УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Лидија З. Чикарић

ПРАВОУГЛИ ШЕСТОУГЛОВИ У ХИПЕРБОЛИЧКОЈ РАВНИ

мастер рад

Београд, 2024.

Ментор:

проф. др Срђан Вукмировић, редовни професор
Универзитет у Београду, Математички факултет

Чланови комисије:

др Миљан Кнежевић, доцент
Универзитет у Београду, Математички факултет

проф. др Тијана Шукиловић, ванредни професор
Универзитет у Београду, Математички факултет

Датум одбране: ____________________

Захваљујем се професору Срђану, својој породици,
пријатељима и колегама из компаније Cisco

Наслов мастер рада: Правоугли шестоуглови у хиперболичкој равни

Резиме: За разлику од еуклидске равни, хиперболичка раван допушта постојање шестоуглова у којима су сви углови прави. Такви шестоуглови, познатији као правоугли шестоуглови, су одређени до на изометрију, дужинама наизменичних ивица. Једна од важних примена правоуглих шестоуглова је у прављењу хиперболичких панталона које су градивни блокови сложенијих површи Тајхмилеровог простора.

У овом раду је представљен доказ за постојање и јединственост правоуглог шестоугла чије су наизменичне ивице дате. Доказ је изведен у хиперболоидном моделу хиперболичке равни. Направљен је и Геогебра аплет који реализује конструкцију оваквог шестоугла у Клајновом моделу. Још је објашњена улога правоуглих шестоуглова у Тајхмилеровој теорији.

Кључне речи: хиперболичка геометрија, хиперболоидни модел, правоугли шестоугао, хиперболички пар панталона

Садржај

1 Увод **1**

2 Хиперболоидни модел **4**

3 Правоугли шестоуглови **21**

4 Конструкција правоуглог шестоугла **30**

5 Примена и значај **35**

Библиографија **38**

Глава 1

Увод

Еуклид је своје „Елементе” написао око 300. године пре нове ере у којима је основна тврђења геометрије поделио у аксиоме и постулате. За разлику од претходна четири који су били очигледнији и лако доказиви, пети постулат је био познат због своје сложености.

Пети Еуклидов постулат гласи:

> Ако једна права у пресеку са другим двема образује са исте стране два унутрашња угла чији је збир мањи од два права угла, те две праве, бескрајно продужене, сећи ће се и то са оне стране са које су ови углови мањи од два права. [7]

Еквивалент тог поступата је *Плејферова аксиома паралелности*:

> Ако је b произвољна права и A тачка која јој не припрада, тада у равни одређеној тачком A и правом b постоји јединствена права a која садржи тачку A и нема заједничких тачака са правом b.

Од Еуклидовог времена па до деветнаестог века није забележен значајнији напредак у доказивању петог Еуклидовог постулата. Бројни покушаји да се постулат докаже користећи прва четири били су неуспешни.

До великог помака долази у трећој деценији деветнаестог века када су Лобачевски[1] и Бољај[2], независно један од другог, дошли до закључка да пети Еуклидов постулат не зависи од осталих аксиома и постулата. Још су дошли

[1]Николай Иванович Лобачевский (1793 - 1856), руски математичар

[2]János Bolyai (1802 - 1860), мађарски математичар

на идеју да се теорија паралелних правих заснује на аксиоми која негира пети Еуклидов постулат. [6]

Аксиома паралелности Бољаја-Лобачевског:

> Ако је b произвољна права и A тачка која јој не припрада, тада у равни одређеној тачком A и правом b постоји више од једне праве која садржи тачку A и нема заједничких тачака са правом b.

У хиперболичкој геометрији, за разлику од еуклидске, није се могло ослонити у потпуности на интуицију па је било потребно доста времена да се уваже дела Лобачевског и Бољаја. Једино је Гаус[3] разумео далекосежност њихових идеја будући да су се подударале са његовим замислима. [6] Било је потребно показати да је систем аксиома хиперболичке геометрије непротивречан, тј. наћи неки његов модел. Први модел хиперболичке равни су дали Клајн[4] и Белтрами[5] 1868. године. Данас овај модел зовемо *Клајновим* или *пројективним* моделом. [2]

У Клајновом моделу хиперболичка раван је представљена као унутрашњост јединичног круга унутар пројективне равни. Јединичну кружницу називамо *апсолутом.* Тачке овог модела су тачке у унутрашњости круга, а праве су тетиве тог круга. [2] Видети слику 1.1.

Иначе, Еуклидове аксиоме су подељене у пет група аксиома: инциденције, распореда, подударности, непрекидности и паралелности. Прве четири групе чине аксиоме *апсолутне геометрије.*

Еуклидска геометрија је заснована на аксиомама апсолутне геометрије и Плејферовој аксиоми паралелности.

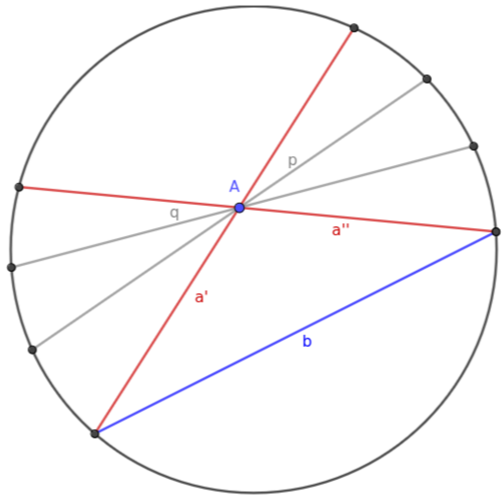
Геометрију која је заснована на аксиомама апсолутне геометрије и аксиоми Бољаја-Лобачевског називамо *геометријом Лобачевског* или *хиперболичком геометријом.*[6] Простор у којем су задовољене аксиоме хиперболичке геометрије називамо *хиперболичким* или *простором Лобачевског*, а сваку његову раван *хиперболичком равни* или *равни Лобачевског.* [6]

[3] Johann Carl Friedrich Gauß (1777 - 1855), немачки математичар

[4] Felix Christian Klein (1849 - 1925), немачки математичар

[5] Eugenio Beltrami (1835 - 1900), италијански математичар

[6] Ова гeметрија се некад назива и *геометријом Бољај-Лобачевског* или *геометријом Гаус-Бољај-Лобачевског.*



Слика 1.1: Клајнов модел [10]

Може се показати да у хиперболичкој равни постоје две „граничне” праве a' и a'' које садрже тачку A и немају заједничких тачака са правом b. За праве a' и a'' кажемо да су *паралелне* правој b. За све остале праве које садрже тачку A и немају заједничких тачака са правом b кажемо да су *хиперпаралелне* правој b. На слици 1.1 приказане су праве a' и a'' које паралелне са b ($a' \parallel b$ и $a'' \parallel b$) и праве p и q које су хиперпаралелне са правом b ($p \parallel_h b$ и $q \parallel_h b$).

Рад се састоји из 5 поглавља. У поглављу 2 je детаљно објашњен хиперболоидни модел хиперболичке равни. На крају поглавља je приказана изометрија између хиперболоидног и Клајновог модела. Поглавље 3 je посвећено доказу за постојање и јединственост правоуглог шестоугла чије су наизменичне ивице дате. Пре доказа у кратким цртама су размотрени хиперболички четвороуглови са три права угла и хиперболички петоуглови са четири права угла и то у обиму који je потребан за сам доказ. У поглављу 4 je представљена конструкција правоуглог шестоугла у Клајновом моделу. Конструкција je изведена у Геогебри. У поглављу 5 се говори о примени и значају правоуглих шестоуглова у Тајхмилеровом простору.

Слике у раду су рађене у Геогебри и у GCLC алату.

Глава 2

Хиперболоидни модел

С обзиром на то да је хиперболичку раван тешко замислити и да се често коси са интуицијом, модели хиперболичке равни су нам од великог значаја. Поред споменутог Клајновог модела, постоје још хиперболоидни, Поенкареов диск и Поенкареов полуравански модел.

У овом поглављу ћемо говорити о хиперболоидном моделу. За више детаља о осталим моделима погледати књигу [2].

Лоренцов скаларни производ

Нека су $x, y \in \mathbb{R}^n$. *Лоренцов скаларни производ* $x \circ y$ дефинишемо као реалан број

$$x \circ y = -x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n.$$

Простор Минковског је n-димензионалан реалан векторски простор на којем је дефинисан Лоренцов скаларни производ и означавачемо га са $\mathbb{R}^{1,n-1}$. Прва координата је *временска* док су остале *просторне*.[1]

Нека је $x \in \mathbb{R}^{1,n-1}$. *Лоренцову норму* вектора x дефинишемо као комплексан број

$$\|x\| = (x \circ x)^{1/2}.$$

Приметимо да Лоренцов скаларни производ није позитивно дефинитан и да квадрат норме може бити и негативан.

[1] У литератури је понекад последња координата временска. Тада је испред последњег члана у Лоренцовом скаларном простору $-$, а испред осталих је $+$. Ознака таквог простора Минковског је $\mathbb{R}^{n-1,1}$.

На основу тога разликујемо три типа вектора:

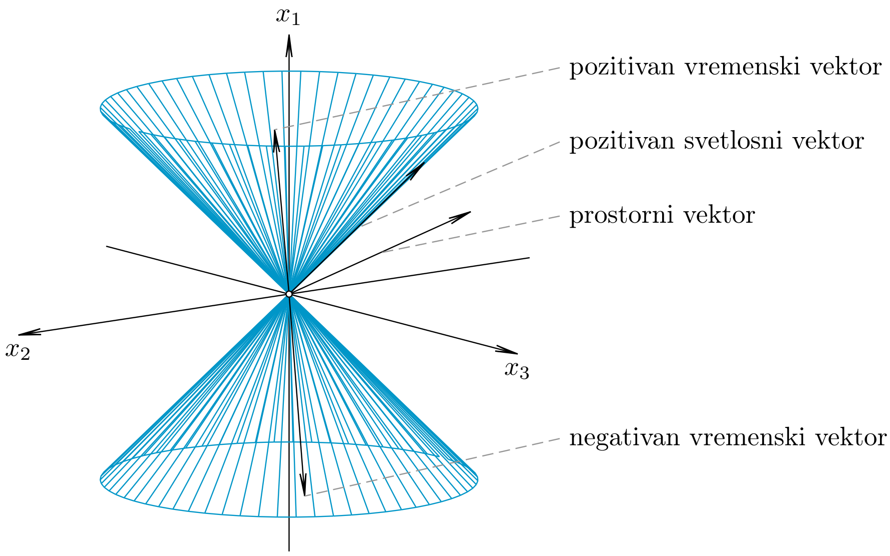
светлосни вектор - $\|x\|^2 = 0$

просторни вектор - $\|x\|^2 > 0$

временски вектор - $\|x\|^2 < 0$

Скуп свих светлосних вектора чине *светлосни конус* $\mathcal{C}^{n-1}$. Временски вектори се налазе унутар светлосног конуса $\mathcal{C}^{n-1}$ док се просторни вектори налазе изван њега. Видети слику 2.1.

Светлосни и временски вектори могу бити *позитивни* или *негативни*, односно позитивне или негативне временске оријентације. За светлосни/временски вектор кажемо да је позитиван ако је $x_1 > 0$, односно негативан ако је $x_1 < 0$. Видети слику 2.1.



