УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Соња З. Зрнић

Пликерове координате

Мастер рад

Београд, 2024.

Ментор:

др Срђан Вукмировић, редовни професор

Универзитет у Београду, Математички факултет

Комисија:

Др Тијана Шукиловић, ванредни професор

Универзитет у Београду, Математички факултет

Др Милош Ђорић, доцент

Универзитет у Београду, Математички факултет

Датум одбране:

Рад посвећујем свом мужу Бојану и ћеркама Ањи и Мији.

Хвала Вам на неизмерној подршци, љубави и стрпљењу....

Наслов мастер рада: Пликерове координате

Резиме: Пројективни простор обезбеђује једноставније представљање геометријских својстава. Линије које су паралелне у Еуклидском простору, секу се у пројективном простору. Такође, коришћење хомогених координата у пројективном простору омогућава рад са тачкама у бесконачности, што доста поједностављује рачун и анализу. Са друге стране пројективни простор има и својих мана које се огледају у рачуну који може бити сложен. Због употребе хомогених координата и пројективних трансформација, често је потребно извршити додатне кораке у рачунима. Исто тако и резултати добијени у пројективном простору често захтевају додатну интерпретацију да би се разумели у контексту Еуклидског простора.

Из горе наведених разлога откриће и примена Пликерових координата веома је корисна. Оне представљају ефикасан начин за описивање и рачунање са правама у тродимензионалном пројективном простору. Користећи Пликерове координате, рачун пресека праве и равни или две праве постаје једноставнији и директнији, јер се могу користити једноставне алгебарске операције. Употребом Пликерове релације, која је једна алгебарска релација, доста олакшавамо проверу исправности координата и манипулисање правама.

Кључне речи: Пројективни простор $\mathbb{R}P^3$, дуалност у пројективном простору, Пликерове координате, операције са Пликеровим координатама, дуалност Пликерових координата

Садржај

Увод

Овај рад представља мој завршни рад на мастер студијама Математичког факултета у Београду. Идеја рада је да читаоцу приближи Пликерове координате, које олакшавају и поједностављују многе геометријске и аналитичке процесе у математици и примењеним наукама.

Рад је подељен у неколико поглавља. У првој глави крећемо са причом о пројективном простору $\mathbb{R}P^3$, где се наводи дефиниција самог простора, а потом редом се излажу услови и дефиниције, мало другачије од оних на које смо навикли у математичкој литератури, о постојању равни и праве, праве, две праве, мимоилазне праве, дуалности... Наведени су и примери помоћу којих се може закључити да је пројективни простор моћан и елегантан начин за решавање многих геометријских проблема, али рачун у њему је тежак због употребе хомогених координата, сложености пројективних трансформација, рачунања инваријанти и употребе алгебарских метода. У другој глави уводи се појам Пликерових координата. Прво се осврћемо на њихово откриће, потом их дефинишемо, уводимо Пликерову релацију. Објашњавамо појам нормализовања истих, као и њихове дуалности. У четвртој глави уводимо операције са Пликеровим координатама и све их објашњавамо кроз примере, показијемо како оне за разлику од метода наведених у претходним главама рада, пружају алтернативни начин који омогућава једноставније и ефикасније рачунање у геометрији простора.

Глава 1

Пројективни простор $\boldsymbol{RP^3}$

Реални n–димензионални пројектни простор $\mathbb{R}P^n$ је скуп класа еквиваленције релације $\sim$ простора $\mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\}$ и дефинисане са

$$(x_0, x_1, \dots, x_n) \sim \lambda(x_0, x_1, \dots, x_n), \qquad \lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

Класа еквиваленције X је тачка пројективног простора $\mathbb{R}P^n$, $(x_0 : x_1 : \dots : x_n)$ су њене хомогене (пројективне) координате, док је $X(x_0, x_1, \dots, x_n)$ њен вектор представник.

Пример пројективног простора $\mathbb{R}P^n$ је афини простор $\mathbb{R}^n$ допуњен бесконачно далеким тачкама. Односно, коначним тачкама $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ простора $\mathbb{R}^n$ одговарају тачке $(1 : x_1 : \dots : x_n)$ простора $\mathbb{R}P^n$. Тачке облика $(0 : x_1 : \dots : x_n)$ зовемо бесконачно далеким тачкама. Тада важи:

$$\mathbb{R}P^n = \{(x_0 : x_1 : \dots : x_n)\} =$$

$$= \{(x_0 : x_1 : \dots : x_n) | x_0 \neq 0\} \cup \{(0 : x_1 : \dots : x_n)\} =$$

$$= \left\{\left(1 : \frac{x_1}{x_0} : \dots : \frac{x_n}{x_0}\right)\right\} \cup \{x_0 = 0\} =$$

$= \mathbb{R}^n \cup$ тачке бесконачно далеке хиперравни.

Једнодимензионални пројективни простор $\mathbb{R}P^1$, зовемо пројективна права. Приметимо да на њој постоји једна бесконачно далека тачка са координатама $(0 : 1)$. Дводимензионални пројективни простор $\mathbb{R}P^2$ зовемо пројективна раван и на њој су све тачке облика $(0 : x_1 : x_2)$, $x_1^2 + x_2^2 > 0$, бесконачно далеке и све оне чине бесконачно далеку праву. Уколико кажемо пројективни простор не наводећи његову димензију, углавном се подразумева да је у питању простор $\mathbb{R}P^3$. У њему бесконачно далека раван садржи све бесконачно далеке тачке.

Пројективни простор $\mathbb{R}P^3$ је простор тачака у четвородимензионалном хомогеном координатном систему, где су све тачке представљене као четворке $(x_0 : x_1 : x_2 : x_3)$, осим нулте тачке, и сматрају се еквивалентним, ако су пропорционалне.

1.1. Координате равни и тачке: дуалност у $\mathbb{R}\boldsymbol{P}^{\mathbf{3}}$

Дуалност у пројективном простору $\mathbb{R}P^3$ се односи на дуалне елементе тачку и раван, а не тачку и праву као у $\mathbb{R}P^2$. Постоје два случаја за представљања односа тачке и равни у $\mathbb{R}P^3$.

1. Једначина равни, координате равни.

Ако је $(x_0 : x_1 : x_2 : x_3)$ промењива тачка на фиксној равни задатој са координатама $[X_0 : X_1 : X_2 : X_3]$, тада је

$$X_0x_0 + X_1x_1 + X_2x_2 + X_3x_3 = \sum_{i=0}^{3} X_ix_i = 0$$

једначина равни.

2. Једначина тачке, координате тачака

Ако је $[X_0 : X_1 : X_2 : X_3]$ промењива раван кроз фиксну тачку задатој са координатама $(x_0 : x_1 : x_2 : x_3)$, тада је

$$X_0x_0 + X_1x_1 + X_2x_2 + X_3x_3 = \sum_{i=0}^{3} X_ix_i = 0$$

једначина тачке. Ова једначина даје нам сноп равни.

Из горе наведеног видимо да су тачка и раван дуалне у $\mathbb{R}P^3$.

1.2. Паралелне равни и компланарне тачке

Координате тачке пресека три неколинеарне равни и координате равни дефинисане са три некомпланарне тачке могу се одредити коришћењем Крамеровог правила исто као и кад одређујемо координате тачке пресека две праве или праве одређене са две тачке у равни.

Нека тачка пресека три неколинеарне равни $[X_0 : X_1 : X_2 : X_3]$, $[Y_0 : Y_1 : Y_2 : X_3]$ и $[Z_0 : Z_1 : Z_2 : Z_3]$ има координате $(x_0 : x_1 : x_2 : x_3)$. Тада је:

$$(x_0: x_1: x_2: x_3) = \left(\begin{vmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 \end{vmatrix} : - \begin{vmatrix} X_0 & X_2 & X_3 \\ Y_0 & Y_2 & Y_3 \\ Z_0 & Z_2 & Z_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} X_0 & X_1 & X_3 \\ Y_0 & Y_1 & Y_3 \\ Z_0 & Z_1 & Z_3 \end{vmatrix} : - \begin{vmatrix} X_0 & X_1 & X_2 \\ Y_0 & Y_1 & Y_2 \\ Z_0 & Z_1 & Z_2 \end{vmatrix} \right) =$$
$$\left(\begin{vmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} X_0 & X_3 & X_2 \\ Y_0 & Y_3 & Y_2 \\ Z_0 & Z_3 & Z_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} X_0 & X_1 & X_3 \\ Y_0 & Y_1 & Y_3 \\ Z_0 & Z_1 & Z_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} X_0 & X_2 & X_1 \\ Y_0 & Y_2 & Y_1 \\ Z_0 & Z_2 & Z_1 \end{vmatrix} \right), \qquad (1.2.1.)$$

Тачка $(x_0: x_1: x_2: x_3)$ припада равни $[X_0: X_1: X_2: X_3]$.

Заиста,

$x_0X_0 + x_1X_1 + x_2X_2 + x_3X_3 =$

$$= X_0 \begin{vmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 \end{vmatrix} - X_1 \begin{vmatrix} X_0 & X_2 & X_3 \\ Y_0 & Y_2 & Y_3 \\ Z_0 & Z_2 & Z_3 \end{vmatrix} + X_2 \begin{vmatrix} X_0 & X_1 & X_3 \\ Y_0 & Y_1 & Y_3 \\ Z_0 & Z_1 & Z_3 \end{vmatrix} - X_3 \begin{vmatrix} X_0 & X_1 & X_2 \\ Y_0 & Y_1 & Y_2 \\ Z_0 & Z_1 & Z_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} X_0 & X_1 & X_2 & X_3 \\ X_0 & X_1 & X_2 & X_3 \\ Y_0 & Y_1 & Y_2 & Y_3 \\ Z_0 & Z_1 & Z_2 & Z_3 \end{vmatrix}$$

$= 0$, јер ова 4×4 детерминанта има две исте врсте.

Слично се показује да тачка $(x_0: x_1: x_2: x_3)$ припада равнима $[Y_0: Y_1: Y_2: Y_3]$ и $[Z_0: Z_1: Z_2: Z_3]$.

