УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ

МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Ивана Билић

ТАЛЕСОВА ТЕОРЕМА

-Мастер рад-

Београд, 2024.

Садржај

УВОД

Талесова теорема представља једну од најосновнијих теорема у геометрији, а откривена је још у античком добу и од тада представља кључни камен темељац у геометријским доказима и применама. Ова теорема, која се фокусира на однос између страница троуглова, има широку примену у различитим математичким и научним дисциплинама.

У данашњем дигиталном добу, где математика има кључну улогу у развоју рачунарских алогритама, Талесова теорема задржава своју важност као темељни концепт. Поред класичних геометријских примена, теорема проналази своје место у областима као што су рачунарска графика, моделовање 3D облика и инжењерске симулације. Разумевање ове теореме омогућава нам да ефикасније решавамо проблеме у дигиталном свету, користећи геометрију као основу за развој софистицираних софтверских решења.

Учење и разумевање Талесове теореме пружа драгоцену прилику ученицима да развијају своје аналитичке вештине, способност апстрактног мишљења и креативност у решавању проблема. Стога, овај рад није само академско истраживање већ и прилика да се истакну разноврсне примене математичких концепата у практичним ситуацијама.

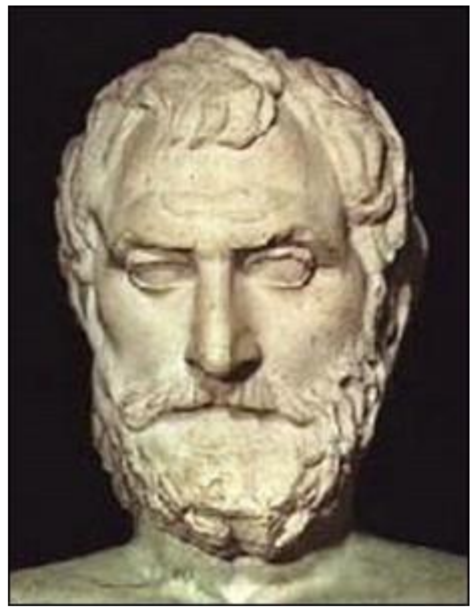
Мотивација за истраживање Талесове теореме произилази из њеног фундаменталног значаја у геометрији, али и из могућности да се примени у модерним научним и технолошким концептима. Истраживање ове теореме омогућава нам да боље разумемо геометријске односе, унапредимо вештине доказивања тврдњи и пружи нам алате за решавање различитих проблема у математици.

Циљ овог рада јесте дубље истраживање Талесове теореме кроз анализу њених доказа, примене у различитим геометријским ситуацијама, као и кроз упоредни преглед са сличним теоремама. Кроз ово истраживање желимо да пружимо свеобухватан преглед овог кључног геометријског концепта, истакнемо његове важне примене и демонстрирамо ту примену.

Структура овог рада је организована на следећи начин: у првом делу рада представићемо историјски осврт на филозофа и математичара Талеса. У другом делу пружамо основне концепте и дефиниције везане за Талесову теорему. У овом поглављу представићемо и прву примену поменуте теореме кроз поделу дужи у задатој размери. Затим следи детаљан преглед класичног доказа Талесове теореме. Ово поглавље прате примери у којима се централна теорема користи, као и задаци који би ученицима помогли да усаврше коришћење исте. Поред тога, рад садржи поглавље у коме је описана веза између Питагорине теореме и Талесовог става. На самом крају рада истражујемо примене теореме у различитим геометријским ситуацијама. Кроз овај рад желимо да пружимо дубље разумевање Талесове теореме, њене примене, као и да допринесемо ширем математичком контексту у којем се ова фундаментална теорема налази.

1. ТАЛЕС ИЗ МИЛЕТА

Талес из Милета је био активан као математичар и као државник, при чему је важио за првог јонског свестрано образованог филозофа кога су убрајали међу седам мудраца[1]. Антички грчки филозоф Талес рођен је у Милету, јонској Грчкој, тј. грчкој колонији смештеној на обали Мале Азије. Милет је био антички град на западној обали Анадолије (данашња Турска), односно на источној обали Егејског мора поред ушћа реке Маеандер. Првобитни топографски положај Милета био је на полуострву, на јужној страни Латмијског залива. Природне луке овог локалитета добиле су додатан заклон од острва Ладе. За разлику од Ефеса, Смирне и других анадолијских лука које су се налазиле на отвореним широким долинама, Милет је имао планински терен у позадини. Када је муљ, који је наносила река Маеандер затворио залив и проширио линију обале (данас је Милет удаљен од обале око 10 километара) привреда овог града је пропала.



Талес из Милета
(624. пне – 547 п.н.е)

О Талесовом детињству мало је познато, али се верује да је потицао из имућне породице трговаца. Аристотел је идентификовао Талеса као прву особу која је истраживала основне принципе, питање порекла материје, те га дефинише као оснивача школе природне филозофије. Талес је био заинтересован за скоро све, истражујући готово све области знања, географију, филозофију, историју, математику, инжењерство и политику. Предложио је теорије како би објаснио многе догађаје у природи, примарну супстанцу, ослонац Земље као и узрок настанка одређених промена. Додатно, био је укључен у проблеме астрономије при чему је пружио низ објашњења космичких догађаја који су традиционално укључивали натприродне ентитете. Сматра се да је први грчки астроном, јер је проучавао небеска тела и предвидео соларну еклипсу која се десила 28. маја 585. п.н.е. Његов приступ разумевању помрачења сунца био је почетак грчке астрономије. Такође је познат по својим инжењерским достигнућима, као што је наводњавање пољопривредних земљишта и изградња канала.

[1] Седам мудраца Грчке је назив који је старогрчка традиција дала седморици филозофа, државника и законодаваца из раног VI века пре нове ере, које су будуће генерације цениле због њихове изузетне мудрости. Седам мудраца су Талес из Милета, Бијатн из Пријене, Солон из Атине, Питак из Митилене, Клеобул из Линда, Мизон из Хене и Хилон из Спарте.

Талесови списи – одувек су постојале сумње да ли је Талес ишта написао. Међутим бројни древни извештаји му приписују списе. Симпликије[2] је приписао Талесу ауторство такозваног Наутичког водича за звезде. Са друге стране, Диоген Лаертије[3] је изнео сумњу у аутентичност, али је написао да је према другима Талес написао само две расправе, једну о Солстицij и једну о Еквиноцij. Прокло[4] је забележио да је Талеса пратило много геометара, од којих су већина остала као почасна имена. Почињу са Мамерком, који је био Талесов ученик, и укључују Хипија из Елиде, Питагору, Анаксагору, Еудокса Книдског, Филипа из Мендеа, Еуклида и Еудема, пријатеља Аристотела, који је писао историје аритметике, астрономије и геометрије, и многа мање позната имена.

Талес је познат по својој филозофији, посебно по својим теоријама о природи света и космоса. Сматрао је да постоји основни принцип који је основа свега, и да је тај принцип вода. Према његовом учењу, вода је основни елемент из којег све произилази и у који се све враћа. То је била револуционарна идеја у то време, заснована на његовим посматрањима природе.

Једна од најпознатијих анегдота о Талесу је његово предвиђање да ће бити добра жетва маслина. Он је унапред купио сва доступна права на маслиновом уљу, што је довело до огромне зараде када је дошло до изузетно обилне жетве. Ова прича показује његову памет и способност предвиђања. Још једна од познатијих прича о Талесу је његова улога у побуни градова Милета против тиранина Трафона. Према легенди, Талес је био кључна фигура у организовању побуне против окрутног владара, што је довело до обарања Трафона са власти и успостављања демократије у Милету.

Иако је Талес из Милета живео пре скоро 2600 година, његова филозофија, мудрост и допринос науке оставили су дубок траг у историји. Његова теорија о води као основном принципу света можда звучи једноставно, али је заправо био пионир у размишљању о природи и свету око нас на начин који је утицао на генерације филозофа, научника и мислилаца који су дошли после њега. Талес из Милета остаје једна од најзначајнијих фигура у раној грчкој филозофији, чије идеје и даље инспиришу и интригирају људе широм света.

[2] Симпликије Киликијски је био један под последњих неоплатониста, грчки пагански филозоф прогоњен од стране Јустинијана почетком VI века, па је био приморан да потражи уточиште на персијском двору.
[3] Диоген Леартије је био биограф грчких филозофа.
[4] Прокло Дијадох је био антички неоплатонистички филозоф, управник Платонове академије.

2. ТАЛЕСОВА ТЕОРЕМА – ОСНОВНИ КОНЦЕПТИ И ДЕФИНИЦИЈЕ

Пре него што се упустимо у анализу доказа и примена теореме, важно је разумети основне дефиниције и концепте који су кључни за њен развој и разумевање. У овом поглављу упознаћемо се најпре са пропорционалности дужи и поделе дужи у задатој размери како бисмо на крају приказали и Талесову теорему.

2.1. Пропорционалност дужи

У свакодневном животу појам сличности често се помиње, али тешко да ће неко прецизно дефинисати тај појам. Знамо да су слични коцка и коцкица, мали и велики круг итд. Уколико се на интернету претражује појам „*сличност*“, тада ће нас највећи део одредница упутити на математички, тачније, геометријски појам сличности. Фокус наредног дела рада јесте детаљније упознавање управо са појмом *сличности* у геометрији. Додатно, показаћемо да поред подударности, која подразумева да се подударне фигуре могу довести до поклапања, постоји и сличност која указује на једнакост облика, а различитост величина. Увод у разматрање сличности у вези је са појмом пропорционалности.