Слика 2.1: Светлосни конус $\mathcal{C}^2$ из $\mathbb{R}^{1,2}$

Пример 2.1. *Посматрајмо стандардну базу векторског простора $\mathbb{R}^3$. Добијамо да је:*

$$e_1 \circ e_1 = -1$$

$$e_2 \circ e_2 = 1$$

$$e_3 \circ e_3 = 1.$$

Приметимо да је e_1 временски, а да су e_2 и e_3 просторни вектори док би пример светлосног вектора био $v = (1, 0, 1)$.

Тврђење 2.1. *Нека су x и y не-нула временски или светлосни вектори из $\mathbb{R}^{1,n-1}$ исте временске оријентације. Тада је $x \circ y \leq 0$. Једнакост ће важити ако и само ако су x и y линеарно зависни светлосни вектори.*

Доказ. Пошто x и y нису просторни вектори, важиће: $\|x\| \geq 0$ и $\|y\| \geq 0$, тј. $x_1 \geq (x_2^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2}$ и $y_1 \geq (y_2^2 + \cdots + y_n^2)^{1/2}$.

Приметимо да се са десних страна неједнакости налазе норме дефинисане стандардним скаларним производом за векторе $\bar{x} = (x_2, \ldots, x_n)$ и $\bar{y} = (y_2, \ldots, y_n)$. Користећи Коши-Шварцову неједнакост добијамо:

$$x_1 y_1 \geq \|\bar{x}\|_2 \|\bar{y}\|_2 \geq \bar{x} \cdot \bar{y},$$

односно

$$x \circ y = -x_1 y_1 + \bar{x} \cdot \bar{y} \leq 0.$$

Једнакост ће бити испуњена за:

$x_1 = \|\bar{x}\|_2$ и $y_1 = \|\bar{y}\|_2$ - x и y су светлосни вектори

$\bar{x} \cdot \bar{y} = \|\bar{x}\|_2 \|\bar{y}\|_2$ - $\bar{x}$ и $\bar{y}$ су линеарно зависни вектори

што је и требало показати. □

Тврђење 2.2. *Нека су x и y не-нула временски или светлосни вектори из $\mathbb{R}^{1,n-1}$ исте временске оријентације и нека је $t > 0$. Тада:*

1. *Вектор tx је истог типа и временске оријентације као и вектор x;*
2. *Вектор $x + y$ није просторног типа и има исту временску оријентацију као x и y.*
   Још, $x + y$ светлосни вектор ако и само ако су x и y линеарно зависни светлосни вектори.

Доказ.

1. Приметимо да је $\|tx\| = t\,\|x\|$ и $(tx)_1 = tx_1$ па су вектори tx и x истог типа и исте временске оријентације.
2. Из Тврђења 2.1 добијамо да важи

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2x \circ y + \|y\|^2 \leq 0.$$

Једнакост је испуњена за: $\|x\| = 0$, $\|y\| = 0$ и $x \circ y = 0$, тј. $x + y$ ће бити светлосни вектор ако и само ако су x и y линеарно зависни светлосни вектори.

□

Нека је V векторски потпростор од $\mathbb{R}^{1,n-1}$ и он може бити *временски*, *просторни* или *светлосни*. V је временски потпростор ако и само ако садржи временски вектор, просторни ако и само ако је сваки не-нула вектор из V просторни вектор, иначе је светлосни потпростор.

Лоренцове трансформације

За функцију $\phi : \mathbb{R}^{1,n-1} \to \mathbb{R}^{1,n-1}$ кажемо да је *Лоренцова трансформација* ако и само је Лоренцов скаларни производ инваријантан у односу на њу, тј. ако за $\forall x, y \in \mathbb{R}^{1,n-1}$ важи

$$\phi(x) \circ \phi(y) = x \circ y.$$

За базу $\{v_1, v_2, \ldots v_n\}$ простора $\mathbb{R}^{1,n-1}$ кажемо да је *Лоренцова ортонормирана база* ако и само ако је

$$v_1 \circ v_1 = -1 \qquad \wedge \qquad v_i \circ v_j = \delta_{ij}, \quad i, j > 1.$$

Из Примера 2.1 можемо закључити да је стандардна база $\{e_1, \ldots, e_n\}$ за $\mathbb{R}^n$ Лоренцова ортонормирана база.

Тврђење 2.3. *Функција $\phi : \mathbb{R}^{1,n-1} \to \mathbb{R}^{1,n-1}$ је Лоренцова трансформација ако и само ако је ϕ линеарно пресликавање и $\{\phi(e_1), \phi(e_2), \ldots, \phi(e_n)\}$ је Лоренцова ортонормирана база за $\mathbb{R}^{1,n-1}$.*

Доказ.

($\Rightarrow$) Претпоставимо да је ϕ Лоренцова трансформација. Тада је:

$$\phi(e_1) \circ \phi(e_1) = e_1 \circ e_1 = -1$$

$$\phi(e_i) \circ \phi(e_j) = e_i \circ e_j = \delta_{ij}, \quad i, j > 1.$$

Уочавамо да су $\phi(e_1), \phi(e_2), \ldots, \phi(e_n)$ линеарно независни и да је $\{\phi(e_1), \phi(e_2), \ldots, \phi(e_n)\}$ Лоренцова ортонормирана база за $\mathbb{R}^{1,n-1}$ па за свако $x \in \mathbb{R}^{1,n-1}$ постоје $c_1, c_2, \ldots c_n \in \mathbb{R}$ такви да је

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \phi(e_i).$$

Коефицијенте $c_1, c_2, \dots c_n$ можемо лако одредити јер је $\{\phi(e_1), \phi(e_2), \dots, \phi(e_n)\}$ Лоренцова ортонормирана база и важи:

$$-c_1 = \phi(x) \circ \phi(e_1) = x \circ e_1 = -x_1$$

$$c_j = \phi(x) \circ \phi(e_j) = x \circ e_j = x_j, \quad j > 1.$$

Добијамо да је:

$$\phi\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} x_i \phi(e_i)$$

па закључујемо да је ϕ линеарно пресликавање.

($\Leftarrow$) Претпоставимо да је ϕ линеарно пресликавање и да је $\{\phi(e_1), \phi(e_2), \dots, \phi(e_n)\}$ Лоренцова ортонормирана база за $\mathbb{R}^{1,n-1}$.

Нека су $x, y \in \mathbb{R}^{1,n-1}$. Тада је:

$$\begin{aligned}
\phi(x) \circ \phi(y) &= \phi\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\Big) \circ \phi\Big(\sum_{j=1}^{n} y_j e_j\Big) \\
&= \Big(\sum_{i=0}^{n} x_i \phi(e_i)\Big) \circ \Big(\sum_{j=0}^{n} y_j \phi(e_j)\Big) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j \phi(e_i) \circ \phi(e_j) \\
&= -x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots x_n y_n \\
&= x \circ y.
\end{aligned}$$

ϕ је Лоренцова трансформација што је и требало показати. □

Кажемо да је матрица A типа $n \times n$ над $\mathbb{R}$ *Лоренцова матрица* ако и само ако је њој придружено линеарно пресликавање $A : \mathbb{R}^{1,n-1} \to \mathbb{R}^{1,n-1}$ дефинисано са $A(x) = A\,x$ Лоренцова трансформација. Скуп свих Лоренцових матрица са матричним множењем чини *Лоренцову групу* $O(1, n-1)$ матрица $n \times n$. Из Тврђења 2.3 следи да је група $O(1, n-1)$ природно изоморфна групи Лоренцових трансформација из $\mathbb{R}^{1,n-1}$.[1]

Тврђење 2.4. *Нека је матрица A типа $n \times n$ над $\mathbb{R}$ и нека је J дијагонална матрица типа $n \times n$ која је дефинисана са $J = diag(-1, 1, \dots, 1)$.*
Тада су следећа тврђења еквивалентна:

1. *Матрица A је Лоренцова матрица.*

2. *Колоне матрице A формирају Лоренцову ортонормирану базу за* $\mathbb{R}^{1,n-1}$.

3. *Матрица A задовољава једнакост* $A^TJA = J$.

4. *Матрица A задовољава једнакост* $AJA^T = J$.

5. *Редови матрице A формирају Лоренцову ортонормирану базу за* $\mathbb{R}^{1,n-1}$.

Нека је A Лоренцова матрица. Из једнакости $A^TJA = J$ Бине-Кошијевом теоремом добијамо да је $(detA)^2 = 1$, тј. $detA = 1$ или $detA = -1$.

Већ смо рекли да временски вектор може бити позитиван или негативан. На основу тога можемо да разликујемо *позитивне* и *негативне* матрице A. Матрица A ће бити позитивна ако и само ако позитивне временске векторе пресликава у позитивне временске векторе. Слично се дефинишу и негативне матрице.

Дакле, поред Лоренцове групе $O(1, n-1)$ постоје још:

Специјална Лоренцова група - Скуп свих матрица A из $O(1, n-1)$ таквих да је $detA = 1$ и означавамо је са $SO(1, n-1)$.

Позитивна Лоренцова група - Скуп свих позитивних матрица A из $O(1, n-1)$ и означавамо је са $PO(1, n-1)$.

Позитивна специјална Лоренцова група - Скуп свих позитивних матрица A из $SO(1, n-1)$ и означавамо је са $PSO(1, n-1)$.

Нека су $x, y \in \mathbb{R}^{1,n-1}$. Кажемо да су x и y Лоренц-ортогонални вектори ако и само ако је $x \circ y = 0$.

Тврђење 2.5. *Нека су x и y Лоренц-ортогонални не-нула вектори из* $\mathbb{R}^{1,n-1}$. *Ако је x временски вектор, онда је y просторни вектор.*

Доказ.

Пошто су x и y Лоренц-ортогонални не-нула вектори, имамо да је $x \circ y = 0$. Како је још x временски вектор, по тврђењу 2.1 добијамо да y не може бити ни временски ни светлосни вектор. Дакле, мора бити просторни. □

Тврђење 2.6. *Нека су $x, y \in \mathbb{R}^{1,n-1}$ временски вектори исте временске оријентације. Тада је $x \circ y \leq \|x\| \, \|y\|$. Једнакост ће важити ако и само ако су x и y линеарно зависни вектори.*

Нека су $x, y \in \mathbb{R}^{1,n-1}$ временски вектори исте временске оријентације. Из Тврђења 2.6 закључујемо да постоји јединствен ненегативан реалан број $\eta(x, y)$ такав да важи

$$x \circ y = \|x\| \, \|y\| \, cosh\, \eta(x, y). \tag{2.1}$$

Лоренцов временски угао између временских вектора x и y дефинишемо са $\eta(x, y)$.

Лоренцов векторски производ

Нека су $x, y \in \mathbb{R}^{1,2}$ и нека је $J = diag(-1, 1, 1)$. *Лоренцов векторски производ* вектора x и y дефинишемо као

$$x \otimes y = J(x \times y).$$

Вектор $x \otimes y$ је Лоренц-ортогоналан и на x и y јер важи:

$$x \circ (x \otimes y) = x \circ J(x \times y) = x \cdot (x \times y) = 0,$$

$$y \circ (x \otimes y) = y \circ J(x \times y) = y \cdot (x \times y) = 0.$$

У наставку наводимо неке од особина Лоренцовог векторског производа.