На основу дуалности, координате равни одређене са три некомпланарне тачке $(x_0: x_1: x_2: x_3)$, $(y_0: y_1: y_2: y_3)$и $(z_0: z_1: z_2: z_3)$ су:

$$[X_0: X_1: X_2: X_3] = \left[\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_0 & x_3 & x_2 \\ y_0 & y_3 & y_2 \\ z_0 & z_3 & z_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_3 \\ y_0 & y_1 & y_3 \\ z_0 & z_1 & z_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_0 & x_2 & x_1 \\ y_0 & y_2 & y_1 \\ z_0 & z_2 & z_1 \end{vmatrix} \right].$$

1.3. Међусобни однос равни и праве у $\mathbb{R}\boldsymbol{P}^3$

У $\mathbb{R}P^3$ права $p = \pi_i \cap \pi_j$ је дефинисана као пресек две равни π_i: $[X_0: X_1: X_2: X_3]$ и π_j: $[Y_0: Y_1: Y_2: Y_3]$.

Посматрамо те две равни заједно са равни π: $[Z_0: Z_1: Z_2: Z_3]$,

$$p: \quad \ldots \begin{cases} \pi_1: X_0x_0 + X_1x_1 + X_2x_2 + X_3x_3 = 0, \\ \pi_2: Y_0y_0 + Y_1y_1 + Y_2y_2 + Y_3y_3 = 0, \end{cases}$$

$$\pi: Z_0z_0 + Z_1z_1 + Z_2z_2 + Z_3z_3 = 0$$

и ранг r матрице коефициената:

$$r = rang \begin{pmatrix} X_0 & X_1 & X_2 & X_3 \\ Y_0 & Y_1 & Y_2 & Y_3 \\ Z_0 & Z_1 & Z_2 & Z_3 \end{pmatrix}$$

Можемо закључити следеће:

1. Ако је $r = 1$, три равни су једнаке. ($\pi_i \cap \pi_j$ није права);
2. Ако је $r = 2$, права p лежи на равни π;
3. Ако је $r = 3$, права p и раван π, имају тачно једану пресечну тачку који настаје пресеком те три равни π_1, π_2 и π, чије се координате могу одредити једначином (1.2.1.).

1.4. Међусобни однос две праве у $\mathbb{R}\boldsymbol{P}^3$

Посматрајмо две праве p_1 и p_2

$$p_1 \ldots \begin{cases} \pi_1: \quad X_{10}x_0 + X_{11}x_1 + X_{12}x_2 + X_{13}x_3 = 0, \\ \pi_2: \quad X_{20}x_0 + X_{21}x_1 + X_{22}x_2 + 2x_3 = 0, \end{cases}$$

$$p_2 \ldots \begin{cases} \pi_3: \quad X_{30}x_0 + X_{31}x_1 + X_{32}x_2 + X_{33}x_3 = 0, \\ \pi_4: \quad X_{40}x_0 + X_{41}x_1 + X_{42}x_2 + X_{43}x_3 = 0. \end{cases}$$

Ранг r матрице коефициената равни је одређен са:

$$r = rang \begin{pmatrix} X_{10} & \cdots & X_{13} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{40} & \cdots & X_{43} \end{pmatrix}$$

На основу вредности r можемо закључити следеће:

1. Ако је $r = 1$, посматране четири равни су једнаке, па праве нису одређене;
2. Ако је $r = 2$, праве су једнаке;

3. Ако је $r = 3$, праве се секу у тачки чије се координате могу одредити са једначином (1.2.1.), при чему се од те четири могу узети ма које три равни ранга 3;
4. Ако је $r = 4$, праве су мимоилазне, тј пресечна тачка не постоји.

1.5. Општа параметарска једначина праве у $\mathbb{R}\boldsymbol{P^3}$

Права p у афиним координатама простора $\mathbb{R}^3$ може се задати параметарском једначином у векторском облику:

$$\mathrm{X} = \mathrm{a} + t\mathrm{b} \quad (1.5.1.)$$

где је X вектор положаја било које тачке на правој, а је вектор положаја неке одређене тачке на правој, а b је вектор паралелан правој и $t \in \mathbb{R}$.

Права p има координате X кад t узима вредност од $-\infty$ до $+\infty$. Са друге стране као што је наведено у поглављу 1.3, у $\mathbb{R}P^3$ права p може бити представљена као пресек две равни

$$p: \dots \begin{cases} \pi_1: X_0x_0 + X_1x_1 + X_2x_2 + X_3x_3 = 0, \\ \pi_2: Y_0y_0 + Y_1y_1 + Y_2y_2 + Y_3y_3 = 0, \end{cases}$$

Координате тачака можемо записати као афине координате, тако што ћемо хомогене координате поделити са x_0 и добити:

$$p: \quad \dots \begin{cases} \pi_1: X_0 + X_1x + X_2y + X_3z = 0, \\ \pi_2: Y_0 + Y_1x + Y_2y + Y_3z = 0, \end{cases}$$

Сада можемо изразити једну Декартову координату у параметарском облику, као на пример $z = t$. Кад заменимо нову вредност у претходним једначинама добијамо:

$$\pi_1: X_0 + X_1x + X_2y + X_3t = 0,$$

$$\pi_2: Y_0 + Y_1x + Y_2y + Y_3t = 0.$$

Ако из ове две једначине изразимо непознате x и y у вектор-матричном облику добијамо:

$$\begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ Y_1 & Y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} X_0 + X_3t \\ Y_0 + Y_3t \end{bmatrix}, \;\; t \in \mathbb{R}\,.$$

Истовремено можемо решити и за x и за y користећи Крамерово правило, али мора бити испуњен услов:

$$\begin{vmatrix} X_1 & X_2 \\ Y_1 & Y_2 \end{vmatrix} = \Delta \neq 0.$$

Ако је $\Delta = 0$, а

$$rang\begin{pmatrix} X_0 & X_1 & X_2 & X_3 \\ Y_0 & Y_1 & Y_2 & Y_3 \end{pmatrix} = 2$$

тада је права паралелна са вектором правца осе x или y.

Ако претпоставимо да је $\Delta \neq 0$, доћи ћемо до следећег:

$$x = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} -(X_0 + X_3 t) & X_2 \\ -(Y_0 + Y_3 t) & Y_2 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{\Delta}(-Y_2(X_0 + X_3 t) + X_2(Y_0 + Y_3 t))$$

$$= \frac{1}{\Delta}(X_2 Y_0 - X_0 Y_2 + t(X_2 Y_3 - X_3 Y_2)) ,$$

и

$$y = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} X_1 & -(X_0 + X_3 t) \\ Y_1 & -(Y_0 + Y_3 t) \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{\Delta}\left(-X_1(Y_0 + Y_3 t) + Y_1(X_0 + X_3 t)\right)$$

$$= \frac{1}{\Delta}\left(X_0 Y_1 - X_1 Y_0 + t(X_3 Y_1 - X_1 Y_3)\right).$$

Можемо закључити да је општа једначина праве у афиним координатама облика:

$$\mathrm{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} X_2 Y_0 - X_0 Y_2 \\ X_0 Y_1 - X_1 Y_0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} \frac{1}{\Delta}(X_2 Y_3 - X_3 Y_2) \\ \frac{1}{\Delta}(X_3 Y_1 - X_1 Y_3) \\ 1 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}\,. \qquad (1.5.2.)$$

Та тачка се лако пребацује у хомогене координате.

1.6. Рачунски примери

Пример 1.6.1: Проверити да ли следеће три равни имају заједничку тачку.

$$\pi_1: -11x_0 + x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$$

$$\pi_2: -45x_0 + 3x_1 + 7x_2 + 6x_3 = 0$$

$$\pi_3: \quad 16x_0 + x_1 - 8x_2 + 2x_3 = 0\,.$$

Решење: Да бисмо проверили да ли дате равни имају заједничку тачку морамо наћи ранг r матрице коефицијената координата равних.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -11 \\ 3 & 7 & 6 & -45 \\ 1 & -8 & 2 & 16 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -11 \\ 0 & 4 & 0 & -12 \\ 0 & -9 & 0 & 27 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -11 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -11 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Како је $r = 2$, те три равни имају једну заједничку праву, али те три равни су само део од бесконачне фамилије равни које садрже ту праву.

Пример 1.6.2: Наћи параметарску једначину заједничке праве из претходног примера.

Решење: Права може бити дефинисана као права пресека било које две од датих равни. Узмимо $\pi_1 \cap \pi_3$. Сад треба да проверимо вредност Δ.

$$\Delta = \begin{vmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{31} & X_{32} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -8 \end{vmatrix} = -9 \neq 0\,.$$

Како је $\Delta \neq 0$, можемо користити једначину (1.5.1.) да би решили проблем.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Провера:

$$(x_0 : x_1 : x_2 : x_3) = (1 : 8 - 2t : 3 : t)$$

у π_1:

$$-11 \cdot 1 + (8 - 2t) + 3 + 2 \cdot t = -11 + 8 - 2t + 3 + 2t = 0$$

у π_3:

$$16 \cdot 1 + (8-2t) - 8 \cdot 3 + 2 \cdot t = 16 + 8 - 2t - 24 + 2t = 0\,.$$

Пример 1.6.3: Нека су нам у пројективном простору $\mathbb{R}P^3$ дате две праве $p_1 = \pi_1 \cap \pi_2$ и $p_2 = \pi_3 \cap \pi_4$. Проверити да ли се праве секу и ако се секу одредити координате тачке пресека.

$$p_1: \ \dots \begin{cases} \pi_1: & x_0 - 2x_1 - x_2 = 0\,, \\ \pi_2: & -\ x_0 + 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0, \end{cases}$$

$$p_2: \ \dots \begin{cases} \pi_3: & x_0 - 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0\,, \\ \pi_4: & x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

Решење: Прво ћемо одредити ранг матрице коефицијената:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Па је $r = 3$, праве p_1 и p_2 се секу (на основу поглавља 1.4.). Да бисмо одредили хомогене координате тачке пресека, можемо изабрати било које три од дате четири равни и применом једначине (1.2.1.) на равни π_1, π_2 и π_3 добијамо:

$$x_0 = \begin{vmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} \\ X_{21} & X_{22} & X_{23} \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 18\,,$$

$$x_1 = \begin{vmatrix} X_{10} & X_{13} & X_{12} \\ X_{20} & X_{23} & X_{22} \\ X_{30} & X_{33} & X_{32} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 10\,,$$

$$x_2 = \begin{vmatrix} X_{10} & X_{11} & X_{13} \\ X_{20} & X_{21} & X_{23} \\ X_{30} & X_{31} & X_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = -2\,,$$

$$x_3 = \begin{vmatrix} X_{10} & X_{12} & X_{11} \\ X_{20} & X_{22} & X_{21} \\ X_{30} & X_{32} & X_{31} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -2\,.$$

Закључујемо да су координате тачке пресека ове четири равни:

$$(x_0 : x_1 : x_2 : x_3) = (18 : 10 : -2 : -2) = (9 : 5 : \ -1\,;\ -1).$$

Провера:

$$x \in \pi_1, \quad 9 - 2 \cdot 5 - (-1) = 0\,,$$

слично за $x \in \pi_2, \pi_3, \pi_4$.

