УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Александра Каруовић

ИНВЕРЗИВНЕ ТРАНСФОРМАЦИЈЕ РАВНИ

мастер рад

Београд, 2024.

Ментор:

др Мирослава Антић, ванредни професор
Универзитет у Београду, Математички факултет

Чланови комисије:

др Марек Светлик, доцент
Универзитет у Београду, Математички факултет

др Милош Ђорић, доцент
Универзитет у Београду, Математички факултет

Датум одбране: ______________________

Влади и мојој породици која је ово предуго чекала…

Наслов мастер рада: Инверзивне трансформације равни

Резиме: Рефлексије у односу на праве и инверзије у односу на кругове једне равни су конформна пресликавања која скуп свих правих којима је додата бесконачно далека тачка и кругова те равни сликају у себе. Група трансформација генерисана рефлексијама и инверзијама је група инверзивних трансформација. Алгебарски, инверзивне трансформације се, у комплексним координатама, представљају као хомографије (Мебијусове трансформације, тј. билинеарна пресликавања) и антихомографије.

У раду су представљене инверзивне трансформације равни и њихове особине и инваријанте. Уводимо појам инверзије у односу на круг проширене еуклидске равни и детаљно доказујемо њене особине. Затим уводимо појам инверзивних трансформација и анализирамо њихове особине и представљање у комплексним координатама. Показујемо да је група инверзивних трансформација истоветна са групом хомографија и антихомографија, а упознаћемо се и са једноставним типовима Мебијусових трансформација као и њиховом класификацијом на основу фиксних тачака. На крају доказујемо Фундаменталну теорему о кружним пресликавањима.

Слике у раду направљене су у геометријском алату *GCLC*.

Кључне речи: инверзија у односу на круг, Мебијусова трансформација, Фундаментална теорема

Садржај

Глава 1

Увод

Геометрија је одувек била једно од кључних подручја математичког истраживања, са посебним нагласком на проучавање трансформација које чувају одређене геометријске особине. Међу најзанимљивијим и најмоћнијим класама трансформација су инверзивне трансформације равни, које замењују уобичајене појмове удаљености и праволинијске повезаности са новим, софистициранијим односима. Ове трансформације омогућавају прелаз између различитих геометријских конфигурација, чувајући одређене особине као што су углови и кружне структуре.

Инверзија у односу на круг, као основна операција инверзивних трансформација, заузима централно место у геометрији због својих изузетних особина, као што је трансформација круга у круг или праву, и очување углова. Комбиновањем инверзије са другим основним трансформацијама, као што су транслација, ротација и хомотетија, долазимо до сложених трансформација познатих као Мебијусове трансформације. Ове трансформације, дефинисане на проширеној комплексној равни, имају широку примену у различитим областима математике, укључујући теорију функција, комплексну анализу и диференцијалну геометрију.

Један од кључних резултата повезаних са Мебијусовим трансформацијама (хомографијама) и антихомографијама је Фундаментална теорема која показује да су ове трансформације једине које сликају скуп свих правих којима је додата бесконачно далека тачка и кругова еуклидске равни на себе.

Глава 2

Инверзивна геометрија

2.1 Инверзија у односу на круг у еуклидској равни

Нека је $k(O, r)$ круг еуклидске равни $\mathbb{E}^2$.

Дефиниција 2.1.1. Инверзија у односу на круг k је пресликавање

$$\psi_k : \mathbb{E}^2 \setminus \{O\} \to \mathbb{E}^2 \setminus \{O\}$$

које произвољну тачку P слика у тачку P' полуправе OP, такву да је

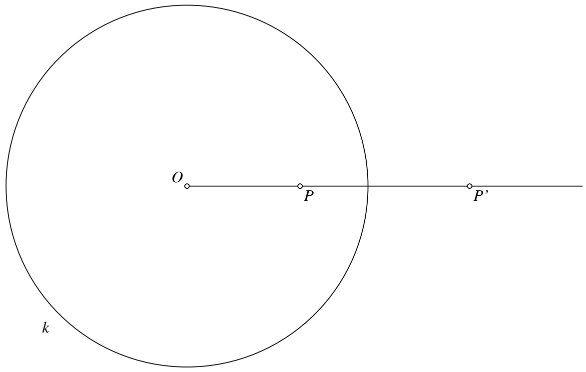
$$OP \cdot OP' = r^2.$$

Тачка O назива се **центар инверзије**.