Тврђење 2.7. *Нека су $x, y, z, w \in \mathbb{R}^{1,2}$. Тада је:*

1. $x \otimes y = -y \otimes x$
2. $(x \otimes y) \circ z = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$
3. $x \otimes (y \otimes z) = (x \circ y)z - (z \circ x)y$
4. $(x \otimes y) \circ (z \otimes w) = \begin{vmatrix} x \circ w & x \circ z \\ y \circ w & y \circ z \end{vmatrix}$

Тврђење 2.8. *Нека су $x, y \in \mathbb{R}^{1,2}$ линеарно независни временски вектори исте временске оријентације. Тада је $x \otimes y$ просторни вектор и важи*

$$\|x \otimes y\| = -\|x\| \, \|y\| \, sinh\, \eta(x, y).$$

Доказ. Из Тврђења 2.7(4) и идентитета $cosh^2x - sinh^2x = 1$ добијамо:

$$\begin{aligned}\|x \otimes y\|^2 &= (x \circ y)^2 - \|x\|^2 \|y\|^2 \\ &= \|x\|^2 \|y\|^2 cosh^2\eta(x,y) - \|x\|^2 \|y\|^2 \\ &= \|x\|^2 \|y\|^2 (cosh^2\eta(x,y) - 1) \\ &= \|x\|^2 \|y\|^2 sinh^2\eta(x,y).\end{aligned}$$

Добили смо да је $\|x \otimes y\|^2 > 0$. Дакле, $x \otimes y$ је просторни вектор. □

Тврђење 2.9. *Нека су $x, y \in \mathbb{R}^{1,2}$ просторни вектори. Тада је:*

1. $|x \circ y| < \|x\| \|y\|$ *ако и само ако је $x \otimes y$ временски вектор.*
2. $|x \circ y| = \|x\| \|y\|$ *ако и само ако је $x \otimes y$ светлосни вектор.*
3. $|x \circ y| > \|x\| \|y\|$ *ако и само ако је $x \otimes y$ просторни вектор.*

Доказ. Из Тврђења 2.7(4) добијамо: $\|x \otimes y\|^2 = (x \circ y)^2 - \|x\|^2 \|y\|^2$.

$x \otimes y$ је временски вектор акко важи $\|x \otimes y\|^2 < 0$, тј. $(x \circ y)^2 - \|x\|^2 \|y\|^2 < 0$.

Слично када је $x \otimes y$ светлосни и просторни вектор. □

Хиперболички n-димензионални простор

Сфера $\mathcal{S}^n$ је скуп свих тачака из $\mathbb{R}^{n+1}$ чија је норма једнака 1, где је норма дефинисана помоћу стандардног скаларног производа. Слично, можемо да дефинишемо $\mathcal{F}^n$ као скуп свих тачака из $\mathbb{R}^{1,n}$ чија је Лоренцова норма једнака -1.[3] Приметимо да је $\mathcal{F}^n$ двограни хиперболоид задат једначином

$$x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_n^2 = 1.$$

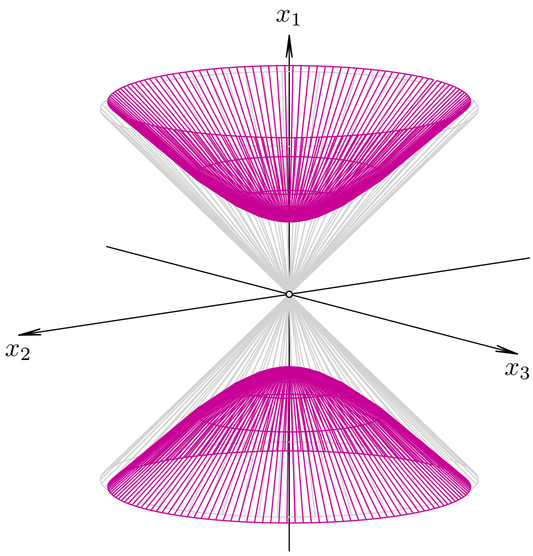
Хиперболоидни модел $\mathcal{H}^n$ хиперболичког n-димензионалног простора је позитиван део хиперболоида $\mathcal{F}^n$, тј. горња грана хиперболоида. Видети слику 2.2.

Нека су x и y тачке на $\mathcal{H}^n$, односно позитивни временски вектори из $\mathbb{R}^{1,n}$, и нека је $\eta(x,y)$ Лоренцов временски угао између x и y. *Хиперболичко растојање* између x и y дефинишемо као реалан број

$$d_h = \eta(x,y).$$

Како важи $x \circ y = \|x\| \|y\| \, cosh \, \eta(x,y)$, добијамо да је

$$cosh \, d_h(x,y) = -x \circ y.$$



Слика 2.2: Хиперболоид $\mathcal{F}^2$ унутар светлосног конуса $\mathcal{C}^2$

Функција хиперболичког растојања d_h је метрика на $\mathcal{H}^n$.[1]

Тврђење 2.10. *За сваку позитивну Лоренцову трансформацију из* $\mathbb{R}^{1,n}$ *можемо извршити рестрикцију на изометрију из* $\mathcal{H}^n$ *и сваку изометрију из* $\mathcal{H}^n$ *можемо проширити до јединствене позитивне Лоренцове трансофмације из* $\mathbb{R}^{1,n}$.

Из претходног тврђења закључујемо да је група изометрија хиперболоидног модела $I(\mathcal{H}^n)$ изоморфна позитивној Лоренцовој групи $PO(1,n)$.

Хиперболичка права

Хиперболичку праву у хиперболоидном моделу $\mathcal{H}^n$ дефинишемо као пресек хиперболоида $\mathcal{H}^n$ и дводимензионалног временског потпростора од $\mathbb{R}^{1,n}$.

Нека су x и y различите тачке на $\mathcal{H}^n$. Тада x и y разапињу дводимензионални временски потпростор $V(x,y)$ од $\mathbb{R}^{1,n}$. У пресеку $V(x,y)$ и $\mathcal{H}^n$ се налази хиперболичка права $L(x,y)$. $L(x,y)$ је јединствена хиперболичка права која садржи x и y. Приметимо још да је $L(x,y)$ једна грана хиперболе.

Хиперравни

Хиперраван у хиперболоидном моделу $\mathcal{H}^n$ дефинишемо као пресек хиперболоида $\mathcal{H}^n$ и n-димензионалног временског потпростора од $\mathbb{R}^{1,n}$.

Нека је x просторни вектор из $\mathbb{R}^{1,n}$. *Лоренцов комплемент* векторског потпростора $\langle x\rangle$ који је разапет вектором x је n-димензионални временски потпростор од $\mathbb{R}^{1,n}$. Добијамо да је $\mathcal{P} = \langle x\rangle^L \cap \mathcal{H}^n$ хиперраван на $\mathcal{H}^n$. За $\mathcal{P}$ кажемо да је хиперраван[2] која је Лоренц-ортогонална на x.[1]

Тврђење 2.11. *Нека су $x, y \in \mathbb{R}^{1,n}$ линеарно независни просторни вектори и нека су $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ хиперравни које су редом Лоренц-ортогоналне на x и y. Тада су следећа тврђења еквивалентна:*

1. *Вектори x и y задовољавају неједнакост $|x \circ y| < \|x\|\,\|y\|$.*
2. *Вектори x и y разапињу просторни потпростор $V(x, y)$.*
3. *Хиперравни $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ се секу.*

Доказ.

(1. $\Rightarrow$ 2.) Нека су $a, b > 0$. Тада је:

$$\begin{aligned}\|ax+by\|^2 &= \|ax\|^2 + 2ab(x\circ y) + \|by\|^2\\ &> \|ax\|^2 - 2|ab|\,\|x\|\,\|y\| + \|by\|^2\\ &= (\|ax\| - \|by\|)^2\\ &\geq 0.\end{aligned}$$

Дакле, добили смо да је $V(x, y)$ просторни потпростор.

(2. $\Rightarrow$ 1.) За просторне векторе важи $\|x\|^2 > 0$. $V(x, y)$ је просторни потпростор, тј. сви не-нула вектори су просторни. Закључујемо да је Лоренцов скаларни производ позитивно дефинитан на $V(x, y)$ па важи Коши-Шварцова неједнакост.

(2. $\Leftrightarrow$ 3.) Зато што важи $V^L = \langle x\rangle^L \cap \langle y\rangle^L$. □

Нека су x и y просторни вектори из $\mathbb{R}^{1,n}$ такви да разапињу просторни потпростор. Из Тврђења 2.11 имамо да је $|x\circ y| \leq \|x\|\,\|y\|$, где ће једнакост важити ако су x и y линеарно зависни. Дакле, постоји јединствен реалан број $\eta(x, y)$ између 0 и π такав да је

$$x \circ y = \|x\|\,\|y\|\, cos\,\eta(x, y). \tag{2.2}$$

[2] Подразумева се да је реч о хиперравани на $\mathcal{H}^n$.

Лоренцов просторни угао између просторних вектора x и y дефинишемо са $\eta(x, y)$.

Нека су $\lambda, \mu : \mathbb{R} \to \mathcal{H}^n$ геодезијске линије такве да је $\lambda(0) = \mu(0)$. Тада $\lambda'(0)$ и $\mu'(0)$ разапињу просторни потпростор од $\mathbb{R}^{1,n}$. *Хиперболички угао* између λ и μ дефинишемо као Лоренцов просторни угао између $\lambda'(0)$ и $\mu'(0)$.

Нека је $\mathcal{P}$ хиперраван на $\mathcal{H}^n$ и нека је $\lambda : \mathbb{R} \to \mathcal{H}^n$ геодезијска линија таква да је $\lambda(0)$ у $\mathcal{P}$. Тада за хиперболичку праву $L = \lambda(\mathbb{R})$ кажемо да је *Лоренц-ортогонална* на хиперраван $\mathcal{P}$ ако и само ако је $\mathcal{P}$ Лоренц-ортогонална на $\lambda'(0)$.

Тврђење 2.12. *Нека су $x, y \in \mathbb{R}^{1,n}$ линеарно независни просторни вектори и нека су $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ хиперравни које су редом Лоренц-ортогоналне на x и y. Тада су следећа тврђења еквивалентна:*

1. *Вектори x и y задовољавају неједнакост $|x \circ y| > \|x\| \, \|y\|$.*
2. *Вектори x и y разапињу временски потпростор $V(x, y)$.*
3. *Хиперравни $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ су дисјунктне и постоји хиперболичка права која је Лоренц-ортогонална на обе хиперравни.*

Доказ.

(1. $\Leftrightarrow$ 2.) Нека су $a, b > 0$. Тада је:

$$\begin{aligned}\|ax + by\|^2 &= \|ax\|^2 + 2ab(x \circ y) + \|by\|^2 \\ &= a^2 \|x\|^2 + 2ab(x \circ y) + b^2 \|y\|^2 \\ &= \left(\frac{a}{b}\right)^2 + 2\frac{a}{b}(x \circ y) + \|y\|^2\end{aligned}$$

Видимо да је претходна једначина квадратна по $t = \frac{a}{b}$ и добијамо да она има негативна решења акко је њена дискриминанта позитивна, тј.

$$4(x \circ y)^2 - 4\|x\| \, \|y\| \geq 0.$$

(2. $\Rightarrow$ 3.) V је временски потпростор па је V^L просторни потпростор. Из $V^L = \langle x \rangle^L \cap \langle y \rangle^L$ добијамо да су $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ дисјунктне хиперравни. Приметимо да је $V \cap \mathcal{H}^n$ хиперболичка права, означимо је са N.