Преко следећег примера показаћу један од поступака за добијање две мимоилазне праве у пројективном простору $\mathbb{R}P^3$.

Пример 1.6.4: Нека су нам дате четири некомпланарне тачке $A(-2\,,0\,,9), B(1\,,11\,,-3), C(0\,,0\,,12)$ и $D(5\,,2\,,1)$. Проверити да су праве AB и CD мимоилазне. Записати их у хомогеним координатама.

Решење: Знамо да две тачке одређују праву. Такође да пресек две равни даје праву. Оно што желимо да добијемо управо је поменуто у поглављу 1.4, под четвртим случајем: Ранг r матрице коефицијената равни мора бити једнак $r = 4$ да би праве биле мимоилазне.

Прво ћемо одредити векторе положаје правих $p = AB$ и $q = CD$.

$$\vec{p} = \overrightarrow{AB} = (3\,,11\,,-12),$$

$$\vec{q} = \overrightarrow{CD} = (5\,,2\,,-11).$$

Да бисмо одредили једну од две равни која садржи праву p треба да узмемо један нормалан вектор на вектор положаја праве p, нека је то управо вектор $\vec{n} = (11\,,-3\,,0)$. Једноставном провером:

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 3 \cdot 11 + 11 \cdot (-3) + (-12) \cdot 0 = 0\,,$$

закључујемо да је вектор $\vec{n}$ заиста нормалан вектор на вектор положаја праве p.

Сада треба да нађемо једначину равни α која садржи нормалан вектор $\vec{n}$ и тачку А.

$$\alpha: \quad 11x - 3y + 22 = 0.$$

За одређивање друге равни која садржи праву p, узимамо вектор $\vec{m} = (4\,,0\,,1)$ који је нормалан на вектор положаја праве p.

Једначина равни β која садржи нормалан вектор $\vec{m}$ и тачку B је:

$$\beta:\;\; 4x + z - 1 = 0\,.$$

Истим поступком долазимо до равни γ и δ које у пресеку дају праву q.

$$\gamma:\;\; 2x - 5y = 0\,,$$

$$\delta:\;\; 4x + y + 2z - 24 = 0\,.$$

Добили смо:

$$p:\quad \begin{cases} \alpha:\;\; 11x - 3y + 22 = 0, \\ \beta:\;\; 4x + z - 1 = 0, \end{cases}$$

$$q:\quad \begin{cases} \gamma: \qquad\qquad 2x - 5y = 0\,, \\ \delta:\;\; 4x + y + 2z - 24 = 0\,. \end{cases}$$

Остало нам је још да проверимо да ли је ранг r матрице коефицијената равни једнак $r = 4$. Координате равни треба прво да пребацимо у хомогене координате што постижемо тако што све афине координате поделимо са $x_0 = 1$. На тај начин добијамо:

$$p:\quad \begin{cases} \alpha:\;\; 22x_0 + 11x_1 - 3x_2 = 0, \\ \beta:\qquad x_0 + 4x_1 + x_3 = 0, \end{cases}$$

$$q:\quad \begin{cases} \gamma: \qquad\qquad 2x_1 - 5x_2 = 0 \\ \delta:\;\; -24x_0 + 4x_1 + x_2 + 2x_3 = 0\,. \end{cases}$$

Одредимо сад ранг матрице коефицијената

$$\begin{bmatrix} 22 & 11 & -3 & 0 \\ -3 & 12 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & 0 \\ -24 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ако је вредност детерминанте ове матрице различита од нуле, ранг $r = 4$.

$$\begin{bmatrix} 22 & 11 & -3 & 0 \\ -3 & 12 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & 0 \\ -24 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} =>$$

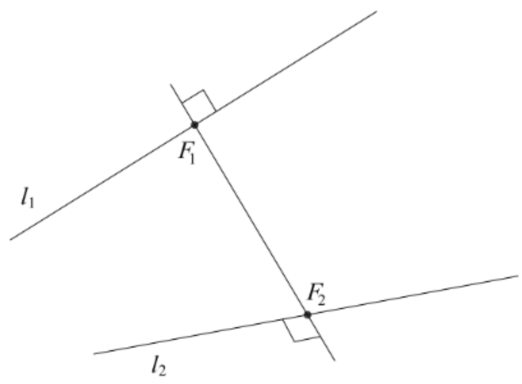
$$=> 22\begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} - 11\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 0 \\ '24 & 1 & 2 \end{vmatrix} + (-3)\begin{vmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -24 & 4 & 2 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -5 \\ -24 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \cdots = 682 \neq 0\,.$$

Па је ранг $r = 4$, односно задате четири некомлнанарне тачке одређују две мимоилазне праве у $\mathbb{R}P^3$.

У пројективном простору не постоји појам нормалности, па је из тог разлог доста тешко наћи најкраће растојање између две мимоилазне праве.

Показаћемо сад колико је тешко наћи најкраће растојање између две праве задате афиним координатама:



Slika 1.6.1. Две мимоилазне праве задате афиним координатама

Посматрајмо две мимоилазне праве l_1, l_2 као на слици 1.6.1. задате параметарским једначинама:

$$l_1: \quad \boldsymbol{x_1} = \boldsymbol{a_1} + t_1\boldsymbol{b_1} ,$$

$$l_2: \quad \boldsymbol{x_2} = \boldsymbol{a_2} + t_2\boldsymbol{b_2} ,$$

где су $\boldsymbol{b_1}$ и $\boldsymbol{b_2}$ вектори правца правих, а a_1 , a_2 тачке тих правих. Тада постоји права p одређена тачкама F_1 , F_2 која је ортогонална на l_1 и l_2, где l_1садржи тачку F_1, а l_2 садржи тачку F_2. Права $p = F_1 F_2$ назива се заједничка нормала правих l_1 и l_2. Тачке F_1 , F_2 су подножја заједничке нормале. Дуж $F_1 F_2$ реализује најкраће растојање између правих.

Правац заједничке нормале се добија векторским производом вектора паваца правих, односно:

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{b_1} \times \boldsymbol{b_2}.$$

Јединични вектор тог правца се добија:

$$\boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{b_1} \times \boldsymbol{b_2}}{|\boldsymbol{b_1} \times \boldsymbol{b_2}|} .$$

Дужина заједничке нормале рачуна се на следећи начин:

$$d = \|\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{a_2} - \boldsymbol{a_1})\|. \qquad (1.6.1.)$$

Из претходне једначине можемо извући два закључка:

1. Ако је

$$d = \|\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{a_2} - \boldsymbol{a_1})\| = 0\,,$$

праве l_1 и l_2 се секу.

2. Ако је:

$$d = \|\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{a_2} - \boldsymbol{a_1})\| \neq 0\,,$$

праве l_1 и l_2 су мимоилазне праве.

Остало је још да нађемо векторе положаја тачака F_1 и F_2. Прво ћемо дефинисати два нова вектора:

$$\boldsymbol{n_2} = \boldsymbol{b_2} \times \boldsymbol{n}\,,$$

$$\boldsymbol{n_1} = \boldsymbol{b_1} \times \boldsymbol{n}\,.$$

Вектор положаја F_1 је $\boldsymbol{f}_1$ задат са:

$$\boldsymbol{f}_1 = \boldsymbol{a_1} + \frac{(\boldsymbol{a_2} - \boldsymbol{a_1}) \cdot \boldsymbol{n_2}}{\boldsymbol{b_1} \cdot \boldsymbol{n_2}} \boldsymbol{b_1}\,. \qquad (1.6.2.)$$

Слично, вектор правца F_2 је $\boldsymbol{f}_2$ задат са:

$$\boldsymbol{f}_2 = \boldsymbol{a_2} + \frac{(\boldsymbol{a_1} - \boldsymbol{a_2}) \cdot \boldsymbol{n_1}}{\boldsymbol{b_2} \cdot \boldsymbol{n_1}} \boldsymbol{b_2}\,. \qquad (1.6.3.)$$

Пример 1.6.5: Наћи подножје заједничке нормале и растојање између мимоилазних правих, које су задате параметарским једначинама:

$$l_1\colon\ \boldsymbol{x_1} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 9 \end{bmatrix} + t_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix},$$

$$l_2\colon\ \boldsymbol{x_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 11 \\ -3 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} 4 \\ -9 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Решење: Прво морамо проверити да ли су задате праве стварно мимоилазне праве. То ћемо урадити тако што ћемо израчунати дужину заједничке нормале d:

$$d = \|\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{a_2} - \boldsymbol{a_1})\| = \left\| \frac{1}{33} \begin{bmatrix} 27 \\ 6 \\ -18 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 11 \\ -12 \end{bmatrix} \right\| = \cdots = 11 \neq 0$$

Закључујемо да су праве l_1 и l_2 мимоилазне праве.