Дефиниција 2.1. ***Размера*** *представља однос две величине које се мере истим јединицама, при чему једнакост двеју размера одређује* ***пропорцију****. Дакле, величина a и величина b пропорционалне су са величинама c и d ако важи $a{:}\, b = c{:}\, d$, тј.*

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

односно:

$$ad = bc.$$

Дакле, ако су величине a, b, c и d дужине дужи, и ако су размере $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ једнаке, тада важи пропорција $a{:}\, b = c{:}\, d$, а за те четири дужи кажемо да су пропорционалне.

Пример 2.1.1. Дате су дужи $a = 4cm, b = 3cm$ и $c = 12cm$. Одреди дуж x тако да важи пропорција $a{:}\, b = c{:}\, x$.

Решење. Из $a{:}\, b = c{:}\, x$ следи да је $4{:}\, 3 = 12{:}\, x$, односно $4 \cdot x = 3 \cdot 12$. Одатле је $x = \frac{3 \cdot 12}{4}$, односно $x = 9cm$.

Пример 2.1.2. Географска карта је конструисана у размери $1:2\,000\,000$. Колико је ваздушном линијом растојање између Ваљева и Шапца, ако је на географској карти то растојање једнако $3cm$?

Решење. Растојање између Ваљева и Шапца ваздушном линијом обележимо са x. Како размера на географској карти одговара размери у природи, важи једнакост $1:2\,000\,000 = 3:x$. Решавањем ове пропорције добија се да је $1\cdot x = 2\,000\,000\cdot 3$, па је $x = 6\,000\,000\ cm$. Како је $x = 6\,000\,000\ cm = 60\,000\ m = 60\ km$, из тога следи да је растојање између Ваљева и Шапца ваздушном линијом једнако $60\ km$.

Непознату дуж коју смо одређивали у претходним примерима назива се и **четврта (геометријска) пропорционала**.

У истој размери може бити више величина. У том случају пропорцију можемо приказати на више начина:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}$$

или

$$a_1 : b_1 = a_2 : b_2 = a_3 : b_3 = \cdots = a_n : b_n$$

или

$$a_1 : a_2 : a_3 : \cdots : a_n = b_1 : b_2 : b_3 : \cdots : b_n.$$

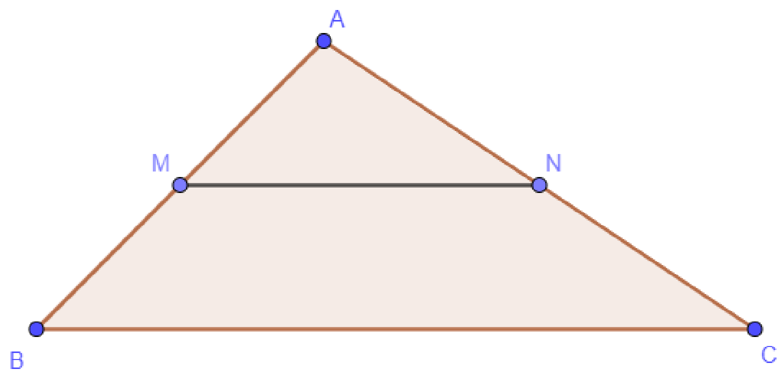
Овакву пропорцију називамо **продуженом**. Ако је

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \cdots = \frac{a_n}{b_n} = k,$$

онда уместо продужене пропорције можемо написати више једнакости које су њој еквивалентне:

$$a_1 : a_2 : a_3 : \cdots : a_n = b_1 : b_2 : b_3 : \cdots : b_n \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = kb_1, \\ a_2 = kb_2, \\ a_3 = kb_3, \\ \quad\vdots \\ a_n = kb_n. \end{cases}$$

Пример 2.1.3. Нека је $\overline{MN}$ средња линија троугла ABC (дат на слици 2.1.1.), паралелна са страницом $\overline{BC}$. Одредити пропорцију троугла ABC и троугла AMN.



Слика 2.1.1. Троугао ABC

Решење. За средњу линију троугла $\overline{MN}$ и одговарајућу страницу $\overline{BC}$ знамо да важи да је $|BC| = 2|MN|$, што можемо записати у облику пропорције на следећи начин:

$$|BC|:|MN| = 2:1.$$

Иста пропорција важи и за:

$$|AB|:|AM| = 2:1, \qquad |AC|:|AN| = 2:1.$$

Ове размере можемо написати у облику продужене пропорције:

$$|AB|:|AM| = |AC|:|AN| = |BC|:|MN| = 2,$$

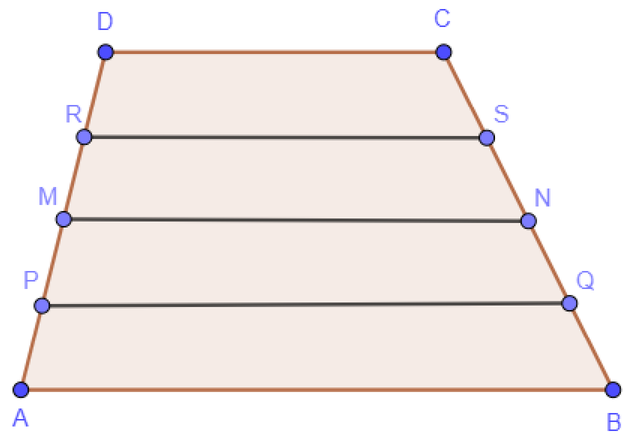
или

$$|AB|:|AC|:|BC| = |AM|:|AN|:|MN| = 2.$$

У претходном делу рада приказали смо примере у коме смо одређивали четврту геометријску пропорционалу, када смо знали преостале три дужи. Поставља се питање да ли је могуће проблем одређивања четврте геометријске пропорционале решити конструктивно. Односно, да ли је могуће конструисати дуж x за коју важи $a:b = c:x$, ако су дужине дужи a, b и c једнаке трима датим дужима. Примери који следе, дају одговор на то питање.

Пример 2.1.4. Краци AD и BC трапеза $ABCD$ (слика 2.1.2.) имају дужину $20cm$ и $16cm$. Нека је MN средња линија трапеза $ABCD$, PQ средња линија трапеза $ABNM$ и RS средња линија трапеза $MNCD$.

а) Израчунај дужине дужи AP, PM, MR и RD и дужи BQ, QN, NS и SC.
б) Одреди односе $AP:PD, BQ:QC, AR:RD$ и $BS:SC$.



Слика 2.1.2. Трапез $ABCD$

Решење.

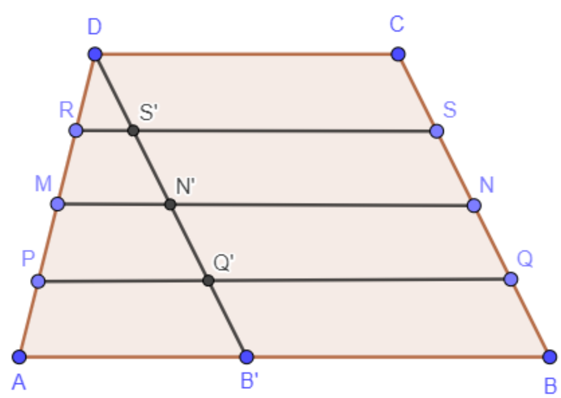
а) Како су MN, PQ и RS редом средње линије трапеза $ABCD, ABNM$ и $MNCD$, то су M и N средишта кракова AD и BC, P и Q средишта кракова AM и BN и R и S средишта кракова MD и NC. Одавде следи да је $AP = PM = MR = RD = 5cm$ и $BQ = QN = NS = SC = 4cm$.

б) Тражени односи су $AP: PD = 5cm: 15cm = 1: 3, BQ: QC = 1: 3, AR: RD = 3: 1$ и $BS: SC = 3: 1$.

Примећујемо да паралелне праве на двема произвољним правама одсецају прпорционалне одговарајуће одсечке.

Пример 2.1.5. На трапезу из претходног примера додајмо дуж DB' паралелну са CB, тако да $B' \in AB$ и обележимо са S', N' и Q' пресечне тачке ове дужи са дужима RS, MN и PQ (слика 2.1.3.). Ако је $AB = 32cm$ и $CD = 8cm$:

а) Израчунај дужине дужи $DS', S'N', N'Q', Q'B'$ и дужи RS', MN', PQ' и AB'.
б) Одреди односе $DP: DA, DQ': DB'$ и $PQ': AB'$.



Слика 2.1.3. Трапез $ABCD$

Решење.

а) Како су $DS'SC, S'N'NS, N'Q'QN$ и $Q'B'BQ$ паралелограми, из тога следи да је $DS' = S'N' = N'Q' = Q'B' = 4cm$ и још $CD = SS' = NN' = QQ' = BB' = 8cm$. Даље је MN средња линија трапеза $ABCD$, па је $MN = 20cm$, одакле следи да је $MN' = MN - N'N = 12cm$. Из трапеза $ABNM$, на исти начин, добијамо да је $PQ = 26cm$, односно $PQ' = 18cm$, а из трапеза $MNCD$ добијамо да је $RS = 14cm$, односно $RS' = 6cm$ и још $AB' = AB - BB' = 24cm$.

б) Тражени односи су $DP: DA = 15cm: 20cm = 3: 4, DQ': DB' = 12cm: 16cm = 3: 4$ и $PQ': AB' = 18cm: 24cm = 3: 4$.

На основу претходна два примера уочавамо да две паралелне праве на крацима угла одсецају пропорционалне одговарајуће одсечке, и да су њима пропорционални одговарајући одсечци на паралелним правама. О законитостима које смо уочили у претходним примерима говори тврђење, у математици познато као ***Талесова теорема***.

