УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Николина Везмар

# ГЕОМЕТРИЈА ОЈЛЕРОВОГ КРУГА И ФОЈЕРБАХОВИХ ТАЧАКА ТРОУГЛА

мастер рад

Београд, 2024.

**Ментор**:

др Мирослава Антић, ванредни професор
Универзитет у Београду, Математички факултет

**Чланови комисије**:

др Тијана Шукиловић, ванредни професор
Универзитет у Београду, Математички факултет

др Славко Моцоња, ванредни професор
Универзитет у Београду, Математички факултет

**Датум одбране**: ____________________________

*Мојој породици*

**Наслов мастер рада**: Геометрија Ојлеровог круга и Фојербахових тачака троугла

**Резиме**: Овај рад је посвећен истраживању и проучавању геометријских својстава Ојлеровог круга и Фојербахових тачака троугла, који представљају значајне теме у модерној еуклидској геометрији. Геометрија троугла, као једна од најстаријих и најсистематичније проучаваних грана математике, и даље изазива пажњу истраживача због своје елеганције, али и због дубоких и занимљивих својстава која поседује.

Ојлеров круг, познат и као круг девет тачака, игра кључну улогу у геометрији троугла, јер пролази кроз низ значајних тачака повезаних са троуглом, укључујући средишта страница, подножја висина, као и средишта дужи од темена троугла до ортоцентра. Са друге стране, Фојербахове тачке, које представљају тачке додира између уписаног круга и споља уписаних кругова троугла са Ојлеровим кругом, пружају дубљи увид у структуру и симетрије троугла.

Специфични циљ рада је да се представе, систематизују и докажу синтетичким путем, прво концикличност девет тачака, односно постојање Ојлеровог круга као и Фојербахових тачака, а затим и многобројне особине геометријских ликова који се дефинишу коришћењем Фојербахових тачака и Ојлеровог круга троугла. Приказани су затим и неки од резултата који су изведени аналитичким путем. У раду су представљена нека од тврђења која су публикована у више од десет радова у часопису Forum Geometricorum на ову тему, као и особине представљене у књизи The geometry of remarkable elements: points, lines and circles, аутора C. Mihalescu.

Слике су рађене помоћу GCLC [1] програма, који је развио професор Предраг Јаничић, професор Математичког факултета Универзитета у Београду.

Надам се да ће овај рад пружити читалачкој публици јасно разумевање и дубљи увид у геометрију троугла, као и да ће инспирисати даља истраживања у овој интересантној области математике.

На крају, желим да се захвалим ментору, професорки Мирослави Антић, на несебичној помоћи и подршци током рада на овом истраживању, као и

[1] GCLC (Geometric Constructions and Logical Calculations) је софтверски алат за геометријско моделирање и формалне доказе у планиметрији. GCLC је првенствено дизајниран за цртање геометријских конструкција и генерисање формалних доказа математичких тврдњи.

колегама и пријатељима који су својим саветима и охрабрењем допринели завршетку овог рада.

**Кључне речи**: троугао, Ојлерова права, Ојлеров круг, круг девет тачака, Фојербахова теорема

# Садржај

**Садржај** **vi**

**1 Увод** **1**

**2 Девет тачака Ојлеровог круга** **3**

2.1 Ојлерова права . . . . . . . . . . 3

2.2 Ојлеров круг . . . . . . . . . . 4

**3 Фојербахове тачке** **12**

3.1 Фојербахова теорема . . . . . . . . . . 12

3.2 Својства Фојербахових тачака . . . . . . . . . . 14

3.3 Важна напомена о Фојербаховој тачки . . . . . . . . . . 15

3.4 Једноставан векторски доказ Фојербахове теореме . . . . . . . . 20

3.5 Својства растојања Фојербахових тачака . . . . . . . . . . 28

3.6 Растојање Фојербахових тачака . . . . . . . . . . 38

**4 Закључак** **46**

**Библиографија** **47**

# Глава 1

# Увод

Велики швајцарски математичар Ојлер [1] је најранији аутор коме се приписује откриће круга девет тачака, иако не постоји дата референца на било који одломак у његовим списима где је карактеристично својство овог круга изричито наведено.

Према историјским истраживањима Мекаја [2] 1892. године било је неколико независних доказа постојања круга девет тачака од стране енглеских, немачких, француских и швајцарских математичара.

Девет тачака троугла су: три средишта страница, три подножја висина и три тачке које су средишта дужи од темена троугла до ортоцентра. Ових девет тачака припадају кругу који се назива Ојлеров круг, Фојербахов [3], Теркемов [4], или само круг девет тачака.

У чланку Брианшона [5] и Понселеа [6] (1820. године) наводи се да средишта дужи одређених теменима и ортоцентром троугла, такође припадају Ојлеровом кругу тог троугла. У њиховом чланку је дат први потпуни доказ теореме о концикличности поменутих девет тачака и први пут се користи термин „круг девет тачака“. Многи аутори управо користе овај термин.

Немачки математичар Фојербах доказао је да круг који садржи подножја висина троугла додирује сва четири круга која додирују странице троугла, односно праве које их садрже.

---

[1] Leonhard Euler, (1707 - 1783) швајцарски математичар и физичар.

[2] John Sturgeon Mackay, (1843 - 1914) шкотски математичар и академски аутор.

[3] Karl Wilhelm von Feuerbach, (1800 - 1834) немачки математичар.

[4] Olry Terquem, (1782 - 1862) француски математичар.

[5] Charles Julien Brianchon, (1783  1864) француски математичар.

[6] Jean-Victor Poncelet, (1788  1867) француски инжењер и математичар.

Фојербах је доказао теорему о кругу у својој 22. години, у раду *Eigenschaften einiger merkwürdigen Punkte des geradlinigen Dreiecks und mehrerer durch sie bestimmten Linien und Figuren*, у којем је проучавао значајне тачке у геометрији троугла и дао низ нових и важних тврдњи везаних за Ојлеров круг.

Појава Ојлеровог круга и Фојербахове теореме изазвала је велику пажњу математичке јавности. Многи математичари су се бавили овом теоремом, па је објављен велики број различитих доказа. Неки аутори приписивали су Фојербаху независно откриће поменутог круга, па се стога у литератури и користи термин Фојербахов круг.

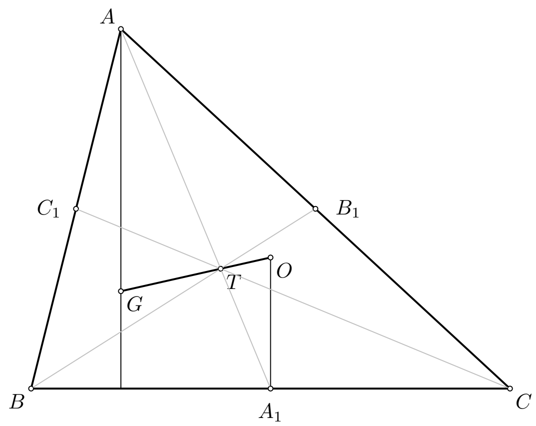
# Глава 2

# Девет тачака Ојлеровог круга

## 2.1 Ојлерова права

Леонард Ојлер је 1765. године увидео да су центар описаног круга око троугла, тежиште троугла и ортоцентар увек три колинеарне тачке које се у случају правилног троугла поклапају. Та права је названа Ојлерова права.

Посматрајмо произвољан троугао $ABC$. Означимо са $H$ ортоцентар, са $T$ тежиште и са $O$ центар описаног круга тог троугла. Наредна теорема говори о односу ових тачака.



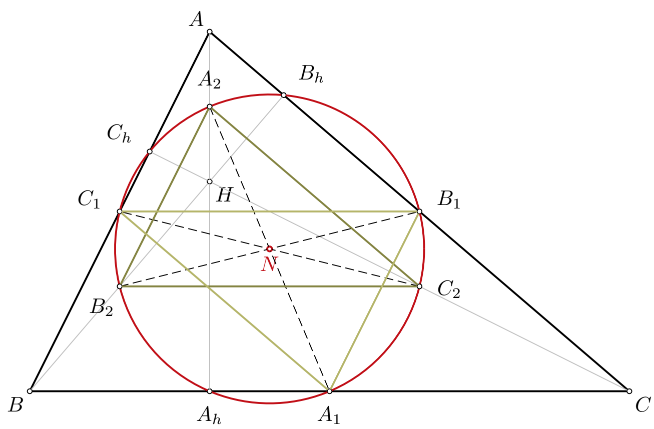

Слика 2.1:

**Теорема 2.1.1.** *У сваком троуглу тачке $H$, $T$ и $O$ су колинеарне и важи $HT = 2TO$. Праву одређену овим тачкама називамо* ***Ојлерова права****.*

*Доказ.* Нека су $T$ и $O$ тежиште и центар описаног круга и нека је $G$ тачка на правој $OT$ таква да је $GT = 2TO$ и $G - T - O$. Нека је $A_1$ средиште странице $BC$ (Слика 2.1). Троуглови $A_1OT$ и $AGT$ су слични, зато што важи: $\angle A_1TO \cong \angle ATG$ и $A_1T : AT = OT : GT = 1 : 2$. Одатле добијамо да је $\angle OA_1T \cong \angle GAT$, што повлачи да су праве $OA_1$ и $GA$ паралелне. Како је $OA_1 \perp BC$, добијамо да је и $GA \perp BC$. Аналогно, праве $BG$ и $AG$ су висине троугла, па се тачка $G$ поклапа са ортоцентром, тј. $G \equiv H$. ■

## 2.2 Ојлеров круг

Фојербах је открио да подножја висина троугла као и средишта дужи које спајају ортоцентар са теменима троугла припадају истом кругу, а Ојлер је 1765. године показао да тај круг садржи и средишта страница троугла. Тај круг називамо Ојлеровим, а често користимо и термин **круг девет тачака**.




Слика 2.2:

**Теорема 2.2.1.** *У троуглу, средишта страница, подножја висина и средишта дужи одређених теменима и ортоцентром троугла, припадају једном кругу (**Ојлеров круг**).*

*Доказ.* У троуглу $ABC$ (Слика 2.2), нека су $A_1$, $B_1$ и $C_1$ средишта страница, $A_h$, $B_h$ и $C_h$ подножја висина, $H$ ортоцентар и $A_2$, $B_2$ и $C_2$ средишта дужи $AH$, $BH$ и $CH$ (Ојлерове тачке). Показаћемо да ових девет тачака припадају истом кругу.

Заиста, како су тачке $A_2$ и $C_2$ средишта дужи $AH$ и $CH$ имамо да је права $A_2C_2$ паралелна $AC$. Пошто је $A_1$ средиште странице $BC$, права $C_2A_1$ је паралелна $BH$. Како висина $BH$ троугла чини прав угао са страницом $AC$, следи да су $A_2C_2$ и $C_2A_1$ међусобно нормалне. На исти начин, $\angle A_2B_2A_1$ је прав. Стога, правоугли троуглови $A_2C_2A_1$ и $A_2B_2A_1$ су уписани у исти круг чији је пречник заједничка хипотенуза $A_2A_1$. Тачка $A_h$ такође припада овом кругу јер је $\angle A_2A_hA_1$ прав. Аналогно, можемо доказати да тачке $B_1$, $B_h$ и $C_1$, $C_h$ припадају истом кругу као и $A_2$, $B_2$ и $C_2$. ■

Ојлеров круг ћемо означити са $l(N, r_l)$. Тетиве $A_1A_2$, $B_1B_2$ и $C_1C_2$ су пречници Ојлеровог круга и важи следеће тврђење.

**Тврђење 2.1.** *Нека су тачке $A_1$, $B_1$ и $C_1$ средишта одговарајућих страница троугла $ABC$ и тачке $A_2$, $B_2$ и $C_2$ редом средишта дужи $AH$, $BH$ и $CH$. Дужи $A_1A_2$, $B_1B_2$ и $C_1C_2$ секу се у центру Ојлеровог круга.*

**Тврђење 2.2.** *У троуглу, праве које редом спајају средишта страница са Ојлеровим тачкама висина насрамних темена су пречници у кругу девет тачака.*

**Дефиниција. Медијални троугао** троугла $ABC$ је троугао чија се темена налазе на средиштима страница троугла $ABC$. Медијални троугао се такође назива и комплементарни троугао.

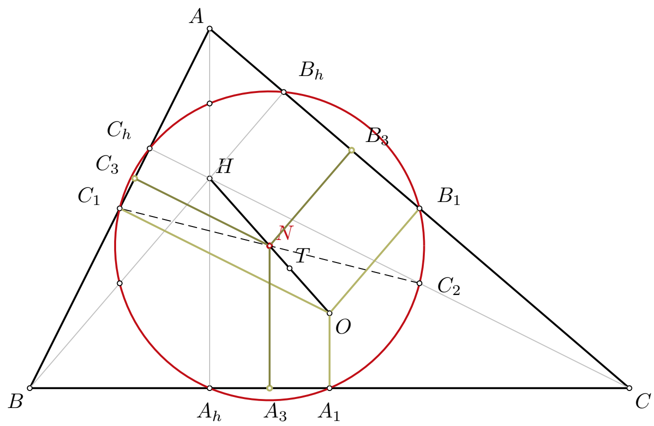
**Дефиниција. Антикомплементарни троугао** произвољног троугла $ABC$ је троугао чије су странице паралелне страницама троугла $ABC$ и пролазе кроз темена троугла $ABC$, тј. троугао $ABC$ је медијални антикомплементарном троуглу.

**Дефиниција.** Тачке $A$ и $A'$ се називају симетричним у односу на тачку $O$ (названу центром симетрије) ако је $O$ средиште дужи $AA'$. Тачке $A$ и $A'$ се називају симетричним у односу на праву $XY$ (названу осом симетрије) ако је ова права симетрала дужи $AA'$. Две фигуре $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}'$ се називају симетричним у односу на дату тачку или осу, ако су тачке тих фигура симетричне, две по две, у односу на разматрану тачку или осу.

С обзиром да је троугао $ABC$ антикомплементарни троугао троугла $A_1B_1C_1$, важи следеће тврђење.

**Тврђење 2.3.** *Нека је дат троугао $ABC$ и нека је $A_{am}B_{am}C_{am}$ његов антикомплементарни троугао. Описани круг троугла $ABC$ подудара се са Ојлеровим кругом троугла $A_{am}B_{am}C_{am}$.*

**Теорема 2.2.2.** *Нека је дат троугао $ABC$ и нека је $H$ његов ортоцентар. Нека су $l(N, r_l)$ Ојлеров круг и $o(O, R)$ описани круг датог троугла. Тачка $N$ припада правој која спаја ортоцентар $H$ са центром описаног круга и важи однос $OH = 2ON$. (Ојлерова права).*




Слика 2.3:

*Доказ.* У троуглу $ABC$ (Слика 2.3), нека су $A_h$, $B_h$ и $C_h$ подножја висина, $A_1$, $B_1$ и $C_1$ редом средишта страница $BC$, $AC$ и $AB$, $H$ ортоцентар, $O$ центар описаног круга и $N$ центар круга девет тачака. Нека су тачке $A_3$, $B_3$ и $C_3$ средишта дужи $A_hA_1$, $B_hB_1$ и $C_hC_1$.
Како је $AA_h \perp BC$ и $A_1O \perp BC$, следи да је $AA_h \parallel A_1O$, па је четвороугао $A_hHOA_1$ је трапез. Како је $A_3N \perp BC$ и $A_3$ је средиште дужи $A_hA_1$, тада $A_3N$ пролази кроз средиште дужи $OH$. Аналогно, праве нормалне на $CA$ и $AB$, у тачкама које су средишта дужи $B_hB_1$ и $C_hC_1$ трапеза $B_hHOB_1$ и $C_hHOC_1$ пролазе кроз средиште њихове заједничке странице $OH$. Ове нормале на странице троугла $ABC$ у тачкама $A_3$, $B_3$ и $C_3$ су конкурентне у центру круга девет тачака. Како ове нормале пролазе кроз средиште $OH$, следи да је $N$ средиште дужи $OH$.

