles linéaires (49), (50) et (51) et l'axiome d'énergie est l'extension de rélation entre la fonction de Lagrange et l'énergie correspondante à l'électrodynamique (55). A partir de ces axiomes sont obtenues toutes les formules fondamentales de l'électrodynamique: les équations de Maxwell (48), les équations d'état (52) et l'expression d'énergie du champs électromagnetique (60).

*Зборник радова Српске академије наука и уметности LXIX*
*Математички институт књ. 8, 1960*
*Recueil des travaux de l'Académie Serbe des Sciences et d'Arts LXIX*
*Institut Mathématique № 8, 1960*

В. ВУЧКОВИЋ и В. СИМОНОВИЋ

# ЗБИРЉИВОСТ FOURIER-ОВИХ РЕДОВА STIRLING-ОВИМ ПОСТУПЦИМА ЗБИРЉИВОСТИ

**1.** У више скорашњих радова ([1], [2], [3], [4]) уведени су неки нови врло ефикасни поступци збирљивости помоћу Stirling-ових бројева и њихових генерализација. Први је такве поступке посматрао J. Карамата.

Нека су бројеви $\begin{bmatrix} n \\ \nu \end{bmatrix}$ дефинисани за $0 \leq \nu \leqq n$ релацијом

$$x(x+1)(x+2)\dots(x+n-1)=\sum_{\nu=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ \nu \end{bmatrix}x^{\nu} \tag{1.1}$$

а за $\nu < 0$ и $\nu > n$ нека је $\begin{bmatrix} n \\ \nu \end{bmatrix} = 0$. Бројеви $\begin{bmatrix} n \\ \nu \end{bmatrix}$ су очито Stirling-ови бројеви прве врсте узети по апсолутној вредности.

За низ $\{s_n\}$ кажемо да је збирљив Карамата-Stirling-овим поступком $K^k$ ако низ

$$S_n^k(s) \overset{def}{=} \frac{1}{k(k+1)\dots(k+n-1)}\sum_{\nu=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ \nu \end{bmatrix}k^{\nu}s_{\nu}, \quad k>0 \tag{1.2}$$

конвергира.

Ове поступке збирљивости увео је J. Карамата [5], доказао њихову регуларност као и један став о њиховом односу према Euler-овим поступцима и Borel-овом поступку збирљивости.

Независно од J. Карамате, В. Лотоцкий у [6] увео је и детаљно испитао специјалан случај уведених поступка $K^k$ када је $k=1$. Agnew у [1] је упростио методе Лотоцког и истакао значај тог специјалног случаја.

В. Вучковић у [2] испитао је узајамну инклузију Карамата-Stirling-ових поступака $K^k$ и оценио ред величине низова збирљивих овим поступцима. У [4] он је модифицирао Stirling-ове поступке збирљивости на следећи начин:

Нека су функције $\sigma_\nu^n(\alpha)$, параметра $\alpha$, дефинисане за $0 \leqq \nu \leqq n$ релацијом

$$(1.3) \qquad (x+\alpha)(x+\alpha+1)\ldots(x+\alpha+n-1)=\sum_{\nu=0}^{n}\sigma_\nu^n(\alpha)\,x^\nu$$

а за $\nu<0$ и $\nu>n$ нека је $\sigma_\nu^n(\alpha)\equiv 0$.

За низ $\{s_n\}$ рећи ћемо да је $\sigma^\alpha$- збирљив ако низ

$$(1.4) \qquad T_n^\alpha(s)\overset{def}{=}\frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n)}\sum_{\nu=0}^{n}\sigma_\nu^n(\alpha)\,s_\nu, \quad \alpha>-1,$$

конвергира. Ови поступци су регуларни и $\sigma\equiv k^1$, јер је $\sigma_\nu^n(0)=\begin{bmatrix} n \\ \nu \end{bmatrix}$.

А. Jakimovski [3] дао је једну другу генерализацију, на тај начин што је уместо Stirling-ових бројева $\begin{bmatrix} n \\ \nu \end{bmatrix}$ увео њихова уопштења $p_\nu^n$ дефинисана са

$$(1.5) \qquad \prod_{\nu=1}^{n}(x+d_\nu)=\sum_{\nu=1}^{n}p_\nu^n x^\nu, \quad 0\leqq\nu\leqq n,$$

$$p_\nu^n\equiv 0 \quad \text{за} \quad \nu<0 \quad \text{и} \quad \nu>n,$$

тј. симетричне функције корена полинома $\prod\limits_{\nu=1}^{n}(x+d_\nu)$.

**2.** У овоме раду испитаћемо збирљивост Fourier-ових редова непрекидних функција помоћу поступака $K^k$ и $\sigma^\alpha$ и доказати

Став 1. *Fourier-ов ред сваке периодичне непрекидне функције $f(x)$ збирљив је сваким регуларним Карамата-Stirling-овим поступком $K^k$, униформно по $x$, у свакој тачки $x$ ка вредности функције $f(x)$.*

Став 2. *Fourier-ов ред сваке периодичне непрекидне функције $f(x)$ збирљив је сваким регуларним поступком $\sigma^\alpha$, униформно по $x$, у свакој тачки $x$ ка вредности функције $f(x)$.*

Доказе ових ставова могуће је добити применом општих Никольский-евих [7] и Карамата-Томић-евих [8] ставова. Међутим, ови ставови се односе на факторе конвергенције. Њихово преформулисање и рад потребан за доказе ставова 1 и 2 били би у суштини исти као и директни докази. Стога ћемо дати директне доказе, који су, уосталом, елементарни.

**3**. Предходно ћемо доказати неколико лема које су нам потребне за доказ ставова 1 и 2.

Лема 1.

$$K_n(t,k) \stackrel{def}{=} \sum_{\nu=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ \nu \end{bmatrix} k^{\nu} \sin\left(\nu+\frac{1}{2}\right) t =$$

$$=\frac{1}{2i} \frac{1}{\Gamma(ke^{it})\,\Gamma(ke^{-it})} \{e^{it/2}\,\Gamma(ke^{-it})\,\Gamma(ke^{it}+n)-e^{-it/2}\,\Gamma(ke^{it})\,\Gamma(ke^{-it}+n)\}$$

*Доказ*. Како је

$$x(x+1)\ldots(x+n-1)=\frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(x)},$$

десна страна наведеног идентитета може се написати у облику

$$\frac{1}{2i}\{e^{it/2}\,ke^{it}(ke^{it}+1)\ldots(ke^{it}+n-1)-e^{-it/2}\,ke^{-it}(ke^{-it}+1)\ldots(ke^{-it}+n-1)\}.$$

На основу дефиниције (1.1) овај израз постаје

$$\frac{1}{2i}\left\{e^{it/2}\sum_{\nu=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ \nu \end{bmatrix} k^{\nu} e^{i\nu t}-e^{-it/2}\sum_{\nu=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ \nu \end{bmatrix} k^{\nu} e^{-i\nu t}\right\}=$$

$$=\sum_{\nu=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ \nu \end{bmatrix} k^{\nu}\,\frac{e^{i(\nu+1/2)t}-e^{-i(\nu+1/2)t}}{2i}=\sum_{\nu=0}^{n} k^{\nu}\begin{bmatrix} n \\ \nu \end{bmatrix}\sin\left(\nu+\frac{1}{2}\right)t=K_n(t,k).$$

Лема 2. *Нека је $K_n(t,k)$ функција из леме 1. Тада је за* $0<t<\dfrac{\pi}{2}$

$$K_n(t,k)=\frac{\Gamma(ke^{it}+ke^{-it}+n)}{\Gamma(ke^{it})\Gamma(ke^{-it})}\,\cdot$$

$$\cdot\left\{\int_0^1 x^{k\cos t+n-1}(1-x)^{k\cos t-1}\sin\left[\frac{t}{2}+k\sin t\ln\frac{x}{1-x}\right]dx\right\}$$

*Доказ*. Како је за $\mathrm{Re}(p)>0$ и $\mathrm{Re}(q)>0$

$$\Gamma(p)\,\Gamma(q)=B(p,q)\,\Gamma(p+q) \text{ и } B(p,q)=B(q,p),$$

то је

$$\Gamma(ke^{-it})\,\Gamma(ke^{it}+n)=\Gamma(ke^{-it}+ke^{it}+n)\,B(ke^{-it},ke^{it}+n),$$

$$\Gamma(ke^{it})\,\Gamma(ke^{-it}+n)=\Gamma(ke^{it}+ke^{-it}+n)\,B(ke^{it},ke^{-it}+n)$$

и

$$K_n(t,k)=\frac{\Gamma(ke^{-it}+ke^{it}+n)}{\Gamma(ke^{it})\,\Gamma(ke^{-it})}\cdot\frac{1}{2i}\left\{e^{it/2}B(ke^{it}+n,ke^{-it})-e^{-it/2}B(ke^{-it}+n,ke^{it})\right\}=$$

$$=\frac{\Gamma(ke^{-it}+ke^{it}+n)}{\Gamma(ke^{it})\,\Gamma(ke^{-it})}\cdot\frac{1}{2i}\left\{e^{it/2}\int_0^1 x^{k\cos t+n-1}(1-x)^{k\cos t-1}x^{-ik\sin t}(1-x)^{-ik\sin t}dx-\right.$$

$$\left.-e^{-it/2}\int_0^1 x^{k\cos t+n-1}(1-x)^{k\cos t-1}x^{-ik\sin t}(1-x)^{ik\sin t}dx\right\}=$$

$$=\frac{\Gamma(ke^{-it}+ke^{it}+n)}{\Gamma(ke^{it})\Gamma(ke^{-it})}\left\{\int_0^1 x^{k\cos t+n-1}(1-x)^{k\cos t-1}\sin\left[\frac{t}{2}+k\sin t\ln\frac{x}{1-x}\right]dx\right\}.$$

Лема 3. *За довољно мало* $\delta\,(0<\delta<\pi/2$ *и* $0<t<\delta$ *је*

$$\left|\frac{K_n(t,k)}{\sin t/2}\right|\leqq M\Gamma(k\cos t+n)\leqq M\Gamma(k+n)$$

*где* $M$ *не зависи од* $t$ *и* $n$.

*Доказ*. Узмимо за $K_n(t,k)$ облик из леме 2. Тада је

$$\left|\frac{K_n(t,k)}{\sin t/2}\right|\leqq M_1(k)\Gamma(2k\cos t+n)\,\cdot$$

$$\cdot\left|\int_0^1 x^{k\cos t+n-1}(1-x)^{k\cos t-1}\sin\left[\frac{t}{2}+k\sin t\ln\frac{x}{1-x}\right]\left(\sin\frac{t}{2}\right)^{-1}dx\right|.$$

Како је $|\sin u|<|u|$ и $\sin\frac{t}{2}\geqq\frac{t}{\pi}$ за $0<t<\delta<\frac{\pi}{2}$, то је

$$\left|\frac{\sin\left[\frac{t}{2}+k\sin t\cdot\ln\frac{x}{1-x}\right]}{\sin\frac{t}{2}}\right|\leqq\pi\left\{\frac{1}{2}+k\left|\ln\frac{x}{1-x}\right|\right\},$$

па је

$$\left|\frac{K_n(t,h)}{\sin t/2}\right|\leqq M_2(k)\,\Gamma(2k\cos t+n)\left\{\int_0^1 x^{k\cos t+n-1}(1-x)^{k\cos t-1}dx+\right.$$

$$\left.+\int_0^1 x^{k\cos t+n-1}(1-x)^{k\cos t-1}\left|\ln\frac{x}{1-x}\right|dx\right\}=M_2(k)\,\Gamma(2k\cos t+n)\{J_1+J_2\}.$$

Интеграл $J_1$ се може непосредно израчунати.

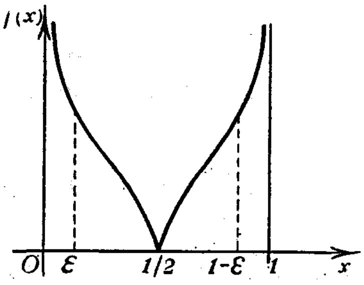
$$J_1 = B(k\cos t+n, k\cos t) = \frac{\Gamma(k\cos t+n)\,\Gamma(k\cos t)}{\Gamma(2k\cos t+n)}.$$

Проценићемо сада

$$J_2 = \int_0^1 x^{k\cos t+n-1}(1-x)^{k\cos t-1}\left|\ln\frac{1-x}{x}\right|dx.$$

Због израза $\left|\ln\frac{1-x}{x}\right|$ интеграл $J_2$ морамо раздвојити на три интеграла, тј.

$$J_2 = \int_0^{\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} + \int_{1-\varepsilon}^{1},$$




сл. 1

где је $\varepsilon > 0$ (в. сл. 1). Због симетрије, први и трећи интеграл израчунавају се на исти начин, а други као $J_1$. Наводимо зато само процену за први интеграл:

$$\int_0^{\varepsilon} x^{k\cos t+n-1}(1-x)^{k\cos t-1}\left|\ln\frac{1-x}{x}\right|dx =$$

$$= \int_0^{\varepsilon} x^{k\cos t+n-1}(1-x)^{k\cos t-1}\,|\ln(1-x)|\,dx + \int_0^{\varepsilon} x^{k\cos t+n-1}(1-x)^{k\cos t-1}|\ln x|\,dx$$

$$\leqq |\ln(1-\varepsilon)|\int_0^1 x^{k\cos t+n-1}(1-x)^{k\cos t-1}dx + \int_0^{\varepsilon} x^{k\cos t+n-2}(1-x)^{k\cos t-1}x\,|\ln x|\,dx$$

$$\leqq C(\varepsilon)\,B(k\cos t+n, k\cos t) + \int_0^1 x^{k\cos t+n-1}(1-x)^{k\cos t-1}dx$$

$$\leqq C(\varepsilon)\,B(k\cos t+n, k\cos t) + B(k\cos t+n-1, k\cos t);$$

јер је $x|\ln x| < 1$ за $0 < x < 1$. Тако се добија да је

$$\left|\frac{K_n(t,k)}{\sin t/2}\right| \leqq M(k,\varepsilon)\,\Gamma(2k\cos t+n)\left\{\frac{\Gamma(k\cos t+n)}{\Gamma(2k\cos t+n)} + \frac{\Gamma(k\cos t+n-1)}{\Gamma(2k\cos t+n-1)}\right\} \leqq$$

$$\leqq M(k,\varepsilon)\left\{\Gamma(k\cos t+n) + \frac{\Gamma(2k\cos t+n)}{\Gamma(2k\cos t+n-1)}\,\Gamma(k\cos t+n-1)\right\}.$$

Но како је

$$\Gamma(2k\cos t+n) = (2k\cos t+n-1)\,\Gamma(2k\cos t+n-1)$$

то коначно добијамо тврђење леме.

Лема 4. *За* $0 < \delta < t < \pi$ *је*

$$\left| \frac{K_n(t,k)}{\sin t/2} \right| \leq M \Gamma(k \cos \delta + n)$$

*где* $M$ *не зависи од* $n$ *и* $t$.

*Доказ.* Пођимо од израза за $K_n(t,n)$ из леме 1 и напишимо га у облику

$$K_n(t,k) = \frac{e^{it/2}}{2i} k e^{it} (ke^{it}+1)\dots(ke^{it}+n-1) - \frac{e^{-it/2}}{2i} ke^{-it}(ke^{-it}+1)\dots(ke^{-it}+n-1).$$

Очигледно је да се овај израз може написати у облику

$$K_n(t,k) = \frac{e^{it/2}}{2i} \cdot \frac{\Gamma(e^{ikt}+n)}{\Gamma(e^{ikt})} - \frac{e^{-it/2}}{2i} \frac{\Gamma(\overline{e^{ikt}}+n)}{\Gamma(\overline{e^{ikt}})}$$

или, стављајући $e^{ikt} = z$

$$K_n(t,k) = \frac{1}{2i} \left\{ \frac{e^{it/2}\Gamma(z+n)}{\Gamma(z)} - \frac{e^{-it/2}\Gamma(\overline{z+n})}{\Gamma(\overline{z})} \right. =$$

$$= \frac{1}{2i} [\Psi(z,n) - \overline{\Psi}(z,n)] = \frac{1}{2i} \cdot 2i \operatorname{Im} \{\Psi(z,n)\} = \operatorname{Im} \{\Psi(z,n)\},$$

где смо цртом означавали коњуговане вредности. Функција $\Psi(z,n)$ дата је изразом

$$\Psi(z,n) = e^{it/2} \frac{\Gamma(z+n)}{\Gamma(z)} = \frac{e^{it/2}}{\Gamma(z)} \int_0^\infty e^{-t}\, t^{n+k\cos t-1+ik\sin t}\, dt =$$

$$= \frac{e^{it/2}}{\Gamma(z)} \cdot \int_0^\infty e^{-it}\, t^{n+k\cos t-1} \cdot e^{ik\sin t}\, dt =$$

$$= \frac{e^{it/2}}{\Gamma(z)} \int_0^\infty e^{-t}\, t^{n+k\cos t-1} \{\cos(k\sin t \cdot \ln t) + i\sin(k\sin t \cdot \ln t)\}\, dt = \frac{e^{it/2}}{\Gamma(t)} (\alpha + i\beta),$$

где је

$$\alpha = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{n+k\cos t-1} \cos(k\sin t \cdot \ln t)\, dt,$$

$$\beta = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{n+k\cos t-1} \sin(k\sin t \cdot \ln t)\, dt.$$

Међутим, нама је потребан само имагинарни део функције $\Psi(z; n)$ и његова процена. Ми ћемо сада дати ту процену, која је веома груба, али сасвим довољна за наше потребе.

Ставимо

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = u(k, t) + iv(k, t).$$

Тада је

$$\Psi(k, t) = e^{it/2}(\alpha + i\beta)(u + iv) = e^{it/2}\{(\alpha u - \beta v) + i(\beta u + \alpha v)\} =$$

$$= \left(\cos\frac{t}{2} + i\sin\frac{t}{2}\right)\left\{(\alpha u - \beta v) + i(\beta u + \alpha v)\right\} =$$

$$= \left[(\alpha u - \beta v)\cos\frac{t}{2} - (\beta u + \alpha v)\sin\frac{t}{2}\right] + i\left[(\alpha u - \beta v)\sin\frac{t}{2} + (\beta u + \alpha v)\cos\frac{t}{2}\right].$$

Значи да је

$$\operatorname{Im}\{\Psi(k, t)\} = (\alpha u - \beta v)\sin\frac{t}{2} + (\beta u + \alpha v)\cos\frac{t}{2}.$$

Јасно је, даље, да ће бити

$$|J\{\Psi(k, t)\}| \leqq 2(|\alpha||u| + |\beta||v|).$$

Но пошто је $\frac{1}{\Gamma(z)}$ цела функција и $z = e^{ikt}$ ограничен број, постоји коначна позитивна константа $M(k)$ таква да је

$$|u| \leqq \frac{M(k)}{2} \text{ и } |v| \leqq \frac{M(k)}{2}.$$

Тако добивамо

$$|J\{\Psi(k, t)\}| \leqq M(k)\{|\alpha| + |\beta|\} \leqq 2M(k)\int_0^\infty e^{-t}\, t^{n+k\cos t-1}\, dt \leqq$$

$$\leqq 2M(k)\,\Gamma(k\cos t + n)$$

за свако $t$. А пошто је за $\pi > t > \delta > 0$, $\cos t < \cos\delta$, то је

$$|J\{\Psi(k, t)\}| \leqq 2M(k)\,\Gamma(k\cos\delta + n).$$

**4.** Сада ће мо доказати став 1.

За Fourier-ов ред функције $f(x)$

$$f(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{\nu=1}^{\infty}(a_\nu\cos\nu x+b_\nu\sin\nu x)$$

је

$$s_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t+x)\cdot\frac{\sin(n+1/2)t}{\sin t/2}\,dt$$

те је њена $S_n^k$-сума дата изразом

$$S_n^k=\frac{1}{k(k+1)\ldots(k+n-1)}\sum_{\nu=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\\nu\end{bmatrix}k^\nu s_\nu(x)=$$

$$=\frac{1}{k(k+1)\ldots(k+n-1)}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(x+t)}{\sin t/2}\,dt\sum_{\nu=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\\nu\end{bmatrix}k^\nu\sin(\nu+1/2)\,t,$$

тј. према ознакама леме 1

$$S_n^k=\frac{1}{k(k+1)\ldots(k+n-1)}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(x+t)}{\sin t/2}\cdot K_n(t,k).$$

Пошто је

$$K_n(t,k)=-K_n(-t,k)$$

то се лако добија

$$S_n^k=\frac{1}{k(k+1)\ldots(k+n-1)}\cdot\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}\cdot\frac{K_n(t,k}{\sin t/2}\,dt.$$

С друге стране је

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{K_n(t,k)}{\sin t/2}\,dt=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sum_{\nu=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\\nu\end{bmatrix}k^\nu\sin(\nu+1/2)\,t\,(\sin t/2)^{-1}\,dt=$$

$$=\sum_{\nu=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\\nu\end{bmatrix}k^\nu\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin(\nu+1/2)\,t}{\sin t/2}\,dt=k(k+1)\ldots(k+n-1),$$

јер је

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin(\nu+1/2)\,t}{\sin t/2}\,dt=1,$$

и отуда

$$1=\frac{1}{k(k+1)\dots(k+n-1)}\cdot\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\frac{K_n(t,k)}{\sin t/2}\,dt.$$

Тако добивамо

$$S_n^k-f(x)=\frac{1}{k(k+1)\dots(k+n-1)}\int_0^\pi\frac{f(x+t)+f(x-t)-2f(x)}{2\pi}\cdot\frac{K_n(t,k)}{\sin t/2}\,dt.$$

Како је, по претпоставци, $f(x)$ непрекидна функција, то за произвољно мало $\varepsilon>0$ можемо наћи једно $\delta>0$ тако да је

$$|f(x+t)+f(x-t)-2f(x)|<2\varepsilon \text{ за } 0<t<\delta.$$

При томе, због униформе непрекидности, $\delta$ не зависи од $x$. Онда је

$$|S_n^k-f(x)|\leqq\frac{\Gamma(n)}{\Gamma(k+n)}\cdot\frac{\varepsilon}{\pi}\int_0^\delta\left|\frac{K_n(t,k)}{\sin t/2}\right|dt+\frac{\Gamma(n)}{\Gamma(k+n)}\cdot M\int_\delta^\pi\left|\frac{K_n(t,k)}{\sin t/2}\right|dt.$$

По леми 3 за $0<t<\delta$ је

$$\left|\frac{K_n(t,k)}{\sin t/2}\right|<M_1\Gamma(k+n)$$

а по леми 4 за $\delta<t<\pi$ је

$$\left|\frac{K_n(t,k)}{\sin t/2}\right|<M_2\Gamma(k\cos\delta+u)$$

те је

$$|S_n^k-f(x)|\leqq\varepsilon M_1(\delta,k)+M_2(\delta,k)\cdot\frac{\Gamma(k\cos\delta+n)}{\Gamma(k+n)}.$$

Но како је

$$\frac{\Gamma(k\cos\delta+n)}{\Gamma(k+n)}\sim\frac{1}{n^{k(1-\cos\delta)}}\to 0, \text{ код } n\to\infty,$$

јер $\delta$ можемо одабрати тако да буде $1-\cos\delta>0$, то одавде следи да је

$$\lim_{n\to\infty}S_n^k=f(x)$$

униформно по $x$.

**5.** Што се тиче доказа става 2, нећемо га овде изводити, јер је он скоро потпуно идентичан са доказом става 1. Користе се четири леме сасвим сличне лемама из тачке 3.

*(Саопштено 25-XI-1959)*

## ЛИТЕРАТУРА

[1] R. P. AGNEW — The Lototsky Method for Evaluation of Series. *Michigan Math. Journal* **4** (1957), 105—128.

[2] V. VUČKOVIĆ — The Mutual Inclusion of Karamata-Stirling Method of Summation. *Michigan Math. Journal* **6** (1959), 291—297.

[3] A. JAKIMOVSKI — A Generalization of the Lototsky Method of Summability. *Michigan Math. Journal* **6** (1959), 277—290.

[4] V. VUČKOVIĆ — Eine neue Klasse vom Polynomen und ihre Anwendung in der Theorie der Limitierungsverfahren. *Publ. Inst. Math. Acad. Serbe Sci.* **12** (1958), 125—136.

[5] J. KARAMATA — Théorèmes sur la sommabilité exponentielle et d'autres sommabilitées s'y rattachant. *Mathematica Cluj* **9** (1935), 164—178.

[6] А. В. ЛОТОЦКИЙ — Об одном линейном преобразовании последовательностей и рядов. *Иванов. Гос. Пед. Инст. Уч. Зап. Физ. Мат. Науки* **4** (1953), 61—91.

[7] С. М. НИКОЛЬСКИЙ — Об линеарних метод суммирования рядов Фурье. *Известия Акад. Наук СССР* **12** (1948), 259—278.

[8] J. KARAMATA et M. TOMIĆ — Sur la sommation des series de Fourier des fonctions continues. *Publ. Inst. Math. Acad. Serbe Sci.* **8** (1955), 123—138.

# LIMITIERBARKEIT FOURIERSCHER REIHEN MITTEL STIRLINGSCHE VERFAHREN

V. VUČKOVIĆ und V. SIMONOVIĆ (Belgrad)

Für die Karamata-Stirlingsche Verfahren $K^k$, definiert durch (1.1) und (1.2), und die vom ersten Author eingeführten modifizierten Stirlingaschen Verfahren $\sigma^\alpha$, definiert durch (1.3) und (1.4), wird bewiesen dass sie für jedes $x$ die Fouriersche Reihe einer stetigen periodischen Funktion zu ihrem Werte $f(x)$ uniform nach $x$ limitieren.

*Зборник радова Српске академије наука и уметности LXIX*
*Математички институт књ. 8, 1960*
*Recueil des travaux de l'Académie Serbe des Sciences et des Arts LXIX*
*Institut Mathématique № 8, 1960*

ЗОРА ПЕТРИЋ

# О АПСОЛУТНОЈ КОНВЕРГЕНЦИЈИ НЕКИХ ОРТОГОНАЛНИХ РЕДОВА

1. УВОД. Познати су PALEY-еви ставови [2, стр. 72]:

I. *Ако је $f(\theta)$ ограничена парна функција, њен Fourier-ов ред дат са*

$$\mathbf{S}[f(\theta)] = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \cos \nu\theta,$$

и $a_\nu \geqq 0$, *тада је*

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} |a_\nu| < \infty .$$

II. *Ако је $f(\theta)$ ограничена непарна функција, њен Fourier-ов ред дат са*

$$\mathbf{S}[f(\theta)] = \sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu \sin \nu\theta,$$

*и $b_\nu \geqq 0$, тада је*

a) *делимична сума*

$$S_n(\theta, f) = \sum_{\nu=1}^{n} b_\nu \sin \nu\theta$$

*униформно ограничена за свако $\theta \varepsilon [0, \pi]$;*

b) *ако је $f(\theta)$ непрекидна функција, тада $S_n(\theta, f)$ униформно конвергира.*

Предмет овог рада је покушај да се теореме I и II прошире на случај $a_\nu$ и $b_\nu$ макаквог знака. То се може учинити ако се протпостави да је испуњен услов да је ред

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_\nu \sin \nu x}{\nu}, \text{ где је } \varepsilon_\nu = \begin{cases} +1, & a_\nu \geqq 0, \ b_\nu \geqq 0 \\ -1, & a_\nu < 0, \ b_\nu < 0 \end{cases}$$

Fourier-ов ред једне функције ограничене варијације. Ставови I и II су тада специјални случајеви, јер је за $\varepsilon_\nu = +1$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin \nu x}{\nu} = \frac{\pi - x}{2}, \quad 0 < x < \pi,$$

Fourier-ов ред једне функције ограничене варијације.