Нека је $O(0,0)$ координатни почетак. Тада се тачка $P(x_1, x_2)$ инверзијом пресликава у тачку P', односно у стандардним еуклидским координатама формула инверзије је дата са

$$\psi_k(x_1, x_2) = \left(\frac{r^2 x_1}{{x_1}^2 + {x_2}^2}, \frac{r^2 x_2}{{x_1}^2 + {x_2}^2} \right).$$

Из дефиниције директно следи да је инверзија у односу на круг бијективно пресликавање. Како је $\psi_k(P') = P$ инверзија је и инволутивно пресликавање јер се применом инверзије два пута заиста враћамо на почетну тачку и важи $\psi_k^2 = \epsilon$, где са ϵ означавамо коинциденцију, тј. идентичко пресликавање.



Слика 2.1: Пример инверзије у односу на круг

Нека је тачка $P \in \mathbb{E}^2 \setminus \{O\}$ произвољна. Из дефиниције видимо да важи $OP \cdot OP' = r^2$, па следи да је $OP < r$ ако и само ако $OP' > r$ односно тачке из унутрашњости круга k се инверзијом сликају у тачке које припадају спољашњости круга k. Важи и обрнуто, $OP > r$ ако и само ако $OP' < r$ па се и тачке из спољашњости круга сликају у тачке унутрашњости круга. Ако је пак $OP = r$ тада је и $OP' = r$, следи да је $P = P'$ те је тачка P инваријантна за пресликавање ψ_k односно слика се у саму себе. Дакле важи следеће тврђење.

Тврђење 2.1.1. *Једине инваријантне тачке инверзије у односу на круг k су тачке круга k.*

Еуклидској равни можемо придружити једну, **бесконачно далеку** тачку ∞ и тај скуп тачака називамо **проширена еуклидска раван**. Како смо пресликавање ψ_k дефинисали на скупу $\mathbb{E}^2 \setminus \{O\}$ сада можемо додефинисати пресликавање у тачкама O и ∞ са:

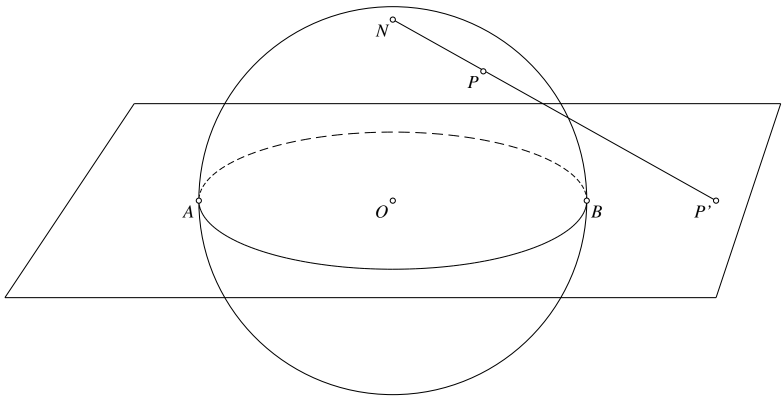
$$\psi_k(O) = \infty,$$

$$\psi_k(\infty) = O.$$

У проширеној еуклидској равни, сматрамо да тачка ∞ припада свим правама.

2.2 Стереографска пројекција

Нека је $\mathbb{S}^2 = \{(x_1, x_2, x_3)|{x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 = 1 \wedge (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3\}$ јединична сфера еуклидског простора. Између тачака сфере $\mathbb{S}^2$ и тачака проширене еуклидске равни $x_3 = 0$ постоји узајамно једнозначна кореспонденција која се назива **стереографска пројекција**. Нека је „северни пол" сфере тачка $N(0, 0, 1)$. Ако је $P \in \mathbb{S}^2, P \neq N$, тада права PN сече раван у коначној тачки P' и тада дефинишемо да је $\pi(P) = P'$. Тачки $P = N$ придружујемо бесконачно далеку тачку проширене еуклидске равни.