■

Можемо да закључимо да између тачака $H$, $N$, $T$ и $O$, које припадају Ојлеровој правој, важи следећа релација:

$$TN = \frac{TO}{2} = \frac{ON}{3} = \frac{HT}{4} = \frac{HO}{6}.$$

**Дефиниција.** Кажемо да су тачке $C$ и $D$ хармонијски спрегнуте са тачкама $A$ и $B$, ако су $A$, $B$, $C$ и $D$ колинеарне тачке такве да је једна од тачака $C$ или $D$ између тачака $A$ и $B$, а друга није, и при том је $AC : CB = AD : DB$. То записујемо $\mathcal{H}(A, B; C, D)$.

**Теорема 2.2.3.** *На Ојлеровој прави, тачке $H$, $N$, $T$ и $O$ (ортоцентар, центар Ојлеровог круга, тежиште и центар описаног круга) су хармонијски спрегнуте. Важи следећа релација:*

$$\frac{HN}{NT} = \frac{HO}{TO}.$$

*Доказ.* На основу једнакости:

$$HN = \frac{1}{2}HO, \quad TN = \frac{1}{6}HO \quad \text{и} \quad TO = \frac{1}{3}HO,$$

добијамо

$$\frac{HN}{HO} = \frac{1}{2}\frac{HO}{HO} = \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad \frac{TN}{TO} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}}\frac{HO}{HO} = \frac{1}{2}.$$

■

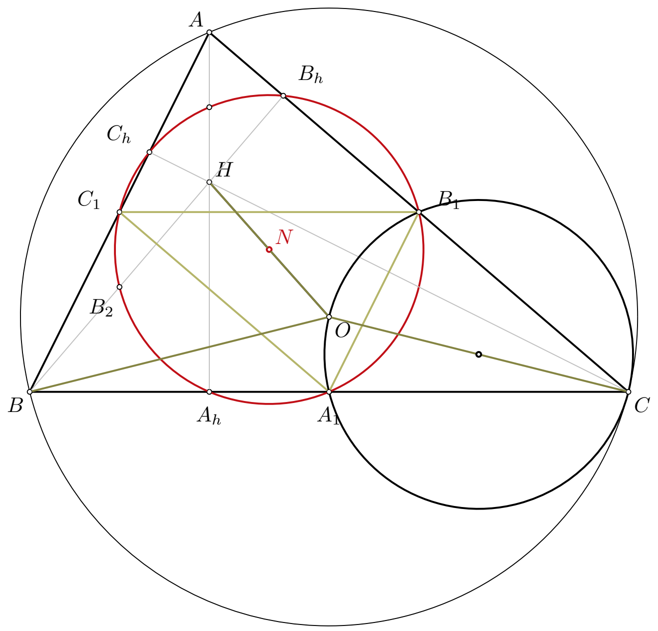
**Теорема 2.2.4.** *Полупречник Ојлеровог круга је једнак половини полупречника описаног круга.*

*Доказ.* У троуглу $ABC$ (Слика 2.4), нека су $O$ и $N$ центар описаног круга и центар Ојлеровог круга. Нека је $H$ ортоцентар, а $B_2$ Ојлерова тачка на висини $BB_h$.

У троугловима $HBO$ и $HB_2N$ важи да је $HB = 2HB_2$ и $HO = 2HN$, добијамо $BO = 2B_2N$. $B_2N$ је полупречник Ојлеровог круга, а $BO$ полупречник описаног круга, што је и требало доказати.

Други начин доказивања је да посматрамо троугао $ABC$ и његов медијални троугао. Ови троуглови су слични, са односом страница $1 : 2$. Стога добијамо да су полупречници њихових описаних кругова у истом односу. ■

Као последицу ове теореме, добијамо следеће тврђење.




Слика 2.4:

**Тврђење 2.4.** *Сви троуглови који имају исти описани круг, имају подударне Ојлерове кругове.*

**Теорема 2.2.5.** *Нека је $o(O, R)$ описани круг троугла $ABC$. Кругови који имају за пречнике $AO$, $BO$ и $CO$ су симетрични Ојлеровом кругу у односу на одговарајуће странице медијалног троугла.*

*Доказ.* Како су $OA_1$ и $OB_1$ симетрале страница $BC$ и $AC$ (Слика 2.4), добијамо

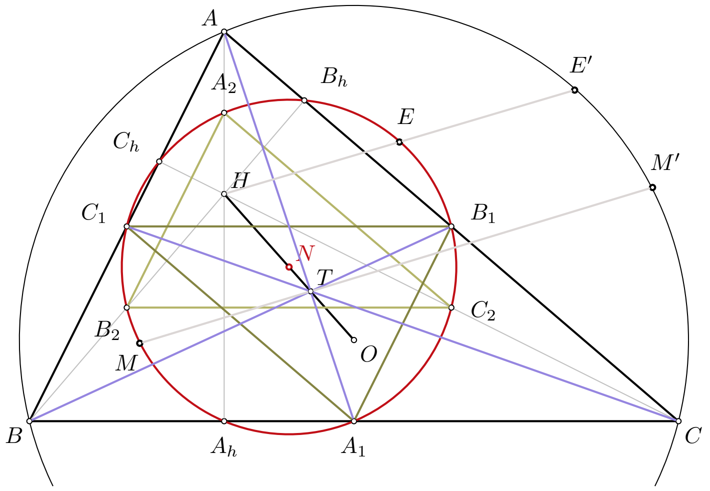
$$\angle OA_1C = \angle OB_1C = 90^\circ.$$

Стога, круг чији је пречник $OC$ пролази кроз тачке $A_1$ и $B_1$. Ове две тачке такође припадају кругу $l(N, r_l)$. Следи да је страница $A_1B_1$ медијалног троугла заједничка тетива ових кругова. Пошто је полупречник описаног круга једнак пречнику круга $l(N, r_l)$, круг пречника $OC$ биће подударан са кругом $l(N, r_l)$. Ови кругови су подударни и имају страницу $A_1B_1$ као заједничку тетиву, тако да ће бити симетрични у односу на праву $A_1B_1$. ∎

Следеће тврђење непосредно произилази из претходне теореме.

**Тврђење 2.5.** *У датом троуглу, кругови симетрични Ојлеровом кругу у односу на странице медијалног троугла су тангентни* [1] *на описани круг у теменима датог троугла.*

**Теорема 2.2.6.** *Ојлеров круг и описани круг датог троугла имају центар директне хомотетије у ортоцентру. Центар индиректне хомотетије је тежиште.*




Слика 2.5:

*Доказ.* Посматрамо троуглове $ABC$, његов медијални троуглао $A_1B_1C_1$ и троугао $A_2B_2C_2$ (Слика 2.5). Важи да је $AB \parallel A_1B_1 \parallel A_2B_2$, $AC \parallel A_1C_1 \parallel A_2C_2$ и $BC \parallel B_1C_1 \parallel B_2C_2$. Паралелност страница показује да су ови троуглови хомотетични.

Троугао $ABC$ и троугао $A_2B_2C_2$ имају заједничке висине, док троугао $ABC$ и троугао $A_1B_1C_1$ имају заједничке медијане. Из тога следи да су редом центри хомотетије ортоцентар $H$ и тежиште $T$.

Хомотетија троуглова $ABC$ и $A_2B_2C_2$ је директна, јер оријентисане дужи $HA$ и $HA_2$ имају исти смер. Хомотетија троуглова $ABC$ и $A_1B_1C_1$ је индиректна, јер оријентисане дужи $TA$ и $TA_1$ имају супротан смер.

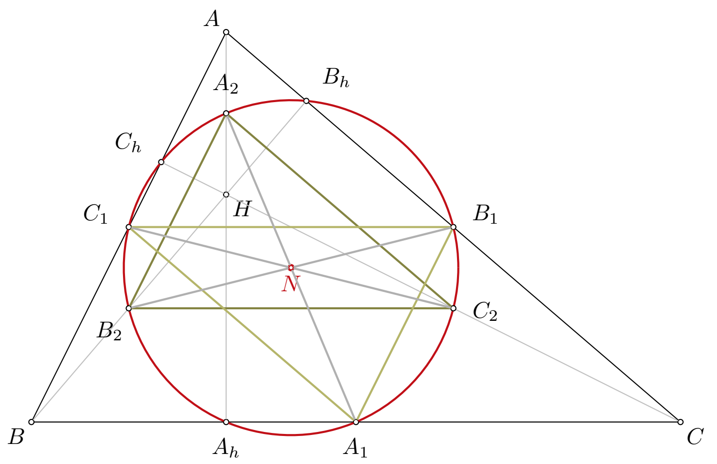
Дакле, описани кругови троуглова $ABC$, $A_2B_2C_2$ и $A_1B_1C_1$, имају центар директне хомотетије у тачки $H$ и центар индиректне хомотетије у тачки $T$. ■

[1] Тангентни кругови су кругови у заједничкој равни који се секу у једној тачки.

**Тврђење 2.6.** *Нека тачка $E$ припада Ојлеровом кругу (Слика 2.5). Нека је $E'$ тачка пресека праве $HE$ и описаног круга $o(O,R)$ троугла $ABC$. Како је коефицијент сличности ова два круга $1/2$ и како је центар хомотетије у тачки $H$, важи $\frac{HE}{HE'} = \frac{1}{2}$. Дакле, $HE = EE'$.*

**Тврђење 2.7.** *Нека је $M$ произвољна тачка Ојлеровог круга (Слика 2.5). Нека је $M'$ тачка пресека праве $TM$ и описаног круга $o(O,R)$ троугла $ABC$. Тада важи релација $\frac{TM}{TM'} = \frac{1}{2}$.*

*Доказ.* Постоји индиректна хомотетија са центром у тачки $T$ која пресликава круг $l(N, r_l)$ у $o(O,R)$. Одатле је однос хомотетичних дужи $TM$ и $TM'$ једнак коефицијенту сличности ових кругова. Тај коефицијент је $\frac{1}{2}$, па добијамо да је $\frac{TM}{TM'} = \frac{1}{2}$. ∎



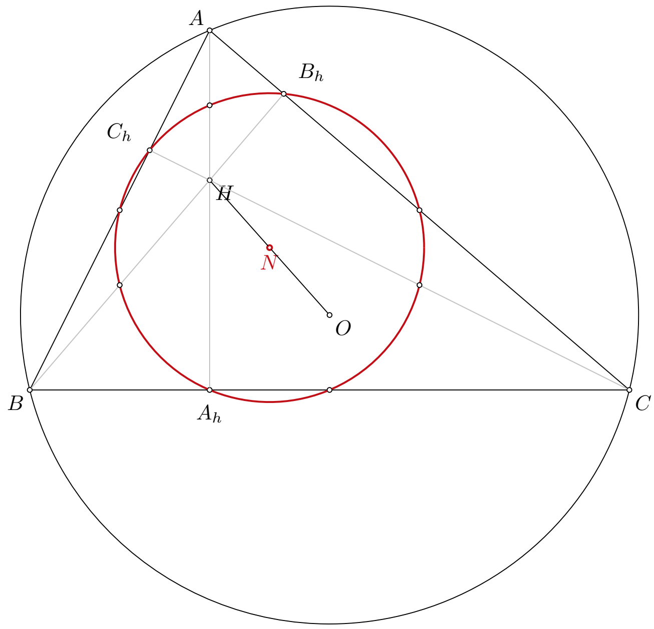

Слика 2.6:

**Тврђење 2.8.** *Нека је $H$ ортоцентар троугла $ABC$ (Слика 2.6). Троуглови $AHB$, $BHC$ и $CHA$ имају исти Ојлеров круг.*

**Теорема 2.2.7.** *У троуглу, Ојлеров круг је у односу на тачку $H$ централно симетричан кругу који је инверзан[2] описаном кругу, где је центар инверзије*

[2]Ако је $A$ произвољна тачка равни неког круга $k(O,r)$ и $A'$ тачка полуправе $OA$ таква да је $OA \cdot OA' = r^2$, тада кажемо да је тачка $A'$ инверз тачке $A$ у односу на круг $k$. Из дефиниције непосредно следи да је и тачка $A$ инверз тачке $A'$ у односу на круг $k$. Стога се такође каже да су тачке $A$ и $A'$ међусобно инверзне у односу на круг $k$. Круг $k$ називамо кругом инверзије, тачку $O$ центром инверзије, а дуж $r$ полупречником инверзије.

*ортоцентар, а квадрат полупречника инверзије једнак је производу две дужи на које ортоцентар разлаже висину.*




Слика 2.7:

*Доказ.* Троуглови $HA_hB_h$ и $HBA_h$ су слични (Слика 2.7), па важи да је $HA \cdot HA_h = HB \cdot HB_h$. Слично добијамо

$$HA \cdot HA_h = HB \cdot HB_h = HC \cdot HC_h = k^2.$$

Ове релације показују да, у инверзији у односу на круг $k'(H, k)$ су инверзне тачке тачкама које су централно симетричне $A_h$, $B_h$ и $C_h$ респективно. Круг који пролази кроз подножја $A_h$, $B_h$ и $C_h$ висина је круг девет тачака. ■

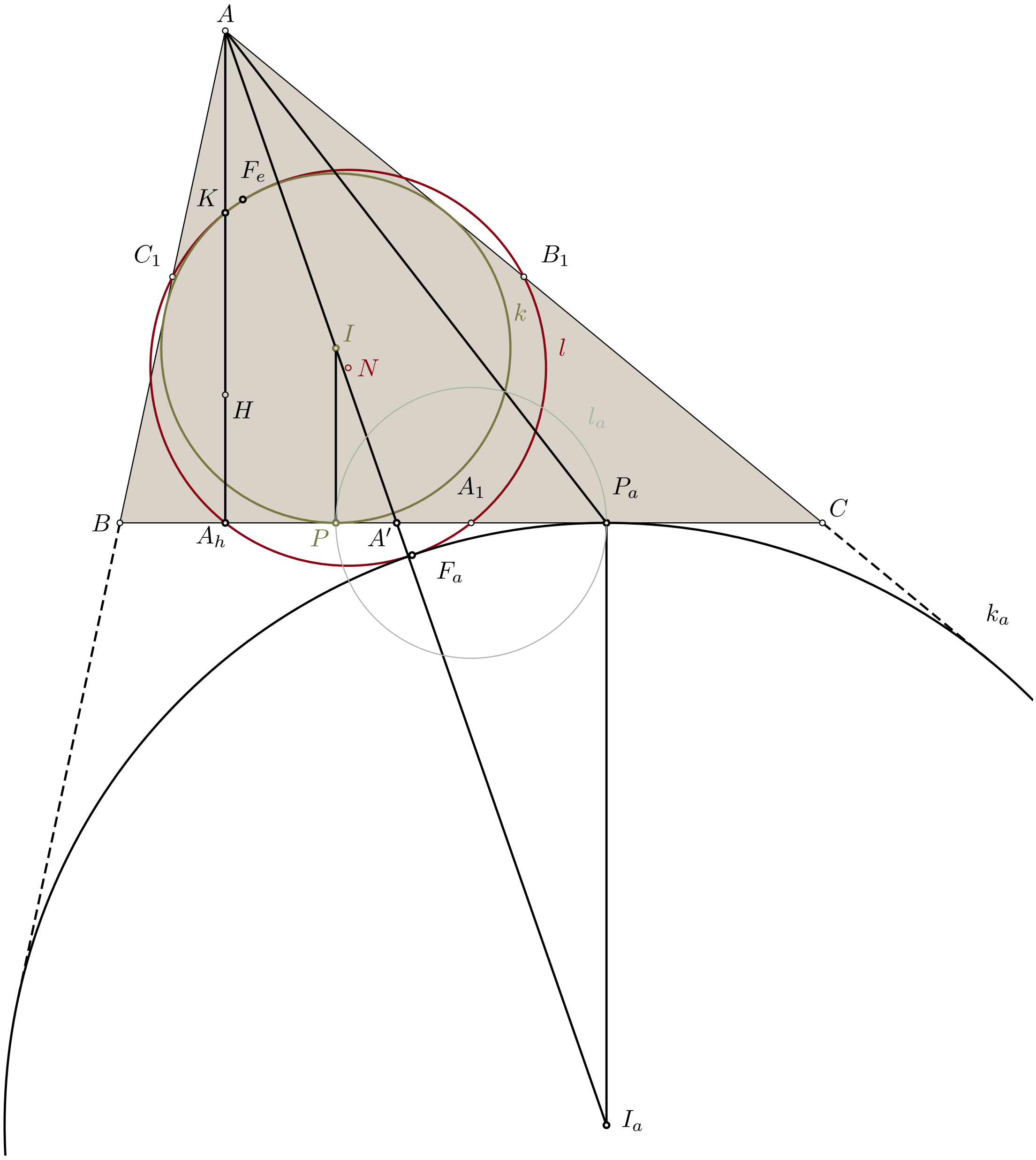
# Глава 3

# Фојербахове тачке

## 3.1 Фојербахова теорема

**Теорема 3.1.1.** *(Фојербахова теорема, 1822) Ојлеров круг произвољног троугла тангентан је на уписани круг и сва три споља приписана круга тог троугла.*