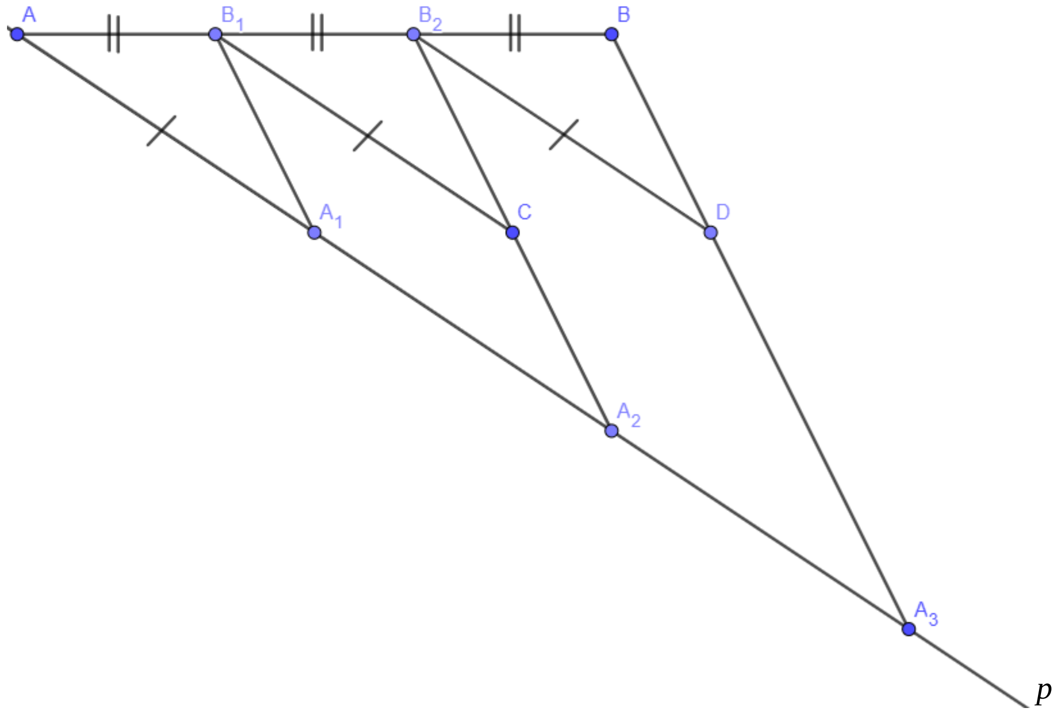
2.2. Подела дужи у задатој размери

Једна од основних операција у геометрији је подела дужи у одређеном односу. Ова техника омогућава прецизно дељење линија на сегменте који су пропорционални задатим односима. У овом раду фокусираћемо се на основну методу поделе дужи коју ћемо представити кроз примере. Кроз ово поглавље стећи ћемо дубље разумевање пропорционалне поделе дужи, које ће нам бити од користи у наставку рада.

Пример 2.2.1. Дуж AB подели на три једнака дела.

Решење. Повуцимо из тачке A произвољну полуправу Ap. На датој полуправој узмимо произвољну тачку A_1. Дуж AA_1 нанесемо шестаром још два пута на полуправој Ap, тако да се добију тачке A_2 и A_3 (слика 2.2.1.).

Спојмо тачку A_3 са тачком B, а затим повуцимо паралеле A_2B_2 и A_1B_1 са правцем A_3B. Дакле, тврдимо да тачке B_1 и B_2 деле дуж AB на три једнака дела. Да бисмо то доказали, повуцимо из тачака B_1 и B_2 праве паралелне са полуправом Ap. На тај начин добијамо три троугла: AA_1B_1, B_1CB_2 и B_2DB. Наведени троуглови се подударају, тј. одговарајући углови ова три троугла су подударна и важи да је $|AA_1| = |B_1C| = |B_2D|$. Узимајући у обзир чињеницу да су ова три троугла подударна, то значи да су одговарајуће странице сваког од ових троуглова једнаке, тј. подударне, а то даље имплицира да је $|AB_1| = |B_1B_2| = |B_2B|$ што смо и хтели да докажемо.

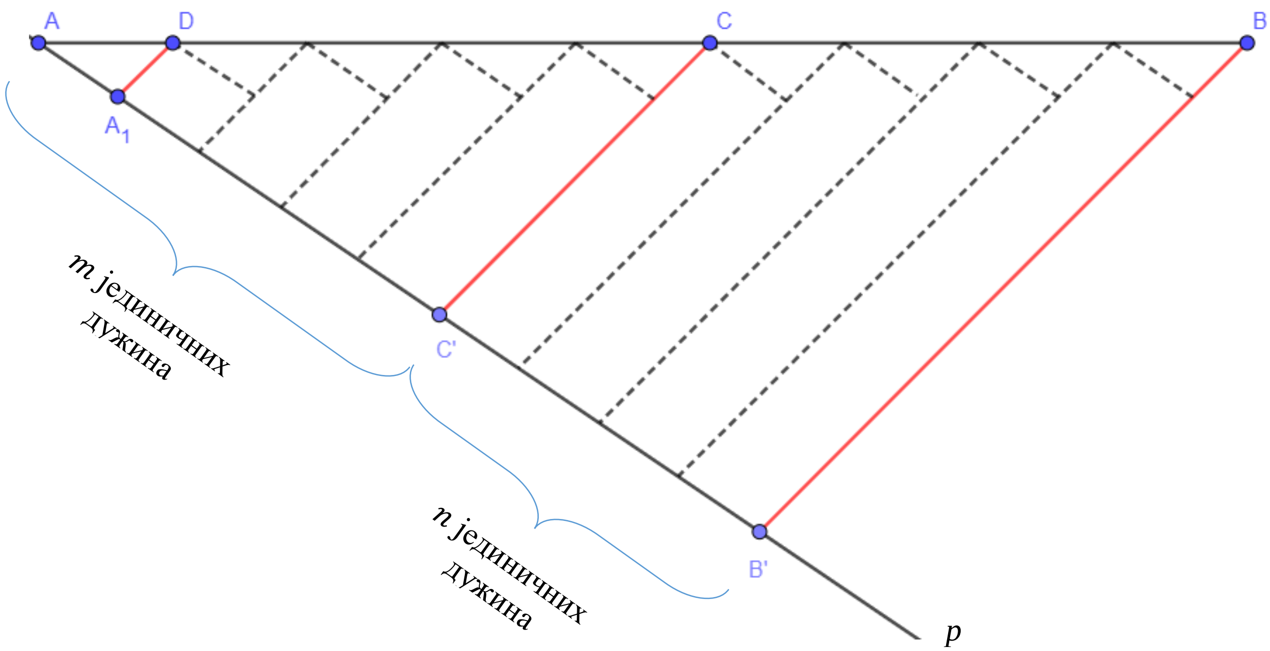


Слика 2.2.1. Подела дужи на једнаке делове. Дуж AB делимо на три једнака дела, без информације о њеној дужини.

Пример 2.2.2. Дуж AB са тачком C подели у размери $m:n$ $(m, n \in \mathbb{N})$, тј. тако да буде $|AC|:|CB| = m:n$.

Решење. Слично, као и у претходном примеру, повуцимо из тачке A произвољну полуправу Ap, и изаберимо јединичну дужину AA_1. Нанесимо ту дужину m пута, па је $|AC'| = m|AA_1|$. Нанесимо је сад још n пута, $|C'B'| = n|AA_1|$. Спојмо тачке B и B'. На даље, конструишимо праву из тачке C' која је паралелна са BB'. Нека паралелна права сече дуж AB у тачки C. Тврдимо да је C тражена тачка. Из подударности троуглова (нацртаних на слици 2.2.2.) видимо да је AC m пута дужа од AD. Слично, дуж CB је n пута дужа од AD. Због тога можемо записати следећу једнакост:

$$|AC|:|CB| = m|AD|:n|AD| = m:n.$$



Слика 2.2.2. Подела дужи у размери $m:n$

2.3. Талесова теорема

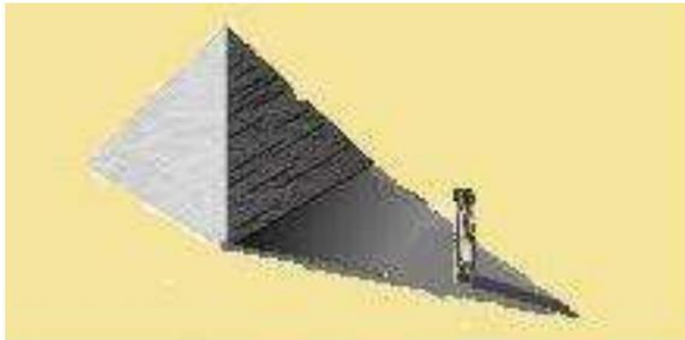
У свету геометрије постоји једна теорема која изнова открива своју елегантну једноставност, а са друге стране открива дубину математичког света, а то је Талесова теорема. Ова теорема обележила је свој траг кроз историју математике, од древних цивилизација до модерних истраживања.

2.3.1. Мотивација

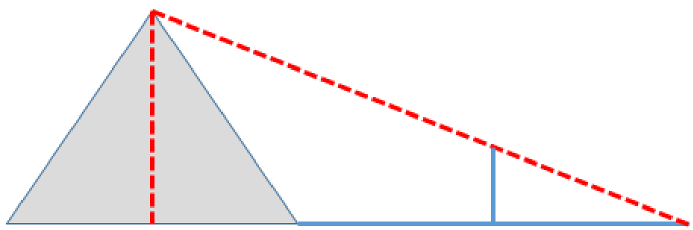
Талес је успео да реши и неке практичне геометријске задатке као што су одређивање висине пирамиде у Мемфису и одстојање бродова на морској пучини.

