УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

МАСТЕР РАД

# ИСТОРИЈА МАТЕМАТИЧКОГ ОБРАЗОВАЊА У ШПАНИЈИ

студент:
*Ивана Вукајловић*

Београд, 2024.

**МЕНТОР**

- др Зоран Петровић, редовни професор,
Математички факултет, Универзитет у Београду

**ОСТАЛИ ЧЛАНОВИ КОМИСИЈЕ**

- др Александар Липковски, редовни професор,
Математички факултет, Универзитет у Београду

- др Маја Рославцев, доцент,
Математички факултет, Универзитет у Београду

________________________________

**ДАТУМ ОДБРАНЕ**

## Садржај

# Увод

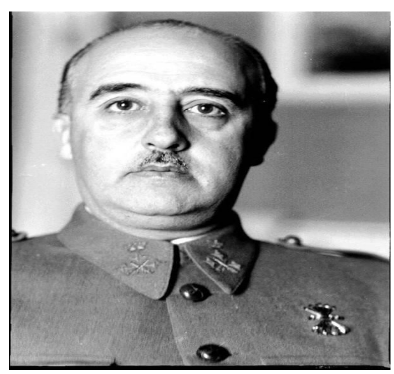
Шпанија, званично Краљевина Шпанија, је јужноевропска држава, смештена на југозападу континента на Пиринејском полуострву и неколико суседних архипелага и енклава. Граничи се са Португалом на западу и Француском и Андором на североистоку.

Прва писана сведочанства описују Иберију као земљу настањену Иберима, Баскима и Келтима. Након великих борби долази под власт Рима. Током средњег века њом су завладала германска племена да би недуго затим потпала под власт Мавара из северне Африке. Током вишевековне борбе мала хришћанска краљевства са севера успела су да поврате власт над полуострвом. Последње маварско краљевство пало је исте године када је Колумбо стигао до Америке (1492. године). Тада је почело да се ствара глобално царство а Шпанија је наредних векова била водећа европска и светска сила.

Бројни ратови и други проблеми временом су урушили њен статус. Под вођством Карла V и Филипа II, Шпанија је прошла кроз дуготрајну кризу која је била како економска тако и политичка. Почетком XVIII века након такозваног Рата за шпанско наслеђе на власт је дошла династија Бурбона, у лику Филипа V, која је ту остала наредних деценија, па и векова само са одређеним прекидима. Овај рат је означио дефинитивни крај истакнуте улоге Шпаније у међународној политици. Наполеонова инвазија је довела до хаоса у земљи, и подстакла покрете за независност у шпанским колонијама. Утицај буржоазије био је веома ограничен – доминантне силе су биле племство и католичка црква. Веома велики део становништва је остао неписмен.

Борба за либералне реформе довела је до бројних револуција – реформе су спроведене и касније укинуте, а устави су донети само да би уступили место новим уставима. Непосредно пре Другог светског рата Шпанију је задесио крвави грађански рат (1936-1939) који је на власт довео диктаторски режим. Људи и оружане снаге из различитих земаља били су укључени у рат на крају кога је, уз подршку Мусолинијеве Италије и Хитлерове Немачке, власт пала у руке генерала Франка, који је владао Шпанијом деценијама.

Филип V



Франсиско Франко

Крајем седамдесетих година 20. века долази до обнове демократије. Економски раст је заправо почео још раније (током 1960-их) и наставио се. Шпанија се касније придружује Европској унији, бележећи стабилан економски развој и културни препород.

Политички, економски и друштвени токови и промене које су се дешавале у претходним вековима утицале су на развој образовања уопште, а посебно математичког образовања. У следећем одељку проћи ћемо кроз кратак преглед шпанског математичког образовања које је обележило неколико последњих векова. Математичко образовање се посматра у контексту образовног система у целини, што је заузврат у великој мери зависило од политичких и економских прилика у земљи. Да бисмо разумели како се образовање развијало у скорије време, морамо почети са испитивањем (иако површно) образовања какво је постојало током предмодерне ере, будући да је његово наслеђе наставило да се манифестује и у многим каснијим периодима. Такође, видећемо како су се неки садржаји алгебре мењали у том периоду, као и тренутак када се Шпанци сусрећу са модерном математиком. Многи детаљи, укључујући и оне релативно значајне, ће нужно бити изостављени. Дискусија ће се фокусирати на општи процес трансформације и на неке од најважнијих аспеката и догађаја.

Пре свега желим да изразим искрену захвалност свом ментору др Зорану Петровићу за савете, помоћ и подршку током израде овог рада. Захвалност дугујем и осталим члановима комисије за увиде, повратне информације и преглед овог рада, као и свим професорима чија предавања сам похађала. Хвала свима на несебичном преношењу знања и искуства. Целокупно школовање не би имало смисла без подршке породице и пријатеља. Хвала и вама што сте веровали у мене и пружали подршку кад је највише требало.

*Ивана Вукајловић*

# МАТЕМАТИКА ПРЕ ДВАДЕСЕТОГ ВЕКА

## Увод у алгебарске идеје у Шпанији: Решавање квадратне једначине

Алгебарски садржај се први пут појавио у Шпанији у писаном облику 1552. године, када је објављена књига *Прва књига о алгебарској аритметици* (*Libro primero, de Arithmetica Algebratica)* немачког аутора Марка Аурела. Од тада, различите шпанске математичке књиге су укључивале алгебру, па њихово проучавање омогућава да се сазна како су алгебарске идеје уведене у Шпанији. Анализираћемо шпанске математичке књиге које су написане током 16, 17. и 18. века како бисмо проучили како су решавали једначине. Конкретно, обрађиваћемо различите идеје за решавање квадратних једначина која су дата у овим књигама.

Квадратна једначина је било која једначина која се може преуредити у стандардни облик:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

где је $x$ непозната величина, $a, b, c$ су константе и $a \neq 0$.

Данас, (шпански) математички уџбеници за средње образовање укључују три могућности за решавање:

- Ако је квадратна једначина непотпуна зато што је $c = 0$, решења квадратне једначине $ax^2 + bx$=0 су:
$$x = 0 \text{ или } x = \frac{-b}{a}$$
- Ако је квадратна једначина непотпуна зато што је $b = 0$, решења квадратне једначине $ax^2 + c = 0$ су:
$$x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$$
Ако је $\frac{-c}{a} > 0$ онда су решења реална, а ако је $\frac{-c}{a} < 0$ онда је решење пар комплексно-конјугованих бројева.
- Ако је једначина другог степена комплетна, решења су дата следећом формулом
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

  Решења ове једначине зависе од дискриминанте квдаратне једначине: $b^2 - 4ac$.

  Ако је:
  - $b^2 - 4ac > 0$ квадратна једначина има два реална решења
  - $b^2 - 4ac < 0$ решења су комплексни бројеви (пар конјуговано-комплексних бројева)
  - $b^2 - 4ac = 0$ једначина има двоструко решење

Разматраћемо да ли је овај приступ одувек био овакав или су постојали другачији начини током историје математике и образовања.

Решавање квадратних једначина има дугу историју која сеже уназад до вавилонске културе. На неким вавилонским таблицама су описане методе решавања неких квадратних једначина коришћењем геометријских конструкција. Вавилонци су постављали проблеме који подразумевају решавање квадратних једначина: Пронађи дужину странице квадрата ако знамо да површина квадрата умањена за његову страницу износи 14,30. Указује се да је решење дато еквивалентно решењу добијеном применом следеће формуле, које је једно од корена једначине $x^2 - px = q$.

$$x = \sqrt{\left(\frac{p}{q}\right)^2 + q} + \frac{p}{2}$$

Решавање квадратне једначине можемо чак пронаћи и у Берлинском папирусу. Конкретно, постављени проблем се може решити разматрањем једначина $x^2 + y^2 = 100$ и $y = \frac{3}{4}x$. У Берлинском папирусу, овај проблем је решен методом лажне позиције.

Нека геометријска тврђења представљена у Еуклидовим *Елементима (Elements)* су геометријски еквивалентни квадратним једначинама. Тако наилазимо да су тврђења (конкретно тврђења 84 и 85) геометријске замене за вавилонске алгебарске методе решавања система $xy = a^2$ и $x \pm y = b$. Ово је такође еквивавалентно квадратним једначинама.

Диофант је умео да реши једначине облика $ax^2 + c = bx$. Користио је искључиво алгебарске начине за решавање квадратних једначина које су и Вавилонци решавали. Он је увео симболе у решавање једначина, али је разматрао само позитивна решења. У свом делу *Аритметика (Arithmetica)* у проблему IV-39 навео је израз како решити једначину облика $c + bx = ax^2$. Израз је дат формулом:

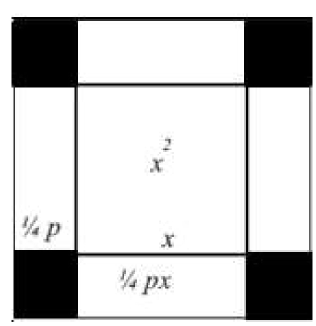
$$x = \frac{\frac{b}{2} + \sqrt{ac + \left(\frac{b}{2}\right)^2}}{a}$$

Касније у Индији, Брамагупта је написао *Измењени систем Брама* (*Brahma-sphuta-siddhanta*), текст посвећен астрономији, где су поглавља 12 и 18 посвећена математици. У поглављу 18, он је анализирао како да реши Диофантову једначину $x^2 = 1 + py^2$ коју је решио Баскара за позитивне целе бројеве и малу p вредност.

Ел Хорезми се током развоја арапске алгебре ослањао на грчке методе решавања квадратних једначина. Он је установио пет правила за решавање једначина и она су подељена у пет облика:

- $ax^2 = bx$
- $ax^2 = c$
- $ax^2 + bx = c$
- $ax^2 + c = bx$
- $ax^2 = bx + c$

где су a,b,c позитивни бројеви и у свим случајевима је a=1.

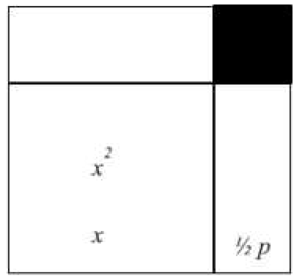



Како би их решио, користио је два начина. Што се тиче првог начина решавања једначина ослањао се на геометријску конструкцију и тиме је оправдао своја решења за једначину

$$x^2 + px = q.$$

Примера ради, за једначину $x^2 + 10x = 39$ конструисао је квадрат странице $x$ и увећао га је правоугаоницама чије странице су $\frac{1}{4}p$ и $x$ и добио решење $x = 3$.

Други начин је такође сличан. Као што видимо на слици, неосенчени део је $x^2 + px$ и додао је квадрат станице $\frac{1}{2}p$. На тај начин је добио једначину $x^2 + px + \frac{1}{4}p^2 = \frac{1}{4}p^2 + q$ одакле следи да је $x = \sqrt{\frac{1}{4}p^2 + q} - \frac{1}{2}p$ узимајући у обзир само позитивно решење.




Леонардо из Пизе је у својој књизи *Књига квадрата* (*Liber Quadratorum)* писао о решењима са рационалним бројевима неких једначина које укључују квадрате. Јордан де Немор је отишао корак даље у односу на Леонарда и у свом делу *Аритметика* (*Arithmetica*) је поставио проблем у коме треба пронаћи три квадратна броја чије су узастопне разлике једнаке. Његово решење у савременој нотацији је:

$$y = \frac{a^2}{2} + ab - \frac{b^2}{2}; x = \frac{a^2 + b^2}{2}; z = \frac{b^2}{2} + ab - \frac{a^2}{2}$$

где су a и b исте парности.

Лука Пачоли је дао три сложена правила за решавање алгебарских једначина. Франсоа Вијет се разликовао од својих претходника јер је увео аналитичке методе решавања квадратних једначина уместо геометријских али су се и даље прихватала само позитивна решења. У његовим делима можемо се први пут сусрети са изразом „квадратна формула“.

Такође, наилазимо на чињенице да методе за решавање квадратних једначина, које користе детерминанте, су од теоријског значаја. Овај начин су развили Ојлер и Безу а унапредили Џејмс Џозеф Силвестер и Ото Хесе.

Можемо закључити да су многи математичари уложили своје време и труд на решавање квадратних једначина. Сва ова сазнања нас мотивишу да истражимо које математичке књиге у Шпанији су садржале градиво везано за квадратне једначине и какав је био приступ овој теми. Видећемо како су се методе мењале као и математички садржаји и структуре током времена. Анализираћемо само дела која су написана на шпанском језику и, ако је то могуће, прво издање књиге.

## *Књиге из XVI века*

Три најзначајнија аутора у шеснаестом веку су били: Марко Аурел, Хуан Перез де Моја и Педро Нуњез и у њиховим делима можемо наћи поступак за решавање квадратних једначина. Примећујемо да је један од најчешће коришћених појмова у делима ових аутора био појам за непознату величину коју су називали *ствар (cosa)*. Можемо се сусрести и да су непознату величину називали и *карактером (character)*. Карактери су представљали степене непознатих (или позиције у доленаведеној продуженој пропорцији). Ако погледамо како су обележавали непознату величину, можемо пронаћи да су били присутни облици $x$ или cosa/radix (скраћеница је co.). Ови аутори су дали слично објашњење тог појма. Аурел је, на пример, рекао да је $x$ корен или страница квадрата док је Перез де Моја рекао да је то корен или број који одговара страници квадрата. У поступцима за проналажење решења сусрећемо се са термином подједнака удаљеност која се занива на продуженој пропорцији $1:x = x:x^2 = x^2:x^3 = x^3:x^4 = \cdots$. Подједнака удаљеност подразумева да разлика између два суседна степена непознате величине је увек иста. Примера ради, подједнако удаљени су $x^n, x^{n+1}, x^{n+2}$ као и $x^n, x^{n+k}, x^{n+2k}$. С обзиром на то да ми анализирамо квадратне једначине, у даљем раду под термином подједнаке удаљености подразумеваћемо $1, x$ и $x^2$. За овај период је специфично и то што су користили појам „једнакост“ уместо „једначина“. Број типова једначина је варирао код сваког аутора те је продужена пропорција имала велики значај на смањење укупног број типова једначина које су решавали.

Аурел, Перез де Моја и Нуњез су користили различите нотације у својим делима. У следећој табели је дата нотација.

| Знакови | Аурел (1552) | Перез де Моја (1558) | Рођа (1564) |
|---|---|---|---|
| Сабирање | + | p. | ma. |
| Одузимање | - | m. | me. |
| Број | $Q$ | n. | nu. n. |
| Непозната величина | x | co. | co. |
| Квадрат, куб | z, ∞ | ce. / cu. | ce. / cu. |
| Квадратни корен | √ | r. | ra. |

Табела нотације

Као што смо већ навели, књига *Прва књига о алгебарској аритметици (Libro primero, de Arithmetica algebraica)* коју је написао Немац Марко Аурел, се сматра првом штампаном књигом у Шпанији која садржи елементе алгебре. Објављена је 1552. године у Валенсији. Ова књига укључује неколико поглавља везаних за алгебарске проблеме. Конкретно, поглавље 14 садржи осам једначина за решавање алгебарских проблема. Решавање квадратне једначине се може извести као посебан случај из њих пет. Општа правила која аутор даје за ових пет једначина, односно како он каже, изједначавање су:

- Изједначавање 1: ако се две величине, карактера или променљиве изједначе[1] и нема

[1] Постоје два члана у једначини, имамо само једну непознату величину различитог степена. Аналагно важи и за три величине (променљиве) – три члана у једначини а не три променљиве.

никаквих недостатка између њих[2], треба поделити мању величину (b) већом (a) и количник је решење.[3] Стога, посебан случај овог решења је непотпуна квадратна једначина: $ax^2 = bx$ (у савременој нотацији). Једино решење је дато формулом $x = \frac{b}{a}$.

- Изједначавање 2: ако се две величине или две променљиве изједначе и постоји једна која недостаје између њих, тада треба поделити мању величину (c) већом (a) и овај количник је вредност квадрата, а корен из тог количника је решење. Стога, ово правило даје решење непотпуне квадратне једначине $ax^2 = c$ (у данашњој нотацији) и једино решење дато је једначином $x = \sqrt{\frac{c}{a}}$.

  Аурел је такође навео да ако изједначимо две величине или два степена као на пример $4x^2 = 4x^2$, онда ће решење увек бити 1, али ако је $4x^2 = 5x^2$, то је онда немогуће.

- Изједначавање 5: Нека су три величине или променљиве подједнако удаљене, тј. нема ниједна која недостаје, и нека су највећа (a) и средња (b) једнаке најмањој величини (a), тада треба поделити најмању и средњу величину са већом, затим треба половину количника средње и највеће величине помножити самим са собом и на тај производ треба додати количник најмање и највеће величине. Корен тог збира минус половина количника средње величине[4] је решење. Користећи данашњу нотацију, правило решава потпуну квадратну једнчину $ax^2 + bx = c$. Једино решење је дато формулом

$$x = \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}} - \frac{b}{2a}$$

- Изједначавање 6: Нека су три величине или променљиве подједнако удаљене, нема ниједна која недостаје, и специјално, ако су највећа (a) и најмања (c) једнаке средњој вредности (b), тада треба поделити најмању и средњу са највећом, онда треба половину количника срдње величине са највећом помножити самим са собом и од тог производа треба одузети количник најмање и највеће. Корену од свега овога треба додати или одузети половину количника средње и највеће вредности и то је решење једначине. У данашњој нотацији, ово правило је решење за једначину другог степена $ax^2 + c = bx$. Решења су дата формулом:

$$x = \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}} \pm \frac{b}{2a}.$$

Аутор је додао и напомене око ове формуле. На пример, ако је $\sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}} - \frac{b}{2a}$ немогуће израчунати зато што је $\sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}} < \frac{b}{2a}$ онда је решење $\frac{b}{2a} - \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}$. Он је, такође, појаснио да већина једначина решених овом методом имају два решења. Додао је још једну напомену како

---

[2] Подразумевамо да важи продужена пропорција и пошто је реч о квадратним једначинама, степен $x^2$ ће увек бити присутан.