Приметимо још да је $V \cap \langle x \rangle^L$ једнодимензионалан потпростор од $\mathbb{R}^{1,n}$ и да важи:

$$(tx + y) \circ x = 0.$$

Одавде можемо да израчунамо t:

$$t = -\frac{x \circ y}{\|x\|^2}.$$

Па добијамо да је:

$$\begin{aligned}
\|tx + y\|^2 &= t^2 \|x\|^2 + 2t(x \circ y) + \|y\|^2 \\
&= -\frac{(x \circ y)^2}{\|x\|^2} + \|y\|^2 \\
&< 0.
\end{aligned}$$

Можемо да закључимо да је $V \cap \langle x \rangle^L$ временски потпростор. Добијамо још да N сече $\mathcal{P}$ у тачки:

$$u = \frac{-\dfrac{x \circ y}{\|x\|} x + \|x\| y}{\pm\sqrt{(x \circ y)^2 - \|x\|^2 \|y\|^2}}.$$

Знак бирамо тако да u буде позитиван временски вектор.

Слично добијамо да N сече $\mathcal{Q}$ у тачки:

$$v = \frac{\|y\| x - \dfrac{x \circ y}{\|y\|} y}{\pm\sqrt{(x \circ y)^2 - \|x\|^2 \|y\|^2}}.$$

Нека је $\lambda : \mathbb{R} \to \mathcal{H}^n$ геодезијска линија таква да је $\lambda(0) = u$ и $\lambda(\mathbb{R}) = N$. Како су $\lambda'(0)$ и x Лоренц-ортогонални на V у тачки u, добијамо да је $\lambda'(0)$ умножак вектора x скаларом. Дакле, хиперболичка права N је Лоренц-ортогонална на хиперраван $\mathcal{P}$. Слично добијамо да је N Лоренц-ортогонална на хиперраван $\mathcal{Q}$.

(3. $\Rightarrow$ 2.) Нека је N хиперболичка права која је Лоренц-ортогонална на хиперравни $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$. Тада постоји дводимензионални временски потпростор W од $\mathbb{R}^{1,n}$ такав да је $N = W \cap \mathcal{H}^n$.

Пошто је хиперболичка права N Лоренц-ортогонална на $\mathcal{P}$, закључујемо да је $x \in W$. Слично закључујемо да је и $y \in W$. Одавде добијамо да је $W = V$ и да је V такође временски векторски потпростор. $\square$

Из Тврђења 2.12 видимо да постоји јединствена хиперболичка права N која је Лоренц-ортогонална на дисјунктне хиперравни $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$. Штавише, ако су x и y просторни вектори из $\mathbb{R}^{1,n}$ редом Лоренц-ортогонални на хиперравни $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$, тада су x и y тангетни вектори на N.

Нека су x и y просторни вектори из $\mathbb{R}^{1,n}$ такви да разапињу временски потпростор. Из Тврђења 2.12 имамо да важи $|x \circ y| > \|x\| \, \|y\|$ па добијамо да постоји јединствен позитиван реалан број $\eta(x, y)$ такав да је

$$|x \circ y| = \|x\| \, \|y\| \, cosh \, \eta(x, y). \tag{2.3}$$

Лоренцов временски угао између просторних вектора x и y дефинишемо као $\eta(x, y)$.

Тврђење 2.13. *Нека су x и y просторни вектори из $\mathbb{R}^{1,n}$ такви да разапињу временски потпростор и нека су $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ хиперравни на $\mathcal{H}^n$ такве да су редом Лоренц-ортогоналне на x и y. Тада хиперболичко растојање $\eta(x, y)$ између $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ меримо дуж хиперболичке праве N која је Лоренц-ортогонална на $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$. Још, $x \circ y < 0$ ако и само ако су x и y супротно оријентисани тангетни вектори на N.*

Доказ. У Тврђењу 2.12 смо показали да хиперболичка права N која је заједничка нормала за хиперравни $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ сече $\mathcal{P}$ у тачки u, а $\mathcal{Q}$ у тачки v.

$$u = \frac{-\dfrac{x \circ y}{\|x\|} x + \|x\| \, y}{\pm\sqrt{(x \circ y)^2 - \|x\|^2 \, \|y\|^2}}; \qquad v = \frac{\|y\| \, x - \dfrac{x \circ y}{\|y\|} y}{\pm\sqrt{(x \circ y)^2 - \|x\|^2 \, \|y\|^2}}.$$

Израчунајмо растојање између u и v:

$$\begin{aligned}
cosh \, d_h(u, v) &= -u \circ v \\
&= -\frac{-(x \circ y) \, \|x\| \, \|y\| + \dfrac{(x \circ y)^3}{\|x\| \, \|y\|}}{\pm((x \circ y)^2 - \|x\|^2 \, \|y\|^2)} \\
&= -\frac{-(x \circ y) \, \|x\|^2 \, \|y\|^2 + (x \circ y)^3}{\pm((x \circ y)^2 - \|x\|^2 \, \|y\|^2) \, \|x\| \, \|y\|} \\
&= -\frac{(x \circ y)((x \circ y)^2 - \|x\|^2 \, \|y\|^2)}{\pm((x \circ y)^2 - \|x\|^2 \, \|y\|^2) \, \|x\| \, \|y\|} \\
&= -\frac{x \circ y}{\pm \, \|x\| \, \|y\|} \\
&= \frac{|x \circ y|}{\|x\| \, \|y\|} \\
&= cosh \, \eta(x, y).
\end{aligned}$$

Вектори u и v ће бити истог знака ако и само ако важи $x \circ y < 0$. Приметимо још да се вектори u и v налазе у дводимензионалном временском потпростору V који је разапет векторима x и y. Штавише, u и v се налазе између x и y или $-x$ и $-y$ једино ако је коефицијент $-x \circ y$ за u и v позитиван. Одавде добијамо да су x и y тангетни вектори на N ако и само ако је $x \circ y < 0$. □

Нека су x и y просторни вектори из $\mathbb{R}^{1,n}$ и нека су $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ хиперравни на $\mathcal{H}^n$ које су редом Лоренц-ортогоналне на x и y. За $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ кажемо да се *срећу у бесконачности* ако и само ако је $\langle x \rangle^L \cap \langle y \rangle^L$ светлосни потпростор.

Тврђење 2.14. *Нека су $x, y \in \mathbb{R}^{1,n}$ линеарно независни просторни вектори и нека су $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ хиперравни које су редом Лоренц-ортогоналне на x и y. Тада су следећа тврђења еквивалентна:*

1. *Вектори x и y задовољавају једнакост $|x \circ y| = \|x\| \, \|y\|$.*

2. *Вектори x и y разапињу светлосни потпростор $V(x, y)$.*

3. *Хиперравни $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ се срећу у бесконачности.*

Доказ.

(1. $\Leftrightarrow$ 2.) Ову еквиваленцију добијамо зато што важе тврђења 2.11 и 2.12.

(2. $\Leftrightarrow$ 3.) Зато што важи $V^L = \langle x \rangle^L \cap \langle y \rangle^L$. □

Тврђење 2.15. *Нека су $x, y \in \mathbb{R}^{1,n}$ линеарно независни просторни вектори такви да разапињу светлосни потпростор V. Тада је $x \circ y < 0$ ако и само ако су x и y на супротним странама једнидимензионалног светлосног потпростора од V.*

Доказ. Једначина $\|tx + y\| = 0$ је еквивалентна једначини:

$$t^2 \|x\|^2 + 2(x \circ y)t + \|y\|^2 = 0.$$

Из Тврђења 2.14 добијамо да претходна једначина има јединствено решење:

$$t = -\frac{x \circ y}{\|x\|^2}.$$

Приметимо да се светлосни вектор

$$u = -\frac{x \circ y}{\|x\|^2} x + y$$

у потпростору V налази између вектора x и y ако и само ако је $x \circ y < 0$. Одавде закључујемо да ће вектори x и y бити са супротних страна једнодимензионалног светлосног потпростора од V ако и само ако важи $x \circ y < 0$. $\square$

Нека је x просторни вектор и y позитиван временски вектор из $\mathbb{R}^{1,n}$. Тада постоји ненегативан реалан број $\eta(x, y)$ такав да је

$$|x \circ y| = \|x\| \, |||y||| \, sinh \, \eta(x, y). \tag{2.4}$$

Лоренцов временски угао између просторног вектора x и временског вектора y дефинишемо као $\eta(x, y)$.

Тврђење 2.16. *Нека је $x \in \mathbb{R}^{1,n}$ просторни и $y \in \mathbb{R}^{1,n}$ позитиван временски вектор. Нека је још хиперраван $\mathcal{P}$ Лоренц-ортогонална на x. Тада хиперболичко растојање $\eta(x, y)$ од $\frac{y}{|||y|||}$ до хиперравни $\mathcal{P}$ меримо дуж хиперболичке праве N која је Лоренц-ортогонална на $\mathcal{P}$ и садржи $\frac{y}{|||y|||}$. Још, важи да је $x \circ y < 0$ ако и само ако су x и y на супротним странама хиперравни на $\mathbb{R}^{1,n}$ коју разапиње $\mathcal{P}$.*

Доказ. У Тврђењу 2.12 смо показали да хиперболичка права N сече хиперраван $\mathcal{P}$ у тачки u:

$$u = \frac{-\dfrac{x \circ y}{\|x\|} x + \|x\| \, y}{\pm\sqrt{(x \circ y)^2 - \|x\|^2 \, \|y\|^2}}.$$

Нека је $v = \dfrac{y}{|||y|||}$. Тада је:

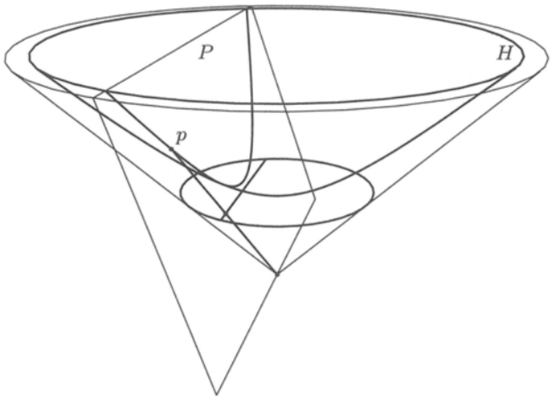
$$\begin{aligned} cosh \, d_h(u, v) &= -u \circ v \\ &= \frac{\sqrt{(x \circ y)^2 - \|x\|^2 \, \|y\|^2}}{\|x\| \, |||y|||} \\ &= cosh \, \eta(x, y). \end{aligned}$$

Из претходног рачуна можемо закључити да је вектор u позитиван. Приметимо још да се u налази у дводимензионалном временском потпростору V који је разапет векторима x и y. Штавише, вектор u ће се наћи између вектора x и y ако и само ако је коефицијент $-x \circ y$ за u позитиван. Дакле, x и y се налазе са супротних страна хиперравни од $\mathbb{R}^{1,n}$ разапете са $\mathcal{P}$ ако и само ако је $x \circ y < 0$. $\square$

Изометрија хиперболоидног и Клајновог модела

Клајнов модел можемо уочити у $\mathbb{R}^{1,2}$. Видети слику 2.3[3]. То је јединични диск хиперравни $x_1 = 1$, тј.

$$\mathcal{K} = \Big\{ X_k = (x_1, x_2, x_3) |\ x_2^2 + x_3^2 < 1,\ x_1 = 1 \Big\}.$$



Слика 2.3: Изометрија хиперболоидног и Клајновог модела

Изометрија хиперболоидног и Клајновог модела је централна пројекција из координатног почетка хиперболоида $\mathcal{H}^{1,2}$ на јединични круг $\mathcal{K}$

$$(x_1, x_2, x_3) \to \left(1, \frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}\right). [4]$$

Нека су X_h, Y_h тачке на хиперболоиду $\mathcal{H}^{1,2}$ и нека су X_k, Y_k слике тих тачака на $\mathcal{K}$. Треба да проверимо да ли ово пресликавање чува растојања, тј. да ли важи:

$$d_h(X_h, Y_h) = d_k(X_k, Y_k).$$

Растојање између тачака A и B у Клајновом моделу рачунамо као:

$$d_k(A, B) = \frac{1}{2} \left| ln \big[ABPQ \big] \right|,$$

где су тачке P и Q пресек праве AB са апсолутом. [2]

[3]Слика је преузета из [5].