Мерење висине пирамиде

Талес је желео да одреди висину пирамиде. Ипак у његово време није постојао доступан алат помоћу ког би се висина пирамиде лако израчунала. Талес је мислио да сенка пирамиде може бити од користи, тј. да му она може помоћи у прорачуну висине пирамиде. Он је стао испред пирамиде тако да се његова сенка преклапа са пирамидином сенком, тако да се крај обе сенке завршава на истом месту, тј. у истој тачки (слика 2.3.1.1.). Његова сенка је била 2 метра, док је пирамидина сенка била дугачка 6 метара. Знајући да је висок 1,8 метара, Талес је на основу датих података израчунао висину пирамиде.



Слика 2.3.1.1. Талес стоји испред пирамиде тако да се његова сенка поклапа са сенком пирамиде, при чему је крај и једне и друге сенке исти.

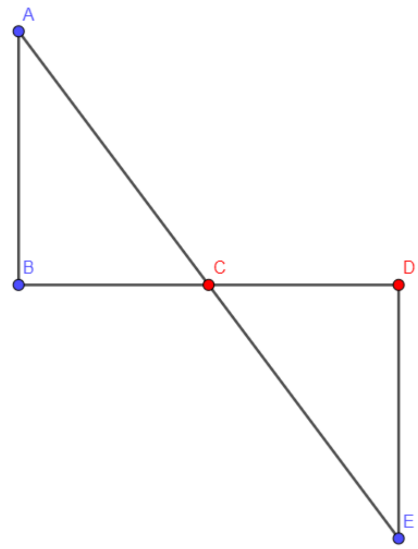


Слика 2.3.1.2. Представљање проблема из живота на нивоу геометријског задатка.

Талес је уочио да у тренутку када је сенка једнака висини одређеног објекта, иста релација важи за све објекте који имају сенку. Узастопним мерењем разних објеката и њихових сенки утврдио је правилност.

Мерење удаљености бродова на мору

Одстојање брода на морској пучини од обале Талес је такође одредио користећи подударност неких правоуглих троуглова. Претпоставља се да је то учинио на следећи начин: нека је B положај посматрача на обали и A положај усидреног брода на морској пучини (слика 2.3.1.3.). Дакле, Талес је нашао свој почетни положај у тачки B, тако да је положај брода био под углом од 90^0 у односу на обалу. Затим је ходао дуж обале и ставио штап у тачку C. Потом је даље наставио да хода дуж обале све док није стигао до тачке D, која је на истој удаљености од тачке C као што је и тачка B удаљена од тачке C. На крају је из тачке D под углом 90^0 наставио да се креће тако да се удаљава од мора. Застао је онда када су брод (тј. тачка A), тачка C и његов положај постале три тачке на једној правој (колинеарне тачке). Његов положај означимо са тачком E. На овај начин креирао је сличне троуглове које је Талес могао да користи да одреди удаљеност брода од обале.



Слика 2.3.1.3. Представљање положаја брода и Талеса у израчунавању удаљености брода од пучине.

2.3.2. Доказ Талесове теореме – однос дужи је рационалан број

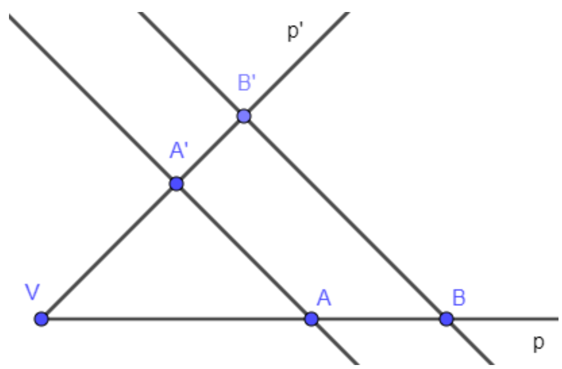
Теорема 2.3.2.1. ***Талесова теорема о пропорционалности.*** *Нека паралелне праве a и b секу кракове угла $\sphericalangle pVp'$ у тачкама A и A' те B и B'. Тада важи:*

$$|VA|:|AB| = |VA'|:|A'B'|,$$

и

$$|VA|:|VB| = |VA'|:|VB'| = |AA'|:|BB'|.$$

Кажемо краће: Паралелне праве на крацима угла одсецају пропорционалне дужине.



Слика 2.3.2.1. Талесова теорема (о пропорционалности)

Доказ. Присетимо се начина на који дуж делимо у задатој размери. Претпоставимо да је размера $|VA|:|AB|$ рационалан број:

$$|VA|:|AB| = m:n, \qquad m,n \in \mathbb{N}.$$

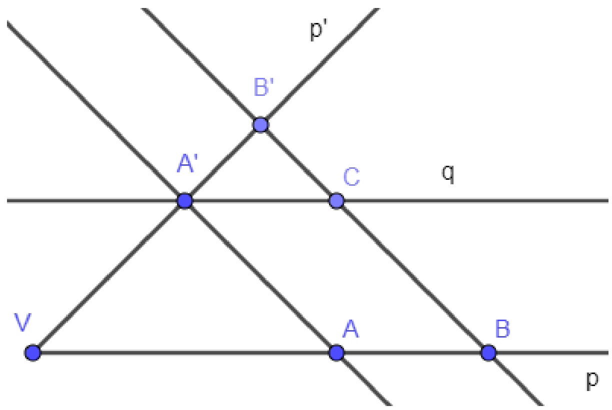
Тада дуж VA можемо поделити на m, а дуж AB на n једнаких делова па закључујемо да паралелне праве на једном крају угла одсецају сличне дужине. Због тога ће оне и на другом крају угла одсецати сличне дужине, па важи:

$$|VA|:|AB| = m:n = |VA'|:|A'B'|.$$

Такође, видимо да важи:

$$|VA|:|VB| = m:(m+n) = |VA'|:|VB'|.$$

У наставку ћемо доказати да Талесова теорема о пропорционалности важи и за трећи пар одговарајућих дужина, тј. $|VA|:|VB| = |AA'|:|BB'|$.



Слика 2.3.2.2. Трећа пропорционалност у Талесовој теореми

Са слике 2.3.2.2. видимо да важи:

$$\frac{|VB'|}{|VA'|} = \frac{|VA'| + |A'B'|}{|VA'|} = 1 + \frac{|A'B'|}{|VA'|}.$$

Из тачке A' повуцимо праву q која је паралелна са правом p. Нека је тачка C пресек праве q са правом која садржи тачке B и B'. Ако применимо Талесову теорему на $\sphericalangle VB'B$ и паралелне праве p и q добијамо:

$$\frac{|A'B'|}{|VA'|} = \frac{|B'C|}{|CB|}.$$

Због тога важи да је:

$$\frac{|VB'|}{|VA'|} = 1 + \frac{|A'B'|}{|VA'|} = 1 + \frac{|B'C|}{|CB|} = \frac{|CB| + |B'C|}{|CB|} = \frac{|BB'|}{|AA'|}.$$

Дакле, важи да је:

$$\frac{|VB'|}{|VA'|} = \frac{|BB'|}{|AA'|}.$$

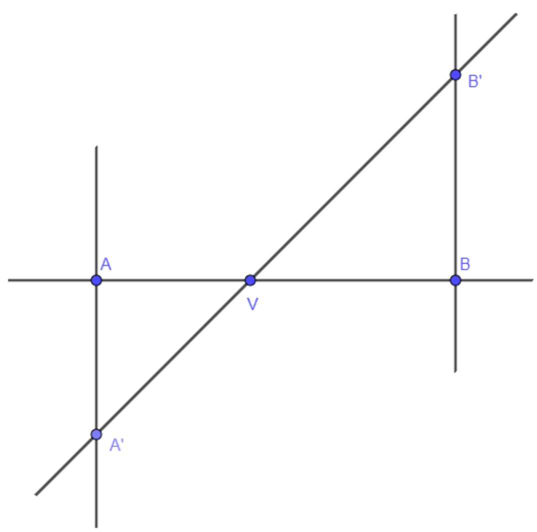
На овај начин смо доказали Талесову теорему о пропорционалности, када је однос дужина рационалан број. У наредном поглављу рада доказаћемо да Талесова теорема важи и када је однос дужина ирационалан број.

Користећи основна својства пропорције, можемо закључити да важе и следеће једнакости:

$$\frac{|VB'|}{|VB|} = \frac{|VA'|}{|VA|}, \qquad \frac{|VB'|}{|BB'|} = \frac{|VA'|}{|AA'|}, \qquad \frac{|VB|}{|BB'|} = \frac{|VA|}{|AA'|}.$$

Напомена: Претходна теорема важи и ако две паралелне праве секу краке унакрсних углова (слика 2.3.2.3.).

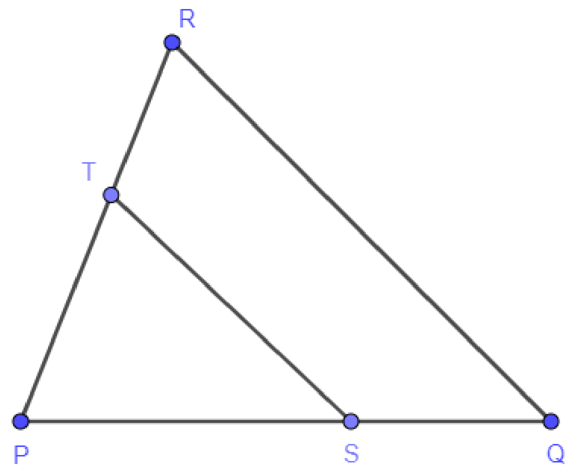
$$\frac{|VB'|}{|VA'|} = \frac{|VB|}{|VA|} = \frac{|BB'|}{|AA'|}.$$



Слика 2.3.2.3. Талесова теорема примењена на две паралелне праве које секу краке унакрсних углова

Пример 2.3.2.1. На страници PQ троугла PQR дата је тачка S, а на страници PR дата је тачка T. Ако је $ST \parallel QR$, $PS = 4m$, $SQ = 2m$, $PT = 6m$ и $QR = 9m$, одреди дужине дужи ST, TR и PR.