[3] У књизи *Libro primero, de Arithmetica algebraica* под појмом величина (вредност) се подразумева коефицијент који стоји уз неки члан. Стога највећа величина је она која стоји уз $x^2$, средња је она која стоји уз $x$ и најмања је слободан члан. У случају да једначина није комплетна, члан уз највећи степен је већа величина а мања је члан уз мањи степен или слободан члан.

[4] Количник средње вредности се подразумева количник коефицијената који стоје уз $x$ и $x^2$.

одлучити да ли треба додати или одузети корен $\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}}$: ако је вредност уз средњу величину већа од вредности уз најмању величину, треба додати корену половину количника средњег и најмањег члана, а ако је мања од вредности уз најмању величину онда треба одузети.

- Изједначавање 7: Нека су три величине или променљиве подједнако удаљене, нема ниједна која недостаје између и најмања (c) и средња (b) величина су једнаке највећој (a). Тада, треба поделити најмању и средњу са највећом, половину количника средње и највеће вредности помножити самим са собом и на овај производ треба додати количник најмање и највеће вредности, корен од ове суме треба сабрати са половином количника средње вредности и то је решење. У данашњој нотацији, ово правило би се примењивало на једначину $ax^2 = bx + c$. Једино решење је дато формулом:

$$x = \sqrt{\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}}+\frac{b}{2a}$$

Исто те 1552. године, Гонсало Бусто (Gonçalo Busto) је издао ново издање књиге *Juan de Ortega* (прво издање је из 1512. године) и додао је тринаест решених проблема из алгебре. Ови проблеми укључивали су и неке случајеве квадратних једначина (у данашњој нотацији):

- За $x^2 + bx = c$ је дато решење $x = \sqrt{\frac{b^2}{4}+c}-\frac{b}{2}$
- За $ax^2 = c$ дато је само решење $x = \sqrt{\frac{c}{a}}$

У делу *Примењена и теоријска математика* (*Arithmetica practica, y speculative)* коју је написао Хуан Перез де Моја (Juan Pérez de Moya) можемо пронаћи сличне алгебарске идеје идејама које смо видели у делу Марка Аурела. Међутим, алгебарски симболи који се појављују у овој књизи нису исти. Када је реч о решавању квадратних једначина, Перез де Моја је дао следеће напомене: Ако су два дела једначине слични по карактеру и броју, у данашњој нотацији $ax^2 = ax^2$ онда је решење 1. Ако су слични по карактеру али различити бројеви стоје уз њих $ax^2 = bx^2$ онда је немогуће решити. Ако су слични по питању бројева али различити по питању карактера као што је на пример $8x = 8x^2$, имаћемо бесконачно решења и нећемо имати само једно. Ако се једначине разликују и у бројевима и у карактерима као што је на пример $5x = 8x^2$, онда имамо само једно решење.

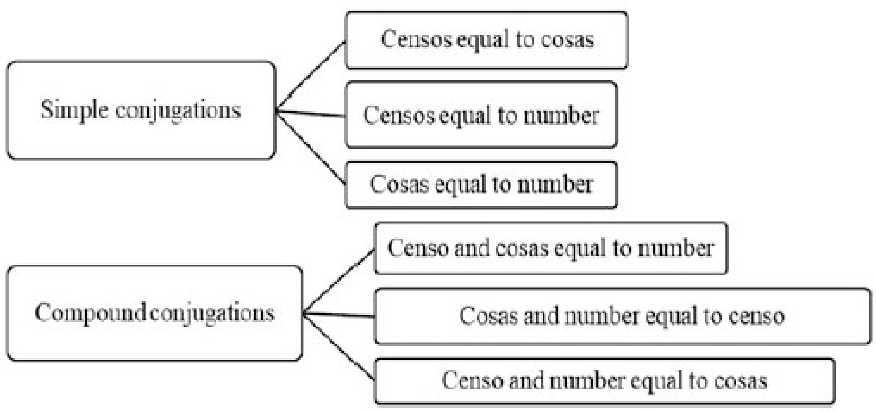
Перез де Моја је разматрао седам типова једнакости и разврстао их је на јединствене и сложене. Прва и друга једнакост се подударају са прве две једнакости Марка Аурела ($ax^2 = bx, ax^2 = c$). Прва, друга и трећа сложена једнакост се подударају са петом, шестом и седмом једнакошћу Марка Аурела ($ax^2 + bx$=c, $ax^2 + c = bx, ax^2 = bx + c$).

Примера ради, описаћемо поступак који је Перез де Моја дао за другу сложену једнакост (у данашњој нотацији, $x^2 + c = bx$ и решења $x = \sqrt{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}} \pm \frac{b}{2a}$). Аутор каже да корену разлике $\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}$ треба додати или одузети половину количника средње (b) и највеће (a) вредности. Једнакост најчешће има два решења и како бисмо знали да ли је боље додати или одузети половину количника средње и највеће вредности треба обратити пажњу на следеће: ако је средња величина већа од најмање онда треба додати, у супротном, треба одузети. Такође је рекао да ако је количник између најмање и највеће величине већи од квадрата количника средње и највеће величине, тада не можемо одузети вредност под кореном, већ треба додати, и корен тог збира плус половина количника најмање и највеће вредности ће бити решење. Видимо да је то објашњење слично објашњењу које је дао Марко Аурел.

То није једина књига Переза де Моје која укључује алгебарски садржај. Примера ради, у делу *Трактат из математике* (*Tratado de Mathematicas)* проширио је оно о чему је већ писао у претходној књизи и укључио је неке мање измене. На пример, када је говорио о једначинама које имају различите карактере али сличне вредности, као на пример $10x^2 = 10x$ (у изворном облику 10 censos to 10 cosas), рекао је да такви примери имају више решења а не само једно.

Књига *Аритметика* (*Arithmetica)* коју је написао Антик Роћа (Antich Rocha) је такође садржала елементе алгебре о којима је и Перез де Моја такође писао. Књига је садржала напомене о сличним и различитим карактерима и бројевима и навео је да ће по питању једнакости пратити једнакости Марка Аурела.

*Књига о алгебри у аритметици и геометрији (Libro de Algebra en Arithmetica y Geometria)* коју је написао Педро Нуњез (Pedro Nuñez) и објавио 1567. године, такође, садржи елементе алгебре и он је поставио шему где можемо пронаћи поделу.

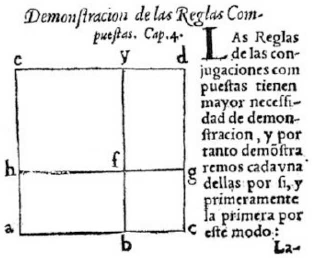



- Censos equal to cosas (у савременој нотацији $ax^2 = bx$) - Треба поделити број уз $x$ $(cosas)$ са бројем уз $x^2$ $(censos)$ и тако ћемо добити непознату вредност $(cosas)$. Дакле, $x = \frac{b}{a}$
- Censos equal to number (данашња нотација $ax^2 = c$) - Треба поделити број[5] са бројем уз $x^2$ $(censos)$. Корен овог количника ће бити непозната вредност $(cosas)$. Дакле, $x = \sqrt{\frac{c}{a}}$.
- Censo and cosas equal to number (данашња нотација $x^2 + bx = c$) – Треба помножити половину броју уз $x$ $(cosas)$ самим са собом и додати број. Сада, треба израчунати корен ове суме и од тог резултата треба одузети половину броја уз $x$ $(cosas)$ и то ће бити непозната величина. Дакле, решење је $x = \sqrt{\frac{b^2}{4} + c} - \frac{b}{2}$
- Cosas and number equal to censo (данашња нотација $x^2 = bx + c$ ) – Треба помножити половину броја уз $x$ самим са собом и додати број. Сада, треба из ове суме извући корен и том резултату треба додати половину броја уз $x$ $(cosas)$ и то ће бити непозната

[5] Број означава слободан члан  у данашњој нотацији. Користимо исти израз кроз сва правила која је дао Педро Нуњез.

величина. Дакле, решење је $x = \sqrt{\frac{b^2}{4} + c} + \frac{b}{2}$

- Censo and number equal to cosas (данашња нотација $x^2 + c = bx$) – Треба помножити половину броја уз $x$ самим са собом и одузети број. Од тога што је остало, треба извући корен и додати половину броја од $x$, или одузети ако желимо, и то ће бити непозната величина. Дакле, $x = \sqrt{\frac{b^2}{4} - c} \pm \frac{b}{2}$.


Demonſtracion de las Reglas Com-
pueſtas. Cap.4.
LAs Reglas de las conjugaciones compueſtas tienen mayor neceſſidad de demonſtracion, y por tanto demoſtraremos cada vna dellas por ſi, y primeramente la primera por eſte modo:
La-


Педро Нуњез је укључио геометријску конструкцију за ова правила, што није било укључено у претходним књигама.

Доказ сложених правила

## *Књиге из XVII века*

Прву књигу из седамнаестог века, коју ћемо разматрати, написао је Хуан Баутиста Толра (Juan Bautista Tolra) 1619. године. То је био превод на шпански језик књиге *Аритметика* (*Arimetica)* коју је написао Џоан Венталол (Joan Ventallol). Толра је укључио и *Трактат о вишој уметности (Tratado de la Arte mayor)* у којој проналазимо и делове алгебре. Када говоримо о једначинама, пратио је рад Марка Аурела и Роће па не постоје неке разлике у односу на њихова дела.

Жозеф Зарагоза (Joseph Zaragoza) је објавио 1699. године дело *Универзална аритметика (Arithmetica Universal)*, где је укључио решавање квадратних једначина на другачији начин, ако упоредимо са претходним ауторима. Сам запис је био другачији. Зарагоза је записивао $1z^2 + 9\,z^1\,\Omega\;\;90$ (у данашњој нотацији $x^2 + 9x = 90$). Прво, аутор прича о различитим проблемима, на пример: ако је величина једнака самој себи као на пример $6z^2 + 4z = 6z^2 + 4z$, једначина је бескорисна, а то може бити из три разлога:

- Нема довољно услова у проблему како би се добила одговарајућа једначина
- Сваки број је решење једначине, и у овом случају није бескорисно, оно је увек тачно, а у геометријским проблемима је веома корисно
- Нису све околности пажљиво испитане, па је пожељно поново испитати

У случају када је једначина непотпуна, Зарагоза је рекао: ако је променљива јединствена и ако је експонент два, вредност је број подељен са карактером који стоји уз променљиву и потом се из тог количника извади корен. Дакле:

$$az^2 = c, z = \sqrt{\frac{c}{a}}.$$

Даље, ако у једначини постоје две променљиве[6] и већи експонент је два пута већи од

[6] Мисли се на променљиву али различитих степена

мањег, прво се израчуна квадрат броја уз мању променљиву. Онда се додаје или одузима четворострука вредност величине[7], у зависности од знака веће променљиве. Након тога се рачуна квадратни корен тог израза. Када израчунамо корен, уколико је коефицијент уз мању променљиву позитиван број, треба га одузети од резултата рачунања корена, а ако је негативан, треба узети суму коефицијента и корена. Након свега резултат треба поделити са 2 како бисмо добили вредност променљиве са мањим експонентом.

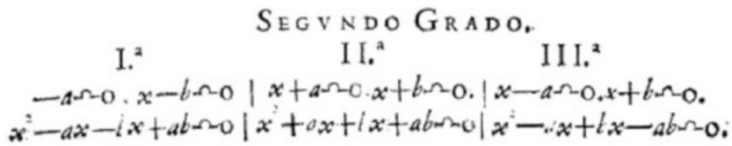
У данашњој нотацији $az^2 + bz = c, z = \frac{\sqrt{b^2-4c}-b}{2}$.

Он је такође објаснио да ако коефицијент уз променљиву која је подигнута на већи експонент има предзнак минус, вредност променљиве са мањим експонентом ће имати два решења. Понекад обе вредности задовољавају једначину, понекад само једна, али то треба испитати.

У делу *Теоријска аритметика и практична алгебра (Arithmetica especulativa, y practica y arte de algebra)* коју је написао Андрес Пуиг (Andrés Puig) 1672. године, у шестом поглављу су укључене квадратне једначине. Он их је решавао без већих промена у односу на књиге из шеснаестог века. Међу његовим коментарима можемо пронаћи да ако је једначина сложена, постоји много тога што треба рећи, због потешкоћа да се објасни и схвати. Такође, Пуиг је објаснио специјалне случајеве тако да ако је $\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = 0$ тада је решење $\frac{b}{a}$ или ако се $\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$ не може израчунати, тада нема решење.

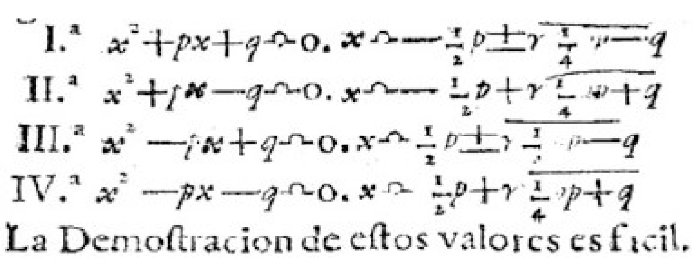
## *Књиге из XVIII века*

Прва разматрана књига у 18. веку је била *Елементи математике (Elementos Mathematicos)* коју је написао Педро де Улоа (Pedro de Ulloa). Ова књига је укључивала садржај о квадратним једначинама као што су, на пример, решавање истих.


SEGVNDO GRADO.

| I.ª | II.ª | III.ª |
|---|---|---|
| $x-a\backsim o.\ x-b\backsim o$ | $x+a\backsim o.\ x+b\backsim o.$ | $x-a\backsim o.\ x+b\backsim o.$ |
| $x^2-ax-bx+ab\backsim o$ | $x^2+ax+bx+ab\backsim o$ | $x^2-ax+bx-ab\backsim o.$ |

Затим, он је укључио и решења ових једначина:


I.ª $x^2+px+q\backsim o.\ x\backsim -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}pp-q}$

II.ª $x^2+px-q\backsim o.\ x\backsim -\frac{1}{2}p + \sqrt{\frac{1}{4}pp+q}$

III.ª $x^2-px+q\backsim o.\ x\backsim \frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}pp-q}$

IV.ª $x^2-px-q\backsim o.\ x\backsim \frac{1}{2}p + \sqrt{\frac{1}{4}pp+q}$

La Demoſtracion de eſtos valores es facil.

Улоа каже да је њихов доказ лак и како би он то доказао, користио је квадрат бинома и технику комплетирања квадрата (иако то није изричито рекао). Такође, разматрао је немогуће случајеве.

*Математички резиме (Compendio mathematico)* је књига написана 1709. године од стране

[7] Величина се односи на слободан члан

Висентеа Тоске. Ово дело садржи појмове и теореме из алгебре - различите теореме и правила како да се реше квадратне једначине. Тоска објашњава прво посебан случај: ако након сређивања једначине (следећи претходно дата правила) карактер непознате је једнак са познатом вредношћу и баш тај карактер има експонент 2, квадратни корен познате вредности је решење једначине.

За сложеније случајеве је прво доказао теорему: Нека су дате две величине a и b и нека важи $x = a$ и $x = b$. По претпоставци $x - a = 0$ и $x - b = 0$. Ако помножимо ове једначине, добићемо $xx - xa - xb + ab = 0$ и тада су a и b решења. Закључио је, као последицу да једначина другог степена може имати два решења, и она могу бити оба позитивна, оба негативна или једно позитивно, друго негативно.

Како би решио квадратне једначине, користио је различите методе. Једна од њих је метода коју је предложио Хуан Престер (Monsignor Juan Prester): узимајући у обзир последњу теорему да је последњи члан производ решења једначине тј. вредности непознате величине, сигурно је да ће неки од делиоца тог члана бити решење. Потребно је пронаћи све делиоце последњег члана и проверити да ли за сваки делилац непозната плус или минус (±) тај делилац може поделити израз из једначине. Делилац који омогући тачно дељење, даће корен једначине. Ако на тај начин ниједан број не испуни услове, једначина неће имати решење. Такође, објаснио је однос између знакова који стоје уз бројеве и знакова уз решење квадратне једначине.

Тоска је објаснио још један метод који је поставио Рол (Rolle) и за који каже да је лакши од претходног. Овај метод се састоји од замене непознате различитим величинама све док се не дође до решења.

У књизи *Теоријска и практична аритметика и Виша уметност или алгебра* (*Arithmetica especulativa, y practica, y Arte mayor, o Algebra*), коју је написао Франсиско Хавијер Гарсија (Francisco Xavier Garcia) 1733. године, објашњене су просте и сложене једначине као дијалог између професора и његовог ђака. Можемо видети да је метод објашњавања сличан методи из шеснаестог века.

Педро Падиља (Pedro Padilla) је у свом трећем издању књиге *Војни математички курс* (*Curso militar de mathematicas*) 1756. године укључио теорију из алгебре где је причао о квадратним једначинама. Да би се решиле ове једначине, прво је причао о томе како да се дође до облика $x^2 + bx = c$, а потом како доћи до линеарне једначине и решити је. Ако непозната има први и други степен, треба додати на обе стране квадрат половине другог члана[8], тако да део где се налази непозната је савршени квадрат. Извлачењем корена са обе стране, једначина ће бити сведена на једначину првог степена и решаваће се помоћу правила која важе за њу. Аутор је рекао да једначина има два решења, а решења ће бити реална или имагинарна у зависности од вредности корена.

Томас Серда (Thomas Cerda) је у другом издању дела *Настава математике или општи елементи аритметике и алгебре за школски узраст (Liciones de Mathematica, o Elemenos generales de Arithmetica y álgebra para el uso de la clase)* 1758. године неколико страница посветио квадратним једначинама. У том делу прави разлику између простих и сложених квадратних једначина. Просте квадратне једначине су једначине облика $x^2 = ab$ и решење се налази лако $x = \sqrt{ab}$. За сложене квадратне једначине постоје 4 универзална правила које је он укључио:

1. Пребацити све чланове у којима се јавља непозната са једне стране, а познате чланове пребацити на другу страну.

[8] Други члан се односи на коефицијент који се налази уз $x$

2. Ако квадрат има неки непознати коефицијент, уклонити га по претходно датом правилу.
3. Додати на обе стране квадрат половине коефицијента који стоји уз прост члан[9] тако да се добије потпуни квадрат
4. Извући квадратни корен са обе стране и тако наћи решења.