Слика 2.2: Стереографска пројекција

Ако је $\pi : \mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{E}^2 \cup \{\infty\}$ стереографска пројекција, а (x_1, x_2, x_3) координате тачке P сфере, тада су координате тачке P' дате са

$$\pi(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} (\frac{x_1}{1-x_3}, \frac{x_2}{1-x_3}), & x_3 \neq 0 \\ \infty, & x_3 = 1. \end{cases}$$

Инверзно пресликавање је дато са

$$\pi^{-1}(x_1, x_2) = \left(\frac{2x_1}{{x_1}^2 + {x_2}^2 + 1}, \frac{2x_2}{{x_1}^2 + {x_2}^2 + 1}, \frac{{x_1}^2 + {x_2}^2 - 1}{{x_1}^2 + {x_2}^2 + 1} \right),$$

$$\pi^{-1}(\infty) = (0, 0, 1).$$

Произвољни круг k сфере $\mathbb{S}^2$ је пресек те сфере и неке равни $\alpha : ax_1+bx_2+cx_3+d=0$. Његову слику у стереографској пројекцији налазимо на следећи начин. Ако су (x_1, x_2) координате еуклидске равни, тада тачка припада слици круга k ако и само ако је $\pi^{-1}(x_1, x_2) \in \alpha$ односно ако и само ако је

$$a\frac{2x_1}{{x_1}^2+{x_2}^2+1}+b\frac{2x_2}{{x_1}^2+{x_2}^2+1}+c\frac{{x_1}^2+{x_2}^2-1}{{x_1}^2+{x_2}^2+1}+d=0.$$

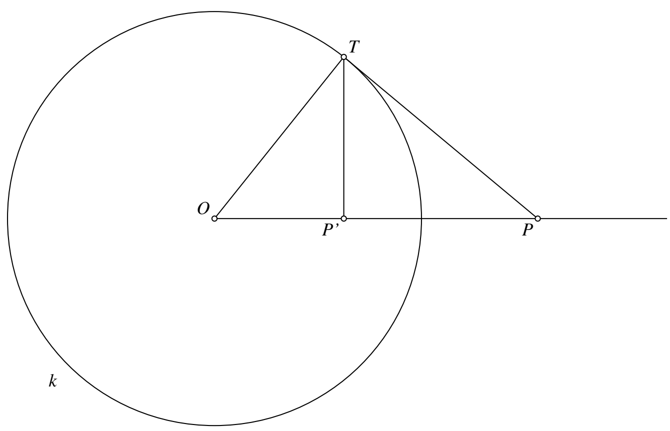
Еквивалентно је

$$(c+d)({x_1}^2+{x_2}^2)+2ax_1+2bx_2+(d-c)=0,$$

па је у питању круг за $c+d \neq 0$ или права за $c+d=0$. Услов $c+d=0$ је еквивалентан услову $N \in \alpha$, па видимо да се у праве (проширене тачком ∞) сликају кругови који садрже тачку N.

У проширеној еуклидској равни, сада и праву можемо сматрати кругом који при том мора да садржи бесконачно далеку тачку, а праве и кругове заједно називамо **уопштени кругови**.

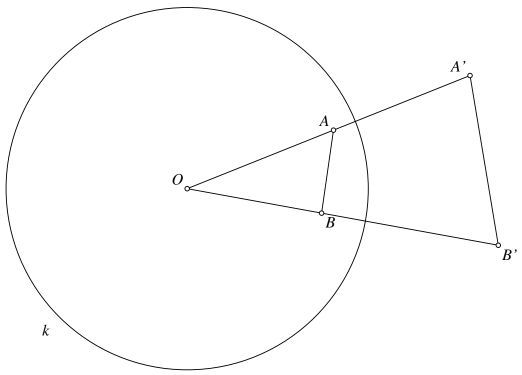
Може се показати да стреографска пројекција „чува углове”. Ако се неке две криве на сфери секу под углом ϕ, тада се и њихове слике у еуклидској равни секу под истим углом ϕ.



Слика 2.3: Конструкција слике у инверзији

Пронађимо слику тачке $P \in \mathbb{E}^2 \setminus \{O\}$ при инверзији ψ_k. Претпоставимо да P припада спољашњости круга k. Нека је додирна тачка круга k и једне тангенте из тачке P на круг k означена са T, а подножје нормале из те тачке T на праву OP означимо са P'.

Посматрајмо троуглове $OP'T$ и OTP. Како се тачка P' налази на полуправи OP ова два троугла имају једнаке углове, тј $\angle P'OT = \angle POT$. Такође, по конструкцији оба троугла имају праве углове и то $\angle TP'O = \angle OTP$. Можемо да закључимо да су ова два троугла слична. Јасно је да је $OP \cdot OP' = OT^2 = r^2$, односно $\psi_k(P) = P'$. А важи и обрнуто $\psi_k(P') = P$ па на сличан начин можемо за неку тачку унутрашњости круга k конструисати њену слику у инверзији.