*Доказ.* Нека је дат троугао $ABC$. Нека су $A_1$, $B_1$, $C_1$ средишта страница $BC, AC, AB$ редом. Нека је $k(I,r)$ уписани круг датог троугла, нека су $k_a(I_a, r_a)$, $k_b(I_b, r_b)$ и $k_c(I_c, r_c)$ спођа приписани кругови над страницама $BC$, $AC$ и $AB$ редом, и нека је $l(N, r_l)$ Ојлеров круг. Означимо са $P$ и $P_a$ тачке у којима кругови $k(I,r)$ и $k_a(I_a, r_a)$ додирују страницу $BC$, са $A_h$ подножје висине из темена $A$, са $A'$ тачку у којој симетрала угла $\angle BAC$ сече страницу $BC$. Нека је $H$ ортоцентар троугла $ABC$ и $K$ средиште дужи $AH$. При томе, тачке $I$ и $I_a$ су хармонијски спрегнуте са тачкама $A$ и $A'$, па су и њихове управне пројекције на правој $BC$, дакле тачке $P$ и $P_a$ хармонијски спрегнуте с тачкама $A_h$ и $A'$. Зато је $PA' \cdot A_hP_a = A'P_a \cdot PA_h$. Можемо претпоставити да је $AB > AC$, тј. да важи распоред $A - H - P - A' - A_1 - P_a$. Како је $PA' = PA_1 - A'A_1$, $A_hP_a = A_hA_1 + A_1P_a$, $A'P_a = A'A_1 + A_1P_a$, $PA_h = A_hA_1 - A_1P$ и $PA_1 = A_1P_a$. Добијамо да је $A_1A_h \cdot A_1A' = A_1P^2 = A_1P_a^2$, па су тачке $A_h$ и $A'$ међусобно инверзне у односу на круг $l_a(A_1, r_{l_a})$, чији је полупречник $r_{l_a} = A_1P$. Како су кругови $k(I,r)$ и $k_a(I_a, r_a)$ ортогонални на круг $l_a(A_1, r_{l_a})$, у тој инверзији сваки од кругова $k(I,r)$ и $k_a(I_a, r_a)$ одговара самом себи. Докажимо да у том пресликавању Ојлеровом кругу $l(N, r_l)$ одговара заједничка унутрашња тангента кругова $k(I,r)$ и $k_a(I_a, r_a)$ која не садржи страницу $BC$,




Слика 3.1:

а додирује кругове $k(I, r)$ и $k_a(I_a, r_a)$ у тачкама $Q$ и $Q_a$. Круг $l(N, r_l)$ садржи средиште инверзије $A_1$ и тачку $A_h$, па је његов инверзан лик права која садржи тачку $A'$, а управна је на пречник $A_1K$ круга $l(N, r_l)$. Како су $K$ и $B_1$ средишта дужи $AH$ и $AC$ на истом луку круга $l(N, r_l)$, биће

$$\angle A_hKA_1 = \angle A_hB_1A_1 = \angle A_hB_1C - \angle A_1B_1C = 2\angle A_hAC - \angle BAC =$$

$$= 2\angle A_hAC - 2\angle A'AC = 2\angle A_hAA' = 2\angle PIA' = \angle PIQ = \angle QA'A_1.$$

Стога је права $QQ_a$ нормална на праву $A_1K$, па је према томе инверзна кругу $l(N,r_l)$ у односу на круг $l_a(A_1,r_{l_a})$. С обзиром да права $QQ_a$ додирује круг $k(I,r)$ у тачки $Q$, и њима инверзни ликови, кругови $k(I,r)$ и $l(N,r_l)$, се додирују. Аналогно се доказује да круг $l(N,r_l)$ додирује и кругове $k_a(I_a,r_a)$, $k_b(I_b,r_b)$, $k_c(I_c,r_c)$ (Слика 3.1). ■

**Дефиниција.** Тачку у којој Ојлеров круг додирује уписани круг троугла зовемо унутрашња Фојербахова тачка, а тачке у којима Ојлеров круг додирује три спођа приписана круга називају се спољашње Фојербахове тачке. Спољашње Фојербахове тачке означаваћемо $F_a, F_b$ и $F_c$, а унутрашњу Фојербахову тачку $F_e$.

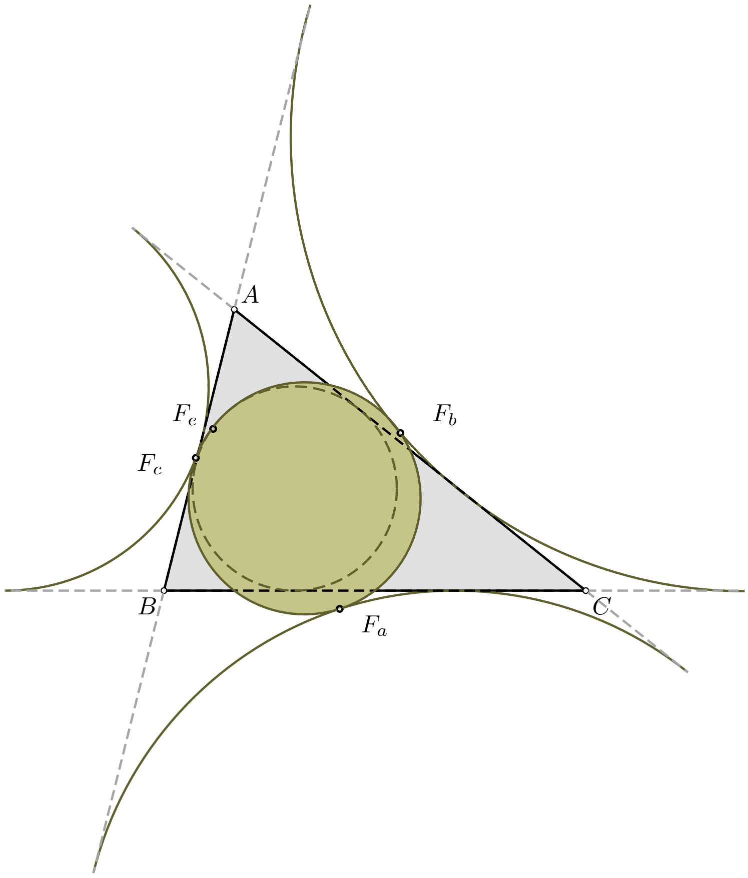
## 3.2 Својства Фојербахових тачака

Постоји хомотетија $H_{F_e,\lambda_1}$, са центром у $F_e$ и са позитивним коефицијентом којом се Ојлеров круг слика у уписани круг троугла. Нека је $A'$ пресек симетрале угла $BAC$ са $BC$. Тада, постоји хомотетија $H_{A',\lambda_2}$, са центром у $A'$ и негативним коефицијентом којом се уписани круг троугла слика у спођа приписани круг $k_a(I_a,r_a)$. С обзиром да композиција ове две хомотетије очигледно није изометрија, у питању је поново хомотетија, са негативним коефицијентом $\lambda_1\lambda_2$, којим се Ојлеров круг слика у спођа приписани. Центар те хомотетије, са једне стране мора бити тачка $F_a$, а са друге центар хомотетије која је композиција $H_{F_e,\lambda_1}$ и $H_{A',\lambda_2}$, припада правој $F_eA'$. Зато важи следеће тврђење.

**Тврђење 3.1.** *Ако су $F_e, F_a$ и $A'$ Фојербахове тачке уписаног круга и спођа приписаног круга који одговара темену $A$, и пресек симетрале угла $BAC$ са страницом $BC$, онда су $F_e, F_a$ и $A'$ колинеарне тачке.*

Другачији, детаљнији доказ овог тврђења, биће дат у оквиру доказа Теореме 3.3.1.

Нека је $H$ ортоцентар троугла $ABC$. Троуглови $ABC$, $BHC$, $CHA$ и $AHB$ имају исти Ојлеров круг $l(N,r_l)$. Ови троуглови имају укупно четири уписана и дванаест спођа приписаних кругова. Сви су тангентни на круг $l(N,r_l)$. Ова особина је позната у следећем облику:

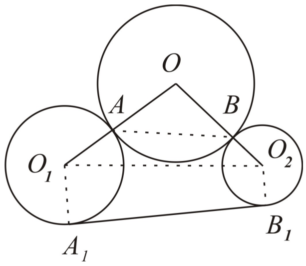



Слика 3.2:

**Тврђење 3.2** (Хамилтонова теорема, 1861)**.** *Нека је $H$ ортоцентар троугла $ABC$. Троуглови $ABC$, $ABH$, $CAH$ и $BCH$ имају исти Ојлеров круг који је тангентан са шеснаест уписаних или споља приписаних кругова ова четири троугла.*

## 3.3 Важна напомена о Фојербаховој тачки

Нека је дат произвољан троугао $ABC$. Нека су $A', B', C'$ тачке пресека симетрала углова $BAC, CBA, ACB$ са наспрамним страницама. Нека је $k(I, r)$ уписани круг датог троугла и нека су $k_a(I_a, r_a)$, $k_b(I_b, r_b)$ и $k_c(I_c, r_c)$ споља приписани кругови над страницама $BC$,$AC$,$AB$ редом. Нека је $F_e$ унутрашња Фојербахова тачка и нека су $F_a$, $F_b$ и $F_c$ спољашње Фојербахове тачке над страницама $BC, AC, AB$ редом.




Слика 3.3:

**Теорема 3.3.1.** *Круг који садржи тачке $A', B', C'$ уједно садржи тачку $F_e$.*

Доказ теореме се заснива на две чињенице: троугао чија су темена тачке пресека симетрала углова $BAC$, $CBA$, $ACB$ са наспрамним страницама (троугао $A'B'C'$) и Фојербахов троугао $F_aF_bF_c$ су слични и перспективни[1].

**Лема 3.3.2.** *Нека је описани круг $k(O,R)$ троугла $ABC$ споља тангентан на кругове $k_1(O_1,r_1)$ и $k_2(O_2,r_2)$, у тачкама $A$ и $B$ редом (Слика 3.3). Ако је $A_1B_1$ дуж спољашње заједничке тангенте кругова $k_1$ и $k_2$, тада важи*

$$AB = \sqrt{\frac{R}{(R+r_1)(R+r_2)}} \cdot A_1B_1. \tag{3.1}$$

*Доказ.* У једнакокраком троуглу $AOB$, важи

$$\cos\angle AOB = \frac{2R^2 - AB^2}{2R^2} = 1 - \frac{AB^2}{2R^2}.$$

Примењујући косинусну теорему на троугао $O_1OO_2$, добијамо

$$\begin{aligned} O_1O_2^2 &= (R+r_1)^2 + (R+r_2)^2 - 2(R+r_1)(R+r_2)\left(1 - \frac{AB^2}{2R^2}\right) \\ &= (r_1 - r_2)^2 + (R+r_1)(R+r_2)\left(\frac{AB}{R}\right)^2. \end{aligned}$$

[1]За две фигуре кажемо да су перспективне у односу на тачку (центар) $S$, ако постоји бијективно пресликавање такво да су сваке две одговарајуће тачке заједно са $S$ колинеарне. За две фигуре кажемо да су перспективне у односу на праву (осу) $s$, ако постоји бијективно пресликавање такво да су сваке две одговарајуће праве заједно са $s$ конкурентне.

С обзиром да је $A_1O_1O_2B_1$ правоугли трапез,

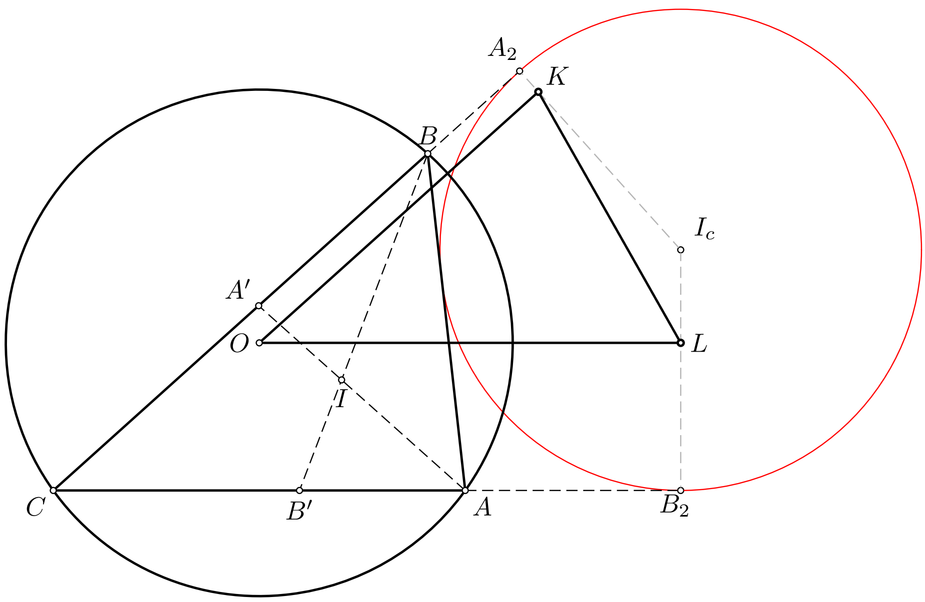
$$O_1{O_2}^2 = (r_1 - r_2)^2 + A_1{B_1}^2.$$