Решење. Најпре направимо скицу (слика 2.3.2.4.) троугла PQR који је дат у задатку.



Слика 2.3.2.4. Троугао PQR из примера 2.3.2.1.

С обзиром да су дужи ST и QR паралелне, на троугао PQR можемо применити Талесову теорему, па важи:

$$\frac{PR}{PT} = \frac{PQ}{PS} = \frac{QR}{ST}.$$

Како је $PS = 4m$ и $SQ = 2m$ добијамо да је $PQ = PS + SQ = 4m + 2m = 6m.$ Када заменимо познате дужине страница добијамо:

$$\frac{PR}{6m} = \frac{6m}{4m} = \frac{9m}{ST}.$$

Дакле, из различитих једнакости добићемо дужине преостале две дужи.

$$\frac{PR}{6m} = \frac{6m}{4m}$$

$$4 \cdot PR = 6 \cdot 6$$

$$4 \cdot PR = 36$$

$$PR = 9m$$

$$\frac{6m}{4m} = \frac{9m}{ST}$$

$$6 \cdot ST = 4 \cdot 9$$

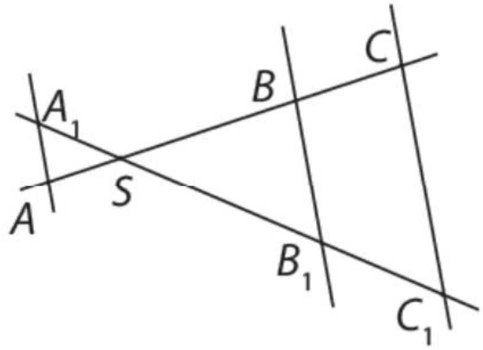
$$6 \cdot QR = 36$$

$$ST = 6m$$

Потребно је одредити још дужину дужи TR. Дакле:

$$TR = PR - PT = 9m - 6m = 3m.$$

Пример 2.3.2.2. Нека је $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$ и $SA = 2cm, SB = 5cm, BC = 3cm, BB_1 = 4cm$ и $SB_1 = 6cm$ (погледати слику 2.3.2.5.). Израчунај дужине дужи $CC_1, SC_1, B_1C_1, AA_1, SA_1$ и A_1B_1.



Слика 2.3.2.5. Скица примера 2.3.2.2.

Решење. Очигледно, применићемо Талесову теорему која важи и за унакрсне углове. Идемо редом:

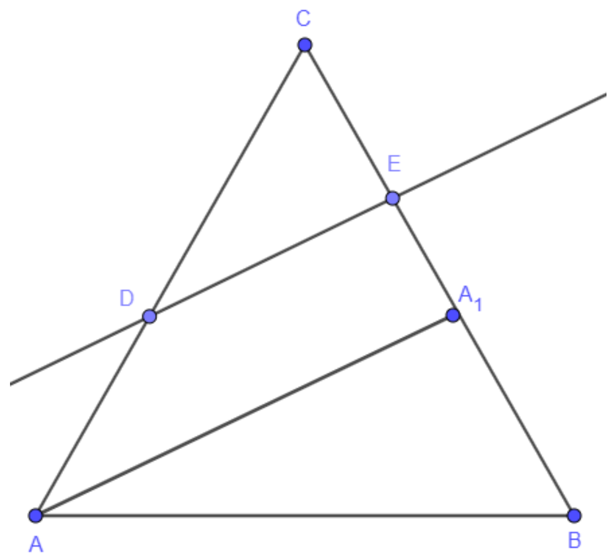
$\frac{SC}{CC_1} = \frac{SB}{BB_1}$	$\frac{SC_1}{CC_1} = \frac{SB_1}{BB_1}$	$B_1C_1 = SC_1 - SB_1$	$\frac{SA}{AA_1} = \frac{SB}{BB_1}$	$\frac{SA}{SA_1} = \frac{SB}{SB_1}$	$A_1B_1 = SA_1 + SB_1$
$\frac{8}{CC_1} = \frac{5}{4}$	$\frac{SC_1}{6{,}4} = \frac{6}{4}$	$B_1C_1 = 9{,}6 - 6$	$\frac{2}{AA_1} = \frac{5}{4}$	$\frac{2}{SA_1} = \frac{5}{6}$	$A_1B_1 = 2{,}4 + 6$
$5CC_1 = 8 \cdot 4$	$4SC_1 = 6{,}4 \cdot 6$	$B_1C_1 = 3{,}6cm$	$5AA_1 = 2 \cdot 4$	$5 \cdot SA_1 = 2 \cdot 6$	$A_1B_1 = 8{,}4cm$
$CC_1 = \frac{32}{5}$	$SC_1 = \frac{38{,}4}{4}$		$AA_1 = \frac{8}{5}$	$SA_1 = \frac{12}{5}$	
$CC_1 = 6{,}4cm$	$SC_1 = 9{,}6cm$		$AA_1 = 1{,}6cm$	$SA_1 = 2{,}4cm$	

Пример 2.3.2.3. У једнакокраком троуглу $ABC(AC = BC)$, основица је $24cm$, а крак $20cm$. На краку AC уочена је тачка D, која крак дели у односу $2:3$. Права која садржи тачку D и паралелна је висини троугла из темена A сече крак BC у тачки E. Израчунај дужине дужи CD и DE.

Решење. Нацртајмо најпре скицу (слика 2.3.2.5.) задатка како бисмо увидели са којим подацима располажемо и да можемо да применимо Талесову теорему.

Из задатка знамо да важи $AD:DC = 2:3$, и да је $AC = 20cm$. Дуж AD можемо представити као $AD = AC - DC$ Дакле:

$$(AC - DC):DC = 2:3 \Leftrightarrow (20 - DC):DC = 2:3 \Leftrightarrow 3 \cdot (20 - DC) = 2 \cdot DC \Leftrightarrow 60 - 3DC = 2DC \Leftrightarrow 60 = 5DC \Leftrightarrow DC = 12cm.$$



Слика 2.3.2.5. Скица примера 2.3.2.3.

Дакле, добили смо да је $CD = 12cm$. Остало је још да одредимо дужину дужи DE. Њу ћемо одредити помоћу Талесове теореме, а како бисмо исту применили потребно је најпре да одредимо дужину висине која полази из тачке A и пада на страницу BC. Означимо је са $h_b = AA_1$. Како бисмо одредили h_b потребно је да израчунамо висину из тачке C која пада на основицу, тј. дуж AB. Поред тога морамо да израчунамо и површину троугла ABC како бисмо на крају добили тражену висину h_b. Дакле:

$$h_a = \sqrt{BC^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2} \Leftrightarrow h_a = \sqrt{20^2 - \left(\frac{24}{2}\right)^2} \Leftrightarrow h_a = \sqrt{400 - 144} \Leftrightarrow h_a = 16.$$

На даље, рачунамо површину троугла ABC.

$$P_{ABC} = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{24 \cdot 16}{2} = 192.$$

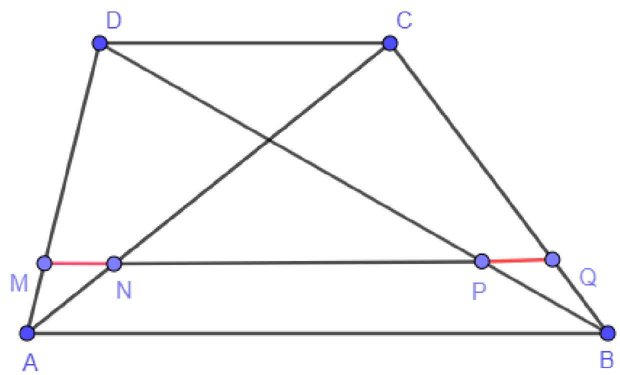
Да бисмо добили $h_b = AA_1$ употребимо еквивалентну формулу за површину користећи поменуту висину. Дакле:

$$P_{ABC} = \frac{b \cdot h_b}{2} \Leftrightarrow 192 = \frac{20 \cdot h_b}{2} \Leftrightarrow 192 = 10 \cdot h_b \Leftrightarrow h_b = 19{,}2.$$

Сада када смо добили $h_b = AA_1 = 19{,}2$ можемо да применимо Талесову теорему на троуглове AA_1C и DEC. Дакле, према Талесовој теореми важи:

$$\frac{AC}{AA_1} = \frac{DC}{DE} \Leftrightarrow \frac{20}{19{,}2} = \frac{12}{DE} \Leftrightarrow 20DE = 12 \cdot 19{,}2 \Leftrightarrow DE = \frac{12 \cdot 19{,}2}{20} = 11{,}52cm.$$

Пример 2.3.2.4. Трапез $ABCD$ пресечен је правом која је паралелна са основицама датог трапеза. Доказати да су одсечци те праве између страница и дијагонала једнаки, тј. $MN = PQ$ (слика 2.3.2.6.).