Покажемо да једнакост важи за тачке X_h, Y_h у равни O_{x_1,x_2}. Њихове слике, тачке X_k и Y_k, такође ће бити у равни O_{x_1,x_2}. Довољно је да покажемо да једнакост важи у овом случају јер произвољан пар тачака можемо да пресликамо у пар тачака равни O_{x_1,x_2} користећи изометрије ових модела.

Нека су:

$$X_h = (cosh\, t_x, sinh\, t_x, 0),$$

$$Y_h = (cosh\, t_y, sinh\, t_y, 0).$$

Тада су:

$$X_k = \Big(1, \frac{x_2}{x_1}, 0\Big) = \Big(1, \frac{sinh\, t_x}{cosh\, t_x}, 0\Big),$$

$$Y_k = \Big(1, \frac{y_2}{y_1}, 0\Big) = \Big(1, \frac{sinh\, t_y}{cosh\, t_y}, 0\Big).$$

И нака су тачке P и Q пресеци праве X_kY_k и апсолуте такве да важи распоред $Q - X_k - Y_k - P$, tj. $P = (1, 1, 0)$ и $Q = (1, -1, 0)$.

Добијамо да је:

$$\begin{aligned}\big[X_kY_kPQ\big] &= \frac{X_kP}{PY_k} : \frac{X_kQ}{QY_k}\\ &= \frac{tanh\, t_x - 1}{tanh\, t_x + 1} : \frac{tanh\, t_y - 1}{tanh\, t_y + 1}\\ &= e^{-2t_x} : e^{-2t_y}\\ &= e^{2(t_y - t_x)}.\end{aligned}$$

Логаритмовањем обе стране претходне једначине имамо да је:

$$ln\big[X_kY_kPQ\big] = 2(t_y - t_x)$$

$$\frac{1}{2}\,\big|ln\big[X_kY_kPQ\big]\big| = |(t_y - t_x)|$$

$$d_k(X_k, Y_k) = d_h(X_h, Y_h).$$

Показали смо да пресликавање чува растојања , тј. да је изометрија између ова два модела.

Глава 3

Правоугли шестоуглови

Хиперболички троуглови

Нека су x, y, z три неколинеарне тачке на $\mathcal{H}^2$. Нека је $H(x, y, z)$ затворена полураван на $\mathcal{H}^2$ која је одређена јединственом хиперболичком правом $L(x, y)$, која садржи тачке x и y, и тачком z која је у њеној унутрашњости. На сличан начин добијамо полуравни $H(y, z, x)$ и $H(z, x, y)$.
Хиперболички троугао одређен трима тачкама x, y, z дефинишемо као:

$$T(x, y, z) = H(x, y, z) \cap H(y, z, x) \cap H(z, x, y).$$

Тврђење 3.1. *Нека су α, β, γ углови хиперболичког троугла $T(x, y, z)$. Тада је:*

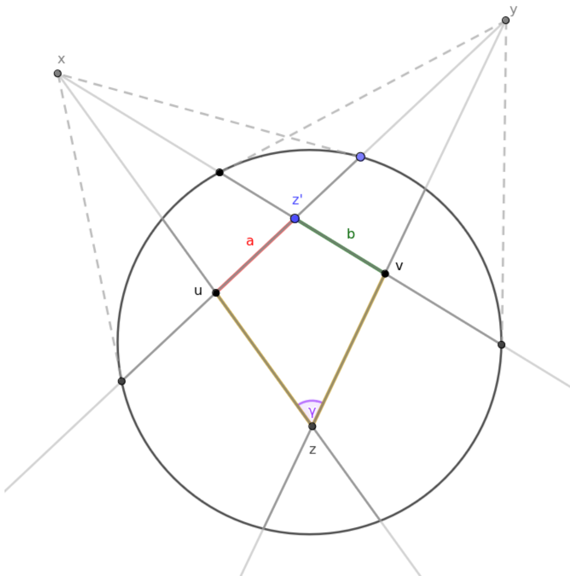
1. $\eta(z \otimes x, x \otimes y) = \pi - \alpha$
2. $\eta(x \otimes y, y \otimes z) = \pi - \beta$
3. $\eta(y \otimes z, z \otimes x) = \pi - \gamma$

Хиперболички четвороуглови

Теорема 3.1. *Нека је $\mathcal{Q}$ хиперболички конвексан четвороугао са три права угла и четвртим углом γ и нека су a и b дужине ивица које се налазе наспрам угла γ. Тада је:*

$$cos\, \gamma = sinh\, a\, sinh\, b.$$

Доказ. Нека су x и y просторни вектори који су редом Лоренц-ортогонални на ивице a и b четвороугла $\mathcal{Q}$. Нека је код темена z четвороугла $\mathcal{Q}$ угао γ, а теме



Слика 3.1: Хиперболички четвороугао са три права угла [11]

z' је наспрам угла γ. Означимо са u и v преостала два темена четвороугла $\mathcal{Q}$ тако да се u налази између x и z, а v између y и z. Видети слику 3.1.

Из Тврђења 3.1 имамо да је:

$$\eta(v \otimes z, z \otimes u) = \pi - \gamma.$$

Односно

$$\eta(y \otimes z, z \otimes x) = \pi - \gamma.$$

Нека је још:

$$x' = \frac{y \otimes z}{\|y \otimes z\|}, \qquad y' = \frac{z \otimes x}{\|z \otimes x\|}.$$

Одавде добијамо да је:

$$x = \frac{y' \otimes z'}{\|y' \otimes z'\|}, \qquad y = \frac{z' \otimes x'}{\|z' \otimes x'\|}.$$

Из Тврђења 2.7 (4) имамо да је:

$$(y' \otimes z') \circ (z' \otimes x') = \begin{vmatrix} y' \circ x' & y' \circ z' \\ z' \circ x' & z' \circ z' \end{vmatrix}.$$

Пошто је између просторних вектора x и y прав угао, имамо да је 0 са леве стране претходне једначине.

Применом Тврђења 2.16 на претходну једнакост добијамо да је:

$$0 = -cos(\pi - \gamma) - sinh\, a\; sinh\, b.$$

Што је и требало показати. □

Хиперболички петоуглови

Теорема 3.2. *Нека је $\mathcal{P}$ хиперболички конвексан петоугао са четири права угла и петим углом γ. Нека је још c' дужина ивице петоугла која се налази наспрам угла γ и нека су a и b дужине ивица које су суседне ивици дужине c'. Тада је:*

$$cosh\, c' = \frac{cosh\, a\; cosh\, b + cos\, \gamma}{sinh\, a\; sinh\, b}.$$

Штавише, ова једначина важи чак и када је теме петоугла $\mathcal{P}$ са углом γ у бесконачности.

Доказ. Нека је код темена z петоугла $\mathcal{P}$ угао γ.

Претпоставимо је теме z коначно.

Нека су x, y, z' јединични просторни вектори који су редом Лоренц-ортогонални на ивице a, b, c' петоугла $\mathcal{P}$. Означимо са u и v темена петоугла $\mathcal{P}$ тако да се u налази између x и z, а v између y и z. Видети слику 3.2.

Из Тврђења 3.1 имамо да је:

$$\eta(v \otimes z, z \otimes u) = \pi - \gamma.$$

Односно

$$\eta(y \otimes z, z \otimes x) = \pi - \gamma.$$

Нека је још:

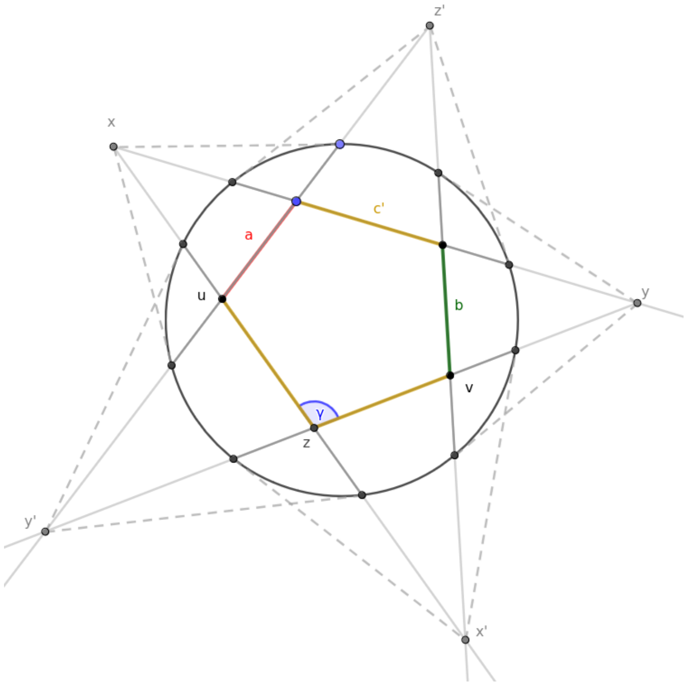
$$x' = \frac{y \otimes z}{\|y \otimes z\|}, \qquad y' = \frac{z \otimes x}{\|z \otimes x\|}.$$

Одавде добијамо да је:

$$x = \frac{y' \otimes z'}{\|y' \otimes z'\|}, \qquad y = \frac{z' \otimes x'}{\|z' \otimes x'\|}.$$

Из Тврђења 2.7 (4) имамо да је:

$$(y' \otimes z') \circ (z' \otimes x') = \begin{vmatrix} y' \circ x' & y' \circ z' \\ z' \circ x' & z' \circ z' \end{vmatrix}.$$



Слика 3.2: Хиперболички петоугао са четири права угла [12]

И добијамо да је

$$-sinh\, a\; sinh\, b\; cosh\, c' = -cos\, \gamma - cosh\, a\; cosh\, b.$$

Нека се z налази у бесконачности, тј. z је светлосни вектор и нека за x' и y' важи дефиниција коју смо већ увели.

Приметимо да x' и y' разапињу потпростор V који садржи вектор z. Приметимо још да z разапиње једнодимензионални светлосни потрпостор од V и да се вектори x' и y' налазе са супротних страна тог потрпостора.

