Univerzitet u Beogradu
Matematički fakultet

O faktorizaciji polinoma nad brojevnim poljima

Master rad

Student:
Selma Rizvanovič

Mentor:
Maja Roslavcev

Beograd, 2024.

Sadržaj

1 Uvod

Polinomi imaju široku primenu u raznim granama matematike, od elementarne algebre do apstraktne algebre, a takođe i u različitim primenama u inženjerstvu, računarstvu, fizici i drugim disciplinama. Ova istraživanja se fokusiraju na proučavanje polinoma nad poljima, čime se proširuje osnovno razumevanje ovog matematičkog pojma.

Polinomi jedne promenljive predstavjaju izraze koji se sastoje od neodređenih, koeficijenata i eksponenata sa osnovnim oblikom

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

gde su a_i koeficijenti, x neodređena, a n stepen polinoma. Polinomi imaju ključnu ulogu u mnogim matematičkim disciplinama, poput algebre, analize, numeričkih metoda i teorije brojeva.

Bavićemo se polinomima nad brojevnim poljima, koja predstavljaju bilo koje potpolje polja kompleksnih brojeva. Na primer, kada radimo sa polinomima sa realnim koeficijentima, koristimo polje realnih brojeva. Slično tome, kada radimo sa polinomima sa kompleksnim koeficijentima, koristimo polje kompleksnih brojeva. Polja omogućuju operacije kao što su sabiranje, oduzimanje, množenje i deljenje polinoma.

Rad se sastoji od šest glava. U ovom radu istražujemo faktorizaciju polinoma nad brojevnim poljima. Faktorizacija polinoma je povezana sa prstenom koeficijenata polinoma, pažnja je usmerena na polje sa racionalnim koeficijentima.

U drugoj glavi uvodimo osnovne pojmove vezane za polinome.

U trećoj glavi su predstavljeni važni pojmovi kao što su Bezuova teorema, Euklidov algoritam, Vietove formule koje ćemo kasnije koristiti u radu.

U četvrtoj glavi su predstavljeni poznati rezultati i teoreme vezane za rastavljivost polinoma.

U petoj glavi uvodimo minimalni polinom i raširenja polja.

U šestoj glavi su osmišljeni zadaci vezani za rastavljivost polinoma.

Cilj ovog istraživanja je predstavljanje faktorizacije polinoma i analiza nula polinoma čiji koeficijenti pripadaju skupu racionalnih brojeva. Na primer, date su neke nule polinoma sa racionalnim koeficijentima, a treba odrediti sve ostale nule.

2 Algebra polinoma

U ovom poglavlju ćemo definisati polinom i navesti njegova osnovna svojstva. Pokazaćemo kada su dva polinoma jednaka i kako se polinomi sabiraju i množe.

2.1 Prsten polinoma

Neka je $(\mathbb{F}, +, \cdot)$ polje koje ćemo označavati sa $\mathbb{F}$ i neka su 0 i 1 neutralni elementi u odnosu na operacije $+$ i $\cdot$. Umesto $a \cdot b$ $(a, b \in \mathbb{F})$ pisaćemo ab. Neka je operacija stepenovanja uvedena na uobičajeni način pomoću

$$(\forall x \in \mathbb{F}) x^0 = 1, x^k = x x^{k-1} (k \in \mathbb{N}).$$

Definicija 1. *Ako $a_k \in \mathbb{F}$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$, formalni izraz*

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

naziva se algebarski polinom nad poljem $\mathbb{F}$, za elemente a_k kažemo da su koeficijenti polinoma $P(x)$. Ako je koeficijent $a_n \neq 0$, za polinom $P(x)$ kažemo da je stepena n i to označavamo sa $degP(x) = n$. Za koeficijent $a_n \neq 0$ kažemo da je vodeći ili najstariji koeficijent polinoma $P(x)$, a broj a_0 zovemo slobodnim članom *ili* slobodnim koeficijentom *polinoma P.*

Definicija 2. *Za polinom*

$$O(x) = 0 + 0x + \ldots + 0x^{n-1} + 0x^n$$

*kažemo da je **nula polinom** i označavamo ga sa 0.*

Stepen nula polinoma $O(x)$ se ne definiše. Polinomi stepena nula se nazivaju konstante i to su elementi polja $\mathbb{F}$. Element x može se interpretirati kao polinom prvog stepena definisan sa $P(x) = x$. Za element x koristi se termin *neodređena.* Za polinom $P(x)$ definisan sa

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

kaže se da je polinom po neodređenoj x.

Definicija 3. *Za polinom čiji je vodeći koeficijent jednak jedinici kažemo da je moničan. Moničan polinom ima oblik*

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + x^n.$$

Skup svih ovih polinoma nad poljem $\mathbb{F}$ označavamo sa $\mathbb{F}[x]$.

U ovom radu ćemo se najviše baviti polinomima nad $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$.

Definicija 4. *Polinom se sastoji od izraza $a_k x^k, a_{k-1} x^{k-1}, \ldots, a_1 x, a_0$ koje nazivamo **monomima**. Monome polinoma zovemo još i članovima polinoma.*

Polinome možemo posmatrati kao funkcije, na primer polinom $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ možemo gledati kao funkciju $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Nula(koren) polinoma je ona vrednost nezavisne promenljive x za koju je vrednost $P(x) = 0$.

Polinom nultog stepena je konstanta:

$$P_0(x) = a_0, a_0 \in \mathbb{R}, (a_0 \neq 0)$$

Polinom prvog stepena je oblika:

$$P_1(x) = a_1x + a_0, a_1, a_0 \in \mathbb{R}, (a_1 \neq 0)$$

i naziva se **linearna funkcija**.

Polinom drugog stepena je oblika:

$$P_2(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}, (a_2 \neq 0)$$

i naziva se **kvadratna funkcija**.

Primer 1. *Napiši polinom* $P(x) = (x+1)^3 + (x^2-2)^2$ *u kanonskom obliku. Odredi mu stepen, vodeći i slobodni koeficijent.*

Kubirajući i kvadrirajući date polinome, dobijamo:

$$P(x) = (x+1)^3+(x^2-2)^2 = x^3+3x^2+3x+1+x^4-4x^2+4 = x^4+x^3-x^2+3x+5.$$

Dakle, kanonski oblik polinoma P je $P(x) = x^4 + x^3 - x^2 + 3x + 5$.
Stepen polinoma P je 4, što zapisujemo: $\deg P = 4$.
Vodeći koeficijent polinoma je 1, a slobodni koeficijent 5.

Primer 2. *Neka je* P *polinom takav da važi* $P(x-1) = 2x^2 + 3x + 5$. *Odredi njegov kanonski oblik.*

Najpre uočimo da je P polinom drugog stepena. Kanonski oblik polinoma drugog stepena je:

$$P(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0.$$

Da bismo rešili zadatak, potrebno je da uvedemo smenu $t = x - 1$. Odavde sledi da je $x = t + 1$, pa polinom p možemo zapisati kao:

$$P(t) = 2(t+1)^2 + 3(t+1) + 5.$$

Sređivanjem dobijamo:

$$P(t) = 2(t^2 + 2t + 1) + 3(t+1) + 5 = 2t^2 + 4t + 2 + 3t + 3 + 5 = 2t^2 + 7t + 10.$$

Kanonski oblik polinoma P je $P(t) = 2t^2 + 7t + 10$.

2.2 Jednakost polinoma

U skupu $\mathbb{F}[x]$ možemo uvesti relaciju *jednakost*.

Polinomi

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

i

$$Q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0$$

su jednaki ako je $n = m$ i samo ako je $a_k = b_k$, za svako $k \geq 0$, to jest kada su njihovi koeficijenti jednaki.

Primer 3. *Dat je polinom $P(x) = x^3 - x + 1$. Odredi polinom Q takav da važi $Q(x-1) = P(x)$*

Pošto je polinom P trećeg stepena i polinom Q mora biti trećeg stepena.
Neka je

$$Q(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D, A, B, C, D \in \mathbb{R}.$$

Tada je

$$Q(x-1) = A(x-1)^3 + B(x-1)^2 + C(x-1) + D.$$

Prema uslovu zadatka sledi

$$x^3 - x + 1 = A(x-1)^3 + B(x-1)^2 + C(x-1) + D.$$

Zadatak ćemo rešiti ako odredimo A, B, C i $D \in \mathbb{R}$ tako da za svako $x \in \mathbb{R}$ važi prethodna jednakost.

Sređujući desnu stranu, dobijamo

$$x^3 - x + 1 = A(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) + B(x^2 - 2x + 1) + C(x-1) + D,$$

odnosno

$$x^3 - x + 1 = Ax^3 + (-3A + B)x^2 + (3A - 2B + C)x + (-A + B - C + D).$$

Prema teoremi o jednakosti polinoma sledi:

$$\begin{array}{rrrrcr} A & & & & = & 1 \\ -3A & +B & & & = & 0 \\ 3A & -2B & +C & & = & -1 \\ -A & +B & -C & +D & = & 1 \end{array}$$

Rešavanjem ovog sistema dobijamo $A = 1, B = 3, C = 2, D = 1$.
Konačno imamo

$$x^3 - x + 1 = (x-1)^3 + 3(x-1)^2 + 2(x-1) + 1.$$

Traženi polinom je

$$Q(x) = x^3 + 3x^2 + 2x + 1.$$

2.3 Operacije sa polinomima

U ovom poglavlju ćemo nakon upoznavanja sa osnovnim svojstvima i pojmovima vezanim za polinome pokazati kako se definišu zbir i proizvod dva polinoma i pokazačemo kako se stepen polinoma menja pri prethodno navedenim operacijama.

Neka su $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ i $Q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0$ polinomi zadani svojim kanonskim oblicima.

$$(P+Q)(x) = P(x) + Q(x),$$

$$(P \cdot Q)(x) = P(x) \cdot Q(x),$$

Zbir polinoma $P(x)$ i $Q(x)$ je polinom $R(x)$ sa koeficijentima c_k, to jest važi da je $c_k = a_k + b_k,$ za sve $k \geq 0$.

Dva polinoma se sabiraju tako što se saberu njihovi članovi istog stepena. Za polinome P i Q važi $\deg(P+Q) \leq \max\{\deg P, \deg Q\}$.

Proizvod polinoma $P(x)$ i $Q(x)$ je polinom $R(x)$ sa koeficijentima $c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$.

Množenjem polinoma P i Q dobijamo:

$$(P \cdot Q)(x) = P(x) \cdot Q(x) = (a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0)\cdot$$

$$\cdot(b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0) = a_n b_m x^{n+m} + (a_n b_{m-1} + a_{n-1}b_m)x^{n+m-1}$$

$$+ \ldots + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x + a_0 b_0.$$

Primer 4. *Odredi zbir polinoma* $P(x) = 3x^2 + x - 2$ *i* $Q(x) = x^3 - 3x + 5$.

Polinomi se sabiraju tako što se sabiraju njuhovi članovi istog stepena.

$$(P+Q)(x) = P(x) + Q(x) = 3x^2 + x - 2 + x^3 - 3x + 5 = x^3 + 3x^2 - 2x + 3.$$

Primetimo da je $\deg P = 2$, a $\deg Q = 3$. Sabiranjem ova dva polinoma dobijamo polinom stepena 3, dakle stepen polinoma dobijen sabiranjem polinoma P i Q u ovom slučaju je jednak stepenu polinoma Q koji je većeg stepena.

Primer 5. *Odredi proizvod polinoma* $P(x) = 4x - 3$ *i* $Q(x) = x^3 + x + 2$

Dva polinoma ćemo pomnožiti tako što ćemo svaki član jednog polinoma pomnožiti sa svakim članom drugog polinoma.

$$(P \cdot Q)(x) = P(x) \cdot Q(x) = (4x - 3)(x^3 + x + 2)$$

$$= 4x(x^3 + x + 2) - 3(x^3 + x + 2)$$

$$= 4x^4 + 4x^2 + 8x - 3x^3 - 3x - 6$$

$$= 4x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 5x - 6.$$

Primer 6. *Odredi proizvod polinoma* $P(x) = 3x^2 + x - 2$ *i* $Q(x) = x^3 - 3x + 5$.

Prvi način je da računamo na isti način kao i u prethodnom primeru.

$$(P \cdot Q)(x) = P(x) \cdot Q(x) = (3x^2 + x - 2)(x^3 - 3x + 5)$$

$$= 3x^2(x^3 - 3x + 5) + x(x^3 - 3x + 5) - 2(x^3 - 3x + 5)$$

$$= 3x^5 - 9x^3 + 15x^2 + x^4 - 3x^2 + 5x - 2x^3 + 6x - 10$$

$$= 3x^5 + x^4 - 11x^3 + 12x^2 + 11x - 10.$$

Drugi način je da napišemo proizvod preko formule za opšti član proizvoda dva polinoma. Dakle,

$$(P \cdot Q)(x) = (3 \cdot 1)x^5 + (1 \cdot 1)x^4 + (-2 \cdot 1 - 3 \cdot 3)x^3 +$$

$$+(5 \cdot 3 + 1 \cdot (-3))x^2 + (5 \cdot 1 - 2 \cdot (-3))x - (2 \cdot 5)$$

$$= 3x^5 + x^4 - 11x^3 + 12x^2 + 11x - 10.$$

Primetimo da smo u Primeru 5 množeći polinome prvog i trećeg stepena dobili polinom četvrtog stepena, a u Primeru 6 množeći polinome drugog i trećeg stepena dobili polinom petog stepena. Dakle, proizvod dva polinoma je polinom i njegov stepen je jednak zbiru stepena polinoma koje množimo.

3 Deljenje polinoma

U prethodnom poglavlju pokazali smo sabiranje i množenje dva polinoma. Sada čemo se baviti deljenjem polinoma.

U ovom poglavlju ćemo pokazati kada je jedan polinom deljiv drugim, opisaćemo postupak deljenja dva polinoma i navesti neka svojstva dobijenog ostatka.

Definicija 5. *Polinom $P \in \mathbb{F}[x]$ je deljiv polinomom $S \neq 0$ ako postoji polinom Q takav da za svako $x \in \mathbb{F}$ važi $P(x) = S(x) \cdot Q(x)$.*

3.1 Teorema o deljenju sa ostatkom

O deljenju dva polinoma nam najbolje govori sledeća teorema:

Teorema 1. *(Teorema o deljenju sa ostatkom) Za svaka dva polinoma $P, S \in \mathbb{R}[x], S \neq 0$ postoje jedinstveni polinomi $Q, R \in \mathbb{R}[x]$ takvi da je*

$$P(x) = S(x)Q(x) + R(x)$$

pri čemu je $R = 0$ ili $\deg R < \deg S$.

Dokaz. Ako je $P = 0$, onda teorema važi za svako $Q = R = 0$.
Ako je $P \neq 0$ razlikujemo dva slučaja:

1) $\deg P < \deg S$
U ovom slučaju jednakost $P(x) = S(x)Q(x) + R(x)$ zadovoljavaju polinomi $Q = 0$ i $R = P$ i važi $\deg R = \deg P < \deg S$.

2)$\deg P \geq \deg S$
Dokazujemo matematičkom indukcijom po stepenu polinoma P.

Za $\deg P = 0$ sledi da je i $\deg S = 0$. Dakle, P i S su konstantni polinomi, to jest $P, S \in \mathbb{R}$. Sada jednakost $P(x) = S(x)Q(x) + R(x)$ zadovoljavaju polinomi $Q = \frac{P}{S}$ i $R = 0$. Pretpostavimo da tvrđenje važi za sve polinome stepena manjeg od n, to jest da postoje polinomi R i Q takvi da je $\deg R < \deg S$ i važi $P = S \cdot Q + R$. Neka su kanonski zapisi polinoma P i S

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, a_n \neq 0$$

$$S(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0, b_m \neq 0$$

i neka je $n \geq m$. Tada možemo definisati polinom $P_1(x) \in \mathbb{R}[x]$

$$P_1(x) = P(x) - \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} S(x) = (a_{n-1} - \frac{a_n}{b_m} b_{m-1}) x^{n-1} + \ldots$$

Pošto je stepen svih preostalih monoma manji od $n-1$, onda je $\deg P_1 \le n-1$. Primenimo pretpostavku na polinom P_1 . Postoje polinomi Q_1 i $R_1, \deg R_1 < \deg S$ takvi da

$$S(x) \cdot Q_1(x) + R_1(x) = P_1(x) = P(x) - \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} S(x).$$

Sledi da je

$$P(x) = S(x) \cdot (Q_1(x) + \frac{a_n}{b_m} x^{n-m}) + R_1(x).$$

Sada vidimo da polinomi

$$Q(x) = Q_1(x) + \frac{a_n}{b_m} x^{n-m}, R(x) = R_1(x)$$

zadovoljavaju jednakost $P(x) = S(x)Q(x) + R(x)$, pri čemu je $\deg R < \deg S$. Ovim smo dokazali egzistenciju.

Ostalo je još da dokažemo jedinstvenost. Pretpostavimo da za date polinome P i S postoje polinomi Q, R i Q' i R' takvi da $\forall x \in \mathbb{R}$ važi

$$P(x) = S(x)Q(x) + R(x), R = 0 \vee \deg R < \deg S$$

i

$$P(x) = S(x)Q'(x) + R'(x), R' = 0 \vee \deg R' < \deg S'.$$

Oduzimanjem ovih jednakosti sledi

$$S(x)(Q(x) - Q'(x)) + (R(x) - R'(x)) = 0.$$

Ako je $R - R' = 0$, sledi da je i $S(Q - Q') = 0$. Pošto je $S \neq 0$, sledi da je i $Q - Q' = 0$ iz čega sledi jedinstvenost količnika. Takođe, ako je $Q - Q' = 0$ sledi $R - R' = 0$.
Pretpostavimo sada da je $R - R' \neq 0$ i $Q - Q' \neq 0$. Upoređujući stepene iz $S(x)(Q(x) - Q'(x)) + (R(x) - R'(x)) = 0$ zaključujemo

$$\deg S + \deg(Q - Q') = \deg(R - R').$$

Sledi da $\deg(R - R') \le \max\{\deg R, \deg R'\}$.
Stepen razlike dva polinoma je veći ili jednak $0(\deg(Q - Q') \ge 0))$, pa sledi

$$\deg S \le \deg S + \deg(Q - Q').$$

Sada iz prethodne jednakosti i nejednakosti sledi

$$\deg S \le \deg S + \deg(Q - Q') = \deg(R - R') \le \max\{\deg R, \deg R'\}.$$

Kako je $\deg R < \deg S$ i $\deg R' < \deg S$, sledi

$$\deg S \le \deg S + \deg(Q - Q') = \deg(R - R') \le \max\{\deg R, \deg R'\} < \deg S.$$

Dobili smo $\deg S < \deg S$, što je kontradikicija. Dakle, slučaj $R \neq R'$ i $S \neq S'$ nije moguć. $\square$

3.2 Bezuova teorema

Sada ćemo uvesti teoremu koja će nam biti u daljem radu od velike koristi pri deljenju polinoma sa polinomom prvog stepena.

Teorema 2. *(Bezuova teorema) Neka je $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ i $a \in \mathbb{R}$. Ostatak pri deljenju polinoma P sa $x - a$ iznosi $P(a)$.*

Dokaz. Neka je $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ i $S(x) = x - a$, gde je $a \in \mathbb{R}$. Prema teoremi o deljenju sa ostatkom postoji jedinstveni polinom $Q \in \mathbb{R}[x]$ i jedinstveni realan broj R takav da važi

$$P(x) = (x - a)Q(x) + R.$$

Zato je

$$P(a) = R.$$

Dakle, ostatak pri deljenju polinoma $P(x)$ sa $x - a$ jednak je $P(a)$.