Слика 2.3.2.6. Скица трапеза $ABCD$

Решење. У овом примеру применићемо три пута Талесову теорему. Најпре, важи:

$$\frac{MN}{DC} = \frac{AN}{NC}.$$

Другим речима, користимо Талесову теорему над сличним троугловима ACD и ANM. Применимо опет теорему на троуглове ABC и NQC. Дакле:

$$\frac{AN}{NC} = \frac{BQ}{QC}.$$

Трећи пут ћемо применити Талесову теорему на троугао BCD и троугао BQP. Дакле, важи:

$$\frac{BQ}{QC} = \frac{PQ}{DC}.$$

Комбинујући све три једнакости добијамо:

$$\frac{MN}{DC} = \frac{AN}{NC} = \frac{BQ}{QC} = \frac{PQ}{DC}.$$

Дакле,

$$\frac{MN}{DC} = \frac{PQ}{DC} \Leftrightarrow MN = PQ,$$

што смо и хтели да покажемо.

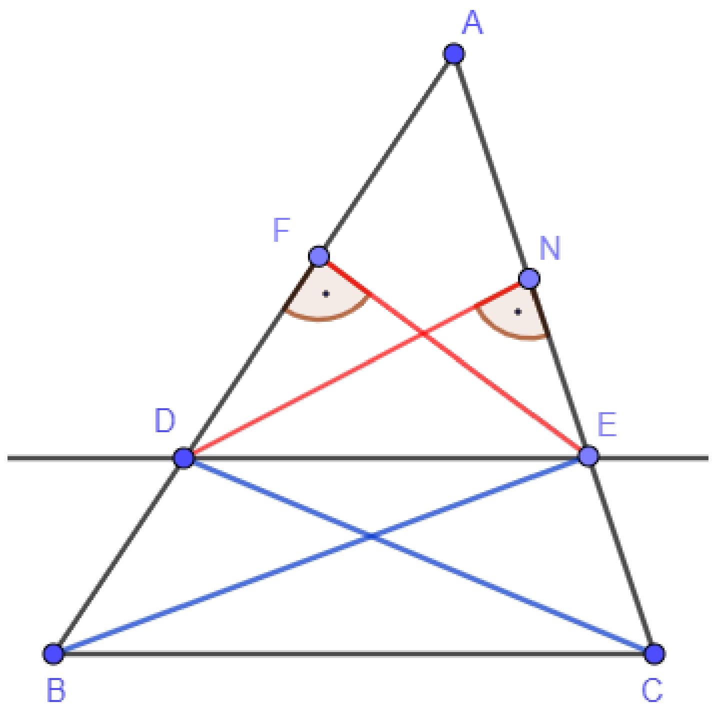
2.3.3. Доказ Талесове теореме – однос дужи је било који (ирационалан) број

Теорема 2.3.3.1. ***Талесова теорема о пропорционалности.*** *Ако се повуче права, паралелна са једном страном троугла, тако да та права пресече преостале две стране троугла у различитим тачкама, тада су те две стране троугла подељене у истом односу.*

Доказ. Нека је дат троугао ABC, и нека је дата права p паралелна са страницом BC, тако да права p сече троугао ABC у тачкама D и E (слика 2.3.3.1.). Потребно је доказати да важи:

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}.$$

Пре него што кренемо у доказ поменуте теореме, направимо скицу троугла ABC и праве p. Након тога спојмо теме B са теменом E, и теме C са теменом D. Додатно, нацртајмо дуж EF и DN тако да важи $EF \perp AB$ и $DN \perp AC$.



Слика 2.3.3.1. Скица коришћена за доказ Талесове теореме.

Лева страна једнакости коју морамо да докажемо је $\frac{AD}{DB}$. Због тога ћемо посматрати ΔADE и ΔBDE. Уочимо да је висина ова два троугла иста, а то је дуж EF На даље, ставимо у однос њихове површине. Дакле:

$$\frac{P_{\Delta ADE}}{P_{\Delta BDE}} = \frac{\frac{1}{2}AD \cdot EF}{\frac{1}{2}BD \cdot EF} = \frac{AD}{BD} \qquad (1)$$

Дакле, у првом кораку доказа искористили смо троуглове са једнаком висином. Сада прелазимо на други корак. Уочимо ΔACD који се састоји од два мања троугла: ΔAED и ΔCED. Слично као и у првом кораку, ова два троугла имају исту висину а то је дуж DN. Дакле важи:

$$\frac{P_{\Delta ADE}}{P_{\Delta CED}} = \frac{\frac{1}{2} AE \cdot DN}{\frac{1}{2} EC \cdot DN} = \frac{AE}{EC} \qquad (2)$$

Уочимо да смо у (1) и (2) на крају добили односе за које морамо да покажемо да су једнаки. Да би ти односи (тј. десне стране једнакости) били једнаки то имплицира да и леве стране једнакости морају да буду једнаке, тј. мора да важи:

$$\frac{P_{\Delta ADE}}{P_{\Delta BDE}} = \frac{P_{\Delta ADE}}{P_{\Delta CED}} \Leftrightarrow P_{\Delta BDE} = P_{\Delta CED}.$$

Дакле, да бисмо доказали теорему, потребно је да докажемо да важи $P_{\Delta BDE} = P_{\Delta CED}$, тј.

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \Leftrightarrow P_{\Delta BDE} = P_{\Delta CED}.$$

Када посматрамо ΔBDE и ΔCED видимо да су то два троугла која се налазе између две паралелне праве. Међутим, знамо да троуглови који имају исту основу, и чија се темена налазе на две паралелне праве имају једнаке површине. Управо су ΔBDE и ΔCED такви да имају исту основу (дуж DE) а треће теме се налази на правој која је паралелна са поменутом основом. Дакле:

$$P_{\Delta BDE} = P_{\Delta CED} \Longrightarrow \frac{P_{\Delta ADE}}{P_{\Delta BDE}} = \frac{P_{\Delta ADE}}{P_{\Delta CED}} \Longrightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC},$$

што смо и хтели да докажемо.

2.4. Задаци за самостално вежбање

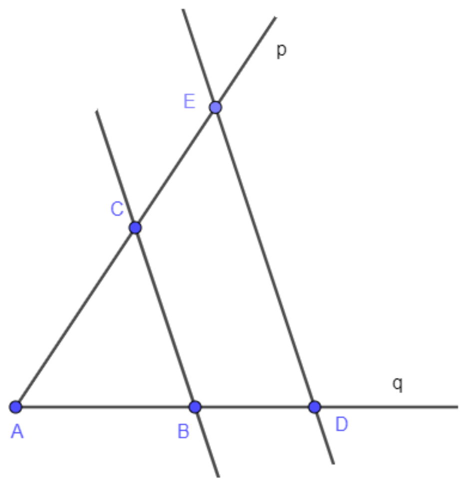
Задатак 1. Страница BC троугла ABC подељена је на три једнака дела са права ма p и q које су паралелне са страницом AC. Ако је $AC = 18cm$, колике су дужине одсечака правих p и q између страница AB и BC датог троугла?

Задатак 2. На катети AC правоуглог троугла ABC дата је тачка N. Пресек нормале конструисане у тачки N са хипотенузом AB је тачка M. Одреди дужине дужи CN, BM, AC и AB ако је $AN = 4cm, MN = 3cm$ и $BC = 9cm$.

Задатак 3. Нека је S центар уписаног круга једнакокраког троугла $ABC(AB = AC)$. Ако су D и E тачке у којима уписани круг додирује редом краке AB и AC и ако је $AB = 8cm$ и $BC = 12cm$, израчунај дужину дужи DE.

Задатак 4. Краци $\sphericalangle pAq$ пресечени су са две паралелне праве, при чему прва права сече краке у тачкама B и C, док друга права сече краке у тачкама D и E (слика 2.4.1.).

1. Ако је $AB = 8cm, AD = 12cm, AC = 10cm$, колико је дугачка дуж AE?
2. Колико је дугачка дуж AB, ако је $AB + AD = 21cm, AC = 12cm, AE = 16cm$?
3. Колико је дугачка дуж AD, ако је $AC: AE = 3: 5, BD = 12cm$?



Слика 2.4.1. Скица задатка 4.

Задатак 5. Симетрала угла γ троугла ABC сече страницу AC у тачки D.

1. Ако је $AC = 10cm, BC = 15cm$ и $AB = 20cm$, колика је дужина дужи AD и BD?
2. Ако је $AD: BD = 8: 5$ и $AC = 16cm$, колика је дужина дужи BC?

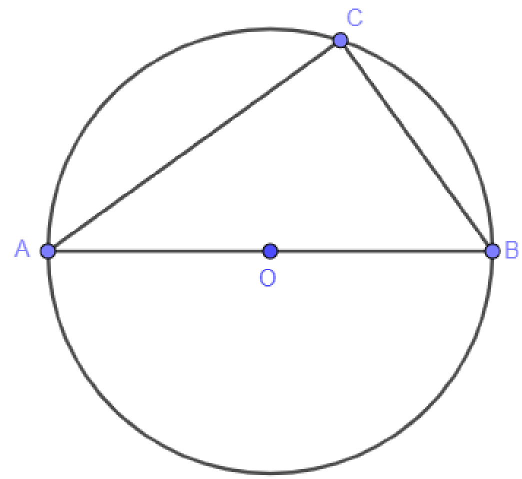
3. ВЕЗА ИЗМЕЂУ ТАЛЕСОВЕ И ПИТАГОРИНЕ ТЕОРЕМЕ

У свету геометрије и математике, класичне теореме попут Питагорине и Талесове нису само изоловани концепти, већ су темељи на којима почива дубље разумевање простора и односа међу геометријским облицима. Питагорина теорема, једноставна у форми, али дубоко сложена у импликацијама, представља стуб у проучавању правоуглих троуглова и њихових карактеристика. С друге стране, Талесова теорема, са својом елеганцијом пропорција и паралелних права, уноси хармонију у анализу геометријских фигура. У овом поглављу приказаћемо везу између ова два математичка концепта.

Пре него што се упустимо у представљање поменуте везе, представићемо Талесов став који ће нам помоћи у стварању везе између концепта Питагоре и Талеса.