Из Тврђења 2.14 и 2.15 добијамо да је $x' \circ y' = -1$ па важи:

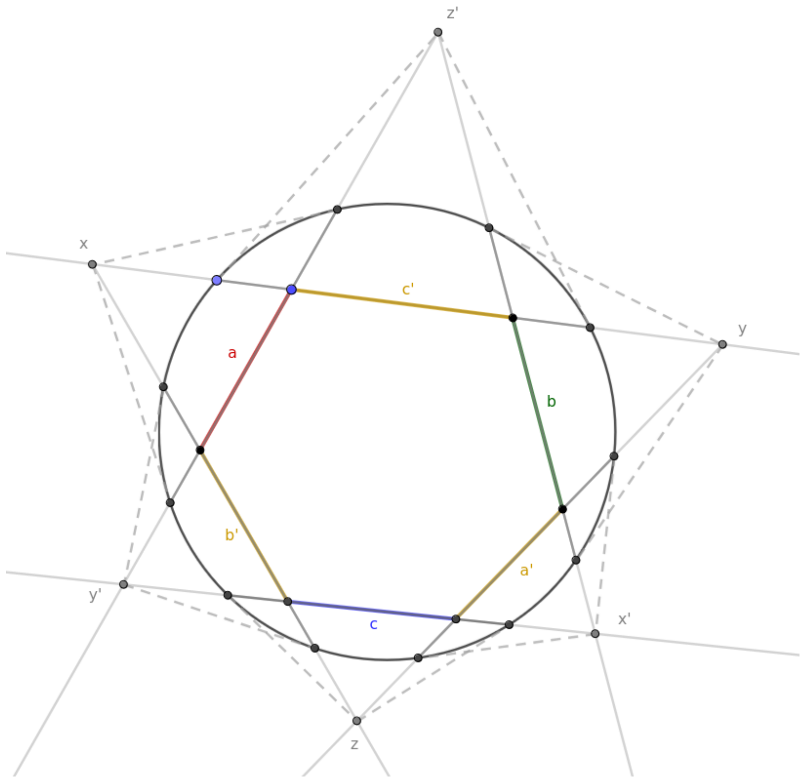
$$-sinh\, a\; sinh\, b\; cosh\, c' = -1 - cosh\, a\; cosh\, b.$$

$\square$

Правоугли хиперболички шестоуглови

Нека је $\mathcal{H}$ правоугли шестоугао у Клајновом моделу. Претпоставимо да се центар јединичног диска налази унутар $\mathcal{H}$ и да ниједна ивица правоуглог шестоугла не налази на пречнику диска. Ако шестоугао не испуњава наведене услове, можемо да га пресликамо тако да они важе.[2]

Праве на којима се налазе три наизменичне ивице правоуглог шестоугла се секу ван јединичног диска у тачкама x, y и z. И праве на којима се налазе остале три ивице правоуглог шестоугла се секу у тачкама x', y' и z', такође ван јединичног диска. Видети слику 3.3.



Слика 3.3: Правоугли хиперболички шестоугао [13]

У Клајновом моделу, права q ће бити нормална на праву p ако и само ако еуклидска права на којој се налази q садржи пол праве p у односу на апсолуту.[2]
Одавде добијамо:
Да би права $z'y'$ била нормална на праву xy, она мора да садржи пол h-праве коју образује права xy. Пошто права $z'x'$ такође мора да буде нормална на праву xy, закључујемо да је z' заправо пол h-праве коју образује права xy.[2]
Слично добијамо за x' и y'.

Дакле, тачке x', y', z' су одређене тачкама x, y, z.

У Хиперболоидном моделу $\mathcal{H}^2$ x, y, z можемо представити као јединичне просторне векторе, док x', y', z' представљамо као:

$$x' = \frac{y \otimes z}{\|y\|\,\|z\|}, \qquad y' = \frac{x \otimes z}{\|x\|\,\|z\|}, \qquad z' = \frac{x \otimes y}{\|x\|\,\|y\|}.$$

Тврђење 3.2. *Нека су $x, y \in \mathbb{R}^{1,2}$ просторни вектори. Ако је $x \otimes y$ просторни вектор, тада је:*

$$\|x \otimes y\| = \|x\|\,\|y\|\, sinh\, \eta(x, y).$$

Доказ. У Тврђењу 2.9 смо показали да је $x \otimes y$ просторни вектор ако и само ако је $|x \circ y| > \|x\|\,\|y\|$. Из Тврђења 2.12 (1. $\Leftrightarrow$ 2.) имамо да вектори x и y разапињу временски потпростор па норму рачунамо на следећи начин:

$$|x \circ y| = \|x\|\,\|y\|\, cosh\, \eta(x, y).$$

Из Тврђења 2.7(4) и идентитета $cosh^2 x - sinh^2 x = 1$ добијамо:

$$\begin{aligned}
\|x \otimes y\|^2 &= (x \circ y)^2 - \|x\|^2\,\|y\|^2 \\
&= \|x\|^2\,\|y\|^2\, cosh^2\eta(x, y) - \|x\|^2\,\|y\|^2 \\
&= \|x\|^2\,\|y\|^2\,(cosh^2\eta(x, y) - 1) \\
&= \|x\|^2\,\|y\|^2\, sinh^2\eta(x, y).
\end{aligned}$$

□

Теорема 3.3 (Синусна теорема за правоугле шестоуглове). *Нека су a, b, c дужине наизменичних ивица правоуглог шестоугла и нека су a', b', c' преостале три ивице. Тада је:*

$$\frac{sinh\, a}{sinh\, a'} = \frac{sinh\, b}{sinh\, b'} = \frac{sinh\, c}{sinh c'}.$$

Доказ. Из Тврђења 2.7 (3) и чињенице да је $z \otimes x$ Лоренц-ортогоналан на z и x имамо да је:

$$(z \otimes x) \otimes (x \otimes y) = -((z \otimes x) \circ y)x.$$

Слично добијамо да важи:

$$(x \otimes y) \otimes (y \otimes z) = -((x \otimes y) \circ z)y$$

$$(y \otimes z) \otimes (z \otimes x) = -((y \otimes z) \circ x)z.$$

Сада, применимо норму на претходне једначине. Израчунаћемо за прву. Приметимо да су вектори просторни и да можемо користити Тврђење 3.2 како бисмо израчунали њихову норму. На десну страну једначине примењујемо Тврђење 2.7 (2) и добијамо:

$$\|z\|\,\|x\|\, sinh\,\eta(z,x)\,\|x\|\,\|y\|\, sinh\,\eta(x,y)\; sinh\,\eta(z\otimes x, x\otimes y) = |y\circ(z\otimes x)|\,\|x\|\,.$$

$$\|x\|\,\|y\|\,\|z\|\, sinh\,\eta(z,x)\; sinh\,\eta(x,y)\; sinh\,\eta(z\otimes x, x\otimes y) = |(x\otimes y)\circ z|.$$

На исти начин добијамо и преостале две.

$$\|x\|\,\|y\|\,\|z\|\, sinh\,\eta(x,y)\; sinh\,\eta(y,z)\; sinh\,\eta(x\otimes y, y\otimes z) = |(x\otimes y)\circ z|.$$

$$\|x\|\,\|y\|\,\|z\|\, sinh\,\eta(y,z)\; sinh\,\eta(z,x)\; sinh\,\eta(y\otimes z, z\otimes x) = |(x\otimes y)\circ z|.$$

Пошто из Тврђења 2.13 имамо да важи,

$$a' = \eta(y,z) \quad b' = \eta(x,z) \quad c' = \eta(x,y)$$

$$a = \eta(y',z') \quad b = \eta(x',z') \quad c = \eta(x',y')$$

добијамо да је:

$$sinh\,b'\; sinh\,c'\; sinh\,a = \frac{|(x\otimes y)\circ z|}{\|x\|\,\|y\|\,\|z\|},$$

$$sinh\,c'\; sinh\,a'\; sinh\,b = \frac{|(x\otimes y)\circ z|}{\|x\|\,\|y\|\,\|z\|},$$

$$sinh\,a'\; sinh\,b'\; sinh\,c = \frac{|(x\otimes y)\circ z|}{\|x\|\,\|y\|\,\|z\|}.$$

Што је и требало показати. □

Теорема 3.4 (Косинусна теорема за правоугле шестоуглове). *Нека су a, b, c дужине наизменичних ивица правоуглог шестоугла и нека су a', b', c' преостале три ивице. Тада је:*

$$cosh\,c' = \frac{cosh\,a\; cosh\,b + cosh\,c}{sinh\,a\; sinh\,b}.$$

Доказ. Из Тврђења 2.7 (4) имамо да је:

$$(y\otimes z)\circ(z\otimes x) = \begin{vmatrix} y\circ x & y\circ z \\ z\circ x & z\circ z \end{vmatrix}.$$

Пошто из Тврђења 2.13 имамо да важи,

$$a' = \eta(y,z) \quad b' = \eta(x,z) \quad c' = \eta(x,y)$$

$$a = \eta(y', z') \quad b = \eta(x', z') \quad c = \eta(x', y')$$

па добијамо да је:

$$-sinh\, a'\, sinh\, b'\, cosh\, c = -cosh\, c' - cosh\, a'\, cosh\, b'.$$

Што је и требало показати. □

Из косинусне теореме за правоугле шестоуглове закључујемо да дужине трију наизменичних ивица одређују дужине трију преосталих.

Теорема 3.5. *Нека су a, b, c позитивни реални бројеви. Тада постоји јединствен до на изометрију правоугли хиперболички конвексан шестоугао чије су дужине наизменичних ивица редом a, b, c.*

Доказ. Нека је c' позитиван реалан број за који важи:

$$cosh\, c' = \frac{cosh\, a\, cosh\, b + cosh\, c}{sinh\, a\, sinh\, b}.$$

И нека је $S_{c'}$ дуж на $\mathcal{H}^2$ чија је дужина c'.

Конструишемо хиперболичке праве L_a и L_b тако да су Лоренц-ортогоналне на дуж $S_{c'}$ у њеним крајевима. На хиперболичким правама L_a и L_b измеримо редом дужине a и b са исте стране дужи $S_{c'}$. На тај начин смо добили дужи S_a и S_b.

Нека су $L_{b'}$ и $L_{a'}$ хиперболичке праве које су редом Лоренц-ортогоналне на хиперболичке праве L_a и L_b у крајевима дужи S_a и S_b мерећи од $S_{c'}$.

Треба да проверимо да ли хиперболичка права $L_{b'}$ сече дуж S_b. Када би дошло до тог пресека, добили бисмо четвороугао са три права угла и четврти угао γ би био наспрам ивица a и c'.

Из Теореме 3.1 добијамо да треба да проверимо да ли важи:

$$sinh\, a\, sinh\, c' = cos\, \gamma.$$

Користећи дефиницију за c' и идентитет $cosh^2\, x - sinh^2\, x = 1$ добијамо да је:

$$\begin{aligned}
sinh^2\, a\; sinh^2\, c' &= sinh^2\, a\; (cosh^2\, c' - 1)\\
&= sinh^2\, a\; \frac{(cosh\, a\; cosh\, b + cosh\, c)^2 - sinh^2\, a\; sinh^2\, b}{sinh^2\, a\; sinh^2\, b}\\
&= \frac{(cosh\, a\; cosh\, b + cosh\, c)^2 - (cosh^2\, a - 1)(cosh^2\, b - 1)}{sinh^2\, b}\\
&= \frac{cosh^2\, c + 2\, cosh\, a\; cosh\, b\; cosh\, c + cosh^2\, a + cosh^2\, b - 1}{sinh^2\, b}\\
&= \frac{cosh^2\, c + 2\, cosh\, a\; cosh\, b\; cosh\, c + cosh^2\, a}{sinh^2\, b} + 1\\
&> 1
\end{aligned}$$

што је контрадикција.
На сличан начин добијамо да хиперболичка права $L_{a'}$ не сече дуж S_a.