Позицију тачака F_1 и F_2 одредићемо помоћу једначина (1.8.2.) и (1.8.3.)

$$\boldsymbol{f}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 9 \end{bmatrix} + \frac{\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 11 \\ -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 9 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} 144 \\ 153 \\ 267 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 144 \\ 153 \\ 267 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \cdots = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{f}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 11 \\ -3 \end{bmatrix} + \frac{\left(\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 11 \\ -3 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} -18 \\ 117 \\ 12 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 4 \\ -9 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -18 \\ 117 \\ 12 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 4 \\ -9 \\ 3 \end{bmatrix} = \cdots = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Добијамо:

$$\overrightarrow{F_1 F_2} = \begin{vmatrix} 9 \\ 2 \\ -6 \end{vmatrix},$$

$$\left|\overrightarrow{F_1 F_2}\right| = \sqrt{9^2 + 2^2 + 6^2}$$

$$= \sqrt{81 + 4 + 36} = \sqrt{121}$$

$$= 11 .$$

Глава 2

Пликерове координате

Пликерове координате су хомогене координате које се користе за представљање правих у пројективном простору.

Открио их је немачки математичар и физичар Јулиус Пликер (Julius Plucker) током прве половине 19. века. Јулиус Пликер је рођен 16. јуна 1801. године у Елберфелду, а преминуо је 22. маја 1868. године у Бону.

Слика 2.1. Јулиус Пликер

Пликер је био један од зачетника пројективне геометрије и његов рад је постао темељ за даљи развој пројективне геометрије. Његова истраживања правих у тродимензионалном простору довела су до открића Пликерових координата које су један од његових најпознатијих доприноса. Пликер је увео Пликерове координате, како би решио проблеме у геометрији који су били тешки за анализу коришћењем традиционалних метода. Његов рад је отворио нове правце у геометрији и имао велики утицај на касније математичаре. Написао је бројне радове из различитих области математике, укључујући аналитичку, алгебарску и диференцијалну геометрију.

2.1. Дефиниција Пликерових координата

Праве није лако описати у $\mathbb{R}P^3$. Тачно је да две тачке чине праву, али те тачке нису јединствене, па оне нису од неке помоћи. Слично томе, права је пресек две равни, али ни те равни нису јединствене. Из тог разлога уводимо Пликерове координате које су рачунарски згодан начин чувања информација о правој.

Дефиниција 2.1.1. Нека су $A = (a_0 : a_1 : a_2 : a_3)$ и $B = (b_0 : b_1 : b_2 : b_3)$ хомогене координате две тачке које се налазе у пројективном простору $\mathbb{R}P^3$. Пликерове координате праве су дефинисане као детерминанте 2×2 минорних матрица формираних од координата ових тачака:

$$p_{ij} = \begin{vmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{vmatrix} = a_i b_j - a_j b_i, \;\; i, j = 0, \dots, 3, i \neq j$$

Од дванаест могућих координата, само је шест независних, односно важи услов:

$$p_{ij} = -p_{ji}.$$

Ово значи да постоји шест Пликерових координата које представљају праву у $\mathbb{R}P^3$:

$$(p_{01} : p_{02} : p_{03} : p_{23} : p_{31} : p_{12}).$$

Са друге стране да би ове координате биле Пликерове координате праве морају да задовоље следећа два услова:

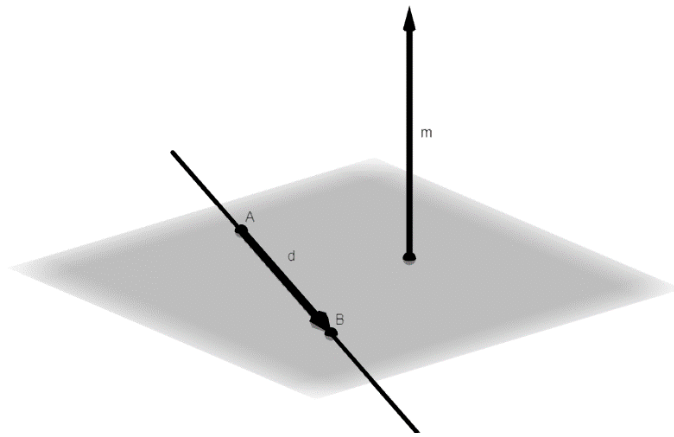
1. $(p_{01} : p_{02} : p_{03} : p_{23} : p_{31} : p_{12}) \neq (0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0)$;
2. Пликерове координате су хомогене, тј. Пропорционалне координате представљају исту праву;
3. Мора да важи релација, позната под називом Пликерова релација:

$$p_{01} p_{23} + p_{02} p_{31} + p_{03} p_{12} = 0\,.$$

Услов 1. је испуњен чим је $A \neq B$.

Услов 3. је испуњен за сваке две различите тачке.

Пликерова релација, обезбеђује да Пликерове координате праве, заиста представљају праву у $\mathbb{R}P^3$.



Слика 2.1.1. Пликерове координате (две тачке на прави)

Пример 2.1.1.: Посматрајмо две тачке у $\mathbb{R}P^3$ са координатама: $A = (1 : 1 : 2 : 3)$ и $B = (1 : -1 : 0 : 4)$. Одредимо Пликерове координате праве која пролази кроз ове две тачке.

Решење: Применићемо детерминанту дефинисану у дефиницији 3.1.1.

$$p_{ij} = \begin{vmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{vmatrix} = a_i b_j - a_j b_i, \ \ i, j = 0, \dots, 3, i \neq j$$

Редом замењујемо вредности i и j и добијамо:

$$p_{01} = a_0 b_1 - a_1 b_0 = 1 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 = -2,$$

$$p_{02} = a_0 b_2 - a_2 b_0 = 1 \cdot 0 - 1 \cdot 2 = -2,$$

$$p_{03} = a_0 b_3 - a_3 b_0 = 1 \cdot 4 - 1 \cdot 3 = 1,$$

$$p_{23} = a_2 b_3 - a_3 b_2 = 2 \cdot 4 - 0 \cdot 3 = 8,$$

$$p_{31} = a_3 b_1 - a_1 b_3 = 3 \cdot (-1) - 4 \cdot 1 = -7,$$

$$p_{12} = a_1 b_2 - a_2 b_1 = 1 \cdot 0 - (-1) \cdot 2 = 2.$$

Остало је још да проверимо Пликерову релацију:

$$p_{01}p_{23} + p_{02}p_{31} + p_{03}p_{12} = -2 \cdot 8 + (-2) \cdot (-7) + 1 \cdot 2 = 0.$$

Закључујемо да су Пликерове координате праве AB:

$$(-2 : -2 : 1 : 8 : -7 : 2).$$

Постоји још један важан аспект Пликерових координата праве који даје смисао Пликерових координата, а он се огледа у следећем.

Посматрајмо коначне тачке $A = (a_1, a_2, a_3)$ и $B = (b_1, b_2, b_3)$ у $\mathbb{R}^3$, и важи $A = (1 : a_1 : a_2 : a_3)$ и $B = (1 : b_1 : b_2 : b_3)$. Тада за Пликерове координате праве кроз те две тачке важи:

$$(p_{01}:p_{02}:p_{03}:p_{23}:p_{31}:p_{12}) = \left(b_1 - a_1 : b_2 - a_2 : b_3 - a_3 : \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right),$$

при чему, прве три координате представљају вектор правца праве:

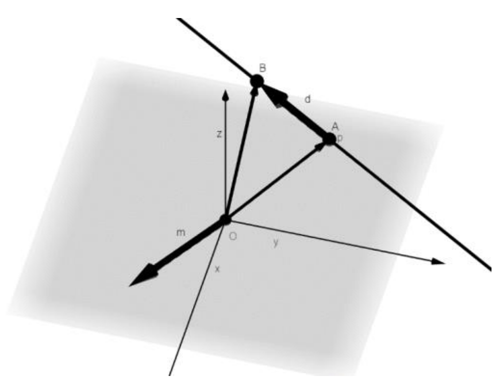
$$\vec{d} = (p_{01}:p_{02}:p_{03}) = (b_1 - a_1 : b_2 - a_2 : b_3 - a_3) = \overrightarrow{\mathrm{AB}},$$

а друге три координате представљају вектор нормалан на раван $OAB = Od$, (O је координатни почетак) у којој лежи права:

$$\vec{m} = (p_{23}:p_{31}:p_{12}) = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right).$$

Па важи:

$$p = p_{ij} = (\vec{d} : \vec{m})$$



Слика 2.1.1. Смисао Пликерових координата

Како је вектор $\vec{d} \parallel \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ паралелан равни OAB добијамо $\vec{m} \perp \vec{d}$, односно доказали смо да важи Пликерова релација.

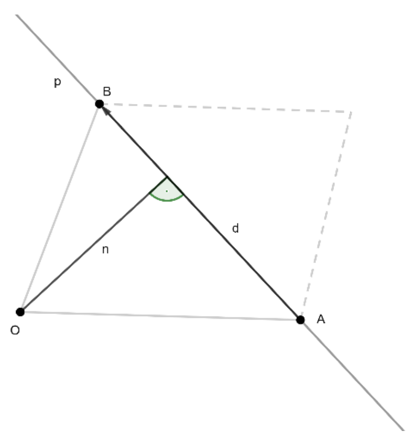
$$0 = \vec{m} \cdot \vec{d} = p_{01}p_{23} + p_{02}p_{31} + p_{03}p_{12}$$

2.2. Нормализоване Пликерове координате

Нормализоване Пликерове координате су верзија стандардних Пликерових координата у којима се примењује одређени услов нормализације. Ово олакшава анализу и рачунање.

Пликерове координате праве нормализују се на следећи начин.

Нека је $p = AB$ права, $\vec{d} = \overrightarrow{AB}$ њен векрор правца и $n = d(O, p)$ растојање координатног почетка O од праве p.



Слика 2.2.1. Нормализоване Пликерове координате

Површина P паралелограма разапетог векторима $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ се може добити на два начина

$$\left|\vec{d}\right| \cdot n = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot n = P = \left|\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}\right| = |\vec{m}| \,.$$

Ако важи: $\left|\vec{d}\right| = \left|\overrightarrow{AB}\right| = 1$, добијамо да је $n = |\vec{m}|$, тј. $|\vec{m}|$ представља растојање праве p од координатног почетка.