Серда је такође рекао да корен било ког негативног израза ће бити или имагинаран или немогућ и да свака квадратна једначина има два решења, или оба реална, или оба имагинарна, али немогуће је да је једно решење реално а друго имагинарно.

Бенито Бејлс је у свом првом издању књиге *Принципи математике (Principios de matemática*) 1776. године посветио један чланак квадратним једначинама. Дефинисао их је као свака једначина чија непозната вредност је подигнута на други степен и разликовао је случајеве:

- Ако једначина садржи само квадрат непознате: $xx - bb = cc$, решење је веома лако и решење је $x = \pm\sqrt{bb + cc}$
- Ако поред квадрата непознате, једначина укључује и први степен непознате, као на пример $xx + ax = bb$, вредност непознате се не добија тако лако. Рекао је да решавање неће имати потешкоћа ако формирамо квадрат бинома (на пример, квадрат од $x + a$ је $xx + 2ax + aa$)

Како бисмо решили једначину, објаснио је како једначину свести на претходни облик. Како би се направио потпуни квадрат у члану једначине где се налази непозната, потребно је да са обе стране једначине додамо квадрат половине коефицијента који стоји уз непознату првог степена. Коначно, наћи ћемо решење квадратне једначине ако израчунамо квадратни корен са обе стране.

Бејлс је рекао да квадратне једначине дају два решења и да она могу бити оба позитивна, једно негативно једно позитивно, али ако су оба решења негативна, то је знак да је једначина лоше постављена и да треба поставити под другим условима. Такође, рекао је да је немогуће решити ако је вредност непознате нека немогућа вредност облика $\sqrt{-aa}$.

У делу *Елементи математике (Elementos de matemática*), коју је Бејлс написао 1779. године, можемо пронаћи неколико одељака на ову тему. Садржај тих одељака је сличан садржају који је био у претходној књизи.

Прво издање књиге *Елементи чисте математике* (*Elementos de matemática pura*) аутора Карлоса Ле-Мора (Carlos Le-Maur) је садржало посебан део посвећен квадратним једначинама где је разматрао различите начине решавања:

- метод постепеног замењивања све док се не нађе одговарајуће решење. Каже да овај начин решавања је сигуран али изазива сумњу јер не може дати решење у општим условима
- доказао је да за једначину $x^2 + px + q = 0$ вредности непознатих су

$$x = -\frac{1}{2}p + \left(\frac{1}{4}p^2 - q\right)^{\frac{1}{2}}$$

и

$$x = -\frac{1}{2}p - \left(\frac{1}{4}p^2 - q\right)^{\frac{1}{2}}$$

Ле-Мора је анализирао различите ситуације када су решења позитивна или негативна,

[9] Прост члан се односи на променљиву првог степена

имагинарна, као и кад имамо непотпуну једначину.

*Елементи алгебре, односно општа правила за проналажење вредности непознате у једначинама првог и другог степена, у којима нема ирационалних чланова и решавање седамдесет четири проблема, распоређених у двадесет три дијалога (Elementos de Algebra, o sea reglas generales para encontrar lo que vale la incognita en las equaciones de el primero, y segundo grado, en quienes no haya termino irracional, y resolucion de setenta y quatro problemas, distribuido todo en veinte y tres Dialogos)* је књига коју је објавио Вентура де Абила (Ventura de Abila). У једном од својих дијалога је изнео опште правило како пронаћи два решења квадратне једначине ако не постоје ирационални услови. Прво је објаснио како свести једначину на облик $n^2 = bn + c$ и онда, како би дошли до решења, дао је следеће објашњење: Прво треба помножити половину коефицијента уз непознату првог степена самим са собом, том производу треба додати познати члан и онда израчунати квадратни корен те суме. Даље, половини коефицијента који стоји уз непознату првог степена треба додати квадратни корен који смо израчунали и та сума ће представљати решење једначине. Такође, ако од половине коефицијента који стоји уз непознату првог степена одузмемо израчунати квадратни корен тада ће та разлика представити другу непознату вредност дате једначине.

$$n = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b}{2} \cdot \frac{b}{2} + c}$$

И у својим следећим књигама Де Абила је такође описивао овај начин решавања једначине с тим што је у једној додао да решења која се добију могу бити једнака.

Хуан Хусто Гарсија (Juan Justo García) је 1782. године у свом делу *Елементи аритметике, алгебре и геометрије (Elementos de aritmética, álgebra y geometría)* писао о различитим поглављима алгебре а једна од њих су и квадратне једначине. Навео је да решавање једначине, у којој имамо да је непозната величина на квадрат, зависи од четири правила:

1. Посматрати све елементе једначине које садрже непознату са једне стране једначине али на начин да елемент који стоји уз квадрат непознате буде 1.
2. Ако је квадрат потпун (ако нема више елемената који садрже непознату осим квадратног), треба узети квадратни корен оба члана и тако ћемо пронаћи решење.
3. Ако је квадрат непотпун (поред квадрата непознате, постоје још један, два или више елемента са непознатом), треба додати са обе стране једначине квадрат половине величине која множи непознату првог степена.
4. Треба извући квадратни корен са обе стране једначине и тако ћемо пронаћи вредност непознате.

Додао је још неке коментаре као што је коментар везан за правило број 3 – правило се односи на то да ћемо добити потпуни квадрат. Што се тиче вредности, рекао је да свака квадратна једначина има два непозната корена или вредности, и ако се добију негативне вредности, проблем је решаван у супротном смеру. Такође, сматрао је да су имагинарне величине немогуће, па ако је резултат проблема имагинарни корен, проблем ће бити немогућ.

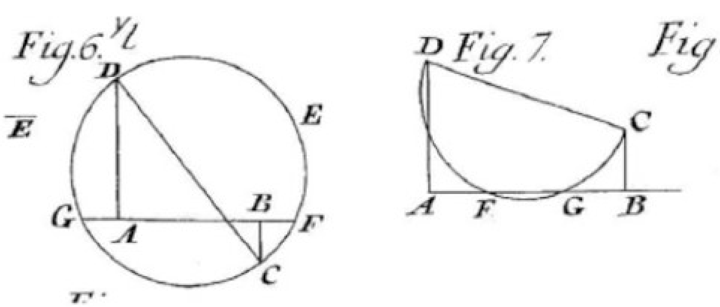
Жејм Конде (Jayme Conde) је у свом делу *Основи алгебре (Rudimentos de algebra*) писао о квадратним једначинама са само једном непознатом. Он је навео да за једначине попут $ax^2 = c$ вредност ће бити $x = \pm\sqrt{\frac{c}{a}}$. Ове вредности квадратних једначина могу бити позитивне или негативне, али ако је квадратни корен негативан ($\frac{c}{a} < 0$), проблем је немогућ.

Како бисмо решили потпуну квадратну једначину, једначина мора бити у облику $ax^2 + bx = c$. Треба додати свакој страни једначине квадрат половине познате величине која множи $x$ па ћемо тако добити потпуни квадрат, даље треба израчунати квадратни корен са обе стране и на тај начин ћемо добити решење једначине (узимајући у обзир да квадратни корен познатих вредности може бити и негативан и позитиван број).

Педро Ђанини (Pedro Giannini) је 1782. године у другом издању свог дела *Математички курс за обуку кадета краљевске војне артиљеријске школе (Curso matematico para la enseñanza de los caballeros cadetes del Real Colegio Militar de Artillería)* писао о решавању квадратних једначина. Како би пронашли решења квадратних једначина $x^2 + ax = bc$, када знамо да су величине $a, b, c$ или позитивне или негативне, треба да додамо квадрат половине коефицијента уз $x$ на обе стране једначине, а потом извадити корен са обе стране и на тај начин ћемо добити решење.

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{bc + \frac{a^2}{4}}$$

Аутор Ђанини је навео да ова решења могу бити негативна, позитивна или имагинарна. Као последицу, увео је и решење непотпуних квадратних једначина ($x^2 = bc$ и $x^2 + ax = 0$) и навео да имају два тачна решења. Он је, такође, увео и геометријску конструцију различитих квадратних једначина.




Геометријска конструкција две квадратне једначине

Антонио Грегорио Розел (Antonio Gregorio Rosell) је 1785. године објавио прво издање *Основи математике* (*Instituciones matemáticas*). Рекао је да вредност непознате за једначину облика $ax^2 = c$ биће $x = \pm\sqrt{\frac{c}{a}}$. За једначине облика $x^2 + cx = e$, где c и e представљају било коју позитивну или негативну вредност, разматрао је квадрат бинома тако да дода $\frac{1}{4}c^2$ на обе стране и потом пронађе корен са обе стране. Тим начином ће наћи вредност корена. Формула гласи:

$$x = -\tfrac{1}{2}c \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}c^2 + e}.$$

Розел је додао и напомену везану за вредности непознате - како бисмо знали које решење је оно тражено, или да ли су оба корисна, неопходно је познавати околности проблема. Такође, он је размишљао и о могућностима везаним за решења непознате: реална, једнака или различита... И такође, имагинарна, ако је $e < 0$ и e $> \frac{1}{4}c^2$. У овој ситуацији, аутор је рекао да је немогуће наћи тражена решења.

*Елементи аритметике и алгебре* (*Elementos de aritmetica y algebra)*, које је написао Мануел Пој Комес (Manuel Poy y Comes) 1786. године, садрже опште правило како пронаћи два решења у било којој квадратној једначини која не садржи ирационалне чланове. Прво је дао неколико правила како доћи до једначине облика $x^2 + ax = b$. Затим је описао даљи поступак: треба квадрирати половину коефицијента који стоји уз непознату првог степена, затим том броју треба додати познату вредност из једначине, потом извући корен од те суме и ако половини коефицијента који стоји уз $x$ додамо корен који смо претходно израчунали, добићемо прву вредност непознате. У колико одузмемо, добићемо другу вредност.

Пој Комес је четири године касније објавио дело *Кључ за аритметику и алгебру* (*Llave aritmetica y algebrayca)* које је било написано у облику постављања питања и одговора. Питање које можемо пронаћи у том делу је: „Како ћемо пронаћи вредности непознатих у једначини другог степена која не садржи ирационалне бројеве?" Одговор је био исти као у претходној књизи само што је био исписан у 13 корака.

*Преглед теоријске и примењене математике за обуку младих (Compendio de Matemáticas puras y mixtas para instruccion de la juventud)* коју је написао Франиско Вердеха (Francisco Verdejo) 1794. године, садржи неколико страна посвећених квадратним једначинама и њеним решењима. Једначине је поделио на просте и сложене и рекао је да свака једначина мора имати два решења. Просте једначине ($x^2 + a = c$) се решавају тако што се израчуна корен из разлике две познате вредности $x = \pm\sqrt{c - a}$. Сложене квадратне једначине ($x^2 + ax + b = c$) се деле на потпуне и непотпуне. Потпуне квадратне једначине су оне у којима је свака страна са непознатом величином потпун квадрат или може то постати једном трансформацијом. Оне се решавају лако, извлачењем корена са обе стране, а затим ако је потребно уради се пребацивање тако да непозната остане сама на једној страни. Непотпуне квадратне једначине су оне једначине у којима је немогуће учинити да страна у којој се налази непозната постане потпуни квадрат без додавања неке вредности. Оне се решавају тако што се дода на обе стране квадрат половине коефицијента који стоји уз непознату првог степена и на тај начин ће се добити потпуна једначина.

Тадео Лопе и Агуилар (Lope y Aguilar) је 1794. године написао књигу *Курс матетике: за обуку учесника у Краљевском семинару племића у Мадриду (Curso de matemáticas: para la enseñanza de los caballeros seminaristas del Real Seminario de Nobles de Madrid)*. Овај аутор је рекао да треба ставити све непознате са једне стране једначине и онда треба уклонити коефицијент који стоји уз квадрат непознате. Затим треба припремити страну једначине где се налази непозната тако да буде потпуни квадрат. Објаснио је како да се одради тај последњи корак, показао је и навео да квадратна једначина увек има два решења, било да су реална или имагинарна.

## Осамнаести век

Након доласка на шпански престол 1700. године, Бурбони су затекли школски универзитетски систем са три главна универзитета (Саламанка, Ваљадолид и Алкала) и читав низ мањих универзитета. Сваки универзитет је имао највише четири факултета, теолошки, правни, медицински и филозофски (или уметнички), где су прва три били главни факултети. У овом систему није било места за савремену модерну науку – напротив, интелектуалци су били отворено непријатељски настројени према њој.

У оквиру универзитета постојали су колеџи чија је првобитна намена била да помогне сиромашним ђацима да похађају универзитет. Обично је сваки колеџ имао регионални карактер и био ограничен на ђаке из одређених градова и провинција. Постојала је разлика између шпанских колеџа и британских или француских. Каган је описао ту разлику:

> „Док је већина колеџа на северу Европе била намењена студентима, са стеченим степеном образовања, који су касније менторисали млађе студенте, готово сви колеџи у Шпанији, сем њих шест су били намењени студентима без завршеног нивоа студија и од којих се очекивало да ће похађати предавања .”

Колеџи су били од велике важности јер су контролисали академска места и систем катедри. Штавише, деловали су у оквиру целе државне администрације, градећи мреже утицаја и интересних група. Универзитетске колеџе треба разликовати од других образовних институција које су такође називали колеџима, али који су имали другу функцију и постојали су ван универзитета. Такви су били језуитски колеџи који су играли важну улогу у образовању шпанског племства. Њихов колеџ у Мадриду, који је радио од 1572. и обновљен као *Царска школа* (*Colegio Imperial)* 1603. године, био је водећа образовна институција у периоду Хабзбурговаца, посебно након 1625. године, када је изабран да буде домаћин новим *Краљевским студијама Сан Исидор* (*Reales Estudios de San Isidro)*. Касније су Бурбони изабрали језуите да управљају новим *Краљевским студијама племића* (*Reales Estudios de Nobles)*, основаним у Мадриду 1725. године.

Colegio Imperial
некада и данас

Док су ове и друге образовне институције релативно високог нивоа постојале у земљи, немогуће је говорити о образовном систему у то време или чак у мало каснијем периоду. Иако су постојале градске и црквене школе, школе верских редова и слично, „то је било пре сналажење за пружења наставе на различитим нивоима, и варирајући од региона до региона ”.

Покушај Бурбона да реформише шпанске универзитете није се десио све до краја владавине Карла III (1759-1788), када је министар Кампоманес донео Краљевску повељу 1786. године. Реформа је покушала да стави тачку на моћ колеџа, стављајући шпанске универзитете под државну контролу. Истовремено, покушала је да рационализује наставну структуру систематичним уређењем диплома, наставних планова и уџбеника, као и обезбеђивањем професорских места. Реформа је окончала процват мањих универзитета, који су остали без садржаја јер нису испуњавали минималне захтеве за доделу званичних, признатих академских титула. У целини, реформа је пропала, углавном због жестоког корпоративног отпора великих универзитета, али и због недостатака финансијских ресурса.

Што се тиче математичког образовања, вреди поменути нову уредбу из 1771. на Универзитету у Саламанци (*Plan general de estudios dirigido a la Universidad de Salamanca por el Real y Supremo Consejo de Castilla*) која је заменила катедру за логику са катедром за геометрију, такође посвећена аритметици и алгебри и створили су нову катедру која је посебно намењена онима који су посвећени математици.

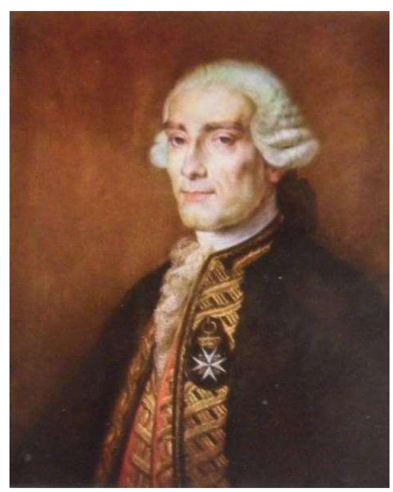

PLAN GENERAL
DE ESTUDIOS
DIRIGIDO
A LA UNIVERSIDAD
DE
SALAMANCA
POR EL REAL,
Y SUPREMO CONSEJO
DE
CASTILLA,
Y MANDADO IMPRIMIR
DE SU ORDEN.
EN SALAMANCA:
POR ANTONIO VILLARGORDO Y ALCARAZ,

У том контексту Хуан Хусто Гарсија (Juan Justo García), професор аритметике, геометрије и алгебре на Универзитету у Саламанци између 1777. и 1824. године, успео је да модернизује садржај математичких курсева и био је први који је предавао диференцијални и интегрални рачун на шпанском универзитету. Његови *Елементи аритметике, алгебре и геометрије* (*Elements of Arithmetic, Algebra, and Geometry* 1782), који садрже инфинитезимални рачун, били су широко коришћени као уџбеник, како у средњем тако и у високом образовању, током прве половине деветнаестог века.

Није неуобичајено да су се напори за промене и развој који су се дешавали у институцијама паралелним са универзитетом, попут војних школа (инжењерске, артиљеријске), школе за навигацију и школа за образовање племства *(Real Seminario de Nobles* и *Reales Estudios de San Isidro*), показали ефикаснијим него у универзитетима. Приметан напредак је такође постигнут и у новооснованим институацијама, попут такозваних Економских друштава пријатеља земље (Sociedades Económicas de Amigos del País), шпанска институциона иновација која је покушавала да постигне трансформацију друштва развијањем продуктивности. У оквиру општег таласа утилитарног напретка који је прошао кроз Европу, у осамнаестом веку, Економска друштва су се бавила питањима пољопривреде, индустрије, трговине и политичке економије, и у својим настојањима да подучавају занатлије, стварали су школе са значајним нивоом развоја научних дисциплина као што су математика или хемија.