□

Posledica Bezuove teoreme:

Realan broj a je nula polinoma $P(x)$ ako i samo ako $x - a$ deli $P(x)$.

Primer 7. *Podeliti polinom $P(x) = x^3 - 4x^2 + 6x - 4$ polinomom $S(x) = x - 2$.*

Rešenje:

$$\begin{array}{rrrl}
(x^3 & -4x^2 & +6x & -4) : (x-2) = x^2 - 2x + 2 \\
-(x^3 & -2x^2) & & \\
\hline
 & -2x^2 & +6x & \\
 & -(-2x^2 & +4x) & \\
\hline
 & & 2x & -4 \\
 & & -(2x & -4) \\
\hline
 & & & 0
\end{array}$$

Provera:

$$(x^2 - 2x + 2) \cdot (x - 2) = x^3 - 2x^2 + 2x - 2x^2 + 4x - 4 = x^3 - 4x^2 + 6x - 4.$$

U ovom primeru je ostatak pri deljanju jednak nuli.

Primer 8. *Podeliti polinom $P(x) = x^3 + 3x^2 + 7x + 10$ polinomom $S(x) = x + 1$.*

Rešenje:

$$\begin{array}{rrrl}
(x^3 & +3x^2 & +7x & +10) : (x+1) = x^2 + 2x + 5 \\
-(x^3 & +x^2) & & \\
\hline
 & 2x^2 & +7x & \\
 & -(2x^2 & +2x) & \\
\hline
 & & 5x & +10 \\
 & & -(5x & +5) \\
\hline
 & & & 5
\end{array}$$

Provera:

$(x^2+2x+5)\cdot(x+1) = x^3+x^2+2x^2+2x+5x+5+5 = x^3+3x^2+7x+10.$

U ovom primeru je ostatak pri deljenju jednak 5. To je polinom stepena 0.

Primer 9. *Podeliti polinom* $P(x) = 6x^4-2x^3-11x^2+1$ *polinomom* $S(x) = 2x^2-3$.

Rešenje:

$$
\begin{array}{rrrrrl}
(6x^4 & -2x^3 & -11x^2 & & +1) & :(2x^3-3) = Q(x) \\
-(6x^4 & & -9x^2) & & & \\
\hline
 & -2x^3 & -2x^2 & & & \\
 & -(-2x^3 & & +3x) & & \\
\hline
 & & -2x^2 & -3x & +1 & \\
 & & -(-2x^2 & & +3) & \\
\hline
 & & & -3x & -2 &
\end{array}
$$

gde je $Q(x) = 3x^2-x-1$.

Provera:

$(3x^2-x-1)\cdot(2x^2-3)-3x-2 = 6x^4-9x^2-2x^3+3x-2x^2+3-3x-2$

$= 6x^4-2x^3-11x^2+1.$

Ostatak pri deljenju je polinom prvog stepena.

Posmatrajući prethodna tri primera vidimo da polinom P možemo da zapišemo u obliku $P(x) = S(x)Q(x)+R(x)$, pri čemu je polinom S polinom kojim smo delili polinom P, Q je polinom koji smo dobili deljenjem polinoma P polinomom S, a R je ostatak pri deljenju. U Primeru 10 je $R = 0$, dok je u Primeru 11 i Primeru 12 $\deg R < \deg S$.

Primer 10. *Neka je* $P \in \mathbb{R}[x]$. *Odredi ostatak pri deljenju polinoma* $P(x) = 101x^{100}+100x^{98}+\ldots+2x+1$ *polinomom* $S(x) = x^2-1$.

Rešenje: Prema teoremi o deljenju sa ostatakom, ostatak je polinom najviše prvog stepena, tj $R(x) = Ax+B, A, B \in \mathbb{R}$. Označimo količnik sa $Q(x)$.

$$101x^{100}+100x^{99}+\ldots+2x+1 = (x^2-1)Q(x)+(Ax+B), \forall x \in \mathbb{R} \qquad (1)$$

$S(x) = x^2-1 = (x-1)(x+1)$, to jest, $x_1 = 1$ i $x_2 = -1$.
Ako x_1 i x_2 zamenimo u (1), dobijamo:

$$
\begin{array}{ccccccccccl}
101 & + & 100 & + & \ldots & + & 2 & + & 1 & = & A+B \\
101 & - & 100 & + & \ldots & - & 2 & + & 1 & = & -A+B
\end{array}
$$

U prvoj jednačini na levoj strani je zbir svih prirodnih brojeva manjih od 102:

$$101 + 100 + \ldots + 2 + 1 = \frac{101 \cdot 102}{2} = 101 \cdot 51 = 5151$$

Levu stranu jednakosti u drugoj jednačini možemo zapisati kao:

$$101 - 100 + \ldots - 2 + 1 = (101 - 100) + (99 - 98) + \ldots + (3 - 2) + 1$$

$$= \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{51 \text{ puta}} = 51.$$

Sada možemo sistem jednačina zapisati kao:

$$5151 = A + B$$

$$51 = -A + B$$

Rešavanjem sistema dobijamo A=2550, B=2601. Dakle, ostatak pri deljenju polinoma P polinomom Q je $R(x) = 2550x + 2601$.

Primer 11. *Odredi ostatak pri deljenju polinoma $P(x) = x^{2018} - 2x + 4$ polinomom $S(x) = x - 1$.*

Prvo rešenje: Prema teoremi o deljenju sa ostatkom, ostatak polinoma je polinom najvišeg stepena nula, tj. konstantni polinom $R(x) = a, a \in \mathbb{R}$. Neka je Q količnik. Sledi:

$$x^{2018} - 2x + 4 = (x - 1)Q(x) + a, \forall x \in \mathbb{R}$$

Ako $x = 1$ zamenimo u gornju jednačinu, dobijamo:

$$1^{2018} - 2 + 4 = (1 - 1)Q(1) + a,$$

$$3 = 0 \cdot Q(1) + a,$$

to jest, $a = 3$, $R(x) = a$.

Primer 12. *Odredi koeficijente $A, B, C \in \mathbb{R}$ tako da je polinom $P(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$ deljiv polinomom $F_1(x) = x + 2$, a pri deljenju polinomom $F_2(x) = x^2 - 1$ daje ostatak $R(x) = 2x + 3$.*

Rešenje: Pošto je polinom P deljiv polinomom F_1, ostatak pri deljenju polinoma P polinomom F_1 je jednak 0.Prema Bezuovoj teoremi sledi:

$$P(-2) = -8 + 4A - 2B + C = 0. \tag{2}$$

Podelimo sada polinom P polinomom F_2:

$$
\begin{array}{rllll}
(x^3 & +Ax^2 & +Bx & +C) & : (x^2-1) = x + A\\
-\,(x^3 & & -x) & & \\
\hline
 & Ax^2 & +(B+1)x & +C & \\
- & (Ax^2 & & -A) & \\
\hline
 & & (B+1)x & +A+C &
\end{array}
$$

Iz uslova zadatka sledi:

$$x(B+1)+A+C = 2x+3.$$

$$B+1=2$$

$$A+C=3,$$

odnosno

$$B=1$$

$$A=3-C.$$

Kada prethodno zamenimo (2) u dobijamo:

$$-8+4(3-C)-2+C=0$$

$$C=\frac{2}{3}.$$

Pošto je $A=3-C$, sledi $A=\frac{7}{3}$.

Dakle, $P(x)=x^3+\frac{7}{3}x^2+x+\frac{2}{3}$.

3.3 Hornerova šema

Britanski matematičar Vilijam Džordž Horner je napravio šemu za deljenje polinoma $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ sa $x-c$. Ideju je dobio u teoremi o jednakosti dva polinoma koja se pominje u drugom poglavlju.
Kada delimo polinom $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ koji je $n-$tog stepena sa $x-c$ dobijamo polinom $Q(x)=b_{n-1}x^{n-1}+b_{n-2}x^{n-2}+\ldots+b_1x+b_0$ koji je $n-1$ stepena i ostatak, to jest:

$$P_n(x)=(x-c)Q_{n-1}(x)+r.$$

Sređujuči ovo i upoređujući koeficijente, dobijamo sledeće formule:

$$b_{n-1}=a_n$$

$$b_{k-1}=a_k+c\cdot b_k,$$

gde je $k=1,2,...,n-1$. Takođe je

$$r=a_0+c\cdot b_0.$$

Ovaj metod može da se zapiše i u obliku šeme:

$$b_{k-1}=a_k+c\cdot b_k,\ \text{gde je}\ k=1,2,...,n-1$$

	a_n	a_{n-1}	...	a_k	...	a_0
c	b_{n-1}	$b_{n-2}=a_{n-1}+c\cdot b_{n-1}$	...	$b_{k-1}=a_k+c\cdot b_k$	...	$r=a_0+c\cdot b_0$

Pomoću Hornerove šeme efikasnije i brže možemo deliti brojeve. To ćemo pokazati na sledečem primeru.

Primer 13. *Podeliti polinom* $P(x) = 2x^4 - x^3 - 4x + 1$ *sa* $x - 1$.

Rešenje:
Iz polinoma $P(x) = 2x^4 - x^3 - 4x + 1$ možemo lako zaključiti da je:
$a_4 = 2$, $a_3 = -1$, $a_2 = 3$, $a_1 = -4$, $a_0 = 1$.
Iz polinoma $x - 1$ uočavamo da je $c = 1$.
Hornerova šema:

	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
c	b_3	b_2	b_1	b_0	r

Menjamo poznate vrednosti:

	2	-1	3	-4	1
1	b_3	b_2	b_1	b_0	r

Ostale vrednosti računamo po Hornerovim formulama:

$$b_3 = a_4 = 2$$
$$b_2 = a_3 + c \cdot b_3 = -1 + 1 \cdot 2 = -1 + 2 = 2$$
$$b_1 = a_2 + c \cdot b_2 = 3 + 1 \cdot 1 = 3 + 1 = 4$$
$$b_0 = a_1 + c \cdot b_1 = -4 + 1 \cdot 4 = -4 + 4 = 0$$
$$r = a_0 + c \cdot b_0 = 1 + 1 \cdot 0 = 1 + 0 = 1.$$

	2	-1	3	-4	1
1	2	1	4	0	1

Dobili smo polinom trećeg stepena čiji su koeficijenti: $b_3 = 2, b_2 = 1, b_1 = 4$, a slobodan član je 0.

Imamo dakle:

$$2x^4 - x^3 - 4x + 1 = (x - 1)(2x^3 + x^2 + 4x) + 1.$$

3.4 NZD i NZS polinoma

Definicija 6. *Neka su $A(x)$ i $B(x)$ polinomi iz $\mathbb{F}[x]$. Za polinom $C(x) \in \mathbb{F}[x]$ kažemo da je zajednički delilac polinoma $A(x)$ i polinoma $B(x)$ ako $C(x)$ deli $A(x)$ i ako $C(x)$ deli $B(x)$. Najveći zajednički delilac(NZD) polinoma $A(x)$ i polinoma $B(x)$ (kada su $A(x)$, $B(x)$ različiti od nultog polinoma) biće onaj polinom $D(x)$ koji je zajednički delilac tih polinoma i koji je sam deljiv bilo kojim deliocem tih polinoma.*

Polinom $D(x)$ pronalazimo (ukoliko on postoji) pomoću Euklidovog algoritma ili faktorisanjem polinoma na činioce koji se ne mogu dalje rastavljati.

Definicija 7. *Neka su $A(x)$ i $B(x)$ polinomi iz $\mathbb{F}[x]$. Za polinom $C(x) \in \mathbb{F}[x]$ kažemo da je zajednički sadržalac polinoma $A(x)$ i $B(x)$ ako su oba polinoma njegovi delioci. Najmanji zajednički sadržalac (NZS) polinoma $A(x)$ i polinoma $B(x)$ biće onaj polinom $D(x)$ koji je njihov zajednički sadržalac i koji je sam delilac bilo kojeg drugog zajedničkog sadržaoca tih polinoma.*

NZS polinoma uvek postoji i određujemo ga faktorizacijom.

Ukoliko je nemoguće koristiti faktorizaciju, koristimo način naveden u narednoj teoremi.

Teorema 3. *Neka su $A(x)$ i $B(x)$ polinomi iz $\mathbb{F}[x]$ sa najstarijim koeficijentom jednakim 1. Tada je proizvod najvećeg zajedničkog delioca (NZD) i najmanjeg zajedničkog sadržaoca (NZS) tih polinoma jednak proizvodu samih polinoma $A(x)$ i $B(x)$.*

Dokaz. Neka su $A(x)$ i $B(x)$ polinomi iz $\mathbb{F}[x]$. Označimo sa $D(x)$ njihov najveći zajednički delilac, a sa $S(x)$ njihov najmanji zajednički sadržalac.

Po definiciji, $D(x)$ deli oba polinoma $A(x)$ i $B(x)$ pa ih možemo zapisati kao:

$$A(x) = D(x) \cdot Q_1(x)$$

$$B(x) = D(x) \cdot Q_2(x).$$

Posmatrajmo polinom $S(x)$ zadat sa:

$$S(x) = \frac{A(x) \cdot B(x)}{D(x)}.$$

Polinom

$$S(x) = \frac{A(x) \cdot B(x)}{D(x)} = Q_1(x)Q_2(x)D(x).$$

I $A(x)$ i $B(x)$ dele $Q_1(x)Q_2(x)D(x)$. Polinomi $Q_1(x)$ i $Q_2(x)$ nemaju zajedničke faktore jer je $D(x)$ NZD polinoma $A(x)$ i $B(x)$. Ako bi $A(x)$ i $B(x)$ delili neki polinom $S_1(x)$, tada bi i $Q_1(x)Q_2(x)D(x)$ delio polinom $S_1(x)$, odakle zaključujemo da je $S(x)$ NZS navedenih polinoma.

Dakle, polinom $S(x)$ možemo zaista napisati u obliku

$$S(x) = \frac{A(x) \cdot B(x)}{D(x)}.$$

Kada levu i desnu stranu pomnožimo polinomom $D(x)$, dobijamo:

$$D(x) \cdot S(x) = A(x) \cdot B(x).$$

Dakle,

$$NZD(A(x), B(x)) \cdot NZS(A(x), B(x)) = A \cdot B.$$

□

3.5 Euklidov algoritam

U ovom poglavlju ćemo predstaviti poznati algoritam koji nam služi za određivanje najvećeg zajedničkog delioca dva polinoma.

Koraci Euklidovog algoritma:

1. Podelimo $A(x)$ polinomom B(x) (sa eventualnim ostatkom):
   $A(x) = B(x)Q_1(x) + R_1(x)$
2. Podelimo sada $B(x)$ dobijenim ostatkom $R_1(x)$: $B(x) = R_1(x)Q_2(x) + R_2(x)$
3. Delimo $R_1(x)$ sa dobijenim ostatkom $R_2(x)$:
   $R_1(x) = R_2(x)Q_3(x) + R_3(x)$
4. Ovaj postupak ponavljamo dok ne dobijemo kao ostatak nulti polinom
5. Dva poslednja koraka izgledaće ovako:
   $R_{k-2}(x) = R_{k-1}(x)Q_k(x) + R_k(x)$
   $R_{k-1}(x) = R_k(x)Q_{k+1}(x)$

Teorema 4. *Poslednji ostatak $R_k(x)$ različit od nultog, u opisanom postupku, jeste najveći zajednički delilac (NZD) polinoma $A(x)$ i $B(x)$ (u definiciji smo ga označili sa $D(x)$).*

Dokaz. Euklidov algoritam:

$$A = BQ_1 + R_1$$

$$B = R_1Q_2 + R_2$$

$$R_1 = R_2Q_3 + R_3$$

.

.

.

$$R_{k-3} = R_{k-2}Q_{k-1} + R_{k-1}$$
$$R_{k-2} = R_{k-1}Q_k + R_k$$
$$R_{k-1} = R_kQ_{k+1}.$$

Iz poslednje jednakosti vidimo da R_k deli R_{k-1}. Kako R_k deli R_{k-1} jednakost $R_{k-2} = R_{k-1}Q_k + R_k$ možemo zapisati kao $R_{k-2} = R_kQ_kQ_{k+1} + R_k = R_k(Q_kQ_{k+1} + 1)$ iz koje zaključujemo da R_k deli R_{k-2}. Sada iz

$$R_{k-3} = R_{k-2}Q_{k-1} + R_{k-1}$$

$$R_{k-3} = R_k(Q_kQ_{k+1} + 1)Q_{k-1} + R_kQ_{k+1}$$
$$R_{k-3} = R_k((Q_kQ_{k+1} + 1)Q_{k-1} + Q_{k+1})$$

zaključujemo da R_k deli R_{k-3}.

Nastavljajući ovaj postupak zaključujemo da R_k deli R_3 i R_2, pa iz $R_1 = R_2Q_3 + R_3$ sledi da R_k deli R_1, iz $B = R_1Q_2 + R_2$ sledi da R_k deli B, a iz $A = BQ_1 + R_1$ sledi da R_k deli A.

Zaključujemo da je R_k delilac od A i B.

Treba još da dokažemo da je R_k najveći zajednički delilac od A i B.

Neka je polinom D neki drugi delilac od A i B.

Iz $A = BQ_1 + R_1$ sledi $R_1 = A - BQ_1$, a kako D deli A i B, onda on deli i R_1.

Na isti način iz $B = R_1Q_2 + R_2$ sledi $R_2 = B - R_1Q_2$, a kako D deli B i R_1, onda on deli i R_2.

Nastavljajući ovaj postupak zaključujemo da D deli R_k.

Dakle, R_k je najveći zajednički delilac od A i B. □

Teorema 5. *Neka je $\mathbb{F}$ polje. Za svaka dva polinoma $A(x), B(x) \in \mathbb{F}[x] \setminus \{0\}$ postoje polinomi $P(x), Q(x) \in \mathbb{F}[x]$ takvi da je:*

$$A(x)P(x) + B(x)Q(x) = NZD(A(x), B(x)).$$

Dokaz. Neka je

$$A = BQ_1 + R_1$$
$$B = R_1Q_2 + R_2$$
$$R_1 = R_2Q_3 + R_3$$

.

.

.

$$R_{n-4} = R_{n-3}Q_{n-2} + R_{n-2}$$
$$R_{n-3} = R_{n-2}Q_{n-1} + R_{n-1}$$
$$R_{n-2} = R_{n-1}Q_n + R_n.$$

Poslednji nenula ostatak R_n je najveći zajednički delilac polinoma A i B. Iz prethodnih jednakosti dobijamo:

$$R_n = R_{n-2} - R_{n-1}Q_n$$
$$R_{n-1} = R_{n-3} - R_{n-2}Q_{n-1}$$
$$R_{n-2} = R_{n-4} - R_{n-3}Q_{n-2}$$

.

.