Слика 2.4: $\triangle OAB \sim \triangle OB'A'$

Нека је k круг са центром O, и нека су тачке A и B у унутрашњости круга, такве да су тачке O, A, B неколинеарне. Посматрамо троугао OAB и тачке $\psi_k(A) = A', \psi_k(B) = B'$. Како су ово слике тачака у инверзији, онда је по дефиницији $OA \cdot OA' = r^2$ и $OB \cdot OB' = r^2$, па је $OA' = \dfrac{r^2}{OA}$ и $OB' = \dfrac{r^2}{OB}$. Јасно је да је $\dfrac{OA'}{OB'} = \dfrac{OB}{OA}$ и $\angle AOB = \angle A'OB'$, па закључујемо да су троуглови OAB и $OB'A'$ слични, зато је

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{OB'}{OA} = \frac{r^2}{OB \cdot OA}.$$

Лако се може доказати да ово важи и ако су O, A, B колинеарне тачке.

Дефиниција 2.2.1. Нека су A, B, C, D четири произвољне разне тачке (не морају бити колинеарне или концикличне). Тада број $\frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB}$ називамо **дворазмером** те четири тачке и означавамо са $[A, B; C, D]$.

Нека су A', B', C', D' редом слике тачака A, B, C, D у инверзији ψ_k, тада је

$$[A', B'; C', D'] = \frac{A'C'}{C'B'} : \frac{A'D'}{D'B'} = \frac{\frac{r^2 AC}{OC \cdot OA}}{\frac{r^2 CB}{OB \cdot OC}} : \frac{\frac{r^2 AD}{OD \cdot OA}}{\frac{r^2 DB}{OB \cdot OD}} = [A, B; C, D],$$

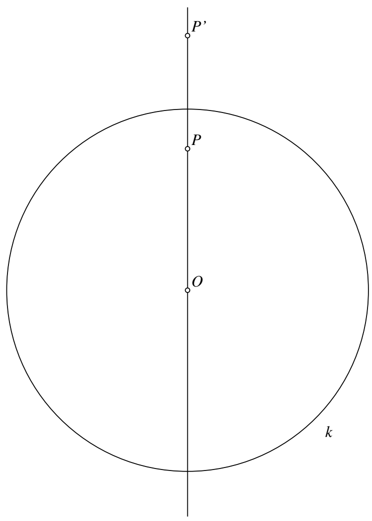
односно дворазмера произвољних тачака једнака је дворазмери њихових слика у инверзији. Коришћењем граничних вредности можемо проширити дефиницију дворазмере тако да једнакост важи и у случају тачака O и ∞. Дакле, показали смо да важи следеће тврђење.

Тврђење 2.2.1. *Инверзија у односу на круг „чува” дворазмеру.*

Теорема 2.2.1. *Нека је p права равни $\mathbb{E}^2$. Тада важи:*

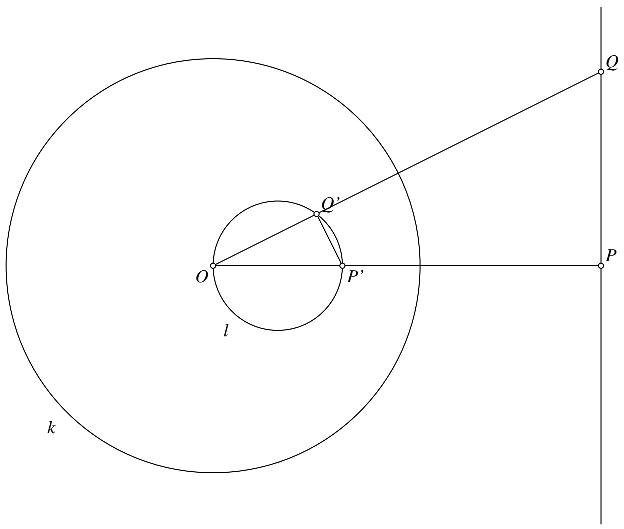
а) Ако тачка O припада правој p онда $\psi_k(p \setminus \{O\}) = p \setminus \{O\}$.

б) Ако тачка O не припада правој p тада постоји круг l те равни који садржи тачку O, такав да је $\psi_k(p) = l \setminus \{O\}$.