Оснивање колеџа након протеривања језуита 1767. године на крају је олакшало појаву наставника и институција које су дале нови подстицај настави математике у Шпанији. Године 1787, академска валидност курсева најважнијих бивших језуитских колеџа (*Reales Estudios de San Isidro, Real Seminario de Nobles* у Мадриду, у Бергари и Валенсији) је званично призната за приступање главним универзитетским факултетима. Књига *Математички резиме (Compendio Mathematico)*, која је издата у девет делова у периоду од 1707. до 1715. године, аутора језуита Томаса Висента Тоске (Tomas Vicente Tosca) је одштампана последњи пут 1760. године и замењена је делима Бенита Бејлса (Benito Bails) – *Елементи математике (Elements of Mathematics),* обимна дела о математици издатих у десет делова (1772-1783), и *Принципи математике* (*Principles of Mathematics)*, елементарнији садржај (1776). Оба дела су настала у *Краљевској академији ликовних уметности Сан Фернанда (Real Academia de Bellas Artes de San Fernando)*, институцији посвећеној образовању у области сликарства, вајарства и архитектуре, где су 1768. основане две нове катедре за математику. Бејлсови Елементи математике и посебно његови Принципи били су широко распрострањени као уџбеници током прве половине деветнаестог века.

Томас Висента Тоска



Бенито Бејлс

## Деветнаести век: успостављање система наставе математике

Треба да имамо на уму да се систем шпанског образовања који се постепено развијао, као и терминологија коју је користио, битно разликовао од образовних система који су се развијали у другим земљама (пре свега у Уједињеном Краљевству и Сједињеним Државама). Универзитети су били под строгим надзором владе, али су истовремено били регионални центри образовања. У оквиру образовне области (почев од одређеног тренутка, Шпанија је била подељена на образовне округе), ректор универзитета, кога је именовао краљ, надгледао је целокупно образовање (у том погледу је очигледна сличност са француским системом). Значење термина као што су „дипломирани" или „мастер" разликовали су се од значења које су имали у земљама енглеског говорног подручја.

У деветнаестом веку, шпански закони о образовању и наставним плановима и програмима били су сложени и чак контроверзни; на пример, било је више од 25 математичких наставних програма за мање од три четвртине века. Ова разноликост била је последица политичке нестабилности, различитих либералних и конзервативних гледишта – први су промовисали науку, други хуманистичке предмете – и утицаја академских лобија. Ипак, наставни планови и програми из 1836, 1845. и 1857. године поставили су основну структуру средњег образовања током деветнаестог века.

## Уредба из 1807. и неки даљи прописи

Нови прописи из 1807. године су проширили прописе из 1771. године Универзитета у Саламанци на све шпанске универзитете и прецизније дефинисали курсеве. Диплома дипломираног филозофа се могла стећи за три године при чему су се различити курсеви могли похађати у трећој, завршној години, у зависности од одредишног факултета (право, теологија или медицина).

Уведена су два посебна курса, тачније, *Елементи аритметике, алгебре и геоме*трије и *Примењена алгебра у геометрији*. На оба курса се користила књига Хуана Хуста Гарсије Елементи аритметике, алгебре и геометрије. Часови су се одржавали по сат и по ујутру и сат после подне, и пратили су редослед дефинисан у називу курса: аритметика, алгебра и геометрија. Професор је морао да илуструје своја објашњења доказима и да подстиче учешће студената у вежбама на табли. Осим тога, сви студенти на Филозофском факултету морали су похађати недељну академију у трајању од 3 сата, при чему је први сат био посвећен одређеној теми из аритметике, алгебре или геометрије која је била предложена претходне недеље. Примењена алгебра у геометрији је био курс од сат и по ујутру који је требало похађати у трећој години на Филозофском факултету пре физике и хемије, само за студенте који су желели да упиши Медицински факултет.

Ови прописи нису били спроведени до краја такозваног Рата за независност (1808-1814) против Наполеона, што је зауставило програм реформе: француски период у Шпанији је био углавном само рат. Ова институционална парализа наставила се током Бурбонске рестаурације до смрти Фердинанда VII (1833), осим током Трогодишњег уставног периода (Constitutional Triennium 1820-1823).

Први правилник о средњем образовању у Шпанији појавио се у овом кратком периоду - *Општи прописи о јавном образовању (Reglamento General de Instrucción Pública 1821)*. Тим правилником уведене су две катедре посвећене теоријској математици на универзитетима у провинцији, новим институцијама које су пружале нове нивое вишег образовања. Међутим, ови прописи никада нису ступили на снагу због инвазије Свете алијансе који је вратио апсолутизам.

## Даљи развој средњошколске математике

Гаспар Мелхор де Ховеланос

Важни покушаји да се организује систем образовања десили су се после смрти Фернанда VII. Од 1836. године, почеле су да се појављују институције, које се могу сматрати средњим образовним институцијама (*Institutos*), у провинцијским престоницама. Оне су биле организоване према плановима *Гаспара Мелхора де Ховеланоса (Gaspar Melchor de Jovellanos*), значајне личности доба просветитељства у Шпанији. Образовање у овим установама трајало је 3 године. Прва година је укључивала логику и граматику (један сат дневно), елементе математике (један сат дневно) и геометрију примењену на цртање (три сата недељно). Током друге године математика (један сат дневно) се настављала заједно са физиком и хемијом (сат и по дневно) и математичком и физичком географијом ( 3 сата недељно).

Систем образовања представљен новим прописима из 1845. године обухватио је три фазе: основно образовање (обично до десет година), средње образовање и универзитско образовање. Истим прописом утврђена су три степена: дипломирани (bachiller), магистар (licenciado) и доктор.

*Основно средње образовање* трајало је 5 година и доводило до дипломе из филозофије. Овај начин образовања је обухватао аритметику и алгебру на трећој години студија и геометрију, тригонометрију и топографију на четвртој (један сат дневно у оба случаја).

*Проширено средње образовање (Segunda Enseñanza de Ampliación),* које је трајало 2 године и након кога се додељивало мастер звање из уметности или науке, је било потребно не само за приступање главним факултетима (правни, теолошки, медицински и фармацеутски) већ и да би се постао наставник на институту. Неопходни дипломски курсеви могли су се завршити на Филозофском факултету или на институту (када у покрајини није било универзитета). План студија за стицање дипломе магистра науке укључивао је грчки језик, вишу математику, хемију, минералогију, зоологију, ботанику, физичку астрономију и физику. Да би постали наставници на институту, дипломци су морали да положе тежак државни конкурсни испит и могли су изабрати своје радно место у зависности од свог резултата.

Како би укључио професионалну обуку, Закон о јавном образовању из 1857. године поделио је средње образовање на два огранка: опште образовање, којим се стиче диплома основних студија из уметности, и примењено образовање за индустријска занимања, којима се стиче вештина у пољопривреди, уметности, индустрији, трговини или навигацији. Опште образовање је такође било подељено на два периода од две и четири године; први је укључивао аритметику, а други аритметику, алгебру и геометрију. Општи испит је морао бити положен на прелазу из првог у други период. Полагањем овог дела стицала се диплома основних студија што је било неопходно за упис за даље студије.

Никакве суштинске промене нису биле уведене у математичком садржају, али је уведена нова диплома основних студија из науке (дипломирани научник) у трајању од три године. Од будућих наставника на институту се захтевало да имају ову диплому. Студијски програм који је водио до овог звања обухватио је од математичког садржаја – допуну алгебре (односи се на додатне теме, теореме, или проблеме који проширују знање и разумевање), геометрију, тригонометрију у равни и сфери и аналитичку геометрију у две и три димензије (3 сата недељно).

Треба напоменути да је државни испит за будуће наставнике укључивао дискусију, која је захтевала од кандидата да решавају проблеме и питања која постављају њихови противкандидати (други кандидати). Овај поступак је подстакао високу садржајну припремљеност на штету наставних метода. Како је век пролазио, све већи број наставника математике у средњим школама није имао само диплому из науке, већ и магистарску диплому из математике. У последњој четвртини века, многи универзитетски професори математике започели су каријеру као наставници средњег образовања. Као резултат тога, током читавог деветнаестог века, наставници средњег образовања постепено су формирали шпанску математичку заједницу заједно са војницама, грађевинским инжењерима и универзитетским професорима.

## Математички уџбеници

Наставници математике су били укључени у превођење страних уџбеника (чији је ниво тежине понекад био изнад нивоа знања и праксе ових наставника). Посебно су били популарни француски уџбеници. Прво преведено немачко дело су били Балцерови *Елементи математике* (1879-1881). Као и у другим европским земљама, најпопуларнији уџбеници у Шпанији у првој половини деветнаестог века били су:

- Лакроа *Основни курс чисте математике* (*Cours élémentaire de Mathématiques pures* - Lacroix 1807–1808)
- Франкоер *Комплетан курс чисте математике* (*Cours complet de Mathématiques pures* - Francoeur)
- Бурдонови *Елементи аритметике* (*Éléments d'arithmétique* Bourdon 1843)

  *Елементи алгебре (Éléments d'algèbre* Bourdon 1849)
- Лежандрови *Елементи геометрије* (*Éléments de Géométrie*- Legendre 1807)
- Бушарлатови *Елементи диференцијалног и интегралног рачуна* (*Éléments de calcul différentiel* et de calcul intégral Boucharlat 1834)
- Навиеров *Резиме лекција из анализе података у политехничкој школи* (*Résumé des leçons d'analyse données à l'École Polytechnique* Navier 1850)
- Поасонов *Трактат о механици* (*Traité de Mécanique* - Poisson 1845)
- Оливијеров *Курс нацртне геометрије* (*Cours de géométrie descriptive* - Olivier 1879)

Сва дела су имала превод на шпански језик осим Франкоеровог дела које није преведено али је Алберто Листа објавио *Елементе чисте и примењене математике (Elementos de Matemáticas puras y mixtas* (Листа и Арагон 1822)), базирано на Франкоеровом делу.

Влада је објавила званичне листе уџбеника који ће се користити у средњем образовању између 1846. и 1852. године. Изабрани аутори су били:

- Лакроа, Бурдон и Лежандр
- Хосе Мариано Валехо *Елементарни курс математике* (*Tratado elemental de Matemáticas* 1812–1817 José Mariano Vallejo)

- Хосе де Одриозола *Комплетни курс чисте математике* – (*Curso completo de Matemáticas puras* José de Odriozola)
- Хуан Кортизар *Трактат о аритметици (Tratado de Aritmética),*
  *Трактат о елементарној алгебри (Tratado de Álgebra elemental)*
  *Трактат о елементарној геометрији (Tratado de Geometría elemental)*
  *Трактат о тригонометрији у равни и сфери и топографији – (Tratado de Trigonometría rectilínea y esférica y de Topografía Juan Cortázar).*

Од 1850. године на листама су се налазила само три шпанска аутора, где се нашао и Акискло Фернандес Ваљин и дело *Елементарна теорија математике* (*Tratado elemental de Matemáticas* Acisclo Fernández Vallín).

1858. године званична листа уџбеника изоставила је Одриозолу, што је смањило ниво математичког садржаја. Листе из 1861, 1864. и 1867-1868 укључивале су

- Кортазарове *Трактате* (*Treatises)*

- Ваљинове *Елементе математике* (*Elementos de Matemáticas)*

- Валеха је био замењен Кардином и његовим *Елементима математике* (*Elementos de Matemáticas* Joaquín María Fernández Cardín 1858–1859).

Као резултат тога, Кортазарови Трактати су имале више издања (минимално 24, а максимално 45 издања). Број издања Кардинових књига варира између 16 и 25, док број издања Ваљинових књига варира између 12 и 15.

Вреди напоменути да су Кардинова дела специфично написана како би се користила као уџбеници и у средњем образовању. Штавише, њихов садржај је био прецизно прилагођен нивоу математике који је захтеван у наставним плановима и програмима, а са методолошке тачке гледишта, увели су концепте почевши од примера и појединачних случајева па све до апстрактних појмова и општих правила. Листе из 1861. и 1864. године су по први пут укључивале радну свеску, тј. Пикатостојеве *Принципе и вежбе из аритметике и геометрије* (*Principios y ejercicios de Aritmética y Geometría* - Picatoste 1861).

Што се страних аутора тиче, кључни аутор у прве две деценије друге половине деветнаестог века био је Цироде (Cirodde). Његова дела:

- *Лекције из аритметике* (*Lecciones de Aritmética*)

- *Лекције из алгебре (Lecciones de Álgebra*)

- *Курсеви геометрије са неким елементима нацртне геометрије* (*Lecciones de Geometría con unas nociones de la descriptiva*)

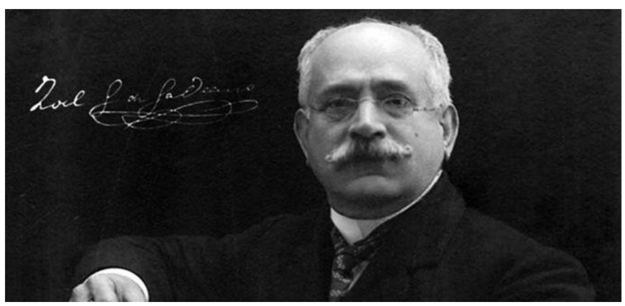
- *Елементи геометрије у равни и сфери* (*Elementos de Geometría rectilínea y esférica*)

су била наведена међу званичним уџбеницима за војне инжењере и научне факултете (званична листа из 1864. године), али су такође коришћени у средњем образовању.

Дела других француских аутора, која су била преведена у последњој четвртини века, била су:

- *Елементарне и напредније лекције алгебре* - Бриот (*Lecciones de Álgebra elemental y superior* -Briot 1880)
- *Трактат о елементарној геометрији* Руше и Комберос (*Tratado de Geometría elemental* - Rouché и Comberousse 1878–1879)
- *Елементи аритметике* и *Елементи тригонометрије* - Серет (*Tratado de Aritmética* и *Tratado de Trigonometría* -Serret 1879)

Међу универзитетским професорима математике који су започели каријеру у средњем образовању био је Зоел Гарсија де Галдеано (Zoel García de Galdeano), професор математичке анализе на Универзитету у Сарагоси. Захваљујући свом дубоком разумевању савремених математичких достигнућа, имао је утицај на увођење модерне математике у Шпанији и повезао перспективе средњег и високог образовања са истраживачким програмом. Године 1899. *Математичко образовање (L'Enseignement Mathématique)*, ускоро најпрестижнији међународни часопис о математичком образовању, отворен је радом аутора Гарсије де Галдеана, који је постао члан одбора Comité de Patronage. Касније, 1909. године, именован је за шпанског делегата *Међународне комисије за математичку наставу (International Commission on Mathematical Instruction – ICMI)*.



Зоел Гарсија де Галдеано

# СТРАНИ УТИЦАЈ И МАТЕМАТИЧКО ОБРАЗОВАЊЕ У АРТИЉЕРИЈСКОЈ ШКОЛИ У ШПАНИЈИ (1764-1842)

Током 18. и 19. века војне академије су представљале најбоље место за увођење и усвајање нових садржаја у Шпанији. За војну школу, период од 1764. до 1842. године је био период промена, полазећи од почетног отварања као установе која пружа добро образовање до постајања дугостепене академије познатије по специјализованој обуци у артиљерији. Као што знамо, то је период кад се и сама Шпанија суочавала са великим променама - оно што је некада била богата апсолутна монархија са колонијама широм света, постала је релативно сиромашна уставна монархија са мало територија ван Европе. Циљ овог дела рада је проучавање промена у методама подучавања математике у артиљеријској школи и испитивање које земље су имале највећи утицај на модификације направљене у том периоду. Овај период се може поделити у три временска интервала: од 1764. до 1808. године, од 1808. до 1830. године и од 1830. до 1842. године.

Први период од 1764. године до 1808. године се одвија непосредно пре Шпанског рата за независност када је интелектуално и филозофско размишљање које је дефинисало доба разума или просветљења било најдоминантније. Други период од 1808. до 1830. године је било посебно турбулентан и пун сукоба, посебно због ратова против Наполеона. Период од 1830. године је за артиљеријску школу посебно битан јер је поново отворена и означио је почетак новог доба које је трајало до 1842. године.

## *Артиљеријска школа у периоду од 1764. до 1808. године*

Краљевска наредба која је издата 1762. године је захтевала да шпански артиљеријски корпус оснује образовну установу или школу за младе кадете. Норме и прописи су били састављени и објављени 1768. године и одлучено је да ће локација школе бити у средњовековном замку Алказару у Сеговији. Такође, сматрано је неопходним да се у истом граду успостави додатна артиљеријска школа за тактичку обуку и повезана истраживања. Пре тога, обука официра је зависила од Краљевске војне академије у Барселони, којом је руководила инжењерска грана војске. Артиљеристи су изразили потребу за сопственом академијом наводећи да програм који прати академија у Барселони није адекватан за праћење актуелних напредака у балистици и хемији.

Школа је први пут отворена 1764. године на иницијативу грофа Газоле (Gazzola 1698-1780), Италијана који је тада био директор шпанске артиљерије. Школа је била организована тако да има два одвојена смера. Један је био посвећен теоријском образовању и био је под вођством Првог професора који је био математичар, док је други смер био формиран од кадета и предавања су држали један капетан и два поручника, предавања су била из војних прописа, војне обуке и руковања борбеним оружјем. Газола је имао специфичне захтеве за план и програм који ће се примењивати у школи. За Првог професора који је предавао теоријском смеру бирао се добар математичар са педагошким искуством. Језуит Антонио Ексимено (Antonio Eximeno 1729-1808), који је иначе рођен у Барселони, је испуњавао оба услова и био је ангажован за ту позицију. Преостала места за наставнике су додељена официрима из артиљерије који су имали искуство али и умеће да пренесу своје знање. Када је Ексимено протеран из Шпаније у априлу 1767. године, као и сви језуити, Газола је имао проблем да пронађе добро-квалификовану замену. Решење је пронашао у плану и програму који је предоложио Циприано Вимеркати (Cipriano Vimercati 1730-1808), рођени Шпанац. Вимеркатијев план је укључивао осам књига посвећених математици: по две књиге из аритметике и геометрије, пета је била посвећена алгебри, шеста примени алгебре у геометрији, седма инфинитезималном рачуну и осма механици. Овај програм је укључивао диференцијални и интегрални рачун што је било изузетно важно за проучавање балистике. Вимеркати је 1777. године напустио школу што је Газоли поново донело проблеме. Није успео да пронађе адекватну замену у Шпанији, па је био приморан да тражи даље. Пронашао је свог сународника Пијетра Ђанинија (Pietro Giannini 1750-1820).