.

$$R_3 = R_1 - R_2Q_3$$
$$R_2 = B - R_1Q_2$$
$$R_1 = A - BQ_1,$$

pa je

$$R_n = R_{n-2} - R_{n-1}Q_n$$

$$= R_{n-2} - (R_{n-3} - R_{n-2}Q_{n-1})Q_n$$

$$= R_{n-2} - R_{n-3}Q_n + R_{n-2}Q_{n-1}Q_n$$

$$= -R_{n-3}Q_n + (1 + Q_{n-1}Q_n)R_{n-2}$$

$$= -R_{n-3}Q_n + (1 + Q_{n-1}Q_n)(R_{n-4} - R_{n-3}Q_{n-2})$$

$$= R_{n-3}Q_n + R_{n-4} - R_{n-2}Q_{n-2} + R_{n-4}Q_{n-2}Q_{n-1} - R_{n-3}Q_{n-2}Q_{n-1}Q_n$$

$$= (1 + Q_{n-1}Q_{n-2})R_{n-4} - (Q_n + Q_{n-2} + Q_{n-2}Q_{n-1}Q_n)R_{n-3}$$

$$= (1 + Q_{n-2}Q_{n-1})R_{n-4} - (Q_n + Q_{n-2} + Q_{n-2}Q_{n-1}Q_n)(R_{n-5} - R_{n-4}Q_{n-3})$$

$$= (1 + Q_{n-2}Q_{n-1})R_{n-4} - (R_{n-5}Q_n - R_{n-4}Q_nQ_{n-3} + R_{n-5}Q_{n-2}$$
$$-R_{n-4}Q_{n-3}Q_{n-2} + R_{n-5}Q_{n-2}Q_{n-1}Q_n - R_{n-4}Q_{n-3}Q_{n-2}Q_{n-1}Q_n)$$

$$= -(Q_n + Q_{n-2} + Q_{n-2}Q_{n-1}Q_n)R_{n-5}$$
$$+(1 + Q_{n-2}Q_{n-1} + Q_{n-3}Q_n + Q_{n-3}Q_{n-2} + Q_{n-3}Q_{n-2}Q_{n-1}Q_n)R_{n-4}.$$

Nastavljajući ovaj postupak, R_n ćemo izraziti preko R_1 i R_2, a kada dalje zamenimo $R_2 = B - R_1Q_2$ i $R_1 = A - BQ_1$, dobijamo da postoje polinomi P i Q takvi da je

$$R_n(x) = A(x)P(x) + B(x)Q(x).$$

Pošto je $R_n(x) = NZD(A(x), B(x))$, dobijamo:

$$A(x)P(x) + B(x)Q(x) = NZD(A(x), B(x)).$$

□

Primer 14. *Nađi NZD i NZS za polinome:*

$$P(x) = x^2 - 4$$
$$Q(x) = x^2 - x - 2$$
$$R(x) = x^2 - 3x + 2$$

Rešenje:
Prvo moramo svaki od njih da rastavimo na činioce:

$P(x) = x^2 - 4 = x^2 - 2^2 = (x-2)(x+2)$

$Q(x) = x^2 - x - 2 = x^2 - 2x + x - 2 = x(x-2) + (x-2) = (x-2)(x+1)$

$R(x) = x^2 - 3x + 2 = x^2 - x - 2x + 2 = x(x-1) - 2(x-1) = (x-1)(x-2)$

Sledi da je

$$NZD(P(x), Q(x), R(x)) = x - 2$$

$$NZS(P(x), Q(x), R(x)) = (x-2)(x+2)(x-1)(x+1).$$

Primer 15. *Primenom Euklidovog algoritma odrediti najveći zajednički delilac polinoma $A(x) = x^6 - 2x^5 - x^4 + 2x^3 + x^2 - 3x + 2$ i $B(x) = x^5 - 3x^4 + 2x^3 - x^2 + 3x - 2$.*

1. Podelimo $A(x)$ polinomom $B(x) = x^5 - 3x^4 + 2x^3 - x^2 + 3x - 2$:

$$\begin{array}{l}
(x^6 - 2x^5 - x^4 + 2x^3 + x^2 - 3x + 2) : B(x) = x + 1 \\
\underline{-(x^6 - 3x^5 + 2x^4 - x^3 + 3x^2 - 2x)} \\
\qquad x^5 - 3x^4 + 3x^3 - 2x^2 - x + 2 \\
\qquad \underline{-(x^5 - 3x^4 + 2x^3 - x^2 + 3x - 2)} \\
\qquad\qquad x^3 - x^2 - 4x + 4
\end{array}$$

$$Q_1(x) = x + 1$$
$$R_1(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4.$$

2. Podelimo sada $B(x)$ dobijenim ostatkom $R_1(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$:

$$\begin{array}{l}
(x^5 - 3x^4 + 2x^3 - x^2 + 3x - 2) \ : R_1(x) = x^2 - 2x + 4 \\
\underline{-(x^5 - x^4 - 4x^3 + 4x^2)} \\
\qquad -2x^4 + 6x^3 - 5x^2 + 3x - 2 \\
\qquad \underline{-(-2x^4 + 2x^3 + 8x^2 - 8x)} \\
\qquad\qquad 4x^3 - 13x^2 + 11x - 2 \\
\qquad\qquad \underline{-(-4x^3 - 4x^2 - 16x + 16)} \\
\qquad\qquad\qquad -9x^2 + 27x - 18
\end{array}$$

$$Q_2(x) = x^2 - 2x + 4$$
$$R_2(x) = -9x^2 + 27x - 18.$$

3. Delimo $R_1(x)$ sa dobijenim ostatkom $R_2(x) = -9x^2 + 27x - 18$:

$$\begin{array}{rrrl} (x^3 & -x^2 & -4x & +4) : R_2(x) = -\frac{1}{9}x - \frac{2}{9} \\ -(x^3 & -x^2 & +2x) & \\ \hline & 2x^2 & -6x & +4 \\ & -(2x^2 & -6x & +4) \\ \hline & & & 0 \end{array}$$

$$x^3 - x^2 - 4x + 4 = (-9x^2 + 27x - 18) \cdot (-\frac{1}{9}x - \frac{2}{9}) + 0$$

$$x^3 - x^2 - 4x + 4 = -9(x^2 - 3x + 2) \cdot (-\frac{1}{9})(x + 2) + 0$$

$$x^3 - x^2 - 4x + 4 = (x^2 - 3x + 2) \cdot (x + 2) + 0.$$

Poslednji nenula ostatak je

$$NZD(A(x), B(x)) = (x^2 - 3x + 2) = (x - 1)(x - 2)$$

.

Vidimo da $NZD(A(x), B(x))$ možemo izraziti kao

$NZD(A(x), B(x)) = A(x)P(x) + B(x)Q(x).$

$NZD(A(x), B(x)) = B - R_1Q_2$

$NZD(A(x), B(x)) = B - (A - BQ_1)Q_2$

$NZD(A(x), B(x)) = B - AQ_2 + BQ_1Q_2$

$NZD(A(x), B(x)) = -AQ_2 + (1 + Q_1Q_2)B.$

U ovom primeru je:

$NZD(A(x), B(x)) = -A(x)(x^2 - 2x + 4) + B(x)(1 + (x + 1)(x^2 - 2x + 4))$

$NZD(A(x), B(x)) = A(x)(-x^2+2x-4)+B(x)(1+x^3-2x^2+4x+x^2-2x+4)$

$NZD(A(x), B(x)) = A(x)(-x^2 + 2x - 4) + B(x)(x^3 - x^2 + 2x^2 + 5),$

gde su

$$P(x) = -x^2 + 2x - 4$$

$$Q(x) = x^3 - x^2 + 2x^2 + 5.$$

4 Faktorizacija polinoma

4.1 Racionalne nule polinoma sa celobrojnim koeficijentima

Teorema 6. *Neka je* $n \in \mathbb{N}_0$, $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ *polinom sa celobrojnim koeficijentima i neka je* α *nula polinoma* $P(x)$. *Ako je* $\alpha = \frac{p}{q}$, *za neke* $p, q \in \mathbb{Z}$ *takve da je* $NZD(p, q) = 1$, *onda* $q|a_n$ *i* $p|a_0$.

Dokaz. Pretpostavimo da je α nula polinoma $P(x)$. To znači da je $P(\alpha) = 0$. Odnosno,

$$a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \ldots + a_1\alpha + a_0 = 0$$

$$a_n\left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \ldots + a_1\frac{p}{q} + a_0 = 0$$

Kada ovu jednakost pomnožimo sa q^n dobijamo:

$$a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \ldots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0$$

$$a_n p^n + q(a_{n-1}p^{n-1} + \ldots + a_1 p q^{n-2} + a_0 q^{n-1}) = 0$$

$$a_n p^n = -q(a_{n-1}p^{n-1} + \ldots + a_1 p q^{n-2} + a_0 q^{n-1})$$

Kako je desna strana deljiva sa q, onda i leva strana mora biti deljiva sa q, odnosno $q|a_n p^n$. Ali kako je $NZD(p, q) = 1$, onda $q|a_n$.
Slično,

$$p(a_n p^{n-1} + a_{n-1}p^{n-2}q + \ldots + a_1 q^{n-1}) + a_0 q^n = 0$$

$$a_0 q^n = -p(a_n p^{n-1} + a_{n-1}p^{n-2}q + \ldots + a_1 q^{n-1})$$

Kako je desna strana deljiva sa p, onda i leva strana mora biti deljiva sa q, odnosno $p|a_0 q^n$. Kako je $NZD(p, q) = 1$, onda $p|a_0$.

$\square$

Iz prethodne teoreme se za dati polinom sa celobrojnim vrednostima određuju kandidati za racionalne nule, a da li je neki od tih brojeva kandidata stvarno nula moramo da proverimo direktno. Ova teorema nam daje potreban ali ne i dovoljan uslov.
Još jedan karakterističan slučaj je kada su koeficijenti polinoma racionalni brojevi, a jedan njegov koren iracionalan broj, na primer, $a + b\sqrt{\alpha}$ onda taj polinom ima i koren $a - b\sqrt{\alpha}$. Ovo će biti dokazano u sledećoj glavi.
Zadaci u kojima se ovo koristi su česti na prijemnim ispitima.

4.2 Kompleksne nule polinoma sa realnim koeficijentima

Teorema 7. *Neka je* $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, $P \in \mathbb{R}[x]$. *Ako je* $x_0 = a + bi, a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$ *nula polinoma* P, *onda je i* $\bar{x_0} = a - bi$ *takođe nula tog polinoma.*

Dokaz. Neka je $S(x) = (x - x_0)(x - \bar{x_0})$.

Tada $S \in \mathbb{R}[x]$ jer:

$$\begin{aligned} S(x) &= (x - x_0)(x - \bar{x_0}) \\ &= x^2 - (x_0 + \bar{x_0})x + x_0\bar{x_0} \\ &= x^2 - (a + bi + a - bi)x + (a + bi)(a - bi) \\ &= x^2 - 2ax + a^2 + b^2. \end{aligned}$$

Pošto su a, b realni brojevi, možemo da zaključimo da je polinom S polinom sa realnim koeficijentima.

Prema teoremi o deljenju sa ostatkom, kada polinom P podelimo sa polinomom S dobijamo:

$$P(x) = S(x)Q(x) + R(x), \deg R < \deg S$$

$$P(x) = (x - x_0)(x - \bar{x_0})Q(x) + R(x), \deg R < \deg S$$

Polinomi P i S su polinomi sa realnim koeficijentima, odatle sledi da su i polinomi Q i R polinomi sa realnim koeficijentima.

Iz jednakosti $S(x) = x^2 - 2ax + a^2 + b^2$ vidimo da je $\deg S = 2$, pa zaključujemo da $\deg R \leq 1$.

Neka je $R(x) = Ax + B, A, B \in \mathbb{R}$. Za svako $x \in \mathbb{C}$ važi:

$$P(x) = (x - x_0)(x - \bar{x_0})Q(x) + Ax + B$$

Pošto ova jednakost važi za svako $x \in \mathbb{C}$, onda važi i za $x = x_0$:

$$P(x_0) = Ax_0 + B.$$

Kako je x_0 nula polinoma P, onda sledi da je

$$Ax_0 + B = 0$$

, to jest

$$A(a + bi) + B = 0$$

$$Aa + B + Abi = 0.$$

Realni i imaginarni deo moraju biti jednaki nuli, jer su A i B realni brojevi.

$$Aa + B = 0$$

$$Ab = 0$$

Znamo da je $b \neq 0$, pa zaključujemo da je $A = 0$, iz čega sledi i da je $B = 0$. Dakle, $R(x) = 0$ i važi:

$$P(x) = (x - x_0)(x - \bar{x_0})Q(x)$$

iz čega sledi:

$$P(\bar{x_0}) = 0.$$

Dakle, $\bar{x_0}$ je nula polinoma P. □

4.3 Osnovni stav algebre

Osnovna teorema algebre je jedna od najznačajnijih teorema u matematici, koja istražuje fundamentalna svojstva kompleksnih brojeva i polinoma. Ova teorema ima dugu istoriju i široku primenu u različitim granama matematike i nauke.

Teorema 8. *Svaki polinom nad poljem kompleksnih brojeva stepena bar jedan ima bar jednu nulu u skupu kompleksnih brojeva.*

4.4 Teorema o faktorizaciji polinoma

Sledeća teorema nam omogućava da polinome rastavimo na proizvod faktora manjeg stepena.

Teorema 9. *Svaki polinom $P(z) \in \mathbb{C}[z]$ n-tog stepena može se na jedinstven način predstaviti u obliku proizvoda n linearnih faktora.*

$$\begin{aligned} P(z) &= a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 \\ &= a_n (z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \cdot \ldots \cdot (z - \alpha_n), \end{aligned}$$

$a_n \neq 0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ *su nule polinoma* $P(z)$.

Može se desiti da su neki od $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ jednaki među sobom, pa se navedena faktorizacija iz teoreme može zapisati u malo drugačijem obliku:

$$\begin{aligned} P(z) &= a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 \\ &= a_n (z - \alpha_1)^{k_1} (z - \alpha_2)^{k_2} \cdot \ldots \cdot (z - \alpha_m)^{k_m}, \end{aligned}$$

gde su $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ međusobno različite nule polinoma $P(z)$, a $k_1, \ldots, k_m$ su prirodni brojevi, takvi da je njihov zbir $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n = \deg P(z)$. Ovakva faktorizacija se naziva **kanonska faktorizacija polinoma**.

Dokaz. Prema osnovnoj teoremi algebre, $P(z)$ ima bar jednu nulu. Označimo tu nulu sa α_1, a $P(z)$ označimo sa $P_n(z)$. Prema Bezuovoj teoremi $P_n(z)$ je deljiv sa $(z - \alpha_1)$, pa odatle sledi:

$$P_n(z) = (z - \alpha_1) \cdot Q(z).$$

Sada $Q(z)$ označimo sa $P_{n-1}(z)$ koji prema osnovnoj teoremi algebre ima bar jednu nulu α_2, nastavljamo analogno:

$$\begin{gathered} P_n(z) = (z - \alpha_1) \cdot P_{n-1}(z), \\ P_n(z) = (z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \cdot P_{n-2}(z), \\ . \\ . \\ . \\ P_n(z) = (z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \ldots (z - \alpha_n), \end{gathered}$$

što je i trebalo dokazati. □

4.5 Vietove formule

Vietove formule povezuju nule polinoma sa njegovim koeficijentima. Posebno su značajne za polinome većih stepena i one vrlo često jedine koje daju rezultate o nulama polinoma.

Teorema 10. *Neka je dat polinom $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, $P \in \mathbb{C}[x]$ i neka su $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nule polinoma P, tada važe Vietove formule:*

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}$$

$$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \ldots + x_{n-2}x_{n-1}x_n = -\frac{a_{n-3}}{a_n}$$

.

.

.

$$x_1x_2 \ldots x_n = \frac{(-1)^n a_0}{a_n}.$$

Dokaz. Teoremu ćemo dokazati matematičkom indukcijom.

Dokažimo da tvrđenje važi za n=1. Neka je $P(x) = a_1 x + a_0$ polinom prvog stepena i neka je x_1 nula polinoma P. Tada je

$$x_1 = -\frac{a_0}{a_1}.$$

Dakle, tvrđenje važi za $n = 1$.

Pretpostavimo da tvrđenje važi za svaki polinom $Q \in \mathbb{C}[x]$ stepena $n \in \mathbb{N}$ oblika:

$$Q(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0,$$

takav sa su $x_1, x_2, \cdots, x_n$ nule polinoma Q, to jest važi sledeće tvrđenje:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = -\frac{b_{n-1}}{b_n}$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n = \frac{b_{n-2}}{b_n}$$

$$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \ldots + x_{n-2}x_{n-1}x_n = -\frac{b_{n-3}}{b_n}$$

.

.

.

$$x_1 x_2 \dots x_n = \frac{(-1)^n b_0}{b_n}.$$

Dokažimo sada da tvrđenje važi za polinom $P \in \mathbb{C}[x]$ stepena $n+1$:

$$P(x) = a_{n+1}x^{n+1} + a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0.$$

Neka su $x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}$ sve nule polinoma P. Na osnovu posledice Bezuove teoreme polinom P je deljiv polinomom $S(x) = x - x_{n+1}$, to jest postoje $b_0, b_1, \ldots, b_n$ takvi da važi:

$$P(x) = (x - x_{n+1})Q(x),$$

$$P(x) = (x - x_{n+1})(b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0),$$

odnosno,

$$a_{n+1}x^{n+1} + a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 =$$
$$(x - x_{n+1})(b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0),$$

$$a_{n+1}x^{n+1} + a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 =$$
$$b_n x^{n+1} + b_{n-1}x^n + b_{n-2}x^{n-1} + \ldots + b_1 x^2 + b_0 x$$
$$-x_{n+1}(b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0),$$

Primenjujući teoremu o jednakosti polinoma sledi:

$$a_{n+1} = b_n$$

$$a_n = b_{n-1} - b_n x_{n+1}$$

$$a_{n-1} = b_{n-2} - b_{n-1}x_{n+1}$$

.

.

.

$$a_0 = -b_0 x_{n+1},$$

odnosno

$$b_n = a_{n+1}$$
$$b_{n-1} = a_n + b_n x_{n+1}$$
$$b_{n-2} = a_{n-1} + b_{n-1} x_{n+1}$$
$$.$$
$$.$$
$$.$$
$$b_0 = -\frac{a_0}{x_{n+1}},$$

Iz prethodno dobijenih jednakosti i iz pretpostavke indukcije sledi:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{n+1} = -\frac{b_{n-1}}{b_n} + x_{n+1}$$
$$= -\frac{a_n + a_{n+1}x_{n+1}}{a_{n+1}} + x_{n+1}$$
$$= -\frac{a_n}{a_{n+1}}$$
$$(x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_1x_n + x_1x_{n+1})$$
$$+(x_2x_3 + x_2x_4 + \ldots + x_2x_n + x_2x_{n+1}) + \ldots + x_{n-1}x_n + x_nx_{n+1}$$
$$= x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n$$
$$+x_{n+1}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$$
$$= \frac{b_{n-2}}{b_n} + x_{n+1}(-\frac{b_{n-1}}{b_n})$$
$$= \frac{b_{n-2} - b_{n-1}x_{n+1}}{b_n} = \frac{a_{n-1}}{a_{n+1}}$$
$$.$$
$$.$$
$$.$$
$$x_1x_2\ldots x_nx_{n+1} = \frac{(-1)^n b_0}{b_n} \cdot x_{n+1}$$
$$= \frac{(-1)^n(-\frac{a_0}{x_{n+1}})}{a_{n+1}} \cdot x_{n+1}$$
$$\frac{(-1)^{n+1}a_0}{a_{n+1}}.$$

Ovim smo dokazali da Vijetove formule važe i za polinome stepena $n+1$, pa po principu matematičke indukcije važe za polinome bilo kog stepena. □

Primer 16. *Nađi parametar λ, ako je zbir dva korena $x_1 + x_2 = 1$ jednačine $2x^3 - x^2 - 7x + \lambda = 0$.*

Rešenje:
Upotrebićemo Vietove formule za jednačinu trećeg stepena:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{a_2}{a_3}$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{a_1}{a_3}$$

$$x_1x_2x_3 = -\frac{a_0}{a_3}.$$

Iz jednačine $2x^3 - x^2 - 7x + \lambda = 0$ dobijamo:

$$a_3 = 2, a_2 = -1, a_1 = -7, a_0 = \lambda,$$

pa je:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{-1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{-7}{2} = -\frac{7}{2}$$

$$x_1x_2x_3 = -\frac{\lambda}{2}.$$

Iz uslova zadatka $x_1 + x_2 = 1$ sledi $x_3 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$.