Сада треба да проверимо да ли се секу хиперболичке праве $L_{a'}$ и $L_{b'}$. Ако би се те две хиперболичке праве пресекле, чак и у бесконачности, добили бисмо петоугао са четири права угла и четвртим углом γ. Угао γ би се налазио наспрам ивице c', а ивице a и b су суседне ивици c'.

Из Теореме 3.2 добијамо да треба да проверимо да ли важи:

$$cosh\, c' = \frac{cosh\, a\; cosh\, b + cos\, \gamma}{sinh\, a\; sinh\, b}.$$

Видимо да је то контрадикција са нашом дефиницијом c' јер је $cosh\, c' > cosh\, \gamma$.

Из Тврђења 2.11, 2.12 и 2.14 добијамо да хиперболичке праве $L_{a'}$ и $L_{b'}$ имају заједничку нормалу L_c. На хиперболичкој правој L_c уочимо дуж S_c од пресека S_c са $L_{a'}$ до пресека S_c са $L_{b'}$. Знамо да израчунамо дужину дужи S_c, из Тврђења 2.13, и ту дужину означимо са d.
Добили смо правоугли шестоугао са наизменичним ивицама S_a, S_b и S_c. Из Косинусне теореме за правоугле шестоуглове добијамо да је:

$$cosh\, c' = \frac{cosh\, a\; cosh\, b + cosh\, d}{sinh\, a\; sinh\, b}.$$

Одавде закључујемо да је $d = c$. Дакле, добили смо правоугли шестоугао чије су дужине наизменичних ивица редом a, b, c. $\square$

Глава 4

Конструкција правоуглог шестоугла

У Теореми 3.5 смо показали да у хиперболичкој равни постоји јединствен, до на изометрију, правоугли конвексан шестоугао чије су дужине наизменичних ивица a, b, c унапред задате. У овом поглављу ћемо описати конструкцију таквог шестоугла у Клајновом моделу.

Нека су a, b, c произвољни позитивни реални бројеви.

1. Конструкција дужи $S_{c'}$

За почетак израчунајмо c' користећи Косинусну теорему за правоугле шестоуглове.

Сада изаберимо произвољну праву у Клајновом моделу на којој ће се наћи дуж $S_{c'}$ дужине c' и тачку A која ће бити један крај дужи $S_{c'}$. Пресеци те праве са апсолутом су тачке X_1 и Y_1 такве да важи распоред $Y_1 - A - B - X_1$.

Да бисмо добили дуж $S_{c'}$, потребно је још да конструишемо тачку B која је на изабраној правој од тачке A на удаљености c'. Користећи једначину за растојање у Клајновом моделу можемо да пронађемо положај тачке B. Видети слику 4.1.

2. Конструкција нормала на дуж $S_{c'}$

Конструишемо праве L_a и L_b које су нормалне на $S_{c'}$ у тачкама A и B. Да би праве L_a и L_b биле нормалне на $S_{c'}$, оне морају да садрже пол праве $S_{c'}$. Видети слику 4.2.

3. Конструкција дужи S_a и S_b

На праве L_a и L_b конструишемо дужи S_a и S_b које су дужина редом a и b на исти начин на који смо конструисали и дуж $S_{c'}$. На тај начин смо добили тачку G на правој L_a за коју важи $d_k(A, G) = a$, односно тачку H на правој L_b за коју важи $d_k(B, H) = b$. Видети слику 4.3.

4. Конструкција нормала на дужи S_a и S_b

Сада конструишемо нормале $L_{b'}$ и $L_{a'}$ које су редом нормалне на S_a и S_b у тачкама G и H. Видети слику 4.4.

5. Конструкција заједничке нормале правих $L_{a'}$ и $L_{b'}$

У доказу Теореме 3.5 смо видели да су $L_{a'}$ и $L_{b'}$ хиперпаралелне праве, тј. да имају заједничку нормалу L_c. Потребно је и њу да конструишемо.

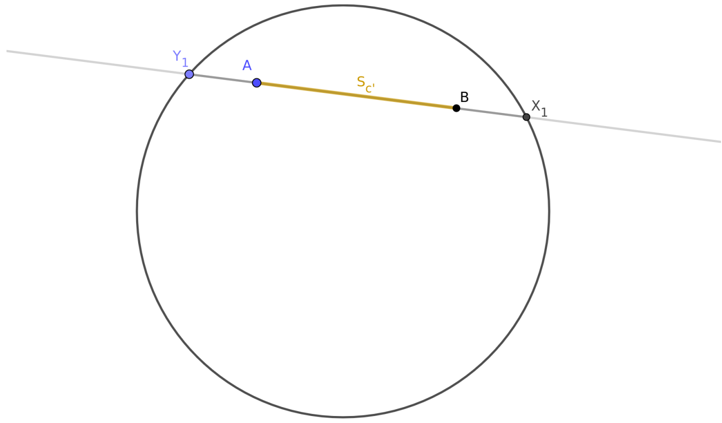
Да би права L_c била заједничка нормала за хиперпаралелне праве $L_{a'}$ и $L_{b'}$, она мора да садржи полове правих $L_{a'}$ и $L_{b'}$ у односу на апсолуту. С друге стране $L_{a'}$ и $L_{b'}$ су нормалне на L_c па оне морају да садрже пол праве L_c. Дакле, пресек две хиперпаралелне праве представља пол њихове заједничке нормале.

Примећујемо да се $L_{a'}$ и $L_{b'}$ секу, по конструкцији. Видети слику 4.5. Означимо тај пресек са z. Тачка z би требала да буде пол праве L_c. Конструишемо полове правих $L_{a'}$ и $L_{b'}$ и означимо их редом са x' и y'. Оба пола се налазе на правој L_c, па закључујемо да L_c јесте заједничка нормала за $L_{a'}$ и $L_{b'}$

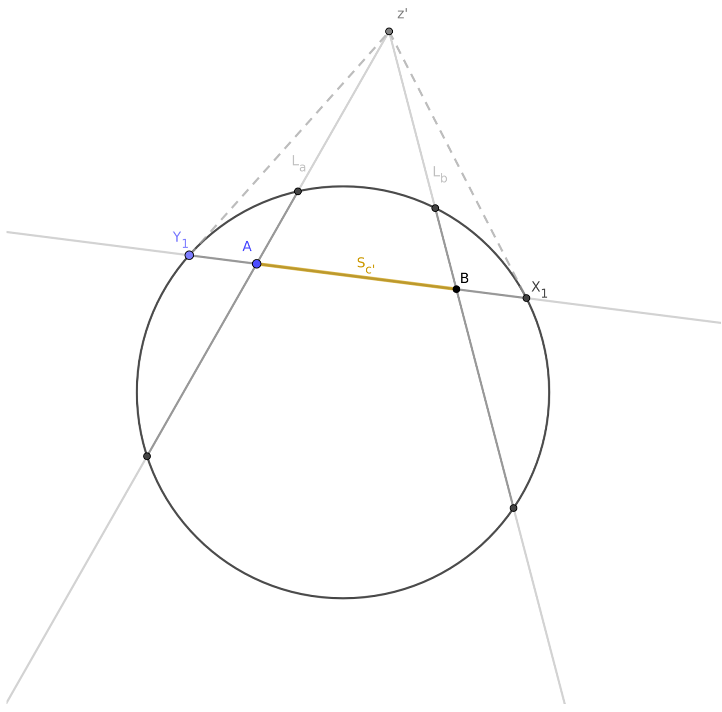
Означимо пресек нормале L_c и праве $L_{a'}$ са S, односно са R пресек са $L_{b'}$.

6. Провера да ли смо добили дужину c

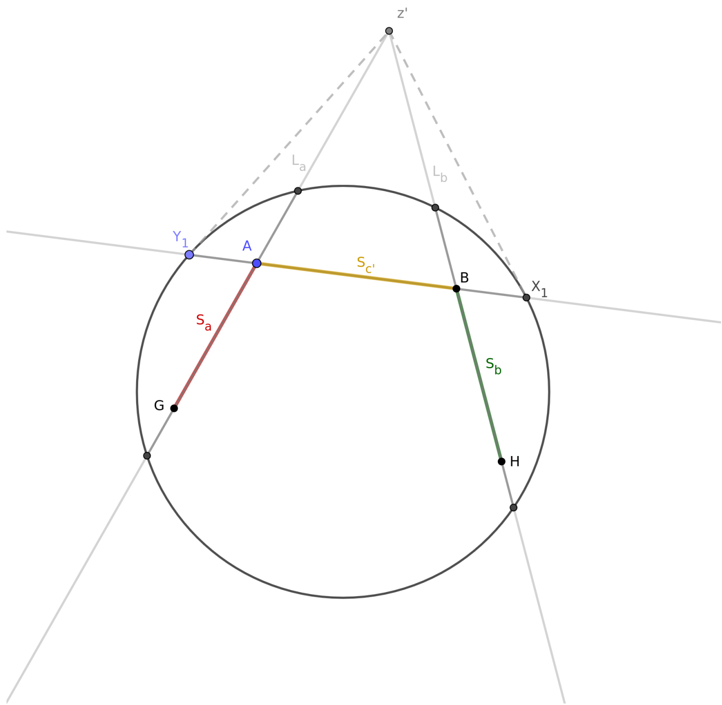
Конструисан шестоугао $ABHSRG$ је правоугли, по конструкцији. Остаје још да проверимо да ли је дуж RS дужине c. Нека је тачка P на растојању c од тачке R на правој L_c. Примећујемо да су се тачке P и S поклопиле. Видети слику 4.6.