Доказ леме добијамо из једнакости

$$A_1B_1^2 = (R + r_1)(R + r_2)\left(\frac{AB}{R}\right)^2,$$

из чега следи релација (3.1). ■

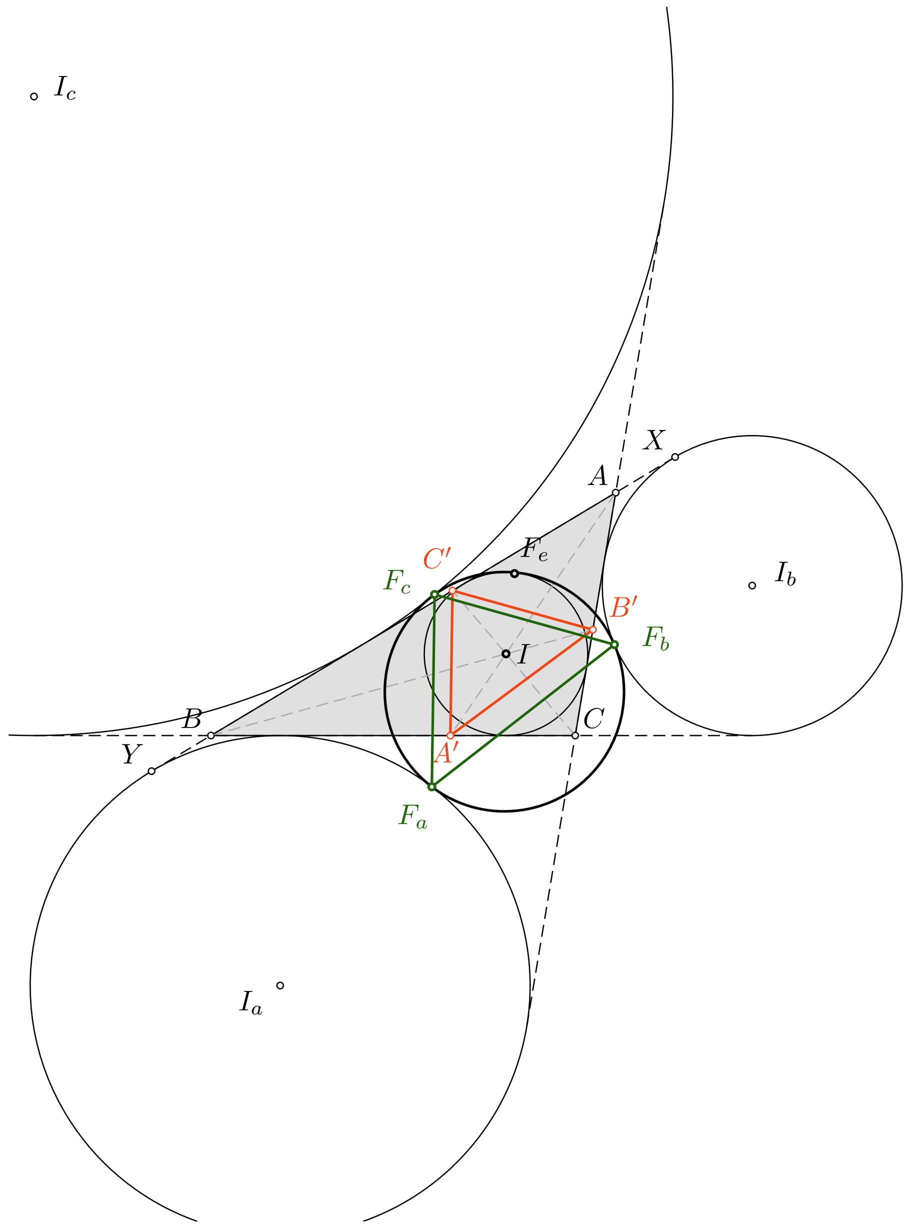
Сада посматрамо спола приписан круг над страницом $AB$, са центром у тачки $I_c$ и полупречником $r_c$. Због једноставнијег записа углове $BAC, CBA$ и $ACB$ пишемо редом као $\angle A, \angle B$ и $\angle C$.




Слика 3.4:

**Лема 3.3.3.** *Ако су у троуглу $ABC$, $A'$ и $B'$ тачке пресека симетрала углова $BAC$ и $CBA$ са страницама $CB$ и $AC$ редом, тада важи*

$$A'B' = \frac{abc\sqrt{R(R + 2r_c)}}{(c + a)(b + c)R}. \tag{3.2}$$




Слика 3.5:

*Доказ.* Нека су тачке $A_2$ и $B_2$ тачке пресека круга $k_c(I_c, r_c)$ са правама $BC$ и $AC$ редом. Нека су $K$ и $L$ тачке на дужи $I_cA_2$ и $I_cB_2$ тако да је $OK \parallel CB$, а $OL \parallel CA$. Како је $CA_2 = CB_2 = \frac{a+b+c}{2}$,

$$OL = \frac{a+b+c}{2} - \frac{b}{2} = \frac{c+a}{2} \quad \text{и} \quad OK = \frac{a+b+c}{2} - \frac{a}{2} = \frac{b+c}{2}.$$

Такође,

$$CB' = \frac{ba}{c+a}, \quad CA' = \frac{ab}{b+c},$$

и

$$\frac{CB'}{CA'} = \frac{b+c}{c+a} = \frac{OK}{OL}.$$

Дакле, троугао $CA'B'$ је сличан троуглу $OLK$, и

$$\frac{A'B'}{LK} = \frac{CB'}{OK} = \frac{2ab}{(c+a)(b+c)}. \tag{3.3}$$

Како је $OI_c$ пречник круга коју пролази кроз тачке $O, L, K$, важи

$$LK = OI_c \cdot \sin\angle LOK = OI_c \cdot \sin\angle ACB = OI_c \cdot \frac{c}{2R} \tag{3.4}$$

Комбинујући (3.3), (3.4) и Ојлерову формулу $OI_c^2 = R(R+2r_c)$, добијамо једнакост (3.2). ■

Сада доказујемо Теорему 3.3.1.

(а) Посматрамо Ојлеров круг $l(N, \frac{R}{2})$, (Слика 3.5). Нека су $X$ и $Y$ тачке пресека праве $AB$ са круговима $k_a(I_a, r_a)$ и $k_b(I_b, r_b)$ редом. Дужина $XY$ је

$$XY = AY + BX - AB = \frac{a+b+c}{2} + \frac{a+b+c}{2} - c = a+b.$$

Из Леме 3.3.2

$$F_aF_b = \frac{(a+b)\cdot\frac{R}{2}}{\sqrt{(\frac{R}{2}+r_1)(\frac{R}{2}+r_2)}} = \frac{(a+b)R}{\sqrt{(R+2r_1)(R+2r_2)}}.$$

У поређењу са (3.2) добијамо

$$\frac{A'B'}{F_aF_b} = \frac{abc\sqrt{R(R+2r_a)(R+2r_b)(R+2r_c)}}{(a+b)(b+c)(c+a)R^2}.$$

С обзиром да је десна страна претходне једнаости симетрична по $a, b, c$ и $r_a, r_b, r_c$, следи да је

$$\frac{A'B'}{F_aF_b} = \frac{B'C'}{F_bF_c} = \frac{C'A'}{F_cF_a}.$$

Из тога следи сличност троуглова $A'B'C'$ и $F_aF_bF_c$.

(б) Сада доказујемо да су тачке $F_e, B'$ и $F_b$ колинеарне. Из Фојербахове теореме, $F_e$ је центар хомотетије Ојлеровог и уписаног круга, а $F_b$ је центар хомотетије Ојлеровог круга и спoља приписаног круга над теменом $B$. Тачка $B'$ је центар хомотетије уписаног круга и спoља приписаног круга над теменом $B$. Ове три тачке деле стране троугла $I_cNI$ у следећим размерама

$$\frac{NF_e}{F_eI} = \frac{R}{2r}, \quad \frac{IB'}{B'I_2} = \frac{r}{r_b}, \quad \frac{I_bF_b}{F_bN} = \frac{2r_b}{R}.$$

Како је

$$\frac{NF_e}{F_eI}\cdot\frac{IB'}{B'I_b}\cdot\frac{I_bF_b}{F_bN}=-1,$$

на основу Менелајеве теореме[2] знамо да су $F_e, B'$ и $F_b$ колинеарне. Аналогно су $F_e, C', F_c$ колинеарне, као и $F_e, A', F_a$. Тиме смо показали да су троуглови $A'B'C'$ и $F_aF_bF_c$ перспективни у односу на $F_e$. Из (а) и (б) следи да

$$\angle C'F_eA' + \angle C'B'A' = \angle F_cF_eF_a + \angle F_cF_bF_a = 180°,$$

тј. круг који садржи тачке $A', B'$ и $C'$ садржи Фојербахову тачку $F_e$. Овим смо доказали Теорему 3.3.1.

## 3.4 Једноставан векторски доказ Фојербахове теореме

Фојербахова теорема тврди да је Ојлеров круг троугла тангентан на његов уписани круг и на три спољa приписана круга. Следи једноставан доказ Фојербахове теореме користећи једноставне векторске прорачуне, али пре тога ћемо показати сва помоћна тврђења.

Нека је $ABC$ произвољан троугао. Нека су $a$, $b$ и $c$ његове странице. Користићемо формуле за полуобим и површину

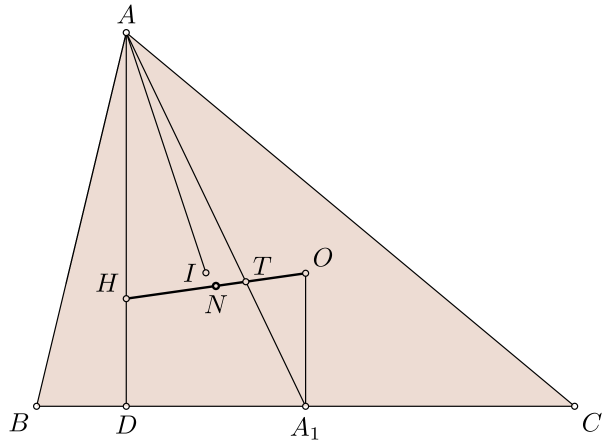
$$s=\frac{1}{2}(a+b+c),$$

$$P=\frac{abc}{4R}=rs=r_a(s-a)=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Нека је $k(I, r)$ уписани круг датог троугла, нека су $k_a(I_a, r_a)$, $k_c(I_c, r_c)$ и $k_c(I_c, r_c)$ спољa приписани кругови над страницама $BC, AC, AB$ редом. Нека је $o(O, R)$ описани круг датог троугла и нека је $l(N, \frac{R}{2})$ његов Ојлеров круг. Нека су $A_1$, $B_1$ и $C_1$ средишта страница $BC$, $AC$ и $AB$, редом. Нека је $T$ тежиште датог троугла и $H$ ортоцентар. Знамо да важи однос $OT : TH = 1 : 2$.

[2]Нека је $ABC$ троугао и нека су $D, E$ и $F_e$ тачке редом на правама $BC, AC$ и $AB$. Тада је потребан и довољан услов да су такве $D, E$ и $F_e$ колинеарне

$$\frac{\overrightarrow{AF_e}}{\overrightarrow{F_eB}}\cdot\frac{\overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{DC}}\cdot\frac{\overrightarrow{CE}}{\overrightarrow{EA}}=-1$$




Слика 3.6:

**Лема 3.4.1.** *Тачка $X$ дели страницу $BC$ троугла $ABC$ у односу $\lambda : 1$ ако и само ако*

$$\overrightarrow{OX} = \frac{1}{1+\lambda}\overrightarrow{OB} + \frac{\lambda}{1+\lambda}\overrightarrow{OC},$$

*где је $O$ произвољна тачка.*

*Доказ.* Тачка $X$ дели страницу $BC$ троугла $ABC$ у односу $\lambda : 1$, ако и само ако важи

$$\overrightarrow{BX} = \frac{\lambda}{1+\lambda}\overrightarrow{BC}.$$

Како је

$$\overrightarrow{BX} = \overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OB} \quad \text{и} \quad \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB},$$

следи да је дати услов еквивалентан

$$\overrightarrow{OX} = \frac{1}{1+\lambda}\overrightarrow{OB} + \frac{\lambda}{1+\lambda}\overrightarrow{OC}.$$

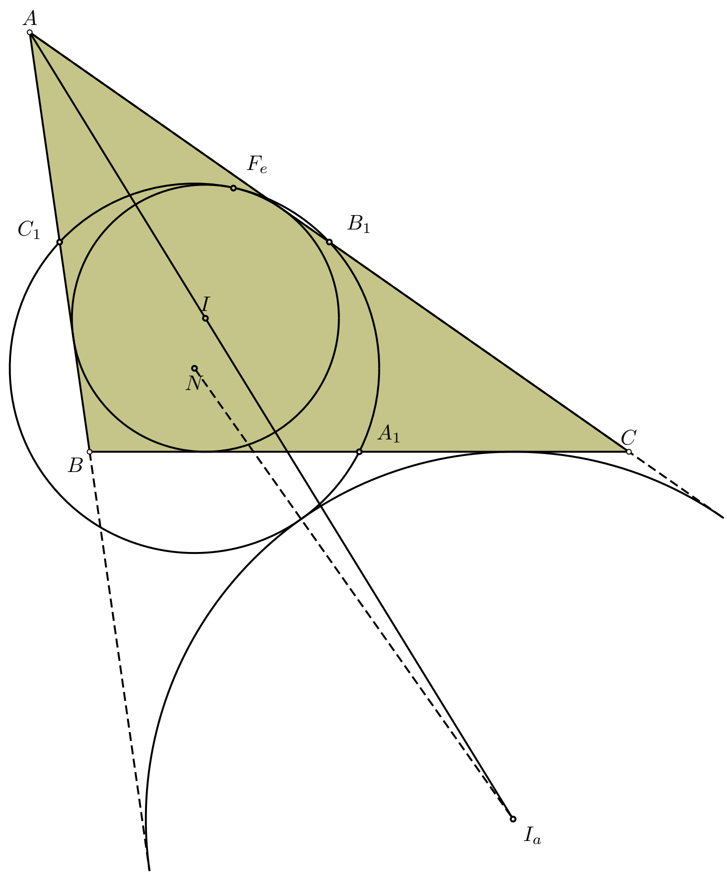
■

**Теорема 3.4.2.** *Нека је $X$ произвољна тачка равни троугла $ABC$, таква да важи*

$$\overrightarrow{OX} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} + \gamma\overrightarrow{OC}, \text{ где је } \alpha + \beta + \gamma = 1.$$

*Тада за било коју тачку $Y$, важи:*

$$XY^2 = \alpha AY^2 + \beta BY^2 + \gamma CY^2 - (\beta\gamma a^2 + \gamma\alpha b^2 + \alpha\beta c^2),$$




Слика 3.7:

*где су* $a, b, c$ *странице* $BC, AC$ *и* $AB$ *редом и* $\alpha = \angle BAC$, $\beta = \angle CBA$ *и* $\gamma = \angle ACB$.

*Доказ.* Нека је $X$ произвољна тачка равни троугла $ABC$, таква да важи

$$\overrightarrow{OX} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} + \gamma\overrightarrow{OC}, \text{ где је } \alpha + \beta + \gamma = 1,$$

добијамо

$$\begin{aligned}
XY^2 &= \mid \overrightarrow{XY} \mid^2 \\
&= \mid \overrightarrow{OY} - \overrightarrow{OX} \mid^2 \\
&= \mid \overrightarrow{OY} - (\alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} + \gamma\overrightarrow{OC}) \mid^2 \\
&= \mid \overrightarrow{OY} + \alpha(\overrightarrow{AY} - \overrightarrow{OY}) + \beta(\overrightarrow{BY} - \overrightarrow{OY}) + \gamma(\overrightarrow{CY} - \overrightarrow{OY}) \mid^2 \\
&= \mid \alpha\overrightarrow{AY} + \beta\overrightarrow{BY} + \gamma\overrightarrow{CY} + \overrightarrow{OY} - \alpha\overrightarrow{OY} - \beta\overrightarrow{OY} - \gamma\overrightarrow{OY} \mid^2 \\
&= \mid \alpha\overrightarrow{AY} + \beta\overrightarrow{BY} + \gamma\overrightarrow{CY} + \overrightarrow{OY} - \overrightarrow{OY}(\alpha + \beta + \gamma) \mid^2 \\
&= \mid \alpha\overrightarrow{AY} + \beta\overrightarrow{BY} + \gamma\overrightarrow{CY} \mid^2 \\
&= \alpha^2 AY^2 + \beta^2 BY^2 + \gamma^2 CY^2 + 2\alpha\beta\overrightarrow{AY} \cdot \overrightarrow{BY} + 2\alpha\gamma\overrightarrow{AY} \cdot \overrightarrow{BY} + 2\beta\gamma\overrightarrow{BY} \cdot \overrightarrow{CY}.
\end{aligned}$$

С друге стране, $c^2 = \mid \overrightarrow{AB} \mid^2 = \mid \overrightarrow{AY} - \overrightarrow{BY} \mid^2 = \overrightarrow{AY}^2 + \overrightarrow{BY}^2 - 2\overrightarrow{AY} \cdot \overrightarrow{BY}$. Тада је

$$\begin{aligned}
2\alpha\beta\overrightarrow{AY} \cdot \overrightarrow{BY} &= AY^2 + BY^2 - c^2, \\
2\alpha\gamma\overrightarrow{AY} \cdot \overrightarrow{CY} &= AY^2 + CY^2 - b^2, \\
2\beta\gamma\overrightarrow{BY} \cdot \overrightarrow{CY} &= BY^2 + CY^2 - a^2.
\end{aligned}$$

Коришћењем $\alpha^2 AY^2 + \alpha\beta AY^2 + \alpha\gamma AY^2 = \alpha AY^2(\alpha + \beta + \gamma) = \alpha AY^2$, следи да важи ова теорема. ■

Посматрајмо сада растојање центра Ојлеровог круга и темена троугла.