Слика 2.5: Слика праве у инверзији за случај $O \in p$

Доказ. а) Нека је P произвољна тачка праве p. Како и тачка O припада правој p, а по дефиницији инверзије тачка P' је тачка полуправе OP, ове три тачке су колинеарне, односно и тачка P' припада правој p. Због произвољности тачке P, с обзиром да је ψ_k инволуција важи и скуповна једнакост $\psi_k(p \setminus \{O\}) = p \setminus \{O\}$.



Слика 2.6: Слика праве у инверзији за случај $O \notin p$

б) Означимо са P подножје нормале из тачке O на праву p, а са P' инверзну тачку тачке P. Нека је l круг чији је пречник OP', а тачка Q произвољна тачка са праве p различита од P и Q' њена слика у инверзији ψ_k. Како је $\psi_k(P) = P'$ и $\psi_k(Q) = Q'$, тада из $\dfrac{OP'}{OQ'} = \dfrac{OQ}{OP}$ закључујемо да су троуглови OPQ и $OQ'P'$ слични, па је и $\angle OQ'P' = \angle OPQ$. Како је $\angle OQ'P'$ прав, тачка Q' припада кругу пречника OP', односно кругу l. Важи и обрнуто, ако је тачка Q' тачка круга l различита од тачке O, њена слика у инверзији Q припада полуправој OQ' и важи $\angle OQ'P' = \angle OPQ$, па тачка Q припада правој p због конструкције тачке P. Дакле, скуповна једнакост $\psi_k(p) = l \setminus \{O\}$ важи.

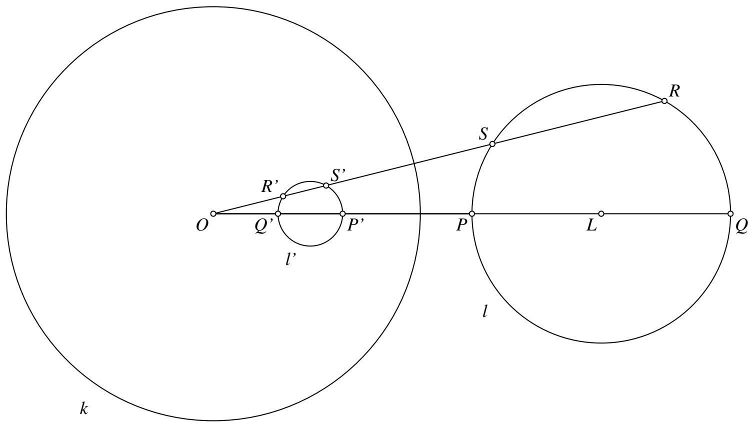
■

Теорема 2.2.2. *Нека је l круг̄ еуклидске равни. Тада важи:*

а) Ако је $O \in l$, онда је $\psi_k(l \setminus \{O\})$ нека ӣрава p ӣе равни која, ӣри ӣом не садржи ӣачку O.

б) Ако l не садржи ӣачку O ӣада је $\psi_k(l) = l'$ ӣакође круг̄ који не садржи ӣачку O. При ӣом, ӣосӣоји и хомоӣеӣија са ценӣром у O којом се l слика у l'.

Доказ. а) С обзиром да је ψ_k инволуција, тврђење директно следи из претходне теореме под б).



Слика 2.7: Слика круга који не садржи тачку O

б) Нека је тачка L центар круга l, а P и Q тачке у којима права OL сече l. Нека је R произвољна тачка круга l. Права OR сече круг l још у тачки S. Посебно, ако је OR тангента на l, тада је $R = S$. Нека је $\psi_k(R) = R'$. При том, због потенције тачке O у односу на круг l следи да је $OR \cdot OS = OP \cdot OQ = const$. Како је и $OR \cdot OR' = r^2$, из претходне две једнакости добијамо да је $OR' = OS \cdot \dfrac{r^2}{OP \cdot OQ}$ где је $\dfrac{r^2}{OP \cdot OQ} = \text{const}$. Зато тачка R' припада кругу l', слици круга l у хомотетији са центром у тачки O и коефицијентом $\frac{r^2}{OP \cdot OQ}$. Како је ψ_k инволуција, следи и да важи скуповна једнакост $\psi_k(l) = l'$.

■

Овом теоремом смо показали да се праве и кругови, односно уопштени кругови проширене еуклидске равни, сликају у уопштене кругове.