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -\frac{7}{2}$$

$$x_1x_2 + x_1 \cdot (-\frac{1}{2}) + x_2 \cdot (-\frac{1}{2}) = -\frac{7}{2}$$

$$x_1x_2 - \frac{1}{2}(x_1 + x_2) = -\frac{7}{2}$$

$$x_1x_2 - \frac{1}{2} \cdot 1 = -\frac{7}{2}$$

$$x_1x_2 = -\frac{7}{2} + \frac{1}{2}$$

$$x_1x_2 = -3,$$

a odavde je:

$$x_1x_2x_3 = -\frac{\lambda}{2}$$

$$-3 \cdot (-\frac{1}{2}) = -\frac{\lambda}{2}$$

$$\frac{3}{2} = -\frac{\lambda}{2}$$

$$\lambda = -3.$$

Primer 17. *Neka je* $P(x) = 2x^3 + 4x^2 + x + 5$. *Ako su* x_1, x_2, x_3 *nule polinoma* $P(x)$, *odrediti polinom* $Q(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ *čije su nule* $y_1 = x_1 + 1, y_2 = x_2 + 1, y_3 = x_3 + 1$ *i važi* $Q(0) = 6$.

Rešenje:

$$a_3 = 2, a_2 = 4, a_1 = 1, a_0 = 5$$

.
Primenićemo Vietove formule:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{4}{2} = -2.$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{1}{2}$$

$$x_1x_2x_3 = -\frac{5}{2}.$$

Pošto je $Q(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ i $Q(0) = 6$, sledi:

$$d = 6.$$

$$y_1 + y_2 + y_3 = -\frac{b}{a}.$$

$$y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3 = \frac{c}{a}$$

$$y_1y_2y_3 = -\frac{d}{a} = -\frac{6}{a}.$$

Ubacujemo $y_1 = x_1 + 1, y_2 = x_2 + 1, y_3 = x_3 + 1$:

$$(x_1 + 1) + (x_2 + 1) + (x_3 + 1) = -\frac{b}{a}$$

$$(x_1 + 1)(x_2 + 1) + (x_1 + 1)(x_3 + 1) + (x_2 + 1)(x_3 + 1) = \frac{c}{a}$$

$$(x_1 + 1)(x_2 + 1)(x_3 + 1) = -\frac{6}{a}.$$

Sređivanjem dobijamo:

$$(x_1 + x_2 + x_3) + 3 = -\frac{b}{a}$$

$$(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) + 2(x_1 + x_2 + x_3) + 3 = \frac{c}{a}$$

$$x_1x_2x_3 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) + (x_1 + x_2 + x_3) + 1 = -\frac{6}{a}$$

Koristeći Vietove formule za polinom P, dobijamo:

$$-2+3=-\frac{b}{a}$$

$$\frac{1}{2}+2\cdot(-2)+3=\frac{c}{a}$$

$$-\frac{5}{2}+\frac{1}{2}-2+1=-\frac{6}{a},$$

odnosno

$$1=-\frac{b}{a}$$

$$-\frac{1}{2}=\frac{c}{a}$$

$$-3=-\frac{6}{a},$$

Iz treće jednakosti $\Rightarrow a=2$. Zamenom u jednakost $1=-\frac{b}{a}$ dobijamo $b=-2$, a iz jednakosti $-\frac{1}{2}=\frac{c}{a}\Rightarrow c=-1$.

Dakle, koeficijenti polinoma $Q(x)$ su:

$$a=2, b=-2, c=-1, d=6,$$

pa je:

$$Q(x)=2x^3-2x^2-x+6.$$

Primer 18. *Ispitati da li polinom $P(z)=z^3+2z-3$ ima racionalne nule.*

Rešenje:
Kandidati za racionalnu nulu, $z=\frac{p}{q}$, takvu da $p|-3$ i $q|1$ su: -3,-1,1,3. Izračunavanjem $P(-3), P(-1), P(1), P(3)$ dobijamo samo da je $z=1$ racionalna nula.

5 Raširenja polja

5.1 Kronekerova konstrukcija

U narednim razmatranjima biće nam potreban sledeći pojam.

Definicija 8. *Polinom $P \in \mathbb{F}[x]$ je nerastavljiv nad poljem $\mathbb{F}$ ako ne postoje polinomi $Q, S \in \mathbb{F}$, stepena barem jedan, takvi da je $P = QS$.*

Teorema 11. *Neka je $\mathbb{F}$ polje i $A(x) \in \mathbb{F}[x] \backslash \{0\}$ nerastavljiv polinom. Tada važi:*

1. *$\mathbb{E} = \mathbb{F}[x]/\langle A(x) \rangle$ je polje.*
2. *Polje $\mathbb{E}$ sadrži potpolje izomorfno polju $\mathbb{F}$.*
3. *Polinom $A(x)$ ima bar jednu nulu u polju $\mathbb{E}$.*
4. *Kako je $\mathbb{F} \subset \mathbb{E}$, onda je $\mathbb{E}$ vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ i dimenzija tog prostora je jednaka stepenu polinomina $A(x)$.*

Dokaz. 1. Treba da dokažemo da je $\mathbb{E}$ polje, to jest da svaki element iz $\mathbb{E}$ koji nije nula ima inverz u odnosu na množenje. Neka je $I = \langle A(x) \rangle$ ideal. Dakle, $\mathbb{E} = \mathbb{F}[x]/I$ i nula u tom prstenu je $0 + I = I$.
Pretpostavimo da je $C(x) + I \neq I$, to jest $C(x) \notin I$. Odavde sledi da $A(x)$ ne deli $C(x)$, a kako je $A(x)$ nerastavljiv polinom sledi da je $NZD(A(x), C(x)) = 1$, to jest postoje polinomi $P(x)$ i $Q(x)$ takvi da važi

$$A(x)P(x) + C(x)Q(x) = 1.$$

Prelaskom na količnički prsten dobijamo:

$$(A(x) + I)(P(x) + I) + (C(x) + I)(Q(x) + I) = 1 + I$$

Kako je $A(x) \in I$, dobijamo:

$$(C(x) + I)(Q(x) + I) = 1 + I$$

pa element $C(x)$ ima inverz u $\mathbb{E}$.
$\mathbb{E}$ je polje.

2. Definišemo homomorfizam $f : \mathbb{F} \to \mathbb{E}$ sa

$$f(\alpha) = \alpha + I, \forall \alpha \in \mathbb{F}.$$

Pošto su $\{0\}$ i celo polje jedini ideali u bilo kom polju, zaključujemo da je $Ker(f) = \{0\}$ (Jezgro je uvek ideal, ali ne može biti jednako celom polju pošto se pri homomorfizmu jedinica slika u jedinicu, a ne u nulu). Dakle, homomorfizam f uspostavlja izomorfizam između $\mathbb{F}$ i slike od f, koja je potpolje od $\mathbb{E}$.

3. Neka je $x' = x + I \in \mathbb{E}$ i $\alpha' = \alpha + I, \forall \alpha \in \mathbb{F}$. Ako je

$$A(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0,$$

onda je

$$A(x') = a'_n x^n + \ldots + a'_1 x + a'_0$$

$$A(x') = (a_n + I)(x + I)^n + \ldots + (a_1 + I)(x + I) + (a_0 + I)$$

$$A(x') = (a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0) + I = I.$$

x' je nula polinoma A(x).

4. Kako je $\mathbb{F} \subset \mathbb{E}$, elemente polja $\mathbb{E}$ možemo sabirati ali i množiti sa elementima iz polja $\mathbb{F}$. Na osnovu svojstava operacija u polju $\mathbb{E}$ dobijamo da je $\mathbb{E}$ vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$. Treba da dokažemo da je dimenzija ovog prostora jednaka $\deg A(x)$. Dokazaćemo da je

$$[1 + I, x + I, \ldots, x^{n-1} + I]$$

jedna baza prostora $\mathbb{E}$ ako je polinom $A(x)$ stepena n. Pokažimo prvo da je $\{1 + I, x + I, \ldots, x^{n-1} + I\}$ generatrisa. Neka je $P(x) + I \in \mathbb{E}$, tada je:

$$P(x) = Q(x)A(x) + R(x),$$

gde je $R(x) = 0$ ili $\deg R(x) < \deg A(x) = n$. Dakle,

$$R(x) = r_{n-1} x^n + \ldots + r_1 x + r_0,$$

gde $r_i \in \mathbb{F}$ mogu biti jednaki 0. U tom slučaju je:

$$P(x) + I = (Q(x) + I)(A(x) + I) + (R(x) + I)$$

$$P(x) + I = r_{n-1}(x^{n-1} + I) + \ldots + r_1(x + I) + r_0(1 + I).$$

Sledi da $1 + I, x + I, \ldots, x^{n-1} + I$ generišu E nad poljem $\mathbb{F}$.

Dokažimo sada da je sistem $[1 + I, x + I, \ldots, x^{n-1} + I]$ linearno nezavisan.

Neka je

$$c_{n-1}(x^{n-1} + I) + \ldots + c_1(x + I) + c_0(1 + I) = 0 + I, \forall c_i \in \mathbb{F}$$

Tada je:

$$(c_{n-1} x^{n-1} + \ldots + c_1 x + c_0) + I = I$$

$$c_{n-1} x^{n-1} + \ldots + c_1 x + c_0 \in I = \langle A(x) \rangle.$$

Ali, polinom $A(x)$ je stepena n i on može da deli $c_n x^n + \ldots + c_1 x + c_0$ ako je $c_{n-1} x^{n-1} + \ldots + c_1 x + c_0 = 0$. To znači da $c_{n-1} = \ldots = c_1 = c_0 = 0$. Odavde zaključujemo da je sistem $[1 + I, x + I, \ldots, x^{n-1} + I]$ linearno nezavisan.

$\square$

Jedna zanimljiva primena ove teoreme je sledeći primer:

Primer 19. *Konstruisati polje koje ima tačno 4 elementa.*

Rešenje:

$\mathbb{Z}_2$ je polje koje ima 2 elementa.

Ako nađemo nerastavljiv polinom $A(x) \in \mathbb{Z}_2[x]$, koji je stepena n, onda će $\mathbb{Z}_2[x]/\langle A(x)\rangle$ na osnovu prethodne teoreme biti polje. Na osnovu prethodne teoreme $\mathbb{Z}_2[x]/\langle A(x)\rangle$ će biti i vektorski prostor dimenzije n. Dakle, $\mathbb{Z}_2[x]/\langle A(x)\rangle$ je kao vektorski prostor nad $\mathbb{Z}_2$ izomorfno $\mathbb{Z}_2^n$, pa ima 2^n elemenata.

Nama je potrebno polje sa 4 elemenata, to jest potreban nam je nerastavljiv polinom iz $\mathbb{Z}_2[x]$ stepena 2. Neka je

$$A(x) = x^2 + x + 1.$$

Polinom $A(x)$ je nerastavljiv ako i samo ako nema nijednu nulu u $\mathbb{Z}_2$.

$$A(0) = 1,\ A(1) = 1,$$

polinom $A(x)$ je nerastavljiv polinom. Dakle, polje $\mathbb{F}_4$ je dato sa:

$$F_4 = \mathbb{Z}_2[x]/\langle x^2 + x + 1\rangle$$

Neka je $\phi = x + \langle x^2 + x + 1\rangle$ u ovom polje, dobijamo da je

$$F_4 = \{0, 1, \phi, 1 + \phi\}.$$

Kako u polju $\mathbb{F}_4$ važi: $\phi^2 = 1 + \phi$, možemo napisati i tablice sabiranja i množenja:

Tablica sabiranja:

$+$	0	1	ϕ	$1+\phi$
0	0	1	ϕ	$1+\phi$
1	1	0	$1+\phi$	ϕ
ϕ	ϕ	$1+\phi$	0	1
$1+\phi$	$1+\phi$	ϕ	1	0

Tablica množenja:

$\cdot$	0	1	ϕ	$1+\phi$
0	0	0	0	0
1	0	1	ϕ	$1+\phi$
ϕ	0	ϕ	$1+\phi$	1
$1+\phi$	0	$1+\phi$	1	ϕ

5.2 Algebarska raširenja

Neka su $\mathbb{F}$ i $\mathbb{E}$ polja. $\mathbb{F}$ je potpolje polja $\mathbb{E}$ ako i samo ako je $\mathbb{F}$ algebarska potstruktura polja $\mathbb{E}$. U tom slučaju pišemo $\mathbb{F} \subset \mathbb{E}$. Tako je $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Svako potpolje od $\mathbb{C}$ se naziva brojevnim poljem.

Na primer, $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{x + y\sqrt{2} | x, y \in \mathbb{Q}\}$ je jedno brojevno polje.

Definicija 9. *Polje $\mathbb{E}$ je raširenje polja $\mathbb{F}$ ako polje $\mathbb{E}$ sadrži potpolje izomorfno polju $\mathbb{F}$. $\mathbb{E}$ je vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$, a dimenzija ovog prostora se zove stepen raširenja polja $\mathbb{E}$ nad $\mathbb{F}$ i označavamo sa $[\mathbb{E} : \mathbb{F}]$.*

Ako je stepen konačan, onda se raširenje zove konačno rasirenje.

Definicija 10. *Neka je $A(x) \in \mathbb{F}[x] \backslash \{0\}$, gde je $\mathbb{F}$ polje. Korensko polje polinoma $A(x)$ je najmanje raširenje polja $\mathbb{F}$ u kome $A(x)$ ima linearnu faktorizaciju.*

Prsten polinoma $\mathbb{F}[x]$ je komutativan i nema pravih delitelja nule. Polje racionalnih izraza nad tim prstenom označavamo sa

$$\mathbb{F}(x) = \left\{ \frac{p}{q} | \text{gde su} p, q \in \mathbb{F}[x], q \neq 0 \right\}$$

Ono je raširenje polja $\mathbb{F}$, ali ne i konačno jer sadrži, na primer, beskonačnu linearnu familiju $[1, x, x^2, \ldots]$.

Kao što je $\mathbb{F}[x]$ skup polinoma po x, tako je i $\mathbb{F}[\alpha]$ skup polinoma po α. Slično, $\mathbb{F}(\alpha)$ je skup racionalnih izraza po α i to je jedno polje.

Definicija 11. *Neka je $\mathbb{F}$ potpolje od $\mathbb{C}$ i $\alpha \in \mathbb{C}$. Tada je α algebarski nad $\mathbb{F}$ ako postoji polinom $P(x) \in \mathbb{F}[x]$ za koji je $P(\alpha) = 0$.*

$\mathbb{F}(\alpha)$ je najmanje potpolje od $\mathbb{C}$ koje sadrži α.
$\mathbb{F}[\alpha]$ su svi polinomi po α.

Sada se možemo zapitati da li su skupovi $\mathbb{F}[\alpha]$ i $\mathbb{F}(\alpha)$ nekada jednaki.

Teorema 12. $\mathbb{F}(\alpha) = \mathbb{F}[\alpha]$ *ako i samo ako je α algebarski nad $\mathbb{F}$.*

Dokaz. ($\Rightarrow$): Neka je $\mathbb{F}[\alpha]$ polje. Tada svaki element iz $\mathbb{F}[\alpha]$ ima inverz pa $\alpha \in \mathbb{F}[\alpha]$ ima inverz u $\mathbb{F}[\alpha]$.

$$\alpha \cdot f(\alpha) = 1, \text{ gde je } f(\alpha) \text{ element u } \mathbb{F}[\alpha]$$

$$\alpha \cdot (a_0 + a_1\alpha + \ldots + a_{k-1}\alpha^{k-1} + a_k\alpha^k) = 1$$

$$a_0\alpha + a_1\alpha^2 + \ldots + a_{k-1}\alpha^k + a_k\alpha^{k+1} = 1$$

$$a_0\alpha + a_1\alpha^2 + \ldots + a_{k-1}\alpha^k + a_k\alpha^{k+1} - 1 = 0$$

$$P(x) = a_0x + a_1x^2 + \ldots + a_{k-1}x^k + a_kx^{k+1} - 1$$

$$P(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha \text{ je algebarski.}$$

($\Leftarrow$): Pretpostavimo da je α algebarski nad $\mathbb{F}$. Tada možemo da posmatramo ideal definisan sa:

$$I = \{A(x) \in \mathbb{F}[x] : A(\alpha) = 0\}.$$

$\mathbb{F}[x]$ je glavnoidealski jer je $\mathbb{F}$ polje. Dakle, $I \lhd \mathbb{F}[x] \Rightarrow I$ je glavni ideal.

Kako je I glavni ideal, on je generisan jednim elementom, to jest postoji moničan polinom $\mu_\alpha(x)$ za koji je $I =< \mu_\alpha >$. Treba da pokažemo da je polinom $\mu_\alpha(x)$ nerastavljiv. Pretpostavimo suprotno, neka je $\mu_\alpha(x)$ rastavljiv polinom, to jest neka je $\mu_\alpha(x) = A(x)B(x)$ za neke nekonstantne polinome $A(x), B(x) \in \mathbb{F}[x]$. Tada je $A(\alpha)B(\alpha) = \mu_\alpha(\alpha) = 0$ pa sledi da je $A(\alpha) = 0$ ili $B(\alpha) = 0$.

Ako je $A(\alpha) = 0$, onda je $A(x) \in I$, pa $\mu_\alpha(x)|A(x)$, a to je nemoguće jer je $\deg A(x) < \deg \mu_\alpha(x)$.

Ako je $B(\alpha) = 0$, onda je $B(x) \in I$, pa $\mu_\alpha(x)|B(x)$, a to je nemoguće jer je $\deg B(x) < \deg \mu_\alpha(x)$.

Dakle, $\mu_\alpha(x)$ je nerastavljiv polinom.

Posmatrajmo homomorfizam

$$f : \mathbb{F}[x] \to \mathbb{F}[\alpha]$$

definisan sa $f(P(x)) = P(\alpha)$.

Homomorfizam f je "NA", a $Ker(f) = I$. Odavde dobijamo da je $\mathbb{F}[x]/I \cong \mathbb{F}[\alpha]$. Kako je $\mu_\alpha(x)$ nerastavljiv polinom, $\mathbb{F}[x]/I$ je polje na osnovu teoreme 11, pa je i $\mathbb{F}[\alpha]$ takođe polje.

$\square$

Definicija 12. *Polinom $\mu_\alpha(x)$ iz teoreme se zove MINIMALNI POLINOM elementa α.*

Naime, $\mu_\alpha(x)$ je moničan polinom najmanjeg stepena takav da je $\mu_\alpha(\alpha) = 0$, to jest moničan nerastavljiv polinom tako da je $\mu_\alpha(\alpha) = 0$.

Takođe ako je $P(\alpha) = 0$ za neki polinom $P \in \mathbb{F}[x]$, tada $\mu_\alpha(x)|P$.

$\mathbb{F}(\alpha)$ je jedno raširenje nad $\mathbb{F}$ stepena $\deg(\mu_\alpha) = n$.

Bazu za vektorski prostor $\mathbb{F}(\alpha)$ nad $\mathbb{F}$ čine $1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{n-1}$.