**Лема 3.4.3.** *Нека је $T$ тежиште троугла $ABC$. Тада је*

$$\overrightarrow{OT} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}).$$

*Доказ.* Нека је $\overrightarrow{OT'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$. Показаћемо да је $T' \equiv T$. Ако је $A_1$ средиште странице $BC$ датог троугла, из Леме 3.4.1 за $\lambda = 1$, следи $\overrightarrow{OA_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$. Рачунамо

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OA_1} &= \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}\right) \\
&= \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC} \\
&= \overrightarrow{OT'}.
\end{aligned}$$

Ово значи да $T'$ припада тежишној дужи $AA_1$. Аналогно, $T'$ припада тежишним дужима $BB'$ и $CC'$. Њихов пресек је тачка $T$, па следи да је $T \equiv T'$. ■

**Теорема 3.4.4.** *(Ојлерова права) Нека је $H$ ортоцентар троугла $ABC$. Тада важи једнакост*

$$\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OT}.$$

*Доказ.* Нека је $H'$ таква да $\overrightarrow{OH'} = 3\overrightarrow{OT}$. Показаћемо да је $H' \equiv H$. Према претходној леми, важи следеће

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OH'} &= 3\overrightarrow{OT}\\ &= 3\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB}\right)\\ &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.\end{aligned}$$

Тада је

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AH'} \cdot \overrightarrow{CB} &= \left(\overrightarrow{OH'} - \overrightarrow{OA}\right)\cdot\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}\right)\\ &= \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}\right)\cdot\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}\right)\\ &= \left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}\right)\\ &= \mid \overrightarrow{OB} \mid^2 - \mid \overrightarrow{OC} \mid^2\\ &= 0.\end{aligned}$$

Ово имплицира да тачка $H'$ припада висини из темена $A$ на страницу $BC$. Аналогно, тачка $H'$ припада и другим двема висинама троугла $ABC$. Како је $H$ дефинисано као пресек висина, следи да је $H = H'$. ∎

**Лема 3.4.5.** *Нека је $R$ полупречник описаног круга троугла $ABC$. Важи једнакост*

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = R^2 - \frac{1}{2}c^2.$$

*Доказ.*

$$\begin{aligned}c^2 &= \mid \overrightarrow{AB} \mid^2\\ &= \mid \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \mid^2\\ &= OA^2 + OB^2 - 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}\\ &= 2R^2 - 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}.\end{aligned}$$

∎

**Теорема 3.4.6.** *(Ојлерова права) Нека је $N$ центар Ојлеровог круга и $R$ полупречник описаног круга троугла $ABC$. Тада важи једнакост*

$$4AN^2 = R^2 - a^2 + b^2 + c^2.$$

*Доказ.* Пошто је $N$ средиште дужи $OH$, имамо $\overrightarrow{OH} = 2\overrightarrow{ON}$. На основу овога, Теореме 3.4.2 и Леме 3.4.5, добијамо:

$$\begin{aligned}
4AN^2 &= \left|\, 2\overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{ON}\, \right|^2 \\
&= \left|\, \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}\, \right|^2 \\
&= OA^2 + OB^2 + OC^2 - 2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC} + 2\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC} \\
&= 3R^2 - 2\left(R^2 - \frac{1}{2}c^2\right) - 2\left(R^2 - \frac{1}{2}b^2\right) + 2\left(R^2 - \frac{1}{2}a^2\right) \\
&= R^2 - a^2 + b^2 + c^2.
\end{aligned}$$

■

**Теорема 3.4.7.** *Нека је $I$ центар уписаног круга троугла $ABC$ и $s$ полуобим тог троугла. Тада важи*

$$\overrightarrow{OI} = \frac{a}{2s}\cdot\overrightarrow{OA} + \frac{b}{2s}\cdot\overrightarrow{OB} + \frac{c}{2s}\cdot\overrightarrow{OC}.$$

*Доказ.* Нека је $I'$ тачка таква да је $\overrightarrow{OI'} = \frac{a}{2s}\cdot\overrightarrow{OA} + \frac{b}{2s}\cdot\overrightarrow{OB} + \frac{c}{2s}\cdot\overrightarrow{OC}$. Показаћемо да је $I' \equiv I$. Нека је $A'$ пресек симетрале угла $BAC$ и странице $BC$. Применом синусне теореме на троуглове $ABA'$ и $ACA'$ и користећи $\sin(\pi - x) = \sin x$, добијамо

$$\frac{BA'}{c} = \frac{\sin\angle BAA'}{\sin\angle BA'A} = \frac{\sin\angle CAA'}{\sin\angle CA'A} = \frac{A'C}{b}.$$

Из једнакости $b\cdot BA' = c\cdot A'C$ и $BA' + A'C = a$ добијамо $BA' = \frac{ac}{b+c}$. Према Леми 3.4.1, $\overrightarrow{OA'} = \frac{b}{b+c}\overrightarrow{OB} + \frac{c}{b+c}\overrightarrow{OC}$. Сада је

$$\begin{aligned}
\frac{b+c}{2s}\cdot\overrightarrow{OA'} + \frac{a}{2s}\cdot\overrightarrow{OA} &= \frac{b+c}{2s}\left(\frac{b}{b+c}\cdot\overrightarrow{OB} + \frac{c}{b+c}\cdot\overrightarrow{OC}\right) + \frac{a}{2s}\cdot\overrightarrow{OA} \\
&= \frac{a}{2s}\cdot\overrightarrow{OA} + \frac{b}{2s}\cdot\overrightarrow{OB} + \frac{c}{2s}\cdot\overrightarrow{OC} \\
&= \overrightarrow{OI'}.
\end{aligned}$$

Из овога следи да је $I'$ на симетрали угла из темена $A$. Аналогно, $I'$ се налази на остале две симетрале углова троугла $ABC$. Како је $I$ пресек симетрала углова, добијамо да је $I = I'$. ■

**Теорема 3.4.8.** *(Ојлерова теорема) Нека је $I$ центар уписаног круга троугла $ABC$, $r$ његов полупречник и нека је $R$ полупречник описаног круга тог троугла. Важи*

$$OI^2 = R^2 - 2Rr.$$

*Доказ.* Коришћењем да је $A_1 = I$ и $Y = O$ из Теореме 3.4.2 добијамо:

$$\begin{aligned}
OI^2 &= \frac{a}{2s}R^2 + \frac{b}{2s}R^2 + \frac{c}{2s}R^2 - \left(\frac{bc}{(2s)^2}a^2 + \frac{ca}{(2s)^2}b^2 + \frac{ab}{(2s)^2}c^2\right) \\
&= R^2 - \frac{a^2bc + b^2ac + c^2ab}{(2s)^2} \\
&= R^2 - \frac{abc}{2s} \\
&= R^2 - \left(\frac{abc}{2P}\right)\left(\frac{P}{s}\right) \\
&= R^2 - 2Rr.
\end{aligned}$$

■

**Теорема 3.4.9.** *Нека су $I$ и $r$ центар и полупречник уписаног круга троугла $ABC$, $I_a$ и $r_a$ центар и полупречник споља приписаног круга и нека је $R$ полупречник описаног круга тог троугла. Важе следеће једнакости:*

$$IN = \frac{1}{2}R - r \quad \text{и} \quad I_aN = \frac{1}{2}R + r_a.$$

*Доказ.* На основу Теореме 3.4.2 ако је $A_1 = I$ и $Y = N$ добијамо растојање $IN$, из Теорема 3.4.6 и 3.4.7 добијамо растојања $AN, BN, CN$ и положај тачке $O$ у односу на тачке $A$, $B$ и $C$. Како бисмо скратили прорачун, користимо цикличне суме[3]. Користимо $\sum_{\circlearrowleft} a = a + b + c = 2s$ и добијамо:

[3]Циклична сума је врста суме у којој су чланови збира цикличне пермутације скупа променљивих. За три променљиве $a, b, c$ циклична сума функције $f(a, b, c)$ дефинише се као:

$$\sum_{\circlearrowleft} f(a, b, c) = f(a, b, c) + f(b, c, a) + f(c, a, b).$$

Овде се сваки члан суме добија цикличним пермутовањем променљивих. На пример, ако је $f(a, b, c) = ab$, тада:

$$\sum_{\circlearrowleft} ab = ab + bc + ca.$$

$$
\begin{aligned}
IN^2 &= \sum_{\circlearrowleft}\left(\frac{a}{2s}\right)\frac{R^2-a^2+b^2+c^2}{4} - \sum_{\circlearrowleft}\left(\frac{b}{2s}\cdot\frac{c}{2s}\right)a^2 \\
&= \frac{R^2}{8s}\left(\sum_{\circlearrowleft} a\right) + \frac{1}{8s}\left(\sum_{\circlearrowleft}(-a^3+ab^2+ac^2)\right) - \frac{abc}{(2s)^2}\left(\sum_{\circlearrowleft} a\right) \\
&= \frac{R^2}{4} + \frac{(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)+2abc}{8s} - \frac{abc}{2s} \\
&= \frac{R^2}{4} + \frac{(2s-2a)(2s-2b)(2s-2c)}{8s} - \frac{abc}{4s} \\
&= \frac{R^2}{4} + \frac{(P^2/s)}{s} - \frac{4RP}{4s} \\
&= \left(\frac{1}{2}R\right)^2 + r^2 - Rr \\
&= \left(\frac{1}{2}R - r\right)^2.
\end{aligned}
$$

Слично извођење важи за спољa приписан круг, с тим да је

$$
\overrightarrow{OI_a} = \frac{-a}{2(s-a)}\cdot\overrightarrow{OA} + \frac{b}{2(s-a)}\cdot\overrightarrow{OB} + \frac{c}{2(s-a)}\cdot\overrightarrow{OC},
$$

и користимо да је $P = r_a(s-a)$. Добијамо да је $I_aN = \frac{1}{2}R + r_a$. ■

**Теорема 3.4.10.** *(Фојербахова теорема) Ојлеров круг троугла је тангентан на уписани круг тог троугла и на три спољa приписана круга.*

*Доказ.* Претпоставимо да су Ојлеров и уписани круг неконцентрични. Два неконцентрична круга су тангентни изнутра ако и само ако је растојање између њихових центара једнако позитивној разлици њихових полупречника. Како је Ојлеров круг описан круг медијалног троугла $A'B'C'$, његов полупречник је $\frac{1}{2}R$. Дакле, разлика полупречника ова два круга је $\frac{1}{2}R - r$. Из претходне теореме је $IN = \frac{1}{2}R - r$. Следи да су Ојлеров и уписани круг тангентни изнутра. Такође, из претходне теореме закључујемо да су Ојлеров круг и спољa приписани кругови спољa тангентни, јер важи да је $I_aN = \frac{1}{2}R + r_a$. Ако су Ојлеров и уписани круг концентрични, тј. $I \equiv N$, тада је $0 = IN = \frac{1}{2}R - r = \frac{OI^2}{2R}$, што имплицира да је $I \equiv O$. Из овога следи да је троугао $ABC$ једнакостраничан. ■

## 3.5 Својства растојања Фојербахових тачака

Нека је $F_e$ унутрашња Фојербахова тачка троугла $ABC$. Може се доказати да за произвољну тачку $O$ равни троугла $ABC$ важи

$$\overrightarrow{OF_e} = (s-a)(b-c)^2 \cdot \overrightarrow{OA} + (s-b)(c-a)^2 \cdot \overrightarrow{OB} + (s-c)(a-b)^2 \cdot \overrightarrow{OC}. \quad (3.5)$$

Због једноставности записа, користимо ознаке

$$\begin{aligned} u &:= s-a = \frac{b+c-a}{2}, \\ v &:= s-b = \frac{a+c-b}{2}, \\ w &:= s-c = \frac{a+b-c}{2}. \end{aligned}$$

Тако је

$$\overrightarrow{OF_e} = u(v-w)^2 \cdot \overrightarrow{OA} + v(w-u)^2 \cdot \overrightarrow{OB} + w(u-v)^2 \cdot \overrightarrow{OC}, \quad (3.6)$$

са збиром координата

$$\begin{aligned} \sigma_e &:= u(v-w)^2 + v(w-u)^2 + w(u-v)^2 \\ &= (v+w)(w+u)(u+v) - 8uvw \\ &= abc - 8r^2 s \\ &= 4Rrs - 8r^2 s \\ &= 4rs(R-2r) \\ &= \frac{4P}{R} \cdot R(R-2r) \\ &= \frac{4P}{R} \cdot OI^2, \end{aligned}$$

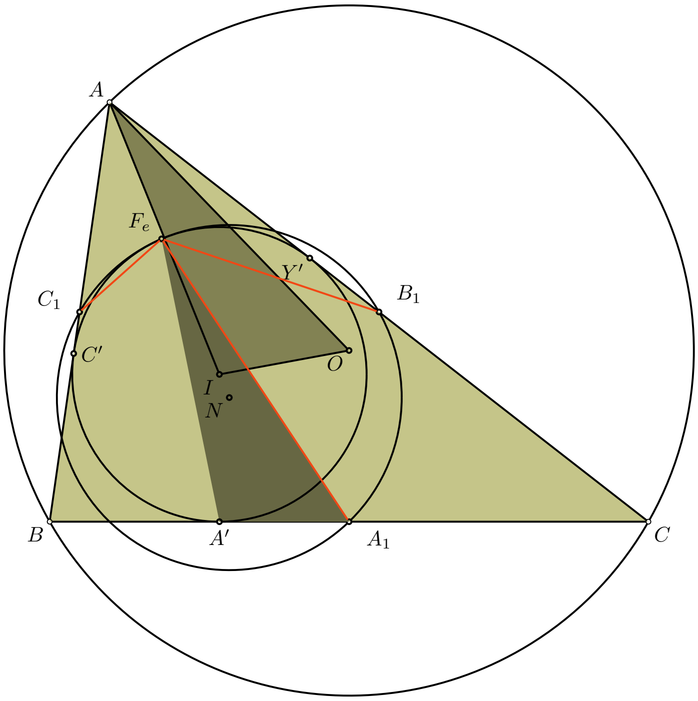
где су $O$ и $I$ центар описаног и центар уписаног круга троугла $ABC$. Такође, користимо

$$S_A := \frac{b^2+c^2-a^2}{2}, \quad S_B := \frac{c^2+a^2-b^2}{2}, \quad S_C := \frac{a^2+b^2-c^2}{2}.$$

**Лема 3.5.1.** *Важи:*

1. $v+w=a$, $w+u=b$, $u+v=c$, $u+v+w=s$.