Даљи предмет рада је да се докаже аналоган став Paley-евом ставу I за Fourier-ов ред у односу на Legendre-ове полиноме

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu P_\nu(x)$$

и проширени став за исте редове где су $a_\nu$ ма каквог знака.

## 2. СТАВОВИ КОЈИ СЕ ОДНОСЕ НА ТРИГОНОМЕТРИСКЕ FOURIER-OBE РЕДОВЕ

2.1. Уопштење става I гласи:

Став 1. *Ако је $f(x)$ парна и ограничена функција, њен Fourier-ов ред дат са*

$$\mathbf{S}\,[f(x)] = \frac{a_\nu}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \cos \nu x$$

*и ако је испуњен услов да је ред*

$$\text{(i)} \qquad \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_\nu \sin \nu x}{\nu}, \text{ са } \varepsilon_\nu = \begin{cases} +1, & a_\nu \geqq 0 \\ -1, & a_\nu < 0, \end{cases}$$

*Fourier-ов ред једне функције ограничене варијације, тада је*

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} |a_\nu| < \infty .$$

Доказ: По претпоставци је $|f(x)| < M$; тада је, као што је добро познато и Fejér-ова средина Fourier-овог реда функције $f(x)$,

$$\sigma_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{n-1} \left(1 - \frac{\nu}{n}\right) a_\nu \cos \nu x$$

ограничена, тј.

$$\sigma_n^*(x) = \sum_{\nu=1}^{n-1} \left(1 - \frac{\nu}{n}\right) a_\nu \cos \nu x < M.$$

Познато је да је услов [4, стр. 82]

$$\int_0^\pi |\rho_m'(\theta)|\, d\theta = O(1),$$

где је

$$\rho_m'(x)=\sum_{\nu=1}^{m-1}\left(1-\frac{\nu}{m}\right)\varepsilon_\nu\cos\nu x,$$

потребан и довољан да би ред (i) био Fourier-ов ред једне функције ограничене варијације. Ако се формира израз:

$$T_n=\int_0^\pi \sigma_n^*(x)\,\rho_n'(x)\,dx=\int_0^\pi\left\{\sum_{\nu=1}^{n-1}\left(1-\frac{\nu}{n}\right)a_\nu\cos\nu x\right\}\left\{\sum_{\nu=1}^{n-1}\left(1-\frac{\nu}{n}\right)\varepsilon_\nu\cos\nu x\right\}dx,$$

с једне стране је тада

$$|T_n|\leqq \operatorname{Max}_x|\sigma_n^*(x)|\int_0^\pi|\rho_n'(x)|\,dx=O(1),$$

а са друге стране $T_n$ се може израчунати. Како је

$$\int_0^\pi\cos\nu x\cos kx\,dx=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}, & \nu=k\\ 0, & \nu\neq k,\end{cases}$$

добија се

$$T_n=\frac{\pi}{2}\sum_{\nu=1}^{n-1}\left(1-\frac{\nu}{n}\right)^2|a_\nu|.$$

Значи

$$\sum_{\nu=1}^{n-1}\left(1-\frac{\nu}{n}\right)^2|a_\nu|<M',$$

где $M'$ не зависи од $n$. За цео број $k<(n-1)/2$ биће отуда

$$\sum_{\nu=1}^{k}\left(1-\frac{\nu}{n}\right)^2|a_\nu|\leqq\sum_{\nu=1}^{n-1}\left(1-\frac{\nu}{n}\right)^2|a_\nu|<M',$$

тј.

$$\sum_{\nu=1}^{k}|a_\nu|<M''.$$

Како је $k$ произвољан цео број, следи тврђење:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}|a_\nu|<\infty.$$

Доказ се може извести много краћим путем ако се користи Paley-ев став I и следећи став M. Fekete-а [4, стр. 100, став A]. Ако је ред

$$\text{(1)}\qquad \frac{a_0}{2}+\sum_{\nu=1}^{\infty}(a_\nu\cos\nu x+b_\nu\sin\nu x)$$

Fourier-ов ред ограничене функције $f(x) \leqq M$ и ред

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu \frac{\sin \nu x}{\nu} \tag{2}$$

Fourier-ов ред једне функције ограничене варијације, тада је ред

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x) \tag{3}$$

Fourier-ов ред једне ограничене функције.

2.2. Уопштење става II дато је следећим ставом:

Став 2: 1) *Ако је $f(x)$ непарна и ограничена функција, њен Fourier-ов ред*

$$\mathbf{S}[f(x)] = \sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu \sin \nu x, \tag{*}$$

*и ако је ред*

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_\nu \sin \nu x}{\nu}, \qquad \varepsilon_\nu = \begin{cases} +1, & b_\nu \geqq 0 \\ -1, & b_\nu < 0 \end{cases} \tag{ii}$$

*Fourier-ов ред једне функције ограничене варијације, тада је*

$$S_n(x, f) = \sum_{\nu=1}^{n} b_\nu \sin \nu x \ \textit{униформно ограничено}.$$

2) *Ако је $f(x)$ непрекидна функција, тада под претходним условима ред (*) униформно конвергира.*

Доказ: 1) Ако се примени наведени став А из претходног параграфа, добија се да је заједно са редом (*) и ред

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon_\nu b_\nu \sin \nu x \equiv \sum_{\nu=1}^{\infty} |b_\nu| \sin \nu x$$

Fourier-ов ред једне ограничене функције. По наведеном Paley-евом ставу II из увода, тада је

$$S_n^*(x) = \sum_{\nu=1}^{n} |b_\nu| \sin \nu x \ \text{униформно ограничено}.$$

Лако се може показати да је $|S_n^*(x)| \leqq K_1 M$, где је $K_1$ апсолутна константа а $M$ ограничење функције $f(x)$, ако се користи чињеница да је

$$S_n^*(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sigma_n(x+t)\, dL(t),$$

где је $\sigma_n(x)$ Fejér-ова средина Fourier-ова реда (*), а

$$L(t) \sim \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\lambda_\nu \sin \nu x}{\nu}.$$

Даље је, ако је испуњен услов (ii), испуњен и услов да је ред

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(\varepsilon_\nu - 1)\sin \nu x}{\nu} = \frac{\varepsilon_\nu \sin \nu x}{\nu} - \frac{\pi - x}{2} \, (0 < x \leqq \pi)$$

Fourier-ов ред једне функције ограничене варијације. Према томе, користећи став А, следи да је и ред

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu (\varepsilon_\nu - 1) \sin \nu x$$

Fourier-ов ред ограничене функције, и како је $|b_\nu| - b_\nu \geqq 0$, према ставу II је тада

$$\tilde{S}_n(x) = \sum_{\nu=1}^{n} b_\nu (\varepsilon_\nu - 1) \sin \nu x \text{ униформно ограничено}$$

тј.

$$|\tilde{S}_n(x)| \leqq K_2 M.$$

Како је

$$S_n(x) = \sum_{\nu=1}^{n} b_\nu \sin \nu x = \sum_{\nu=1}^{n} |b_\nu| \sin \nu x - \sum_{\nu=1}^{n} (|b_\nu| - b_\nu) \sin \nu x,$$

следи тврђење става 2. тј.

$$|S_n(x)| \leqq KM.$$

2) $f(x)$ је по претпоставци непрекидна функција, па, по добро познатом ставу, Fejér-ова средина $\sigma_n(x)$ униформно конвергира ка функцији $f(x)$. Значи за довољно велико $n = n(\varepsilon)$ је

$$f(x) = \sigma_n(x) + g(x), \quad |g(x)| < \varepsilon$$

за свако $x$. Ако се примени претходни део 1) овог става на Fourier-ов ред ограничене функције $g(x)$, добија се да је $S_n(x, g)$ униформно ограничено, тј. $|S_n(x, g)| < K\varepsilon$. Према томе је

$$|S_p(x, g) - S_q(x, g)| \leqq 2K\varepsilon \text{ за свако } p > q \geqq n \text{ и свако } x$$

и

$$|S_p(x, \sigma_n) - S_q(x, \sigma_a)| = 0 \text{ за } p > q \geqq n.$$

Значи за $p > q \geqq n$, $|S_p(x, f) - S_q(x, f)| \leqq A\varepsilon$, тј. Fourier-ов ред непрекидне функције $f(x)$ је униформно конвергентан.

Доказ дела 2) се може извести и на основу цитираног става А за класу непрекидних функција.

## 3. СТАВОВИ КОЈИ СЕ ОДНОСЕ НА FOURIER-ОВЕ РЕДОВЕ У ОДНОСУ НА LEGENDRE-ОВЕ ПОЛИНОМЕ $P_n(x)$ — LAPLACE-ОВЕ РЕДОВЕ

3.1. Аналогно ставу I може се доказати

Став 3. *Функција* $f(x)$ *је дефинисана у интервалу* $[-1, +1]$. *Ако је*

$$|f(x)| < M, \quad x \in [-1, +1],$$

*и њен формални Laplace-ов ред дат са*

$$f(x) \sim \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu P_\nu(x), \tag{4}$$

*где су* $a_\nu$ *Fourier-ови коефицијенти функције* $f(x)$ *у односу на Legendre-ове полиноме, тј.*

$$a_\nu = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{+1} f(x) P_\nu(x)\, dx,$$

*и ако је* $a_\nu \geqq 0$, *тада је*

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{|a_\nu|}{2\nu+1} < \infty.$$

Доказ. На основу једног Fejér-овог става [3] ако је $m \leqq f(x) \leqq M$ за свако $x \in [-1, +1]$, тада су Cesàro-ве средине другог реда од (4) исто тако ограничене, тј.

$$m \leqq \tau_n(x) \leqq M,$$

где је

$$\tau_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \lambda_{n\nu} a_\nu P_\nu(x), \quad \text{са } \lambda_{n\nu} = \frac{\binom{n+2-\nu}{2}}{\binom{n+2}{2}}.$$

Израз

$$T_n^1 = \int_{-1}^{+1} \tau_n(x) \left\{ \sum_{\nu=0}^{n} P_\nu(x) \right\} dx,$$

се може с једне стране израчунати и имамо

$$T_n^1 = \sum_{\nu=0}^{n} 2\lambda_{n\nu} \frac{|a_\nu|}{2\nu+1},$$

јер за Legendre-ове полиноме

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (x^2-1)^n}{d x^n}$$

важи особина ортогоналности

$$\int_{-1}^{+1} P_m(z) P_n(z)\, dz = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \dfrac{2}{2n+1}, & m = n. \end{cases}$$

С друге стране, користећи чињеницу да је према L. Fejér-у [3]

$$P_0(\cos\gamma)+P_1(\cos\gamma)+\ldots+P_n(\cos\gamma)>0,$$

за свако $n$ и $0<\gamma<\pi$, може се на $T_n^1$ применити први став о средњој вредности. Имаћемо тада

$$m\int_{-1}^{+1}\sum_{\nu=0}^{n}P_\nu(x)\,dx\leqq\int_{-1}^{+1}\tau_n(x)\left\{\sum_{\nu=0}^{n}P_\nu(x)\right\}dx\leqq M\int_{-1}^{+1}\sum_{\nu=0}^{n}P_\nu(x)\,dx,$$

значи $T_n^1\leqq M_1$, тј.

$$\sum_{\nu=0}^{n}\lambda_{n\nu}\frac{a_\nu}{2\nu+1}<M.$$

Узимајући $k=[n/2]$ сабирака, добија се

$$\sum_{\nu=0}^{k}\lambda_{n\nu}\frac{|a_\nu|}{2\nu+1}<\sum_{\nu=0}^{n}\lambda_{n\nu}\frac{|a_\nu|}{2\nu+1}<M$$

и за $n\to\infty$

$$\sum_{\nu=0}^{k}\frac{|a_\nu|}{2\nu+1}<M.$$

Пошто ово важи за свако $k$, следи тврђење става 3.

3.2 Став 3 се може проширити на случај $a_\nu$ ма каквог знака, уз претпоставку

$$\text{(iii)}\quad \mathbf{M}[\sigma_n(x)]=\int_{-1}^{+1}\left|\sum_{\nu=0}^{n}\left(1-\frac{\nu}{n+1}\right)\varepsilon_\nu P_\nu(x)\right|\leqq V,\ \text{са}\ \varepsilon_\nu=\begin{cases}+1, & a_\nu\geqq 0\\ -1, & a_\nu<0.\end{cases}$$

тако добивамо

Став 4. *Ако је* $|f(x)|<M$, $f(x)\sim\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu P_\nu(x)$ *и ако је испуњен услов* (iii), *тада је*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{|a_\nu|}{2\nu+1}<\infty.$$

Доказ. У доказу се користи напред наведени став L. Fejér-а [3]. Ако се формира израз

$$A_n=\int_{-1}^{+1}\tau_n(x)\,\sigma_n(x)\,dx,$$

добија се с једне стране

$$A_n=\int_{-1}^{+1}\left\{\sum_{\nu=1}^{n}\lambda_{\nu n}\,a_\nu\,P_\nu(x)\right\}\left\{\sum_{\nu=0}^{n}\left(1-\frac{\nu}{n+1}\right)\varepsilon_\nu P_\nu(x)\right\}=\sum_{\nu=0}^{n}\left(1-\frac{\nu}{n+1}\right)2\lambda_{\nu n}\frac{|a_\nu|}{2\nu+1}.$$

С друге стране је

$$|A_n| \leqq \int_{-1}^{+1} |\tau_n(x)|\,|\sigma_n(x)|\,dx \leqq M \int_{-1}^{+1} |\sigma_n(x)|\,dx = O(1).$$

Према томе

$$\sum_{\nu=0}^{n} \left(1-\frac{\nu}{n+1}\right) \lambda_{n\nu} \frac{|a_\nu|}{2\nu+1} < M$$

и аналогним поступком као у ставу 3, следи тврђење става 4.

Може се лако показати да је услов (iii) аналоган условима (i) (ii). Наиме, потпуно аналогно доказу Young-овог става [4, стр. 79], може се показати да је *услов* (iii) *потребан и довољан услов да ред*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon_\nu P_\nu(x) \tag{5}$$

*буде Fourier-Stieltjes-ов ред.*

Доказ: а) *Услов* (iii) *је довољан.* Претпоставља се, значи, да је

$$\mathbf{M}[\sigma_n(x)] = \int_{-1}^{+1} \left| \sum_{\nu=0}^{n} \left(1-\frac{\nu}{n+1}\right) \varepsilon_n P_n(x) \right| dx \leqq V.$$

Нека је

$$F_n(x) = \int_{-1}^{x} \sigma_n(t)\,dt\,.$$

$F_n(x)$ је униформно ограничене варијације у $(-1, +1)$, и како је $F_n(-1)=0$ за $n=1, 2, \ldots$ може се применити Helly-ева лема [4, стр. 80] *по којој постоји униформно ограничен подниз* $\{F_{n_j}(x)\}$ *који конвергира функцији* $F(x)$ *ограничене варијације.*

Према томе

$$\left(1-\frac{\nu}{n_j+1}\right)\varepsilon_\nu = \frac{2\nu+1}{2} \int_{-1}^{+1} \left\{ \sum_{\nu=0}^{n_j} \left(1-\frac{\nu}{n_j+1}\right) \varepsilon_\nu P_\nu(x) \right\} P_\nu(x)\,dx$$

$$= \frac{2\nu+1}{2} \int_{-1}^{+1} \sigma_{n_j} P_\nu(x)\,dx = \frac{2\nu+1}{2} \left[ F_{n_j}(x) \cdot P_\nu(x) - \int_{-1}^{+1} F_{n_j} P'_\nu(x)\,dx \right].$$

За $j \to \infty$ добивамо

$$\varepsilon_\nu = \frac{2\nu+1}{2} \left[ F(x)\,P_n(x) - \int_{-1}^{+1} F(x)\,P'_\nu(x)\,dx \right] = \frac{2\nu+1}{2} \int_{-1}^{+1} P_\nu(x)\,d\,F(x)\,.$$

b) *Услов* (iii) *је потребан.* Ако је ред (5) Fourier-Stieltjes-ов, тј.

$$a_\nu = \frac{2\nu+1}{2} \int_{-1}^{+1} P_\nu(t)\, d\, F(t),$$

тада је

$$\sigma_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \left(1 - \frac{\nu}{n+1}\right) \frac{2\nu+1}{2} \left\{ \int_{-1}^{+1} P_\nu(t)\, d\, F(t) \right\} P_\nu(x),$$

$$|\sigma_n(x)| \leqq \int_{-1}^{+1} |d\, F(t)| \sum_{\nu=0}^{n} \left(1 - \frac{\nu}{n+1}\right) \frac{2\nu+1}{2} |P_\nu(t)\, P_\nu(x)|\,.$$

Отуда је

$$\mathbf{M}\,[\sigma_n(x)] = \int_{-1}^{+1} |\sigma_n(x)|\, dx \leqq \int_{-1}^{+1} |d\, F(t)| \sum_{\nu=0}^{n} \frac{2\nu+1}{2} \int_{-1}^{+1} \left(1 - \frac{\nu}{n+1}\right) |P_\nu(t) \cdot P_\nu(x)|\, dx\,.$$

Како је по једном ставу A. Haar-а [1]

$$\int_{-1}^{+1} \left(1 - \frac{\nu}{n+1}\right) |P_\nu(t)\, P_\nu(x)|\, dx < G,$$

следи из последње неједначине

$$\mathbf{M}\,[\sigma_n(x)] < V.$$

*Примедба.* Познат је Paley-ев став [4, стр. 202]:

Став C. Ако је $f \varepsilon L^p$ и ако су $c_1, c_2, \ldots$ Fouier-ови коефицијенти од $f$ у односу на неки ортогонални и нормални систем униформно ограничених функција $\varphi_n(x)$, тада је

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^p\, n^{p-2} < \infty\,, \qquad \text{за } 1 < p \leqq 2\,.$$

Очевидно став 4 није обухваћен ставом $C$.

*(Саопштено 17-II-1960)*

## ЛИТЕРАТУРА

[1] A. Haar — Über die Legendresche] Reihe. *Rend. del Circolo mat. di Palermo.* **XXXII** (1911).

[2] G. Hardy and W. W. Rogosinki — Fourier Series. Cambridge, 1950.

[3] G. Szegö — Zur Theorie der Legendreschen Polynome. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* **XL** (1931).

[4] A. Zygmund — Trigonometrical Series. Warszawa 1935.

# SUR LA CONVERGENCE ABSOLUE DE CERTAINES SÉRIES ORTHOGONALES

Z. PETRIĆ (Belgrade)

Dans cette note les théorèms suivants sont démontrés: 1. Soit $f(x)$ une fonction paire et bornée et soit $\mathbf{S}[f]=a_0/2+\Sigma a_\nu \cos \nu x$ sa série de Fourier. Si

$$\text{(i)} \qquad \sum \frac{\varepsilon_\nu \sin \nu x}{\nu} \quad \text{avec} \quad \varepsilon_\nu = \begin{cases} +1, & a_\nu \geqq 0, \\ -1, & a_\nu < 0, \end{cases}$$

représente une fonction à variation bornée, on a $\Sigma |a_\nu| < \infty$. La série (i) est une telle série, si par exemple, $a_\nu \geqq 0$ [2, p. 72]. 2. Soit $f$ impaire et bornée, $\mathbf{S}[f]=\Sigma b_\nu \sin \nu x$ et la condition (i) soit remplie avec $\varepsilon_\nu = \{+1,\ b_\nu \geqq 0;\ -1,\ b_\nu < 0\}$; alors $\mathbf{S}[f]$ converge uniformént. 3. Soit $f$ défini et $|f| < M$ dans $[-1, 1]$ et $f(x) \sim \Sigma a_\nu P_\nu(x)$ où $P_\nu(x)$ désigne les polynomes de Legendre c.-à.-d. soit $\Sigma a_\nu P_\nu(x)$ la sériet formelle de Laplace de $f$. Soit en plus

$$\text{(iii)} \quad \mathbf{M}[\sigma_n(x)] = \int_{-1}^{1} \left| \sum_{\nu=0}^{n} \left(1 - \frac{\nu}{n+1}\right) \varepsilon_\nu P_\nu(x) \right| < M, \quad \varepsilon_\nu = \begin{cases} +1, & a_\nu \geqq 0, \\ -1, & a_\nu < 0. \end{cases}$$

Alors

$$\sum \frac{|a_\nu|}{2\nu+1} < \infty.$$

On démontre ensuite que la condition (iii) est la condition nécessaire et suffisante pour que la série $\Sigma \varepsilon_\nu P_\nu(x)$ soit une série de Fourier-Stieltjes, autrement dit, la condi ion (iii) représente la condition analogue avec (i).

Il faut remarquer, que le théorème connu de Paley [4, p. 200] ne contient pas le théorème 3.

*Зборник радова Српске академије наука и уметности LXIX*
*Математички институт књ. 8, 1960*
*Recueil des travaux de l'Académie Serbe des Sciences et des Arts LXIX*
*Institut Mathématique № 8, 1960*

РАСТКО СТОЈАНОВИЋ

# О КРЕТАЊУ НЕПРЕКИДНИХ ДЕФОРМАБИЛНИХ МАТЕРИЈАЛНИХ СИСТЕМА СА КОНАЧНИМ БРОЈЕМ ПАРАМЕТАРА

## 1. УВОД

При проучавању кретања недеформабилног материјалног система (т.зв. чврстог тела) унапред уводимо претпоставку да су растојања међу тачкама система за време кретања непроменљива. Увођењем двају координантних система, рецимо $x^i$ и $\overline{x}^i$ $(i=1,2,3)$, уз претпоставку да је за време кретања $\overline{x}^i=\text{const.}$ за сваку тачку система, проучавање кретања недеформабилног система је еквивалентно са проучавањем групе изометриских трансформација

$$x^i=f^i(\overline{x}^1,\overline{x}^2,\overline{x}^3;\ a^1,a^2,\ldots,a^6),\equiv f^i(\overline{x},a); \tag{1.1}$$

$$\overline{x}^i=\varphi^i(x^1,x^2,x^3;\ a^1,a^2,\ldots,a^6),\equiv\varphi^i(x,a), \tag{1.2}$$

где су $a^\alpha$ $(\alpha=1,2,\ldots,6)$ параметри трансформационе групе и играју улогу координата чврстог тела. Како су $\overline{x}^i$ при кретању непроменљиве величине, то ће $x^i$ зависити од времена преко параметара $a^\alpha$ и

$$a^\alpha=a^\alpha(t) \tag{1.3}$$

јесу коначне једначине кретања. Познато је да групе изометриских трансформација у тродимензионом еуклидском простору $E_3$ зависе од шест међусобно независних параметара, чији се број може смањити само ограничењем слободе покретног триједра (односно тела) везама.

Ако су $g_{ij}$ и $\overline{g}_{ij}$ координате метричког тензора у $E_3$ у односу на координантне системе $x^i$ и $\overline{x}^i$, респективно, потребан и довољан услов да трансформације (1.1) и (1.2) одре ују надеформабилно кретање јесте

$$2\overline{e}_{ij}=g_{kl}\{f(\overline{x},a)\}\frac{\partial x^k}{\partial\overline{x}^i}\frac{\partial x^l}{\partial\overline{x}^j}-\overline{g}_{ij}=0, \tag{1.4}$$

или

$$2e_{ij}=\overline{g}_{kl}\{\varphi(x,a)\}\frac{\partial\overline{x}^k}{\partial x^i}\frac{\partial\overline{x}^l}{\partial x^j}-g_{ij}=0. \tag{1.5}$$

Међутим, ако горњи услови нису задовољени, кретање одређено једначинама (1.1) и (1.2) није недеформабилно, а величине $e_{ij}$ и $\bar{e}_{ij}$ одређују Green-St. Venant-ову меру деформације при таквом кретању.

Циљ овог рада је проучавање кретања непрекидног материјалног система под дејством датих сила, а под претпоставком да је кретање одређено неком непрекидном трансформационом $r$-параметарском групом $G_r$ која, у општем случају, није група изометрије, тј. $e_{ij} \neq 0$. Природно, можемо допустити да групе изометрије буду подгрупе опште $G_r$. Општа расуђивања ћемо применити на случај када је посматрани материјални систем еластичан, при чему ћемо се ограничити на мале деформације како би веза између напона и деформације била линеарна и тиме у примерима избегнуте небитне тешкоће аналитичке природе.

## 2. ОПШТА ТЕОРИЈА

Свако кретање непрекидног материјалног система можемо посматрати као непрекидну трансформацију неког подручја $S_0$ (почетна конфигурација система) у неко друго које се мења са временом (конфигурација $S(t)$). Нека је $x^i$ у $E_3$ неки непроменљив систем координата. Свакој тачки $P_0$ у конфигурацији $S_0$ одговара тачка $P$ у $S$ и обрнуто, тако да између тачака у $S_0$ и $S$ постоји обострано једнозначна коресподенција са пунктуалном трансформацијом $x^i_{P_0} \to x^i_P$:

$$x^i_P = f^i(x_{P_0}), \tag{2.1}$$

и обрнуто

$$x^i_{P_0} = \varphi^i(x_P). \tag{2.2}$$

Овој пунктуалној трансформацији можемо асоциирати координатну увођењем превученог[1] (в. [1], стр. 102) координатног система $\bar{x}^i$ на тај начин што претпостављамо да је у односу на нови систем координата $\bar{x}^i$:

$$\bar{x}^i_P \overset{def}{=} x^i_{P_0} = \varphi^i(x_P). \tag{2.3}$$

Како овај израз вреди за све тачке подручја $S_0$ и $S$, то је $\bar{x}^i$ превучени координатни систем — превучен пунктуалном трансформацијом — а одговарајуће координатне трансформације су

$$\bar{x}^i = \varphi^i(x) \qquad \mathrm{Det}\left(\frac{\partial \varphi^i}{\partial x^j}\right) \neq 0 \tag{2.4}$$

и инверзне

$$x^i = f^i(\bar{x}). \tag{2.5}$$

[1] Бројеви у угластим саградама [ ] односе се на списак литературе приложен на крају.

Из дефиниције превученог координатног система произилази да за сваку тачку $P$ у $S$ и за сво време кретања јесте $\bar{x}^i = \text{const}$. Једначине (2.5) и (2.6) претстављају везу између *материјалних* координата $\bar{x}^i$ тачака у $S$ и *просторних* координата $x^i$ истих материјалних тачака.

Наша основна претпоставка је сада да *трансформације* (2.5) *образују неку непрекидну коначну r-параметарску групу* $G_r$. Тада је кретање у општем случају одређено једначинама

$$(2.6)\qquad \begin{aligned} x^i &= f^i(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3;\ a^1, a^2, \ldots, a^r) \equiv f^i(\bar{x}, a), \\ \bar{x}^i &= \varphi^i(x^1, x^2, x^3;\ a^1, a^2, \ldots, a^r) \equiv \varphi^i(x, a), \end{aligned}$$

при чему су

$$(2.7)\qquad a^\alpha = a^\alpha(t) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, r)$$

непрекидне функције времена и претстављају коначне једначине кретања; вредности параметара $a^\alpha$ у датом тренутку времена одређују у потпуности конфигурацију $S$. За неке вредности $a^\alpha_0$ трансформације (2.6) су идентичне,

$$(2.8)\qquad x^i = f^i(\bar{x}, a_0) \equiv \bar{x}^i; \quad \bar{x}^i = \varphi^i(x, a_0) \equiv x^i$$

и одговарају почетној конфигурацији $S_0$.