Primer 20. *Neka je $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3}$. a) Pokazati da je α algebarski nad $\mathbb{Q}$. b) Naći minimalni polinom za α nad $\mathbb{Q}$. c) Odrediti $\frac{1}{\alpha+3}$ u obliku $P(\alpha)$ za neki polinom $P(x) \in \mathbb{Q}[x]$.*

Rešenje:

a) Treba da pronađemo polinom koji element α anulira.

$$\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3}$$

$$\alpha - \sqrt{2} = \sqrt{3}$$

Kada kvadriramo prethodnu jednačinu dobijamo:

$$(\alpha-\sqrt{2})^2=(\sqrt{3})^2$$
$$\alpha^2-2\sqrt{2}\alpha+2=3$$
$$\alpha^2-1=2\sqrt{2}\alpha$$

Ponovnim kvadriranjem dobijamo:

$$(\alpha^2-1)^2=(2\sqrt{2}\alpha)^2$$
$$\alpha^4-2\alpha^2+1=8\alpha^2$$
$$\alpha^4-10\alpha^2+1=0$$

.

Dobili smo polinom $P(x)=x^4-10x^2+1$, $P(\alpha)=0$.

b) Pokažimo da je $P(x)$ minimalni polinom elementa α. Neka je $\mu(x)=x^4-10x^2+1$. Treba da dokažemo da je ovaj polinom nerastavljiv nad $\mathbb{Q}$. Pretpostavimo suprotno, neka je polinom $\mu(x)$ rastavljiv nad $\mathbb{Q}$. Kako je u pitanju polinom četvrtog stepena, on se rastavlja na proizvod polinoma prvog i polinoma trećeg stepena ili na proizvod dva polinoma drugog stepena.

1^0 Neka je $\mu(x)$ proizvod polinoma prvog i polinoma trećeg stepena nad poljem $\mathbb{Q}$. Odavde sledi da $\mu(x)$ ima nulu u $\mathbb{Q}$. Ako polinom $a_nx^n+\ldots+a_1x+a_0=0$ ima racionalnu nulu $\frac{r}{s}$, $NZD(r,s)=1$, onda $r|a_0$ i $s|a_n$. $\mu(x)=x^4-10x^2+1 \Rightarrow a_n=a_4=1$ i $a_0=1$, pa $r|1$ i $s|1$. Dakle, $r\in\{-1,1\}$, $s\in\{-1,1\}$, pa $\frac{r}{s}\in\{-1,1\}$, ali -1 i 1 nisu nule polinoma $\mu(x)$, pa ovaj slučaj nije moguć.

2^0 Neka je $\mu(x)$ proizvod dva polinoma drugog stepena nad $\mathbb{Q}$.

$$\mu(x)=(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)$$

$$\mu(x)=x^4+cx^3+dx^2+ax^3+acx^2+adx+bx^2+bcx+bd$$

$$x^4-10x^2+1=x^4+(a+c)x^3+(b+ac+d)x^2+(ad+bc)x+bd.$$

Izjednačavanjem odgovarajućih koeficijenata dobijamo:

$$a+c=0$$
$$b+ac+d=0$$
$$ad+bc=0$$
$$bd=1$$

Kako je $a+c=0$, onda je $c=-a$. Zamenom u $ad+bc=0$, dobijamo $ad-ac=0$, odnosno $a(d-c)=0$. Ili je $a=0$ ili je $d-c=0$.

• Ako je $a = 0$, onda je i $c = 0$ i sistem se svodi na:

$$b + d = -10$$

$$bd = 1$$

Iz $bd = 1 \Rightarrow d = \frac{1}{b}$, zamenom u $b + d = -10$, dobijamo:

$$b + \frac{1}{b} = -10$$

Kada pomnožimo i levu i desnu stranu sa b, dobijamo:

$$b^2 + 1 = -10b$$

$$b^2 - 10b + 1 = 0$$

$$b_{1,2} = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 4}}{2}$$

$$b_{1,2} = \frac{-10 \pm \sqrt{96}}{2}$$

$$b_{1,2} = \frac{-10 \pm 4\sqrt{6}}{2}$$

$$b_{1,2} = -5 \pm 4\sqrt{6}$$

Kako $\sqrt{6} \notin \mathbb{Q}$, ovaj slučaj nije moguć.

• Ako je $b - d = 0$, onda je $b = d$. Zamenom u jednačinu $bd = 1$ dobijamo $b^2 = 1$, to jest $b \in \{-1, 1\}$, a zamenom u jednačinu $b + ac + d = -10 (b = d$ i $c = -a)$, dobijamo:

$$b + a \cdot (-a) + b = -10$$

$$2b - a^2 = -10.$$

Ako je $b = -1 \Rightarrow -2 - a^2 = -10 \Rightarrow a^2 = 8 \Rightarrow a = \pm 2\sqrt{2}$, a kako $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ onda ovaj slučaj nije moguć.

Ako je $b = 1 \Rightarrow 2 - a^2 = -10 \Rightarrow a^2 = 12 \Rightarrow a = \pm 2\sqrt{3}$, a kako $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$ onda ni ovaj slučaj nije moguć.

Zaključujemo da polinom $\mu(x)$ nije rastavljiv nad $\mathbb{Q}$. Dakle, $\mu(x)$ je minimalni polinom za element α.

c) Kako bi pronašli $\frac{1}{\alpha+3}$ koristićemo metod neodređenih koeficijenata.
Postoje $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ takvi da je

$$\frac{1}{\alpha + 3} = a + b\alpha + c\alpha^2 + d\alpha^3$$

Kada levu i desnu stranu pomnožimo sa $\alpha + 3$ dobijamo:

$$1 = (\alpha + 3)(a + b\alpha + c\alpha^2 + d\alpha^3)$$
$$1 = a\alpha + b\alpha^2 + c\alpha^3 + d\alpha^4 + 3a + 3bd\alpha + 3c\alpha^2 + 3d\alpha^3$$
$$1 = d\alpha^4 + (c + 3d)\alpha^3 + (b + 3c)\alpha^2 + (a + 3d)\alpha + 3a.$$

Kako je $\alpha^4 = 10\alpha^2 - 1$ i $1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3$ linearno nezavisni dobijamo:

$$1 = d(10\alpha^2 - 1) + (c + 3d)\alpha^3 + (b + 3c)\alpha^2 + (a + 3d)\alpha + 3a$$
$$1 = 10d\alpha^2 - d + (c + 3d)\alpha^3 + (b + 3c)\alpha^2 + (a + 3d)\alpha + 3a$$
$$1 = (c + 3d)\alpha^3 + (b + 3c + 10d)\alpha^2 + (a + 3d)\alpha + (3a - 1).$$

Dobijamo sistem jednačina:

$$3a - d = 1$$
$$a + 3b = 0$$
$$b + 3c + 10d = 0$$
$$c + 3d = 0$$

Iz $c + 3d = 0 \Rightarrow c = -3d$.

Zamenom u $b + 3c + 10d = 0$ dobijamo $b + 3 - 3d + 10d = 0 \Rightarrow b + d = 0 \Rightarrow b = -d$.

Kada $b = -d$ zamenimo u $a + 3b = 0$ dobijamo $a + 3 \cdot (-d) = 0 \Rightarrow a = 3d$.

Konačno, kada $a = 3d$ zamenimo u $3a - d = 1$ dobijamo $3 \cdot 3d - d = 1 \Rightarrow 8d = 1 \Rightarrow d = \frac{1}{8}$.

Dakle, koeficijenti su $a = \frac{3}{8}, b = -\frac{1}{8}, c = -\frac{3}{8}$ i $d = \frac{1}{8}$.

$$\frac{1}{\alpha + 3} = \frac{3}{8} - \frac{1}{8}\alpha - \frac{3}{8}\alpha^2 + \frac{1}{8}\alpha^3.$$

Teorema 13. *Ako je P ($\deg P \geq 1$) polinom sa realnim koeficijentima i $a - b\sqrt{d}$ njegova nula onda je i $a + b\sqrt{d}$ nula polinoma P, d je prirodan broj veći od nule i bezkvadratni.*

Dokaz. Neka je $x = a - b\sqrt{d}$.

$$a - x = b\sqrt{d}$$

Kada kvadriramo prethodnu jednakost, dobijamo:

$$(a - x)^2 = (b\sqrt{d})^2$$
$$a^2 - 2ax + x^2 = b^2 d$$

Sada imamo polinom sa racionalnim koeficijentima po x:

$$x^2 - 2ax + (a^2 - db^2) = 0$$

.

$$x_{1,2} = \frac{2a \pm \sqrt{4a^2 - 4a^2 + 4b^2 d}}{2} = \frac{2a \pm 2b\sqrt{d}}{2} = a \pm b\sqrt{d}.$$

Njegove nule su iracionalni brojevi pa je on nerastavljiv nad $\mathbb{Q}$.

Ako je P bilo koji polinom nad $\mathbb{Q}$ čija je nula $a - b\sqrt{d}$, onda minimalni polinom za ovaj element mora da deli P, a druga nula minimalnog polinoma je $a + b\sqrt{d}$, pa je nula i od polinoma P.

□

Primer 21. *Jedno rešenje jednačine* $z^2 + 41 = 14z + \frac{10}{z}$ *je* $2 - \sqrt{3}$. *Odrediti ostala rešenja.*

Rešenje:
$z^2 + 41 = 14z + \frac{10}{z}$ proširujemo sa z.

Znamo da je drugo rešenje $z_2 = 2 + \sqrt{3}$.

$$z^3 + 41z - 14z^2 - 10 = (z - 2 + \sqrt{3})(z - 2 - \sqrt{3}) \cdot Q(z) = (z^2 - 4z + 1) \cdot Q(z).$$

Koristeći teoremu o faktorizaciji, pomnožimo sa $(z - a)$

$$z^3 + 41z - 14z^2 - 10 = (z^2 - 4z + 1)(z - a)$$

poznat nam je slobodan član

$$z^3 + 41z - 14z^2 - 10 = (z^2 - 4z + 1)(z - 10)$$

Dakle, $z_3 = 10$ je još jedno rešenje date jednačine.

Teorema 14. *(Teorema o primitivnom elementu) Svako konačno raširenje* $\mathbb{E}$ *polja* $\mathbb{Q}$ *je oblika* $\mathbb{Q}(\alpha)$, *za neko* $\alpha \in \mathbb{E}$.

Element α je **primitivni element** raširenja E.

Navešćemo jedan primer o primitivnom elementu.

Primer 22. *Nači jedan primitivni element korenskog polja polinoma* $x^4 - x^2 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$.

Rešenje:

Faktorisaćemo naš polinom nad $\mathbb{Q}$ metodom kompletiranja kvadrata:

$$\begin{aligned} x^4 - x^2 - 2 &= \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 2 \\ &= \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} \end{aligned}$$

$$= \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2$$
$$= \left(x^2 - \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\right)\left(x^2 - \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right)$$
$$= (x^2 - 2)(x^2 + 1)$$
$$= (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x - i)(x + i),$$

gde je i imaginarna jedinica. Dakle, korensko polje $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)$.

Treba da nađemo α za koje je $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i) = \mathbb{Q}(\alpha)$.

Dokazaćemo da se za α može uzeti element $\alpha = \sqrt{2}+i$. Pošto $\alpha \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}, i) \Rightarrow \mathbb{Q}(\alpha) \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)$.

Da bi dokazali da $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i) \subseteq \mathbb{Q}(\alpha)$, dovoljno je da dokažemo da na primer $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\alpha)$.

Ako levu i desnu stranu jednakosti

$$\alpha = \sqrt{2} + i$$

"podignemo"na treći stepen, dobijamo:

$$\alpha^3 = (\sqrt{2} + i)^3$$

$$\alpha^3 = \sqrt{2}^3 + 3\sqrt{2}^2 i + 3\sqrt{2} i^2 + i^3$$
$$\alpha^3 = 2\sqrt{2} + 6i - 3\sqrt{2} - i$$
$$\alpha^3 = -\sqrt{2} + 5i$$
$$\alpha^3 = 5(\sqrt{2} + i) - 6\sqrt{2},$$

kako je $\alpha = \sqrt{2} + i$, zamenom dobijamo:

$$\alpha^3 = 5\alpha - 6\sqrt{2}$$

, odnosno, kada sredimo

$$\alpha^3 - 5\alpha = -6\sqrt{2},$$

pa je

$$\sqrt{2} = -\frac{1}{6}(\alpha^3 - 5\alpha) \in \mathbb{Q}(\alpha).$$

6 REŠENI ZADACI

1. Odrediti ostatak pri deljenju polinoma $P(x) = x^{2011} - x^{2010} + x^{2009}$ polinomom $G(x) = x^3 + 1$.

Rešenje:

$$P(x) = x^{2009}(x^2 - x + 1)$$

$$P(x) = (x^{2009} + 1 - 1)(x^2 - x + 1)$$

$$P(x) = ((x + 1)Q(x) - 1)(x^2 - x + 1)$$

$$P(x) = (x + 1)(x^2 - x + 1)Q(x) - x^2 + x - 1$$

$$P(x) = (x^3 + 1)Q(x) - x^2 + x - 1.$$

Dakle, ostatak pri deljenju polinoma P polinomom G je

$$R(x) = -x^2 + x - 1. \blacksquare$$

2. Da li postoje realni brojevi b i c takvi da svaka od jednačina $x^2 + bx + c = 0$ i $2x^2 + (b + 1)x + c + 1 = 0$ ima po dva celobrojna korena?

Rešenje:

Neka su celobrojni koreni prve jednačine k i l, a druge m i n. Tada na osnovu Vietovih formula važi:

$$k + l = -b$$
$$k \cdot l = c$$

$$2(m + n) = -b - 1$$
$$2m \cdot n = c + 1$$

Iz $2m \cdot n = c + 1 \Rightarrow c = 2mn - 1 \Rightarrow c$ je neparan.
Iz $k \cdot l = c \Rightarrow k$ i l su neparni.
Iz $k + l = -b \Rightarrow b$ je paran.
Iz $2(m + n) = -b - 1 \Rightarrow 2(m + n)$ neparano, jer je b paran, što je nemoguće.
Dakle, takvi brojevi ne postoje. $\blacksquare$

3. Dat je polinom šetog stepena

$$P(x) = x^6 - 7x^5 + 14x^4 - 4x^3 - 57x^2 + 123x - 70.$$

Ako su dve nule ovog polinoma $2 + i$ i $3 + \sqrt{2}$, odrediti sve ostale nule.

Rešenje:

Kako je $2 + i$ nula polinoma $P(x)$, na osnovu teoreme sledi i da je $2 - i$ njegova nula.

Poznata nam je još jedna nula polinoma $P(x)$, a to je $3 + \sqrt{2}$, pa na osnovu teoreme sledi i da je $3 - \sqrt{2}$ nula polinoma $P(x)$.

Polinom $P(x)$ je polinom šestog stepena, a to znaši da polinom $P(x)$ ima šest nula. Poznate su nam četiri nule: $x_0 = 2 + i$, $x_1 = 2 - i$, $x_2 = 3 + \sqrt{2}$ i $x_2 = 3 - \sqrt{2}$. Potrebno je naći još dve nule x_4 i x_5.

Polinom $P(x)$ je oblika:

$$P(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)(x - x_5)$$

$$P(x) = (x - (2 + i))(x - (2 - i))(x - (3 + \sqrt{2}))(x - (3 - \sqrt{2}))(x - x_4)(x - x_5)$$

$$P(x) = (x - 2 - i)(x - 2 + i)(x - 3 - \sqrt{2})(x - 3 + \sqrt{2})(x - x_4)(x - x_5)$$

$$P(x) = ((x - 2)^2 + 1)((x - 3)^2 - 2)(x - x_4)(x - x_5).$$

Sređivanjem ovog polinoma dobijamo:

$$P(x) = (x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 44x + 35)(x - x_4)(x - x_5)$$

$P(x) = S(x)Q(x)$, gde je $Q(x) = (x - x_4)(x - x_5)$.

Deljenjem polinoma $P(x)$ polinomom $S(x) = x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 44x + 35$ dobijamo:

$$\begin{array}{rrrrrrrl}
(x^6 & -7x^5 & +14x^4 & -4x^3 & -57x^2 & +123x & -70) & : S(x) = x^2 + x - 2 \\
-(x^6 & -8x^5 & +24x^2 & -44x^3 & +35x^2) & & & \\
\hline
& x^5 & -10x^4 & +40x^3 & -92x^2 & +123x & -70 & \\
& -(x^5 & -8x^4 & +24x^3 & -44x^2 & +35x) & & \\
\hline
& & -2x^4 & +16x^3 & -48x^2 & +88x & -70 & \\
& & -(-2x^4 & +16x^3 & -48x^2 & +88x & -70) & \\
\hline
& & & & & & 0 &
\end{array}$$

$Q(x) = x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2)$.

Dakle, $x_4 = 1$ i $x_5 = -2$. ■

4. Odrediti sve nule polinoma

$$P(x) = x^5 - ax^3 + bx^2 - 4x + c$$

ako pri deljenju sa polinomom $Q(x) = (x-2)(x^2+1)$ **daje ostatak** $R(x) = 12x^2 - 6x + 12$.

Rešenje:

$$Q(x) = (x-2)(x^2+1) = (x-2)(x-i)(x+i).$$

Iz polinoma $Q(x)$ poznate su nam tri nule: $x_1 = 2$, $x_2 = i$ i $x_3 = -i$.
Znamo da je $P(x) = S(x)Q(x) + R(x)$.

$$P(2) = 0 + R(2)$$

$$2^5 - a \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 + c = 12 \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 + 12$$

$$32 - 8a + 4b - 8 + c = 48 - 12 + 12$$

$$-8a + 4b + c = 24$$

Ako u jednakost $P(x) = S(x)Q(x) + R(x)$ zamenimo $x_2 = i$, dobijamo:

$$P(i) = 0 + R(i)$$

$$i^5 - a \cdot i^3 + b \cdot i^2 - 4 \cdot i + c = 12 \cdot i^2 - 6 \cdot i + 12$$

$$i + ai - b - 4i + c = -12 - 6i + 12$$

$$(-b + c) + i \cdot (1 + a - 4 + 6) = 0$$

$$(-b + c) + i \cdot (3 + a) = 0$$

$$-b + c = 0 \Rightarrow b = c.$$

$$3 + a = 0 \Rightarrow a = -3.$$

Kada u jednačinu $-8a + 4b + c = 24$ zamenimo $b = c$ i $a = -3$, dobijamo:

$$-8 \cdot (-3) + 4b + c = 24$$

$$4c + c = -24 + 24$$

$$5c = 0$$

$$b = c = 0.$$

Dakle,

$$P(x) = x^5 + 3x^3 - 4x.$$

Polinom $P(x)$ možemo napisati u obliku $P(x) = x(x^4 + 3x^2 - 4)$ odakle vidimo da je jedna nula 0.

Pomoću smene $t = x^2$ možemo odrediti i ostale nule što su $1, -1, 2i, -2i$. ■

5. Dat je polinom četvrtog stepena $P(x) = x^4 - 10x^2 + 1$. Ako su $x_0 = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ i $x_1 = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ nule polinoma P odrediti sve ostale nule.

Rešenje:

Zadatak ćemo uraditi na dva načina.