Тврђење 2.2.2. *Композиција две инверзије са истим центром је хомотетија.*

Доказ. Нека су $k_1(O, r_1)$ и $k_2(O, r_2)$ концентрични кругови и P произвољна тачка. Ако је $\psi_{k_1}(P) = P_1$ и $\psi_{k_2}(P_1) = P'$, тада је $OP \cdot OP_1 = r_1^2$ и $OP' \cdot OP_1 = r_2^2$, па је

$$\frac{OP'}{OP} = \frac{r_2^2}{r_1^2}.$$

Зато је $P' = H_{O, \frac{r_2^2}{r_1^2}}(P)$, па је $H_{O, \frac{r_2^2}{r_1^2}} = \psi_{k_2} \circ \psi_{k_1}$. ■

Тврђење 2.2.3. *Нека тачка P не припада кругу k и нека је $\psi_k(P) = P'$. Ако круг l садржи тачке P и P' онда су кругови k и l ортогонални.*

Доказ. Нека је k круг полупречника r и тачка O његов центар. Тачка P је произвољна тачка ван круга k и P' њена слика у инверзији ψ_k, па важи $OP \cdot OP' = r^2$.

Нека је l круг са центром S који садржи тачке P и P', а тачка T додирна тачка тангенте из тачке O на круг l. Потенција тачке O у односу на круг l је $OP \cdot OP' = OT^2$. Из ове две једнакости закључујемо да је $OT = r$ па тачка T припада и кругу k. Како се тангенте на кругове k и l секу под правим углом у тачки T, ова два круга су ортогонална.

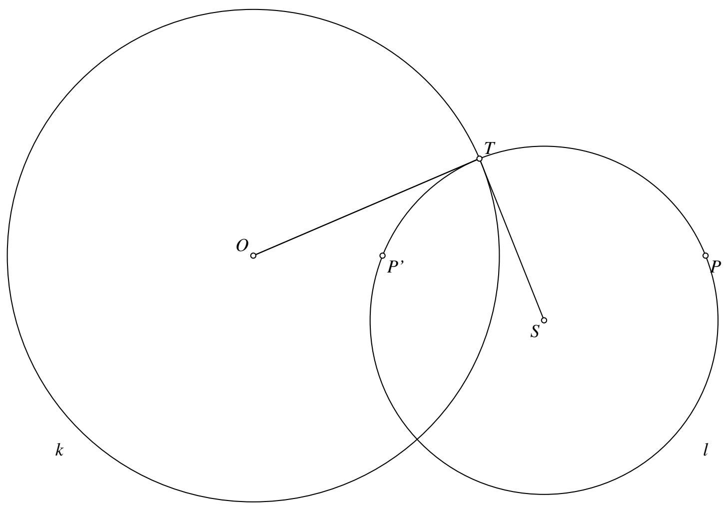
■

Тврђење 2.2.4. *Нека су k и l два круга еуклидске равни. Тада је $\psi_k(l) = l$ ако и само ако су кругови k и l ортогонални или $k = l$.*

Доказ. Претпоставимо да су k и l два различита круга. Нека тачка X припада кругу l и не припада кругу k и нека је X' њена слика у инверзији у односу на k.

Ако је $\psi_k(l) = l$ онда тачка X' припада кругу l па су на основу претходног тврђења кругови k и l ортогонални.

Обрнуто, ако су кругови k и l ортогонални, онда је T заједничка тачка тих кругова и она је тачка додира тангенте из тачке O на круг l, па је потенција тачке O у односу на круг l једнака $OT^2 = r^2$. Ако је X'' друга пресечна тачка



Слика 2.8: Ортогонални кругови

праве OX и круга l, тада је потенција $OX \cdot OX'' = r^2$, а како је X' слика тачке X у инверзији важи и $OX \cdot OX' = r^2$. Зато је $X' = X''$ па се круг l слика у себе.

■

Теорема 2.2.3. *Нека су l_1 и l_2 уопштени кругови еуклидске равни. Њихове слике l_1' и l_2' у инверзији ψ_k се секу под истим углом као l_1 и l_2 али супротне оријентације.*

Доказ. Ако је ∞ једина заједничка тачка два уопштена круга, тада су l_1 и l_2 праве и то паралелне, па се оне „додирују” у тачки ∞ односно секу се под углом нула. Њихове слике су кругови који садрже тачку O, центар инверзије, а њихови пречници чија је једна крајња тачка O припадају истој правој, јер је O једина заједничка тачка њихових слика. Зато се l_1 и l_2 додирују у O. Обрнуто, ако је O једина заједничка тачка, l_1 и l_2 су кругови који се додирују у O, а сликају се у паралелне праве.