За материјалне системе чије је кретање у потпуности одређено неком групом $G_r$, где је $r$ коначан цео број, казаћемо да имају $r$ степени слободе.

Брзина тачке $P$ у $S$ је

$$v^i \overset{\text{def}}{=} \frac{dx^i}{dt} \equiv x'^i.$$

Међутим, просторне координате у (2.6) зависе од времена преко $a^\alpha$, па је[2]

$$(2.10)\qquad v^i = \frac{\partial x^i}{\partial a^\alpha} a'^\alpha \equiv F^i_\alpha(\bar{x}, a)\, a'^\alpha, \qquad \left(a'^\alpha \equiv \frac{da^\alpha}{dt}\right)$$

или, према првој Lie-овој основној теореми теорије непрекидних трансформационих група ([2], стр. 376) $\dfrac{\partial x^i}{\partial a^\alpha} = \xi^i_{(\lambda)}(x) A^{(\lambda)}_\alpha(a)$ и

[2] Користећи се у овом раду елементима тензорског рачуна доследно ћемо користити и конвенцију за сабирање по два пута поновљеним индексима. Уколико у тексту не буде другачије назначено латински индекси ће узимати вредности 1,2,3, а грчки 1,2, ..., $r$. Индекси који нису тензорског карактера биће стављени у заграду да бисмо избегли нејасности. На пример, $\xi^i_{(\lambda)}$ значи $i$-ту контраваријанту координату вектора $\vec{\xi}_{(\lambda)}$ а индекс $\lambda$ означава редни број вектора, којих је укупно $r$: $\vec{\xi}_{(1)}, \vec{\xi}_{(2)}, \ldots, \vec{\xi}_{(r)}$.

(2.11) $$v^i = \xi^i_{(\lambda)}(x)\, A^{(\lambda)}_{\alpha}(a)\, a'^{\alpha},$$

где $\xi^i_{(\lambda)}$ претстављају основе векторе померања групе, контраваријантне при координатним трансформацијама у $E_3$. Изрази (2.10) и (2.11) нам смогућују да напишемо израз за живу силу система $S$.

Нека је $g_{ij}$ основни метрички тензор и нека је $m_P$ маса везана за тачку (делић) $P$; имамо

(2.12) $$2T = \sum_P m_P\, g_{ij}\, \xi^i_{(\lambda)}\, \xi^j_{(\mu)}\, A^{(\lambda)}_{\alpha}\, A^{(\mu)}_{\beta}\, a'^{\alpha}\, a'^{\beta},$$

односно

(2.13) $$2T = \sum_P m_P\, g_{ij}\, F^i_{\alpha}(\bar{x}, a)\, F^j_{\beta}(\bar{x}, a)\, a'^{\alpha}\, a'^{\beta}.$$

Конфигурација $S(t)$ и кинетичка енергија посматраног материјалног система су потпуно одређени параметрима $a^{\alpha}$ групе $G_r$. Стога можемо посматрање материјалног система у $E_3$ да сведемо на посматрање кретања *једне* тачке у групном простору $\Pi_r$ у коме су координате $a^1, \ldots, a^r$ а риманска метрика је одређена кинематичким линиским елементом

(2.14) $$ds^2 = 2T\, dt^2 \equiv h_{\alpha\beta}\, da^{\alpha}\, da^{\beta},$$

где је

(2.15) $$h_{\alpha\beta} \overset{def}{=} \sum_P m_P\, g_{ij}\, \xi^i_{(\lambda)}\, \xi^j_{(\mu)}\, A^{(\lambda)}_{\alpha}\, A^{(\lambda)}_{\mu} = \sum_P m_P\, g_{ij}\, F^i_{\alpha}\, F^j_{\beta}.$$

$\Pi_r$ је конфигурациони простор система $S$. Свакој тачки у $\Pi_r$ одговара једна потпуно одређена конфигурација $S$ и обрнуто.

Величине

(2.16) $$J_{\lambda\mu} \overset{def}{=} \sum_P m_P\, g_{ij}\, \xi^i_{(\lambda)}\, \xi^j_{(\mu)} = J_{\mu\lambda}$$

зваћемо коефицијентима инерције посматраног система у односу на параметре $a^{\lambda}$ и $a^{\mu}$.

Термин „коефицијенти инерције" смемо да уведемо овде стога што претстављају непосредну генерализацију онога што у теорији недеформабилног кретања називамо коефицијентима инерције, премда се обично другачије нешто дефинишу.

У $E_3$, у односу Декартове правоугле координате, вектори $\xi^i_{(\lambda)}$ имају за групу изометриских трансформација (т. зв. групу кретања) координате

$$\vec{\xi}_{(1)} = \{1, 0, 0\};\ \vec{\xi}_{(2)} = \{0, 1, 0\};\ \vec{\xi}_{(3)} = \{0, 0, 1\};$$

$$\vec{\xi}_{(4)} = \{0, x^3, -x^2\};\ \vec{\xi}_{(5)} = \{-x^3, 0, x^1\};\ \vec{\xi}_{(6)} = \{x^2, -x^1, 0\}.$$

Изрази за коефицијенте инерције $J_{\lambda\mu}$, одређени са (2.16), пошто је $g_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$

(Kronecker-ови симболи), дају

$$J_{11}=J_{22}=J_{33}=\Sigma\, m_P \equiv M \text{ (укупна маса система)}$$

$$J_{44}=\sum_P m_P\,[(x_P^2)^2+(x_P^3)^2];\ J_{55}=\sum_P m_P\,[(x_P^3)^2+(x_P^1)^2];\ J_{66}=\sum_P m_P\,[(x_P^1)^2+(x_P^2)^2];$$

$$J_{12}=J_{13}=J_{14}=J_{23}=J_{25}=J_{36}=0;$$

$$J_{15}=-\sum_P m_P\,x_P^3;\ J_{16}=\sum_P m_P\,x_P^2;\ J_{24}=\sum_P m_P\,x_P^3;\ J_{26}=-\sum_P m_P\,x_P^1;$$

$$J_{34}=-\sum_P m_P\,x_P^2;\ J_{35}=\sum_P m_P\,x_P^1;$$

$$J_{45}=-\sum_P m_P\,x_P^1\,x_P^2;\ J_{56}=-\sum_P m_P\,x_P^2\,x_P^3;\ J_{64}=-\sum_P m_P\,x_P^3\,x_P^1.$$

Према томе, матрица $\{J_{\lambda\mu}\}$ је идентична са матрицом инерције чврстог тела ([4], стр. 5).

Сада за живу силу деформабилног материјалног система $S$ можемо писати

$$2T=h_{\alpha\beta}\,a'^{\alpha}\,a'^{\beta};\quad h_{\alpha\beta}=J_{\lambda\mu}\,A_{\alpha}^{(\lambda)}\,A_{\beta}^{(\mu)}, \tag{2.17}$$

при чему коефицијенти $J_{\lambda\mu}$ не зависе од параметара $a^{\alpha}$.

Нека на тачке $P$ система $S$ делују *силе* ${}_PX_i$. Према (2.11) је

$$\delta x_P^i=\left(\frac{\partial x^i}{dx^{\alpha}}\right)_P\delta a^{\alpha}=\xi_{(\lambda)}^{i}\,A_{\alpha}^{(\lambda)}\delta a^{\alpha}, \tag{2.18}$$

па за рад сила $X_i$ на померањима $\delta x^i$ можемо писати

$$\delta A=\sum_P {}_PX_i\,\delta x_P^i=\sum_P {}_PX_i\,\xi_{(\lambda)}^{i}\,A_{\alpha}^{(\lambda)}\,\delta a^{\alpha}.$$

Величине

$$X_{\alpha}\overset{def}{=}\sum_P {}_PX_i\,\xi_{(\lambda)}^{i}\,A_{\alpha}^{(\lambda)} \tag{2.19}$$

очигледно зависе само од координата репрезентативне тачке у групном простору $\Pi_r$ у коме претстављају координате коваријантног вектора и зваћемо их генералисаним координатама силе у $\Pi_r$.

Полазећи од d'Alembert-овог принципа, можемо сада извести *диференцијалне једначине кретања*. Нека је ${}_PX_i$ сила која делује на тачку $P$, нека су $x_P^i$ координате те тачке и нека је $2T_P$ њена жива сила; укупна жива сила читавог система $S$ износи $2T=2\sum_P T_P$, где се збир протеже на све тачке система. D'Alembert-ов принцип гласи

$$\sum_P [X_i(x_P) - m_P W_{Pi}]\, \delta x_P^i = 0, \tag{2.20}$$

где је $m_P$ маса тачке $P$, а $W_{Pi}$ њено убрзање, док је $\delta x_P^i$ виртуелно померање. Како је

$$m_P W_{Pi} = \frac{d}{dt}\frac{\partial T_P}{\partial x_P'^i} - \frac{\partial T_P}{\partial x_P^i},$$

и

$$2\, T_P = m_P g_{ij}(x_P)\, x_P'^i\, x_P'^j,$$

за (2.20) можемо писати

$$\sum_P \left[ X_i(x_P) - \left( \frac{d}{dt}\frac{\partial T_P}{\partial x_P'^i} - \frac{\partial T_P}{\partial x_P^i} \right) \right] \left( \frac{\partial x^i}{\partial a^\alpha} \right)_P \delta a^\alpha = 0. \tag{2.21}$$

Већ смо у (2.19) ставили да је

$$\sum_P {}_P X_i\, \delta x^i = X_\alpha\, \delta a^\alpha.$$

За виртуелни рад инерционих сила имамо

$$\sum_P \left( \frac{d}{dt}\frac{\partial T_P}{\partial x_P'^i} - \frac{\partial T_P}{\partial x_P^i} \right) \delta x_P^i = \sum_P \left[ \frac{d}{dt}(g_{ij}\, x'^j) - g_{kl}\, \Gamma_{ij}^k \frac{dx^j}{dt}\frac{dx^l}{dt} \right]_P \left( \frac{\partial x^i}{\partial a^\alpha} \right)_P \delta a^\alpha, \tag{2.22}$$

где је $\Gamma_{ij}^k$ Christoffel-ов симбол друге врсте формиран с обзиром на $g_{ij}$. Развијањем десне стране израза (2.22), узимајући у обзир (2.16) и (2.17), добићемо да је

$$\sum_P \left( \frac{d}{dt}\frac{\partial T_P}{\partial x_P'^i} - \frac{\partial T_P}{\partial x_P^i} \right) \delta x_P^i = \left( \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial a'^\alpha} - \frac{\partial T}{\partial a^\alpha} \right) \delta a^\alpha.$$

Заменом овога у (2.20) коначно за d'Alembert-ов принцип следи израз

$$\left[ X_\alpha - \left( \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial a'^\alpha} \right) \right] \delta a^\alpha = 0.$$

Како су варијације $\delta a^\alpha$ потпуно произвољне и слободне, добивамо диференцијалне једначине кретања у облику

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial a'^\alpha} - \frac{\partial T}{\partial a^\alpha} = X_\alpha \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, r). \tag{2.23}$$

Интеграли $a^\alpha = a^\alpha(t, a_0, a_0')$, где је $a_0'^\alpha$ почетна брзина репрезентативне тачке у конфигурационом групном простору, у потпуности одређују кретање непрекидног материјалног система $S$, ако је кретање дато групом $G_r$.

## 3. ГРУПЕ ИНФИНИТЕЗИМАЛНИХ ТРАНСФОРМАЦИЈА

У многим механичким процесима су отступања конфигурације $S$ од почетне $S_0$ довољно мала да трансформације (2.6) смемо сматрати линеарним. Развијањем трансформационих једначина у ред у околини $a_0^\alpha$ добивамо

$$x^i = \bar{x}^i + (a^\alpha - a_0^\alpha)\left(\frac{\partial x^i}{\partial a^\alpha}\right)_0 + \frac{1}{2}(a^\alpha - a_0^\alpha)(a^\beta - a_0^\beta)\left(\frac{\partial^2 x^i}{\partial a^\alpha \partial a^\beta}\right)_0 + \cdots \tag{3.1}$$

Сматрајмо сада разлике $a^\alpha - a_0^\alpha$ довољно малим тако да све чланове реда у којима се те разлике јављају на степену вишем од првог смемо занемарити; тада је

$$x^i = \bar{x}^i + (a^\alpha - a_0^\alpha)\,\xi^i_{(\lambda)}(\bar{x})\,A^{(\lambda)}_\alpha(a_0), \tag{3.2}$$

јер за $a^\alpha = a_0^\alpha$ имамо $x^i \equiv \bar{x}^i$ и

$$\left(\frac{\partial x^i}{\partial a^\alpha}\right)_0 = \xi^i_{(\lambda)}(\bar{x})\,A^{(\lambda)}_\alpha(a_0).$$

Како је $A^{(\lambda)}_\alpha(a_0) = \text{const.}$, можемо ставити да су

$$c^\lambda \equiv (a^\alpha - a_0^\alpha)\,A^{(\lambda)}_\alpha(a_0)$$

сада нови параметри трансформационе групе и

$$x^i = \bar{x}^i + c^\lambda\,\xi^i_{(\lambda)}(\bar{x}). \tag{3.3}$$

Ове трансформације су, очигледно, идентичне за $c_0^\lambda = 0$.

Вектори $\xi^i_{(\lambda)}$ одређују $r$ једнопараметарских трансформација из којих се састоји наша посматрана $G_r$. У односу на сваку од ових трансформација можемо одредити одговарајућу инфинитезималну еформ[illegible] $_{ij}$ према (1.4), што се своди на

$$\bar{e}_{(\lambda)ij} = \frac{1}{2}(\nabla_i \xi_{(\lambda)j} + \nabla_j \xi_{(\lambda)i}), \tag{3.4}$$

где је $\nabla_i$ симбол коваријантног диференцирања по координати $x^i$ а у односу на метрику $g_{ij}$. Укупна деформација система ће сада бити дата са

$$\bar{e}_{ij} = c^\lambda\,\bar{e}_{(\lambda)ij}, \tag{3.5}$$

а $\bar{e}_{(\lambda)ij}$ су компонеталне деформације у одговарајућим правцима $\xi^i_{(\lambda)}$.

Из (3.3) за брзину система $S$ имамо

$$v^i = \frac{dx^i}{dt} = \xi^i_{(\lambda)}\,c'^\lambda$$

па ће, према (2.13), жива сила бити

$$2T = \bar{J}_{\lambda\mu} c'^{\lambda} c'^{\mu},$$

при чему су

$$\bar{J}_{\lambda\mu} = \sum_P m_P \bar{g}_{ij} \xi^i_{(\lambda)} \xi^j_{(\mu)} \tag{3.6}$$

коефицијенти инерције за померања у правцима $\xi^i_{(\lambda)}(\bar{x})$ и $\xi^i_{(\mu)}(\bar{x})$, тј. у односу на координате $c^\lambda$ и $c^\mu$ система у групном конфигурационом простору.

Како су виртуелна померања сада

$$\delta x^i = \xi^i_{(\lambda)}(\bar{x})\, \delta c^\lambda, \tag{3.7}$$

за елементарни рад можемо писати

$$\delta A = \sum_P {}_P X_i\, \xi^i_{(\lambda)}(\bar{x}_P)\, \delta c^\lambda, \tag{3.8}$$

па су генералисане силе

$$X_\alpha = \sum_P {}_P X_i\, \xi^i_{(\alpha)}(\bar{x}_P). \tag{3.9}$$

У случају инфинитезималних трансформација диференцијалне једначине кретања ће имати једноставнији облик

$$\bar{J}_{\lambda\mu} c''^{\lambda} = X_\mu. \qquad \left(c''^{\lambda} \equiv \frac{d^2 c^\lambda}{dt^2}\right) \tag{3.10}$$

## 4. ПРИМЕНА НА ЕЛАСТИЧНЕ СИСТЕМЕ

Диференцијалне једначине (2.23) могу обухватити најопштији случај сила. Међутим, овде ћемо посматрати случај када је посматрани метеријални систем $S_0$ еластичан: при кретању $S_0 \to S$ јављају се унутрашње силе — напони — који са своје стране утичу на кретања. Претпоставићемо да је систем $S_0$ хомоген и изотропан и да су померања довољно мала, тако да за везу између напона и деформације можемо узети Hooke-ов закон

$$\bar{t}_{ij} = C_{ij..}{}^{kl}\, \bar{e}_{kl} = \lambda \bar{\mathbf{I}}_1 \delta_{ij} + 2\mu\, \bar{e}_{ij} \tag{4.1}$$

где су $\lambda$ и $\mu$ Lamé-ове константе еластичности, а $\bar{\mathbf{I}}_1$ прва инваријанта тензора деформације $\bar{e}_{ij}$.

Ако са $dV_0$ обележимо запремински елемент посматраног еластичног тела у конфигурацији $S_0$, за рад еластичних сила на виртуелним померањима имамо познати израз

$$\delta A' = \int_{V_0} \bar{g}^{ik} \bar{g}^{jl} \bar{t}_{ij} \delta \bar{e}_{kl} \, dV_0 . \tag{4.2}$$

Како је према (3.5)

$$\delta \bar{e}_{kl} = \bar{e}_{(\lambda)kl} \delta c^{\lambda}, \tag{4.3}$$

јер су у (3.5) само параметри $c^{\lambda}$ променљиви, добивамо

$$\delta A' = \int_{V_0} \bar{g}^{ik} \bar{g}^{jl} \bar{t}_{ij} \bar{e}_{(\lambda)kl} dV_0 \delta c^{\lambda} . \tag{4.4}$$

За генералисане еластичне силе можемо сада писати

$$X'_{\lambda} \overset{def}{=} \int_{V_0} \bar{g}^{ik} \bar{g}^{jl} c_{ij}{}^{..rq} \bar{e}_{rq} \bar{e}_{(\lambda)kl} \, dV_0 . \tag{4.5}$$

Опште диференцијалне једначине кретања сада ће гласати

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial a'^{\alpha}} - \frac{\partial T}{\partial a^{\alpha}} = X_{\alpha} + X'_{\alpha} , \tag{4.6}$$

где су $X_{\alpha}$ генералисане запреминске силе, а $X'_{\alpha}$ генералисане еластичне силе.

Ако се посматрани материјални систем креће под једновременим дејством и запреминских и еластичних сила није нужно да трансформације које карактеришу то кретање буду у потпуности инфинитезималне. Ово у толико пре што спољне запреминске силе, према томе каквим је везама ограничена слобода кретања посматраног тела, могу довести до једновременог — у односу на известан број параметара — деформабилног и — у односу на остале параметре — недеформабилног кретања. За параметре у односу на које је кретање деформабилно претпостављаћемо да се мало разликују од вредности које имају у почетном положају, док остали могу имати произвољне вредности.

За примену на конкретне проблеме потребно је одредити — или на ма који начин унапред познавати — трансформациону групу $G_r$ која одређује карактер посматраног кретања. Док у случају недеформабилног кретања знамо да је то 6-параметарска група изометриских трансформација еуклидског простора, чији нам је аналитички облик добро познат, за деформабилно кретање *a priori* не можемо рећи ништа.

За известан број проблема, међутим, потребне податке може да да еластостатика. Претпоставимо ли да се посматрани еластични систем (ограничавамо се на хомогене изотропне системе) креће под дејством запреминских сила $X_i$ и да су дати гранични услови, померања $c^{\lambda} \xi^{i}_{(\lambda)}$ морају у положају равнотеже да задовољавају систем Lamé-ових једначина

$$c^{\alpha} \lambda \Delta \xi_{(\alpha)i} + (\lambda + \mu) c^{\alpha} \frac{\partial \mathbf{I}_{(\alpha)1}}{\partial x^{i}} + X_i = 0,$$

где су $\xi_{(\alpha)i}$ коваријантне координате вектора компоненталних померања, а $\mathbf{I}_{(\alpha)\mathrm{I}}$ је прва инваријанта тензора $\bar{e}_{(\alpha)ij}$ компоненталне деформације.

Нека је решење статичког проблема облика

$$u_i^* = c_*^\alpha \Psi_{(\alpha)i}(x),$$

где су $\Psi_{(\alpha)i}$ међусобно независне функције положаја. Ако се решење може изразити помоћу коначног збира тога облика, онда је кретање истог тела у истом пољу сила и са истим граничним условима карактерисано групом инфинитезималних трансформација

$$x^i = \bar{x}^i + u^i \equiv \bar{x}^i + c^\lambda \xi^i_{(\lambda)}\,; \qquad \xi^i_{(\lambda)} \equiv \bar{g}^{ij} \Psi_{(\lambda)j}$$

при чему су $c_*^\lambda$ вредности параметара групе у равнотежном положају.

## 5. ПРИМЕРИ

Напред изложена општа разматрања применићемо на два елементарна примера. Један пример ће садржати једновремено деформабилно кретање и недеформабилно, док ће се други односити искључиво на деформабилно.

I. *Раван хомогени кружни еластични диск обрће се око осе кроз средиште, управне на диск.*

Нека су $(r, \varphi)$ у равни диска непокретне поларне координате (просторне координате) тачака диска. Сматрајући центрифугалну силу за запреминску, Lamé-ове једначине дају за координате вектора померања

$$u_r \equiv u = ar^3 + br\,; \quad u_\varphi = 0.$$

Положај тачака диска (тј. конфигурација $S$ за време кретања) одређен је помоћу три параметра — $a$ и $b$ који одређују дилатацију полупречника и $\alpha$ — угао обртања диска. Ако као материјалне координате тачака диска уведемо поларне координате $(\bar{r}, \bar{\varphi})$ које се неће мењати за време кретања, имамо

$$r = \bar{r} + u(\bar{r})\,; \quad \varphi = \bar{\varphi},$$

па је, ако је $0xy$ Descartes-ов систем координата у равни диска, са почетком у непомичном средишту 0 диска,

$$x = r\cos(\varphi + \alpha)\,; \quad y = r\sin(\varphi + \alpha).$$

Жива сила диска је ($\rho$ је густина диска)

$$2T = \rho \int_{V_0} (x'^2 + y'^2)\, dV_0 =$$

$$\frac{1}{4}MR^6 a'^2+\frac{1}{2}MR^2[b'^2+(1+2b)\alpha'^2]+\frac{2}{3}MR^4(a'b'+a\alpha'^2).$$

За поларне координате је $\bar{g}_{rr}=1$, $\bar{g}_{\varphi\varphi}=\bar{r}^2$, тако да за координате тензора деформације добивамо према (3.4) и (3.5):

$$\bar{e}_{rr}=3a\bar{r}^2+b;\quad \bar{e}_{r\varphi}=0;\quad \bar{e}_{\varphi\varphi}=\bar{r}^2(a\bar{r}^2+b).$$

Из (4.1) следи да су коваријантне координате напона

$$\bar{t}_{rr}=2a\bar{r}^2(2\lambda+3\mu)+2b(\lambda+\mu);\ \bar{t}_{r\varphi}=0;\ \bar{t}_{\varphi\varphi}=2\bar{r}^2(\lambda+\mu)(2a\bar{r}^2+b),$$

а контраваријантне координате $\bar{t}^{ij}=\bar{g}^{ik}\bar{g}^{jl}\,\bar{t}_{kl}$ ће бити

$$\bar{t}^{rr}\equiv\bar{t}_{rr};\quad \bar{t}^{r\varphi}=0;\quad \bar{t}^{\varphi\varphi}=\frac{2}{\bar{r}^2}(\lambda+\mu)(2a\bar{r}^2+b).$$

Према (4.3) имамо за виртуалне деформације

$$\delta\bar{e}_{rr}=3\bar{r}^2\,\delta a+\delta b;\quad \delta\bar{e}_{r\varphi}=0;\quad \delta\bar{e}_{\varphi\varphi}=\bar{r}^2(\bar{r}^2\,\delta a+\delta b),$$

па из (4.5) добивамо изразе за генералисане еластичне силе

$$X'_a=-2\pi R^4\left[\frac{1}{3}R^2 a(8\lambda+11\mu)+2b(\lambda+\mu)\right],$$

$$X'_b=-2\pi R^2\left[\frac{1}{2}R^2 a(4\lambda+5\mu)+2b(\lambda+\mu)\right],$$

$$X'_\alpha\equiv 0.$$

Пошто се диск обрће по инерцији, координате спољних сила су

$$X_a=X_b=X_\alpha\equiv 0.$$

Диференцијалне једначине кретања (4.6) сада ће гласити

(5.1) $$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{4}MR^6 a'+\frac{1}{3}MR^4 b'\right)-\frac{1}{3}MR^4\alpha'^2=X'_a,$$

(5.2) $$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{3}MR^4 a'+\frac{1}{2}MR^2 b'\right)-\frac{1}{2}MR^2\alpha'^2=X'_b.$$

Ове се једначине односе на параметре $a$ и $b$ у односу на које је кретање деформабилно. Трећи параметар $\alpha$ претставља цикличку координату са одговарајућим интегралом

(5.3) $$\alpha'\left[\frac{1}{2}MR^2(1+2b)+\frac{2}{3}MR^4 a\right]=\text{const.}=\frac{1}{2}MR^2\alpha'_0.$$

Из диференцијалних једначина кретања другог реда *добићемо услове равнотеже ако претпоставимо да нема убрзања*, тј. $a''=b''=0$. Ако обележимо угаону брзину обртања диска са $\alpha'=\omega$, из (5.1) и (5.2) добићемо вредности параметара у равнотежној конфигурацији:

$$a_* = -\frac{1}{2}\frac{\rho\omega^2}{4\lambda+7\mu}\,; \quad b_* = \frac{1}{2}R^2\rho\omega^2\frac{2\lambda+3\mu}{(\lambda+\mu)(4\lambda+7\mu)}\,.$$

Ако уведемо ознаку

$$\frac{2\lambda+3\mu}{4\lambda+7\mu}\equiv\frac{3+\xi}{8},$$

коваријантне координате тензора напона у равнотежној конфигурацији ће бити

$$\bar{t}_{rr}=\frac{3+\xi}{8}\rho\omega^2(R^2-\bar{r}^2)\,, \qquad \bar{t}_{\varphi\varphi}=\frac{3+\xi}{8}\rho\omega^2R^2\bar{r}^2-\frac{1+3\xi}{8}\rho\omega^2\bar{r}^4,$$

док су физичке координате

$$\bar{t}_r=\bar{t}_{rr}; \; \bar{t}_\varphi=\frac{3+\xi}{8}\rho\omega^2R^2-\frac{1+3\xi}{8}\rho\omega^2\bar{r}^2.$$

Ови изрази су идентични са одговарајућим изразима које даје еластостатика (в. на пример [5], стр. 98).

Једначина (5.3) даје везу између параметара $a$ и $b$, почетне угаоне брзине $\alpha_0'$ и угаоне брзине $\alpha'$:

$$\alpha'=\frac{\alpha_0'}{1+2b+\frac{4}{3}R^2a},$$

одакле следи да угаона брзина не може бити константна ако се плоча деформише, сем уколико нису вредности параметара $a$ и $b$ довољно мале да смемо сматрати бројитељ да је једнак јединици. Бројитељ је једнак јединици кад између параметара $a$ и $b$ постоји веза

$$6b+4R^2a=0,$$

која у статичком случају није задовољена идентички, па $a$ и $b$ приближно морају бити једнаки нули.

II. *Тежак хомоген еластичан кружни ваљак са вертикалном осом слободно са деформише услед сопствене тежине.*

Нека је $M$ маса ваљка, $\gamma$ специфична тежина материјала, $\rho=\gamma/g$ густина, $R$ полупречник основе и $L$ дужина ваљка. $z$-оса се поклапа са осом ваљка и оријентисана је вертикално навише.