I način:

Kako su $x_0 = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ i $x_1 = \sqrt{2} - \sqrt{3}$ nule datog polinoma, polinom $P(x)$ možemo zapisati u obliku:

$$P(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

$$P(x) = (x - (\sqrt{2} + \sqrt{3}))(x - (\sqrt{2} + \sqrt{3}))(x - x_2)(x - x_3)$$

Neka je

$$P(x) = S(x)(x - x_2)(x - x_3),$$

gde je

$$S(x) = (x - (\sqrt{2} + \sqrt{3}))(x - (\sqrt{2} - \sqrt{3}))$$
$$S(x) = (x - \sqrt{2} - \sqrt{3})(x - \sqrt{2} + \sqrt{3})$$
$$S(x) = x^2 - \sqrt{2}x + \sqrt{3}x - \sqrt{2}x + 2 - \sqrt{6} - \sqrt{3}x + \sqrt{6} - 3$$
$$S(x) = x^2 - 2\sqrt{2}x - 1.$$

Podelimo sada polinom $P(x)$ polinomom $S(x)$.
Dakle,

$$x^2 + 2\sqrt{2}x - 1 = (x - x_2)(x - x_3)$$

$$x_{2,3} = \frac{-2\sqrt{2} \pm \sqrt{8+4}}{2}$$
$$x_{2,3} = \frac{-2\sqrt{2} \pm \sqrt{12}}{2}$$
$$x_{2,3} = \frac{-2\sqrt{2} \pm 2\sqrt{3}}{2}$$
$$x_{2,3} = -\sqrt{2} \pm \sqrt{3}.$$

Polinom $P(x)$ možemo zapisati u obliku:

$$P(x) = (x - (\sqrt{2} + \sqrt{3}))(x - (\sqrt{2} + \sqrt{3}))(x - (-\sqrt{2} + \sqrt{3}))(x - (-\sqrt{2} - \sqrt{3}))$$

Nule polinoma P su $x_0 = \sqrt{2} + \sqrt{3}$, $x_1 = \sqrt{2} - \sqrt{3}$, $x_2 = -\sqrt{2} + \sqrt{3}$ i $x_3 = -\sqrt{2} - \sqrt{3}$.

II način:

Uvedimo smenu $t = x^2$, dobijamo kvadratnu jednačinu po t:

$$t^2 - 10t + 1 = 0$$

.

Nule ove jednačine su:

$$t_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{100-4}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{96}}{2} = \frac{10 \pm 4\sqrt{6}}{2} = 5 \pm 2\sqrt{6}.$$

Ako kvadriramo $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ dobijamo:

$$(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = 2 + 2\sqrt{6} + 3 = 5 + 2\sqrt{6}.$$

Možemo da primetimo da je $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2$ upravo broj $5 + 2\sqrt{6}$, to jest jedno rešenje naše kvadratne jednačine $t^2 - 10t + 1 = 0$.

Kada vratimo smenu dobijamo rešenja:

$$t = 5 + 2\sqrt{6} \Rightarrow x_{0,3} = \pm(\sqrt{2} + \sqrt{3}).$$

Koristeći i rešenje

$$t = 5 - 2\sqrt{6} \Rightarrow x_{1,2} = \pm(\sqrt{2} - \sqrt{3}).\blacksquare$$

6. Neka je $\alpha = i + \sqrt{3}$.

a) Pokazati da je α algebarski element nad $\mathbb{Q}$.

b) Naći minimalni polinom za α nad $\mathbb{Q}$.

c) Odrediti $\frac{1}{\alpha^2-2}$ u obliku $P(\alpha)$ za $P(x) \in \mathbb{Q}[x]$

Rešenje:

a) Iz $\alpha = i + \sqrt{3}$ sledi da je $\alpha - i = \sqrt{3}$. Kvadriranjem dobijamo:

$$(\alpha - i)^2 = 3$$

$$\alpha^2 - 2i\alpha - 1 = 3$$

$$\alpha^2 - 4 = 2i\alpha$$

Kada ponovo kvadriramo levu i desnu stranu, dobijamo:

$$(\alpha^2 - 4)^2 = -4\alpha^2$$
$$\alpha^4 - 8\alpha^2 + 16 = -4\alpha^2$$
$$\alpha^4 - 4\alpha^2 + 16 = 0.$$

Dakle, α je nula polinoma $P(x) = x^4 - 4x^2 + 16 \in \mathbb{Q}[x]$, pa sledi da je α algebarski element nad poljem $\mathbb{Q}$.

b) Pokažimo da je minimalni polinom elementa α polinom $P(x) = x^4 - 4x^2 + 16$, to jest dovoljno je da pokažemo da je on nerastavljiv nad $\mathbb{Q}$.

Pretpostavimo suprotno, neka je polinom $P(x) = R(x)S(x)$, gde su polinomi $R(x), S(x) \in \mathbb{Q}[x]$, takvi da je $\deg R \geq 1$ i $\deg S \geq 1$. Imamo dva slučaja:

1° Neka je $\deg R = 3$ i $\deg S = 1$. Odavde sledi da polinom $P(x)$ ima racionalnu nulu $\frac{r}{s}(\mathrm{NZD}(r,s) = 1)$, onda $r|a_0$ i $s|a_n$. Kako je $a_n = a_4 = 1$, onda je $s = 1$, a $a_0 = 16$, $r \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm 16\}$. Dakle, kandidati za racionalnu nulu su $\frac{r}{s} \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm 16\}$.

$$P(\pm 1) = 1 - 4 + 16 = 13 \neq 0$$
$$P(\pm 2) = 16 - 4 \cdot 4 + 16 = 16 \neq 0$$
$$P(\pm 4) = 256 - 4 \cdot 16 + 16 = 208 \neq 0$$
$$P(\pm 8) = 4096 - 4 \cdot 64 + 16 = 3856 \neq 0$$
$$P(\pm 16) = 65536 - 4 \cdot 256 + 16 = 61456 \neq 0.$$

Proverom možemo zaključiti da ovaj slučaj nije moguć.

2° Neka je $\deg R = 2$ i $\deg S = 2$. Za neke $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ važi $R(x) = x^2 + ax + b$, $S(x) = x^2 + cx + d$. Tada je:

$$P(x) = R(x)S(x) = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d).$$

Kada pomnožimo ova dva polinoma, dobijamo:

$$x^4 - 4x^2 + 16 = P(x) = x^4 + (a + c)x^3 + (b + ac + d)x^2 + (ad + bc)x + bd.$$

Izjednačavanjem koeficijenata sa leve i desne strane, dobijamo sistem jednačina:

$$a + c = 0$$
$$b + ac + d = -4$$
$$ad + bc = 0$$
$$bd = 16.$$

Iz prve jednačine sledi da je $c = -a$. Zamenom u treću jednačinu dobijamo: $a(d - b) = 0$.

i) Ako je $a = 0 \Rightarrow c = 0$. Zamenom dobijamo:

$$b + d = -4$$

$$bd = 16 \Rightarrow d = \frac{16}{b}$$

$$b + \frac{16}{b} = -4$$

$$b^2 + 4b + 16 = 0.$$

Rešavamo kvadratnu jednačinu:

$$b_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 64}}{2}$$

$$b_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-48}}{2}$$

$$b_{1,2} = \frac{-4 \pm 4i\sqrt{3}}{2}$$

$$b_{1,2} = -2 \pm 2i\sqrt{3}.$$

Vidimo da b i d nisu realni brojevi, pa ovaj slučaj nije moguć.

ii) Ako je $b - d = 0 \Rightarrow b = d$. Zamenom u jednačinu $bd = 16$ dobijamo $b^2 = 16 \Rightarrow b \in \{4, -4\}$. Kada $b = 4$ zamenimo u jednačinu $b + ac + d = -4$, dobijamo $4 - a^2 + 4 = -4$, odnosno $a^2 = 12 \Rightarrow a = \pm 2\sqrt{3}$.

Na isti način menjamo $b = -4$, dobijamo $-4 - a^2 - 4 = -4$, odnosno $a^2 = -4 \Rightarrow a = \pm 2i$.

Zaključujemo da a nije iz skupa racionalnih brojeva, što znači da ove jednačine nemaju racionalnih rešenja, pa ni ovaj slučaj nije moguć.

Dakle, $P(x)$ je minimalni polinom elementa α nad $\mathbb{Q}$.

c) Za nalaženje $\frac{1}{\alpha^2-2}$ možemo koristiti metod neodređenih koeficijenata. Znamo da postoje $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ takvi da je

$$\frac{1}{\alpha^2 - 2} = a + b\alpha + c\alpha^2 + d\alpha^3.$$

Pomnožimo levu i desnu stranu prethodne jednakosti sa $\alpha^2 - 2$:

$$1 = (\alpha^2 - 2)(a + b\alpha + c\alpha^2 + d\alpha^3)$$

$$1 = a\alpha^2 + b\alpha^3 + c\alpha^4 + d\alpha^5 - 2a - 2b\alpha - 2c\alpha^2 - 2d\alpha^3.$$

Za element α važi $\alpha^4 - 4\alpha^2 + 16 = 0$.

$$\Rightarrow \alpha^4 = 4\alpha^2 - 16$$

$$\Rightarrow \alpha^5 = 4\alpha^3 - 16\alpha.$$

Sada možemo da zamenimo α^4 i α^5. Dobijamo sledeće:

$$1 = a\alpha^2 + b\alpha^3 + c(4\alpha^2 - 16) + d(4\alpha^3 - 16\alpha) - 2a - 2b\alpha - 2c\alpha^2 - 2d\alpha^3$$

$$1 = a\alpha^2 + b\alpha^3 + 4c\alpha^2 - 16c + 4d\alpha^3 - 16d\alpha - 2a - 2b\alpha - 2c\alpha^2 - 2d\alpha^3$$

$$1 = (b + 4d - 2d)\alpha^3 + (a + 4c - 2c)\alpha^2 + (-16d - 2b)\alpha - 16c - 2a.$$

Dobijamo sistem jednačina:

$$b + 2d = 0$$

$$a + 2c = 0$$

$$-16d - 2b = 0$$

$$-16c - 2a = 1.$$

Iz $b + 2d = 0 \Rightarrow b = 2d$.
Iz $-16d - 2b = 0 \Rightarrow b = -8d$.
Kako je $b = 2d$ i $b = -8d \Rightarrow b = d = 0$.
Iz $a + 2c = 0 \Rightarrow a = -2c$.
Kada $a = -2c$ ubacimo u jednačinu $-16c - 2a = 1$, dobijamo:

$$-16c - 2 \cdot (-2c) = 1$$

$$-16c + 4c = 1$$

$$-12c = 1$$

$$c = -\frac{1}{12}$$

$$\Rightarrow -16 \cdot \left(-\frac{1}{12}\right) - 2a = 1$$

$$\frac{4}{3} - 2a = 1$$

$$2a = \frac{1}{3}$$

$$a = \frac{1}{6}.$$

Dakle, koeficijenti su $a = \frac{1}{6}, b = 0, c = -\frac{1}{12}, d = 0$, pa važi:

$$\frac{1}{\alpha^2 - 2} = \frac{1}{6} - \frac{1}{12}\alpha^2. \blacksquare$$

7. Dokazati da je broj $\alpha = \sqrt{33 - 20\sqrt{2}} + \sqrt{22 + 12\sqrt{2}}$ algebarski nad $\mathbb{Q}$ i odrediti njegov minimalni polinom.

Rešenje:

Kako je $\alpha = \sqrt{33 - 20\sqrt{2}} + \sqrt{22 + 12\sqrt{2}}$, pokušaćemo da "prepoznamo"ova dva korena.

$\sqrt{33 - 20\sqrt{2}}$ je oblika $a - b\sqrt{2}$, gde su a i b celi brojevi.
Kvadriranjem dobijamo:

$$\sqrt{(33 - 20\sqrt{2})^2} = (a - b\sqrt{2})^2$$

$$33 - 20\sqrt{2} = a^2 - 2ab\sqrt{2} + 2b^2$$

Dobijamo sistem:

$$a^2 + 2b^2 = 33$$

$$2ab\sqrt{2} = 20\sqrt{2},$$

odnosno

$$a^2 + 2b^2 = 33$$

$$ab = 10.$$

Rešavanjem ovog sistema dobijamo da je $a = 5$, a $b = 2$.

Na isti način, "prepoznajemo"i koren $\sqrt{22 + 12\sqrt{2}}$. On je oblika $a + b\sqrt{2}$, gde su a i b celi brojevi.
Kvadriranjem dobijamo:

$$\sqrt{(22 + 12\sqrt{2})^2} = (a + b\sqrt{2})^2$$

$$22 + 12\sqrt{2} = a^2 + 2ab\sqrt{2} + 2b^2.$$

Dobijamo sistem:

$$a^2 + 2b^2 = 22$$

$$2ab\sqrt{2} = 12\sqrt{2},$$

odnosno

$$a^2 + 2b^2 = 22$$

$$ab = 6.$$

Rešavanjem ovog sistema dobijamo da je $a = 2$, a $b = 3$.
Dakle,

$$\sqrt{33 - 20\sqrt{2}} = 5 - 2\sqrt{2},$$

a

$$\sqrt{22 + 12\sqrt{2}} = 2 - 3\sqrt{2}.$$

Na osnovu prethodnog dobijamo da je:

$$\alpha = 5 - 2\sqrt{2} + 2 + 3\sqrt{2}$$

$$\alpha = 7 + \sqrt{2}.$$

Važi da je:

$$\alpha - 7 = \sqrt{2},$$

pa kvadriranjem dobijamo:

$$(\alpha - 7)^2 = \sqrt{2}^2$$

$$\alpha^2 - 14\alpha + 49 = 2$$

$$\alpha^2 - 14\alpha + 47 = 0.$$

Pronašli smo polinom koji element α anulira i time smo pokazali da je α algebarski.

Sada ćemo pokazati da je minimalni polinom elementa α polinom $x^2 - 14x + 47$. Označićemo ga sa $\mu(x)$. Dovoljno je da pokažemo da je polinom μ nerastavljiv nad $\mathbb{Q}$.

Rešavanjem kvadratne jednačine $x^2 - 14x + 47 = 0$, dobijamo sledeća rešenja:

$$x_{1,2} = \frac{14 \pm \sqrt{196 - 188}}{2} = \frac{14 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{14 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 7 \pm \sqrt{2}.$$

Dakle, vidimo da su nule polinoma $\mu(x)$ iracionalni brojevi.

Pokazali smo da je polinom $\mu(x)$ nerastavljiv nad $\mathbb{Q}$. Na osnovu ovog zaključujemo da je polinom $\mu(x) = x^2 - 14x + 47$ minimalni polinom nad $\mathbb{Q}$. ■

8. Naći linearnu faktorizaciju polinoma $x^4 - 12x^2 + 9$ i odrediti element α za koji je $K = \mathbb{Q}(\alpha)$.

Rešenje:

Neka je $P(x) = x^4 - 12x^2 + 9$. Njegove nule su rešenja jednačine $x^4 - 12x^2 + 9 = 0$. Da bi rešili ovu jednačinu, možemo uvesti smenu $x^2 = t$, pa se naša bikvadratna jednačina svodi na kvadratnu $t^2 - 12t + 9 = 0$, čija su rešenja:

$$t_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 36}}{2} = \frac{12 \pm \sqrt{108}}{2} = \frac{12 + 6\sqrt{3}}{2},$$

odnosno $t_1 = 6 + 3\sqrt{3}$ i $t_2 = 6 - 3\sqrt{3}$.

Kada vratimo smenu, dobijamo:

$$x^2 = 6 + 3\sqrt{3} \Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{6 + 3\sqrt{3}}$$

$$x^2 = 6 - 3\sqrt{3} \Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{6 - 3\sqrt{3}},$$

pa je

$$K = \mathbb{Q}\left(\sqrt{6+3\sqrt{3}}, -\sqrt{6+3\sqrt{3}}, \sqrt{6-3\sqrt{3}}, -\sqrt{6-3\sqrt{3}}\right).$$

Iz $\sqrt{6+3\sqrt{3}} \in K \Rightarrow -\sqrt{6+3\sqrt{3}} \in K$.
Iz $\sqrt{6-3\sqrt{3}} \in K \Rightarrow -\sqrt{6-3\sqrt{3}} \in K$.

$\Rightarrow K = \mathbb{Q}\left(\sqrt{6+3\sqrt{3}}, \sqrt{6-3\sqrt{3}}\right)$.

$$\frac{1}{\sqrt{6+3\sqrt{3}}} \cdot \frac{\sqrt{6-3\sqrt{3}}}{\sqrt{6-3\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{6-3\sqrt{3}}}{\sqrt{36-27}} = \frac{\sqrt{6-3\sqrt{3}}}{\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{6-3\sqrt{3}}}{3}.$$

Iz $\sqrt{6+3\sqrt{3}} \in K \Rightarrow \sqrt{6-3\sqrt{3}} \in K$.

Dakle,

$$K = \mathbb{Q}\left(\sqrt{6+3\sqrt{3}}\right).$$

Dovoljno je da uzmemo da je $\alpha = \sqrt{6+3\sqrt{3}}$. ■

9. Dat je polinom $3x^4 + px^3 + qx^2 + 4x - 2$, $p, q \in \mathbb{R}$.
a) Odrediti p i q tako da je $x_1 = 1 + i$ jedna nula tog polinoma.
b) Odrediti ostale nule tog polinoma.

Rešenje:

a) Neka je $P(x) = 3x^4 + px^3 + qx^2 + 4x - 2$. Znamo da ako je jedna nula polinoma kompleksan broj, onda je i druga nula njegov konjugovan kompleksan broj.

Dakle, ako je $x_1 = 1 + i \Rightarrow x_2 = 1 - i$.

Polinom je uvek deljiv sa $(x - x_1)(x - x_2)$.
Označimo sa $S(x) = (x - x_1)(x - x_2)$.

$S(x) = (x - (1 + i))(x - (1 - i))$
$S(x) = (x - 1 - i)(x - 1 + i)$
$S(x) = (x - 1)^2 - i^2$
$S(x) = x^2 - 2x + 1 + 1$

$S(x) = x^2 - 2x + 2$

Sada ćemo naš polinom $P(x)$ podeliti polinomom $S(x) = x^2 - 2x + 2$:

$$\begin{array}{lllll}
(3x^4 & +px^3 & +qx^2 & +4x & -2) : S(x) = Q(x) \\
-(3x^4 & -6x^3 & +6x^2) & & \\
\hline
 & (p+6)x^3 & +(q-6)x^2 & +4x & -2 \\
 & -((p+6)x^3 & -2(p+6)x^2 & +2(p+6)x) & \\
\hline
 & & (2p+q+6)x^2 & +(-2p-8)x & -2 \\
 & & -((2p+q+6)x^2 & -2(2p+q+6)x & +2(2p+q+6)) \\
\hline
 & & & (2p+2q+4)x & +(-4p-2q-14)
\end{array}$$

gde je $Q(x) = 3x^2 + (p+6)x + (2p+q+6)$.

Ostatak $R(x) = (2p+2q+4)x + (-4p-2q-14)$ mora biti nula, pa dobijamo sistem:

$$\begin{array}{cccc}
2p & +2q & +4 & = 0 \\
-4p & -2q & -14 & = 0 \\
\hline
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
2p & +2q & = -4 \\
-4p & -2q & = 14.
\end{array}$$

Kada u prethodnim jednačinama i levu i desnu stranu podelimo sa 2, dobijamo:

$$\begin{array}{ccc}
p & +q & = -2 \\
-2p & -q & = 7.
\end{array}$$

Ako saberemo prethodne dve jednačine dobijamo da je $-p = 5 \Rightarrow p = -5$.
Kada u jednačinu $p + q = -2$ zamenimo $p = -5$ dobijamo da je $q = 3$.