Зато уводимо нормализоване Пликерове координате за $\left|\vec{d}\right| = 1$ и координате праве p

$$p = \frac{1}{|\vec{d}|}\left(\vec{d}:\vec{m}\right) \quad (2.2.1.)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{p_{01}^2+p_{02}^2+p_{03}^2}}(p_{01}:p_{02}:p_{03}:p_{23}:p_{31}:p_{12})$$

$$= (\overrightarrow{p_0}:\overrightarrow{m_0}),$$

при чему важи $|\overrightarrow{p_0}| = 1$ и $|\overrightarrow{m_0}| = n = n(O,p)$.

Пример 2.2.1. Одредити нормализоване Пликерове координате праве која садржи тачке из претходног примера 2.1.1.

Решење: У претходном примеру добили смо да су Пликерове координате праве кроз две тачке

$$(p_{01}:p_{02}:p_{03}:p_{23}:p_{31}:p_{12}) = (-2 : -2 : 1 : 8 : -7 : 2).$$

Знамо да је вектор правца праве задат са $\vec{d} = (-2 : -2 : 1)$, а вектор нормалан на раван у којој лежи права: $\vec{m} = (8 : -7 : 2)$. Применом једнакости 2.2.1. добијамо:

$$p_0 = \frac{1}{|\vec{d}|}\left(\vec{d}:\vec{m}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(-2)^2+(-2)^2+1^2}}(-2 : -2 : 1 : 8 : -7 : 2)$$

$$= \frac{1}{3}(-2 : -2 : 1 : 8 : -7 : 2)$$

$$= \left(-\frac{2}{3} : -\frac{2}{3} : \frac{1}{3} : \frac{8}{3} : -\frac{7}{3} : \frac{2}{3}\right).$$

Нормализоване Пликерове координате праве су: $p_0 = \left(-\frac{2}{3} : -\frac{2}{3} : \frac{1}{3} : \frac{8}{3} : -\frac{7}{3} : \frac{2}{3}\right)$.

Остало је да проверимо да ли је $|\overrightarrow{p_0}| = 1$.

$$|\overrightarrow{p_0}| = \sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{1} = 1.$$

Растојање праве p од координатног почетка је $|\overrightarrow{m_0}| = n = d(O,p)$.

$$n = d(O,p) = |\overrightarrow{m_0}| = \sqrt{\left(\frac{8}{3}\right)^2 + \left(-\frac{7}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{9\cdot 13}{9}} = \sqrt{13}.$$

2.4. Дуалност Пликерових координата

Дуалност у контексту Пликерових координата односи се на чињеницу да постоји дуалност између тачака и равни у пројективном простору $\mathbb{R}P^3$. Ова дуалност омогућава трансформацију проблема са тачкама у проблеме са равнима и обрнуто, што може поједноставити анализу и решавање геометријских проблема.

Дефиниција 2.4.1. Посматрајмо у простору $\mathbb{R}P^3$ праву p која пролази кроз тачке $A = (a_0 : a_1 : a_2 : a_3)$ и $B = (b_0 : b_1 : b_2 : b_3)$ задату Пликеровим координатама $(p_{01}: p_{02}: p_{03}: p_{23}: p_{31}: p_{12})$ и која је пресек две равни $\alpha = [\alpha_0: \alpha_1: \alpha_2: \alpha_3]$ и $\beta = [\beta_0: \beta_1: \beta_2: \beta_3]$. Дуалне Пликерове координате можемо дефинисати на следећи начин:

$$\bar{p} = (\bar{p}_{ij}) = (\bar{p}_{01}: \bar{p}_{02}: \bar{p}_{03}: \bar{p}_{23}: \bar{p}_{31}: \bar{p}_{12}),$$

$$\bar{p}_{ij} = \begin{vmatrix} \alpha_i & \alpha_j \\ \beta_i & \beta_j \end{vmatrix}$$

Теорема 2.4.1.*:* За праву p у $\mathbb{R}P^3$ представљену Пликеровим координатама $(p_{01}: p_{02}: p_{03}: p_{23}: p_{31}: p_{12})$ и за дуалне Пликерове координате праве $\bar{p}$ важи релација:

$$(\bar{p}_{01}: \bar{p}_{02}: \bar{p}_{03}: \bar{p}_{23}: \bar{p}_{31}: \bar{p}_{12}) = (p_{23}: p_{31}: p_{12}: p_{01}: p_{02}: p_{03})$$

Доказ:

Нека су $\alpha = [\alpha_0: \alpha_1: \alpha_2: \alpha_3]$ и $\beta = [\beta_0: \beta_1: \beta_2: \beta_3]$ две различите равни у $\mathbb{R}P^3$.

Из дефиниције 2.4.1. добијамо:

$$\bar{p}_{ij} = (\begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 \\ \beta_0 & \beta_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_2 \\ \beta_0 & \beta_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_3 \\ \beta_0 & \beta_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \alpha_3 & \alpha_1 \\ \beta_3 & \beta_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix})$$

Означимо са $\vec{u} = (\begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 \\ \beta_0 & \beta_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_2 \\ \beta_0 & \beta_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_3 \\ \beta_0 & \beta_3 \end{vmatrix})$ и са $\vec{v} = (\begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \alpha_3 & \alpha_1 \\ \beta_3 & \beta_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix})$.

Важи $p = \alpha \cap \beta$ тј. права p је решење система

$$\alpha: \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z = 0 \ ,$$

$$\beta: \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z = 0 \quad (1)$$

Означимо:

$$\vec{n}_\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \ \text{и} \ \vec{n}_\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$$

Приметимо да је

$$(\bar{p}_{23}: \bar{p}_{31}: \bar{p}_{12}) = \vec{v} = \vec{n}_\alpha \times \vec{n}_\beta = \bar{p} = (p_{01}: p_{02}: p_{03}), \quad (2)$$

Вектор $\vec{u}$ можемо записати у облику

$$\begin{aligned} \vec{u} &= (\alpha_0\beta_1 - \beta_0\alpha_1, \alpha_0\beta_2 - \beta_0\alpha_2, \alpha_0\beta_3 - \beta_0\alpha_3) \\ &= \alpha_0(\beta_1, \beta_2, \beta_3) - \beta_0(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \\ &= \alpha_0\vec{n}_\beta - \beta_0\vec{n}_\alpha . \end{aligned}$$

Нека је тачка $\mathrm{M}(x, y, z)$ произвољна тачка праве p, односно задовољава услов (1), вектор $\overrightarrow{OM}(x, y, z)$ је њен вектор положаја. Тада,

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \overrightarrow{OM} &= \left(\alpha_0\vec{n}_\beta - \beta_0\vec{n}_\alpha\right) \cdot (x, y, z) \\ &= \alpha_0\left(\vec{n}_\beta \cdot (x, y, z)\right) - \beta_0\left(\vec{n}_\alpha \cdot (x, y, z)\right) \\ &= \alpha_0(\beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z) - \beta_0(\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z) \\ &\xLeftrightarrow{\text{на основу (1)}} \alpha_0(-\beta_0) - \beta_0(-\alpha_0) = 0 . \end{aligned}$$

Дакле, $\vec{u} = (\bar{p}_{01}: \bar{p}_{02}: \bar{p}_{03})$ је нормалан вектор на раван O_p , па је

$$(\bar{p}_{01}: \bar{p}_{02}: \bar{p}_{03}) = \vec{u} = \vec{m} = (p_{23}: p_{31}: p_{12}) \quad (3)$$

Из релација (2) и (3) следи тврђење.

■

Глава 3

Операције са Пликеровим координатама

Пликерове координате су веома значајне за представљање и анализу правих у пројективном простору $\mathbb{R}P^3$. Операције са овим координатама, као што су: провера Пликерове релације што је показано у поглављу 2.1, угао између правих, узајамни положај две праве, израчунавање координата тачке пресека правих и равни, омогућавају ефикасну анализу геометријских својстава у пројективној геометрији.

3.1. Угао између правих

Да бисмо дефинисали угао између правих које су задате Пликеровим координатама у простору $\mathbb{R}P^3$ користићемо теорему из Линеарне алгебре која говори да је растојање векторског производа два вектора x и y пропорционално са углом између њих, односно:

$$\|x \times y\| = \|x\|\|y\| \sin\vartheta .$$

Како се Пликерове координате две праве p и q могу представити са два вектора d_p и d_q која садрже прве три Пликерове координате правих p и q, и ако се те две праве секу, угао између њих може бити одеђен преко равни која садржи те две праве које се секу. Док је угао између две праве које се не секу, већ могу бити паралелне или мимоилазне праве, исти као угао две праве које се секу. Тај угао можемо одредити на следећи начин:

$$\vartheta = sin^{-1}\left(\frac{\|d_p \times d_q\|}{\|d_p\|\|d_q\|}\right).$$

Ако су Пликерове координате правих p и q нормализоване, тада је угао између њих једнак:

$$\vartheta = sin^{-1}\|d_p \times d_q\| .$$

3.2. Узајамни положај две праве

Хајде да посматрамо праву $p = AB$, одређену са тачкама $A = (a_0 : a_1 : a_2 : a_3)$ и $B = (b_0, b_1, b_2, b_3)$ и праву $q = CD$, одређену тачкама $C = (c_0 : c_1 : c_2 : c_3)$ и $D = (d_0 : d_1 : d_2 : d_3)$ чије су Пликерове координате:

$$p_{ij} = \begin{vmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{vmatrix} \text{ и } q_{ij} = \begin{vmatrix} c_i & c_j \\ d_i & d_j \end{vmatrix}.$$

На основу особина детерминанти уводимо форму Ω

$$\Omega(p,q) := \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ d_0 & d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}$$

$$= \cdots = \begin{vmatrix} a_3 & a_0 \\ b_3 & b_0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_3 & c_2 \\ d_3 & d_2 \end{vmatrix}$$

$$= p_{01}q_{23} + p_{02}q_{31} + p_{03}q_{12} + p_{23}q_{01} + p_{31}q_{02} + p_{12}q_{03}.$$

- Ако је $\Omega(p,q) = 0$, $rang$ 4×4 матрице је 2 или 3 (поглавље 1.4.), па се праве поклапају или секу, тј. компланарне су,
- Ако је $\Omega(p,q) \neq 0$, $rang$ матрице је 4, па су p и q мимоилазне праве.