Ђанини је био компетентан математичар али није имао искуство у раду са војском. Провео је годину дана у Шпанији учећи шпански језик пре него што се придружио школи. Листа књига и аутора које је Ђанини одабрао да користи у свом раду се састојала од савремених математичара различитих националности (Британци, Италијани, Французи, Шпанци). Током свог боравка у Сеговији, Ђанини је издао књиге које ће се користити у школи. Прва књига се зове *Курс математике (Curso Matemático*) и имала је четири дела и издао је књигу о примењеној геометрији *Вежбе из геометрије и тригонометрије са логаритамским таблицама (Prácticas de Geometría y Trigonometría con las tablas de Logaritmos)*. Уопштено гледано, у књизи *Курс математике* можемо пронаћи садржаје из геометрије, тригонометрије, конусних пресека (круг, елипса, парабола, хипербола), аритметике, алгебре, решавање једначина и неједначина, диференцијални и интегрални рачун. Такође, можемо пронаћи садржај из статике, хидростатике, динамике и флуида. Може се приметити да се ослањао на радове Њутна, Ојлера, Бернулија, Рикатија, Лопитала и многих других математичара. Одсуство информација о практичној примени проучаване математике представљало је главну ману, јер књиге нису одговарале на оно за шта је већина војних људи изразило потребу. Свака подршка Ђанинијевом раду је вероватно проистекла из чињенице да је имао пуну подршку Газоле. Смрт Газоле 1780. године ће донети низ критика на рачун Ђанинија. Резултати испита одржаних 1781. године показали су веома лош успех за шта је нови директор артиљерије гроф Лација тражио образложење. Сви чланови школског савета су одговорили исто осим Ђанинија а то је да би оцене биле много боље ако би курс био мање апстрактан и ако би се додатно увеле практичне примене чиме би градиво постало приступачније и лакше за разумевање. Гроф Лаци је био војник ирског порекла и попут Газоле био је присталица квалитетног образовања. Одлучио је да, упркос свему, подржи Ђанинија и задржи програм онакав какав јесте али је предложио две главне измене. Прва је била да се у градиво укључи примењена геометрија, а друга је да се унапреди друга школа такође смештена у Сеговији, која је практично обучавала кадете како да користе топове и друге војне ресурсе.

Ђанини је примарно одговоран за степен италијанског утицаја на нове методе предавања математике у школи, што је представљало одступање од начина на који су Шпанци приступали образовању математике током последње четвртине осамнаестог века, када су математичари следили француске ауторе. Степен француског утицаја се највише односио на артиљеријску школу. Прегледом школске библиотеке можемо видети колико су била важна дела на француском језику за професоре који су предавали у то време. Одломак из каталога школе објављеног 1764. године показује следећу прерасподелу по језицима.

| | | |
|---|---|---|
| Француски језик | 453 | 52,1% |
| Шпански језик | 223 | 25,6% |
| Латински језик | 120 | 13,8% |
| Италијански језик | 61 | 7,0% |
| Енглески језик | 6 | 0,7 % |
| Португалски језик | 6 | 0,7% |
| Каталански језик | 1 | 0,1% |

Подела књига према језику на ком су написане

Као што табела показује, већина књига у библиотеци школе је била објављена на француском језику. Следећа табела показује расподелу по националности аутора.

| Националност | Број аутора | Процентуално |
|---|---|---|
| Французи | 109 | 44% |
| Иберијци | 59 | 23% |
| Италијани | 42 | 17% |
| Британци | 14 | 6% |
| Немци | 13 | 5% |
| Холанђани | 11 | 4% |

Подела аутора по националности

Упоређивањем ове две табеле видимо да већи број објављених уџбеника није био на матерњем језику аутора. Заправо, неколико италијанских, британских, немачких и холандских аутора имало је своје књиге преведене на француски или латински, с обзиром на то да већина шпанских професора који су предавали у школи нису били вешти са другим језицима.

Математика је била главна тема тих књига. Следећа табела показује да је било више књига о математици него о артиљерији или другим војним темама.

| | | |
|---|---|---|
| Математика | 109 | 29% |
| Војне вештине | 76 | 20% |
| Артиљерија | 30 | 8% |
| Физика и природне науке | 57 | 14% |
| Географија | 25 | 6% |
| Архитектура и инжењерство | 37 | 10% |
| Цртање | 11 | 3% |
| Други предмети | 36 | 10% |

Подела књига према предмету

Француски утицај може се пронаћи и у односу на друге предмете који су се учили у школи током тог времена. Један од примера је утицај у области хемије, предмету који су високи официри у шпанској артиљерији сматрали од велике важности за проучавање и производњу топова и барута. Сходно томе, ангажовали су француског хемичара Луја Пруста (Louis Proust 1754-1826) који је радио у Сеговији од 1786. до 1799. године. Након периода обележеног прилагођавањима, математика која се предавала у артиљеријској школи је била веома слична математичким курсевима који су се нудили у школама других европских земаља.

Нови закон, који је ступио на снагу 1804. године, захтевао је да сви професори буду артиљеристи па је Ђанини био приморан да напусти школу јер није био артиљериста, и скоро па сигурно, јер више није било прикладно да странац буде на челу. Његов наследник је био пуковник Франсиско Хавијер Датоли (Francisco Javier Datoli). Датоли је учествовао у рату против француског савеза, али је већи део свог искуства стекао радећи у ливницама, као и у фрабрици где је стекао искуство из металургије. Као Први професор, одлучио је да објави нови и измењени приручник који је укључивао иновативније педагошке методе од Ђанинијевих. Иако је Датоли објавио само два дела, *Математички курс издање I Аритметика* (*Curso Matemático Tomo I Aritmética* 1807) и *Математички курс издање II Алгебра* (*Curso Matemático Tomo II Algebra* 1807), обе књиге својим садржајем подсећају на дела Лакроа.

Током тих деценија, артиљерија шпанске војске је преузела контролу над фабрикама у краљевству које производе оружје и барут, и ускоро је постало очигледно да обука коју је пружала школа није довољно квалитетна за ове задатке. Као резултат тога, 1804. године је отворен смер *Више студије* (*Estudios sublimes)* који следи после школе и који је најбољим дипломцима пружио наставак специјализоване обуке у хемији и металургији.

## *Артиљеријска школа у периоду од 1808. до 1830. године*

Период од 1808. до 1830. године је био веома турбулентан период за артиљеријску школу у Шпанији. Кад је Шпански рат за независност почео 1808. године, школа је морала да затвори своје просторије и пресели се из Сеговије како би се спасила од надолазеће француске војске. Школа је пронашла своје место на Балеарским острвима. Током овог периода је потпуно обустављено објављивање Датолијевих нових припручника. Чињеница да је Велика Британија била најјачи савезник шпанских побуњеника је имала веома мало утицаја на садржај који се примењивао у школи. Настава у школи се одвијала са све већим потешкоћама у облику недостатка наставног кадра и књига. Због недостатка књига које су објавили Ђанини и Датоли, почели су да користе књиге других шпанских аутора попут Бенита Бејлса, Хуана Хусте Гарсије и Хосеа Мариана Валехе. Иако се садржај ових књига није значајно разликовао у односу на дела Ђанинија и Датолија, значајно су биле популарније и коришћене у многим школама и универзитетима. За ове шпанске математичаре, француски утицај је био посебно очигледан, посебно у делима Бејлса и Валехе. Приручници Лакроа су почели да се преводе на шпански језик и такође су коришћени у артиљеријској школи.

Школа се 1814. године поново враћа са Мајорке у Сеговију. Земља је претрпела озбиљну и широку распрострањену штету током рата. Недостајала су средства за плаћење свакодневних трошкова и, сувишно је рећи, мало или нимало средстава која би се могла доделити за штампање нових књига. Међутим, школа је некако успела да објави новију верзију дела *Трактат о артиљерији* (*Tratado de Artillería*), које је издао Морла, али у исто време нису имали довољно средстава за поновно објављивање Ђанинијевих дела. Недостатак уџбеника за наставу математике је и даље био проблем, па су као привремена замена коришћена дела Лакроа, Валехе и Гарсије.

Краљевска уредба која је издата 23. августа 1819. године увела је велике промене у програм артиљеријске школе. Овом уредбом је смер *Више студије* укинут због недостатка довољне обуке из хемије и металургије у Шпанији јер школа није имала довољно ни средстава ни особља да организује сопствене курсеве. Као резултат тога, школовање је продужено са 4 године на 5. Математика је и даље заузимала истакнуто место у програму као главни предмет проучавања. Предложене области за обрађивање су биле: аритметика, алгебра, геометрија, примена алгебре у геометрији, диференцијални и интегрални рачун, механика са статиком, динамиком, хидростатиком и хидродинамиком. Пета година је била посвећена артиљерији. Приручници су промењени и уместо Ђанинијевих дела, предложена су дела Лакроа која су већ преведена на шпански језик.

Упркос ратовима против Француске, после 1814. године утицај Француске је постао израженији више него икад раније. У исто време образовање из математике у артиљеријској школи се чинило мање значајно. Ђанинијев наследник, који је именован за Првог професора, није био стручњак за математику. Од 1814. до 1815. године ову позицију је обављао Мунариз (Munarriz), који је био Прустов ученик и познат по стручном знању из хемије али не и по значајном достигнућу у математичком домену. Од 1815. до 1822. године, позицију је преузео Хосе Вергара (José Vergara 1772-1847), који је имао искуство од 20 година као професор али није био ни искусан ни познат математичар. Хосе Гереро де Торес (José Guerrero de Torres 1779-1841), официр артиљерије и полиглота који је и сам био ученик школе у Сеговији и касније био затворен у Француској током ратова, је наследио Вергара на тој позицији. Школа је и даље наставила рад по програму који је представљен 1819. године и у великој мери су се користили уџбеници Лакроа за наставу. Након победе француске војске, Фернандо VII је поново владао Шпанијом као апсолутни монарх, и по наредби краља издатој 27. септембра 1823. године, школа артиљерије је дефинитивно затворена, кадети су послати кући, а професори су смењени са дужности.

Недуго затим је отворена Општа војна школа у Сеговији на месту артиљеријске школе. Што се тиче математике, наставни план се није драстично разликовао од програма који се користио у артиљеријској школи. Уџбенике које су користили су углавном била дела Лакроа, али користили су и друга дела као што су дело Маријана Зоракина (Mariano Zorraquín) о примени алгебарске геометрије, дело Ђанинија о примењеној геометрији и дело Монжеа о просторној геометрији.

Артиљеријски огранак (као део Шпанских наоружаних снага) је готово у потпуности искључен из ове школе. Обука специфична за артиљерију коначно је постала могућа 1827. године као вид теоријске обуке за кадете који се припремају за вођење пет специјализованих одељења артиљерије и Војног музеја у Мадриду. Уџбенике које су користили за обуку математике су углавном били они написани од стране Лакроа.

## *Артиљеријска школа у периоду од 1830. до 1842. године*

Ниво обуке за артиљерију, који се организовао од стране различитих школа, показао се недовољним за потребе војске па је и сам краљ пристао да се поново отвори артиљеријска школа. Школа је поново отворена 1830. године. Будући да је Алказар у Сеговији био заузет Војном школом, артиљеристи су премештени у посебну зграду на територији Универзитета Алкала де Енаред, док су артиљеријске лабораторије и остали помоћни објекти остали у Сеговији. Са овом новом локацијом, школа није имала приступ овим додатним ресурсима па је обука за кадете била углавном теоријска.

Објављен је и нови пропис за опет отворену школу. Једина разлика у односу на оно што је важило 1804. године је била у томе што је именовани Први професор сада био задужен за све курсеве артиљерије, док су претходни били задужени за вођење предмета везаних за математику. Овим прописом је дато много значаја математичким предметима, али је изгубила своју примарност. Уџбеник који се користио је био Одриозолин Курс чисте математике, који има 4 дела.

Хосе де Одриозола (Jose de Odriozola) је имао претходно искуство у истраживању везаном за пиротехнику и балистику, али није имао искуства у правцу математике. Зато су током својих истраживачких путовања у иностранство 1836. године, када је путовао у Француску, Белгију, Холандију, Пруску и Енглеску, главни интереси била питања везана за војне операције, производњу наоружања и металургију, али никада и о математици. Овај недостатак интересовања за математику био је уобичајен за већину официра артиљерије који су у то време истраживали. Чешћи начин доласка до нових сазнања из области математике је био путем објављених књига или информација дељених од стране других шпанских математичара.

Степен француског утицаја наставио је да се повећава у Шпанији упркос рату и инвазији француских трупа 1823. године. Када је отворена Општа војна школа на месту артиљеријске школе 1824. године библиотека је остала при њиховом власништву. То је за артиљеријску школу значило да су остали без много књига, па када је опет отворена имали су проблем. Школа је у јануару 1831. године издала званични захтев за више књига, уз аргументацију да постојеће књиге нису једноставно довољне и да су застареле. Захтев је укључивао листу од 176 наслова. Ова листа је била подељена на два дела под називима „Француске књиге“ и „Шпанске књиге“. Захтев је укључивао само књиге објављене на француском или шпанском, и врло јасно, већина захтеваних наслова је била написана на француском. Однос књига је дат следећом табелом.

| | | |
|---|---|---|
| Француски језик | 160 | 90% |
| Шпански језик | 17 | 10% |

Подела књига према језику на ком су написане: француски или шпански

Расподелом наслова у односу на предмет можемо исто закључити да математика постаје мање приоритетна и заостаје за војним вештинама, артиљеријом и природним наукама.

| | | |
|---|---|---|
| Математика | 28 | 17% |
| Војне вештине | 38 | 23% |
| Артиљерија | 41 | 25% |
| Физика и природне науке | 32 | 19% |
| Географија | 3 | 2% |
| Инжењерство | 11 | 7% |
| Цртање | 11 | 7% |

Подела књига према предмету

Упрва шпанске артиљерије настојала је да повећа ниво знања најбољих ђака па је поново увела двогодишњи смер после завршетка артиљеријске школе. Да би то постигли, настава за ова додатна усавршавања требала је да се одвија на институтима у Мадриду, јер артиљерија у то време није имала средстава да оснује сопствену високошколску установу. Треба напоменути да не баш повољни услови у школи током овог периода одговарају турбулетном периоду у Шпанији, посебно од 1833. до 1840. године када је избио грађански рат између Карлиста (апсолутиста) и либерала. Школа и сви њени чланови су подржавали либералну коалицију у овом сукобу. Како је либералној војсци била потребна помоћ артиљераца на бојном пољу, наређено је да се скрати наставни програм како би официри могли што пре да започну службу. Након разматрања 1837. године предложен је нови скраћени програм. Делимичне промене су учињене у избору уџбеника за подучавање математике. Дело Лакроа је предложен за аритметику и елементарну алгебру, Лежандрови Елементи геометрије су предложени за геометрију, док је за геометрију у простору предложено дело Монжа. Књиге које је издао Одриозола су се и даље користиле за преостале математичке теме које су се сматрале битним. Међутим, овај нови програм се показао недовољним за припрему за практичне техничке задатке које је артиљерија захтевала, па су смер за усавршавање продужили са две на три године. Током прве године, ђаци су требали да користе дело Лакроа *Трактат о елементарној алгебри (Tratado elemental de Algebra)* и проучавају дело шпанског математичара Хосеа Чаикса (José Chaix (1765-1809) *Memoria sobre un nuevo método general para transformar en series las funciones transcendentes*). Друга година је подразумевала проучавање дела о рачуну који је издао Одриозола и дела Зоракина – *Курс математике и Аналитичко-нацртна геометрија* (*Curso Matemático;Geometría analítica-descriptiva*). Предмети на трећој години су се односили на физику и инжењерство. Овај предложени програм напредних студија није био прихваћен неколико година. Године 1837. Први карлистички рат је био на врхунцу те усавршавање високог образовања тренутно није био приоритет. Такође, град Алкала није био брањен. Карлистичке трупе које је предводио генерал Гомез пришле су близу Алкале, па је начелник артиљерије у то време затражио да се школа премести у Мадрид или Севиљу. Након напада на Сеговију и узимања професора и кадета Војне академије у заробљеништво 1837. године, генерални инспектор артиљерије је поново поднео захтев да се школа пребаци у Мадрид и захтев је коначно одобрен. Међутим, проналажење одговарајућих просторија у престоници се показало као проблем јер се и Универзитет у Алкали, такође, преместио у овај град. На крају, у новембру 1839. године су се повукли и вратили у Сеговију. Најзначаније промене током овог периода углавном су проистекле из тога што је либерална коалиција преузела контролу владе 1836. године - једна од промена је била да се особљу школе придружило још неколико професора који су јавно подржавали либерални покрет али ниједан није био математичар. Промене у настави математике нису биле направљене.

Школа није дуго опстала у Сеговији са општим наставним програмом. Нови прописи издати 1842. године су прописали да ће за све војне студије прво бити потребна диплома Опште војне школе, а Школа артиљерије је постала институција за специјализовано обучавање у артиљерији. По таквом плану ниједан ђак није уписао артиљеријску школу као нов и до 1843. године, само су официри који су завршили Општу војну школу приступили школи. На тај начин су официри стицали основно знање у војној школи што је променило план математике који се предавао у артиљеријској школи.

Начин на који се развијало образовање из математике у Школи артиљерије илуструје како се проучавање мењало током овог периода. У 18. веку, кадети су уписивали школу у узрасту од 12 до 14 година, а школа је представљала средњу школу са циљем да их припреми за даља студирања са основама војне обуке. Како су се отварале друге средње школе, математика је изгубила значај а приоритет је био пружање обуке из артиљерије.