Dakle, rešavanjem ovog sistema dobili smo da je $p = -5$, a $q = 3$.

b) Kako bi pronašli ostale nule, zamenićemo parametre p i q u količnik koji smo dobili pri deljenju polinoma $P(x)$ sa $S(x)$.

$$Q(x) = 3x^2 + 2(p+6)x + (2p+q+6)$$

$$Q(x) = 3x^2 + 2(-5+6)x + (2 \cdot (-5) + 3 + 6)$$

$$Q(x) = 3x^2 + 2x - 1.$$

Rešavanjem ove kvadratne jednačine dobijamo ostale nule:

$$x_{3,4} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+12}}{6} = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{6}$$

Dakle, nule ovog polinoma su:

$$x_1 = 1 + i, x_2 = 1 - i,$$

$$x_3 = \frac{-1+\sqrt{13}}{6}, x_4 = \frac{-1-\sqrt{13}}{6}. \blacksquare$$

10. Jedno rešenje jednačine $x^4 + ax^3 + bx^2 + 6x + 2 = 0, a, b \in \mathbb{Q}$ je $1 + \sqrt{3}$. Odrediti ostala rešenja jednačine.

Rešenje:

Neka je $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + 6x + 2$.
Na osnovu teoreme 13 znamo da ako je $x_1 = 1 + \sqrt{3} \Rightarrow x_2 = 1 - \sqrt{3}$.
Naš polinom $P(x)$ je deljiv sa $S(x) = (x - x_1)(x - x_2)$.

$S(x) = (x - x_1)(x - x_2)$
$S(x) = (x - (1 + \sqrt{3}))(x - (1 - \sqrt{3}))$
$S(x) = (x - 1 - \sqrt{3})(x - 1 + \sqrt{3})$
$S(x) = (x - 1)^2 - \sqrt{3}^2$
$S(x) = x^2 - 2x + 1 - 3$
$S(x) = x^2 - 2x - 2$

Podelićemo polinom $P(x)$ polinomom $S(x) = x^2 - 2x - 2$:

$$
\begin{array}{rrrrl}
(x^4 & +ax^3 & +bx^2 & +6x & +2) : S(x) = Q(x) \\
-(x^4 & -2x^3 & -2x^2) & & \\
\hline
 & (a+2)x^3 & +(b+2)x^2 & +6x & +2 \\
 & -((a+2)x^3 & -2(a+2)x^2 & -2(a+2)x) & \\
\hline
 & & (2a+b+6)x^2 & +(2a+10)x & +2 \\
 & & -((2a+b+6)x^2 & -2(2a+b+6)x & -2(2a+b+6)) \\
\hline
 & & & (6a+2b+22)x & +(4a+2b+14)
\end{array}
$$

gde je $Q(x) = x^2 + (a + 2)x + (2a + b + 6)$.

Znamo da $S(x)|P(x)$ pa ostatak mora biti nula. Dobijamo sistem jednačina:

$$
\begin{array}{rrrr}
6a & +2b & +22 & = 0 \\
4a & +2b & +14 & = 0 \\
\hline
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrr}
6a & +2b & = -22 \\
4a & +2b & = -14.
\end{array}
$$

Kada u prethodnim jednačinama i levu i desnu stranu podelimo sa 2, dobijamo:

$$
\begin{array}{rrr}
3a & +b & = -11 \\
2a & +b & = -7.
\end{array}
$$

Ako oduzmemo prethodne dve jednačine dobijamo da je $a = -4$.
Kada u jednačinu $2a + b = -7$ zamenimo $a = -4$ dobijamo da je $b = 1$.

Dakle, rešavanjem ovog sistema dobili smo da je $a = -4$, a $b = 1$.

Da bi odredili ostala rešenja jednačine $x^4 + ax^3 + bx^2 + 6x + 2 = 0$ zamenićemo parametre a i b u količnik koji smo dobili pri deljenju polinoma $P(x)$ sa $S(x)$.

$$Q(x) = x^2 + (a + 2)x + (2a + b + 6)$$

$$Q(x) = x^2 + (-4+2)x + (2\cdot(-4)+1+6)$$
$$Q(x) = x^2 - 2x - 1.$$

Rešavanjem ove kvadratne jednačine dobijamo ostala rešenja naše početne jednačine $x^4 + ax^3 + bx^2 + 6x + 2 = 0$:

$$x_{3,4} = \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}.$$

Dakle, rešenja početne jednačine su:

$$x_1 = 1+\sqrt{3}, x_2 = 1-\sqrt{3},$$
$$x_3 = 1+\sqrt{2}, x_4 = 1-\sqrt{2}.\blacksquare$$

11. Odrediti polinom $A(x)$ četvrtog stepena sa realnim koeficijentima koji ima dvostruku nulu -2, nulu $1-2i$ i za koji je $A(-3) = 20$.

Rešenje:

Pošto polinom $A(x)$ ima realne koeficijente kompleksne nule moraju da se pojavljuju u parovima.
Dakle, ako je $1-2i$ nula polinoma A, tada je i $1+2i$ nula polinoma A.

$(x-x_1)(x-x_2) = (x-(1-2i))(x-(1+2i))$

$(x-x_1)(x-x_2) = (x-1+2i)(x-1-2i)$

$(x-x_1)(x-x_2) = (x-1)^2 - (2i)^2$

$(x-x_1)(x-x_2) = x^2 - 2x + 1 + 4$

$(x-x_1)(x-x_2) = x^2 - 2x + 5.$

Naš polinom $A(x)$ koji je četvrtog stepena može biti zapisan kao:

$$A(x) = k(x+2)^2(x^2-2x+5),$$

gde je k realni koeficijent koji određujemo iz uslova $A(-3) = 20$:

$$A(-3) = k(-3+2)^2((-3)^2 - 2(-3) + 5) = 20$$
$$k(-1)^2(9+6+5) = 20$$
$$20k = 20$$
$$k = 1.$$

Dakle,

$A(x) = (x+2)^2(x^2 - 2x + 5)$

$A(x) = (x^2 + 4x + 4)(x^2 - 2x + 5)$

$A(x) = x^4 - 2x^3 + 5x^2 + 4x^3 - 8x^2 + 20x + 4x^2 - 8x + 20$

$A(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 + 12x + 20.$ ■

12. Rešiti jednačinu $x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 10x - 50 = 0$ znajući da je jedan njen koren $1 - 3i$.

Rešenje:

Kako je $x_1 = 1 - 3i$ jedan koren jednačine $x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 10x - 50 = 0$, onda je i $x_2 = 1 + 3i$ takođe koren ove jednačine.

Označimo $P(x) = x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 10x - 50$. Polinom $P(x)$ mora biti deljiv sa $S(x) = (x - x_1)(x - x_2)$.

$S(x) = (x - x_1)(x - x_2)$
$S(x) = (x - (1 - 3i))(x - (1 + 3i))$
$S(x) = (x - 1 + 3i)(x - 1 - 3i)$
$S(x) = (x - 1)^2 - (3i)^2$
$S(x) = x^2 - 2x + 1 + 9$
$S(x) = x^2 - 2x + 10.$

Sada ćemo podeliti polinom $P(x)$ polinomom $S(x) = x^2 - 2x + 10$:

$$\begin{array}{rrrrrl}
(x^4 & -4x^3 & +9x^2 & -10x & -50 & : S(x) = x^2 - 2x - 5 \\
-(x^4 & -2x^3 & +10x^2) & & & \\
\hline
 & -2x^3 & -x^2 & -10x & -50 & \\
 & -(-2x^3 & +4x^2 & -20x) & & \\
\cline{2-5}
 & & -5x^2 & +10x & -50 & \\
 & & -(-5x^2 & 10x & -50) & \\
\cline{3-5}
 & & & & 0 &
\end{array}$$

Dobili smo da je količnik $Q(x) = x^2 - 2x - 5$.

Rešavanjem jednačine $x^2 - 2x - 5 = 0$, dobijamo preostala dva rešenja početne jednačine:

$$x_{3,4} = \frac{2 \pm \sqrt{4+20}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{24}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{6}}{2} = 1 \pm \sqrt{6}.$$

Dakle, rešenja jednačine $x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 10x - 50 = 0$ su:

$$x_1 = 1 - 3i, x_2 = 1 + 3i,$$
$$x_3 = 1 - \sqrt{6}, x_4 = 1 + \sqrt{6}.\blacksquare$$

13. Neka je $F(x) = x^6 - 3x^4 + 12x^2 + 16$. Ako je $i + \sqrt{3}$ jedna nula polinoma $F(x)$, odrediti njegove ostale nule.

Rešenje:

Neka je $\alpha = i + \sqrt{3}$. Prethodnu jednakost možemo napisati u obliku $\alpha - i = \sqrt{3}$. Kada kvadriramo levu i desnu stranu, dobijamo:

$$(\alpha - i)^2 = (\sqrt{3})^2$$
$$\alpha^2 - 2i\alpha + i^2 = 3$$
$$\alpha^2 - 2i\alpha - 1 = 3$$
$$\alpha^2 - 1 - 3 = 2i\alpha$$
$$\alpha^2 - 4 = 2i\alpha$$

Ponovo kvadriramo levu i desnu stranu:

$$(\alpha^2 - 4)^2 = (2i\alpha)^2$$
$$\alpha^4 - 8\alpha^2 + 16 = 4i^2\alpha^2$$
$$\alpha^4 - 8\alpha^2 + 16 = -4\alpha^2$$
$$\alpha^4 - 8\alpha^2 + 16 + 4\alpha^2 = 0$$
$$\alpha^4 - 4\alpha^2 + 16 = 0.$$

Dobili smo polinom $P(x) = x^4 - 4x^2 + 16$.

Znamo da je $i + \sqrt{3}$ nula polinoma P, a na osnovu Teoreme 7, ostale nule polinoma P su:

$$x_1 = i + \sqrt{3}, x_2 = i - \sqrt{3}, x_3 = -i + \sqrt{3}, x_4 = -i - \sqrt{3}.$$

Podelimo polinom $F(x)$ polinomom $P(x)$:

$$\begin{array}{lllll}
(x^6 & -3x^4 & +12x^2 & +16 & :(x^4 - 4x^2 + 16) = x^2 + 1 \\
-(x^6 & -4x^2 & +16x^2) & & \\
\hline
 & x^4 & -4x^2 & +16 & \\
 & -(x^4 & -4x^2 & +16) & \\
\hline
 & & & 0 &
\end{array}$$

Kako je ostatak pri deljenju ova dva polinoma 0, zaključujemo da polinom $P(x)$ deli polinom $F(x)$.

Dakle, dobili smo količnik $Q(x) = x^2 + 1 = (x - i)(x + i)$.
Njegove nule su i i $-i$.

Polinom $F(x)$ možemo zapisati kao proizvod polinoma $P(x)$ i $Q(x)$:

$$F(x) = (x^4 - 4x^2 + 16)(x^2 + 1)$$

Nule polinoma F su:

$$x_1 = i + \sqrt{3}, x_2 = i - \sqrt{3},$$

$$x_3 = -i + \sqrt{3}, x_4 = -i - \sqrt{3},$$

$$x_5 = i, x_6 = -i. \blacksquare$$

14. Naći ostatak pri deljenju polinoma $x^{2n} + 3x^{2n-1} + 1, n \geq 2$ polinomom $x^3 + 3x^2 - x - 3$.

Rešenje:

Neka je $P(x) = x^{2n} + 3x^{2n-1} + 1$, a $S(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3$.

Prema teoremi o deljenju sa ostatkom, ostatak je polinom najviše drugog stepena, to jest $R(x) = Ax^2 + Bx + C$.

Polinom $S(x)$ možemo da rastavimo na činioce:

$S(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3$

$S(x) = x^2(x + 3) - (x + 3)$

$S(x) = (x^2 - 1)(x + 3)$

$S(x) = (x - 1)(x + 1)(x + 3)$.

Označimo količnik sa $Q(x)$.
Polinom P možemo zapisati u obliku:

$$P(x) = S(x)Q(x) + R(x)$$

$$x^{2n} + 3x^{2n-1} + 1 = (x - 1)(x + 1)(x + 3)Q(x) + Ax^2 + Bx + C. \qquad (1)$$

Zamenom $x = 1$ u jednačinu (1) dobijamo:

$1^{2n} + 3 \cdot 1^{2n-1} + 1 = (1 - 1)(1 + 1)(1 + 3)Q(1) + A \cdot 1^2 + B \cdot 1 + C$

$1 + 3 + 1 = 0 \cdot Q(1) + A + B + C$

$\Rightarrow A + B + C = 5.$

Zamenom $x = -1$ u jednačinu (1) dobijamo:

$(-1)^{2n} + 3 \cdot (-1)^{2n-1} + 1 = (-1-1)(-1+1)(-1+3)Q(-1)+$

$+A \cdot (-1)^2 + B \cdot (-1) + C$

$1 - 3 + 1 = 0 \cdot Q(-1) + A - B + C$

$\Rightarrow A - B + C = -1.$

Zamenom $x = -3$ u jednačinu (1) dobijamo:

$(-3)^{2n} + 3 \cdot (-3)^{2n-1} + 1 = (-3-1)(-3+1)(-3+3)Q(-3)+$

$+A \cdot (-3)^2 + B \cdot (-3) + C$

$(-3)^{2n} + 3 \cdot \frac{(-3)^{2n}}{-3} + 1 = 0 \cdot Q(-3) + 9A - 3B + C$

$9^n - 9^n + 1 = 9A - 3B + C$

$\Rightarrow 9A - 3B + C = 1.$

Dobili smo sistem jednačina:

$$\begin{array}{cccc} A & +B & +C & = 5 \\ A & -B & +C & = -1 \\ 9A & -3B & +C & = 1 \end{array}$$

Ako od prve jednačine oduzmemo drugu dobijamo:

$$2B = 6 \Rightarrow B = 3.$$

Ako od druge jednačine oduzmemo treću dobijamo:

$$-8A + 2B = -2 \Rightarrow -4A + B = -1 \Rightarrow A = \frac{1+B}{4} = \frac{1+3}{4} \Rightarrow A = 1.$$

Zamenom $A = 1$ i $B = 3$ u jednačinu $A + B + C = 5$ dobijamo:

$$1 + 3 + C = 5 \Rightarrow 4 + C = 5 \Rightarrow C = 1.$$

Dakle, dobili smo koeficijente $A = 1, B = 3, C = 1$, pa je ostatak pri deljenju polinoma $P(x)$ polinomom $S(x)$:

$$R(x) = x^2 + 3x + 1. \blacksquare$$

15. Neka je $P(x) = 2x^3 + 4x^2 + x + 5$. Ako su x_1, x_2, x_3 nule polinoma $P(x)$, odrediti polinom $Q(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ čije su nule $y_1 = x_1 + 1, y_2 = x_2 + 1, y_3 = x_3 + 1$ i važi $Q(0) = 6$.

Rešenje:

Koeficijenti u polinomu $P(x) = 2x^3 + 4x^2 + x + 5$ su $a_3 = 2, a_2 = 4, a_1 = 1, a_0 = 5$. Primenom Vietovih formula dobijamo:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{a_2}{a_3} = -\frac{4}{2} = -2$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{a_1}{a_3} = \frac{1}{2}$$

$$x_1x_2x_3 = -\frac{a_0}{a_3} = -\frac{5}{2}.$$

Koeficijenti u polinomu $Q(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ su $b_3 = a, b_2 = b, b_1 = c, b_0 = d$.
Kako je $Q(0) = 6 \Rightarrow a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d = 6 \Rightarrow d = 6$.
Nule polinoma $Q(x)$ su y_1, y_2, y_3, pa primenom Vietovih formula dobijamo:

$$y_1 + y_2 + y_3 = -\frac{b_2}{b_3} = -\frac{b}{a}$$

$$y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3 = \frac{b_1}{b_3} = \frac{c}{a}$$

$$y_1y_2y_3 = -\frac{b_0}{b_3} = -\frac{d}{a} = -\frac{6}{a}.$$

Nule polinoma $Q(x)$ su $y_1 = x_1 + 1, y_2 = x_2 + 1, y_3 = x_3 + 1$, pa kada ih zamenimo u prehodne tri jednačine dobijamo:

$$(x_1 + 1) + (x_2 + 1) + (x_3 + 1) = -\frac{b}{a}$$

$$(x_1 + 1)(x_2 + 1) + (x_1 + 1)(x_3 + 1) + (x_2 + 1)(x_3 + 1) = \frac{c}{a}$$

$$(x_1+1)(x_2+1)(x_3+1)=-\frac{6}{a}.$$

Sredimo prethodne jednačine:

$$x_1+x_2+x_3+3=-\frac{b}{a}$$

$$x_1x_2+x_1+x_2+1+x_1x_3+x_1+x_3+1+x_2x_3+x_2+x_3+1=\frac{c}{a}$$

$$(x_1x_2+x_1+x_2+1)(x_3+1)=-\frac{6}{a},$$

odnosno

$$x_1+x_2+x_3+3=-\frac{b}{a}$$

$$x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3+2x_1+2x_2+2x_3+3=\frac{c}{a}$$

$$x_1x_2x_3+x_1x_2+x_1x_3+x_1+x_2x_3+x_2+x_3+1=-\frac{6}{a},$$

odnosno

$$x_1+x_2+x_3+3=-\frac{b}{a}$$

$$x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3+2(x_1+x_2+x_3)+3=\frac{c}{a}$$

$$x_1x_2x_3+x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3+x_1+x_2+x_3+1=-\frac{6}{a}.$$

Kada

$$x_1+x_2+x_3=-2$$

$$x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=\frac{1}{2}$$

$$x_1x_2x_3=-\frac{5}{2}$$

zamenimo u prethodne jednačine dobijamo:

Iz treće jednačine dobijamo a:

$$-\frac{5}{2}+\frac{1}{2}+(-2)+1=-\frac{6}{a}\Rightarrow -3=-\frac{6}{a}\Rightarrow a=2.$$

Iz prve jednačine dobijamo b:

$$-2+3=-\frac{b}{a}\Rightarrow 1=-\frac{b}{a}\Rightarrow b=-a\Rightarrow b=-2.$$

Iz druge jednačine dobijamo c:

$$\frac{1}{2} + 2 \cdot (-2) + 3 = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{1}{2} - 4 + 3 = \frac{c}{a} \Rightarrow -\frac{1}{2} = \frac{c}{a} \Rightarrow c = -\frac{a}{2} \Rightarrow c = -1.$$

Dakle, dobili smo da je $a = 2, b = -2, c = -1, d = 6$, pa je traženi polinom:

$$Q(x) = 2x^3 - 2x^2 - x + 6. \blacksquare$$

16. Neka je $F(x) = x^6 - 21x^4 + 36x^2 - 16$. Ako je $\sqrt{3} + \sqrt{7}$ jedna nula polinoma $F(x)$, odrediti proizvod svih nula polinoma F.

Rešenje:

Neka je $\alpha = \sqrt{3} + \sqrt{7}$. Prethodnu jednakost možemo napisati u obliku $\alpha - \sqrt{3} = \sqrt{7}$. Kada kvadriramo levu i desnu stranu, dobijamo:

$$(\alpha - \sqrt{3})^2 = (\sqrt{7})^2$$

$$\alpha^2 - 2\sqrt{3}\alpha + 3 = 7$$

$$\alpha^2 + 3 - 7 = 2\sqrt{3}\alpha$$

$$\alpha^2 - 4 = 2\sqrt{3}\alpha$$

Ponovo kvadriramo levu i desnu stranu:

$$(\alpha^2 - 4)^2 = (2\sqrt{3}\alpha)^2$$

$$\alpha^4 - 8\alpha^2 + 16 = 12\alpha^2$$

$$\alpha^4 - 8\alpha^2 + 16 - 12\alpha^2 = 0$$

$$\alpha^4 - 20\alpha^2 + 16 = 0.$$

Dobili smo polinom $P(x) = x^4 - 20x^2 + 16$.