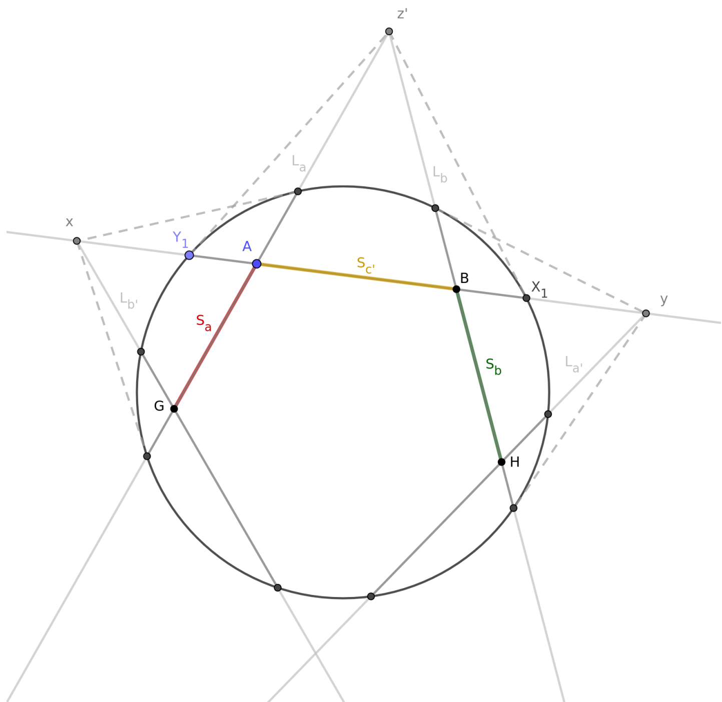
Слика 4.1: Конструкција дужи $S_{c'}$



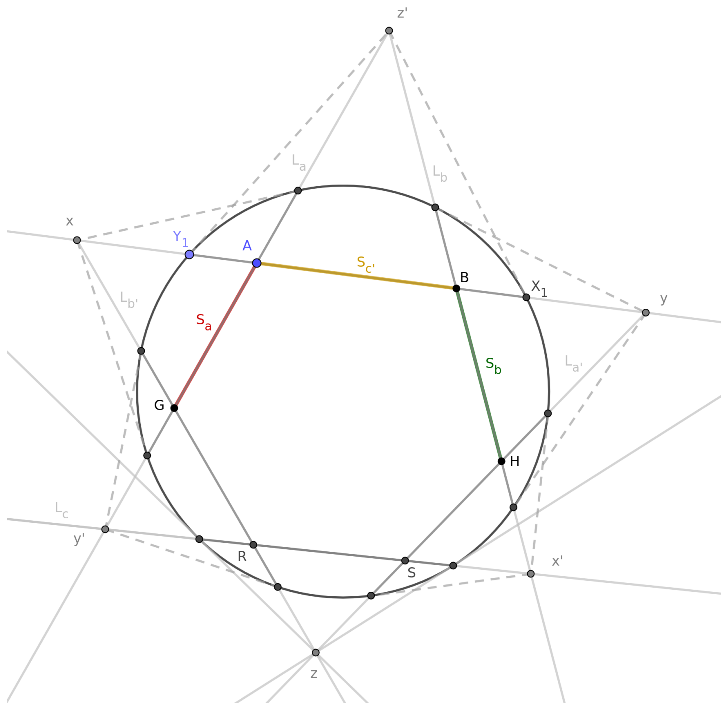
Слика 4.2: Конструкција нормала на дуж $S_{c'}$



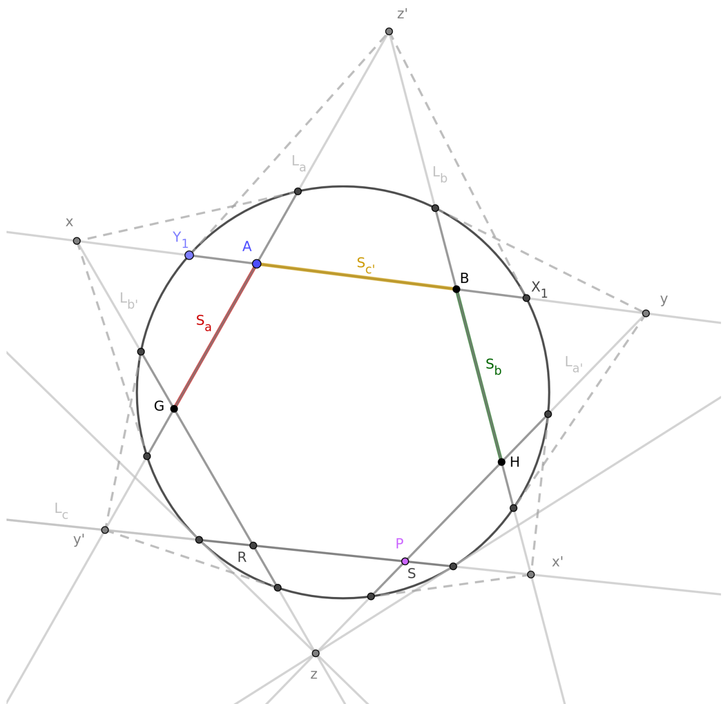
Слика 4.3: Конструкција дужи S_a и S_b



Слика 4.4: Конструкција нормала на дужи S_a и S_b



Слика 4.5: Конструкција заједничке нормале правих $L_{a'}$ и $L_{b'}$



Слика 4.6: Позиција тачке P

Глава 5

Примена и значај

Правоугли шестоуглови служе за конструкцију *хиперболичких панталона* које су основни градивни блокови *Тајхмилеровог простора* дводимензионалних површи.

Наиме, површи можемо класификовати различитим геометријским критеријумима. Један важан критеријум је конформна класификација површи. Кажемо да су две површи *конформно еквивалентне* ако постоји пресликавање једне површи на другу које у свакој тачки чува углове.

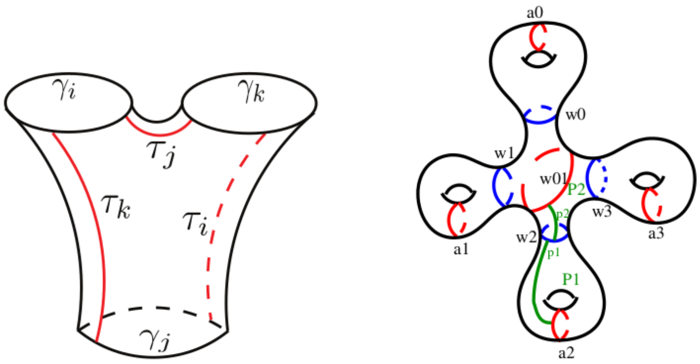
Тајхмилеров простор $\mathcal{T}_g$ је простор у коме су тачке класе конформно еквивалентних Риманових површи дате топологије, тј. рода g. Те класе су описане тзв. Фенчел-Нилсеновим координатама које ће бити објашњене у наставку.

Свака Риманова површ (површ са комплексним координатама) је оријентабилна и тополошки еквивалентна сфери са g ручки, $g \in \mathbb{N}_0$ (g је род површи). Са друге стране, теорема униформизације тврди да је на Римановој површи метрика конформно еквивалентна метрици константне Гаусове кривине $K \in \{-1, 0, 1\}$.

Тада из Гаус-Бонеове теореме видимо да је:

- $K \equiv 1$ ако је површ тополошки сфера, тј. сфера са $g = 0$ ручки,
- $K \equiv 0$ ако је површ тополошки торус, тј. сфера са $g = 1$ ручки,
- $K \equiv -1$ ако је број ручки $g > 1$.

Тајхмилеров простор у случају $g > 1$ је најзанимљивији. Панталоне су тополошки простор хомеоморфан сфери са 3 рупе (исечена 3 диска). Видети слику 5.1[1] лево. Свака површ рода $g > 1$ може се направити од $2g-2$ панталона. Видети слику 5.1 десно.



Слика 5.1: Лево - хиперболичке панталоне;
Десно - декомпозиција хиперболичких панталона

При томе се површ расеца по $3g-3$ петљи γ_i. Као представника тачке Тајхмилеровог простора $\mathcal{T}_g$ узмамо метрику кривине $K \equiv -1$, па сваке панталоне сматрамо делом хиперболичке равни која има $K \equiv -1$. Петље γ_i по којима сечемо површ су геодезијске хиперболичке равни, тј. хиперболичке дужи које за дату површ и метрику имају тачно одређену дужину.

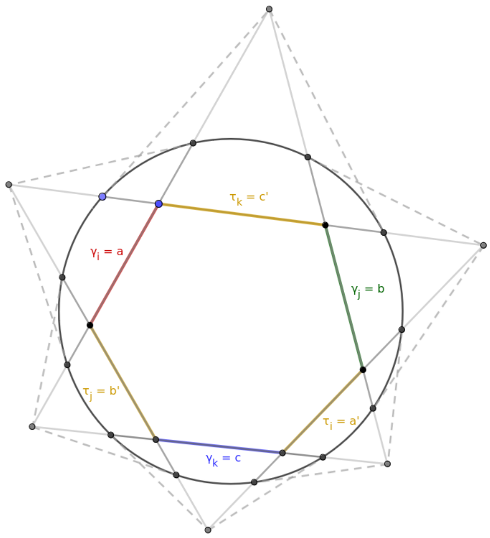
Дакле једне панталоне као границу имају три хиперболичке дужи $\gamma_i, \gamma_j, \gamma_k$ дужина редом a, b, c. Те панталоне можемо додатно расећи са три хиперболичке дужи τ_i, τ_j, τ_k дужина редом a', b', c'.

Заправо, са слике 5.2 је јасно да од правоуглог шестоугла чије су ивице a, b, c можемо направити хиперболичке панталоне произвољне величине.

Прави углови су важни како би се дужи шестоугла „глатко” залепиле у петље панталона.

Дакле, видимо да је значај егзистенције правоуглих шестоуглова датих ивица, којима смо се бавили у овом раду, у томе што се од њих могу „сашити” произвољне панталоне.

[1] Слика је преузета из [8].



Слика 5.2: Правоугли шестоугао у Клајновом моделу

Када се двоје панталона „лепе” у површ по заједничкој петљи γ_i, потребно је ту ивицу „уврнути” за неки угао θ_i. То је због тога што на тим двема панталонама хиперболичке дужи τ_j неће у истој тачки сећи γ_i. Видети слику 5.1.

Показује се да дужине l_i $3g-3$ петљи γ_i и углови „увртања” $(\theta_1, \ldots, \theta_{3g-3})$ у потпуности одређују површ, тј. начин на који је она добијена из шестоуглова.

Бројеви $((l_1, \theta_1), \ldots, (l_{3g-3}, \theta_{3g-3}))$ називамо Фенчел-Нилсеновим координатама на Тајхмилеровом простору $\mathcal{T}_g$.

Ова област има велики теоријски и практични значај у изучавању површи. Могуће је на рачунару реализовати алгоритме који упоређују различите површи користећи управо ову теорију. За више детаља погледати рад [8].

Библиографија

[1] John G. Ratcliffe, *Foundations of Hyperbolic Manifolds*, Second edition, (Springer-Verlag, New York, 2005).

[2] Срђан Вукмировић, *Геометријска визуелизација*, (2023).

[3] Bruno Martelli, *Hyperbolic geometry, surfaces, and 3-manifolds*, (2013).

[4] Маријана Бабић, *Визуализација простора Лобачевског*, (Београд, 2010).

[5] William P. Thurston, *Three-Dimensional Geometry and Topology*, (Princeton University Press, Princeton, 1997).

[6] Зоран Лучић, *Еуклидска и хиперболичка геометрија*, Друго издање, (Total Design, Београд, 1997).

[7] Еуклид, *Елементи*, превод Антона Билимовића (Београд, 1957).

[8] Miao Jin, Wei Zeng, Ning Ding, Xianfeng Gu, Shing-Tung Yau, *Computing Fenchel-Nielsen Coordinates in Teichmüller Shape Space*, Communications in Information and Systems, Vol. 9, No. 2, pp. 213-234 (2009).

[9] Зоран Петрић, *Линеарна алгебра*, (2013).

Аплети у Геогебри

[10] Лидија Чикарић, *Клајнов модел*,
https://www.geogebra.org/classic/d4perumb

[11] Лидија Чикарић, *Хиперболички четвороугао са три права угла у Клајновом моделу*, https://www.geogebra.org/classic/rshzpb4b

[12] Лидија Чикарић, *Хиперболички петоугао са четири права угла у Клајновом моделу*, https://www.geogebra.org/classic/u2dkhn9f

[13] Лидија Чикарић, *Правоугли хиперболички шестоугао у Клајновом моделу*,
https://www.geogebra.org/classic/fpsntwrv