2. $r = \frac{P}{s}, \quad r_a = \frac{P}{u}, \quad r_b = \frac{P}{v}, \quad r_c = \frac{P}{w}.$




Слика 3.8:

3. $uvw = r^2 s = rP$.

4. $vw + wu + uv = r(4R + r)$.

5. $S_A = us - vw$, $S_B = vs - wu$, $S_C = ws - uv$.

*Доказ.* Доказујемо последње две тачке.

$$\begin{aligned} vw + wu + uv &= \frac{uvw}{u} + \frac{uvw}{v} + \frac{uvw}{w} \\ &= \frac{rP}{u} + \frac{rP}{v} + \frac{rP}{w} \\ &= r(r_a + r_b + r_c) \\ &= r(4R + r), \end{aligned}$$

jep je $r_a + r_b + r_c = 4R + r$.

$$\begin{aligned}S_A &= \frac{b^2+c^2-a^2}{2}\\ &= \frac{(w+u)^2+(u+v)^2-(v+w)^2}{2}\\ &= u((v+u+w)-vw)\\ &= us-vw.\end{aligned}$$

■

**Тврђење 3.3.** *Растојање унутрашње Фојербахове тачке и средишта $A_1$ странице $BC$ троугла $ABC$ је*

$$F_eA_1 = \frac{R}{2OI}\cdot|b-c|.$$

*Доказ.* Нека је $\overrightarrow{OP} = u\overrightarrow{OA}+v\overrightarrow{OB}+w\overrightarrow{OC}$ и $Q$ произвољна тачка равни троугла $ABC$, која је дата са $\overrightarrow{OQ} = u'\overrightarrow{OA}+v'\overrightarrow{OB}+w'\overrightarrow{OC}$. Тада је растојање ових тачака

$$PQ^2 = S_A(u-u')^2+S_B(v-v')^2+S_C(w-w')^2,$$

и важи

$$\overrightarrow{OF_e} = \frac{1}{\sigma_e}(u(v-w)^2\overrightarrow{OA}+v(w-u)^2\overrightarrow{OB}+w(u-v)^2\overrightarrow{OC}).$$

Како је $\overrightarrow{OX} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sigma_e}v(w-u)^2-\frac{1}{2} &= \frac{1}{2\sigma_e}(2v(w-u)^2-\sigma_e)\\ &= \frac{-1}{2\sigma_e}(u(v-w)^2-v(w-u)^2+w(u-v)^2)\\ &= \frac{1}{2\sigma_e}(v-w)(w+u)(u-v) \quad \text{и}\end{aligned}$$

$$\frac{1}{\sigma_e}w(u-v)^2-\frac{1}{2} = \frac{1}{2\sigma_e}(v-w)(w-u)(u+v),$$

растојање $F_eA_1$ дато је изразом:

$$
\begin{aligned}
F_eA_1{}^2 = S_A \cdot \left(\frac{1}{\sigma_e}(u(v-w)^2)\right)^2 + S_B\left(\frac{1}{\sigma_e}(v(w-u)^2) - \frac{1}{2}\right)^2 \\
+ S_C\left(\frac{1}{2\sigma_e}w(u-v) - \frac{1}{2}\right)^2 \\
= \frac{(v-w)^2}{4\sigma_e^2}(4(us-vw)u^2(v-w)^2+ \\
(vs-wu)(w+u)^2(u-v)^2 + (ws-uv)(w-u)^2(u+v)^2) \\
= \frac{(v-w)^2}{4\sigma_e^2}(4(us-vw)u^2(v-w)^2+ \\
(vs-wu)(w+u)^2(u-v)^2 + (ws-uv)(w-u)^2(u+v)^2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= \frac{(v-w)^2}{4\sigma_e^2}(s(4u^3(v-w)^2 + v(w+u)^2(u-v)^2 + w(w-u)^2(u+v)^2) \\
-u(4uvw(v-w)^2 + w(w+u)(u-v)^2 + v(w-u)^2(u+v)^2)).
\end{aligned}
$$

Изрази

$$4u^3(v-w)^2 + v(w+u)^2(u-v)^2 + w(w-u)^2(u+v)^2 \quad \text{и}$$

$$4uvw(v-w)^2 + w(w+u)(u-v)^2 + v(w-u)^2(u+v)^2,$$

једнаки су изразу

$$(w+u)(u+v)((v+w)(w+u)(u+v) - 8uvw) = (w+u+v)\sigma_e.$$

Дакле,

$$
\begin{aligned}
F_eA_1{}^2 &= \frac{(v-w)^2}{4\sigma_e^2} \cdot (s-u)(w+u)(u+v)\sigma_e \\
&= \frac{(v+w)(w+u)(u+v)}{4\sigma_e} \cdot (v-w)^2 \\
&= \frac{abc}{4\sigma_e} \cdot (b-c)^2 \\
&= \frac{R^2}{4 \cdot OI^2} \cdot (b-c)^2.
\end{aligned}
$$

■

Сада имамо непоходна тврђења за доказ следеће теореме.

**Теорема 3.5.2.** *Ако је $F_e$ унутрашња Фојербахова тачка троугла $ABC$ и ако су $A_1$, $B_1$ и $C_1$ средишта страница $BC$, $CA$ и $AB$, редом, тада је највеће од растојања $F_eA_1$, $F_eB_1$, $F_eC_1$ једнако збиру преостала два.*

*Доказ.* Ако су $B_1$ и $C_1$ средишта страница $CA$ и $AB$, редом, тада на основу претходног тврђења важи

$$F_eB_1 = \frac{R}{2 \cdot OI} \cdot |c-a| \quad \text{и} \quad F_eC_1 = \frac{R}{2 \cdot OI} \cdot |a-b|.$$

Нека је $F_eB_1$ највеће растојање, тј. нека је вредност $|c-a|$ највећа од преостале две. Дакле, можемо претпоставити да је $c > b > a$. Тада је збир преостала два растојања

$$\begin{aligned} F_eA_1 + F_eC_1 &= \frac{R}{2 \cdot OI}\Big(|b-c| + |a-b|\Big) \\ &= \frac{F_eB_1}{c-a}(c-b+b-a) \\ &= F_eB_1. \end{aligned}$$

■

**Тврђење 3.4.** *Нека су $A', B'$ и $C'$ подножја нормала из центра уписаног круга $I$ троугла $ABC$ на странице $BC$, $CA$ и $AB$, редом. Нека су $A_1, B_1$ и $C_1$ средишта страница $BC$, $CA$ и $AB$, редом. Важи да је $\triangle F_eA_1A' \sim \triangle AOI$, $\triangle F_eB_1B' \sim \triangle BOI$ и $\triangle F_eC_1C' \sim \triangle COI$.*

*Доказ.* Доказујемо сличност троуглова $F_eA_1A'$ и $AOI$. Како је

$$BA' = s - b = \frac{c+a-b}{2}, \quad A_1A' = \left|\frac{a}{2} - \frac{c+a-b}{2}\right| = \frac{1}{2}|b-c|,$$

према Тврђењу 3.3 важи

$$\frac{F_eA_1}{AO} = \frac{A_1A'}{OI} = \frac{|b-c|}{2 \cdot OI}.$$

Остаје да се покаже $\frac{F_eA'}{AI} = \frac{|b-c|}{2 \cdot OI}$ Дакле, сада рачунамо дужину $F_eA'$. Користећи

$$\overrightarrow{OF_e} = \frac{1}{\sigma_e}(u(v-w)^2\overrightarrow{OA} + v(w-u)^2\overrightarrow{OB} + w(u-v)^2\overrightarrow{OC}) \quad \text{и}$$

$$\overrightarrow{OA'} = \frac{1}{a}(s-c)\overrightarrow{OB} + \frac{1}{a}(s-b)\overrightarrow{OC} = \frac{w}{v+w}\overrightarrow{OB} + \frac{v}{v+w}\overrightarrow{OC},$$

из Леме 3.5.3 добијамо да је

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sigma_e}v(w-u)^2-\frac{w}{v+w}&=\frac{v(w-u)^2}{\sigma_e}-\frac{w}{v+w}\\&=\frac{v(v+w)(w-u)^2-w\sigma_e}{(v+w)\sigma_e}\\&=\frac{u(v-w)((v+w)(w+u)-4vw)}{(v+w)\sigma_e}.\end{aligned}$$

Слично,

$$\frac{1}{\sigma_e}w(u-v)^2-\frac{v}{v+w}=\frac{-u(w-u)((v+w)(u+v)-4wv)}{(v+w)\sigma_e}.$$

Дакле,

$$\begin{aligned}F_eA'^2&=S_A\left(\frac{u(v-w)^2}{\sigma_e}\right)^2+S_B\left(\frac{v(w-u)^2}{\sigma_e}-\frac{w}{v+w}\right)^2+S_C\left(\frac{w(u-v)^2}{\sigma_e}-\frac{v}{v+w}\right)^2\\&=\frac{u^2(v-w)^2}{(v+w)^2\sigma_e^2}\cdot\mathcal{F},\end{aligned}$$

где је

$$\mathcal{F}=S_A(v+w)^2(v-w)^2+S_B((v+w)(w+u)-4wv)^2+S_C((u+v)(v+w)-4wv)^2. \tag{3.7}$$

Користећи из Леме 3.5.3 да је $\mathcal{F}=4vw(v+w)\sigma_e$, имамо да је

$$\begin{aligned}F_eA'^2&=\frac{u^2(v-w)^2}{(v+w)^2\sigma_e^2}\cdot 4vw(v+w)\sigma_e\\&=\frac{4u^2vw(v-w)^2}{(v+w)\sigma_e}\\&=\frac{4u\cdot r^2s(b-c)^2}{(v+w)\cdot 4rs\cdot OI^2}\\&=\frac{u\cdot Rr(b-c)^2}{(v+w)OI^2}.\end{aligned}$$

Даље,

$$\begin{aligned}AI^2&=\frac{r^2}{\sin^2\frac{\angle IAO}{2}}\\&=\frac{uvw}{s}\cdot\frac{(w+u)(u+v)}{vw}\\&=\frac{u(w+u)(u+v)}{s}.\end{aligned}$$

Стога,

$$\begin{aligned}\frac{F_eA'^2}{AI^2} &= \frac{u\cdot Rr(b-c)^2}{(v+w)OI^2}\cdot\frac{s}{u(w+u)(u+v)}\\ &= \frac{Rrs(b-c)^2}{4abc\cdot OI^2}\\ &= \frac{(b-c)^2}{4\cdot OI^2},\end{aligned}$$

и добијамо да је

$$\frac{F_eA'}{AI} = \frac{|b-c|}{2\cdot OI},$$

чиме смо доказали сличност троуглова $F_eA_1A'$ и $AOI$. ■

**Лема 3.5.3.** *Важи следеће:*

*(а)* $v(v+w)(w-u)^2 - w\sigma_e = u(v-w)((v+w)(w+u)-4vw)$.

*(б)* $\mathcal{F} = 4vw(v+w)\sigma_e$.

*Доказ.* (а) Користимо $\sigma_e = (v+w)(w+u)(u+v) - 8uvw$, из чега следи

$$\begin{aligned}&v(v+w)(w-u)^2 - w\sigma_e =\\ &= v(v+w)(w-u)^2 - w((v+w)(w+u)(u+v) - 8uvw)\\ &= (v+w)(v(w-u)^2 - w(w+u)(u+v)) + 8uvw^2\\ &= (v+w)(u^2v - uw^2 - u^2w - 3uvw) + 8uvw^2\\ &= u((v+w)(uv - uw - w^2 - 3vw) + 8vw^2)\\ &= u(u(v^2-w^2) - (v+w)w(3v+w) + 8vw^2)\\ &= u(u(v^2-w^2) - w((v+w)(3v+w) - 8vw))\\ &= u(u(v^2-w^2) - w(v-w)(3v-w))\\ &= u(v-w)(u(v+w) + w(w-3v))\\ &= u(v-w)((v+w)(w+u) - 4vw).\end{aligned}$$

(б) Полином $\mathcal{F}$ из (3.7) је

$$\begin{aligned}\mathcal{F} = (us-vw)(v+w)^2(v-w)^2 + (vs-wu)((v+w)(w+u)-4vw)^2&\\ +(ws-uv)((u+v)(v+w)-4vw)^2&.\end{aligned}$$

Имајући у виду да је

$$\begin{aligned}
&u(v+w)^2(v-w)^2+v((v+w)(w+u)-4vw)^2+w((u+v)(v+w)-4vw)^2\\
&=u(v+w)^2(v-w)^2+v(v+w)^2(w+u)^2-8v^2w(v+w)(w+u)+16v^3w^2\\
&\quad+w(u+v)^2(v+w)^2-8vw^2(u+v)(v+w)+16v^2w^3\\
&=(v+w)\big(u(v+w)(v-w)^2+v(v+w)(w+u)^2+w(u+v)^2(v+w)\\
&\quad-8v^2w(w+u)-8vw^2(u+v)+16v^2w^2\big)\\
&=(v+w)\big(u(v+w)(v-w)^2+v(v+w)(w+u)^2+w(u+v)^2(v+w)\\
&\quad-8uvw(v+w)\big)\\
&=(v+w)^2\big(u(v-w)^2+v(w+u)^2+w(u+v)^2-8uvw\big)\\
&=(v+w)^2\big((v+w)(w+u)(u+v)-8uvw\big)\\
&=(v+w)^2\sigma_e,
\end{aligned}$$

Збир чланова полинома $\mathcal{F}$ је

$$\begin{aligned}
&-vw(v+w)^2(v-w)^2-wu\Big((v+w)(w+u)-4vw\Big)^2\\
&\quad-uv\Big((u+v)(v+w)-4vw\Big)^2\\
&=-vw(v+w)^2(v-w)^2-wu(v+w)^2(w+u)^2\\
&\quad+8uvw^2(v+w)(w+u)-16uv^2w^3\\
&\quad-uv(u+v)^2(v+w)^2+8uv^2w(u+v)(v+w)-16uv^3w^2\\
&=-(v+w)\Big(vw(v+w)(v-w)^2+wu(v+w)(w+u)^2\\
&\quad+uv(u+v)^2(v+w)-8uvw^2(w+u)-8uv^2w(u+v)+16uv^2w^2\Big)\\
&=-(v+w)\Big((v+w)\left(vw(v-w)^2+wu(w+u)^2+uv(u+v)^2\right)\\
&\quad-8uvw\left(u(v+w)+(v-w)^2\right)\Big)\\
&=-(v+w)\Big((v+w)(w+u)(u+v)\left(u(v+w)+(v-w)^2\right)\\
&\quad-8uvw\left(u(v+w)+(v-w)^2\right)\Big)\\
&=-(v+w)\left(u(v+w)+(v-w)^2\right)\Big((v+w)(w+u)(u+v)-8uvw\Big)\\
&=-(v+w)\left(u(v+w)+(v-w)^2\right)\sigma_e.
\end{aligned}$$

На крају је

$$\begin{aligned}\mathcal{F} &= (v+w)^2\sigma_{es} - (v+w)\Big(u(v+w) + (v-w)^2\Big)\sigma_e \\ &= (v+w)\sigma_e\Big((v+w)(u+v+w) - \big(u(v+w) + (v-w)^2\big)\Big) \\ &= 4vw(v+w)\sigma_e.\end{aligned}$$

■

Разматрамо даље растојања спољашњих Фојербахових тачака од средишта страница троугла. Може се показати да важи

$$\overrightarrow{OF_a} = -s(b-c)^2\overrightarrow{OA} + (s-c)(c+a)^2\overrightarrow{OB} + (s-b)(a+b)^2\overrightarrow{OC}.$$

Заменом $(a,b,c)$ у $(-a,b,c)$, добијамо $-\overrightarrow{OF_e}$. При овој трансформацији, $(u,v,w,s)$ постаје $(s,-w,-v,u)$. Ако сада изразимо $\overrightarrow{OF_a}$ помоћу $u$, $v$ и $w$, добићемо

$$\overrightarrow{OF_a} = -s(v-w)^2\overrightarrow{OA} + w(s+v)^2\overrightarrow{OB} + v(s+w)^2\overrightarrow{OC},$$