Теорема 3.1. ***Талесов став.*** *Ако су A, B и C тачке на кругу где је дуж AB пречник круга, тада је угао код темена C прав угао.*

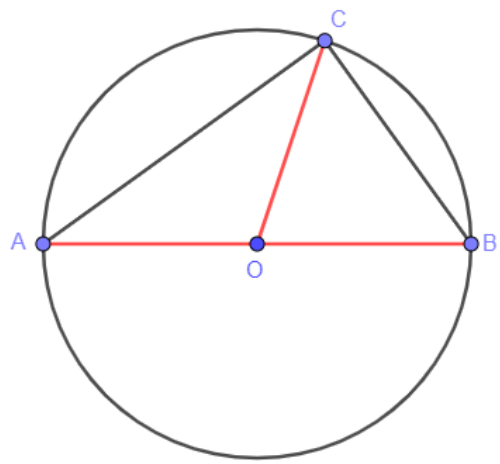
Доказ. У оквиру доказа Талесовог става користићемо познату чињеницу да је збир унутрашњих углова ма ког троугла једнак 180^0. Најпре, креирајмо скицу (слика 2.3.1.) тако да се темена троугла ABC налазе на кружници, и да је дуж AB пречник кружнице.



Слика 2.3.1. Талесов став – иницијална скица

Затим ћемо спојити центар кружнице (тачку O) са теменом C (слика 2.3.2.). Приметимо да су дужи OA, OB и OC полупречници кружнице, па важи:

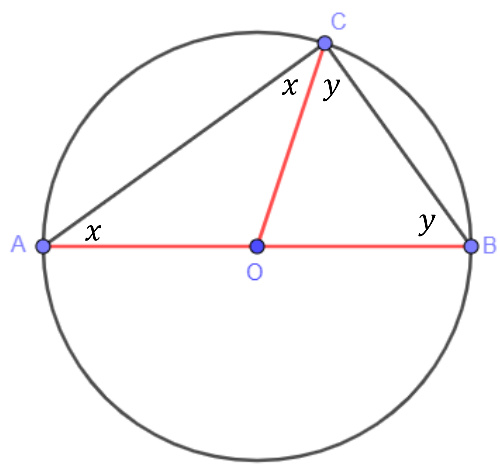
$$OA = OB = OC = r.$$



Слика 2.3.2. Талесов став – центар кружнице O спојен са теменом C

Уочавамо да су троуглови ΔAOC и ΔBOC једнакокраки (у сваком од наведених троуглова две странице су полупречници кружнице). С обзиром да су поменута два троугла једнакокрака, то имплицира да су углови на основицама ових троуглова једнаки (означимо их са x и y, респективно), тј. важи:

$$\sphericalangle OAC = \sphericalangle OCA = x, \qquad \sphericalangle OBC = OCB = y.$$



Слика 2.3.3. Талесов став – упис углова у једнакокраке троуглове

Дакле, циљ доказа је да се одреди величина угла $\sphericalangle ACB = x + y$. На даље, знамо да је $\sphericalangle AOB = 180^0 = \sphericalangle AOC + \sphericalangle BOC$. Посматрајмо сада ΔAOC и ΔBOC. Знамо да је збир унутрашњих углова у сваком троуглу једнак 180^0, па важи:

За ΔAOC:	За ΔBOC:
$x + x + \sphericalangle AOC = 180^0$	$y + y + \sphericalangle BOC = 180^0$
$2x + \sphericalangle AOC = 180^0$	$2y + \sphericalangle BOC = 180^0$
$\sphericalangle AOC = 180^0 - 2x$	$\sphericalangle BOC = 180^0 - 2y$

Добијене вредности убацимо у једначину $\sphericalangle AOC + \sphericalangle BOC = 180^0$, и добијамо:

$$180^0 - 2x + 180^0 - 2y = 180^0$$

$$360^0 - 2x - 2y = 180^0$$

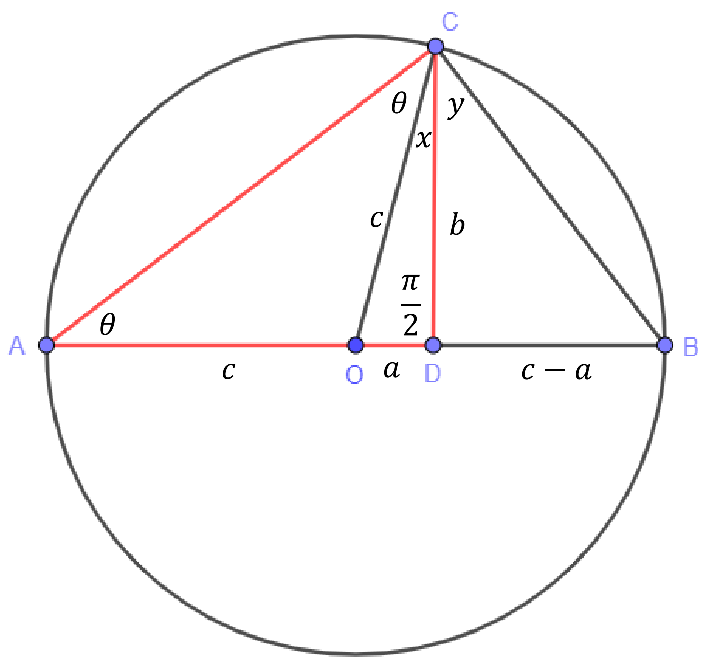
$$2x + 2y = 180^0$$

$$x + y = 90^0$$

а то је управо оно што смо желели да покажемо.

Дакле, сада знамо да за ма који троугао чија је једна страна пречник описане кружнице, тај троугао је правоугли, где прав угао лежи наспрам странице троугла која је уједно и пречник описане кружнице. У наставку рада представићемо везу између Талесове теореме и Питагорине теореме, тј. начин на који ће Питагорина теорема постати дериват Талесове.

Пре него што кренемо у представљање горе поменуте везе, направићемо скицу, сличну оној која се користила у доказу Талесовог става.



Слика 2.3.4. Извођење Питагорине теореме из Талесовог става

Са скице можемо уочити да је дужина c полупречник кружнице у којој је уписан троугао ABC. Дакле важи:

$$OA = OB = OC = r = c.$$

Са a ћемо означити дужину дужи OD, па из те чињенице можемо рећи да је дужина дужи $OD = c - a$. Додатно, висина троугла OBC, тј. дуж CD означићемо са b. С обзиром да је

$\sphericalangle ADC = 90^0$ што је еквивалентно са $\frac{\pi}{2}$, уочимо црвени троугао ADC са дате скице. У оквиру њега можемо дефинисати тангенс угла θ, што је количник наспрамне и налегле странице. Дакле:

$$tg(\theta) = \frac{CD}{AD} = \frac{b}{c+a}.$$

Такође, знамо да је збир унутрашњих углова у троуглу једнак 180^0. Ако ову чињеницу применимо на правоугли троугао чије су странице представљене црвеном бојом добијамо:

$$\theta + x + 90^0 + \theta = 180^0$$

$$\theta + x + \frac{\pi}{2} + \theta = \pi$$

$$2\theta + x = \pi - \frac{\pi}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{2} - 2\theta.$$

Следећа важна чињеница коју морамо поменути јесте да на основу претходно доказаног Талесовог става за ΔABC важи:

$$\theta + x + y = 90^0$$

$$\theta + x + y = \frac{\pi}{2}$$

$$\theta + \frac{\pi}{2} - 2\theta + y = \frac{\pi}{2}$$

$$y = \theta.$$

Дакле, добили смо да је $y = \theta$. Посматрајмо сада ΔBCD. У оквиру њега можемо дефинисати тангенс угла y. Важи:

$$tg(y) = \frac{BD}{CD} = \frac{c-a}{b}.$$

Када узмемо у обзир чињеницу да је $y = \theta$, то имплицира следеће:

$$y = \theta \Leftrightarrow tg(y) = tg(\theta) \Leftrightarrow \frac{c-a}{b} = \frac{b}{c+a}.$$

На основу претходне једнакости важи следеће:

$$b \cdot b = (c-a)\cdot(c+a)$$

$$b^2 = c^2 - a^2$$

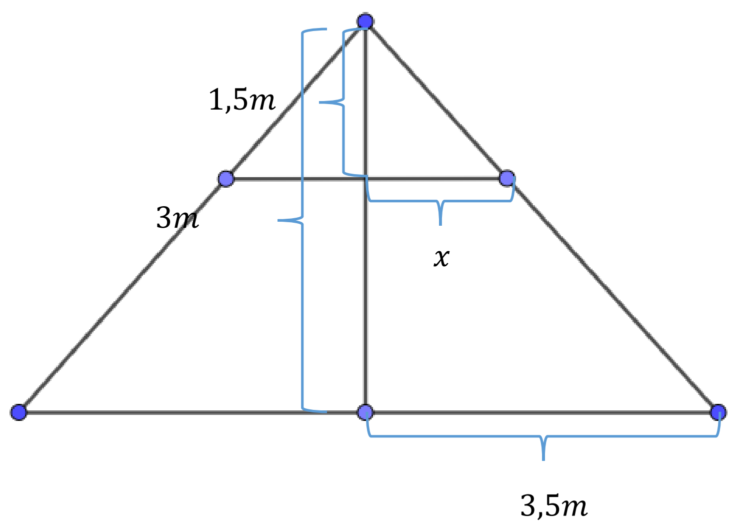
$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2.}$$

То је оно што смо и хтели да покажемо. Дакле, када посматрамо правоугли ΔODC чије су странице a, b и c видимо да за њих важи да је квадрат над хипотенузом једнак збиру квадрата над катетама, што је управо Питагорина теорема.