Растојања те две праве рачуна се :

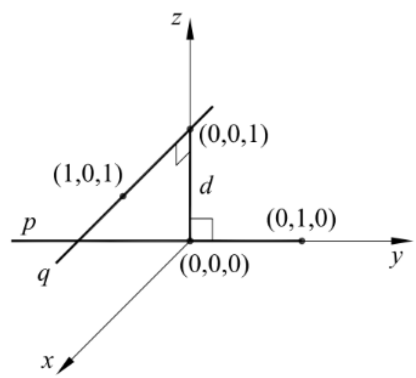
$$d(p,q) = \frac{\|\Omega(p,q)\|}{\|d_p \times d_q\|},$$

под условом да су: $d_p = (p_{01}, p_{02}, p_{03})^T$ и $d_q = (q_{01}, q_{02}, q_{03})^T$ независни, тј. праве нису паралелне.

Уколико су Пликерове координате нормализоване, тј. $|d_p| = 1 = |d_q|$, тада је $d(p,q) = |\Omega(p,q)|$, уколико праве нису паралелне.

Треба напоменути да d_p и d_q не морају да буду нормализовани.

Пример 3.2.1. Нека је права p y-оса и права q паралелна са x-осом и садржи тачку $(0,0,1)$, као што је приказано на слици 3.2.1. Одредити најкраће растојање између правих, као и угао ϑ између њих.



Слика 3.2.1.

Решење: Да би могли да користимо услов $\Omega(p,q)$, морамо прво одредити Пликерове координате за сваку праву. Са слике 3.2.1. можемо прочитати да права p садржи тачке $X=(0,0,0)$ и $Y=(0,1,0)$. Због хомогености ставићемо да је $x_0=1$, тј. $X=(1:0:0:0)$ и $Y=(1:0:1:0)$.

Пликерове координате добијамо преко:

$$p_{01}=\begin{vmatrix}1 & 0\\1 & 0\end{vmatrix}=0\,,$$

$$p_{02}=\begin{vmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{vmatrix}=1\,,$$

$$p_{03}=\begin{vmatrix}1 & 0\\1 & 0\end{vmatrix}=0\,,$$

$$p_{23}=\begin{vmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{vmatrix}=0\,,$$

$$p_{31}=\begin{vmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{vmatrix}=0\,,$$

$$p_{12}=\begin{vmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{vmatrix}=0\,.$$

На исти начин за праву q која садржи тачке $Z=(0,0,1)$ и $T=(1,0,1)$, које су хомогене кад је $x_0=1$, тј. $Z=(1:0:0:1)$ и $T=(1:1:0:1)$.

Пликерове координате добијамо преко:

$$q_{01}=\begin{vmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{vmatrix}=1\,,$$

$$q_{02}=\begin{vmatrix}1 & 0\\1 & 0\end{vmatrix}=0\,,$$

$$q_{03}=\begin{vmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{vmatrix}=0\,,$$

$$q_{23} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0\,,$$

$$q_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1\,,$$

$$q_{12} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0\,.$$

Дакле, Пликерове координате ове две праве су:

$$p{:}\quad (0{:}\,1{:}\,0{:}\,0{:}\,0{:}\,0),$$

$$q{:}\quad (1{:}\,0{:}\,0{:}\,0{:}\,1{:}\,0)\,.$$

Приметимо да су координате нормализоване, тј. $|d_p| = 1 = |d_q|$.

Растојање те две праве можемо израчунати на следећи начин:

$$d(p,q) = |\Omega(p,q)| = 0 + 1 + 0 + 0 + 0 + 0 = 1.$$

Видимо колико је одређивање растојања Пликеровим координатама једноставно.

Да бисмо израчунали угао између правих:

$$d_p \times d_q = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix},$$

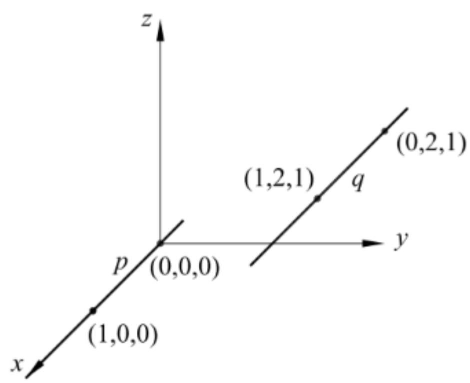
$$\|d_p \times d_q\| = 1\,,$$

где су i, j и k јединични вектори правца оса x, y и z,

па је угао:

$$\vartheta = sin^{-1}(\|d_p \times d_q\|) = sin^{-1}(1) = 90^{\circ}\,.$$

Пример 3.2.2. Нека је права p на x - оси и права q одређена тачкама $(0,2,1)$ и $(1,2,1)$, као што је приказано на слици 3.2.2. Израчунати најкраће растојање између правих као и угао који заклапају.



Слика 3.2.2.

Решење: Као што се види на слици 3.2.2. права p садржи тачке $X = (0,0,0)$ и $Y = (1,0,0)$. Њихове хомогене координате су $X = (1 : 0 : 0 : 0)$ и $Y = (1 : 1 : 0 : 0)$.

Пликерове координате добијамо преко:

$$p_{01} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1\,,$$

$$p_{02} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0\,,$$

$$p_{03} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0\,,$$

$$p_{23} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0\,,$$

$$p_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0\,,$$

$$p_{12} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0\,.$$

За праву q, две тачке које узимамо су $Z = (1 : 0 : 2 : 1)$ и $T = (1 : 1 : 2 : 1)$.

Пликерове координате добијамо преко:

$$q_{01} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1\,,$$

$$q_{02} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0\,,$$

$$q_{03} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0\,,$$

$$q_{23} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0\,,$$

$$q_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1\,,$$

$$q_{12} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2\,.$$

Како су Пликерове координате $p(1:0:0:0:0:0), q(1:0:0:0:1:-2)$ непропорционалне, праве p и q су различите.

Сада ћемо проверити услов за пресек правих:

$$\Omega(p,q) = p_{01}q_{23} + p_{02}q_{31} + p_{03}q_{12} + p_{23}q_{01} + p_{31}q_{02} + p_{12}q_{03} = 0.$$

Видимо да су праве компланарне. Ипак морамо бити опрезни. Наиме $d_p = (1,0,0) = d_q$, па $\Omega(p,q)$ не можемо користити за рачунање растојања, јер су праве паралелне.

Већ сад можемо закључити да ће угао који оне граде бити 0° , али наравно проверићемо.

$$\vartheta = sin^{-1}\left(\frac{\|d_p \times d_q\|}{\|d_p\|\|d_q\|}\right) = sin^{-1}\left(\frac{0}{(1)(1)}\right) = 0^\circ\,.$$

Пример 3.2.3. У овом примеру ћемо показати како уз помоћ Пликерових координата можемо лакше решити пример 1.6.5.

$$l_1\colon \mathrm{X}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 9 \end{bmatrix} + t_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix},$$

$$l_2\colon \mathrm{X}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 11 \\ -3 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} 4 \\ -9 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Решење: Да бисмо уопште кренули са решавањем овог примера, прво морамо ове две праве које су нам задате параметарском једначином праве у афиним координатама, да изразимо преко Пликерових координата. Да бисмо то урадили потребне су нам две тачке од обе праве.

Означићемо праву l_1 са p и праву l_2 са q.

Права $p = l_1$ је одређена тачкама $(1:-2:0:9), (1:0:0:12)$, а права $q = l_2$ са $(1:1:11:-3), (1:5:2:0)$.

Сад можемо наћи Пликерове координате ове две праве на познати начин, и добијамо:

$$p:\ \ (2 : 0 : 3 : 0 : 24 : 0),$$

$$q:\ \ (4\ : -9 : 3 : 6 : -15 : -53)\ .$$

Провером услова за пресек правих добијамо:

$$\Omega(p,q) = p_{01}q_{23} + p_{02}q_{31} + p_{03}q_{12} + p_{23}q_{01} + p_{31}q_{02} + p_{12}q_{03}$$

$$= 12 + 0 - 159 + 0 - 216 + 0 = -363 \neq 0\ ,$$

па видимо да су праве мимоилазне.

$$d_p \times d_q = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & -9 & 3 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 27 \\ 6 \\ -18 \end{bmatrix},$$

$$\left\| d_p \times d_q \right\| = 33\ .$$

Зато је растојање између правих:

$$d(p,q) = \left\| \frac{-363}{33} \right\| = 11\ ,$$

што се подудара са резултатитом примера 1.8.1, угао између ове две праве је:

$$\vartheta = sin^{-1}\left(\frac{\left\| d_p \times d_q \right\|}{\left\| d_p \right\| \left\| d_q \right\|}\right) = sin^{-1}\left(\frac{33}{\sqrt{13}\sqrt{106}}\right) = 62{,}7447^{\circ}\ .$$

3.3. Пресечна тачка праве и равни

Сада ћемо навести једну важну теорему која нам даје координате пресечне тачке праве и равни представљене Пликеровом координатама у пројективном простору $\mathbb{R}P^3$.