са координатном сумом $\sigma_e$

$$-\sigma_e = -(v+w)(w+u)(u+v) + 8uvw.$$

Дакле,

$$\begin{aligned}\sigma_a &= (v+w)(w+u)(u+v) + 8vs \\ &= 4P(R+2r_a) \\ &= \frac{4P}{R}\cdot R(R+2r_a) \\ &= \frac{4P}{R}\cdot OI_a^2\end{aligned}$$

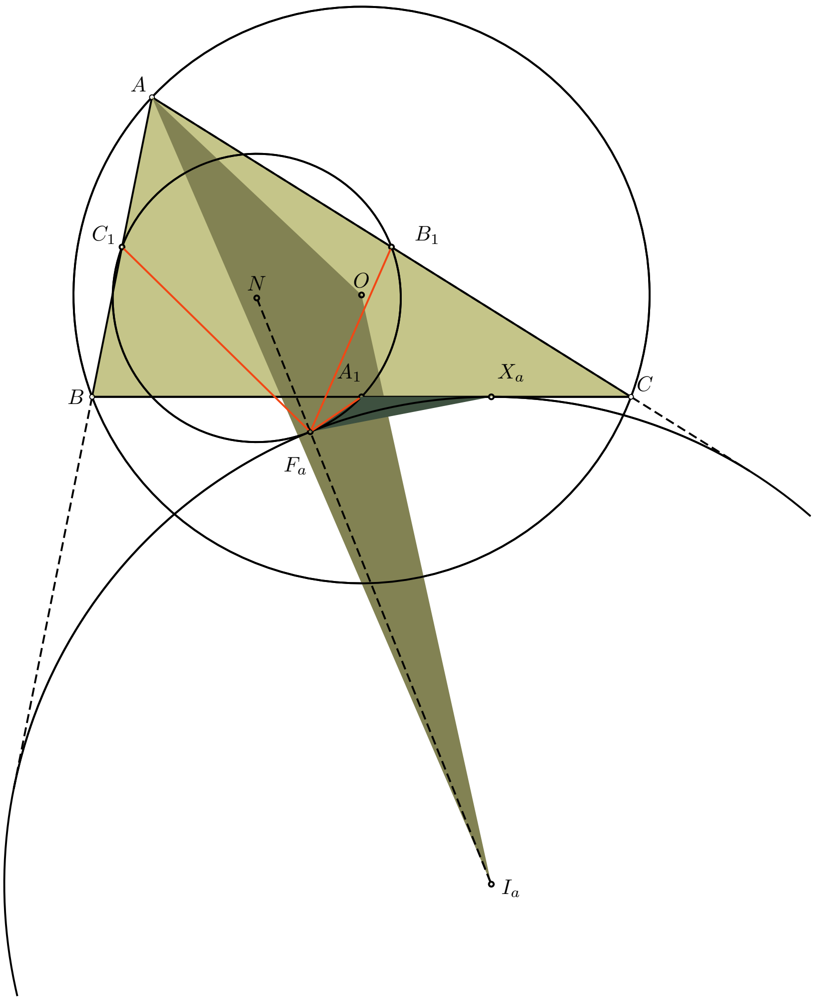
Такође, датим трансформацијама добијамо

$$F_eA_1 = \frac{R}{2\cdot OI}|b-c| \quad\mapsto\quad F_aA_1 = \frac{R}{2\cdot OI_a}|b-c|;$$

$$F_eB_1 = \frac{R}{2\cdot OI}|c-a| \quad\mapsto\quad F_aB_1 = \frac{R}{2\cdot OI_a}(c+a);$$

$$F_eC_1 = \frac{R}{2\cdot OI}|a-b| \quad\mapsto\quad F_aC_1 = \frac{R}{2\cdot OI_a}(a+b).$$

Како је $a + \max(b,c) = (a+\min(b,c)) + |b-c|$, добијамо аналогију Теореме 3.5.2.




Слика 3.9:

**Тврђење 3.5.** *Нека је $F_a$ пресечна тачка Ојлеровог круга и споља приписаног круга над теменом $A$, троугла $ABC$. Нека су $A_1, B_1, C_1$ средишта страница $BC, AC, AB$, редом. Тада је једно од растојања $F_aA_1$, $F_aB_1$, $F_aC_1$ једнако збиру преостала два.*

Аналогно Тврђењу 3.4 такође важи да су троуглови $F_aA_1X_a$ и $AOI_a$ слични. Дакле, из релације

$$\frac{F_eA_1}{AI} = \frac{|b-c|}{2 \cdot OI},$$

добијамо

$$\frac{F_aX_a}{AI_a} = \frac{|b-c|}{2 \cdot OI_a} = \frac{A_1X_a}{OI_a} = \frac{F_aA_1}{AO}.$$

Одавде следи сличност троуглова $F_aA_1X_a$ и $AOI_a$ (Слика 3.9). Аналогно се добијају једнакости за друга два спаља приписана круга.

## 3.6 Растојање Фојербахових тачака

Разматрамо удаљеност Фојербахових тачака од темена троугла $ABC$ и њихово међусобно растојање. Дакле, знамо да важе следеће релације:

$$F_eA_1 = \frac{|b-c|R}{2 \cdot OI}, \quad F_eB_1 = \frac{|c-a|R}{2 \cdot OI}, \quad F_eC_1 = \frac{|a-b|R}{2 \cdot OI},$$
$$F_aA_1 = \frac{|b-c|R}{2 \cdot OI_a}, \quad F_aB_1 = \frac{(c+a)R}{2 \cdot OI_a}, \quad F_aC_1 = \frac{(a+b)R}{2 \cdot OI_a}.$$

Користећи Ојлерове формуле, $OI^2 = R(R-r)$ и $OI_a{}^2 = R(R-r_a)$, добијамо еквивалентне релације:

$$F_eA_1{}^2 = \frac{(b-c)^2R}{4(R-2r)}, \quad F_eB_1{}^2 = \frac{(c-a)^2R}{4(R-2r)}, \quad F_eC_1{}^2 = \frac{(a-b)^2R}{4(R-2r)}, \tag{3.8}$$
$$F_aA_1{}^2 = \frac{(b-c)^2R}{4(R+2r_a)}, \quad F_aB_1{}^2 = \frac{(c+a)^2R}{4(R+2r_a)}, \quad F_aC_1{}^2 = \frac{(a+b)^2R}{4(R+2r_a)}. \tag{3.9}$$

Најпре, посматрамо Фојербахове тачке и темена троугла $ABC$.

**Тврђење 3.6.** *Растојања унутрашње Фојербахове тачке $F_e$ и темена троугла $ABC$ дата су изразима:*

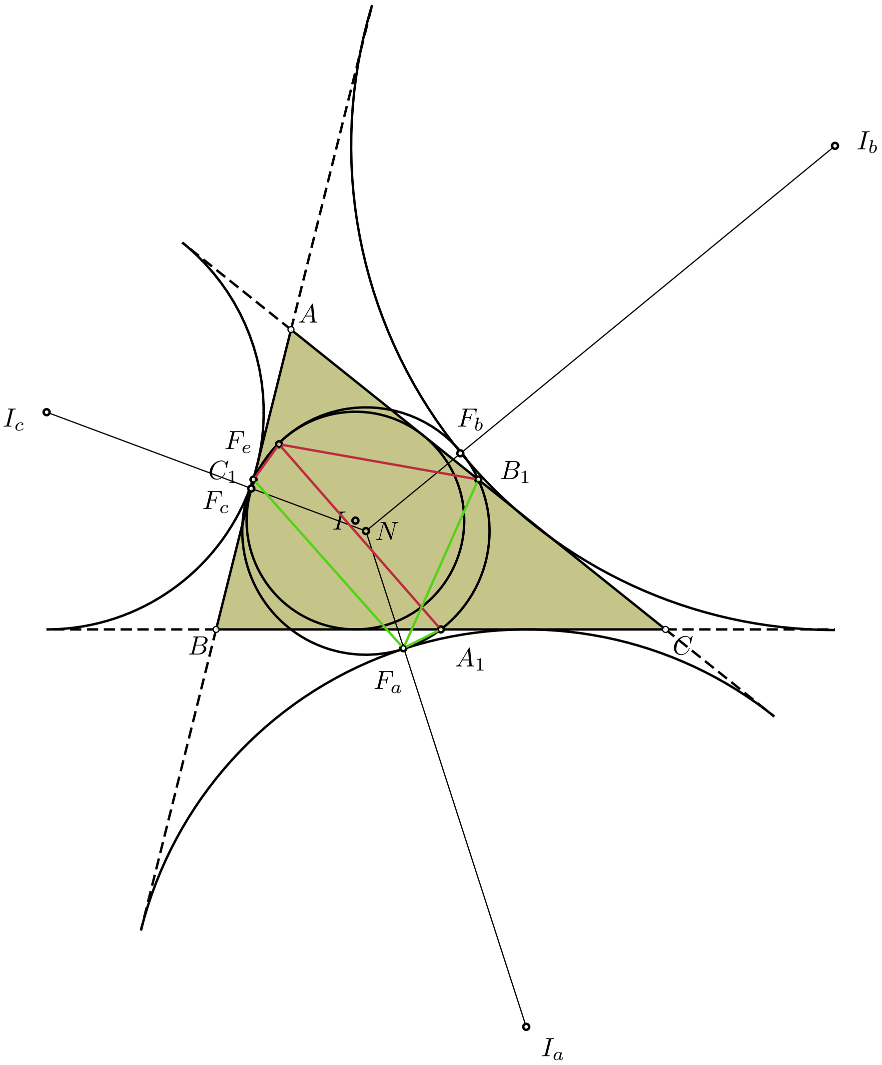
$$AF_e{}^2 = \frac{(s-a)^2R - rS_A}{R-2r}, \quad BF_e{}^2 = \frac{(s-b)^2R - rS_B}{R-2r}, \quad CF_e{}^2 = \frac{(s-c)^2R - rS_C}{R-2r},$$

*где је $s$ је полуобим датог троугла и*

$$S_A := \frac{b^2+c^2-a^2}{2}, \quad S_B = \frac{c^2+a^2-b^2}{2}, \quad S_C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2}.$$

*Доказ.* Посматрамо троуглове $F_eBC$, $F_eCA$, $F_eAB$ и примењујемо теорему о тежишној дужи.

$$F_eA_1{}^2 = \frac{BF_e^2 + CF_e^2}{2} - \frac{a^2}{4}, \tag{3.10}$$
$$F_eB_1{}^2 = \frac{CF_e^2 + AF_e^2}{2} - \frac{b^2}{4}, \tag{3.11}$$
$$F_eC_1{}^2 = \frac{AF_e^2 + BF_e^2}{2} - \frac{c^2}{4}. \tag{3.12}$$




Слика 3.10:

Комбиновањем $-(3.10) + (3.11) + (3.12)$, добијамо

$$-F_eA_1{}^2 + F_eB_1{}^2 + F_eC_1{}^2 = AF_e^2 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4}.$$

Дакле,

$$\begin{aligned}AF_e{}^2 &= -F_eA_1{}^2 + F_eB_1{}^2 + F_eC_1{}^2 + \frac{b^2+c^2-a^2}{4}\\ &= \frac{\left(-(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2\right)R}{4(R-2r)} + \frac{S_A}{2}\\ &= \frac{2(a-b)(a-c)R}{4(R-2r)} + \frac{2(R-2r)S_A}{4(R-2r)}\\ &= \frac{\left(2(a-b)(a-c)+2S_A\right)R - 4rS_A}{4(R-2r)}.\end{aligned}$$

Како је

$$2(a-b)(a-c)+2S_A = 2(a-b)(a-c)+(b^2+c^2-a^2) = (b+c-a)^2 = 4(s-a)^2$$

имамо $AF_e{}^2 = \frac{(s-a)^2R-rS_A}{R-2r}$. Аналогно добијамо друге две једнакости. ■

**Тврђење 3.7.** *Нека је $F_a$ спољашња Фојербахова тачка над темeном $A$, троугла $ABC$. Растојања између $F_a$ и темена троугла, дата су следећим једнакостима:*

$$AF_a{}^2 = \frac{s^2R+r_aS_A}{R+2r_a},\quad BF_a{}^2 = \frac{(s-c)^2R+r_aS_B}{R+2r_a},\quad CF_a{}^2 = \frac{(s-b)^2R+r_aS_C}{R+2r_a}.$$

*Доказ.* Примењујући теорему о тежишној дужи на троуглове $F_aBC$, $F_aCA$ и $F_aAB$, добијамо

$$F_aA_1{}^2 = \frac{BF_a{}^2+CF_a{}^2}{2} - \frac{a^2}{4}; \tag{3.13}$$

$$F_aB_1{}^2 = \frac{CF_a{}^2+AF_a{}^2}{2} - \frac{b^2}{4}; \tag{3.14}$$

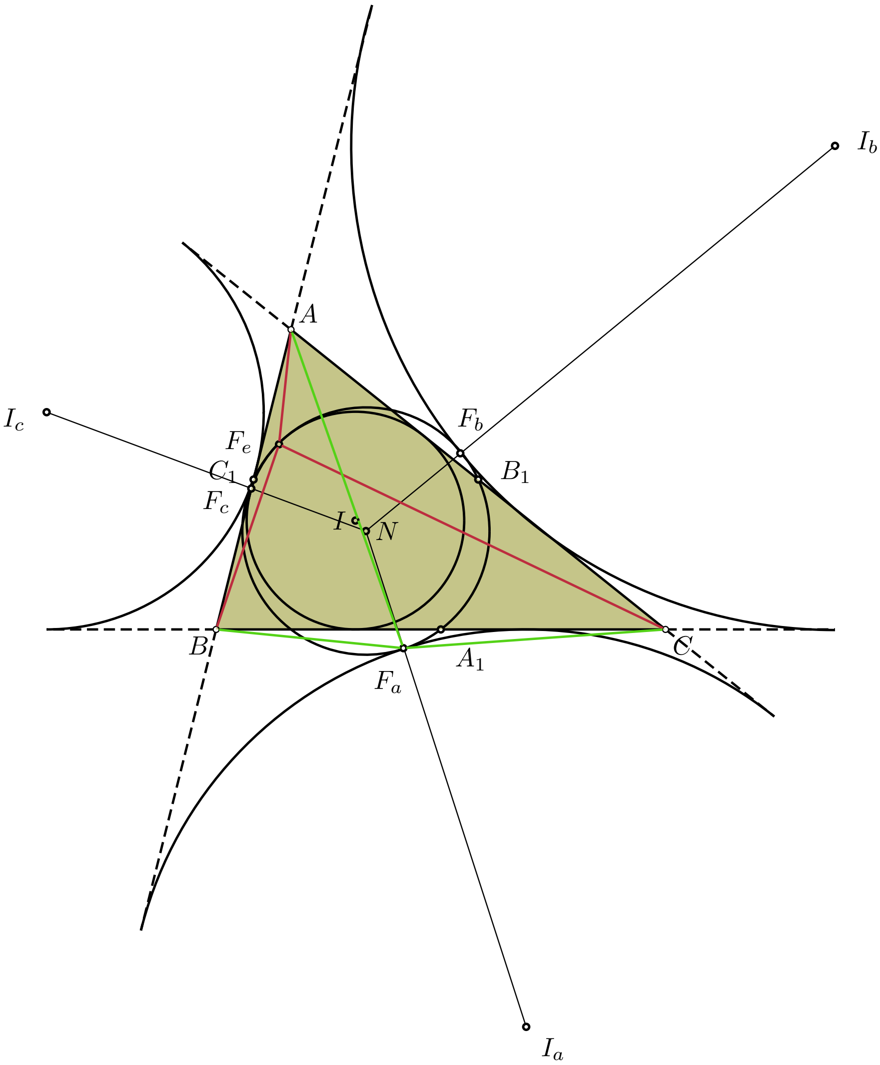
$$F_aC_1{}^2 = \frac{AF_a{}^2+BF_a{}^2}{2} - \frac{c^2}{4}. \tag{3.15}$$