# ДВАДЕСЕТИ ВЕК: МАТЕМАТИЧКО ОБРАЗОВАЊЕ ПРЕ И ПОСЛЕ ШПАНСКОГ ГРАЂАНСКОГ РАТА (1936-1939)

## Математичко образовање до Шпанског грађанског рата (1936-1939)

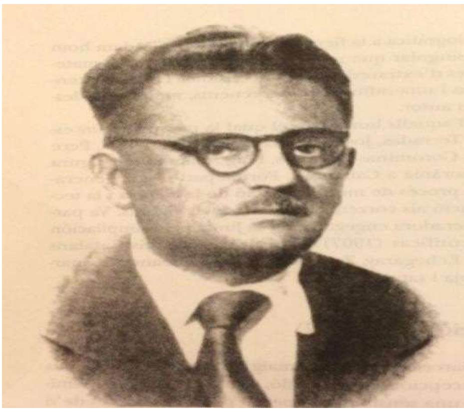
1907. године основана је нова иституција за подршку научним истраживањима *Одбор за напредне студије и научна истраживања (Junta para Ampliación de Estudios e Investigaciones Científicas)*. Ова институција је била кључна у доношењу духа реформе у средње образовање. Што се тиче математике, између 1910. и 1915. године, Одбор је доделио стипендије тројици математичара за проучавање наставних метода и наставних планова и програма у Берлину, Женеви, Лондону и Кембриџу и дала финансијску подршку Галдеану за учешће у Међународној комисији за математичко образовање.

Одбор, добро финансирана институција, била је независна од недовољно финансираних универзитета; новим лабораторијама су управљали млади професори уместо искусних чланова факултета Универзитета у Мадриду. Ово је резултирало затегнутим и напетим односима између Одбора и Универзитета на штету младих истраживача из Одбора: упркос високим квалификацијама, многи од њих нису добили звање универзитетских професора, већ су уместо тога постали наставници у средњој школи.

Убрзо након тога, када је основано *Шпанско математичко друштво* (1911. године), 38% његових чланова били су наставници (65 наставника средњих школа, 39 универзитетских професора, 27 наставника средњих техничких школа, 2 наставника из основне школе, 3 комерцијална наставника). Штавише, међу 54 институционална члана, 20 су били центри средњег образовања, 5 факултети наука и 2 средње техничке школе. Ови подаци сами за себе говоре о значају средњег образовања у шпанској математичкој заједници.

У том контексту, није изненађујуће што је *Математичка лабораторија и семинар (Mathematical Laboratory and Seminar)* основана 1915. године као део Одбора, развијала рад паралелно са истраживањима у области наставе математике и припремала за средње образовање. Такође вреди напоменути да је 1927. године Хулио Реј Пастор (Julio Rey Pasto), први директор ове лабораторије и тада најпознатији шпански математичар, покренуо серију уџбеника математике за средње образовање значајног наслова *Интуитивна збирка (Intuitive Collection)* заједно у сарадњи са својим учеником Педро Пуг Адам (Pedro Puig Adam).

Ови потези су задобили одговарајућу политичку пажњу током Друге шпанске републике (1931-1936), када је уложен значајан труд за средње образовање, не само у смислу финансијских улагања већ и унапређивањем научних садржаја. Што се тиче математике, наставни план из 1934. године не само да је укључивао инфинитезимални рачун и комплексне бројеве у средњем обрзовању по први пут у Шпанији, већ је математику представљао циклично и прогресивно кроз седам курсева. Другим речима, садржај је био распоређен у седам тешких академских година (3 сата недељно у свакој години осим у трећој када је било 4 сата). Прве две године су биле посвећене аритметици и геометрији, трећа и четврта рационалној аритметици и геометрији у равни, пета алгебри и просторној геометрији, шеста реалним броејвима, тригонометрији и комплексним бројевима, а седма анализи бесконачности и аналитичкој геометрији.



Педро Пуг Адам

Хулио Реј Пастор

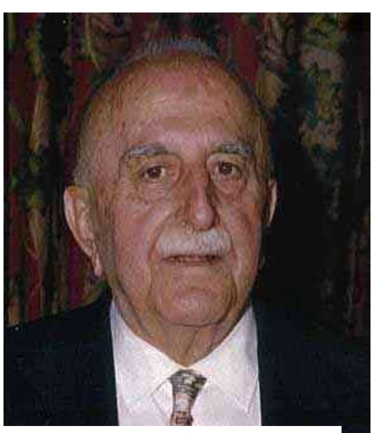
## Увод у „модерну математику”

Након Шпанског грађанског рата, Закон о основном образовању донет је 1945. године. Овај закон је основно образовање организовао у три фазе: основно (6-10 година), усавршавање (10-12 година) и професионални развој (12-14 година). Основно образовање било је обавезно и бесплатно само за децу узраста од 6 до 12 година. Касније, 1965. године, овај закон је делимично реформисан. Претходне фазе су уједињене, а основно образовање постало је бесплатно и обавезно од 6 до 14 година. Број предшколске деце и основаца је значајно порастао. Број је порастао са отприлике 2 800 000, колико их је било 1950. године, на 4 740 000, колико их је било 1970. године. Треба напоменути да до 1965. године више од пола милиона деце није похађало основну школу и тек од 1978. године 99,8% деце узраста од 6 до 14 година је уписало исту.

Закон из 1945. године ставио је основно образовање у руке католичке цркве, док је улога државе била само помоћна. Први петогодишњи план за изградњу јавних школа одобрен је тек 1956. године. На пример, 1955. године, само 54% ученика основног образовања похађало је јавне школе. Изузимајући верску наставу, физичко васпитање, политичко образовање и предмете о кућним пословима, званични програми су били централизовани и контролисани од стране Министарства образовања.

Контрола државе над уџбеницима такође је била интезивна. Након грађанског рата, многи уџбеници су повучени из идеолошких разлога, а влада је покушала да објави своје званичне уџбенике. Ова идеја је убрзо напуштена, делом због притиска који је вршила католичка црква и специјализоване издавачке компаније. Политичка и идеолошка цензура остала је константна током целог периода диктатуре Франсиска Франка. Уџбеници су морали да се придржавају идеолошких принципа државе, као и званичних програма. Међутим, током времена ова контрола постала је мање строга, што је довело до техничког и дидактичког унапређења уџбеника. Светски талас реформи математике 1960-их и 1970-их такође је стигао у Шпанију.

Што се тиче математике, Шпанци су били мотивисани везом Пуиг Адама са *Међународном комисијом за проучавање и унапређење наставе математике (International Commission for the Study and Improvement of Mathematics Teaching - CIEAEM)*. Као примењени математичар, Пуиг Адам био је повезан са образовним реформама Друге шпанске републике. Његова сарадња са Рејем Пастором настављена је од 1944. године па надаље у новој серији уџбеника, Рационална збирка (Rational Collection). Обојица су израдили комплетан низ уџбеника математике за наставни план и програм за 1954. и 1957. годину.



Педро Абеланас

Када је Пуиг Адам (Puig Adam) прерано преминуо у 59. години 1960. године, заменио га је Педро Абеланас (Pedro Abellanas), професор пројективне геометрије на Универзитету у Мадриду и снажан заговорник потребе да се унапреде наставни планови и програми математике у средњој школи и успостави више веза између њих и савремене математике. Године 1961. именован је за председника *Комисије за експерименте у настави савремене математике* која је званично основана у Министарству просвете ради проучавања могућности увођења идеја савремене математике у више средње образовање (5. до 6. разред, узраст 14–16 година) како би се унапредили курсеви без промене целокупног наставног плана и програма.

Комисија је објавила два пилот-уџбеника под насловом Модерна математика, које је написао Абеланас, који су имали за циљ да успоставе нове и „ефикасне” методе и структуре, као и нове трендове у савременој настави математике, у циљу пружања математичке обуке за високо научно образовање и професионалну свест. Овакав нови приступ био је видљив од самог почетка, посебно у настави за петнаестогодишњаке: уведени су елементи теорије скупова и алгебарских структура, нестали су класични геометријски и алгебарски приступи, а ниво потребних знања се повећао.

Овај тренд се појавио и у реформи тзв. основне матуре (1.– 4. разред, узраст 10–14 година) 1967. године. Према новом правилнику, ученицима је требало омогућити стицање знања о појмовима и методама савремене математике, а нови наставни план би био уређен на основу теорије скупова и основних алгебарских структура.

Што се тиче организационих промена, нови Закон о образовању из 1970. године успоставио је основно образовање за ученике узраста 6–14 година и средње образовање за ученике узраста од 14–17 година. Одмах је примењено на основно образовање, али на средње образовање се примењивало тек од 1975. па на даље – то јест, у демократској Шпанији. Што се тиче математичког образовања, модеран структурални стил остао је до раних 1980-их, када су се појавила прва прилагођавања и исправке као одговор на оштре критике наставника и родитеља.

# Прелазак на модерну математику у шпанском основном образовању: Програм из 1965. године

У овом одељку бавићемо се почетним тренуцима увођења модерне математике у шпанско основно образовање. Иако су идеје модерне математике потпуно уведене и примењене 1970. године помоћу Општег закона о образовању, неке аспекте модерне математике можемо пронаћи и у реформи која је претходила, односно реформи из 1965. године. Како бисмо одредили како и који садржај овог програма је уведен тада, анализираћемо два типа документарних извора. Прво, упоредићемо званични програм из 1965. године са претходним програмом из 1953. године. Друго, упоредићемо две верзије уџбеника које је издала иста издавачка кућа пре и после реформе из 1965. године. По плану и програму идеје модерне математике су биле присутне углавном у уводном делу програма и имале су мало утицаја на теме. Са друге стране, чини се да су промене биле веће на нивоу уџбеника. Поготово, теорија скупова је била дубље имплементирана у уџбеницима него што је била намера у званичном плану.

Наставни план из 1953. године одговарао је Закону о основном образовању из 1945. године. Овај документ је касније поново објављен, без икаквих промена, 1955. године. Реформа из 1965. године није укључивала дубоку реорганизацију шпанског образовног система, али су наставни планови свих предмета (не само математике) потпуно ревидирани у покушају „прилагођавања основног образовања захтевима нових социокултурних структура”.

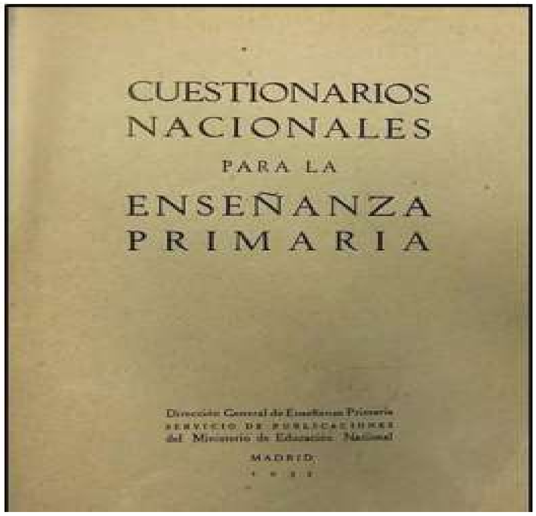
## *Наставни план из 1953. године*

Наставни план из 1953. године почињао је кратким одељком од око 2 странице названим *Дидактичка правила (Normas Didácticas)*, за којим је следило описивање садржаја који су требали бити обухваћени у сваком разреду. Ови садржаји су даље били подељени на нивое, три за сваки ниво, и били су приказани у форми листе ставки без икакве даље структуре. Све дидактичке и методолошке назнаке дате су у уводном делу документа, уз врло мало референце на одређене математичке теме.

Подразумевана структура уводног дела била је прилично јасна, подељена у три једнака дела. Први део био је посвећен објашњавању присуства математике у програму и истицао је њену формалну вредност. Други део је био посвећен пружању општих назнака о когнитивним аспектима учења математике. Коначно, последњи део био је посвећен пружању методолошких коментара у вези са неким математичким садржајима уз референцу на различите фазе основног образовања.

Присуство математике је првенствено било утемељено на традиционалним методама: „традиционално шпанско школство посветило је посебну пажњу поучавању математике, а да није било под утицајем иновација које су је стављале у други план”. Важност предмета била је мотивисана његовом формалном вредношћу и примењивошћу.

Што се тиче когнитивних аспеката, нагласак је стављен на понављање и константно вежбање, поступно закључивање и потребу за генерализацијом. Упркос изјави да ће „основно правило у поучавању математике бити чврсто утемељење знања”, видимо да се у неким ситуацијама коначно утемељење заснивало на ауторирету: „наметање својства чије објашњење није у домашају ученика биће преферирано у односу на давање нетачне дефиниције. У таквом случају, биће довољно признати тешкоћу и веровати ауторитету научника”.




Почетна страна закона из 1953. године

Неки садржаји заслужују посебан коментар. На пример, како ментална, тако и писана аритметика сматране су неопходним. Елементарни аритметички проблеми трабали су бити представљени у растућем редоследу тежине, и требали су бити груписани „не према потребним операцијама, већ према областима примене”. Подстицало се коришћење графичких приказа за решавање оваквих проблема, али само као „помоћно и допунско средство”. Што се геометрије тиче, учитељима се саветовало да „избегавају тешке доказе који користе превише слова или симбола”.

Након овог увода, документ је наставио да представља садржаје који су морали бити предавани током одређених разреда основног образовања. За сваки од 3 нивоа у сваком разреду дат је само приказ шта ће се обрађивати. Као пример, садржаји који су одговарали првом нивоу првог разреда били су следећи:

Вежбе о формирању група и серија. Упоређивање објекта и бројање. Композиција и декомпозиција једноцифрених бројева. Детаљна анализа сваког од њих. Њихово графичко приказивање. Бројање од напред и назад до 20. Читање и писање бројева до 20. Вежбе за упознавање са мерењем и коришћењем јединица. Вежбе за упоређивање удаљености погледом. Приказивање целобројних бројева. Вежбе о класификацији и груписању тела различитих облика.

Као што је већ поменуто, прва фаза основног образовања обухватала је четири разреда (узраст од 6 до 10 година). Током ових разреда, ученицима су представљани бројеви, елементарна аритметика са природним бројевима, децимални бројеви и разломци. Уведен је и метрички систем, заједно са неким основним појмовима геометрије.

## *Наставни план из 1965.године*

Наставни план из 1965. године такође је започет кратким уводом који је имао јасну и очигледну структуру. Овај увод није садржао никакве специфичне методолошке коментаре, већ се углавном фокусирао на описивање циљева наставе математике. Међутим, прва два пасуса била су посвећена представљању и објашњавању нове организације наставног плана, наводећи да „учење математичких појмова и односа мора бити активно" и да „се појмови могу достићи само кроз низ вежби".

Након тога, представљени су циљеви, правећи разлику између математичких и друштвених циљева. Математички циљеви (било их је пет) су били:

- Развити разумевање математике као система повезаних принципа – ово значи, с једне стране, стицање знања о појмовима кроз операције као што су бројање, мерење, поређење, и са друге стране разумевање декадног система...
- промовисање разумевања и коришћења математичког вокабулара...
- промовисање прецизности и лакоће у коришћењу четири основне операције са целим бројевима, разломцима и децималним бројевима...
- увођење низа функционалних појмова који имају за циљ да упознају ученика са тренутним процедурама у проучавању математике – основе топологије, као што је графичко приказивање скупова, преласка на релације „унутар" и „ван", достизање интуиције „заједничког"...
- увођење појмова – транслација, ротација, симетрија и пројекција – на овај начин се може развити просторно сналажење код ученика

На друштвене циљеве је мање обраћена пажња. Укупно их је било три. Суштински били су важни да прикажу ученику како да „користе бројеве у животним ситуацијама" или „начин на који је систем бројева допринео напретку човечанства" и да се „промовишу позитивни ставови према коришћењу математике у решавању проблема".

Након увода, дати су садржаји за сваки разред, уз разликовање између вежби и исхода учења који је представљен у уводу. Уопштено, у прва четири разреда (узрасти од 6 до 10), наставни план из 1965. године обухватио је систем бројева, елементарну аритметику са природним бројевима, децималне бројеве и разломке, метрички систем, и неке основне појмове геометрије. Такође, укључивао је и теорију скупова у првом разреду у неким најосновнијим цртама. Као пример, у табели је дат садржај који одговара првом разреду.

| Вежбе | Исходи учења |
|---|---|
| • бројање унапред и уназад од 1 до 100, 1 по 1, 2 по 2, 5 по 5..<br>• сабирање и одузимање двоцифрених бројева<br>• сабирање једноцифрених бројва који ће као збир дати исти број (2+6=3+5)<br>• растављање броја на сабирке (7=1+6=2+5=...)<br>• лаки проблеми са сабирањем и одузимањем<br>• мерење коришћењем природних конвеционалних јединица (само оне најједноставније) | • Скуп, припадање скупу<br>• Интуитивно познавање најчешће коришћењих јединица: килограм, литар, сат, метар и пезета (валута)<br>• Идентификација и писање првих 100 бројева<br>• Процена растојања у елементарним случајевима<br>• Препознавање геометријских фигура<br>• Препознавање половине и двоструког<br>• Појам множења као сабирање једнаких чиниоца |

| | |
|---|---|
| • Упоређивање ствари по величини<br>• Груписање објеката према њиховом облику | |

## *Упоређивање планова из 1953. и 1965. године*

Општа структура оба документа је била прилично слична. Након увода, следило је набрајање садржаја. Организација садржаја се драстично разликовала. У плану из 1953. године садржаји су били организовани по појмовима и били су поредстављени као листа тема. То није био случај 1965. године када је уведена разлика између два типа садржаја (вежби и исхода учења).

Уводни делови су се бавили прилично различитим аспектима. Колико је математика корисна и важна можемо пронаћи у оба документа, као и когнитивна разматрања. Међутим, наставни план из 1953. године је наглашавао методолошке аспекте, док се документ из 1965. године фокусирао на циљеве наставе и учење математике. Овај каснији план је такође, иако није баш јасно како, директно истицао друштвену и емоционалну димензију учења математике. Разлог за учење математике у основном образовању донекле се променио са традиционалног утемељења на друштвену потребу.

У уводу оба документа можемо приметити различите когнитивне претпоставке. У плану из 1953. године читамо: „понављање, константно понављање сваког стеченог механизма су неопходна дидактичка средства, заједно са постављањем темеља за следеће кораке учења". У плану из 1965. године, идеја о вежбању је такође присутна, али као средство да се дође до појма. Нагласак се не ставља на понављање вежбе за стицање механизма, већ радије на извођењу серије вежби као пут до концептуалног разумевања. На неки начин, ове различите претпоставке су имале утицај на листу тема и њихово представљање. На пример, по плану из 1953. године од ученика се очекивало прво да броје по један унапред и уназад до 20, па онда до 50 и на крају до 100. Са друге стране, план из 1965. године је садржао вежбу „бројање унапред и уназад до 100" који води до исхода учења „идентификација и писање првих 100 бројева".