Под претпоставком да је тачка $A(0,0,L)$ ваљка непомична у простору и да ваљак не може да се обрће око те тачке, Lamé-ове једначине дају два вектора померања,

$$\vec{\xi}_{(a)}=\left\{0,0,\frac{1}{2}(\bar{z}^2-L^2)\right\};\ \vec{\xi}_{(b)}=\left\{-\bar{z}\bar{x},-\bar{y}\bar{z},\frac{1}{2}(\bar{x}^2+\bar{y}^2)\right\},$$

па је кретање одређено 2-параметарском групом инфинитезималних трансформатија

$$G_2:\quad x^i=\bar{x}^i+a\xi^i_{(a)}+b\xi^i_{(b)},$$

где је

$$x\equiv x^1,\ y\equiv x^2;\ z\equiv x^3.$$

Жива сила ваљка је

$$2T=\rho\int_{V_0}(x'^2+y'^2+z'^2)\,dV_0=$$

$$=\frac{2}{15}ML^2a'^2-\frac{2}{3}ML^2R^2a'b'+\frac{1}{3}MR^2(2L^2+R^2)\,b'^2.$$

Пошто је систем координата $0\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ ортогонални Descartes-ов, непосредним диференцирањем координата вектора померања добивамо за тензор деформације према (3.5)

$$\{\bar{e}_{ij}\}=\{a\bar{e}_{(a)ij}+b\bar{e}_{(b)ij}\}=\begin{Bmatrix}-b\bar{z} & 0 & 0\\ 0 & -b\bar{z} & 0\\ 0 & 0 & a\bar{z}\end{Bmatrix}.$$

За напоне имамо из Hooke-овог закона

$$\bar{t}_{11}=\bar{t}_{22}=\frac{E(a\sigma-b)}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}\bar{z};\ \bar{t}_{33}=\frac{E[a-\sigma(a+2b)]}{(1+\sigma)(1-2\sigma)};\ \bar{t}_{ij}=0,\ i\neq j$$

где је $E$ Young-ов модуо, а $\sigma$ Poisson-ова константа еластичности.

Запреминска сила $\vec{F}=-\gamma\vec{k}=-\rho g\vec{k}$ је константна и делује само у правцу осе ваљка; како је

$$\delta z=\frac{1}{2}(\bar{x}^2+\bar{y}^2)\,\delta b+\frac{1}{2}(\bar{z}^2-L^2)\,\delta a,$$

за рад запреминске силе на померању $\delta z$ добивамо

$$\delta A=\int_{V_0}-\gamma\,dV_0\,\delta z=-\gamma\left(\frac{1}{4}VR^2\delta b+\frac{1}{3}VL^2\delta a\right).$$

Коефицијенти уз $\delta a$ и $\delta b$ јесу генералисане координате запреминске силе:

$$X_a = -\frac{1}{3}\gamma VL^2, \qquad X_b = -\frac{1}{4}\gamma VR^2.$$

Из израза за рад еластичних сила

$$\delta A' = \int_{V_0} \sum_{i,j=1}^{3} \bar{t}_{ij}\,\delta\bar{e}_{ij}\,dV_0$$

добивамо непосредно и генералисане координате еластичних сила у у односу на параметре $a$ и $b$:

$$X'_a = -\frac{VL^3}{3}\frac{E[(1-\sigma)a-2\sigma b]}{(1+\sigma)(1-2\sigma)};$$

$$X'_b = \frac{2V}{3}L^2\frac{E(a\sigma-b)}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}.$$

Дифернцијалне јаднaчине кретања су једначине облика (3.10):

$$\frac{2}{15}ML^4a'' - \frac{1}{3}ML^2R^2b'' = X_a + X'_a,$$

$$-\frac{1}{3}ML^2R^2a'' + \frac{1}{3}MR^2(2L^2+R^2)b'' = X_b + X'_b.$$

Према томе, ваљак који се деформише услед сопствене тежине кретаће се као материјални систем са два степена слободе.

Равнотежна конфигурација ваљка је одређена са $a''=0$, $b''=0$, па се добивају за равнотежни положај следеће вредности параметара

$$a_* = -\frac{\gamma}{E}\left(1-\frac{3}{4}\frac{\sigma R^2}{L^2}\right);$$

$$b_* = -\frac{\gamma}{E}\left[\sigma-\frac{3}{8}\frac{R^2}{L^2}(1-\sigma)\right],$$

тако да су померања

$$\xi_x \equiv u = -b_*\bar{z}\bar{x}; \quad \xi_y \equiv v = -b_*\bar{y}\bar{z}; \quad \xi_z \equiv w = \frac{1}{2}b_*(\bar{x}^2+\bar{y}^2)+\frac{1}{2}a_*(\bar{z}^2-L^2).$$

Ови изрази задовољавају идентички услове равнотеже које даје еластостатика, али се разликују од израза који се обично налазе у уџбеницима теорије еластичности (в. на пример [5], стр. 36, или [6], стр. 106). Овде добивени изрази ће се свести на оне које налазимо у уџбеницима ако је полупречник основе цилиндра $R$ довољно мали у поређењу са дужином $L$.

*(Саопштено 10-II-1960)*

## ЛИТЕРАТУРА

[1] SCHOUTEN, J. A. — Ricci-Calculus. Springer-Verlag Berlin-Göttingen-Heidelberg (sec. ed. 1954).

[2] LIE, S., — Vorlesungen über continuierliche Gruppen. Teubner, Leipzig (1893).

[3] EISENHART, L. P. — Continuous groups of transformations. Princeton Univ. Press (1933).

[4] БИЛИМОВИЋ, А. — Динамика чврстог тела. Српска Академија наука, Београд (1955).

[5] ХЛИТЧИЈЕВ, J. — Поглавља из теорије еластичности. Научна књига, Београд (1950).

[6] SOKOLNIKOFF, I. S. — Mathematical theory of elasticity. Mc Graw-Hill, New York (1946).

# ON THE MOTION OF CONTINUOUS DEFORMABLE MATERIAL SYSTEMS WITH A FINITE NUMBER OF PARAMETERS

by

RASTKO STOJANOVITCH (Belgrade)

In dynamics of continuous deformable material systems it is in some cases possible to describe the motion by a finite continuous $r$-parametric group $G_r$ of transformations. In such cases the parameters of the group can be considered as coordinates of the system, and the motion of the system can be interpreted as motion with the finite number of degrees of freedom, equal to the number of essential parameters ($r$) of the group $G_r$. The $r$-dimensional group space $\Pi_r$ with parameters of the group as cordinates is the space of configurations of the system considered; $\Pi_r$ is a Riemannian space with the kinematical line-element $ds^2 = 2T\,dt^2$ as a fundamental form, $T$ being the kinetic energy of the system.

The differential equations of motion can be written as Lagrangean equations (2.23), reducing to the equations with constant coefficients (3.10) when the motion is described by a group of infinitesimal transformations; the coefficients represent the generalized coefficients of inertia of the system.

As an ilustration, the differential equations of motion are derived for rotation of a plain circular disk and for vibrations of a circular cylinder strached by its own weight. The disk rotates in the horizontal plane about its fixed centre (the influence of gravity is neglected) and the motion has three degrees of freedom: two parameters are needed for determination of the dilatation of the radius and the third for description of the rigid rotation. The cylinder is supported in a suitable manner at its upper base (with axis vertical) and oscillates with two degrees of freedom about the configuration of elastic equilibrium.

*Зборник радова Српске академије наука и уметности LXIX*
*Математички институт књ. 8, 1960*
*Recueil des travaux de l'Académie Serbe des Sciences et des Arts LXIX*
*Institut Mathématique № 8, 1960*

Д. М. СИМЕУНОВИЋ

# О КРИТЕРИЈУМИМА ЗА РЕШАВАЊЕ RICCATI-ЕВЕ ЈЕДНАЧИНЕ ПОМОЋУ КВАДРАТУРА

Прво, D. BERNOULLI, а затим EULER, показали су да се специјална Riccati-ева једначина

$$\frac{dy}{dx}+y^2=\lambda x^\alpha \tag{1}$$

може решити квадратурама ако је у њој

$$\alpha=-\frac{4k}{2k\pm 1}\quad (k=0,1,2,\ldots)\quad \text{или}\quad \alpha=-2\quad (k\to+\infty). \tag{2}$$

LIOUVILLE је доказао да се за вредности параметра $\alpha$ различите од (2) решење једначине (1) не може добити помоћу квадратура нити да га је могуће изразити у коначном облику помоћу елементарних функција.

Што се тиче опште Riccati-еве једначине

$$\frac{dy}{dx}+Py^2+Qy+R=0,\quad (P\neq 0,\quad R\neq 0) \tag{3}$$

где су $P, Q, R$ произвољне функције од $x$, познато је да се она може свести на линеарну једначину, па према томе и решити помоћу квадратура, ако јој се зна један, ма који, партикуларни интеграл.

Међутим, у литератури се могу наћи и многи специјални критеријуми када је могуће општу Riccati-еву једначину решити квадратурама. Ти критеријуми своде се на одређене релације које морају постојати између коефицијената $P, Q, R$ Riccati-еве једначине (3).

Наводимо неке од тих критеријума:

$$R=CPe^{-2\int Q dx}\left(\int Pe^{-\int Q dx}\,dx\right)^{-\frac{4k}{2k\pm1}},\quad (C \text{ константа}); \tag{4}$$

специјално, за $k=0$, следи одавде

$$R=CPe^{-2\int Q dx}, \tag{5}$$

$$4R=\frac{Q^2}{P}+2\left(\frac{Q}{P}\right)'+CP; \tag{6}$$

$$(7)\quad \begin{aligned} R = S^{-\frac{p}{2p+1}}\left(\frac{QS^{\frac{p}{2p+1}}+pPS^{-\frac{p+1}{2p+1}}}{2P}\right)' + PS^{-\frac{2p}{2p+1}}\left(\frac{QS^{\frac{p}{2p+1}}+pPS^{-\frac{p+1}{2p+1}}}{2P}\right)^2 + \\ + CPS^{-\frac{2p}{2p+1}}, \qquad [S = -(2p+1)\int P dx,\ p \text{ константа}]; \end{aligned}$$

$$(8)\quad \begin{cases} P = \dfrac{1}{a}e^{-\int \frac{b}{a}dx}, \quad Q = \dfrac{1}{a}\left(b - 2e^{\int \frac{b}{a}dx} \cdot \displaystyle\int \frac{c}{a}e^{\int \frac{b}{a}dx}dx\right), \\ R = \dfrac{1}{a}\left[c + C - \left(\displaystyle\int \frac{c}{a}e^{\int \frac{b}{a}dx}dx\right)^2\right]. \end{cases}$$

($a, b, c$ произвољне функције од $x$, а $C$ константа);

(9) $P+Q+R=0$ и општије $a^2P+abQ+b^2R=0$, ($a$ и $b$ константе);

(10) $\Psi'-P\Psi^2-\Phi\Psi+R=0$, где је $\Phi=-(Q+2P\Psi)$,

$\left(\text{специјално са } \Phi=0,\ \Phi=-Q+2\sqrt{PR},\ \Phi=-\dfrac{P'}{P}\right)$;

(11) $P(a'+Pa^2+Qa+R)-\left(Q+2Pa-\dfrac{P'}{P}\right)'=0$, ($a$ функција од $x$).

Критеријум (4) потиче од Пејовић-а [1], (7) и (8) од Карапанџић-а [2], (6) од Бугаев-а [2], (5) од Abel-а [3], (9) од Kurenskog [3 стр. 23—24], (10) од Митриновић-а [3 стр. 23—24], док критеријум (11) потиче од Abdelkader-а [4].

У овом раду дајемо много општији критеријум, који наведене садржи као специјалне случајеве. Ипак, основни циљ нам је да укажемо да је сваки такав критеријум еквивалентан захтеву да општа Riccati-ева једначина има партикуларни интеграл одређеног типа; у суштини, дакле, једино познавање партикуларног интеграла омогућује интеграцију квадратурама.

## II

Показаћемо сада да се сви горе наведени критеријуми могу добити као специјални случајеви једног општијег критеријума, из којег се може извести специјализацијом још бесконачно много других разних специјалних критеријума. При томе се нећемо обазирати на услове о егзистенцији интеграла, јер је извођење чисто формалног карактера.

Узећемо произвољну функцију $u(x)$ и извршити замену променљивих

$$(\alpha)\qquad \xi = \int P e^{-\int (Q+2Pu)dx}\,dx, \quad y = u + \eta e^{-\int (Q+2Pu)dx}.$$

На тај начин ће се општа Riccati-ева једначина свести на канонички облик

$$\frac{d\eta}{d\xi}+\eta^2=F(\xi), \tag{β}$$

где је

$$F(\xi)=-\frac{1}{P}\left(\frac{du}{dx}+Pu^2+Qu+R\right)e^{2\int(Q+2Pu)dx}. \tag{γ}$$

Функцији $F(\xi)$ у (β) може се дати облик какав се хоће, одакле с обзиром на (α) и (γ) имамо

$$\frac{du}{dx}+Pu^2+Qu+R=-Pe^{-2\int(Q+2Pu)dx}\cdot F\left\{\int Pe^{-\int(Q+2Pu)dx}dx\right\}. \tag{γ'}$$

Видимо да се из (γ') може наћи произвољно много веза за $P, Q, R$ при којима се функцији $F(\xi)$ у (β) може дати унапред одређен облик. За то је довољно да се произвољној функцији $u(x)$ дају разне одређене вредности.

Ми ћемо се овде задржати на једном специјалном случају функције $F(\xi)$ у једначини (β). Према напред реченом, једначина (β) моћи ће се решити квадратурама ако је у њој

$$F(\xi)=\lambda\xi^{-\frac{4k}{2k\pm1}},$$

па ће се тада и дата општа Riccati-ева једначина моћи решити квадратурама.

Можемо, дакле, рећи: *ако постоји функција* $u(x)$, *константа* $\lambda$ *и цео позитиван број* $k$, *тако да је*

$$\frac{du}{dx}+Pu^2+Qu+R=-\lambda Pe^{-2\int(Q+2Pu)dx}\cdot\left[\int Pe^{-\int(Q+2Pu)dx}dx\right]^{-\frac{4k}{2k\pm1}}, \tag{12}$$

*општа Riccati-ева једначчина може се решити квадратурама; при томе долази у обзир и* $k=0$ *и* $k\to+\infty$.

## III

Узимајући специјалне $u$, $k$ и $\lambda$, добићемо из (12) разне специјалне критеријуме. Тако за $u=0$ добијамо критеријум (4)

$$R=-\lambda Pe^{-2\int Qdx}\cdot\left(\int Pe^{-\int Qdx}dx\right)^{-\frac{4k}{2k\pm1}}. \tag{A}$$

За $k=0$ излази одавде критеријум (5) док за свако друго $k=1,2,\ldots$ и $k\to+\infty$ добија се други.

Десна страна у (12) упростиће се ако у њој узмемо $u=-Q/2P$. Тада добијамо, извршивши све рачуне,

$$4R=\frac{Q^2}{P}+2\left(\frac{Q}{P}\right)'-4\lambda P\left(\int Pdx\right)^{-\frac{4k}{2k\pm1}}. \tag{B}$$

За $k=0$ имамо одавде критеријум (6), но за свако друго $k=1,2,\ldots$ и $k\to+\infty$ добиће се други.

Специјално за $k=0$, релација (12) гласи

$$\text{(C)}\qquad \frac{du}{dx}+Pu^2+Qu+R=-\lambda Pe^{-2\int(Q+2Pu)dx}.$$

Критеријум (7) ће се добити кад се узме $u=-\dfrac{Q}{2P}-\dfrac{p}{2S}$, а критеријум (8) кад се узме $u=-e^{-\int\frac{b}{a}dx}\cdot\int\dfrac{c}{a}e^{\int\frac{b}{a}dx}dx$. Уосталом, може се у $(C)$ узети за $u$ шта се хоће; свако ново $u$ даће и нови критеријум.

Узмемо ли у (12) $\lambda=0$, добићемо

$$\text{(D)}\qquad \frac{du}{dx}+Pu^2+Qu+R=0,$$

што значи да за $u$ треба узети ма какав партикуларни интеграл дате Riccati-еве једначине, што је позната ствар. У критеријуму (9) узето је да она има константу $y=a/b$ за партикуларни интеграл, специјално $y=1$. У (10) је узето да је партикуларни интеграл $y=-(Q+\Phi)/2P$, док је у (11) узет партикуларни интеграл $y=-a(x)-Q/P+P'/P^2$.

## IV

На основи (D), јасно се види да критеријуми (9), (10) и (11) оперишу са унапред датим партикуларним интегралима опште Riccati-еве једначине: унапред дата функција $y=\varphi(x,P,Q,R)$ прогласи се партикуларним интегралом опште Riccati-еве једначине, па се онда добију услови за $P,Q,R$ под којима ће то бити (критеријум). Пошто је једном један партикуларни интеграл познат, она се може свести на линеарну, тј. решити квадратурама.

Показаћемо да је у основи ово принцип и у критеријумима (5) до (8). Тада се општа Riccati-ева једначина своди на канонички облик

$$\frac{d\eta}{d\xi}+\eta^2=\lambda,$$

за коју је лако уочити партикуларни интеграл. На тај начин критеријуми (5) до (8) не значе ништа друго него да су општој Riccati-евој једначини наметнути редом ови партикуларни интеграли:

$$\sqrt{\lambda}e^{-\int Qdx};\quad -Q/2P+\sqrt{\lambda};\quad -Q/2P+p/2S+\sqrt{\lambda}S^{-\frac{p}{2p+1}};$$
$$e^{-\int\frac{b}{a}dx}\left(\sqrt{\lambda}-\int\frac{c}{a}e^{\int\frac{b}{a}dx}dx\right).$$

Слично се може показати и за општије критеријуме (A), (B) и (C).

## V

Р. Кашанин [5] у једном свом раду испитивао је да ли се може помоћу партикуларног интеграла диференцијалне једначине

$$\frac{du}{dx}=M_1 y^{m_1}+M_2 y^{m_2}+\cdots+M_k y^{m_k},\quad 0\leqq m_1<m_2\cdots<m_k \tag{13}$$

снизити степен полинома на десној страни; овде су $m_i$ цели бројеви, а $M_i$ ма какве функције од $x$, но које нису идентички једнаке нули. При томе се може претпоставити да бројеви $m_i-1$ немају заједничког делитеља (редукована једначина) јер, ако имају заједнички делитељ $\nu$ онда већ супституција $y=Y^{-\nu}$ смањује степен.

Резултат, до кога је дошао Р. Кашанин, је ово: да би, не претпостављајући ништа о функцијама $M_i$, постојала за сваки партикуларни интеграл $y_1$ супституција $y=\varphi(y_1,Y)$ којом ће се смањити степен полинома у редукованој једначини (13), потребно је и довољно да буде $m_k\leqq 2$, тј. да једначина буде или Riccati-ева или линеарна. Иначе је то могуће постићи само код извесних специјалних једначина тога типа, и то са нарочитим партикуларним интегралима, а не са сваким.

Због свега овога је јасно откуда толики разноврсни и многобројни критеријуми за решавање опште Riccati-еве једначине помоћу квадратура: од свих редукованих једначина облика (13) само се код Riccati-еве партикуларни интеграл може употребити за снижавање степена полинома по $y$ који у њој долази, тј. за свођење на линеарну једначину, тј. за решавање помоћу квадратура. Сви до сада дати критеријуми, ма којим начином да су добијени, нису ништа друго него везе између $P, Q, R$ које се добијају када се извесна функција од $x, P, Q, R$ прогласи партикулирним интегралом опште Riccati-еве једначине.

*(Саопштено 7-X-1959)*

## БИБЛИОГРАФИЈА


[1] Т. Пејовић — Диференцијалне једначине. Егзистенција решења, Београд 1958.

[2] Ђ. Карапанџић — Примена трансформација додира на интеграцију обичних диференцијалних једначина (теза). Посебно издање „Гласника" Шумарског факултета у Београду, 1958.

[3] E. Kamke — Differentialgleichungen. Lösungsmethoden und Lösungen, Chelsea Publishing Company, New York, 1948.

[4] M. A. Abdelkader — Solutions by quadrature of Riccati and second-order linear differential equations. *American Math. Monthly* **66**, No 10 (1959).

[5] Р. Кашанин — О упрошћавању диференцијалних једначина првог реда помоћу њихових партикуларних интеграла. *Глас Српске краљевске академије наука*, **CXXXIV** (1929).

# SUR LA SOLUTION DE L'EQUATION DIFFERENTIELLE DE RICCATI A L'AIDE DE QUADRATURES

Par D. M. SIMEUNOVIĆ (Belgrade)

La transformation

$$(a) \qquad \xi = \int P e^{-\int (Q+2Pu)dx} dx\,, \quad y = u + \eta\, e^{-\int (Q+2Pu)dx},$$

où $u$ représente une fonction arbitraire de $x$, réduit l'équation générale de Riccati

$$(b) \qquad \frac{dy}{dx} + Py^2 + Qy + R = 0,$$

à la forme

$$(c) \qquad \frac{d\eta}{d\xi} + \eta^2 = F(\xi),$$

où $F(\xi)$ est donnée par

$$(d) \qquad F(\xi) = -\frac{1}{P}\left(\frac{du}{dx} + Pu^2 + Qu + R\right) e^{2\int (Q+2Pu)dx}.$$

Etant donné que $F(\xi)$ est complètement arbitraire, on obtient, en tenant compte de $(a), (b)$ et $(d)$

$$(e) \qquad \frac{du}{dx} + Pu^2 + Qu + R = -Pe^{-2\int (Q+2Pu)dx} F\left\{\int Pe^{-\int (Q+2Pu)dx} dx\right\}.$$

En particulier, si $F(\xi) = \lambda\xi^\alpha$, $\lambda = \text{const}$, $\alpha = -\dfrac{4k}{2k \pm 1}$, $k = 0, 1, \ldots$ (même pour $k = \infty$, c. à. d. $\alpha = -2$), l'équation $(c)$ se réduit à l'équation particulière de Riccati résoluble par quadratures. Dans ce cas la relation $(e)$ prend la forme

$$(f) \qquad \frac{du}{dx} + Pu^2 + Qu + R = -\lambda Pe^{-2\int (Q+2Pu)dx}\left[\int Pe^{-(Q+2Pu)dx} dx\right]^{-\frac{4k}{2k\pm 1}}.$$

Autrement dit: s'il existe la fonction $u$, la constante $\lambda$ et un entier positif $k$ tel que la condition $(f)$ soit satisfaite, l'équation générale de Riccati $(b)$ peut-être resolue par quadratures (les valeurs $k = 0$ et $k = \infty$ sont aussi admises).

De cette manière la relation $(f)$ est un critère général donant la solution de l'équation de Riccati par quadratures. En choisissant $u$, $k$ et $\lambda$ d'une manière convenable, on obtient divers critères connus[1]: de Peyovitch (4), d'Abel (5), de Bougaeff (6), de Karapandžitch (7), (8), de Kurensky (9), de Mitrinovitch (10) et d'Abdelkader (11).

Notre procédé général met en evidence que tout critère résulte en imposant à l'équation de Riccati une intégrale particulière. Autrement dit, si l'on impose une fonction donnée à l'avance $\varphi(x, P, Q, R,)$ comme l'intégrale particulière de l'équation de Riccati, on obtient une relation entre $P$, $Q$ et $R$ et cette relation est le critère en question.

[1] Voir le texte en serbe.

*Зборник радова Српске академије наука и уметности LXIX*
*Математички институт књ. 8, 1960*
*Recueil des travaux de l'Académie Serbe des Sciences et des Arts LXIX*
*Institut Mathématique № 8, 1960*

БОГДАН БАЈШАНСКИ

# УВОЂЕЊЕ ТОПОЛОГИЈЕ ФАМИЛИЈОМ РЕЛАЦИЈА

**0.** Постоји неколико појмова који се дефинишу у општем метричком простору, али се не могу уопштити на тополошке просторе. То су, на пример, својство низа тачака да буде Кошиев, својство простора да буде потпун, својство функције да буде униформно непрекидна. Та својства се не могу пренети у тополошке просторе, јер — као што је примерима лако показати — нису тополошки инваријантна. Потреба за преношењем тих својстава на просторе општије од метричких, потреба која је била настала у вези са изучавањем тополошких група, навела је Андре Вејла на стварање такозваних униформних простора. Поред Вејловог поступка, постоји низ других поступака (преко генералисаних отстојања, преко фамилија псеудометрика, преко релације близине В. А. Ефремовича итд) који сви имају за циљ да генералишу раније поменуте појмове, дефинисане првобитно у метричким просторима, али сви су ти поступци међусобно еквивалентни, и разлике између њих су углавном терминолошке природе.

Наш циљ је да покажемо да — као што једна произвољна фамилија потскупова скупа $X$ на природан начин може да индуцира тополошку структуру на скупу $X$, на пр., ако се скупови дате фамилије схвате као суббаза једне топологије — да слично томе произвољна фамилија потскупова скупа $X \times X$, или, друкчије речено, једна фамилија релација дефинисаних над истим скупом $X$ на природан начин генерише извесне тополошке структуре на скупу $X$.

Најпре, на један сасвим тривиалан начин свака фамилија релација дефинисаних над истим скупом генерише једну фамилију рефлексивних и симетричних релација. Филтар релација који има добијену фамилију за суббазу зваћемо генералисаном униформном структуром. Свака генералисана униформна структура на један природан начин, као што ћемо то показати, генерише једну униформну структуру.

У вези са појмом генералисане униформне структуре појављује се неколико питања.

Прво, постоје свакако два природна начина на који једна генералисана униформна структура генерише једну тополошку структуру. Једну генерише директно, а другу посредно, као тополошку структуру униформне структуре коју генерише. Показаћемо да су у општем случају те две тополошке структуре различите. Одговорићемо и на извесна питања у вези односа тих двеју топологија.

Друго, поставља се питање која је класа тополошких простора чија се топологија може непосредно генерисати једном генералисаном униформном структуром. (Питање која је класа тополошких простора чија се топологија може посредним путем генералисати једном генералисаном униформном структуром решено је познатом теоремом о потребним и довољним условима за један тополошки простор да би се у њега могла увести униформна топологија.)

Нагласимо, на крају, да се у овом раду не даје никаква генерализација теорије униформних простора. Ми можемо дефинисати, на пример, Кошиеве низове тачака у сваком скупу који је снабдевен једном генералисаном униформном структуром. Да бисмо могли формулисати ставове о Кошиевим низовима, на пример да бисмо могли одговорити на питање да ли је сваки конвергентан низ Кошиев, потребно је снабдети простор топологијом. Можемо га снабдети или топологијом коју дата генералисана униформна структура посредно генерише — и добијена теорија у том случају претставља само други вид излагања Вејлове теорије, или топологијом непосредно генерисаном, али у том случају основни ставови — као, исти пример, да је сваки конвергентан низ Кошиев — без изузетка престају да важе.

Ради прегледнијег излагања ми ћемо најпре дефинисати неколико појмова и увести неколико ознака.

**1.** Композицијом двеју релација $\rho_1$ и $\rho_2$ дефинисаних на скупу $X$ називамо релацију $\rho$ дефинисану на следећи начин:

$x\rho y$ онда и само онда кад постоји елемент $z$ скупа такав да је истовремено $x\rho_1 z$ и $z\rho_2 y$ .

Уобичајено је композицију релација означавати кружићем, писати, например, $\rho=\rho_1\circ\rho_2$ . Ми ћемо отступити од те ознаке и писаћемо $\rho=\rho_1+\rho_2$, да бисмо јаче истакли аналогију метричких и униформних простора.