Теорема 3.3.1. Нека права p има Пликерове координате (p_{ik}), и нека раван π је задата координатама равни $\pi[\pi_0 : \pi_1 : \pi_2 : \pi_3]$. Тада се координате пресечне тачке праве и равни $M(m_0 : m_1 : m_2 : m_3)$ рачунају:

$$m_i = \sum_{k=0}^{3} p_{ik}\pi_k\,, \quad i = 0, \dots 3 \qquad (3.3.1.)$$

Доказ:

Нека је права p садржи две тачке $A = (a_0 : a_1 : a_2 : a_3)$ и $B = (b_0 : b_1 : b_2 : b_3)$, односно важи $p = AB$. Тада за произвољну тачку $M(m_0 : m_1 : m_2 : m_3)$ важи:

$$M = \lambda_1 A + \lambda_2 B, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

Ако је $M = p \cap \pi$, тада је $M \in \pi$, односно:

$$0 = \pi^T M = \pi^T(\lambda_1 A + \lambda_2 B) = \lambda_1(\pi^T A) + \lambda_2(\pi^T B)$$

Одакле следи:

$$\lambda_1 = -\frac{\pi^T B}{\pi^T A}\lambda_2 \text{ , са условом } \pi^T A \neq 0 \text{ ако } A \notin \pi, \text{ односно } A \neq M.$$

Дакле добијамо:

$$M = -\frac{\pi^T B}{\pi^T A}\lambda_2 A + \lambda_2 B = -\frac{\lambda_2}{\pi^T A}\big((\pi^T B)A - (\pi^T A)B\big),$$

па можемо узети:

$$\begin{aligned}
(m_0, m_1, m_2, m_3) = M &= (\pi^T B)A - (\pi^T A)B \\
&= \left(\sum_{k=0}^{3} \pi_k b_k\right)(a_0, a_1, a_2, a_3) - \left(\sum_{k=0}^{3} \pi_k a_k\right)(b_0, b_1, b_2, b_3) \\
&= (\sum_{k=0}^{3} \pi_k(b_k a_0 - a_k b_0), \dots, \sum_{k=0}^{3} \pi_k(b_k a_3 - a_k b_3)) \\
&= \left(\sum_{k=0}^{3} \pi_k p_{0k}\,, \sum_{k=0}^{3} \pi_k p_{1k}\,, \sum_{k=0}^{3} \pi_k p_{2k}\,, \sum_{k=0}^{3} \pi_k p_{3k}\right).
\end{aligned}$$

На крају добијамо

$$m_i = \sum_{k=0}^{3} p_{ik}\pi_k\,, \quad i = 0, \dots, 3.$$

што смо и требали да докажемо.

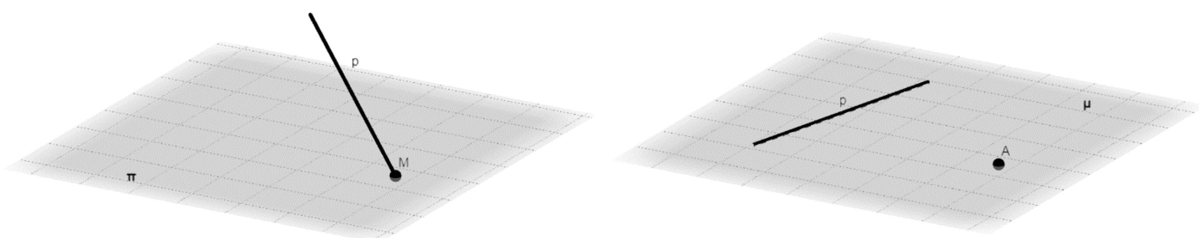
■

Примедба: Ако су $m_i = 0, i = 0, \ldots, 3$ тада$(\pi^T B)A = (\pi^T A)B$, па како је $A \neq B$, мора бити $\pi^T B = 0 = \pi^T A$, тј.$A, B \in \pi$. Дакле, добијамо услов да права припада равни

$$p = (p_{ij}) \subset \pi = (\pi_k) <=> m_i = \sum_{k=0}^{3} p_{ik}\pi_k = 0\,, \ \ i = 0, \ldots, 3.$$

3.4. Раван одређена тачком и правом

Приметимо да је одредити раван μ која садржи тачку А и праву p дуалан проблем од одредити тачку М која је пресек равни α и праве p. Тај дуалан проблем је приказана на слици 3.4.1.



Слика 3.4.1. Дуалност

На тај начин добијамо теорему дуалну теореме 3.3.1.

Теорема 3.4.1. Ако права p има дуалне Пликерове координате $(\bar{p}_{ij})$ и тачка $A(a_0\colon a_1\colon a_2\colon a_3)$, тада раван μ која садржи p и А има координате

$$\mu_i = \textstyle\sum_{k=0}^{3} \bar{p}_{ik} a_k\,, \ \ i = 0, \ldots 3. \qquad (3.4.1.)$$

Пимедба: је услов да права p садржи тачку А

$$p = (p_{ij}) \ni A(a_0\colon a_1\colon a_2\colon a_3) <=> \mu_i = \sum_{k=0}^{3} \bar{p}_{ik} a_k = 0\,, \ \ i = 0, \ldots 3.$$

3.5. Пресек две праве

Теорема 3.5.1. Нека су праве p и q компланарне и дате Пликеровим координатама $p = (d_p, m_p), q = (d_q, m_q)$ и нека ни једна од њих не садржи координатни почетак. Тада је њихова пресечна тачка M у хомогеним координатама

$$M(d_q \cdot m_p : m_p \times m_q)$$

Доказ: Директно се проверава да тачка M припада обема правама.

Приметити да важи $d_q \cdot m_p = -d_p \cdot m_q$ због Пликерове релације.

■

Пример 3.5.1. Нека је $A(1 : 2 : 3)$, $B(0 : 1 : 1)$, $C(5 : 2 : 5)$ и $D(2 : 1 : 2)$. Одредити пресечну тачку M правих $p = AB$ и $q = CD$.

Решење: У хомогеним координатама је $A(1 : 1 : 2 : 3)$, $B(1 : 0 : 1 : 1)$, $C(1 : 5 : 2 : 5)$ и $D(1 : 2 : 1 : 2)$. Пликерове координате правих су

$$p = AB = (-1 : -1 : -2 : -1 : -1 : 1),$$

$$q = CD = (-3 : -1 : -3 : -1 : 0 : 1).$$

Приметимо да је $\Omega(p, q) = 0$, па су праве компланарне.

Како је

$$m_p \times m_q = (-1, -1, 1) \times (-1, 0, 1) = (-1, 0, -1)$$

и

$$d_q \cdot m_p = 3 + 1 - 3 = 1 = -d_p \cdot m_q,$$

тачка је одређена координатама

$$M = p \times q = (1 : -1 : 0 : -1),$$

Односно у афиним координатама

$$M(-1, 0, -1).$$

3.6. Рачунски пример

Пример 3.6.1: Дата је права $p(p_{01}:p_{02}:p_{03}:p_{23}:p_{31}:p_{12}) = (-2 : -2 : 1 : 8 : -7 : 2)$:

а) Одредити пресек праве p и равни π: $x + y - 2z - 3 = 0$

б) Показати да је $p \subset \beta$: $[-5 : 3 : -2 : 2]$, односно да не постоји пресечна тачка праве p и равни β.

в) Одредити дуалну раван μ у којој лежи права p и која садржи тачку $C(3 : 1 : -1 : 0)$.

г) Показати да тачка $D(5, 6, 1)$ припада правој p

Решење:

а) Прво ћемо задати раван преко хомогених координата:

$$\pi[1 : 1 : -2 : -3] = [\pi_0 : \pi_1 : \pi_2 : \pi_3].$$

Узећемо произвољну тачку $M(m_0: m_1: m_2: m_3)$ за коју важи $M = p \cap \pi$, односно да је то тачка пресека праве и равни. Тада на основу теореме 3.4.1 добијамо:

$$m_0 = \sum_{k=0}^{3} p_{0k}\pi_k = p_{00}\pi_0 + p_{01}\pi_1 + p_{02}\pi_2 + p_{03}\pi_3$$

$$= 0 \cdot 1 + (-2) \cdot 1 + (-2) \cdot (-2) + 1 \cdot (-3)$$

$$= -1 \,,$$

$$m_1 = \sum_{k=0}^{3} p_{1k}\pi_k = p_{10}\pi_0 + p_{11}\pi_1 + p_{12}\pi_2 + p_{13}\pi_3$$

$$= 2 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) + 7 \cdot (-3)$$

$$= -23 \,,$$

$$m_2 = \sum_{k=0}^{3} p_{2k}\pi_k = p_{20}\pi_0 + p_{21}\pi_1 + p_{22}\pi_2 + p_{23}\pi_3$$

$$= 2 \cdot 1 + (-2) \cdot 1 + 0 \cdot (-2) + 8 \cdot (-3)$$

$$= -24 \,,$$

$$m_3 = \sum_{k=0}^{3} p_{3k}\pi_k = p_{30}\pi_0 + p_{31}\pi_1 + p_{32}\pi_2 + p_{33}\pi_3$$

$$= -1 \cdot 1 + 7 \cdot 1 + (-8) \cdot (-2) + 0 \cdot (-3)$$

$$= 22\ .$$

Дакле добијамо да су координате тачке пресека праве и равни:

$$M(m_0 : m_1 : m_2 : m_3) = M(-1 : -23 : -24 : 22)$$

б) Треба да покажемо да важи:

$$\sum_{k=0}^{3} p_{ik}\beta_k = 0\ , \qquad i = 0, \dots, 3\ , \qquad i \neq k$$

Кренимо редом проверу.

Означимо са β: $[-5 : 3 : -2 : 2] = [\beta_0 : \beta_1 : \beta_2 : \beta_3]$

$$i = 0: \qquad \sum_{k=0}^{3} p_{0k}\beta_k = p_{00}\beta_0 + p_{01}\beta_1 + p_{02}\beta_2 + p_{03}\beta_3$$

$$= 0 \cdot (-5) + (-2) \cdot 3 + (-2) \cdot (-2) + 1 \cdot 2$$

$$= 0 - 6 + 4 + 2 = 0\ ,$$

$$i = 1: \qquad \sum_{k=0}^{3} p_{1k}\beta_k = p_{10}\beta_0 + p_{11}\beta_1 + p_{12}\beta_2 + p_{13}\beta_3$$

$$= 2 \cdot (-5) + 0 \cdot 3 + 2 \cdot (-2) + 7 \cdot 2$$

$$= -10 + 0 - 4 + 14 = 0\ ,$$

$$i = 2: \qquad \sum_{k=0}^{3} p_{2k}\beta_k = p_{20}\beta_0 + p_{21}\beta_1 + p_{22}\beta_2 + p_{23}\beta_3$$

$$= 2 \cdot (-5) + (-2) \cdot 3 + 0 \cdot (-2) + 8 \cdot 2$$

$$= -10 - 6 + 0 + 16 = 0\ ,$$

$$i = 3: \qquad \sum_{k=0}^{3} p_{3k}\beta_k = p_{30}\beta_0 + p_{31}\beta_1 + p_{32}\beta_2 + 3_{03}\beta_3$$

$$= (-1) \cdot (-5) + (-7) \cdot 3 + (-8) \cdot (-2) + 0 \cdot 2$$

$$= 5 - 21 + 16 + 0 = 0\,.$$

Важи да је $p \subset \beta$, односно не постоји пресећна тачка праве и равни.