Коначно, у наставном плану из 1965. године можемо се позвати на неке елементе који су директно везани за идеје модерне математике: структурални поглед на математику, апстрактни тополошки или теоријски поглед на скупове, геометријске трансформације, итд.

Као што је већ речено, оба документа су садржала основе аритметике (природне бројеве, децималне бројеве и разломке), метричке просторе и елементарну математику. Што се тиче метричког простора, нема неке велике разлике између планова, осим већег нивоа детаља у којем је наставни план и програм из 1953. године описао одговарајуће теме.

У следећој табели приказаћемо појављивање геометрије у оба плана од првог до четвртог разреда.

<table>
<tr><td></td><td>1953.</td><td>1965.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Први разред</td><td rowspan="2"><ul><li>Препознавање геометријских фигура: лопта и коцка</li><li>Препознавање геометријских фигура: призма и ваљак</li></ul></td><td>Вежбе: /</td></tr>
<tr><td>Исход учења: Препознавање геометријских облика</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Други разред</td><td rowspan="2"><ul><li>Уочавање облика: пирамида и конус</li><li>Права и крива и њихове врсте</li><li>Затворене криве линије. Обим</li><li>Препознавање правилног полиедра: коцка, октаедар и икосаедар. Појам квадрата и троугла</li><li>Паралелне праве</li><li>Уопштено о н-тоугловима. Подела троуглова према њиховим странама.</li><li>Угао. Елементи угла. Мерење углова</li></ul></td><td>Вежбе: Препознавање основних геометријских облика</td></tr>
<tr><td>Исходи учења:<ul><li>Праве и криве и њихове врсте</li><li>Препознавање облика: коцка, пирамида, конус;</li><li>Обим и круг</li></ul></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Трећи разред</td><td rowspan="2"><ul><li>Увођење појмова квадра и класа, почев од коцке и призме</li><li>Мерење углова. Сабирање и одузимање углова. Обим и значајне линије на њему. Лукови и њихово мерење.</li><li>Класификација троуглова у односу на углове. Вредност угла у троуглу и четвороуглу. Површина квадрата и правоугаоника</li></ul></td><td>Вежбе:<ul><li>Упоређивање углова.</li><li>Површина квадрата и правоугаоника</li><li>Сабирање и одузимање углова</li></ul></td></tr>
<tr><td>Исходи учења:<ul><li>Углови</li><li>Троуглови</li><li>Паралелограми и његове класе</li></ul></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Четврти разред</td><td rowspan="2"><ul><li>Врста правих и углова</li><li>Обим. Површина троугла и правилних многоуглова</li><li>Планиметрија. Запремина коцке и четвоространих призми. Правилни полиедри</li><li>Површина фигура, укључујући фигуре које нису правилне и круг. Сферна тела и полиедри. Вежбе везане за површину и запремину квадра, призме и пирамиде</li></ul></td><td>Вежбе:<ul><li>Мерење обима</li><li>Графички проблеми везани за сабирање и одузимање углова</li><li>Проблеми везани за површину паралелограма и троугла</li></ul></td></tr>
<tr><td>Исходи учења:<ul><li>Обим</li><li>Положај геомтријских облика (фигура) у односу на друге облике (фигуре)</li><li>Круг</li><li>Пројекција на раван</li></ul></td></tr>
</table>

| | | |
|---|---|---|
| | | • Мерење дужине лука у односу на обим круга<br>• Четвороугао |

Видимо да је наставни план из 1953. године био детаљнији, и на неки начин, обухватио је више градива. Једине теме које су присутне 1965. године а које нису поменуте 1953. су међусобни положај геометријских облика (фигура) и пројекција на раван. Можемо приметити да по питању геометрије оба документа предлажу да се са градивом крене најпре од препознавања и уочавања облика. План из 1965. године је по том питању био више неодређен јер је, ако погледамо први разред, садржао само „геометријске облике" док је план из 1953. године садржао које геометријске фигуре треба да се обраде. План из 1953. године је више пажње посветио тродимензионалној геометрији. Тако, на пример, четвороугао је требало увести у трећем разреду користећи коцку и призму као полазну тачку (четвороуглови су се представљали као површине призми користећи моделе за показивање). Поред тога, правилни полиедри (који недостају у плану из 1965. године до осмог разреда) уведени су већ 1953. године чак у другом разреду. Рачунање запремине (барем за коцку, призму и пирамиду) уведено је у четвртом разреду у плану из 1953. године и у шестом разреду у плану из 1965. године. Што се тиче планиметрије (геометрија у равни), теме су биле приближно исте у оба плана. Међутим, неки концепти су уведени раније 1953. године. Тако су, на пример, углови уведени у другом разреду 1953. године и у трећем разреду 1965. године, док су четвороуглови уведени у трећем разреду 1953. године и у четвртом разреду 1965. године. Правилни многоуглови, који су 1953. године уведени у четвртом разреду, нису се појављивали све до петог разреда 1965. године.

Што се тиче осталих тема, закључујемо да су биле практично исте у оба документа. У следећој табели упоредићемо садржаје који се односе на множење природних бројева у оба документа.

| | 1953. | 1965. |
|---|---|---|
| Први разред | • Множење бројем 2 (дуплирање) | Вежбе: / |
| | | Исход учења: / |
| Други разред | • Множење бројевима 2 и 3<br>• Множење и формирање таблице множења<br>• Наставак формирања и памћења таблице множења<br>• Множење цифара<br>• Множење природних бројева када је један број једноцифрен и није већи од пет | Вежбе:<br>• Множење једноцифрених бројева |
| | | Исход учења:<br>• Множења бројевима 2 и 3<br>• Комутативно својство множења |

| | | |
|---|---|---|
| Трећи разред | • Множење природних бројеве када чинилац има само једну цифру<br>• Множење природног броја са другим бројем<br>• Стратегије за брзо множење | Вежбе:<br>• Множење када чинилац не садржи нулу у себи<br>• Множење са 10,100,1000 |
| | | Исход учења:<br>• Својство асоцијативности код множења |
| Четврти разред | | Вежбе:<br>• Множење природних бројевима |
| | | Исход учења:<br>• Стратегије за брзо множење |

Као што је пре речено, план из 1953. године је и у овом случају био опширнији и сводио се на „традиционално” учење као што је исписивање и памћење таблице множења. У плану из 1965. године можемо видети више проблема у којима се примењују математичке идеје и знање. Можемо закључити да је множење уведено касније 1965. године, тек у другом разреду, али је план предвиђао детаљнију обраду.

На крају, план из 1965. године је садржао неке додатне појмове. Практично:

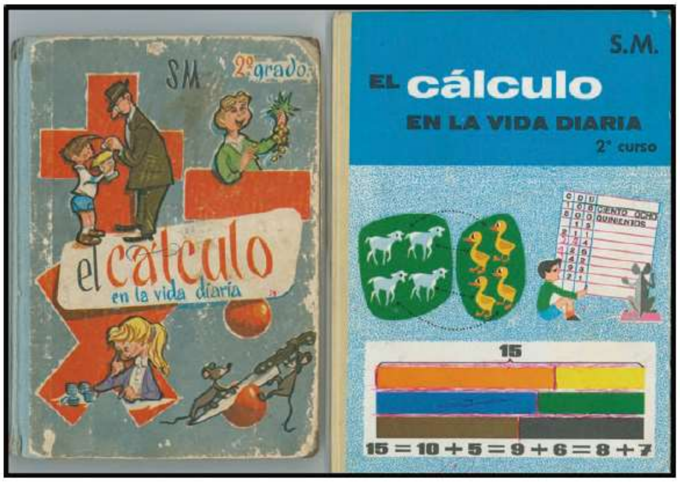
- У првом разреду идеја о скуповима је представљена заједно са идејом о припадању елемената скупу.
- У другом разреду комутативна и асоцијативна својства сабирања и комутативно својство множења су дати.
- У трећем разреду је уведено својство асоцијативности код множења.
- У четвртом разреду је представљена идеја о броју 10 као основи бројног система.

Присуство ових тема, које се јасно односе на идеје модерне математике, одговара питањима обухваћеним у уводном делу као што је употреба „математичког речника” или увод „функционалних садржаја” повезаних са „тренутним процедурама у изучавању математике”.

## *Упоређивање уџбеника*

Како бисмо обрадили садржај наставног плана, анализираћемо два издања уџбеника објављених пре и после промене плана из 1965. године. Оба издања су објављена од стране истог издавача и носиле су наслове *Рачунање у свакодневном животу (El Cálculo en la Vida Diaria*).

Већ на први поглед можемо уочити разлику између корица књига. Илустрације су 1964. године приказивале „стварне животне" ситуације у којима математика може имати улогу: сечење нечега на пола (доле десно), бројање новца (доле лево), итд. Међутим, 1966. године, илустрације су се односиле на чисто математичке елементе: скупове и примене, децималне бројеве и растављање броја 15 на сабирке.




Насловне странице уџбеника из 1964. (лево) и 1966. (десно

## *Упоређивање књига за други разред*

Како бисмо упоредили садржај, анализираћемо уџбенике за други разред. У следећој табели сумираћемо и упоредити теме и њихов редослед у оба уџбеника, пружајући као референцу број страница посвећених свакој теми (књига из 1964. године је имала 135 страница, док књига из 1966. године је имала 152 странице). То ће нам пружити општи преглед разлика између њих.

| 1964. | | 1966. | |
|---|---|---|---|
| Бројеви 1 до 10 | 18 страна | Скупови. Подскупови. 1-1 придруживање. Дефиниција природних бројева. | 4 стране |
| Појам броја 10. Бројеви од 11 до 19. | 15 страна | Бројеви од 0 до 10. Појам броја 10. | 14 страна |
| Резиме. | 6 страна | Бројеви од 11 до 19 . | 10 страна |
| Јединице за време (сати, недеље, месеци). | 3 стране | Резиме. | 8 страна |
| Литар. | 1 страна | Бројеви од 20 до 30. | 2 стране |
| Грам и килограм. | 1 страна | Бројеви од 1 до 100. Појам броја | 6 страна |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | 100. | |
| Јединице за дужину (dm, m, km). | 1 страна | Бројеви од 100 до 1000. | 2 стране |
| Бројеви од 20 до 30. | 1 страна | Апсолутна и позитивна вредност бројева. | 3 стране |
| Бројеви од 1 до 100. | 2 стране | Проблеми везани за сабирање и одузимање | 5 страна |
| Резиме и проблеми. | 5 страна | Јединице за дужину (dm, m, km). | 3 стране |
| Бројеви од 100 па надаље. | 4 стране | Јединице за време (сати, недеље, месеци). | 3 стране |
| Сабирање. | 6 страна | Литар. | 1 страна |
| Одузимање. | 5 страна | Килограм. | 2 стране |
| Резиме и проблеми. | 4 стране | Сабирање. | 12 страна |
| Појам множења и дељења. | 3 стране | Одузимање. | 9 страна |
| Множење са бројевима 2,3,4 и 5. | 20 страна | Резиме и проблеми. | 6 страна |
| Множење бројевима који после прве цифре имају нуле. | 1 страна | Планиметрија (праве, обим и круг, троугао, квадрат) | 5 страна |
| Множење бројева који имају две и три цифре и које нису веће од 5. | 2 стране | Просторна геометрија (коцка, лопта, пирамида, купа) | 4 стране |
| Множење бројевима 6, 7, 8 и 9. | 15 страна | Појам множења и дељења | 2 стране |
| Проблеми. | 5 страна | Множење и дељење бројевима 2,3,4 и 5. Комутативност множења. | 19 страна |
| Вежбање. | 13 страна | Множење бројевима 6, 7, 8 и 9. Таблица множења. | 13 страна |
| | | Резиме и проблеми | 3 стране |
| | | Дељење једноцифреним бројевима | 5 страна |
| | | Валута. | 3 стране |

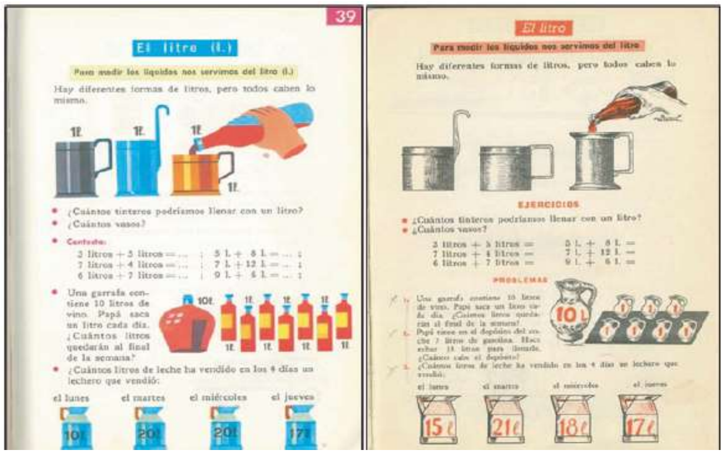
Како видимо дошло је до промена у садржају тема као и у њиховом редоследу и обиму. Из једноставног поређења садржаја, најзначајније разлике су:

- Присуство скупова у уџбенику из 1966. године.
- Потпуно одсуство геометрије у уџбенику из 1964. године.
- Већи број проблема и вежби у уџбенику из 1964. године.
- Различит приступ множењу.

Како бисмо утврдили разлике у приступима, морамо пажљивије да погледамо садржај за оба уџбеника. На пример, суптилна али врло занимљива разлика може се пронаћи у дефиницији појма броја десет. У уџбенику из 1964. године налази се дефиниција: „Једна једина ствар је јединица. Десет јединица формира десет” док у уџбенику из 1966. године имамо: „Једна једина ствар је једноставна јединица. Десет јединица формира десет, или јединицу другог реда”. Иста разлика је направљена приликом увођења броја 100, који је 1966. године назван као јединица трећег реда.

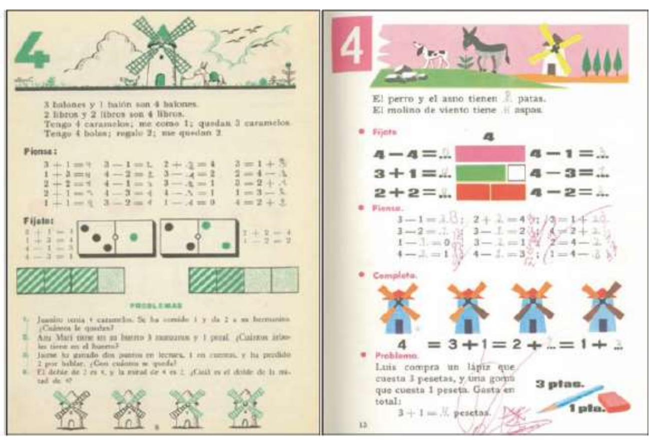
Што се тиче множења, важно је напоменути да у уџбенику из 1966. године множење и дељење су заједно представљени кроз цео текст. Године 1964, након дефинисања дељења као „дељење на једнаке делове”, појам више није обрађиван. У уџбенику из 1966. године је дат много већи значај дељењу као инверзији множења.

У сваком случају, у највећем делу, градиво је било врло слично, чак и скоро идентично. На пример, на следећој страници можемо упоредити странице посвећене обради јединице Литар у оба уџбеника.




Литар: 1966. (лево) и 1964. (десно)

Можемо приметити да имају исти распоред, иако су цртежи били модернизовани 1966. године и коришћене су боје. Један задатак је уклоњен а у другом задатку су промењени бројеви. Такође, можемо видети да су се користили различити примери како би се приказало растављање броја на сабирке (слика испод). Године 1964. су се користиле домине и квадрати док се 1966. године користили штапићи различитих дужина и боја. Примена штапића у том уџбенику је била веома честа.



Растављање броја 4: 1964. (десно) и 1966. (лево)

Коначно, треба напоменути да је велики број проблема смањен у уџбенику из 1966. године. Уџбеник из 1964. године се завршавао са 13 страница посвећених проблемима и вежбама. Те странице су укључивале 13 примера посвећених аритметици, 364 примера у којима су се сабирали петоцифрени бројеви (са два, три и четири сабирка), 240 примера у којима се одузимају петоцифрени бројеви и 525 примера множења у којима је један број имао пет цифара, а други две или три цифре. Ове последње странице су избачене из уџбеника 1966. године.

## *Теорија скупова у уџбеницима објављеним после 1965. године*

Као што смо видели у упоређивању уџбеника за други разред, присуство теорије скупова у издању из 1966. године била је вероватно најзначајнија разлика. Та чињеница нас мотивише да детаљније направимо преглед ове теме у уџбеницима од првог до четвртог разреда.

У првом разреду су четири странице биле посвећене уводним теоријским садржајима о скуповима. Уведени су након обраде бројева од 0 до 10, сабирања, једнакости, одузимања и множења и неких елементарних тема из геометрије (од права и дужи до лопте).

Појмови „скуп”, „елемент” и „припадност” су уведени прилично неформалним коришћењем примера. Након тога, појам „1-1 придруживање” је уведен повезивањем елемената два скупа стрелицама. Скупови су имали исти број елемената.


**Observa** el conjunto de las botellas y el conjunto de los pasteles: de cada botella sale una flecha que va a un pastel, y de cada pastel sale una flecha que va a una botella. **Esta correspondencia se llama uno a uno:** significa que a cada botella le corresponde un pastel y solo uno, y a cada pastel le corresponde una botella y solo una.

Придруживање 1-1

„Погледајте скуп флаша и скуп колача: од сваке флаше постоји линија која је повезује са колачем, и од сваког колача постоји линија која га повезује са флашом. Ово је 1-1 придруживање.”

Затим, након што су дата два скупа за која постоји 1-1 придруживање, дефинише се број као „оно што ти скупови имају заједничко”. Појам пресликавања је такође коришћен за поређење скупова, али без увођења било какве терминологије.

У другом разреду, теорија скупова је обрађена одмах на почетку уџбеника. Било је укупно 4 странице а градиво је махом било исто као у првом разреду са два изузетка. Први, појам „подскуп” је формулисан коришћењем примера који је био дат на слици: „Посматрајмо скуп јабука. Раздвојићемо их у две групе... свака од ових група се назива подскупом скупа јабука”. Други, увођење појма „еквивалентних скупова” као оних који су у 1-1 односу, доводећи до следеће апстрактне дефиниције природног броја: „Природан број је оно што сви еквивалентни скупови деле заједничко.”