Дефинисана композиција релација јесте, што је једноставно показати, асоцијативна. Наиме, за сваке три релације $\rho_1, \rho_2, \rho_3$ важи

$$(\rho_1+\rho_2)+\rho_3=\rho_1+(\rho_2+\rho_3).$$

Даље, писаћемо $1\cdot\rho=\rho$

$$(k+1)\,\rho=k\rho+\rho \text{ за сваки природан број } k.$$

Дакле, $x\,k\rho\,y$ значи да постоји $k-1$ елемената $z_1, z_2 \dots, z_{k-1}$ у скупу над којим је релација $\rho$ дефинисана, таквих да је $x\rho z_1$, $z_1\rho z_2,\dots$, $z_{k-1}\,\rho\,y$.

Пресеком релација $\rho_1$ и $\rho_2$ називамо, као што је уобичајено, релацију $\rho$ дефинисану на следећи начин: $x\rho y$ еквивалентно је са исказом да је истовремено $x\rho_1 y$ и $x\rho_2 y$. Пишемо $\rho=\rho_1\cap\rho_2$.

Рећићемо да релација $\rho$ има за последицу релацију $\rho'$ и писаћемо $\rho \Longrightarrow \rho'$ ако из $x\rho y$ увек следи $x\rho' y$.

Ако је $F$ фамилија релација, са $\overline{F}$ означавамо фамилију свих последица релација из $F$, то јест

$$\overline{F}=\left\{\pi \mid \exists \rho \,.\, \rho \in F,\ \rho \Longrightarrow \pi\right\}.$$

За једну фамилију $F$ релација $\rho$ дефинисаних над истим скупом $X$ рећи ћемо да образује филтар релација ако су испуњена следећа два услова

i) ако је $\rho \in F$ и $\rho \Longrightarrow \rho'$ тада је $\rho' \in F$,

ii) из $\rho_1 \in F$, $\rho_2 \in F$ следи $\rho_1 \cap \rho_2 \in F$.

За један потскуп $B$ филтра релација $F$ рећи ћемо да претставља базу филтра $F$ ако свака релација из $F$ јесте последица неке релације из $B$.

Потребан и довољан услов да би дата фамилија $B$ релација образовала базу филтра релација јесте, очигледно, да кад год две релације припадају скупу $B$ да тада њихов пресек буде последица неке релације из $B$.

За један потскуп $S$ филтра релација $F$ рећи ћемо да претставља суббазу филтра $F$ ако свака релација из $F$ јесте последица неког пресека коначно много релација из $S$.

Очигледно је да свака фамилија релација дефинисаних над истим скупом претставља суббазу неког филтра релација.

Нека је $F$ једна фамилија релација које су све дефинисане над истим скупом. Са $F_k$, $k$ природан број, означићемо фамилију свих релација облика $k\rho$, тојест

$$F_k=\left\{k\rho \mid \rho \in F\right\}.$$

Са $P^k$, $k$ природан број, означићемо фамилију свих релација облика $\rho_1+\rho_2 \ldots .+\rho_k$, то јест

$$P^k=\{\pi \mid \pi=\rho_1+\rho_2+\ldots+\rho_k,\ \rho_i \in P,\ i=1,2,\ldots k\}.$$

Навешћемо неколико тврђења о овим изведеним скуповима релација, да би разлика у дефиницији униформних и генералисаних униформних структура била јаснија.

Увек је $P_k \subset P^k$.

Ако је $P$ база једног филтра релација, $P_k$ и $P^k$ претстављају базе једног истог филтра релација. Довољно је показати да је $P_k$ база једног филтра релација. Нека $\pi_1, \pi_2 \subset P_k$. Тада у $P$ постоје релације $\rho_1$, $\rho_2$ такве да је $\pi_1=k\rho_1$, $\pi_2=k\rho_2$. Пошто је $P$ база филтра, $P$ садржи релацију $\rho$ такву да $\rho \Longrightarrow \rho_1 \cap \rho_2$. Стога релација $k\rho=\pi$ припада $P_k$. Како $\rho \Longrightarrow \rho_1$, $\rho \Longrightarrow \rho_2$, то $k\rho \Longrightarrow k\rho_1$, $k\rho \Longrightarrow k\rho_2$, па према томе $\pi=k\rho \Longrightarrow k\rho_1 \cap k\rho_2=\pi_1 \cap \pi_2$, дакле $P_k$ је база једног филтра релација.

Нека су све релације фамилије $F$ рефлексивне. Тада је $F_{k+1} \subset \overline{F}_k$, $F^{k+1} \subset \overline{F}^k$ за сваки природан број $k$. Доказ. Нека је $\rho$ произвољна релација из $F$. Тада $k\rho$ припада $F_k$. Због рефлексивности релације $\rho$, релација $k\rho$ има за последицу релацију $(k+1)\rho$. Како $\overline{F}_k$ садржи релацију $k\rho$ и сваку њену последицу, $\overline{F_k}$ садржи и релацију $(k+1)\rho$. Слично се доказује и друга инклузија.

Ако је $F$ један филтар релација и ако је $F \subset \overline{F_2}$, тада је $\overline{F_k} \subset \overline{F_{k+1}}$, $\overline{F^k} \subset \overline{F^{k+1}}$. Доказ. Нека је $\rho$ произвољна релација из $F$. Пошто она припада $\overline{F_2}$, постоји релација $\rho'$ у $F$ таква да је $2\rho' \Longrightarrow \rho$. Према томе, релација $k\rho = (k-1)\rho + \rho$ последица је релације $(k-1)\rho + 2\rho'$ која следи из релације $(k+1)(\rho \cap \rho')$. Последња релација, међутим, припада $F_{k+1}$, јер $\rho \cap \rho'$ припада $F$. Стога релација $k\rho$ припада $\overline{F}_{k+1}$. Свака релација из $\overline{F_k}$ као последица неке релације $k\rho$ припада зато скупу $\overline{F_{k+1}}$. Друга инклузија доказује се слично.

Последња два закључка дају следећу последицу:

Ако је $F$ филтар рефлексивних релација и $F \subset \overline{F_2}$, тада је $F = \overline{F_k} = \overline{F^k}$ за сваки природан број $k$.

**2.** Дефиниција 1. Генералисаном униформном структуром на скупу $X$ називамо филтар $G$ рефлексивних и симетричних релација дефинисаних на $X$.

Да бисмо показали што јасније разлику између униформних и генералисаних униформних структура, навешћемо и дефиницију униформних структура стилизовану на исти начин:

Униформном структуром на скупу $X$ називамо филтар $U$ рефлексивних и симетричних релација дефинисаних на $X$, ако је $U \subset \overline{U_2}$.

Сваку базу (суббазу) поменутог филтра називаћемо у ова два случаја базом (суббазом) генералисане униформне, односно униформне структуре.

Нека је $G$ произвољна фамилија рефлексивних релација. Тада постоји фамилија $F$, садржана у $\overline{G}$, која има особину да је $F \subset F_k$ за сваки природан број $k$. Таква је, на пример, фамилија која се састоји од једине релације $\rho$ дефинисане помоћу: $x\rho y$ за свако $x$ и $y$. Нека је $U$ унија свих фамилија $F$. Тада је $U \subset U_k$ за сваког $k$ и $U$ је максимална од свих фамилија са поменутим својством које су садржане у $\overline{G}$.

На сличан начин свакој генералисаној униформној структури $G$ може се коренспондирати једна униформна структура $U$, при чему у специјалном случају кад је $G$ униформна структура, добијамо да је $U = G$.

Међутим, дата дефиниција униформне структуре $U$ кореспондиране генералисаној униформној структури $G$ разликује се од ефективне конструкције структуре $U$. У првоме случају $U$ је дефинисано помоћу $U$, наиме, дефинисано је дескриптивно, помоћу својстава која има, те стога да бисмо одговорили које релације припадају $U$ треба да познајемо $U$. У другом случају $U$ ће бити дефинисано конструктивно и да бисмо одговорили на питање да ли одређена релација припада или не структури $U$, биће довољно познавање структуре $G$. На тај начин смо у стању да све резултате о униформним структурама изразимо у терминима генералисаних униформних структура, и да дамо једно алтернативно излагање теорије униформних простора. Конструкција коју ћемо дати нема за нас других интереса осим поменутих и неће бити коришћена даље.

Постављени задатак може се решити на два начина: директно се свакој генералисаној униформној структури конструише одговарајућа униформна структура, или индиректно, произвољној бази генералисане униформне структуре кореспондира се фамилија релација која претставља суббазу једне генералисане униформне структуре. Ми ћемо дати другу конструкцију, јер је она једноставнија, и доказаћемо да је резултат једнозначно одређен, то јест да не зависи од изабране базе генералисане униформне структуре.

Конструкцију ћемо извршити за један случај који је општији од нашег, наиме произвољној фамилији $F$ рефлексивних релација формираћемо максималну фамилију $U$ садржану у $F$ која има својство да је садржана у $U_k$ за свако $k$.

Ради ове конструкције потребна су нам два нова појма, појам нормалног низа и појам редукције фамилије релација.

Дефиниција 2. Нека је $F$ произвољна фамилија релација дефинисаних над истим скупом. За низ $\{\rho n\}$ релација из $F$ рећи ћемо да је нормалан низ релација ако за свака два природна броја $k$ и $p$ важи да

(1) $$\rho_p \Longrightarrow k\rho_{kp}.$$

Очигледно је да се у свакој фамилији $F$ рефлексивних релација дефинисаних над истим скупом могу образовати нормални низови релација. На пример, нека је $\delta$ произвољна релација из $F$. Тада је низ $\{\delta_n\}$, $\delta_n = \delta$ за свако $n$, један нормалан низ релација.

Дефиниција 3. Нека је $F$ произвољна фамилија релација дефинисаних над истим скупом $X$. Нека је сваком нормалном низу $\{\delta_n\}$ релација $F$ кореспондирана релација $\varepsilon$ дефинисана на $X$ помоћу

(2) $x\varepsilon y$ онда и само онда кад постоји $n$ такво да је $xn\delta_n y$.

Скуп тако дефинисаних релација $\varepsilon$ називамо редукцијом $R(F)$ фамилије $F$.

Став 1. *Нека су $G$, $H$ произвољне фамилије рефлексивних релација дефинисаних над истим скупом, и нека је $G = \overline{G}$. Тада је*

(i) $R(G) \subset G$,

(ii) $R(G) \subset [R(G)]_k$ *за сваки природан број* $k$,

(iii) *из* $H \subset G$, $H \subset H_k$ *следи* $H \subset R(G)$.

Доказ. (i) Свака релација $\varepsilon$ из $R(G)$ последица је неке релације из $G$, дакле припада $\overline{G} = G$.

Релација $\varepsilon$ дефинисана је неким нормалним низом релација $\{\delta_n\}$. Из $x\delta_1 y$ следи да постоји $n$ такво да је $xn\delta_n y$, дакле $x\varepsilon y$.

(ii) Пошто је $G$ фамилија рефлексивних релација, дефиниција релације $\varepsilon$ која је дата у (2) еквивалентна је следећој дефиницији

(3) $x\varepsilon y$ онда и само онда кад постоји $N$ такво да је $xn\delta_n y$ за све $n$ који су мултипли од $N$.

Довољно је да покажемо да су искази $xn\delta_n y$ за све $n$ који су мултипли од $N$ и $xN\delta_N y$ еквивалентни.

Пошто је низ релација $\{\delta_n\}$ нормалан, из (1) следи да за $n=kN$ $\delta_N \Longrightarrow k\delta_{kN}$. Како су релације $\delta_n$ рефлексивне, биће $N\delta_N \Longrightarrow Nk\delta_{kN} \equiv n\delta_n$, што је требало доказати.

Нека је $\rho$ једна релација из $R(G)$. Потребно је да докажемо да $\rho$ припада скупу $[R(G)]_k$, то јест да постоји релација $\rho'$ у $R(G)$ таква да је $k\rho'=\rho$.

Релација $\rho$ дефинисана је неким нормалним низом $\{\pi_n\}$ релација из $G$. Према (1) $\pi_p \Longrightarrow l\pi_{kp}$ што даје специјално $\pi_{kp} \Longrightarrow l\pi_{klp}$ за све $k, l, p$. Стога је низ $\{\pi_{kn}\}$ такође нормалан. Означимо релацију редукције дефинисану тим низом са $\rho'$. Тада $xk\rho' y$ значи да постоји $k-1$ тачака $z_1, z_2, \ldots, z_{k-1}$ таквих да је истовремено $x\rho' z_1, z_1\rho' z_2, \ldots, z_{k-1}\rho' y$. Међутим, $z_i\rho' z_{i+1}$, $i=0,1,\ldots,k-1$, где смо ставили $z_0=x, z_k=y$, значи, према (3), да постоје $N_i$ такви да за све $n$ који су мултипли од $N_i$, $z_i n\pi_{kn} z_{in}$ за свако $i=0,1,\ldots,k-1$. Дакле, ако ставимо $N=\prod_{i=0}^{k-1} N_i$, имаћемо, за свако $i=0,1,\ldots,k-1$, $z_i N\pi_{kN} z_{i+1}$. Одателе следи $xkN\pi_{kN} y$. Према дефиницији (2) релације $\rho$ доказано је да је $x\rho y$, дкале, $k\rho' \Longrightarrow \rho$. Из $x\rho y$ следи, према (3), да постоји $N$ такво да је $xn\pi_n y$ за све $n$ који су мултипли од $N$. Специјално $xkN\pi_{kn} y$, одакле следи да постоји $k-1$ тачака $z_i, i=1,2,\ldots,k-1$ таквих да је $xN\pi_{kN} z_1, \ldots, z_{k-1} N\pi_{kN} y$. Према (2) $x\rho' z_1, z_1\rho' z_2, \ldots, z_{k-1}\rho' y$, одакле следи $xk\rho' y$. Дакле $\rho \Longrightarrow k\rho'$.
Из $k\rho' \Longrightarrow \rho$ и $\rho \Longrightarrow k\rho'$ следи $\rho = k\rho'$.

(iii) Нека је $h\in H$. Због $h\in H_k$ постоји за свако $k$ релација $h_k$ у $H$ таква да је $h=kh_k$.

Могућно је да постоје за исто $k$ различите релације $h_k\in H$ такве да је $h=kh_k$. Да бисмо избегли ту вишезначност која би нам онемогућила да спроведемо доказ, поступићемо на следећи начин.

Изаберимо најпре једну релацији $h_{2!}$ из $H$ такву да је $h=2h_{2!}$. Изаберимо даље једну релацију $h_{3!}$ из $H$ такву да је $h_{2!}=3h_{3!}$ и, уопште, изаберимо релацију $h_{(n+1)!}$ такву да је $h_{n!}=(n+1)\,h_{(n+1)!}$. Ставимо најзад $h_k=(k-1)!\,h_{k!}$ за сваки природан број $k$, што је лако видети да је у сагласности са претходно датом дефиницијом у случају када је $k$ факторијел.

Формирајмо низ релација $\{h_k\}$. Тај низ је нормалан низ јер је

$$h_k=(k-1)!\,h_{k!}=(k-1)!\,(k+1)(k+2)\ldots(kp)\,h_{(kp)!}=\frac{(kp)!}{k}\,h_{(kp)!}=$$
$$=p\,(kp-1)!\,h_{(kp)!}=ph_{kp}\,.$$

Како $H \subset G$, то релација $\chi = \{h_n\} \in R(G)$.

С друге стране, $x\chi y$ значи да постоји једно $n$ такво да је $xnh_ny$, што је еквивалентно са $xhy$. Дакле, $h \Rightarrow \chi \in R(G)$. Према томе, $H \subset R(G)$.

Као последицу става добијамо следећи резултат.

Нека је $G$ генералисана униформна структура. Тада филтар $U$ чија је суббаза $R(G)$ има својство да је $U \subset \bar{U}_k$. Наиме, нека је $\pi$ релација из $U$. Тада постоје релације $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n \in R(G)$ такве да $\rho_1 \cap \rho_2 \cap \ldots \cap \rho_n \Longrightarrow \pi$. Како је $\rho_i = k\rho_{ik}$, где $\rho_{ik} \in R(G)$, то имамо, стављајући $\rho_{1k} \cap \rho_{2k} \cap \ldots \cap \rho_{nk} = \pi' \in U$,

$$k\pi' = k(\rho_{1k} \cap \rho_{2k} \cap \ldots \cap \rho_{nk}) \Longrightarrow k\rho_{1k} \cap k\rho_{2k} \cap \ldots \cap k\rho_{nk} = \rho_1 \cap \rho_2 \ldots \cap \rho_n = \pi,$$

па за свако $\pi$ из $U$ следи да постоји $\pi'$ у $U$ такво да је $\pi$ последица од $k\pi'$.

На основу претходне примедбе, а како из дефиниције 3 следи непосредно да ако је $G$ фамилија рефлексивних, односно симетричних релација, тада је и $R(G)$ фамилија рефлексивних, односно симетричних релација, добијамо да $U$ претставља униформну структуру.

**3.** Нека је на скупу $E$ дефинисана генералисана униформна структура $G$.

Посматрајмо фамилију $O$ скупова $X \subset E$ који имају следеће својство: свакој тачки $x \in X$ одговара релација $\varepsilon \in G$ тако да из $x\varepsilon y$ следи $y \in X$.

Да бисмо показали да скупови фамилије $O$ претстављају отворене скупове једне топологије, довољно је да покажемо следеће:

(i) Унија скупова фамилије $O$ јесте један скуп фамилије $O$.

(ii) Пресек коначно много скупова фамилије $O$ јесте скуп фамилије $O$.

(i) Нека је $X = \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$, нека сваки од скупова $X_\alpha$, $\alpha \in A$, припада фамилији $O$, и нека је $x$ произвољна тачка скупа $X$. Тада постоји $\alpha_0 \in A$ такво да $x \in X_{\alpha_0}$. Како $X_{\alpha_0}$ припада фамилији $O$, постоји релација $\varepsilon$ таква да из $x \varepsilon y$ следи $y \in X_{\alpha_0} \subset X$.

(ii) Нека је $X = \bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha$, $A$ коначан скуп индекса, нека сваки од скупова $X_\alpha$, $\alpha \in A$ припада фамилији $O$, и нека је $x$ произвољна тачка скупа $X$. Тада $x$ припада свакоме од скупова $X_\alpha$, $\alpha \in A$. Како ти скупови припадају фамилији $O$, постоје у $G$ релације $\varepsilon_\alpha$, $\alpha \in A$, такве да из $x\, \varepsilon_\alpha\, y$ следи $y \in X_\alpha$. Пошто је $A$ коначан скуп, број релација $\varepsilon_\alpha$ је коначан. Како је $G$ филтар релација и садржи све релације $\varepsilon_\alpha$, садржи и њихов пресек, релацију $\varepsilon$, из које следи свака релација $\varepsilon_\alpha$. Посматрајмо скуп тачака $y$ простора $X$ таквих да је $x\varepsilon y$. Свака таква тачка $y$ припада свакоме од скупова $X_\alpha$, $\alpha \in A$, јер из $x\, \varepsilon\, y$ следи $x\, \varepsilon_\alpha\, y$, одакле произилази $y \in X_\alpha$. Према томе, свака од тачака $y$ припада скупу $X$, што значи да скуп $X$ припада фамилији $O$.

Ако желимо, дакле, да у једном генералисаном униформном простору индуцирамо топологију преко отворених скупова, чинимо то на исти начин као и у униформним просторима.

Међутим, могућно је у униформним просторима генерисати исту тополошку структуру и на други начин, на пример, најуобичајенији начин јесте генерисање тополошке структуре дефиницијом околина у униформном простору.

Посматрајмо фамилију скупова $V_\varepsilon(x) \equiv \{y \mid x\varepsilon y\}$, $x \in E$, $\varepsilon \in G$. У униформним просторима та фамилија скупова образује један систем околина генерисаног тополошког простора. Код генералисаних униформних структура, у општем случају, то тврђење није тачно. Наиме, фамилија скупова $V_\varepsilon(x)$, $x \varepsilon E$, $\varepsilon \in G$, или претставља систем околина једног тополошког простора (и тада је топологија тог простора идентична са топологијом коју смо увели преко отворених скупова) или не претставља систем околина ниједног тополошког простора. Да бисмо доказали последњу могућност, довољан је један пример. Нека је $E$ скуп реалних бројева, нека генералисана униформна структура $G$ буде дефинисана својом базом која садржи једну једину релацију $\varepsilon$, при чему $x \varepsilon y$ значи $|x-y|<1$. Ако би скупови $V_\varepsilon(x)$, $x \in E$, $\varepsilon \in G$, образовали систем околина једног тополошког простора, тада би свака околина тачке $x$ садржала једну околину од $x$ која би била околина сваке своје тачке. Пошто релација $\varepsilon$ није последица ниједне друге релације из $G$, скуп бројева $y$ таквих да је $|x-y|<1$ за фиксирано $x$ морао би бити околина сваке своје тачке. Када би то било, из $|x-y|<1$ и $|y-z|<1$ следило би $|x-z|<1$, што очигледно није случај. Општији пример исте врсте: ако база од $G$ садржи само једну релцаију, да би фамилија скупова $V_\varepsilon(x)$, $x \in E$, $\varepsilon \in G$, представљала систем околина једног тополошког простора потребно је и довољно да релација $\varepsilon$ буде транзитивна.

Поставља се питање шта у простору $E$ у који је топологија уведена на описани начин претстављају скупови $V_\varepsilon(x)$, $x \in E$, $\varepsilon \in G$. Лако је показати да систем тих скупова задовољава следеће услове:

a) Сваки скуп фамилије $V_\varepsilon(x)$ садржи тачку $x$.

b) Пресек два скупа фамилије $V_\varepsilon(x)$ садржи неки скуп фамилије $V_\varepsilon(x)$.

c) Скуп чији потскуп припада фамилији $V_\varepsilon(x)$ и сам припада фамилији $V_\varepsilon(x)$.

d) Сваки отворен скуп тополошког простора $E$ који садржи тачку $x$ припада фамилији $V_\varepsilon(x)$.

e) Скуп који са сваком својом тачком $x$ садржи и скуп фамилије $V_\varepsilon(x)$ јесте отворен скуп тополошког простора.

Сваки систем скупова једног тополошког простора називаћемо системом псеудоколина тог тополошког простора ако задовољава услове a) — e).

Очигледно је из дефиниције да систем околина тополошког простора $E$ јесте специјалан систем псеудоколина простора $E$. Даље, из c) и d) следи да сваки систем псеудоколина од $E$ садржи систем околина простора $E$.

Разлику између система околина и система псеудоколина претставља чињеница да у дефиницији последњих не захтевамо да свака псеудоколина садржи псеудоколину која би била псеудоколина сваке своје тачке.

Очигледно је да један тополошки простор може садржати разне системе псеудоколина. Например, посматрајмо простор који садржи бесконачно много тачака и који је снабдевен најгрубљом $T_1$ топологијом (то јест нека је један скуп тачка у том простору затворен онда и само онда кад је коначан). Нека је $x$ једна произвољна тачка тог простора. Свакој тачки простора коренсподирамо један систем скупова на следећи начин: тачки $x$ све бесконачне скупове који садрже $x$, свакој другој тачки њен систем околина. Добијени систем скупова не претставља систем околина, већ систем псеудоколина.

Међутим, лако је приметити да је појава система псеудоколина доста изузетна, да се код простора у којима влада јача сепарација не могу појавити системи псеудоколина различити од система околина.

На пример, у једном Хаусдорфовом простору који задовољава прву аксиому пребројивости сваки систем псеудоколина је систем околина. Да бисмо то показали, претпоставимо да је $P$ једна псеудоколина једне тачке $x$ тог простора, и да она није околина тачке $x$. Тада свака околина тачке $x$ садржи тачке из $\mathbf{C}P$. Према томе, $x$ је тачка нагомилавања за $\mathbf{C}P$. Пошто, на основу прве аксиоме пребројивости, тачка $x$ има пребројиву околинску базу, то $\mathbf{C}P$ садржи низ $\{x_n\} = M$ који конвергира ка $x$. Пошто је простор Хаусдорфов, тај низ нема других тачака нагомилавања. Стога је скуп $M \cup \{x\}$ затворен. Према томе $\mathbf{C}M \setminus \{x\}$ је отворен скуп. Скуп $\mathbf{C}M$ садржи псеудоколину $P$ тачке $x$ и околину $\mathbf{C}M \setminus \{x\}$ сваке друге своје тачке. Стога је отворен. Онда је скуп $M$ затворен. Али скуп $M$ не садржи $x$ иако му је $x$ тачка нагомилавања. Стога у посматраном простору не могу постојати системи псеудоколина различити од система околина.

**4.** Да бисмо показали да топологија $T$ индуцирана генералисаном униформном структуром $G$ на начин описан у тачки 3 и топологија $T'$ на истом скупу индуцирана униформном структуром која је генерисана помоћу $G$, нису у општем случају идентичне, довољан је пример. Пример који дајемо показаће знатно више: топологија $T$ у општем случају може бити таква да — не само униформна структура генерисана помоћу $G$ — већ ниједна униформна структура не може генерисати $T$.

Дефинишимо на скупу реалних бројева следећи низ $\{\rho_n\}$ релација

$$x\rho_i y = \begin{cases} x=0, \quad y = \text{скуп природних бројева} \geqq 2\,, \\ x=n, \quad i \geqq n, \quad y \in \left(n-\dfrac{1}{n},\; n+\dfrac{1}{n}\right), \\ x=n, \quad i < n, \quad y \in \left(n-\dfrac{1}{i},\; n+\dfrac{1}{i}\right), \\ x \neq 0,\, n, \dfrac{3}{2}, \quad y = x. \end{cases}$$

Помоћу низа $\{\rho_n\}$ дефинишимо низ $\{\varepsilon_n\}$ релација на следећи начин: $x\varepsilon_n y$ онда и само онда кад је бар један од следећих исказа тачан $x\rho_n y$, $y\rho_n x$, $x=y$. Релације $\varepsilon_n$ су рефлексивне, симетричне и, пошто $\varepsilon_n \Longrightarrow \varepsilon_m$ за $m < n$, претстављају базу једне генералисане униформне структуре $G$, чију ћемо топологију, непосредно индуцирану, означити са $T$.

Сваки отворен скуп $O$ топологије $T$ који садржи тачку 0 мора садржати све тачке које су у једној $\varepsilon$ релацији са 0. Међутим за свако $\varepsilon$, тачка 0 је у релацији са свим тачкама $n$. Према томе скуп $O$ мора садржати све тачке $n$. Пошто садржи тачку $n$, он мора садржати и све тачке $(n-{}^1/_n,\ n+{}^1/_n)$, јер за свако $\varepsilon$ те су тачке у $\varepsilon$ релацији са $n$. Међутим, скуп који се састоји од тачке 0 и свих тачака интервала $(n-{}^1/_n,\ n+{}^1/_n)$ јесте отворен скуп, пошто са тачком $O$ садржи и све тачке које су с њом у $\varepsilon_1$ релацији, са сваком тачком n све тачке које су са њом у релацији $\varepsilon_n$, и најзад, са сваком тачком $x$ из $(n-{}^1/_n,\ n+{}^1/_n)$ све тачке које су с њом у релацији $\varepsilon_{n+t}$, $t=2(2x-3)^{-1}$. Дакле, скуп $O$ је најмањи отворен скуп који садржи тачку 0.

Међутим, $\mathbf{C}O$ није отворен скуп, јер свака околина тачке ${}^3/_2$ садржи тачке које не припадају $\mathbf{C}O$. Посматрајмо затворен скуп $\mathbf{C}O$ и тачку $O$. Кад би постојале дисјунктне околине $O_1$ и $O_2$ тога скупа и те тачке, тада би $O_1 \cap O_2 = \emptyset$. Међутим, $O_2$ садржи скуп $O$, као најмањи отворен скуп који садржи тачку $O$. Стога би $O_1 \subset \mathbf{C}O$, па би било $O_1 = \mathbf{C}O$, што није могућно јер $\mathbf{C}O$ није отворен скуп. Према томе, посматрани тополошки простор није регуларан, па утолико пре ни комплетно регуларан те његова топологија не може бит генерисана ниједном униформном структуром.