в) За дуалне Пликерове координате важи:

$$(\bar{p}_{01}:\bar{p}_{02}:\bar{p}_{03}:\bar{p}_{23}:\bar{p}_{31}:\bar{p}_{12}) = (p_{23}:p_{31}:p_{12}:p_{01}:p_{02}:p_{03}) = (8 : -7 : 2 : -2 : 2 : 1)$$

Па на основу дуалности, постоји раван у којој лежи права p и која садржи тачку $C(3 : 1 : -1 : 0)$, односно $\mu = pC = [\mu_0 : \mu_1 : \mu_2 : \mu_3]$.

Координате равни наћићемо уз помоћ једначине:

$$\mu_i = \sum_{k=0}^{3} \bar{p}_{ik} c_k\,, \;\; i = 0, \dots 3, \qquad i \neq k.$$

Па кренимо редом:

$$i = 0: \qquad \mu_0 = \sum_{k=0}^{3} \bar{p}_{0k} c_k = \bar{p}_{00} c_0 + \bar{p}_{01} c_1 + \bar{p}_{02} c_2 + \bar{p}_{03} c_3$$

$$= 0 \cdot 3 + 8 \cdot 1 + (-7) \cdot (-1) + 2 \cdot 0$$

$$= 0 + 8 + 7 + 0 = 15,$$

$$i = 1: \qquad \mu_1 = \sum_{k=0}^{3} \bar{p}_{1k} c_k = \bar{p}_{10} c_0 + \bar{p}_{11} c_1 + \bar{p}_{12} c_2 + \bar{p}_{13} c_3$$

$$= (-8) \cdot 3 + 0 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) + 2 \cdot 0$$

$$= -24 + 0 + 1 + 0 = -23,$$

$$i = 2: \qquad \mu_2 = \sum_{k=0}^{3} \bar{p}_{2k} c_k = \bar{p}_{20} c_0 + \bar{p}_{21} c_1 + \bar{p}_{22} c_2 + \bar{p}_{23} c_3$$

$$= 7 \cdot 3 + (-1) \cdot 1 + 0 \cdot (-1) + (-2) \cdot 0$$

$$= 21 - 1 + 0 + 0 = 20,$$

$$i = 3: \qquad \mu_3 = \sum_{k=0}^{3} \bar{p}_{3k} c_k = \bar{p}_{30} c_0 + \bar{p}_{31} c_1 + \bar{p}_{32} c_2 + \bar{p}_{33} c_3$$

$$= (-2) \cdot 3 + (-2) \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + 0 \cdot 0$$

$$= -6 - 2 - 2 + 0 = -10.$$

Добијамо $\mu[15 : -23 : 20 : -10]$, односно раван μ: $15x - 23y + 20z - 10 = 0$ садржи тачку C и праву p.

г) Да би тачка $D(5, 6, 1)$ припадала правој p треба да важи услов

$$\sum_{k=0}^{3} \bar{p}_{ik} d_k = 0 , \quad i = 0, \dots 3 , i \neq k$$

Прво ћемо тачку $D(5, 6, 1)$ задати са хомогеним координатама $D = (d_0 : d_1 : d_2 : d_3) = (1 : 5 : 6 : 1)$, при чему узимамо да је $d_0 = 1$.

Затим редом проверавамо:

$$i = 0: \qquad \sum_{k=0}^{3} \bar{p}_{0k} d_k = \bar{p}_{00} d_0 + \bar{p}_{01} d_1 + \bar{p}_{02} d_2 + \bar{p}_{03} d_3$$

$$= 0 \cdot 1 + 8 \cdot 5 + (-7) \cdot 6 + 2 \cdot 1$$

$$= 0 + 40 - 42 + 2 = 0,$$

$$i = 1: \qquad \sum_{k=0}^{3} \bar{p}_{1k} d_k = \bar{p}_{10} d_0 + \bar{p}_{11} d_1 + \bar{p}_{12} d_2 + \bar{p}_{13} d_3$$

$$= (-8) \cdot 1 + 0 \cdot 5 + 1 \cdot 6 + 2 \cdot 1$$

$$= -8 + 0 + 6 + 2 = 0,$$

$$i = 2: \qquad \sum_{k=0}^{3} \bar{p}_{2k} d_k = \bar{p}_{20} d_0 + \bar{p}_{21} d_1 + \bar{p}_{22} d_2 + \bar{p}_{23} d_3$$

$$= 7 \cdot 1 + (-1) \cdot 5 + 0 \cdot 6 + (-2) \cdot 1$$

$$= 7 - 5 + 0 - 2 = 0,$$

$$i = 3: \qquad \sum_{k=0}^{3} \bar{p}_{3k} d_k = \bar{p}_{30} d_0 + \bar{p}_{31} d_1 + \bar{p}_{32} d_2 + \bar{p}_{33} d_3$$

$$= (-2) \cdot 1 + (-2) \cdot 5 + 2 \cdot 6 + 0 \cdot 1$$

$$= -2 - 10 + 12 + 0 = 0.$$

На овај начин смо показати да тачка $D(5, 6, 1)$ припада правој p.

Закључак

После свега наведеног у овом раду можемо закључити да Пликерове координате имају веома значајну улогу у различитим областима математике. Тај значај се огледа у њиховој способности да пруже јединствен и ефикасан начин за описивање и анализу геометријских објеката. Пликерове координате олакшавају и поједностављују многе геометријске и аналитичке процесе у математици. Неки од тих процеса који су представљени у овом раду су:

- Омогућавају јединствен начин представљања правих у пројективном простору, што поједностављује анализу и рачунање.
- У класичној аналитичкој геометрији, праве су често описане помоћу тачака или равни, што може довести до проблема, када праве постану паралелне или се секу у бесконачности. Пликерове координате избегавају ове проблеме, јер обезбеђују хомогене координате за праве.
- Пликерове координате поједностављују рачунање пресека две праве или праве и равни. Уместо да се решавају сложени системи једначина, пресек се може рачунати директно из координата.
- Оне уводе концепт дуалности, који омогућава лакше разумевање и решавање проблема кроз дуалне релације између тачака и правих.

Њихов значај не завршава се само на математици, већ се проширује на многе примењене науке. У роботици коришћење Пликерових координата олакшава моделирање и анализу покрета роботских руку и манипулатора. Такође омогућавају прецизно планирање путање и контролу кретања у роботским апликацијама. У механичким системима, Пликерове координате могу бити коришћене за описивање сила и момената у простору. У физичким системима Пликерове координате омогућавају прецизну анализу кретања и динамике. У компјутерској графици, Пликерове координате се користе за рачунање пресека зрака и објеката, што је основа за рендеринг 3D сцена. Ова метода омогућава брже и прецизније рачунање, побољшавајући ефикасност рендеринга ...

То су само неке од њихових примена. Пликерове координате су занимљиве и значајне због своје способности да поједноставе и унапреде анализу и рачунање у многим областима. Да би покрили њихову примену у наукама потребна су више десетина оваквих радова.

У нашој земљи има веома мало литературе у којој су оне обрађене. Надам се да ћу овим радом боље приближити Пликерове координате новим генарацијама и допринети њиховом даљем развоју.

Литература

[1] D. Palman, Projektivna geometrija, Zagreb: Školska knjiga, 1984.

[2] Z. Petrić и O. Milinković, Linearna algebra, skripta, Beograd, januar 2013.

[3] V. Skala, Projective Geometry, Duality and Plücker Coordinates for Geometric Computations with Determinants on GPUs, Univerzitni 8, CZ 306 14 Plzen, Czech Republic : Department of Computer Science and Engineering, Faculty of Applied Sciences, University of West Bohemia, 2017.

[4] Y.-B. Jia, „Plucker Coordinates for Lines in the Space," 2022, p. Com S 477/577 Notes.

[5] J. Wyss-Gallifent, „Real Projective 3-Space," у *MATH431*, 2021.

[6] E. A. Kmett, PLUCKER AND STUDY COORDINATES FOR COMPUTATIONAL GEOMETRY, Ypsilanti, Michigan: Submitted to the Department of Mathematics, 2005.

[7] Vaclav Skala, Michal Smolik, „A New Formulation of Plücker Coordinates using Projective Representation," у *5th Int.Conf. on Mathematics and Computers in Sciences and Industry*, Corfu Greece, 2018.

[8] V. Skala, „Plücker Coordinates and Extended Cross Product for Robust and Fast Intersection Computation," Greece, 2016.

[9] „ Plücker line coordinate geometry," 15 9 2020. [На мрежи]. Available: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Pl%C3%BCcker_line_coordinate_geometry.png.

[10] Leo Dorst, Daniel Fontijne Stephen Mann, „Plücker Coordinates and Geometric Algebra," 2007-2009. [На мрежи]. Available: https://geometricalgebra.org/plucker_coordinates.html.

[11] M. J. Baker, „Maths - Plücker Coordinates," 1998-2023. [На мрежи]. Available: https://www.euclideanspace.com/maths/geometry/elements/line/plucker/index.htm#google_vignette .

Биографија аутора

Соња Зрнић, девојачко Ковачевић, рођена је 17.11.1986. у Зрењанину. Основну школу " Вук Караџић " завршила је у Зрењанину. Гимназију " Зрењанинска гимназија ", у Зрењанину, општи смер, завршила је 2005. године.

Студије на Природно – математичком факултету, у Новом Саду, смер дипломирани математичар - математика финансија, уписала је 2005 године. Дипломирала је 26. 12. 2012. године са просечном оценом 7,76 , одбраном Дипломског рада под називом "Уопштење метричких простора, Конусни метрички простори ".

Од 2013. године ради у више основних и средњих школа у Новом Саду и околини. У септембру 2023. године добија посао у основној школи " Десанка Максимовић " у Футогу. Удата од јуна 2013. године и мајка две девојчице.

Мастер академске студије на Математичком факултету, у Београду уписала је 2022/2023. школске године, смер Мастер професор математике. На мастер студијама положила је све испите предвиђене планом и програмом и тиме стекла услов за одбрану овог мастер рада.

Београд, 2024. Соња Зрнић