Слично, ако се два уопштена круга додирују, сликају се у уопштене кругове који се додирују, па за њих тврдња важи.

Претпоставимо сада да l_1 и l_2 имају заједничку коначну тачку $X \neq O$ и нека је X' њена слика у инверзији ψ_k. Нека су t_1 и t_2 тангенте на l_1 и l_2 у X.

Нека су k_1 и k_2 кругови ортогонални на k, а редом тангентни на t_1 и t_2 у X.

Оријентисани угао између l_1 и l_2 у X је угао између тангенти t_1 и t_2, односно између k_1 и k_2 у X. Инверзијом ψ_k кругови k_1 и k_2 се сликају у себе, t_1 и t_2 у уопштене кругове који додирују k_1 и k_2 у X', а одговарајући угао, у угао у тачки $X' \in k_1 \cap k_2$, између k_1 и k_2, који је подударан, али супротне оријентације у односу на угао у тачки X.

■

2.3 Инверзивне трансформације равни

Између тачака еуклидске равни $\mathbb{E}^2$ и скупа комплексних бројева $\mathbb{C}$ постоји једнозначна кореспонденција, односно тачки (x_1, x_2) еуклидске равни одговара комплексни број $z = x_1 + ix_2$, и кажемо да је z комплексна координата дате тачке. Растојање између две тачке, чије су координате z_1 и z_2 једнако је $|z_1 - z_2|$. Једначина праве која пролази кроз дату тачку z_0 и за дати вектор правца v у комплексним координатама може се представити у облику $z = z_0 + tv$ (z представља тачку на правој, а t реалан параметар који одређује положај тачке z на правој). Круг полупречника r чији је центар C дат координатом $c = a + ib$ дат је једначином $|z - c| = r$.

Рефлексија у односу на праву p која садржи координатни почетак и одређује угао α са x_1 осом је трансформација $z \mapsto z'$ која слика тачку $z = |z|e^{i\beta}$ у тачку $z' = |z|e^{i(2\alpha-\beta)} = e^{2i\alpha}\overline{z}$. Транслација за вектор $b = b_1 + ib_2$ је трансформација $z \mapsto z + b$ која слика тачку (x_1, x_2) у тачку $(x_1 + b_1, x_2 + b_2)$.

Тврђење 2.3.1. *Нека је $k(S, r)$ произвољни круг еуклидске равни са центром $c = a + ib$ и полупречником r. Тада је инверзија у односу на круг k у комплексним координатама дата са:*

$$\psi_k(z) = \frac{r^2}{\overline{z - c}} + c.$$

Доказ. Нека је $k(S, r)$ круг са центром $S = O$. У реалним координатама инверзија у односу на круг k је дата формулом $\psi_k(x_1, x_2) = (\frac{r^2 x_1}{{x_1}^2 + {x_2}^2}, \frac{r^2 x_2}{{x_1}^2 + {x_2}^2})$. Како је $c = 0$, ова трансформација у комплексним координатама је $\psi_k(z) = \frac{r^2}{\overline{z}}$.

Ако тачка S, чија је координата c различита од координатног почетка, тада се транслацијом $\tau(z) = z - c$ дати круг k слика у круг k_1 са центром у координатном почетку. Ако су w и w' тачке инверзне у односу на круг k, тј $\psi_k(w) = w'$, оне се сликају у тачке w_1 и ${w_1}'$ које су инверзне у односу на круг k_1, $\psi_{k_1}(w_1) = w_1'$. Зато важи $\psi_k = \tau^{-1} \circ \psi_{k_1} \circ \tau$ па добијамо тражену формулу. ∎

Тврђење 2.3.2. *Свака изометрија еуклидске равни $\mathcal{I}$ се може записати као*

$$\mathcal{I}(z) = az + b,$$

или

$$\mathcal{I}(z) = a\overline{z} + b,$$

где су $a, b \in \mathbb{C}$ и $|a| = 1$. Обратно, свака трансформација овог облика је изометрија.