**5.** Став 2. *Потребан и довољан услов да би постојала генералисана униформна структура која би индуцирала дату топологију тополошког простора $T$, јесте да постоји систем псеудоколина $P$ простора $T$ такав да, ако је $F$ произвољни затворен скуп из $T$, $x$ произвољна тачка из $\mathbf{C}F$, да тада у $P$ постоји псеудоколина скупа $F$ која не садржи тачку $x$.*

Последица. *Свака $T_1$-топологија може се индуцирати једном генералисаном униформном структуром.*

Доказ. (i) Услов је потребан. Претпоставимо да постоји генералисана униформна структура $G=\{\varepsilon\}$ која индуцира једну топологију која не задовољава поменути услов. Тада за сваки систем псеудоооколина $P$ постоји затворен скуп $F$, и тачке $x \in \complement F$, $y \in F$, такве да свака псеудоооколина тачке $y$ садржи $x$. Тада за сваку релацију $\varepsilon$ из $G$ важи да $y \varepsilon x$, јер би у супротном случају $G$ индуцирало систем псеудоооколина $P'$ у коме $y$ има псеудоооколину која не садржи $x$. Пошто су релације $\varepsilon$ симетричне важило би за свако $y$, $x \varepsilon y$. Према томе, свака псеудоооколина од $x$ садржала би $y$. Специјално, сваки отворен скуп који садржи $x$ садржао би $y$, па би $y \in \complement F$, што је у контрадикцији са претпоставком.

(ii) Услов је довољан. Постоји по претпоставци један систем псеудоооколина $P$ такав да — ако је $F$ затворен скуп и $x$ тачка ван тог скупа — тада постоји у $P$ псеудоооколина од $F$ која не садржи $x$. Радићемо непрекидно у једном таквом, унапред фиксираном, систему псеудоооколина $P$.

Помоћу система псеудоооколина $P$ дефинисаћемо један скуп релација, за које ћемо показати да претстављају једну генералисану униформну структуру $G$. Затим ћемо показати да је топологија генерисана помоћу $G$ идентична топологији простора $T$.

Посматрајмо једну фамилију $C$ псеудоооколина из $P$ која садржи псеудоооколину сваке тачке простора $T$. Такву фамилију називаћемо покривањем простора $T$. Свако покривање генерише на једноставан начин једну рефлексивну и симетричну релацију $\varepsilon$ дефинисану на следећи начин: $x \varepsilon y$ значи да $y$ припада унији псеудоооколина из $C$ које садрже $x$. Пресеком $C$ два покривања $C_1$ и $C_2$ назовимо онај скуп псеудоооколина који садржи сваки пресек сваке псеудоооколине из $C_1$ са сваком псеудоооколином из $C_2$. Очигледно је да пресек $C$ претставља једно покривање простора $T$, јер пресек две псеудоооколине исте тачке у истом систему псеудоооколина претставља псеудоооколину те тачке. Релација $\varepsilon$ коју $C$ дефинише има за последицу релацију $\varepsilon_1 \cap \varepsilon_2$. Да бисмо то доказали, приметимо да из $x \varepsilon y$ следи да $y$ припада унији псеудоооколина из $C$ које садрже $x$. Значи да $y$ припада једној псеудоооколини $O$ из $C$ која садржи $x$. Тада је $O$ пресек двеју псеудоооколина $O_1$ и $O_2$ из $C_1$, односно $C_2$. Стога је $O \subset O_1$, $O \subset O_2$. Према томе, и $O_1$ и $O_2$ су псеудоооколине и садрже $x$ и $y$. Стога је $x \varepsilon_1 y$, $x \varepsilon_2 y$. Дакле $\varepsilon \Longrightarrow \varepsilon_1 \cap \varepsilon_2$. Значи, ако посматрамо скуп свих покривања простора $T$, он генерише једну фамилију $G$ рефлексивних и симетричних релација која претставља базу једног филтра, дакле базу једне генералисане униформне структуре.

Потребно је да покажемо да је топологија простора $T$ идентична топологији генерисаној помоћу $G$, то јест да сваки отворен скуп прве топологије јесте отворен скуп друге топологије, и обратно.

Покажимо да сваки отворен скуп $O$ из $T$ јесте отворен скуп топологије генерисане помоћу $G$. За то је довољно да покажемо да сваком $x$ из $O$ одговара једна релација $\varepsilon$ из $G$ таква да из $x \varepsilon y$ следи $y \in O$. Конструисаћемо ту релацију $\varepsilon$. Постоји по претпоставци псеудоколина $P_1$ затвореног скупа $CO$ која не садржи $x$. На основу дефиниције псеудоколине скупа тачака и на основу чињенице да сваки скуп који садржи псеудоколину неке тачке јесте псеудоколина те тачке следи да је $P_1$ псеудоколина сваке тачке из $CO$. Даље, отворен скуп $O$ је псеудоколина сваке своје тачке. Стога скупови $P_1$ и $O$ образују једно покривање простора $T$. Релација дефинисана тим покривањем је таква да из $x \varepsilon y$ следи $y \in O$, јер у супротном случају постојала би нека тачка $y$ из $CO$ чија би псеудоколина $P_1$ садржала $x$, што је супротно дефиницији скупа $P_1$.

Најзад, да сваки отворен скуп генерисан помоћу $G$ јесте отворен скуп топологије $T$, очигледно је. Јер, ако сваком $x$ из $O$ одговара $\varepsilon$ из $G$ такво да $O$ садржи све $y$ који се налазе у $\varepsilon$ релацији са $x$, онда $O$ садржи све $y$ који припадају некој унији псеудоколина једног покривања које садрже $x$, па $O$ садржи утолико пре све $y$ који припадају једној псеудоколини тачке $x$, па је отворен скуп топологије $T$.

Учинимо на крају још једну напомену.

Услов сепарације $T_1$ — наиме услов да, ако су $x$ и $y$ две произвољне тачке простора, да тада постоји околина од $x$ која не садржи $y$ и околина од $y$ која не садржи $x$ — еквивалентан је привидно општијем услову — да постоји псеудоколина од $x$ која не садржи $y$, и псеудоколина од $y$ која не садржи $x$, што је лако видети. Могло би се поверовати стога да је услов нашег става еквивалентан следећем, на изглед јачем, услову: ако је $F$ затворен скуп који не садржи тачку $x$, тада постоји отворен скуп који садржи $F$, а не садржи $x$. Међутим, овај услов није еквивалентан услову става. Например, овај услов не задовољава простор наведен као пример у тачки 4, али тај простор очигледно задовољава услов нашег става.

**6**. У услову става 2 јавља се појам псеудоколине. Да бисмо, тај појам избегли преформулисаћемо став 2. Доказаћемо, наиме, да важи

Став 2'. *Потребан и довољан услов да би постојала генералисана униформна структура која би индуцирала дату топологију тополошког простора $T$ јесте да сваки коначан скуп у $T$ који је пресек неке фамилије отворених скупова буде затворен.*

Доказ. Довољно је, очигледно, да докажемо еквивалентност услова у ставовима 2 и 2', то јест да покажемо да су следећа два тврђења еквивалентна:

($a$) Постоји систем псеудоколина $P$ у простору $T$ такав да ако је $F$ произвољан затворен скуп из $T$, $x$ произвољна тачка из $T$, која не припада $F$, да тада у систему $P$ постоји псеудоколина скупа $F$ која не садржи $x$.

($d$) Сваки коначан скуп који је пресек фамилије отворених скупова јесте затворен.

Увешћемо, ради прегледности доказа, и ознаке за следећа два тврђења:

(*b*) Постоји систем псеудооколина $P$ у простору $T$ такав да ако је $x$ произвољна тачка из $T$ која има околину која не садржи тачку $y$, тада у $P$ постоји псеудоолина од $y$ која не садржи $x$.

(*c*) Ако са $T'$ означимо тополошку структуру генерисану на простору $E$ помоћу његове топологије $T$ на следећи начин

$T'$ је топологија директно генерисана системом псеудоокоолина чију суббазу претстављају сви скупови који се могу приказати као $V(x)\setminus\{y\}$, при чему је $V(x)$ нека околина тачке $x$ у топологији $T$, и $y$ нека тачка из $E$ која у топологији $T$ има околину која не садржи $x$, тада је

$$T' \subset T.$$

Еквиваленцију тврђења (a) и (d) доказаћемо тиме што ћемо установити да важе следеће импликације

$$(a) \Longrightarrow (b) \Longrightarrow (d) \Longrightarrow (c) \Longrightarrow (b) \Longrightarrow (a).$$

$(a) \Longrightarrow (b)$. Нека је $V(x)$ околина од $x$ која не садржи $y$. Тада постоји отворен скуп $O$ који садржи $x$ али не и $y$. Комплемент тог скупа је затворен, садржи $y$ и не садржи $x$. Према (*a*) постоји у $P$ псеудоокoлина тог скупа $\complement O$ која садржи $y$, али не и $x$. Та псеудоокoлина од $\complement O$ је и псеудоокoлина од $y$.

$(b) \Longrightarrow (d)$. Претпоставимо да је $K$ коначан скуп који се може приказати као пресек фамилије отворених скупова. Показаћемо да је при услову (*b*) скуп $\complement K$ отворен. Ради тога је довољно да покажемо да у систему псеудоокoлина $P$ из услова (*b*) скуп $\complement K$ са сваком тачком садржи и једну њезину псеудоокoлину. Нека су елементи од $K$, $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Нека је $y$ произвољна тачка из $\complement K$. Постоји отворен скуп који садржи $K$ а не садржи $y$. (У супротном случају пресек свих отворених скупова који садрже $K$ садржао би и $y$, те $K$ не би био пресек фамилије отворених скупова.) Према услову (*b*), пошто постоји околина тачака $x_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$ која не садржи $y$, постоје у $P$ псеудоокoлине од $y$, $P_i(y)$, које не садрже $x_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Пресек $\bigcap_{i=1}^{k} P_i(y)$ је псеудоокoлина од $y$ која не садржи ни један од елемената из $k$, те према томе лежи у $\complement K$. Дакле, $\complement K$ је отворен, па је $K$ затворен скуп.

$(d) \Longrightarrow (c)$. Нека је $O'$ произвољан отворен скуп топологије $T'$. Тада је $O' = \bigcup_{x \in O'} P(x)$ где се свако $P(x)$ може приказати у облику

$$P(x) = O(x) \setminus W(x),$$

при чему је $O(x)$ отворен скуп топологије $T$ који садржи $x$, а $W(x) \subset O(x)$ коначан скуп такав да за свако $y \in W(x)$ постоји у топологији $T$ околина од $y$ која не садржи $x$. Означимо са $W_y(x)$ скуп свих оних елемената из $W(y)$ који имају особину да се око њих могу описати отворени скупови који не садрже $x$. Можемо писати

$$O' = \bigcup_{y \in O} \bigcup_{x \in P(y)} (O(y) \setminus W_y(x))$$

Потребно је да покажемо да је скуп $O'$ отворен скуп топологије $T$. Ради тога је довољно да покажемо да је за свако $y$ скуп

$$Q(y) = \bigcup_{x \in P(y)} (O(y) \setminus W_y(x))$$

отворен скуп топологије $T$.

Приметимо, најпре, да је $O(y) \supset Q(y) \supset O(y) \setminus W(y)$. Стога је $Q(y) = O(y) \setminus Z(y)$, при чему је $Z(y) \subset Q(y)$, $Z(y) \cap \mathbf{C} W_y(x) = \emptyset$ за свако $x \in O(y) \setminus W(y)$ и $Z(y)$ коначан скуп. Међутим, из $\emptyset = Z(y) \cap \mathbf{C} W_y(x)$ за свако $x \in O(y) \setminus W(y)$, следи $Z(y) \subset W_y(x)$ за све $x \in O(y) \setminus W(y)$.

Покажимо да за свако $x \in \mathbf{C} Z(y)$ постоји отворен скуп топологије $T$ који садржи $Z(y)$ а не садржи $x$. Разликоваћемо три случаја

(i) $x \in \mathbf{C} O(y)$,

(ii) $x \in O(y) \setminus W(y)$,

(iii) $x \in W(y) \setminus Z(y)$.

(i) $O(y)$ је отворен скуп, садржи $Z(y)$, не садржи $x$.

(ii) Како је $Z(y)$ коначан скуп, нека су његови елементи $z_1, z_2, \ldots, z_k$. За произвољно $x \in O(y) \setminus W(y)$ имаћемо да је $z_i \in W_y(x)$ за $i = 1, 2, \ldots, k$. Стога, према дефиницији скупа $W_y(x)$, постоје отворени скупови $O_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$ који садрже $z_i$ а не садрже $x$. Унија тих $k$ отворених скупова јесте отворен скуп који садржи $Z(y)$ а не садржи $x$.

(iii) Претпоставимо да у овом случају наше тврђење није тачно. Тада би постојало $z_1 \in Z(y)$ и $x_0 \in W(y) \setminus Z(y)$ такви да би сваки отворени скуп који садржи $z_1$ садржао и $x_0$. Пошто $x_0$ не припада $Z(y)$, постојало би једно $u \in P(y) = O(y) \setminus W(y)$ такво да $x_0$ не би припадало $W_y(u)$. То значи да би сваки отворен скуп који садржи $x_0$ садржао $u$. Тада би, дакле, сваки отворен скуп који садржи $z_1$ садржао $u$, па $z_1$ не би припадало $W_y(u)$, што је у контрадикцији са чињеницом да је $Z(y) \subset W_y(x)$ за све $x \in O(y) \setminus W(y)$.

Пошто за свако $x \in \mathbf{C} Z(y)$ постоји отворен скуп који садржи $Z(y)$ а не садржи $x$, $Z(y)$ је пресек једне фамилије отворених скупова. Пошто је скуп $Z(y)$ такође и коначан, то је он према услову $(d)$ затворен у топологији $T$. Стога је скуп $O(y) \setminus Z(y) = Q(y)$ отворен у топологији $T$, што је и требало доказати.

$(c) \Longrightarrow (b)$. Ако са $P$ означимо систем псеудоoколина чију суббазу претстављају скупови $V(x) \setminus \{y\}$, где је $V(x)$ нека околина тачке $x$ а $y$ нека ачка која има околину која не садржи $x$, тада је тај систем псеудооколина $O$ према $(c)$ — један систем псеудооколина простора $T$. Нека је $y$ тачка која има околину која не садржи $x$. Тада у $P$ постоји псеудоколина од $x$ која не садржи $y$ — то је, например, произвољно $V(x) \setminus \{y\}$.

$(b) \Longrightarrow (a)$. Нека је $F$ произвољан затворен скуп простора $T$, $x$ тачка ван скупа $F$. За свако $y \in F$ постоји околина $\complement F$ од $x$ која не садржи $y$. Стога према $(b)$ постоји систем псеудоокслина $P$ такав да свако $y \in F$ има псеудоколину која не садржи $x$. Унија тих псеудоколина јесте псеудоколина затвореног скупа $F$ и она не садржи $x$.

*(Саопштено 11. II. 1959)*

# L'INTRODUCTION DE TOPOLOGIE PAR UNE FAMILLE DE RELATIONS

BOGDAN BAJŠANSKI (BELGRADE)

Soit $F$ une famille de relations réflexives et symmétriques qui sont toutes définies sur un même ensemble $X$, telle que si $\varepsilon_1 \in F$, $\varepsilon_2 \in F$, alors il existe une relation $\varepsilon \in F$ telle que $\varepsilon \Longrightarrow \varepsilon_1$, $\varepsilon \Longrightarrow \varepsilon_2$.

Un sousensemble $O$ de $X$ est un ensemble $F$-ouvert si pour $x \in O$ existe une relation $\varepsilon = \varepsilon(x) \in F$ telle que $x \varepsilon y$ implique $y \in O$. On démontre que l'ensemble des $F$-ouverts satisfait aux axiomes topologiques, c. à. d. que les $F$-ouverts sont des ouverts au sens topologique. La famille de relations $F$ sur $X$ engendre donc une topologie dans $X$.

Théorème. *Soit $X$ un espace topologique, muni de la topologie $\tau$. Pourqu'il existe une famille de relations $F$ sur $X$ qui engendre la topologie $\tau$ dans $X$, il est nécessaire et suffisant que dans $X$ chaque ensemble fini qui est l'intersection d'une famille d'ensembles ouverts est un ensemble fermé.*

Corrollaire. *Chaque $T_1$-topologie peut être engendrée par une famille de relations.*

*Зборник радова Српске академије наука и уметности LXIX*
*Математички институт књ. 8, 1960*
*Recueil des travaux de l'Académie Serbe des Sciences et des Arts LXIX*
*Institut Mathématique № 8, 1960*

БРАНИСЛАВ МАРТИЋ

# ПРИМЕДБА НА ЈЕДНУ СТЕРЕОМЕТРИСКУ НЕЈЕДНАЧИНУ М. ПЕТРОВИЋА

**1.** Нека је $h$ висина а $\rho$ полупречник средњег круга зарубљене купе. Запремина $V$ такве купе може имати разне вредности тј. није одређена. М. Петровић [1] је показао да за запремину $V$ важи двострука неједначина:

$$\frac{2\pi}{3} h\rho^2 \leqq V \leqq \frac{5\pi}{3} h\rho^2 \tag{1}$$

и извео из тога закључак да не постоје две зарубљене купе које имају исти средњи круг и исту висину, а од којих би једна била по запремини више од $2^1/_2$ пута већа од друге.

У овом раду показујем да уместо (1) важи следећа процена

$$\pi h\rho^2 \leqq V \leqq \frac{4\pi}{3} h\rho^2 \tag{2}$$

и да је процена (2) најбоља могућа.

**2.** Нека су $\overline{x}$ и $\underline{x}$ полупречници кружних основа зарубљене купе са датом висином $h$ и полупречником $\rho$ средњег круга. Тада је њена запремина $V$

$$V = \frac{\pi h}{3}(\overline{x}^2 + \overline{x}\,\underline{x} + \underline{x}^2)\,. \tag{3}$$

Из

$$\rho = {}^1/_2(\overline{x} + \underline{x}), \quad 4\rho^2 = (\overline{x} + \underline{x})^2$$

и чињенице да је геометриска средина два ненегативна броја мања или једнака њиховој аритметичкој средини, тј.

$$\sqrt{\overline{x}\,\underline{x}} \leqq \frac{\overline{x} + \underline{x}}{2}, \quad \overline{x}\,\underline{x} \leqq \frac{(\overline{x} + \underline{x})^2}{4}\quad,$$

имамо

$$\overline{x}^2+\overline{x}\,\underline{x}+\underline{x}^2=(\overline{x}+\underline{x})^2-\overline{x}\,\underline{x}\geqq 4\rho^2-\rho^2=3\rho^2 \tag{3'}$$

а затим

$$\overline{x}^2+\overline{x}\,\underline{x}+\underline{x}^2=(\overline{x}+\underline{x})^2-\overline{x}\,\underline{x}\leqq 4\rho^2\,. \tag{3''}$$

Из (3), (3′) и (3″) излази управо (2).

Да би показали да је нађена процена (2) и најбоља могућа потребно је и довољно да нађемо два примера за која је

$$\underline{V}=\pi h\rho^2$$

и

$$\overline{V}=\frac{4\pi}{3}h\rho^2$$

а то су баш екстремни случајеви и то: $\underline{V}$ је запремина ваљка са полупречником основе $\rho$ и висином $h$, а $\overline{V}$ је запремина купе са полупречником основе $2\rho$ и висином $h$.

*(Примљено 15-II-1960)*

## ЛИТЕРАТУРА

[1] М. Петровић — Стереометриске неједначине. *Зборник радова Математичког института С. А. Н.* **3** (1953), 1—4.

## REMARQUE SUR UNE INEGALITÉ STÉRÉOMETRIQUE DE M. PETROVITCH

BRANISLAV MARTIĆ (Sarajevo)

Par un procédé tout-à-fait élémentaire l'auteur a donné les limites les meilleures possibles entre lesquelles se trouve le volume $V$ d'un cône tronqué dont on connaît la hauteur $h$ et le rayon $\rho$ du cercle moyen.

*Зборник радова Српске академије наука и уметности LXIX*
*Математички институт књ. 8, 1960*
*Recueil des travaux de l'Académie Serbe des Sciences et des Arts LXIX*
*Institut Mathématique № 8, 1960*

N. PAREZANOVICH and J. PETRICH[1]

# A SOLUTION OF THE SYSTEM OF BALANCE EOUATIONS OF GASEOUS COMBUSTION PRODUCTS BY „UNIVAC-60" DIGITAL COMPUTING MACHINE

## I — SUMMARY

Solution of the problem of finding the balance of a gaseous mixture is rather frequently encountered both by chemical engineers and chemists dealing with rocket propellant research. This problem is defined by a non-linear system of algebraic equations, the computation of which is a lengthy and tiresome numerical job. The numerical solution of such a problem by desk computing machines requires several days of work for each separate solution, and is of course subject to human errors made by the calculator himself. It, therefore, became apparent that the use of Digital Computing Machine was indispensable. So far, this problem has been tackled by high memory capacity computing machines, but since many of the engineers dealing with it cannot have such machines made readily available to them, the authors believe that there should be given a method of solving the problem by employing the optimum efficiency of low capacity digital computing machines. A complete solution is given here for all components of the solution, this being the most complicated part of the problem. No numerical difficulties should be experienced by using the calculated components for plotting the $(i, s)$ $T$-diagrams.

## II — INTRODUCTION

The problem at issue has been dealt with by quite a number of authors, all of whom proceeded from the well known system of nonlinear algebraic equations used to define the balance of a gaseous mixture. Some variations may be noted in the mathematical treatment of this problem by different authors, such variations being the result of different approaches to the problem as well as different methods used for this purpose [1—3]. The so-called method of trial-and-error has been used most frequently and it has also been used in this paper. Up till now, the problem involved has been solved by employing either the desk computing machines or the high me-

[1] Inst. of Nuclear Sciences „B. Kidrich", Belgrade, Yugoslavia

mory digital computing machines, both of which types of computing machines, most certainly, having their disadvantages. The digital computing machines of higher memory capacity are not readily available to a majority of experts engaged with this kind of problem.

However, it is of considerable interest to show that the smaller digital computing machines, operating at their optimum efficiency, can be used most successfully by engineers who study the matter.

For successful solution of the system of non-linear algebraic balance equations for a gaseous mixture by means of the UNIVAC-60 computing machine, it is necessary to draw particular attention to the optimum efficiency of the memorycapacity feature of the machine as well as the transformation of the working equations. The former of these requirements is allowed for by the proper employment of selectors, while the latter is fulfilled by writing the working equations in a more suitable form, which is very useful in establishing operating programmes.

This paper brings forth a complete solution for all components of the system, this being the most complicated numerical part of the whole job. Further employment of the results obtained for practical purposes, such as plotting the $(i, s)$ $T$-diagrams, does not create any numerical difficulties and therefore will not be dealt with by this paper. It has been felt that it will be superfluous to discuss the thermodynamical and chemical aspects of the problem, particularly because these questions have already been treated by numerous other authors.

Logical schedules have been used in establishing the working programme for the machine. This method of approaching the setting up of the programme enables an easy and quick establishment of the basic idea of the programme. In these schedules details which may hinder complete anticipation of the problem are omitted. The logical schedule has been drawn up for the entire problem and does not apply to any particular machine. Since, however, such a programme could not have taken up by a single pair of programme discs of the UNIVAC-60 computing machine, it has been broken down into three parts. It was particularly important to include in the first pair of discs the iteration method of working out the unknown quantities from the working equations. The next part of the programme is working out the sum in view of the anticipated value of this sum. The number of corrections depends on the accuracy required and usually is not higher than 4. The third and last part of the programme is in fact the working out of all the ten components of a given system.

The current schedules of the entire programme are given for UNIVAC-60 with complete arrangement instructions for storage and selectors.

## III — MATHEMATICAL BASIS OF THE PROBLEM

For the mathematical treatment of this problem, a start will be made from the well known equations (1 through 10) without going into their origin, which may be found in many reference books and papers by a number of authors who have so far dealt with the problem of stability of a gaseous mixture. These equations take the following form:

$$\frac{n_{H_2O}\, n_{CO}}{n_{H_2} n_{CO_2}} = K_1 \;(1),\quad \frac{n_{NO}\, n_{H_2}}{n_{N_2}^{1/2}\, n_{H_2O}} = K_8 \left(\frac{\sigma}{p}\right)^{1/2} (2),\quad \frac{n_{H_2}^2\, n_{O_2}}{n_{H_2O}^2} = K_6 \left(\frac{\sigma}{p}\right) (3),$$

$$\frac{n_{H_2} \cdot n_O}{n_{H_2O}} = K_7 \left(\frac{\sigma}{p}\right) (4),\quad \frac{n_H}{n_{H_2}^{1/2}} = K_9 \left(\frac{\sigma}{p}\right)^{1/2} (5),\quad \frac{n_{H_2}^{1/2} \cdot n_{OH}}{n_{H_2O}} = K_{10} \left(\frac{\sigma}{p}\right)^{1/2} (6),$$

$$2n_{H_2} + 2n_{H_2O} + n_{OH} + n_H = H \;\; (7),$$

$$n_{H_2O} + n_{CO} + 2n_{CO_2} + 2n_{O_2} + n_{NO} + n_{OH} + n_O = O \;\; (8),$$

$$n_{CO} + n_{CO_2} = C \;\; (9), \quad 2n_{N_2} + n_{NO} = N \;\; (10).$$

In these equations, there are variables, constants and parameters as well as the sum

$$\sigma = n_{H_2} + n_{H_2O} + n_{CO} + n_{CO_2} + n_{O_2} + n_{N_2} + n_{OH} + n_{NO} + n_O + n_H .$$

They are listed together with the corresponding mathematical symbols in the following table.

Table 1. — Translation of the chemical notations into mathematical notations

| Variables | Constants | Parameters |
|---|---|---|
| $n_{H_2} \rightarrow x_1$ | $H \rightarrow a_1$ | $K_1$ |
| $n_{H_2O} \rightarrow x_2$ | $O \rightarrow a_2$ | $K_8$ |
| $n_{CO} \rightarrow x_3$ | $C \rightarrow a_3$ | $K_6$ |
| $n_{CO_2} \rightarrow x_4$ | $N \rightarrow a_4$ | $K_7$ |
| $n_{O_2} \rightarrow x_5$ | $p \rightarrow p$ | $K_9$ |
| $n_{N_2} \rightarrow x_6$ | | parameters dependant upon the temperature |
| $n_{OH} \rightarrow x_7$ | | |
| $n_{NO} \rightarrow x_8$ | | |
| $n_O \rightarrow x_9$ | | |
| $n_H \rightarrow x_{10}$ | | |

By using the symbols from Table 1, the equations (1 through 10) will yield, when the terms $x_3$, $x_4$, $x_5$, $x_6$, $x_7$, $x_9$ and $x_{10}$ have been eliminated, the following three equations:

$$x_2 = \frac{a_1 - 2x_1 - K_9 (\sigma/p)^{1/2} x_1^{1/2}}{2 + \dfrac{K_{10} (\sigma/p)^{1/2}}{x_1^{1/2}}}, \tag{11}$$

$$x_8 = a_2 - a_3 \frac{K_1 x_1 + 2x_2}{K_1 x_1 + x_2} - x_2 \left\{ 1 + \frac{K_{10} (\sigma/p)^{1/2}}{x_1^{1/2}} + \frac{K_7 (\sigma/p)}{x_1} \right\} - 2K_6 \left(\frac{\sigma}{p}\right) \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2, \tag{12}$$

$$\frac{2x_8^2\, x_1^2}{K_3^2(\sigma/p)\, x_2^2} + x_8 - a_4 = 0\,, \tag{13}$$

where $x_i$ ($i = 1,2,...,10$) are the components of $\sigma = \sum_{i=1}^{10} x_i$

Thus, the problem of solving the system of non-linear algebraic equations (1 through 10) has been reduced to solving the equations (11 through 13) instead.