4. ПРИМЕНА ТАЛЕСОВЕ ТЕОРЕМЕ

У претходном делу рада видели смо примену Талесове теореме при подели дужи у задатој размери. У овом делу рада представићемо реалне примере за чије решавање је најелегантније решење управо Талесова теорема.

Пример 4.1. Коришћење Талесове теореме у грађевинским радовима. Претпоставимо да једна грађевинска фирма жели да направи објекат. Наравно, потребно је да објекат на свом крају садржи кров. Како би се направо кров потребно је да се греде ставе у одређен положај, тј. конфигурацију да би формирале троугласту структуру.



Дакле, са слике можемо да уочимо већу троугласту структуру. Оно што је неопходно израчунати јесте дужина потпорне греде.

Решење. Користећи Талесову теорему можемо конструисати пропорцију на следећи начин:

$$\frac{3}{3{,}5} = \frac{1{,}5}{x}$$

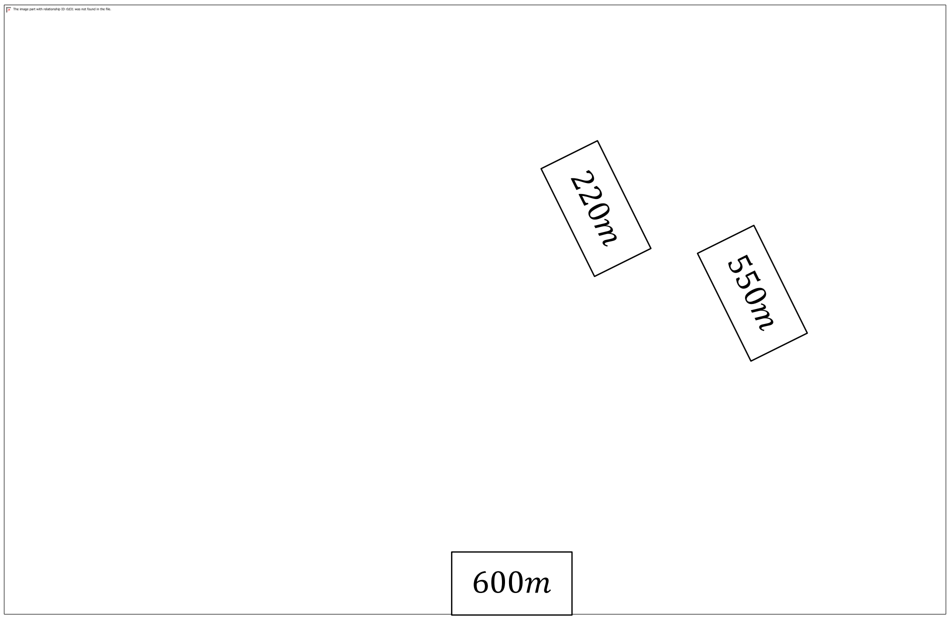
$$3x = 1{,}5 \cdot 3{,}5$$

$$3x = 5{,}25$$

$$x = 1{,}75.$$

С обзиром да смо израчунали да је половина потпорне греде дугачка 1,75 метара, то имплицира да је њена цела дужина 3,5 метара.

Пример 4.2. Коришћење Талесове теореме за одређивање дужине руте. Претпоставимо да инжењер гради пут кроз планину. Ако је земљиште на коме се налази планина раван, тада би инжењер изградио идеалан пут који је паралелан са земљом. Потребно је у наведеним условима израчунати колика ће бити дужина пута који пролази кроз планину.



Решење. Видимо да је дужина планине од једног њеног краја до другог 600 метара. Удаљеност од врха планине до једног њеног дна је 550 метара. Инжењер је проценио да би пут требало да се изгради 220 метара испод врха планине, при чему не зна колика би дужина пута ће бити ако се на 220 метара од врха гради пут. Да бисмо решили овај проблем користићемо Талесову теорему. Дакле:

$$\frac{550}{600} = \frac{220}{x}$$

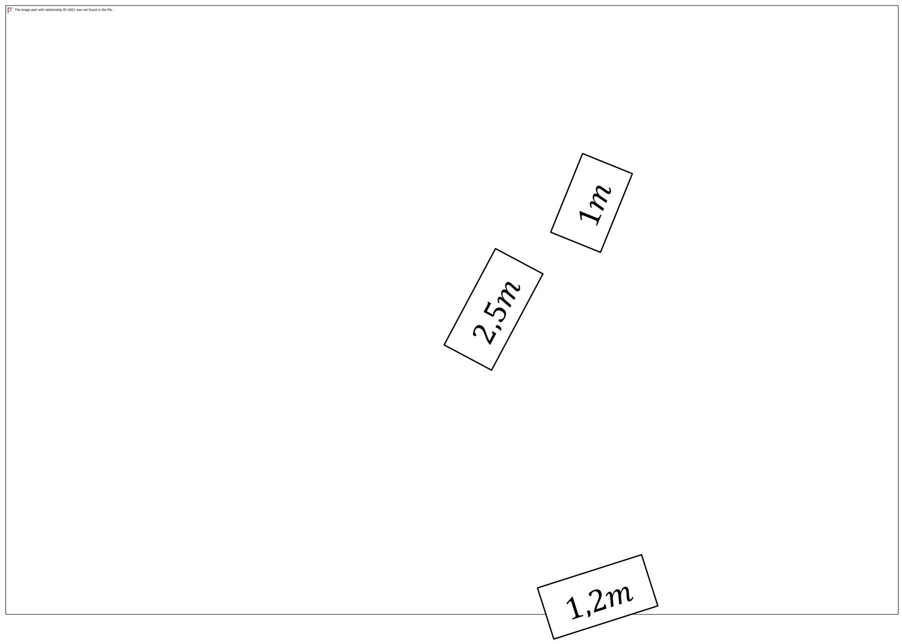
$$550x = 220 \cdot 600$$

$$x = \frac{220 \cdot 600}{550}$$

$$x = 240.$$

Дакле, у наведеним условима дужина пута који пролази кроз планину био би 220 метара.

Пример 4.3. Претпоставимо да су деца отишла на камповање где постављају шатор. Деца желе да поставе мрежу за чување њихових ствари попут флаша за воду, батеријских лампи итд. Деца су заборавила мрежу, па је потребно је конструисати димензије исте. Дакле, потребно је одредити димензије мреже како би деца могла да је направе.



Решење. Са слике можемо увидети да је дужина шатора од земље до централног стуба 1,2 метара, и да је дужина крила шатора од земље до врха централног стуба 2,5 метара. Ученици су одредили да желе да мрежа буде постављена 1 метар испод врха шатора. Користећи Талесову теорему одредићемо дужину мреже. Дакле:

$$\frac{2,5}{1,2} = \frac{1}{x}$$

$$2,5x = 1,2$$

$$x = \frac{1,2}{2,5} = 0,48.$$

Видимо да познавање Талесове теореме омогућава конструисање тродимензионалних структура као што су планински путеви, кровови и шатори. Разумевање ове теореме омогућава ученицима да уоче како се геометријски концепти могу користити изван учионице, и како се могу применити на сложеније идеје.

ЗАКЉУЧАК

Размишљајући о наслеђу Талесове теореме не можемо а да не приметимо како је она оставила дубок траг у историји математике и науке уопште. Њен утицај се протеже кроз векове, инспиришући генерације математичара, инжењера и научника да истражују, постављају нове проблеме и траже решења.

Талесова теорема нам пружа увид у хармонију и симетрију која лежи у темељима геометријских облика и односа. У данашњем технолошком добу, где око нас постоје све сложенији изазови и проблеми, ова теорема представља подсетник на способност раумевања и управљања управо тих, сложениијих изазова.

Кроз овај рад детаљно смо истражили Талесову теорему, кључно откриће у геометрији које носи дубоке последице и широку примену у различитим областима математике и науке. Историјски осврт на живот Талеса нас подсећа на богатство грчке математичке традиције и његов утицај на развој геометрије.

Доказ Талесове теореме пружа увид у сложеност и лепоту математичких доказа, истичући важност логичког размишљања и креативног приступа проблемима. Веза између Талесове теореме и Питагорине теореме открива дубље структуре геометријских односа, што додатно наглашава повезаност између различитих математичких концепата.

Коначно, анализа примене Талесове теореме у пракси показује њен значај у различитим областима, укључујући инжењеринг. Свеукупно, Талесова теорема представља темељ геометрије који нас инспирише да истражујемо, разумемо и примењујемо математику у свакодневном животу.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hahn R., *The Metaphysics of the Pythagorean Theorem, Thales, Pythagoras, Engineering, Diagrams and the Construction of Cosmos out of Right Triangles,* State University of New York, New York, 2017.

2. https://iep.utm.edu/thales/ (приступљено: 14.04.2024)

3. https://osnovimatematike.weebly.com/talesova-teorema.html (приступљено: 14.04.2024)

4. Ostermann A., Wanner G., *Geometry by Its History*, Springer, New York, 2010.

5. Saab A. M., *Implementing Dynamic Geometry Software – Based Constructivist Approach (DGS-CA) in Teaching Thales' Theorem*, School of Arts and Science, Lebanese American University, 2011.

6. Андрић В., Стефановић М., Голубовић Ђ., Ћировић В., *Математика 8 – уџбеник са збирком задатака за осми разред основне школе*, Математички клуб Диофант, Фондација Алек Кавчић, Београд, 2022.

7. Лопандић И. Д., *Математика за други разред средње школе*, Научна књига, Београд, 1979.

8. Михајловић В., *Геометрија за трећи разред гимназије природно-математичког смера,* Завод за уџбенике и наставна средства, Београд, 1971.