У трећем разреду, теорија скупова се налазе на почетку уџбеника. Осам страница је било посвећено овој теми. Идеја скупа и подскупа су обрађене као и у другом разреду, али је уведена заграда за представљање елемената. Поред тога, уведена је идеја „линеарног дијаграма” за представљање елемената скупа: „Уобичајено је представљати елементе скупа тачкама праве, узимајући једнаке раздаљине између суседних тачака. Оваквко представљање се назива линеарни дијаграм”. Надаље, дефинисане су идеје „једноелементног скупа” и „празног скупа” и увеле се опште идеје пресликавања између два скупа, заједно са дефиницијом инјективног пресликавања. На овај начин појам 1-1 придруживање је поново дефинисан као пресликавање које је инјективно у „оба правца”. На крају, уведена је разлика између кардиналних и ординалних бројева. Кардинални број је дефинисан као „број елемената скупа и свих скупова који су еквивалентни њему", док је ординални број неформално дефинисан коришћењем одређеног примера уређеног скупа.

У четвртом разреду, дванаест страница је било посвећено теорији скупова на почетку књиге. Поред свих материјала обрађених у трећем разреду, могло се наћи неколико нових идеја. На пример, дате су две могућности за дефинисање скупа: „Скуп се може дефинисати или пружањем карактеристичног својства, или набрајањем његових елемената". Такође, уведени су Венови дијаграми. Дефинисани су појмови дисјунктних скупова и њихове уније. Што се тиче пресликавања, објашњени су појмови „оригинал скупа" и „слика скупа" и дефиниција „инверзног пресликвања". Поред тога, уведена је нотација пресликавања као уређеног пара без даљег објашњења. Дата је следећа апстрактна дефиниција „пребројавања": „Бројање елемената скупа се састоји у постављању 1-1 придруживање са делом скупа природних бројева". Појам бесконачности је уведен исказом да „низ природних бројева није ограничен; сваки број је праћен другим". На крају, у овом разреду су уведени симболи по први пут. Можемо пронаћи ознаке $\in$ , $\notin$, $\emptyset$, $\subset$ као и $f^{-1}$ и card(A).

Са изузетком првог разрерда, појмови из теорије скупова су увек били представљени на првим страницама уџбеника. Претходни пасуси показују да је идеја била да се стално обнавља претходно научено градиво и усваја неколино нових појмова у сваком разреду. Међутим, након уводног поглавља на почетку уџбеника, теорија скупова се више нигде не појављује даље у било ком разреду.

## ЗАКЉУЧАК

Истраживање о историји математике и математичког образовања у некој земљи омогућава боље разумевање самог тока развоја и важности која јој је придавана. Политичка нестабилност и велики број ратова је одложила успостављање образовања у Шпанији. Иста нестабилност је такође узроковала извесно кашњење у развоју шпанског образовног система, укључујући и математичко образовање. Веома честе промене биле су један од начина на који се ова нестабилност манифестовала. Земља је развијала систем за припрему наставника математике који је био релативно захтеван (пре свега у погледу математичког знања). Током времена, Шпанија је упијала међународно искуство – пре свега током деветнаестог века кроз превођење уџбеника. Касније је Шпанија учествовала у главним међународним покретима у математичком образовању, била је укључена у ICMI и покрете промена у периоду од 1950-1970-тих.

За историју математичког образовања је веома битан тренутак отварања Средње артиљеријске школе 1764. године. Математика је у самом тренутку отварања имала велики значај и тако је било наредне две деценије. За професора математике се бирао добар математичар са педагошким искуством. О томе сведочи и чињеница да када нису имали одговарајућег професора у Шпанији, они су тражили ван земље, па су одговарајућу замену пронашли у Италији. Временом математику више нису предавали искусни математичари већ су професори морали бити артиљеристи. Променили су се и приоритети, па су артиљеријски предмети, војне вештине, физика и друге природне науке имале већи приоритет. Уџбеници који су се тада користили су се такође мењали. У почетку су се користила дела професора из школе - Ћанинија, Датолија и Одриозоле али због ратова су се многе књиге изгубиле па су користили дела других математичара. Највише су се користиле књиге са француског говорног подручја без обзира што су у том периоду били у сукобу. Не можемо тачно рећи да ли је једна земља утицала на програм школе. У зависности од периода који посматрамо, највише утицаја је било од стране Француза и Италијана.

Прва штампана књига на шпанском језику која је садржала алгебарске појмове је објављена 1522. године. Од тада, многи аутори су укључили ову врсту садржаја у своја дела. Из века у век, од шеснаестог до осамнаестог, квадратне једначине су биле укључене у 27 књига. Резултати показују како се решавање квадратних једначина у шпанским математичким књигама развијало у многим аспектима: у нотацијама, како је наведено, али и у разматрању и приступу. Такође кроз ове књиге можемо видети промене у броју решења квадратних једначина која се разматрају и њихову природу, на пример, негативни корени нису разматрани код неких аутора, нарочито аутора шеснаестог века.

За савремену наставу математике је веома битна 1965. година и план и програм који је те године донет. У овом раду смо анализирали прве кораке процеса који су довели до имплементације савремене математике у првој фази шпанског основног образовања (разреди од 1. до 4, ученици узраста од 6 до 10 година). Индивидуалне промене које су уведене 1965. године за почетне разреде можда нису нису биле врло важне у том тренутку, али су оставиле дубок траг у модернизацији наставног плана. На нивоу наставног плана видели смо нове идеје као што су тополошки или скуповни појмови. Такође видимо и промене у вокабулару. У сам план и програм је уведена разлика између „вежбе“ и „исхода учења“ што је промена у односу на претходне. Што се тиче одређених тема, највећа промена је била везана са увођењем појмова из теорије скупова у плану из 1965. године. То је уједно и најзначајнија разлика. Неке апстрактне појмове попут комутативних и асоцијативних својстава операција или основе бројног система такође можемо пронаћи у том плану. Што се тиче геометрије, мале промене су уведене у првом делу основног образовања. Неки садржаји су касније уведени а неки су и уклоњени. Примера ради, геометријске трансформације (ротација, транслација, симетрија и пројекција) можемо пронаћи од петог разреда. Оно што можемо такође да приметимо јесте да уџбеници нису пратили план и програм у потпуности. Значајан пример је био са скуповима. Наставни план је из 1965. године укључивао само основно значење скупа и припадање скупу док су анализирани уџбеници укључивали више садржаја у односу на оно што пише у плану. Тако је, такође, таблица множења уклоњена из наставног плана из 1965. године, али можемо је пронаћи у уџбенику који је изашао годину дана касније. Генерално гледано, доста елемената савремене математике примећујемо у анализираним уџбеницима.

Истраживање о историји математике и математичког образовања у Шпанији је по мом мишљењу веома занимљива тема која нам пружа много података како историјских тако и научних. Током периода, који је описан у раду, видимо да су промене у погледу образовања, па и по питању математичког образовања, биле честе и можемо примитити преплитање периода напредовања и стагнирања. Сматрам да су такве промене и очекиване јер су везане за периоде када су се водили ратови у земљи. Са престанком ратовања на територији Шпаније почео је процес успостављања савременог образовања. Самим тим, указује нам се да образовни систем који је успостављен има способност да се адаптира и развија у складу са променама у друштву и актуелним дешавњима. Што се тиче математичког садржаја али гледано са научне стране можемо закључити да су Шпанци желели да напредују, да дођу до неког новог закључка и да износе своје ставове. Примера ради, поступак решавања квадратних једначина је напредовао у смислу нотације која се користила, броју решења која једначина има, каква решења могу бити и како их пронаћи. То је по мом мишљењу и очекивани ток развоја јер наука као таква стално напредује и усавршава се новим открићима и теоријама. Значајно је и то што су доста знања и информација сакупљали од иностраних научника те у том погледу можемо закључити да су имали велику жељу за унапређивањем свог знања и својих вештина.

## ЛИТЕРАТУРА


- Antonio M. Oller-Marcén, *Advances In The History Of Mathematics Education chapter 7 The Transition to Modern Mathematics in Spanish Primary Education: The 1965 Syllabus,* 2022.
- Arenzana Víctor, *La Enseñanza de las Matemáticas en España en el siglo XVIII. La Escuela de Matemáticas de la Real Sociedad Económica Aragonesa de Amigos del País*. *Zaragoza: Universidad de Zaragoza*, 1987.
- Ausejo Elena, *La enseñanza de las ciencias exactas, físicas y naturales y la emergencia del científi co. In El Ochocientos. Profesiones e Instituciones civiles. Vol. 5, Técnica e ingeniería en España, ed. Manuel Silva, 507–550*, 2007.
- Boyer C., *History of mathematics. Wiley,* 1968.
- Carrasco Adolfo*, Breve noticia histórica del Colegio de Artillería y estado de la Academia de dicha arma en España a principios del año 1873, manuscript conserved in the library of the Academia de Artillería de Segovia*, 1873.
- Cobos José Miguel and Carmen Fernández-Daza, *El cálculo infinitesimal en los ilustrados españoles*: *Francisco de Villalpando y Juan Justo García*. *Cáceres: Universidad de Extremadura*, 1997.
- De Puelles Benítez Manuel, *La política escolar del libro de texto en la España contemporánea[School policy on textbooks in contemporary Spain]. Avances en supervisión educative 6: 1–18*, 2007.
- Diego Pérez Carmen*, Intervención del primer Ministerio de Educación Nacional del franquismo sobre los libros escolares [Intervention over textbooks of the First Ministery of National Education during Francoism]. Revista complutense de educación 10 (2): 53–72*, 1999.
- Dorce Carlos, Historia de las matemáticas en España. II De los Novatores al siglo XX, Sant Cugat: Arpegio, 2017.
- E.Ausejo, J.M.Matos, *Handbook on the history of mathematics education - Mathematics education in Spain and Portugal*, 2014.
- Egido Gálvez Inmaculada, *La evolución de la enseñanza primaria en España: organización de la etapa y programa de estudio [Evolution of primary education in Spain: organization and syllabus]. Tendencias pedagógicas 1: 75–86*, 1994.
- Fauvel J. & Gray J., *The history of mathematics: A reader. Open University*, 1991.
- Fernández Cárcar Miguel, *Los manuales escolares durante el primer franquismo (1939–1959), un acercamiento al caso navarro [Textbooks during the early Francoism (1939–1959), an approach to the case of Navarra]. Príncipe de Viana 277: 613–641,* 2020.
- Gavroglu Kostas, Patiniotis Manolis, S*cience and technology in the European periphery: Some historiographical reflections, History of Science,* 46(2), 153–175, doi: 10.1177/007327530804600202, 2008.
- Gray J, *A history of abstract algebra. Springer*, 2010.
- Hormigón Mariano, *Histoire de l'Enseignement des Mathématiques en Espagne.* In *Histoire et Épistémologie dans l'Éducation Mathématique,* 1995.
- Juan Navarro Loidi*, Foreign influence and the mathematics education at the Spanish College of Artillery (1764-1842)*, 2020.

- Kagan Richard L, *Students and society in early modern Spain. Baltimore/London: The Johns Hopkins University Press*, 1974.
- Katz V. J*, History of mathematics. Pearson*, 2009.
- Koley S, *Geometrical contribution of SRIDHAR"C"RYA. Science and Culture, 88(3–4), 101–107. https://doi.org/10.36094/sc.v88.2022*, 2022.
- Magnaghi-Del!no P. & Norando T, *How to solve second degree algebraic equations using geometry. In P. Magnaghi-Del!no, G. Mele, & T. Norando (Eds.), Faces of geometry. From Agnesi to Mirzakhani (Lecture Notes in Networks and Systems) (Vol. 88). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-29796-1_11,* 2019.
- María José Madrid, Carmen León-Mantero and Alexander Maz-Machado, *The Role of the History of Mathematics in the Teaching/*Learning *Process, chapte4: The Introduction of the Algebraic Thought in Spain: The Resolution of the Second Degree Equation,* 2023.
- Martínez García, Mª Ángeles, *Las matemáticas en la ingeniería: las matemáticas en los planes de estudios de los ingenieros civiles en España en el siglo XIX. Zaragoza: Universidad de Zaragoza*, 2004.
- Mayordomo Pérez, Alejandro, *Nacional-catolicismo, tecnocracia y educación en la España del franquismo: (1939–1975) [National Catholicism, technocracy and education in Spain during Francoism (1939–1975)]. In Los caminos hacia la modernidad educativa en España y Portugal (1800–1975), ed. Agustín Escolano and Rogério Fernandes, 147–174. Zamora, Spain: SEDHE-SPCE,* 1997.
- McNair John, *Education for a changing Spain. Manchester: Manchester University Press*, 1984.
- Meavilla, V. & Oller A. M, *El simbolismo algebraico en tres álgebras españolas del siglo XVI. Números, 87, 59–68*, 2014.
- MEC, *Cuestionarios Nacionales para la Enseñanza Primaria [Primary education syllabi], Vida Escolar 70–71: 1–96*, 1965.
- MEN*, Cuestionarios Nacionales Para la Enseñanza Primaria [Primary education syllabi], Madrid, Spain: Servicio de Publicaciones del Ministerio de Educación Nacional*, 1953.
- Navarro Loidi Juan, *Don Pedro Giannini o las matemáticas de los artilleros del siglo* XVIII, Segovia: Asociación Cultural Ciencia y Artillería, 2013.
- Navarro Loidi Juan, *Nuevos datos sobre el inicio de la biblioteca del Colegio de artillería de Segovia, Estudios Segovianos, 114, 277–306*, 2015.
- Neugebauer O, *The exact sciences in antiquity. Harper,* 1957.
- Paradis J. & Malet A*, La génesis del álgebra simbólica. Vol. 1. Los orígenes del álgebra: de los árabes al Renacimiento. Promociones y Publicaciones Universitarias*, 1989.
- Peset Mariano and José Luis José Peset, *La Universidad española (siglos XVIII y XIX). Madrid: Taurus*, 1974.
- Puig L & Rojano T, *The history of algebra in mathematics education. In K. Stacey, H. Chick, & M. Kendal (Eds.), The future of the teaching and learning of algebra the 12th ICMI study (pp. 187–223). Kluwer Academic Publishers. https://doi.org/10.1007/1-4020-8131-6_8*, 2004.
- Rouse Ball, W. W*, A short account of the history of mathematics. Dover*, 1960.
- Rosa Massa Esteve Maria, *Spanish "Arte Mayor" in the sixteenth century, In book: Pluralité de l'algèbre a la Renaissance (pp.103-126),* 2020.

- Salas Ramon, *Memorial histórico de la artillería española, Madrid: Imprenta que fue de García*, 1831.
- Savérien Alexandre, *Historia de los progresos del entendimiento humano, Madrid: Sancha, Spanish transl. by M. Rubín de Celis, 1st French edition: 1766*, 1775.
- SM.
  - *Cálculo, iniciación [Calculations, beginning]. Madrid, Spain: Ediciones S.M,* 1964.
  - *El Cálculo en la vida diaria, 2° Grado [Calculations in daily life, 2nd Grade] Madrid, Spain: Ediciones S.M,* 1964.
  - *El Cálculo en la vida diaria, 3° Grado [Calculations in daily life, 3rd Grade] Madrid, Spain: Ediciones S.M*, 1964.
  - *El Cálculo en la vida diaria, 4° Grado [Calculations in daily life, 4th Grade] Madrid, Spain: Ediciones S.M,* 1964.
  - *Cálculo, 1er Curso [Calculations, 1st Grade]. Madrid, Spain: Ediciones S.M*, 1966.
  - *El Cálculo en la vida diaria, 2° Curso [Calculations in daily life, 2nd Grade] Madrid, Spain: Ediciones S.M*, 1966.
  - *El Cálculo en la vida diaria, 3° Curso [Calculations in daily life, 3rd Grade] Madrid, Spain: Ediciones S.M*, 1968.
  - *El Cálculo en la vida diaria, 4° Curso [Calculations in daily life, 4th Grade] Madrid, Spain: Ediciones S.M*, 1968.

- Smith D. E, *History of mathematics (Vol. II). Dover,* 1958.
- Udías Agustín*, Profesores de matemáticas en los colegios de la Compañía en España, 1620-1767, Archivum Historicum Societatis Iesu, 79,3–27,* 2010.
- Vallhonesta F. R, Massa Esteve M. R, Guevara Casanova I, Puig-Pla C. & Roca-Rosell A*, P, teacher training in the history of mathematics. In É. Barbin, U. T. Jankvist, & T. Kjeldsen (Eds.), Proceedings of ESU7 history and epistemology in mathematics education (pp. 113–128). Danish School of Education*, 2015.
- Vea Fernando*, Las matemáticas en la enseñanza secundaria en España en el siglo XIX. Zaragoza: Universidad de Zaragoza*, 1995.
- Vea Fernando, *The influence of French mathematics textbooks on the establishment of the liberal education system in Spain (1845–1868). In Paradigms and mathematics, ed. Elena Ausejo and Mariano Hormigón, 365–390. Zaragoza: Siglo XXI de España Editores*, 1996.
- Vea Fernando, *Aportaciones al estudio de la segunda enseñanza en la II República en España (1931–1936),* 2008.
- Velamazán Mª Ángeles, *La enseñanza de las matemáticas en las Academias militares en España en el siglo XIX. Zaragoza: Universidad de Zaragoza*, 1994.
- Viñao Frago Antonio, *La educación en el franquismo (1936–1975) [Education during Francoism (1936–1975)]. Educar em Revista 51: 19–35*, 2014.


Фотографије су преузете са интернета.

# БИОГРАФИЈА

Ивана Вукајловић је рођена 25.12.1995. године у Брусу где је завршила основну и средњу школу. Исте године када је матурирала, уписала је на Природно-математичком факултету Универзитета у Новом Саду, смер Дипломирани професор математике. Након завршетка основних студија, запослила се у фирму „Synechron“ у Новом Саду где и даље ради на позицији интеграциони консултант. Године 2022. уписује мастер студије на Математичком факултету Универзитета у Београду, смер Теоријска математика и примене.