However, the equations (11 through 13) in their present form are not very suitable for programming on the low memory capacity computing machines.

Therefore, they are transformed into a more suitable form, such as

$$y = \frac{a_1 - x^{1/2}[2x^{1/2} + K_9(\sigma/p)^{1/2}]}{x^{1/2}[2x^{1/2} + K_{10}(\sigma/p)^{1/2}]}\,, \tag{14}$$

$$z = \frac{a}{y} - \frac{a_3}{K_1 + y} - x^{1/2}\left[x^{1/2} + K_{10}\left(\frac{\sigma}{p}\right)^{1/2} - \frac{\sigma}{p}(K_7 + 2K_8 y)\right], \tag{15}$$

$$F(y,z) \equiv z^2 - \frac{K_3}{2}\left(\frac{\sigma}{p}\right)(a_4 - yz) = 0\,, \tag{16}$$

where

$$x = x_1\,,\ y = \frac{x_2}{x_1}\,,\ z = \frac{x_8}{\frac{x_2}{x_1}} \qquad \text{and} \qquad a = a_2 - a_3\,.$$

We have called these equations working equations, and they will prove to be more convenient for programme making than their previous form (equations 11 through 13) has ever been. Computing the factors $x$, $y$ and $z$ from Equations (14 through 16) may be accomplished with sufficient accuracy by applying the so-called trial-and-error method, which consists in the following: one assumes the value for $x^{1/2}$ in Eq. (14) and works out the value for $y$, while Eq. (15) produces the value for $z$ by introducing into Eq. (15) the assumed values for $x^{1/2}$ and $x$, and the previously computed value for $y$. Thus, for the computed values for $y$ and $z$, with assumed value for $x^{1/2}$, Eq. (16) should be fully satisfied. The values for $x$, $y$ and $z$ obtained on the basis of assumptions, as shown above, will be the solutions for Equations (14 through 16). If the values for $x$, $y$ and $z$ be such that using Eq. (16), $|F(y,z)| \leqq 10^{-4}$, the system components will be sufficiently accurate. There are several values for $x$, $y$ and $z$ which may satisfy the condition of $|F(y,z)| \leqq 10^{-4}$ but the first of them to satisfy this condition will be discharged by the machine as the result of the problem.

Computation of the system components is most conveniently carried out by the following equations:

$$x_1 = x \qquad (17), \qquad\qquad x_2 = x \cdot y \qquad (18),$$

$$x_3 = \frac{a_3 K_1}{K_1 + y} \qquad (19), \qquad\qquad x_4 = \frac{a_3 y}{K_1 + y} \qquad (20),$$

$$x_5 = K_6 \left( \frac{\sigma}{p} \right) y^2 \qquad (21), \qquad\qquad x_6 = \frac{a_4 - yz}{2} \qquad (22),$$

$$x_7 = K_{10} \left( \frac{\sigma}{p} \right)^{1/2} x^{1/2} y \qquad (23), \qquad\qquad x_8 = y \cdot z \qquad (24),$$

$$x_9 = K_7 \left( \frac{\sigma}{p} \right) y \qquad (24), \qquad\qquad x_{10} = K_9 \left( \frac{\sigma}{p} \right)^{1/2} x^{1/2} \qquad (26).$$

If greater accuracy is required for the system components $x_i (i = 1, 2, \ldots, 10)$ the value for $| F(y, z) |$ should be chosen to be as low as possible. To do this, particular attention should be paid to the respective amounts by which $x^{1/2}$ and $x$ are corrected in Equations (14 through 16).

An expression for $\sigma$ is readily obtainable from Equations (17 through 26) in the following manner:

$$\sigma = \frac{1}{2} \left\{ a_1 + a + a_4 - y \left[ x + \frac{a_3}{K_1 + y} - K_7 \left( \frac{\sigma}{p} \right) \right] + K_9 \left( \frac{\sigma}{p} \right)^{1/2} x^{1/2} \right\} + a_3 . \qquad (27)$$

This expression for $\sigma$ is very useful for programmes making, as it does not make it necessary to work out the system components $x_i$ $(i = 1, 2, \ldots, 10)$ until the required accuracy for $\sigma$ is obtained.

## IV — LOGICAL SCHEDULES

The problem of programme making has been tackled by means of logical schedules, since they permit an easy understanding of the problem in its entirety as well as of the method used to solve it.

An effort has been made to reduce the number of symbols in these schedules to a minimum without neglecting the need for making the logical schedules clear. The symbols used in the logical schedules are as follows:

$A_i$ — Arithmetic operation (one or more arithmetic operations).

$q_i$ — Conclusion which may affect the course of the programme. An explanation is given in brackets after the symbol $q_i$, as to what kind of conclusion is in question. Provided the condition given in the brackets is fulfilled, the programme is continued with the next operation in the same line. If this is not the case, the programme is directed to the operation indicated by the arrow. The condition in the brackets may consist either of a perforated hole in the card or of any result of mathematical operations. For example, in the logical schedule

$$A_1 \, q_1 (0/1) \quad A_2 \, q_2 (x > 0) \quad A_3$$

the condition $q_1$ is to be understood as meaning that if there is a zero in the first column of the card, the programme should be transferred to the arithmetical operation $A_2$. If, on the other hand, there is no zero in the first column, the programme goes over to the arithmetical operation $A_3$. In the same logical schedule, the condition $q_2$ has the following meaning: if $x > 0$, the programme is passed over to the mathematical operation $A_3$, and, if however, $x \leq 0$, the operation $A_1$ is carried out instead.

$S$ — sorting out sequence. A card bearing this symbol is directed to the sorting storage space.

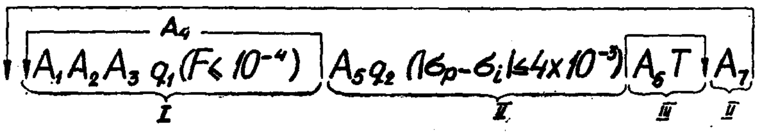
$\downarrow$ — perforation, the object of perforation being given in brackets following the symbol.

$C_i$ — storage cancellation.

$T$ — card discharge and end of programme.

$\eta_i$ — programe is following the path indicated by the arrow only.

A complete logical schedule for the solution of a system of nonlinear algebraic equations of balance in a gaseous mixture may be written in the following form:




In this schedule, $A_1$ represents the group of arithmetical operations needed to compute $y$ by means of the first working equation, $A_2$ represents the arithmetical operation needed to compute $z$, while $A_3$ denotes the arithmetical operations of the third working equation.

The conclusion $q_1$ refers to the degree of accuracy with which a check is made of the condition $|F(y, z)| \leq 10^{-4}$ by means of the third working equation. If $|F(y, z)| \leq 10^{-4}$, $\sigma$ may be worked out; if not, however, a correction of $x^{1/2}$ is made by the operation $A_4$ and the procedure just outlined follows anew.

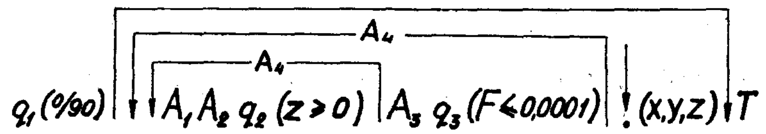
Having completed the computation of $\sigma_i$, $(A_5)$, a check is made, by comparing the value of $\sigma_i$ with the previous $\sigma_p$, whether it satisfies the condition or not. If $|\sigma_p - \sigma_i| \leq 4 \times 10^{-8}$ as worked out by the operation $(A_5)$, the computation of all the ten components of the system $(A_6)$ may start, thus completing the programe $(T)$. If the condition is not satisfied, then the term $(\sigma/p)^{1/2}$ $(A_7)$ should be worked out and the procedure is repeated until a satisfactory result is obtained.

For the logical schedule given above, the computation programme could not have been made out on a single pair of UNIVAC-60 programme cards, so it was divided into three parts, I, II and III.

The first pair of the programme cards (I) contain the corrections of the assumed values for $x^{1/s}$ and $x$, until the condition $|F(y, z)| \leqq 10^{-4}$ is fulfilled. The second pair of the programme cards (II) provides for the computation of $\sigma$ and its corrections until the prescribed condition is fulfilled. Thus, the entire numerical operation of determination of $x, y, z, \sigma$ and $|F(y, z)|$ satisfying the required accuracy, is solved on two pairs of programme cards. It should be noted here, that this is the most complicated part in solving this problem. The working out of values for each component of the system should not make any difficulty since the equations for their solutions are very simple. This can be carried out by the third pair of programme cards (III).

*Logical Schedule for Programme I*

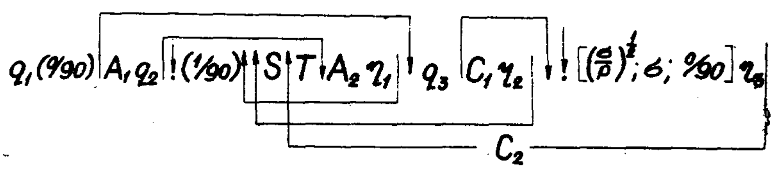
A more complete logical schedule for programme (I) should be given in the form:




where $q_1$ denotes that the programme is to be continued depending on whether the card contains a zero in the ninetieth column (0/90), or not. For each solution, $k+1$ card are required for $k$ corrections, and only the first card from that set has (0/90). $A_1$ are the arithmetical operations needed to work out $y$, $A_2$ those for $z$, $A_3$ for $F$, and finally $A_4$ is an arithhemical operation to correct $x^{1/s}$ and $x$. Since physical conditions impose a restriction that all the values or $x_i$ ($i=1,2,...,10$) be positive, then $q_2$ is a condition for working out $F$ from the third working equation, provided that $z \geqq 0$ from the second working equation. By means of $q_3$ a check is made to see whether the values for $x^{1/s}$ and $x$, computed by means of the assumed values for $y$ and $z$, do satisfy the condition that $F$ from the third working equation is such that $|F(y, z)| \leqq 10^{-4}$.

*Logical Schedule for Programme II*

This schedule may be written as follows:



where $q_2$ denotes a check whether $\sigma$ is satisfactory or not. If it is, a perforation is made of sign 1 in the ninetieth column (1/90). If it is not, the calculation of $(\sigma/p)^{1/2}$ is taken out. It is important to note that the card which satisfies both $F$ and $\sigma$ receives the (1/90) performation, thus providing for the final selection of the (1/90) card, only bearing solutions satisfying the condition. The symbol $q_3$ means that the programme is to be taken out depending on whether the previous card received the (1/90) perforation or not. If the card contains (1/90), the storages are cancelled and the programme is completed. If it does not, perforations of $(\sigma/p)^{1/2}$, $\sigma$ and (0/90) are required for the next correction. $C_1$ and $C_2$ both denote cancellations.

*Logical Schedule for Programme III*

A logical schedule for the computation of all system components $x_i$ $(i=1,2,\ldots,10)$ can be written in this way:

$$q_1(3/90)\; q_2(1/90)\; A_1 S \downarrow\; \uparrow\uparrow T \downarrow q_3(1/90)\; A_2 \,\dot{\downarrow}\, (3/90)\, \eta_1 \downarrow\; \dot{\downarrow}(*) C \eta_2$$

where $A_1$ denotes computation procedures for $x_1$, $x_2$, $x_7$, $x_9$ and $x_{10}$ while $A_2$ denotes such procedures for $x_3$, $x_4$, $x_5$, $x_6$ and $x_8$ $\dot{\downarrow}$(*)-denotes perforation of $x_3$, $x_4$, $x_5$, $x_6$, $x_8$ and (3/90) as well as $x_1$, $x_2$, $x_7$, $x_9$, $x_{10}$ and (3/90).

## V — EMPLOYMENT OF THE UNIVAC-60 MACHINE

The UNIVAC-60 is an electronic computing machine operating on the perforated cards principle. It consists of an electronically powered arithmetical unit and an input-output unit partly mechanical, partly electronic. The operation speed depends upon the arithmetical operations which take place. The length of time required for individual operations is as follows:

| | | |
|---|---|---|
| addition | 10 msec | |
| subtraction | 10 msec | |
| multiplication | 50 msec | for two five-digit numbers |
| division | 50 msec | |

The length of time for mechanical passage is as long as 200 msec, permitting a card flow of 9000 cards per hour, depending on numbers and types of operations.

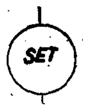
*Capacity of the UNIVAC-60*

| | |
|---|---|
| Electronic storage | $6 \times 10$ digits |
| Input storage | 90 digits |
| Output storage | 90 digits |
| Constants | 27 digits |
| Selectors | 18 |
| Programme steps | 20 |
| Elements | 12 |

Symbols used in a current programme schedule are as follows:

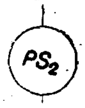
$\sigma[H_3] \times [S_3] ==> [S_5]$ — denoting that the first value is the element $N_3$, while the second value is located in the storage space $S_3$. The multiplication result is contained in the storage space $[S_5]$. If letters $a$ and $b$ are found adjacent to the programme step number, they denote that the programme step is used twice, i. e., $a$, for the first passage, and $b$, for the second passage following the selection.


$[S_2]\ [S_3]$ — cancellation of values kept in storage spaces $S_2$ and $S_3$.

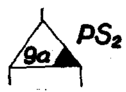



$[S_4]\ [S_5]$ — perforation of cards with results contained in storage spaces $S_4$ and $S_5$.


— sorting.

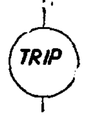



— shifting the selector control into „SELECTOR" position. The UNIVAC-60 machine has four *PS* (Programme Selector) controls. The programme card should contain special indication, such as „SEL. HOLD" adjacent to the $PS_2$ control symbol if the selector control is to be left in the „SELECTOR" position after the „TRIP" order is given.




— selector. The selector number is written inside the symbol, whereas another indication appearing adjacent to it denotes the selector control to be used. The selector side is that side of the symbol triangle bearing the indication.


— start of programme.




— end of programme and discharge of the card into the output storage space.

*Operation of the* UNIVAC-60 *Computing machine*

The card set up is such as to make unnecessary any reproduction of data from one card to another. In addition, no sorting of cards is necessary. In other words, when all cards are properly set up, and the machine starts its operation, the procedure goes on until the whole job is done. For each solution, three or four corrections have been made, but it is also possible to make any additional number of corrections, if required. Should $k$ corrections be made for any one solution, then it is necessary to have $k+1$ cards, ensuring that only the first card has the symbol (0/90) and the assumed values for $x^{1/2}$ and $\sigma$.

The problem of balance of a gaseous mixture is of such a nature that system components of a related problem group should be found where $a_i$ are permanent constants, while $K_i$ are variable parameters. Let $n$ be the number of related problems, and $k$ the number of corrections required for the solution of each problem, then the total number of cards used to solve the related group is $n(k+1)$. Only the first one of all $n(k+1)$ cards used, has been perforated as an assumed value for $x^{1/2}$. Since a related group contains $n$ related problems, their cards arranged either in accordance with decreasing or increasing values for $K_i$, it has been found suitable to employ the corrected value for $x^{1/2}$ of the previous problem as an assumed value for the next problem of the same related group. In other words, the computed values for $x^{1/2}$ and $x$, respectively, obtained from the first correction, are to be used as assumed ones for the next corrections.

Assuming the values for $x^{1/2}$ instead of $x$ is one of the great facilities in solving this problem. In this way, the solution is obtained much more readily, programme making is less complicated and the employment of the machine memory capacity more efficient. On the strength of the great number of problems solved by the UNIVAC-60 computing machine, we may draw the conclusion that the time required for each solution is one minute.

Fig. 1 represents a current diagram for programme (I). It should be noted that when the first correction for $x^{1/2}$ is worked out, storages $S_2$ and $S_3$ are not cancelled, thus permitting, as mentioned before, that computed values for $x^{1/2}$ from a preceding problem be used as an assumed value for the next one belonging to the same related group of problems. When working out the second, third, etc., corrections, storages $S_2$ and $S_3$ are cancelled.

The programme selector $PS_1$ permits the selection of values in programme steps 3 through 15, and together with the programme selectors

$PS_2$ and $PS_4$, makes it possible to use the iterative method of correcting the value for $x^{1/2}$; on the other hand, the programme selector $PS_3$ is used to determine whether the values for $x$ should be decreased or increased.

The elements and storages used for programme (I) have the following values:

$$[N_1] \Longrightarrow x^1/_2 \text{ assumed}, \qquad [N_2] \Longrightarrow 0, \qquad [N_3] \Longrightarrow \frac{K_3^2}{2},$$

$$[N_4] \Longrightarrow \left(\frac{\sigma}{p}\right)^{1/2} \text{ or } |F| = 10^{-4}, \quad [N_5] \Longrightarrow a_1, \qquad [N_6] \Longrightarrow K_{10},$$

$$[N_7] \Longrightarrow K_1 \text{ or } 10^{-3}, \qquad [N_8] \Longrightarrow a_3, \qquad [N_9] \Longrightarrow 2K_6,$$

$$[N_{10}] \Longrightarrow K_7, \qquad [N_{11}] \Longrightarrow K_9 \text{ or } a, \qquad [N_{12}] \Longrightarrow a_4,$$

$$[S_1] \Longrightarrow z, \quad [S_2] \Longrightarrow x^{1/2}, \quad [S_3] \Longrightarrow x^{1/2}; \quad [S_4] \Longrightarrow y.$$

The values read directly from the cards are:

$$x^{1/2} \text{ assumed' } K_1, \ \frac{K_3^2}{2}, \ 2K_6, \ K_7, \ K_9, \ K_{10} \text{ and } \left(\frac{\sigma}{p}\right)^{1/2},$$

while those read from the programme discs are

$$a_1; \ a_3; \ a_4; \ a; \ 0; \ 10^{-4} \text{ and } 10^{-3}.$$

The current diagram for Programme (II) is shown in Fig 2. The first step in this programme is designed to shift the selector 2, if (0/90) exists. If such a step does not exist, the selector might not be shifter into position „SELECTOR" and the programme would follow a wrong course. The result of the 13th programme step operation is always negative and it is used to perforate (1/90). The programme will follow the course of this programme step only if the computed value for $\sigma$ gives the required accuracy. Should the contrary be the case, the value for $(\sigma/p)^{1/2}$ is worked out and the card is sorted. For the next cards, namely those for a solution, the programme either follows the 20th programme step or not, depending on whether the solution has given the accuracy required for $\sigma$. If the preceding solution is corrected, the following card is perforated at $(\sigma/p)^{1/2}$, $\sigma$ and (0/90), since the result of the arithmetical operation in the 20th programme step is always negative. Connection with the „SEL. HOLD" position is interrupted when the $PS_3$ starts to operate.

The elements and storages used for programme (II) have following values:

$$[N_1] \Longrightarrow K_1, \text{ or } 1, \quad [N_2] \Longrightarrow y, \quad [N_3] \Longrightarrow a_3, \quad [N_4] \Longrightarrow x^{1/2},$$

$$[N_5] \Longrightarrow \left(\frac{\sigma}{p}\right)^{1/2}, \quad [N_6] \Longrightarrow K_7 \text{ or } |\sigma_p - \sigma_i| = 4 \times 10^{-3}, [N_7] \Longrightarrow a_1,$$

$$[N_8] \Longrightarrow \sigma \text{ or } a, \quad [N_9] \Longrightarrow a_4, \ [N_{10}] \Longrightarrow K_9, \ [N_{11}] \Longrightarrow 2,$$

$$[N_{12}] \Longrightarrow p, \quad [S_2] \Longrightarrow \sigma, \ [S_3] \Longrightarrow \left(\frac{\sigma}{p}\right)^{1/2}.$$

The elements read directly from the cards in this programme are: $x^{1/2}$, $y$, $K_1$, $K_7$, $K_9$, $\sigma_i$ and $(\sigma/p)^{1/2}$, while those read from the programme panel are:

$$a_1;\ a_3;\ a_4;\ a;\ p;\ 2;\ 1 \text{ and } 4\times 10^{-3}$$

The current diagram for programme (III) is shown in Fig. 3. This programme is used only when the values for $x$, $y$ and $z$ are found from all problems. Such solutions are perforated into the cards bearing the sign (1/90). Two empty cards should be inserted next to each of these cards, on which solutions for $x_i$ $(i=1,2,\dots,10)$ will be perforated, the computations and perforations for $x_3$, $x_4$, $x_5$, $x_6$ and $x_8$ taking place during the first passage, and those for $x_1$, $x_2$, $x_7$, $x_9$ and $x_{10}$ during the second passage. The programme for determining all the ten components is set up by means of Equations (17 through 26). The elements and storages used have the following values:

$$[N_1] \Longrightarrow \left(\frac{\sigma}{p}\right)^{1/2}, [N_2] \Longrightarrow 2K_6, \quad [N_3] \Longrightarrow y, \quad [N_4] \Longrightarrow z,$$

$$[N_5] \Longrightarrow K_{10}, \quad [N_6] \Longrightarrow K_7, \quad [N_7] \Longrightarrow K_9, \ [N_8] \Longrightarrow x^{1/2}$$

$$[N_9] \Longrightarrow K_1, \quad [N_{10}] \Longrightarrow a_3, \quad [N_{11}] \Longrightarrow 2 \quad [N_{12}] \Longrightarrow a_4,$$

$$[S_1] \Longrightarrow x_8, \text{ or } x_9, \quad [S_3] \Longrightarrow x_5, \text{ or } x_{10}, \quad [S_4] \Longrightarrow x_6, \text{ or } x_7,$$

$$[S_5] \Longrightarrow x_3, \text{ or } x_1, \quad [S_6] \Longrightarrow x_4, \text{ or } x_2\,.$$

The following values are read directly from the cards

$$x^{1/2},\ y,\ z,\ K_1,\ 2K_6,\ K_7,\ K_9,\ K_{10} \text{ and} \left(\frac{\sigma}{p}\right)^{1/2},$$

while those read from the discs are:

$$a_3,\ a_4 \text{ and } 2.$$

*(Received 6-IV-1960)*

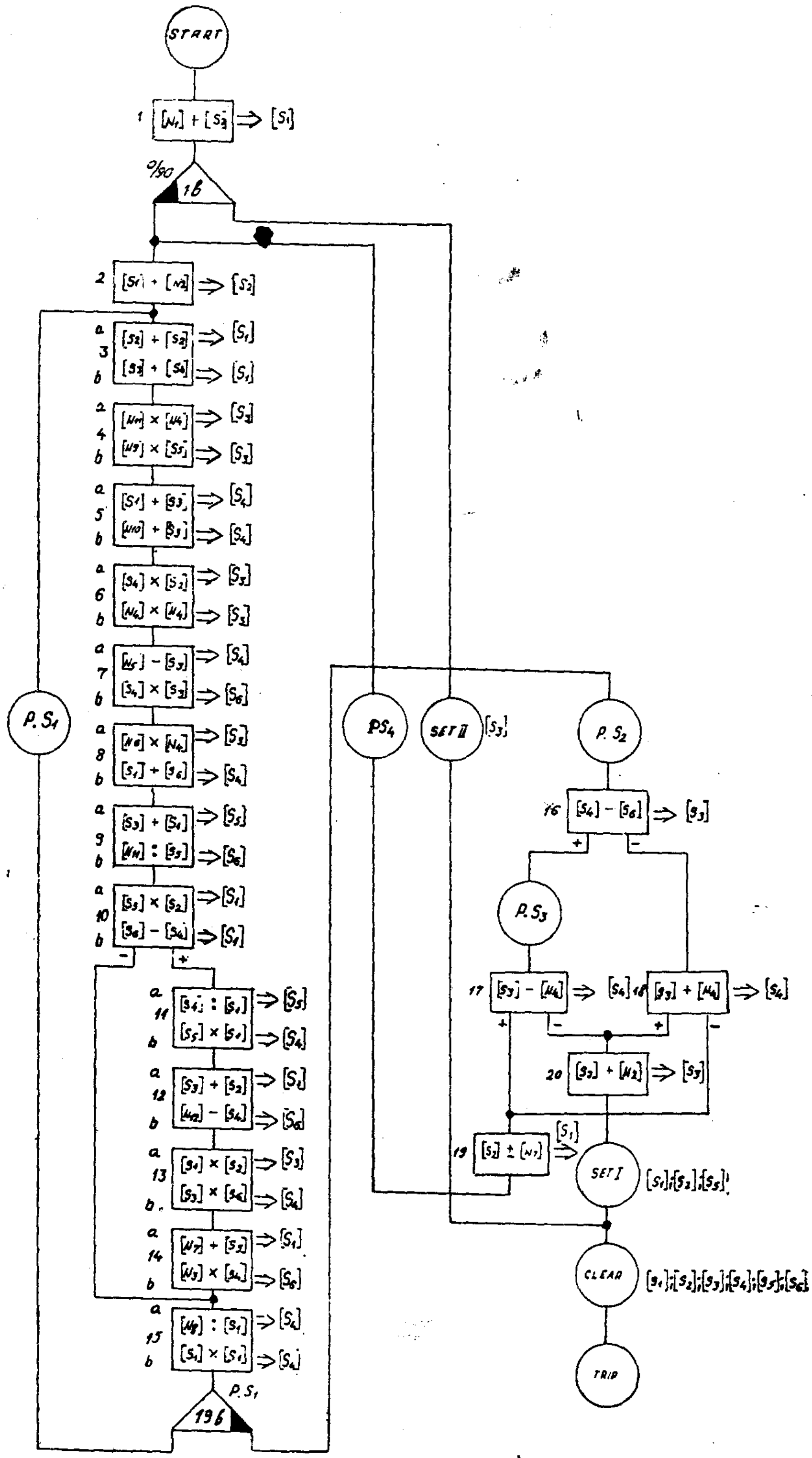



Fig. 1

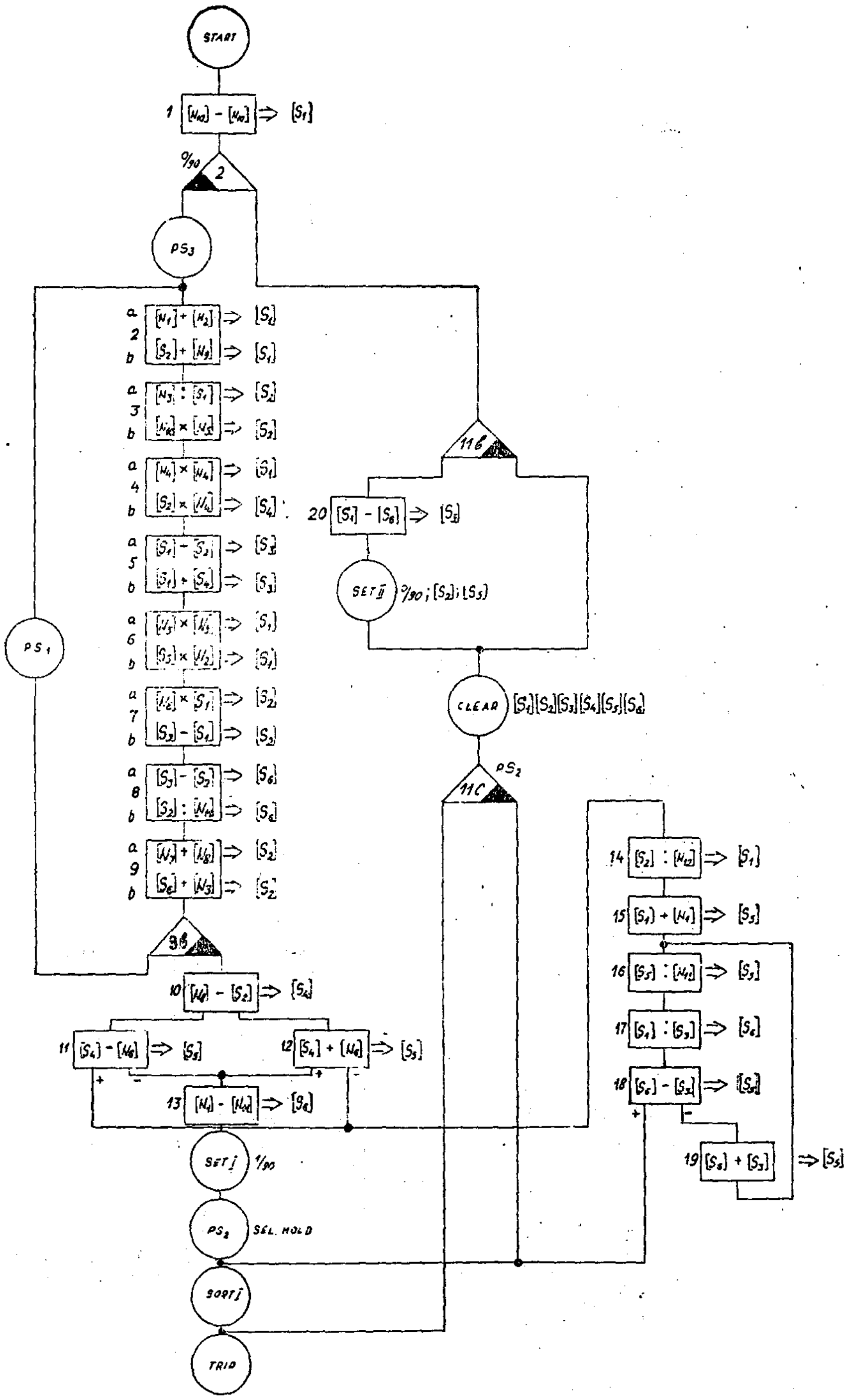


Fig. 2

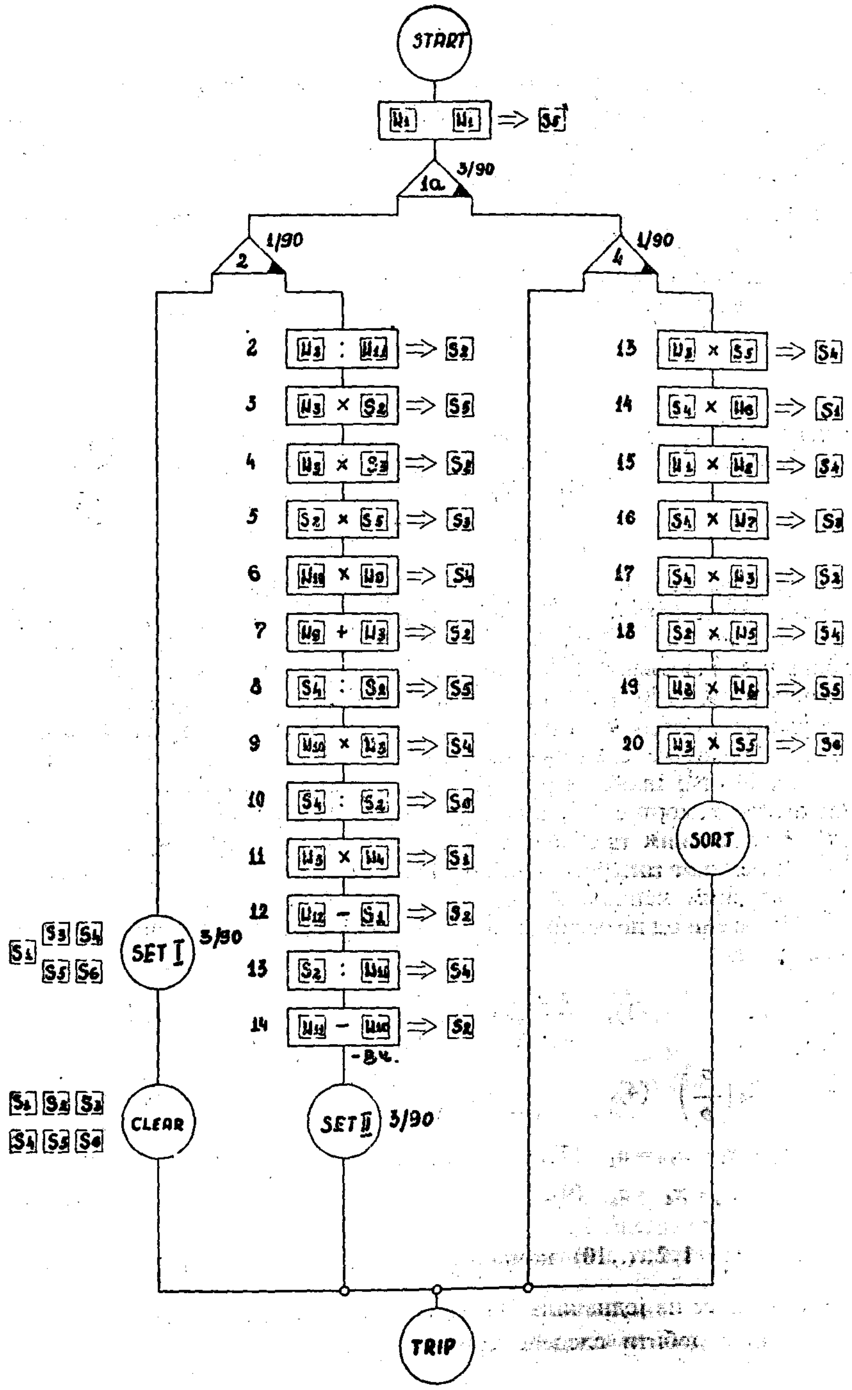



Fig. 3

## REFERENCES


[1] A. J. Donegan and M.F arber — Solution of Thermochemical Propellant Calculations on a High-Speed Digital Computer, *Jet propulsion* No 3 (1956), 164—171.

[2] R. N. Wimpress — Internal ballistics of solid-fuel rockets, Mc Graw-Hill Book Company, Inc., New York, 1950.

[3] B. Lewis, R. N. Pease, H. S. Taylor — Processes combustion, vol] II, New Jersey, Princeton 1956.

[4] Programming univac 60 and Univac 120 punched — card electronic computers. Remington Rand Univac Division of Sperry Rand Corporation.


# РЕШЕЊЕ СИСТЕМА ЈЕДНАЧИНА РАВНОТЕЖЕ ГАСНИХ ПРОДУКАТА САГОРЕВАЊА ПОМОЋУ ДИГИТАЛНЕ МАШИНЕ „UNIVAC-60"

Н. Парезановић и Ј. Петрић (Београд)

Решење проблема равнотеже у гасној смеши се врло често среће у пракси технолога и хемичара који раде на проучавању састава горива. Овај проблем је дефинисан системом нелинеарних алгебарских једначина чије решавање, ако се користе стоне машине, захтева велики нумерички посао који траје више дана и праћен је субјективним грешкама калкуланата. Отуда је за решавање овог проблема неопходно користити модерна техничка средства као - што су дигиталне рачунске машине. До сада је овај проблем решаван помоћу дигиталних машина великих капацитета меморије [1], али како многи инжењери који се у својој пракси баве овим проблемом немају на располагању овакве машине, то је од великог интереса показати како се овај проблем може решавати на дигиталним машинама малог капацитета меморије.

Полазећи од познатих једначина са којима је дефинисана равнотежа гасне смеше

$$\frac{x_2 \cdot x_3}{x_1 \cdot x_4} = K_1 \quad (1), \qquad \frac{x_1 \cdot x_8}{x_2 \cdot x_6^{1/2}} = K_3\left(\frac{\sigma}{p}\right)^{1/2} \quad (2), \qquad \frac{x_1^2 \cdot x_5}{x_2^2} = K_6\left(\frac{\sigma}{p}\right) \quad (3),$$

$$\frac{x_1 \cdot x_9}{x_2} = K_7\left(\frac{\sigma}{p}\right) \quad (4), \qquad \frac{x_{10}}{x_1^{1/2}} = K_9\left(\frac{\sigma}{p}\right)^{1/2} \quad (5), \qquad \frac{x_1^{1/2} \cdot x_7}{x_2} = K_{10}\left(\frac{\sigma}{p}\right)^{1/2} \quad (6),$$

$$2x_1 + 2x_2 + x_7 + x_{10} = a_1 \quad (7), \qquad x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 + x_7 + x_8 + x_9 = a_2 \quad (8),$$

$$x_3 + x_4 = a_3 \quad (9), \qquad 2x_6 + x_8 = a_4 \quad (10),$$

где су $x_i$ $(i=1,2,\dots,10)$ компоненте састава а $\sigma = \sum_{i=1}^{10} x_i$, није тешко показати да се из једначина (1—10), елиминисањем $x_3$, $x_4$, $x_5$, $x_6$, $x_7$, $x_9$ и $x_{10}$, могу добити следеће три једначине

$$y = \frac{a_1 - x^{1/2}\,[2x^{1/2} + K_9\,(\sigma/p)^{1/2}]}{x^{1/2}[2x^{1/2} + K_{10}\,(\sigma/p)^{1/2}]} \tag{11}$$

$$z = \frac{a}{y} - \frac{a_3}{K_1 + y} - x^{1/2}\left[x^{1/2} + K_{10}\left(\frac{\sigma}{p}\right)^{1/2}\right] - \left(\frac{\sigma}{p}\right)(K_7 + 2K_6 y) \tag{12}$$

$$F(y, z) \equiv z^2 - {}^1/_2 K_2^3 \left(\frac{\sigma}{p}\right)(a - yx) = 0, \tag{13}$$

које смо назвали радним једначинама. У једначинама (11—13) задржане су све ознаке из једначина (1—10) осим $x = x_1$, $y = \dfrac{x_2}{x_1}$, $z = \dfrac{x_8}{x_2/x_1}$ и $a = a_2 - a_3$.

Једначине (11—13) су много погодније за прорачун компонената сагоревања од оних једначина које су дате у [1], [2] и [3]. Израчунавање $x$, $y$ и $z$ може се извршити са задовољавајућом тачношћу ако се искористи тзв. метод покушаја и грешке који се састоји у следећем: претпостави се вредност $x^{1/2}$ и израчуна $y$ помоћу једначине (11), затим се претпостављено $x^{1/2}$ и израчунато $y$ уврсти у једначину (12) и израчуна $z$ и најзад, ако израчунато $y$ и $z$ задовоље, према једначини (13), услов

$$|\, F(y, z)\, | \leqq \varepsilon_1, \tag{14}$$

онда, на тај начин, добијене вредности за $x$, $y$ и $z$ претстављају тражено решење. Ако услов (14) није задовољен, увећава се или смањује претпостављено $x^{1/2}$ за неку малу вредност и поступак се наставља изнова све док се не постигну за $x$, $y$ и $z$ резултати жељене тачности. Међутим, како је $\sigma = f(x_i)$, $i = 1, 2, \ldots, 10$, нумеричка обрада овог проблема према ауторима [1], [2] и [3] је била веома гломазна и захтевала је посао од више дана рачунања на стоним машинама или употребу машина великих капацитета меморије. Познато је да се $\sigma$ може приближно одредити претходним термодинамичким прорачуном и та вредност за $\sigma = \sigma_p$ се користи као претпостављена полазна вредност. Ми смо израз за $\sigma = f(x_i)$ свели на облик $\sigma = f(x, y, z)$ који зависи само од $x$, $y$ и $z$

$$\sigma = \frac{1}{2}\left\{a_1 + a + a_4 - y\left[x + \frac{a_3}{K_1 + y} - K_7\left(\frac{\sigma}{p}\right)\right] + K_9\left(\frac{\sigma}{p}\right)^{1/2} x^{1/2}\right\} + a_3 \tag{15}$$

тако се никада не рачунају компоненте $x_i$ $(i = 1, 2, \ldots, 10)$ пре него што се помоћу вредности $x$, $y$ и $z$ које задовољавају услов (14) не израчуна $\sigma = \sigma_i$ према једначини (15). Ако је испуњен услов

$$|\, \sigma_p - \sigma_i \,| \leqq \varepsilon_2, \tag{16}$$

онда се рачунају вредности свих десет компонената $x_i$, а ако није, онда се место $\sigma = \sigma_p$ уноси у једначине (11—13) нова вредност $\sigma = \sigma_i$ и цео поступак тече изнова све док не буду испуњени услови (14) и (16). Оба ова поступка су конвергентна. На овај начин, постигнуто је да се систем нелинеарних алгебарских једначина равнотеже у гасној смеши може успешно решавати и на дигиталним машинама малих капацитета меморије као што је и „UNIVAC-60“, а ако се врши решавање на стоним шинама, такође се постиже уштеда у времену. Састављању програма смо пришли преко логичких шема које омогућују лакши увид и брже схватање целине проблема и начина на који се решава.

Из великог броја примера које смо решили на „UNIVAC 60“ и практичне примене добијених резултата, показало се да је довољно усвојити $\varepsilon_1 = 10^{-4}$ и $\varepsilon_2 = 4 \times 10^{-4}$. У пракси се јавља потреба за решавање више група сродних задатака, нарочито када је у питању састављање $(i, s)$ $T$ дијаграма. У случају када једна група има 20—30 сродних задатака, време прорачуна свих 10 конпонената за све задатке целе групе није прелазило 30 мин., што значи да за сваки задатак, понаособ, коришћењем „UNIVAC-60“, није уторшено време веће од једног минута. Коришћење израчунатих конпонената за састављање $(i, s)$ $T$ дијаграма не претставља нумеричке тешкоће.

*Зборник радова Српске академије наука и уметности LXIX*
*Математички институт књ. 8, 1960*
*Recueil des travaux de l'Académie Serbe des Sciences et des Arts LXIX*
*Institut Mathématique № 8, 1960*

ВЕЉКО А. ВУЈИЧИЋ

# ИДЕНТИФИКОВАЊЕ ТРАЈЕКТОРИЈА ТАЧКЕ ПРОМЕНЉИВЕ МАСЕ СА АУТОПАРАРЕЛАМА

Е. Клаузер је показао [2] да је могуће у општем случају идентификовати динамичке трајекторије са аутопаралелама простора одређене опште повезаности. Ти радови се односе на динамичке системе са константном масом. Наш циљ је да у овом раду покажемо да се трајекторије тачке променљиве масе могу идентификовати са аутопаралелама линеарно повезаних простора.

**1.** Опште једначине кретања тачке променљиве масе у односу на Декартов систем координата (како се још често називају опште једначине Мешчерског[5]) гласе:

$$\frac{d}{dt}(m\dot{y}^{\alpha}) = Y^{\alpha} + \frac{dm_{(1)}}{dt}u^{\alpha}_{(1)} + \frac{dm_{(2)}}{dt}u^{\alpha}_{(2)} \tag{1}$$

или

$$m\dot{y}^{\alpha} = Y^{\alpha} + \Phi^{\alpha}$$

гдје су $u^{\alpha}_{(1)}$ и $u^{\alpha}_{(2)}$ апсолутне брзине отпадајућих и припајајућих честица, $\dot{y}^{\alpha} = \frac{dy}{dt}$ су координате вектора брзине тачке, $Y^{\alpha}$ координате резултанте активних, а $\Phi^{\alpha} = \frac{dm_{(1)}}{dt}(u^{\alpha}_{(1)} - \dot{y}^{\alpha}) + \frac{dm_{(2)}}{dt}(u^{\alpha}_{(2)} - \dot{y}^{\alpha})$ одговарајуће координате реактивних сила. Маса $m$ је одређена као функција времена у сваком тренутку времена обрасцем [4]

$$m = m_0 - \int_0^t \left|\frac{dm_{(1)}}{dt}\right| dt + \int_0^t \frac{dm_{(2)}}{dt}\, dt.$$

Умјесто правоуглих Декартових координата, као и посматрања у еуклидском просторгу $E_3$, можемо посматрати неки $n$-димензиони еуклидски просто $E_n$, у коме ће једначине (1) задржати своју форму, а индекси $i, j, k, \ldots$ ће узимати вредности од 1 до $n$ (реално до 3); такође можемо увести неки систем од $n$ генералисаних координата $x^1, x^2, x^3, \ldots$, везаних за Декартове релацијама

$$y^i = y^i(x^1, \ldots, x^n),$$

па се једначине Мешчерског своде аналогно оном за једначине кретања тачке непроменљиве масе (1) на облик

$$\frac{\delta \dot{x}^i}{\delta t} = \ddot{x} + \begin{Bmatrix} i \\ kl \end{Bmatrix} \dot{x}^k \dot{x}^l = Q^i + P^i \tag{2}$$

гдје $Q^i$ и $P^i$ претстављају координате активне $X^i$ и реактивне силе $Z$ у генералисаним координатама, подељеним са масом, тј.

$$Q^i = \frac{X^i}{m}; \quad P^i = \frac{Z^i}{m}.$$

Кристофелови симболи друге врсте $\begin{Bmatrix} i \\ kl \end{Bmatrix}$ написани су у односу на метрички тензор $a_{ij}$ форме

$$ds^2 = a_{ij} dx^i dx^j = \frac{2T}{m} dt^2 \tag{3}$$

гдје је $T$ кинетичка енергија посматране тачке, а $m$ њена маса у тренутку $t$. Можемо претпоставити да метрика није само еуклидска, већ општија, риманска.

**2.** Једначине аутопаралела у линеарно повезаном простору $L_n$ [3] са коефицијентима повезаности $\Gamma^i_{kl}$ су

$$\ddot{x}^i + \Gamma^i_{kl} \dot{x}^k \dot{x}^l = \varphi \dot{x}^i \tag{4}$$

гдје је $\varphi$ нека функција параметра $t$, таква да задовољава диференцијалну једначину

$$\ddot{s} - \varphi \dot{s} = 0 \quad \left(\dot{s} = \frac{ds}{dt}\right), \tag{5}$$

при чему је $s$ лук у $E_n$ и истовремено афини параметар у $L_n$ [3].

Ако поставимо захтјев да симетрични тензор $a_{ij}$, дефинисан метричком формом (3) у $E_n$, буде фундаментални тензор у $L_n$, коефицијенти повезаности морају имати облик [3]

$$\Gamma^i_{kl} = \begin{Bmatrix} i \\ kl \end{Bmatrix} + T^i_{kl} \quad . \tag{6}$$

тако да упоређивањем једначина кретања (2) и једначина аутопаралела (4) сада добијамо да мора бити

(7) $$T_{kl}^{i}\,\dot{x}^{k}\dot{x}^{l}=\varphi\dot{x}^{i}-(Q^{i}+P^{i})$$

ако желимо да трајекторије идентификујемо са аутопаралелама у $L_n$.

С друге стране због (5) и (3) можемо ставити

$$\varphi=\frac{1}{2T}\frac{dT}{dt}-\frac{1}{2m}\frac{dm}{dt}.$$

А како из закона кинетичке енергије за тачку променљиве масе [4] имамо

$$\frac{dT}{dt}=m(Q_r+P_r)\dot{x}^r+\frac{T}{m}\frac{dm}{dt}$$

то је

$$\varphi=\frac{m}{2T}(Q_r+P_r)\dot{x}^r=\frac{m}{2T}S^r\dot{x}_r;\quad (S_r=Q_r+P_r),$$

па (7) коначно можемо написати у облику, у коме множитељ $\varphi$ има познату вредност

(8) $$T_{kl}^{i}\,\dot{x}^{k}\dot{x}^{l}=\frac{m}{2T}S^r\dot{x}_r\dot{x}^i-S^i=\left(\frac{m}{2T}\dot{x}_r\dot{x}^i-\delta_r^i\right)S^r.$$

Једначине (8) претстављају систем од $n$ једначина са $^1/_2\,n^2(n+1)$ непознатих. Једно од могућих решења је да сведемо задатак на то да број непознатих буде једнак броју једначина, тј. да симетрични тензор $T_{kl}^{i}$ изразимо помоћу само једног непознатот вектора, на пр. у облику

$$T_{kl}^{i}=G^{i}a_{kl}$$

одакле лако добијамо

(9) $$G^i=\frac{m}{2T}\left\{\frac{m}{2T}\dot{x}^i\dot{x}_r-\delta_r^i\right\}S^r$$

односно

$$T_{kl}^{i}=G^{i}a_{kl}=\frac{m}{2T}\left\{\frac{m}{2T}\dot{x}^i\dot{x}_r-\delta_r^i\right\}S^r a_{kl}.$$

Ради одређивања периоде коефицијената повезаности (6), што се своди на одређивање природе вектора $G^i$, раставимо векторе $Q^i$ и $P^i$ на по двије компоненте, једну у правцу тангенте на трајекторији, а другу у равни нормалној на трајекторији, тј.:

(10) $$Q^i=a\dot{x}^i+b\mu^i;\quad P=\alpha\dot{x}^i+\beta\mu^i$$
$$S^i=(\alpha+a)\dot{x}^i+(b+\beta)\mu^i=\lambda\dot{x}^i+N\mu^i$$

гдје је

$$\mu^i\mu_i=1\quad \text{и}\quad \dot{x}^k\mu_k=0.$$

Замјеном (10) у (9) слиједи:

$$G^i=\frac{m}{2T}N\mu^i\equiv R\mu^i$$

па коефицијенти повезаности (6) коначно добијају вредност

$$\Gamma^i_{kl} = \left\{ \begin{matrix} i \\ kl \end{matrix} \right\} + R\mu^i a_{kl}. \tag{10'}$$

Они заједно са метриком (3) одређују тражени простор у коме се трајекторије тачке промењљиве масе поклапају са аутопаралелама. Из тог слиједи теорема:

— Динамичке трајекторије тачке промењљиве масе, која се креће под дејством активних и реактивних сила, изазваних отпадањем и припајањем честица, јесу аутопаралеле у простору са симетричном повезаношћу

$\Gamma^i_{kl} = \left\{ \begin{matrix} i \\ kl \end{matrix} \right\} + R\mu^i a_{kl}$ одређеном фундаменталним тензором $a_{ij}$ и силама које дјелују на тачку.

Кретање тачке константне масе под дејством активних сила само је посебан случај овог проблема.

Лако се уочава из (6) да су коефицијенти повезаности једнаки Кристофеловим симболима друге врсте $\left\{ \begin{matrix} i \\ kl \end{matrix} \right\}$ ако је $T^i_{kl}$ једнако нули. У том случају мора бити

$$G^i = \frac{m}{2T} N\mu^i = \frac{m}{2T}(b+\beta)\mu^i = 0 \tag{11}$$

па је простор $L_n$ Риманов $V_n$ са метриком (3).

Услов (11) је задовољен у два случаја и то:

1° — кад $T \to \infty$, а маса $m$ и нормалне компоненте активних и реактивних сила имају коначну величину, што није предмет разматрања у овом раду.

2° — кад кинетичка енергија има коначну вредност а нормална компонента активне и реактивне силе $N=b+\beta$ једнака је нули, што може бити под условом

а) да је $b=-\beta$ нормална компонента активне силе по интензитету и правцу једнака, а по смјеру супротна нормалној компоненти реактивне силе и

b) да уопште нема нормалне компоненте сила.

Из овога на основу (6) и закључака из (11) слиједи:

— Динамичке трајекторије тачке промењљиве масе, која се креће под дејством активних и реактивних сила, изазваних отпадањем и припајањем честица, јесу геодезиске линије у римапском простору ако се компоненте сила које дјелују нормално на правац кретања узајамно поништавају, или ако те компоненте уопште не постоје.

Такође имамо:

— Трајекторије тачке промењљиве масе под дејством само реактивних сила, када је апсолутна или релативна брзина отпадајућих и припајајућих честица једнака нули увијек је геодезиска линија риманског простора.

**4.** Решење система (8) може се написати у облику

$$2T._{kl}^{\;i} = 2G^i a_{kl} = \delta_r^i \psi_l + \delta_l^i \psi_k - 2a_{kl}\psi^i \tag{12}$$

гдје су $\psi^i$ координате неком арбитрерног вектора, а $\delta_l^i$ Кронекерови симболи. Заиста, композиција (12) са $\dot{x}^k \dot{x}^l$ доводи до

$$G^i = \frac{m}{2T}\left(\dot{x}^i \dot{x}^l \psi_l - \frac{2T}{m}\psi^i\right).$$

односно, ако вектору $\psi^i$ дамо вредност

$$\psi^i = \frac{m}{2T} S^i = \frac{1}{2}\Phi^i$$

до

$$G^i = \frac{m}{2T}\left\{\frac{m}{2T}\dot{x}^i \dot{x}_l - \delta_l^i\right\} S^l$$

што је идентично са (9).

Повезаност дефинисана са (12) може се измијенити додавањем члана $^1/_2(\delta_k^i \psi_l + \delta_l^i \psi_k)$, а да се при том аутопаралеле не промијене. Тада за $\Gamma._{kl}^{\;i}$ добијамо

$$\Gamma._{ke}^{\;i} = \left\{ {i \atop kl} \right\} + \frac{1}{2}\left(\delta_k^i \Phi_l + \delta_l^i \Phi_k - a_{kl}\Phi^i\right).$$

За услов да нормалне компоненте генералних сила не зависе од брзина важи $\Delta_j a_{kl} + a_{kl}\Phi_j = 0$ ($\Delta_j$ — оператор за коваријантни извод) што са (13) дефинише линеарну повезаност сличну Вајловој. Одавде слиједи:

— Трајекторије тачке променљиве масе која се креће под дејством активних и реактивних сила, условљених одвајањем и припајањем честица очувавају својство аутопаралела у простору повезаности сличне Вајловој кад се за арбитрерни вектор узме количник силе и кинетичке енергије.

На крају напомињемо да о повезаности линеарних простора има смисла говорити ако она не зависи од брзина, те се због тога задржавамо на третирање само оних кретања под дејством сила независних од брзина кад те силе улазе у објект повезаности.

*(Саопштено 11-III-1959)*

ЛИТЕРАТУРА:

[1] Анђелић, Т. — Тензорски рачун, Београд, 1952
[2] Clauzer, E. — Instituto di matematica del politecnico di Milano, Pubblicazioni №№ 157, 165, (1955).
[3] Eisenhart, L. P. — Non riemannian Geometry, New York, 1927.
[4] Космодемянский, А. А. — Курс теоретической механики, Москва, 1955
[5] Мещерский, И. В. — Работы по механике тел переменной масы. Москва, 1952.
[6] Synge, I. L. and Schild A. — Tensor calculus, Toronto, 1949.

# IDENTIFICATION OF DYNAMICAL TRAJECTORIES OF A PARTICLE OF VARIABLE MASS AS AUTOPARALLELS

Veljko A. Vujičić (Belgrade)

Comparison of tensorial equations of motion (2) of a particle of variable mass with equations (4) of autoparallels in an $L_n$ furnishes the coefficients of connection of $L_n$ such that the autoparallels are trajectories of the particle. Analysis of (11) gives the conditions under which trajectories of the particle are geodesics in a riemannian space. Trajectories are identified, too, as autoparallels in a Weyl space. The forces considered in the paper are independent of velocities.