Nule polinoma P su:

$$x_1 = \sqrt{3} + \sqrt{7}, x_2 = \sqrt{3} - \sqrt{7}, x_3 = -\sqrt{3} + \sqrt{7}, x_4 = -\sqrt{3} - \sqrt{7}.$$

Podelimo polinom $F(x)$ polinomom $P(x)$:

$$
\begin{array}{rrrrl}
(x^6 & -21x^4 & +36x^2 & -16 & :(x^4-20x^2+16)=x^2-1 \\
-(x^6 & -20x^2 & +16x^2) & & \\
\hline
 & -x^4 & +20x^2 & -16 & \\
 & -(-x^4 & +20x^2 & -16) & \\
\hline
 & & & 0 &
\end{array}
$$

Kako je ostatak pri deljenju ova dva polinoma 0, zaključujemo da polinom $P(x)$ deli polinom $F(x)$.

Dakle, dobili smo količnik $Q(x) = x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$.
Preostale dve nule polinoma F: $x_5 = 1$ i $x_6 = -1$.

Polinom $F(x)$ možemo zapisati kao proizvod polinoma $P(x)$ i $Q(x)$:

$$F(x) = (x^4 - 20x^2 + 16)(x^2 - 1)$$

Nule polinoma F su:

$$x_1 = \sqrt{3} + \sqrt{7}, x_2 = \sqrt{3} - \sqrt{7},$$

$$x_3 = -\sqrt{3} + \sqrt{7}, x_4 = -\sqrt{3} - \sqrt{7},$$

$$x_5 = 1, x_6 = -1,$$

pa je njihov proizvod:

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_6 = (\sqrt{3}+\sqrt{7})(\sqrt{3}-\sqrt{7})(-\sqrt{3}+\sqrt{7})(-\sqrt{3}-\sqrt{7}) \cdot 1 \cdot (-1)$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_6 = (\sqrt{3}+\sqrt{7})(\sqrt{3}-\sqrt{7})(\sqrt{7}-\sqrt{3})(\sqrt{7}+\sqrt{3})$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_6 = (3-7)(7-3) = -4 \cdot 4 = -16. \blacksquare$$

17. Neka je polinom $P(x) = 9x^5 - 6x^4 + 22x^3 - 16x^2 - 15x + 6$, $P(-i\sqrt{3}) = 0$. Faktorisati polinom P nad poljem $\mathbb{Q}$.

Rešenje:

Kako je $P(-i\sqrt{3}) = 0 \Rightarrow -i\sqrt{3}$ je nula polinoma P, pa na osnovu Teoreme 7 sledi da je i $i\sqrt{3}$ njegova nula.

Polinom $P(x)$ mora biti deljiv sa $S(x) = (x - x_1)(x - x_2)$.

$S(x) = (x - x_1)(x - x_2)$

$S(x) = (x - (-i\sqrt{3}))(x - i\sqrt{3})$

$S(x) = (x + i\sqrt{3})(x - i\sqrt{3})$

$S(x) = x^2 - (i\sqrt{3})^2$

$S(x) = x^2 - i^2\sqrt{3}^2$

$S(x) = x^2 + 3.$

Sada ćemo podeliti polinom $P(x)$ polinomom $S(x) = x^2 + 3$:

$$\begin{array}{rrrrrrl}
(9x^5 & -6x^4 & +22x^3 & -16x^2 & -15x & +6) & : S(x) = Q(x) \\
-(9x^5 & & +27x^3) & & & & \\
\hline
& -6x^4 & -5x^3 & -16x^2 & -15x & +6 & \\
& -(-6x^4 & & -18x^2) & & & \\
\cline{2-6}
& & -5x^3 & +2x^2 & -15x & +6 & \\
& & -(-5x^3 & & -15x) & & \\
\cline{3-6}
& & & 2x^2 & & +6 & \\
& & & -(2x^2 & & +6) & \\
\cline{4-6}
& & & & & 0 &
\end{array}$$

gde je $Q(x) = 9x^3 - 6x^2 - 5x + 2$.

Polinom P je oblika

$$P(x) = (x^2 + 3)(9x^3 - 6x^2 - 5x + 2).$$

Kako je $Q(x) = 9x^3 - 6x^2 - 5x + 2$, vidimo da je slobodan član 2. Potencijalne nule ovog polinoma su celi brojevi koji dele slobodan član, a to su {-1,1,-2,2}.

$Q(-1) = 9(-1)^3 - 6(-1)^2 - 5(-1) + 2 = -9 - 6 + 5 + 2 = -8 \neq 0$

$Q(1) = 9 \cdot 1^3 - 6 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 + 2 = 9 - 6 - 5 + 2 = 0$

$Q(-2) = 9(-2)^3 - 6(-2)^2 - 5(-2) + 2 = 9 \cdot (-8) - 6 \cdot 4 + 10 + 2$

$= -72 - 24 + 12 = -84 \neq 0$

$Q(2) = 9 \cdot 2^3 - 6 \cdot 2^2 - 5 \cdot 2 + 2 = 9 \cdot 8 - 6 \cdot 4 - 10 + 2$

$= 72 - 24 - 10 + 2 = 40 \neq 0.$

Vidimo da je 1 nula polinoma Q, pa je $(x-1)|Q$.

$$\begin{array}{rrrrl}
(9x^3 & -6x^2 & -5x & +2) & : (x-1) = (9x^2 + 3x - 2) \\
-(9x^3 & -9x^2) & & & \\
\hline
& 3x^2 & -5x & +2 & \\
& -(3x^2 & -3x) & & \\
\cline{2-4}
& & -2x & +2 & \\
& & -(-2x & +2) & \\
\cline{3-4}
& & & 0 &
\end{array}$$

Tražimo preostale dve nule rešavanjem kvadratne jednačine: $9x^2+3x-2=0$:

$$x_{4,5} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+72}}{18} = \frac{-3 \pm \sqrt{81}}{18} = \frac{-3 \pm 9}{18}$$

$$x_4 = \frac{-3+9}{18} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$$

$$x_5 = \frac{-3-9}{18} = -\frac{12}{18} = -\frac{2}{3}$$

Dakle,

$$P(x) = (x^3+1)(x-1) \cdot 9(x-\frac{1}{3})(x+\frac{2}{3})$$

$$P(x) = (x^3+1)(x-1)(3x-1)(3x+2). \blacksquare$$

18. Polinom $P(x) = x^4+ax^3+bx^2-x-10, a, b \in \mathbb{R}$ ima nulu $x_1 = 1-2i$. Odrediti koeficijente a i b, a zatim odrediti i ostale nule tog polinoma.

Rešenje:

Kako je $x_1 = 1-2i$ nula polinoma $P(x) = x^4+ax^3+bx^2-x-10$, onda je $P(1-2i) = 0$.

Dakle,

$$(1-2i)^4 + a(1-2i)^3 + b(1-2i)^2 - (1-2i) - 10 = 0$$

$$((1-2i)^2)^2 + a(1-2i)(1-2i)^2 + b(1-4i-4) - 1 + 2i - 10 = 0$$

$$(1-4i-4)^2 + a(1-2i)(1-4i-4) + b(1-4i-4) - 1 + 2i - 10 = 0$$

$$(-3-4i)^2 + a(1-2i)(-3-4i) + b(-3-4i) - 11 + 2i = 0$$

$$9 + 24i - 16 + a(-3-4i+6i-8) + -3b - 4b \cdot i - 11 + 2i = 0$$

$$-7 + 24i + a(-11+2i) + -3b - 4b \cdot i - 11 + 2i = 0$$

$$-7 + 24i - 11a + 2a \cdot i - 3b - 4b \cdot i - 11 + 2i = 0$$

$$(-7 - 11a - 3b - 11) + i \cdot (24 + 2a - 4b + 2) = 0$$

$$(-18 - 11a - 3b) + i \cdot (26 + 2a - 4b) = 0.$$

Kako i realni i imaginarni deo moraju biti 0, dobijamo sistem jednačina:

$$\begin{array}{ccl} -11a & -3b & = 18 \ \backslash \cdot 2 \\ 2a & -4b & = -26 \ \backslash \cdot 11 \\ \hline -22a & -6b & = 36 \\ 22a & -44b & = -286 \\ \hline \end{array}$$

Kada sabermeo prethodne dve jednačine dobijamo $-50b = -250 \Rightarrow b = 5$.
$2a - 4b = -26 \Rightarrow 2a = 4b - 26 \Rightarrow 2a = 4 \cdot 5 - 26 \Rightarrow 2a = -6 \Rightarrow a = -3$.

Dakle, dobili smo koeficijente $a = -3$ i $b = 5$.
Naš polinom je $P(x) = x^4 - 3x^3 + 5x^2 - x - 10$.
Jedna nula polinoma P je $x_1 = 1 - 2i$, a iz Teoreme 7 $\Rightarrow x_2 = 1 + 2i$.

Polinom $P(x)$ mora biti deljiv polinomom $S(x) = (x - x_1)(x - x_2)$.

$S(x) = (x - x_1)(x - x_2)$

$S(x) = (x - (1 - 2i))(x - (1 + 2i))$

$S(x) = (x - 1 + 2i)(x - 1 - 2i)$

$S(x) = (x - 1)^2 - (2i)^2$

$S(x) = x^2 - 2x + 1 + 4$

$S(x) = x^2 - 2x + 5.$

$$\begin{array}{cccccl} (x^4 & -3x^3 & +5x^2 & -x & -10 & : S(x) = x^2 - x - 2 \\ -(x^4 & -2x^3 & +5x^2) & & & \\ \hline & -x^3 & & -x & -10 & \\ & -(-x^3 & +2x^2 & -5x) & & \\ \hline & & -2x^2 & +4x & -10 & \\ & & -(-2x^2 & +4x & -10) & \\ \hline & & & & 0 & \end{array}$$

Količnik koji smo dobili možemo rastaviti na činioce $x^2 - x - 2 = (x + 1)(x - 2)$.

Nule polinoma P su:

$$x_1 = 1 - 2i, x_2 = 1 + 2i,$$

$$x_3 = -1, x_4 = 2. \blacksquare$$

19. Neka je polinom $F(x) = x^6 + x^5 + 2x^4 + 4x^3 + 28x^2 + 36x - 72$. Ako je $2i + \sqrt{2}$ nula polinoma F odrediti ostale nule.

Rešenje:

Neka je $\alpha = 2i + \sqrt{2} \Rightarrow \alpha - \sqrt{2} = 2i$. Kada kvadriramo levu i desnu stranu dobijamo:

$$(\alpha - \sqrt{2})^2 = (2i)^2$$

$$\alpha^2 - 2\sqrt{2}\alpha + 2 = -4$$

$$\alpha^2 + 6 = 2\sqrt{2}\alpha.$$

Ponovo kvadriramo levu i desnu stranu:

$$(\alpha^2 + 6)^2 = (2\sqrt{2}\alpha)^2$$

$$\alpha^4 + 12\alpha^2 + 36 = 8\alpha^2$$

$$\alpha^4 + 4\alpha^2 + 36 = 0.$$

Dobili smo polinom $P(x) = x^4 + 4x^2 + 36$, a njegove nule su:

$$x_1 = 2i + \sqrt{2}, x_2 = 2i - \sqrt{2},$$

$$x_3 = -2i + \sqrt{2}, x_4 = -2i - \sqrt{2}.$$

Podelićemo polinom $F(x)$ polinomom $P(x) = x^4 + 4x^2 + 36$:

$$\begin{array}{cccccccl}
(x^6 & +x^5 & +2x^4 & +4x^3 & +28x^2 & +36x & -72 & : P(x) = Q(x) \\
-(x^6 & & +4x^4 & & +36x^2) & & & \\
\hline
 & x^5 & -2x^4 & +4x^3 & -8x^2 & +36x & -72 & \\
 & -(x^5 & & +4x^3 & & +36x) & & \\
\cline{2-7}
 & & -2x^4 & & -8x^2 & & -72 & \\
 & & -(-2x^4 & & -8x^2 & & -72) & \\
\cline{3-7}
 & & & & & & 0 &
\end{array}$$

gde je $Q(x) = x^2 + x - 2$.

Kako je ostatak pri deljenju ova dva polinoma 0, zaključujemo da polinom $P(x)$ deli polinom $F(x)$.

Količnik $Q(x)$ koji smo dobili možemo rastaviti na čionioce:

$x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2)$.

Polinom $F(x)$ možemo zapisati kao proizvod polinoma $P(x)$ i $Q(x)$:

$$F(x) = (x^4 + 4x^2 + 36)(x^2 + x - 2)$$

Nule polinoma F su:

$$x_1 = 2i + \sqrt{2}, x_2 = 2i - \sqrt{2},$$

$$x_3 = -2i + \sqrt{2}, x_4 = -2i - \sqrt{2},$$

$$x_5 = 1, x_6 = -2. \blacksquare$$

20. Neka je polinom $F(x) = x^6 - 4x^5 - 5x^4 + 16x^3 + 20x^2 - 64x - 16$, $F(2-\sqrt{5}) = 0$. Odrediti nule polinoma F.

Rešenje:

Kako je $F(2-\sqrt{5}) = 0$, jedna nula polinoma F je $x_1 = 2 - \sqrt{5}$, a na osnovu Teoreme 13 dobijamo i drugu nulu $x_2 = 2 + \sqrt{5}$.

Znamo da $S(x) = (x - x_1)(x - x_2)$ deli polinom $F(x)$.

$S(x) = (x - x_1)(x - x_2)$

$S(x) = (x - (2 - \sqrt{5}))(x - (2 + \sqrt{5}))$

$S(x) = (x - 2 + \sqrt{5})(x - 2 + \sqrt{5})$

$S(x) = (x-2)^2 - (\sqrt{5})^2$

$S(x) = x^2 - 4x + 4 - 5$

$S(x) = x^2 - 4x - 1.$

Podelićemo polinom $F(x)$ polinomom $S(x) = x^2 - 4x - 1$:

$$\begin{array}{rrrrrrrl}
(x^6 & -4x^5 & -5x^4 & +16x^3 & +20x^2 & -64x & -16 & : S(x) = Q(x) \\
-(x^6 & -4x^5 & -x^4) & & & & & \\
\hline
 & & -4x^4 & +16x^3 & +20x^2 & -64x & -16 & \\
 & & -(-4x^4 & +16x^3 & +4x^2) & & & \\
\cline{3-7}
 & & & & 16x^2 & -64x & -16 & \\
 & & & & -(16x^2 & -64x & -16) & \\
\cline{5-7}
 & & & & & & 0 &
\end{array}$$

gde je $Q(x) = x^4 - 4x^2 + 16$.

Da bi dobili ostale nule, prvi način je da rastavimo na polinom Q na proste činioce, a drugi način je da uvedemo smenu.

Pokazaćemo oba načina.

Prvi način:

$Q(x) = x^4 - 4x^2 + 16$

$Q(x) = (x^2)^2 - 4x^2 + 4 + 12$

$Q(x) = (x^2 - 2)^2 + (2\sqrt{3})^2$

$Q(x) = (x^2 - 2)^2 - (2\sqrt{3}i)^2$

$Q(x) = (x^2 - 2 - 2\sqrt{3}i)(x^2 - 2 + 2\sqrt{3}i)$

$Q(x) = (x^2 - (2 + 2\sqrt{3}i))(x^2 - (2 - 2\sqrt{3}i))$

$Q(x) = (x^2 - \sqrt{2 + 2\sqrt{3}i}^2)(x^2 - \sqrt{2 - 2\sqrt{3}i}^2)$

$Q(x) = (x - \sqrt{2 + 2\sqrt{3}i})(x + \sqrt{2 + 2\sqrt{3}i})(x - \sqrt{2 - 2\sqrt{3}i})(x + \sqrt{2 - 2\sqrt{3}i}).$

Za $2 + 2\sqrt{3}i$ i $2 - 2\sqrt{3}i$ možemo da primenimo formulu za kvadrat binoma:

$2 + 2\sqrt{3}i = i^2 + 2\sqrt{3}i + \sqrt{3}^2 = (i + \sqrt{3})^2$

$2 - 2\sqrt{3}i = i^2 - 2\sqrt{3}i + \sqrt{3}^2 = (i - \sqrt{3})^2$

$Q(x) = (x - (i + \sqrt{3}))(x + (i + \sqrt{3}))(x - (i - \sqrt{3}))(x + (i - \sqrt{3}))$

$Q(x) = (x - (i + \sqrt{3}))(x - (-i - \sqrt{3}))(x - (i - \sqrt{3}))(x - (-i + \sqrt{3})).$

Dakle, nule polinoma F su:

$$x_1 = 2 - \sqrt{5}, x_2 = 2 + \sqrt{5},$$
$$x_3 = i + \sqrt{3}, x_4 = -i - \sqrt{3},$$
$$x_5 = i - \sqrt{3}, x_6 = -i + \sqrt{3}.$$

Drugi način:

Možemo da uvedemo smenu $x^2 = t$. Dobijamo jednačinu $t^2 - 4t + 16 = 0$.

$$t_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 64}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-48}}{2} = \frac{4 \pm 4i\sqrt{3}}{2} = 2 \pm 2i\sqrt{3}.$$

Kada vratimo smenu:

$$x^2 = 2 + 2i\sqrt{3} \Rightarrow x_{3,4} = \sqrt{2 + 2i\sqrt{3}}$$
$$\Rightarrow x_{3,4} = \sqrt{(i + \sqrt{3})^2} \Rightarrow x_3 = i + \sqrt{3}, x_4 = -i - \sqrt{3}.$$
$$x^2 = 2 - 2i\sqrt{3} \Rightarrow x_{5,6} = \sqrt{2 - 2i\sqrt{3}}$$
$$\Rightarrow x_{5,6} = \sqrt{(i - \sqrt{3})^2} \Rightarrow x_5 = i - \sqrt{3}, x_6 = -i + \sqrt{3}. \blacksquare$$

Literatura

[1] Vene T. Bogoslavov, Zbirka rešenih zadataka iz matemtike za 3. razred. Zavod za udžbenike, Beograd

[2] Nebojša Ikodinović, Matematika 1, Udžbenik sa zbirkom zadataka za prvi razred gimnazije, Klett, 2019.

[3] Živorad Ivanović, Srđan Ognjanović, Matematika 3, Zbirka rešenih zadataka i testova za 3. razred gimnazija i tehničkih škola, Krug, Beograd

[4] Zoran Kadelburg, Vladimir Mićić, Srđan Ognjanović, Sonja Čukić, Analiza sa algebrom 3, Udžbenik sa zbirkom zadataka za 3.razred Matematičke gimnazije, Krug, Beograd

[5] Gojko Kalajdžić, Algebra, Zavod za udžbenike, 2011

[6] Gojko Kalajdžić, Linearna algebra, Matematički fakultet, Beograd, 2009.

[7] Zoran Petrović, Marko Radovanović, Algebra za informatičare, Matematički fakultet, 2021

[8] https://matematiranje.in.rs/I

Biografija autora

Selma Rizvanović rođena je 20. juna 1991. godine u Beogradu. Osnovne studije završila je na Matematičkom fakultetu Univerziteta u Beogradu, na smeru Statistika, aktuarska i finansijska matematika. Nakon pauze upisuje master studije na smeru Profesor matematike i računarstva.