Комбиновањем $-(3.13)+(3.14)+(3.15)$ добијамо

$$-F_aA_1{}^2 + F_aB_1{}^2 + F_aC_1{}^2 = AF_a{}^2 - \frac{b^2+c^2-a^2}{4}.$$

Дакле,

$$\begin{aligned}AF_a{}^2 &= -FaA_1{}^2 + F_aB_1{}^2 + F_aC_1{}^2 + \frac{S_A}{2}\\ &= \frac{\left(-(b-c)^2+(c+a)^2+(a+b)^2\right)R}{4(R+2r_a)} + \frac{S_A}{2}\\ &= \frac{2(a+b)(a+c)R}{4(R+2r_a)} + \frac{2(R+2r_a)S_A}{4(R+2r_a)}\\ &= \frac{\left(2(a+b)(a+c)+2S_A\right)R + 4r_aS_A}{4(R+2r_a)}.\end{aligned}$$




Слика 3.11:

Како je

$$2(a+b)(a+c)+2S_A = 2(a+b)(a+c)+(b^2+c^2-a^2) = (a+b+c)^2 = 4s^2.$$

добијамо $AF_a{}^2 = \frac{s^2R+r_aS_A}{R+2r_a}$. Са друге стране, комбинацијом (3.13) − (3.14) + (3.15) добијамо

$$F_aA_1{}^2 - F_aB_1{}^2 + F_aC_1{}^2 = BF_a{}^2 - \frac{c^2+a^2-b^2}{4}.$$

Дакле,

$$\begin{aligned}BF_a{}^2 &= F_aA_1{}^2 - F_aB_1{}^2 + F_aC_1{}^2 + \frac{S_B}{2}\\ &= \frac{((b-c)^2-(c+a)^2+(a+b)^2)\,R}{4(R+2r_a)} + \frac{S_B}{2}\\ &= \frac{(2(a+b)(b-c)+2S_B)\,R+4r_aS_B}{4(R+2r_a)}.\end{aligned}$$

Пошто је

$$\begin{aligned}2(a+b)(b-c)+2S_B &= 2(a+b)(b-c)+(c^2+a^2-b^2)\\ &= (a+b-c)^2\\ &= 4(s-c)^2,\end{aligned}$$

добијамо

$$BF_a{}^2 = \frac{(s-c)2R+r_aS_B}{R+2r_a}.$$

Аналогно се изводи и $CF_a{}^2$. ■

**Теорема 3.6.1.** *Нека су $F_a, F_b, F_c$ спољашње Фојербахове тачке троугла $ABC$. Нека су $I_a, I_b, I_c$ центри споља приписаних кругова над страницама $BC, AC$, $AB$ редом. Нека су $O$ и $R$ центар и полупречник описаног круга датог троугла. Тада важе једнакости:*

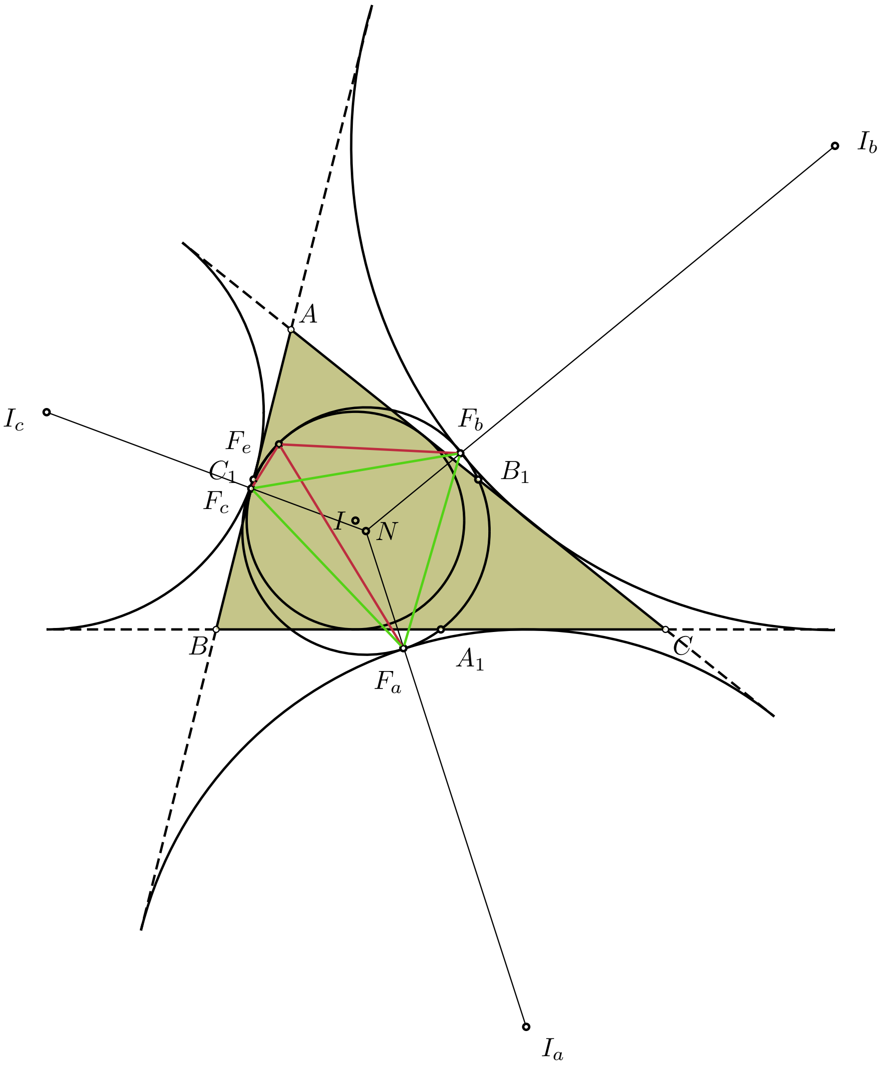
$$F_bF_c = \frac{(b+c)R^2}{OI_b\cdot OI_c},\quad F_cF_a = \frac{(c+a)R^2}{OI_c\cdot OI_a},\quad F_aF_b = \frac{(a+b)R^2}{OI_a\cdot OI_b}.$$

*Доказ.* Довољно је показати прву једнакост. Троугао $NF_bF_c$ је једнакостраничан и важи $NF_b = NF_c = \frac{R}{2}$. Тако је

$$F_bF_c{}^2 = \frac{R^2}{2}(1-\cos\angle F_bNF_c).$$

Означимо са $\alpha = \angle BAC$, $\beta = \angle CBA$ и $\gamma = \angle ACB$. Примењујући косинусну теорему на троугао $NI_bI_c$ и узимајући у обзир да је $I_bI_c = 4R\cos\frac{\alpha}{2}$, добијамо:

$$\begin{aligned}\left(4R\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)^2 &= NI_b^2 + NI_c^2 - 2\cdot NI_b\cdot NI_c\cos\angle I_bNI_c\\ &= \left(\frac{R}{2}+r_b^2\right)^2 + \left(\frac{R}{2}+r_c\right)^2 - 2\left(\frac{R}{2}+r_b\right)\left(\frac{R}{2}+r_c\right)\cos\angle I_bNI_c\\ &= \left[\frac{R}{2}+r_b-\left(\frac{R}{2}+r_c\right)\right]^2 + 2\left(\frac{R}{2}+r_b\right)\left(\frac{R}{2}+r_c\right)(1-\cos\angle F_bNF_c)\\ &= (r_b-r_c)^2 + \frac{1}{2}\,(R+2r_b)\,(R+2r_c)\,(1-\cos\angle F_bNF_c)\,.\end{aligned}$$




Слика 3.12:

Дакле,

$$F_bF_c^{\,2} = \frac{R^4\Big(\big(4R\cos\frac{\alpha}{2}\big)^2 - (r_b - r_c)^2\Big)}{OI_b^{\,2}\cdot OI_c^{\,2}}.$$

Како је

$$s = 4R\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} \quad \text{и}$$

$$s\left(\tan\frac{\beta}{2} - \tan\frac{\gamma}{2}\right) = 4R\cos\frac{\alpha}{2}\sin\left(\frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2}\right),$$

из тога следи:

$$F_bF_c{}^2 = \frac{16R^6\cos^2\frac{\alpha}{2}(1-\sin^2(\frac{\beta}{2}-\frac{\gamma}{2}))}{OI_b{}^2\cdot OI_c{}^2} = \frac{16R^6\cos^2\frac{\alpha}{2}\cos^2(\frac{\alpha}{2}-\frac{\gamma}{2})}{OI_b{}^2\cdot OI_c{}^2}$$

и

$$\begin{aligned}F_bF_c &= \frac{4R^3\cos\frac{\alpha}{2}\cos\left(\frac{\beta}{2}-\frac{\gamma}{2}\right)}{OI_b\cdot OI_c}\\ &= \frac{2R^3\left(\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}\right)+\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}-\frac{\gamma}{2}\right)\right)}{OI_b\cdot OI_c}\\ &= \frac{2R^3\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right)\right)}{OI_b\cdot OI_c}\\ &= \frac{2R^3(\sin\beta+\sin\gamma)}{OI_b\cdot OI_c}\\ &= \frac{(b+c)R^2}{OI_b\cdot OI_c}.\end{aligned}$$

■

**Теорема 3.6.2.** *Важе следеће једнакости:*

$$F_eF_a = \frac{|b-c|R^2}{OI\cdot OI_a},\quad F_eF_b = \frac{|c-a|R^2}{OI\cdot OI_b},\quad F_eF_c = \frac{|a-b|R^2}{OI\cdot OI_c}.$$

*Доказ.* Као у претходним извођењима, доказујемо само прву формулу. Како је троугао $NF_eF_a$ је једнакостраничан и важи $NF_e = NF_a = \frac{R}{2}$ (Слика 3.12), добијамо

$$F_eF_a^2 = \frac{R^2}{2}(1-\cos\angle F_eNF_a).$$

Нека је $\alpha = \angle BAC$, $\beta = \angle CBA$ и $\gamma = \angle ACB$. Примењујући косинусну теорему на троугао $NII_a$, узимајући у обзир да је $II_a = 4R\sin\frac{\alpha}{2}$, добијамо:

$$\begin{aligned}&\left(4R\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2 = NI^2 + NI_a^2 - 2NI\cdot NI_a\cos\angle INI_a\\ &= \left(\frac{R}{2}-r\right)^2 + \left(\frac{R}{2}+r_a\right)^2 - 2\left(\frac{R}{2}-r\right)\left(\frac{R}{2}+r_a\right)\cos\angle INI_a\\ &= \left[\left(\frac{R}{2}-r\right)-\left(\frac{R}{2}+r_a\right)\right]^2 + 2\left(\frac{R}{2}-r\right)\left(\frac{R}{2}+r_a\right)(1-\cos\angle F_eNF_a)\\ &= (r+r_a)^2 + \frac{1}{2}(R-2r)(R+2r_a)(1-\cos\angle F_eNF_a).\end{aligned}$$

Дакле,

$$F_eF_a^2 = \frac{R^2\left(\left(4R\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2 - \left((b+c)\tan\frac{\alpha}{2}\right)^2\right)}{(R-2r)(R+2r_a)} = \frac{R^4\left(\left(4R\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2 - \left((b+c)\tan\frac{\alpha}{2}\right)^2\right)}{OI^2\cdot OI_a^2}.$$

Пошто је

$$(b+c)\tan\frac{\alpha}{2} = 2R(\sin\beta+\sin\gamma)\tan\frac{\alpha}{2} = 4R\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}\tan\frac{\alpha}{2} = 4R\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2},$$

тада је

$$F_eF_a^2 = \frac{R^4\left(\left(4R\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2 - \left(4R\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}\right)^2\right)}{OI^2\cdot OI_a^2} = \frac{16R^6\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\beta-\gamma}{2}}{OI^2\cdot OI_a^2}.$$

Добијамо да је

$$F_eF_a = \left|\frac{4R^3\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta-\gamma}{2}}{OI\cdot OI_a}\right| = \left|\frac{2R^3\left(\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}\right)-\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}-\frac{\gamma}{2}\right)\right)}{OI\cdot OI_a}\right| = \left|\frac{2R^3\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right)\right)}{OI\cdot OI_a}\right| = \left|\frac{2R^3(\sin\beta-\sin\gamma)}{OI\cdot OI_a}\right| = \frac{|b-c|R^2}{OI\cdot OI_a}.$$

■

# Глава 4

# Закључак

У овом мастер раду истраживали смо и продубили разумевање геометријских својстава Ојлеровог круга и Фојербахових тачака троугла, који представљају значајне концепте у еуклидској геометрији. Проучавање Ојлеровог круга, познатог и као круг девет тачака, показало је његову везу и са другим важним тачкама троугла, као и са уписаним и споља приписаним круговима троугла.

Фојербахова теорема, која тврди да Ојлеров круг додирује уписани круг и сваки од споља приписаних кругова троугла, пружа дубљи увид у симетрије и унутрашњу структуру троугла. У раду смо дали детаљан доказ ове теореме и анализирали њене импликације на разна својства троугла. Ова теорема је кључна не само због своје лепоте и елеганције већ и због начина на који повезује различите значајне тачке и кругове унутар једног троугла.

Установили смо бројне примене Ојлеровог круга и Фојербахових тачака у решавању проблема у елементарној геометрији, као и њихову повезаност са другим математичким концептима и областима, попут пројективне геометрије и комплексне анализе. Ови резултати могу послужити као полазна тачка за даља истраживања у овој области, посебно у смислу проналажења нових геометријских својстава и примене у другим гранама математике.

На крају, рад је истакао важност класичне геометрије и њеног континуираног утицаја у модерним математичким истраживањима. Надамо се да ће овај рад инспирисати нове генерације математичара да наставе са истраживањем ове богате и фасцинантне области, доприносећи тако разумевању не само геометрије троугла, већ и ширих математичких структура и теорија.

# Библиографија


[1] Драгомир Лопандић, ***Збирка задатака из основа геометрије***, *Београд (1971), 471-418.*

[2] Lev Emelyanov and Tatiana Emelyanova, ***A Note on the Feuerbach Point***, *Forum Geometricorum Volume 1 (2001), 121–124.*

[3] Kalr Wilhelm, ***Feuerbach Eigenscha-ften einiger merkwürdigen Punkte des geradlinigen Dreiecks und mehrerer durch sie bestimmten Linien und Figuren.*** *German Edition, Wentworth Press, 2018.*

[4] Zdenka Kolar–Begović, Ana Tonković, ***Feurbachov teorem***, *Osječki matematički list 9(2009), 21–30.*

[5] John Sturgeon Mackay, ***History of the Nine-point Circle***, *Cambridge University Press (1892).*

[6] Constantin Mihalescu, ***The geometry of remarkable elements: points, lines and circles***, *edited by T. Andreescu, D. Andrica, P. Blaga, D. Branzei, XYZ Press, LLC (2016).*

[7] Sándor Nagydobai Kiss, ***A Distance Property of the Feuerbach Point and Its Extension***, *Forum Geometricorum Volume 16 (2016) 283–290.*

[8] Sándor Nagydobai Kiss, ***Distances Among the Feuerbach Points***, *Forum Geometricorum Volume 16 (2016) 373–379.*

[9] Michael J. G. Scheer, ***A Simple Vector Proof of Feuerbach's Theorem***, *Forum Geometricorum Volume 11 (2011) 205–210.*