Доказ. Докажимо прво да су овако задате трансформације изометрије. Ако се тачке са комплексним координатама z_1, z_2 сликају у z_1' и z_2' трансформацијом $\mathcal{I}$, тада је растојање између слика $|z_1' - z_2'| = |a||z_1 - z_2| = |z_1 - z_2|$, па су дате трансформације изометрије.

Специјално $z \mapsto \overline{z}$ слика тачке $(x_1, x_2) \mapsto (x_1, -x_2)$, па је у питању осна рефлексија у односу на x_1-осу, коју ћемо означавати са S_p.

Нека је $\mathcal{I}$ произвољна изометрија. Означимо $\mathcal{I}(0) = b$ и $\mathcal{I}(1) = b + a$. Тада је $|a| = 1$. Нека је $\mathcal{J}(z) = az + b$, изометрија. Тада је $\mathcal{J}(0) = a$, $\mathcal{J}(1) = b + a$, те су тачке 0 и 1 инваријантне у изометрији $\mathcal{J}^{-1} \circ \mathcal{I}$. Зато, ова композиција може бити или коинциденција ϵ, када је $\mathcal{I} = \mathcal{J}$ или осна рефлексија S_p, када је $\mathcal{I} = \mathcal{J} \circ S_p$. ■

Хомотетија $H_{O,k}$ за $k \in \mathbb{R}, k \neq 0$ је трансформација $z \mapsto kz$ која (x_1, x_2) слика у (kx_1, kx_2).

Свака сличност коефицијента k се може представити као композиција хомотетије са произвољним центром и коефицијентом λ, таквим да је $|\lambda| = k$, и неке изометрије. Зато важи следеће тврђење.

Тврђење 2.3.3. *Свака сличност еуклидске равни $\mathcal{S}$ може се записати као*

$$\mathcal{S}(z) = az + b, \quad \text{или} \quad \mathcal{S}(z) = a\overline{z} + b,$$

где су $a, b \in \mathbb{C}$ и где је $a \neq 0$.

С обзиром да еуклидске праве са додатом бесконачно далеком тачком сматрамо уопштеним круговима, рефлексије у односу на праве и инверзије у односу на кругове сматраћемо **уопштеним инверзијама.**

Дефиниција 2.3.1. Инверзивна трансформација је трансформација проширене еуклидске равни која је композиција коначног броја уопштених инверзија.

Свака изометрија је композиција рефлексија па је и инверзивна трансформација. Хомотетију можемо представити као композицију две инверзије па је и она инверзивна трансформација. Свака сличност се може представити као композиција произвољне хомотетије и неке изометрије, те је и инверзивна трансформација. Директно следи наредно тврђење.

Тврђење 2.3.4. *Скуп свих инверзивних трансформација проширене еуклидске равни чини групу. Група сличности је подгрупа те групе.*

Мебијусове трансформације равни

Дефиниција 2.3.2. Мебијусова трансформација је трансформација проширене еуклидске равни дата формулом

$$Z = m(z) = \frac{az+b}{cz+d},$$

где су $a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad-bc \neq 0$. Ова трансформација назива се и **хомографија**.

Пресликавање $z \mapsto Z$, које је композиција Мебијусове трансформације и рефлексије у односу на x_1 осу $m \circ S_p$,

$$Z = m(\bar{z}) = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d},$$

где су $a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad - bc \neq 0$ назива се **антихомографија**.

Скуп свих Мебијусових трансформација, односно хомографија означаваћемо са M_1, а скуп свих антихомографија са M_2.

Елементи матрице

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

су комплексни бројеви a, b, c, d. Њена детерминанта

$$|M| = \delta = ad - bc$$

није нула, јер ако је $|M| = 0$, онда је десна страна израза $m(z)$ константна.

Матрица очигледно дефинише Мебијусову трансформацију, док трансформација дефинише матрицу само до константног фактора. Наиме, матрице qM са било којим комплексним $q \neq 0$ дефинишу једну те исту Мебијусову трансформацију, тј. две сразмерне матрице одређују исто пресликавање.

Тврђење 2.3.5. *Скуп свих Мебијусових трансформација M_1 чини групу.*

Доказ. Директном провером добијамо да је композиција две Мебијусове трансформације $m_2 \circ m_1$ са матрицама M_1 и M_2, поново Мебијусовава трансформација са матрицом $M_2 \circ M_1$, а да је инверз m_1^{-1} Мебијусова трансформација којој одговара матрица M_1^{-1}. ∎

Тврђење 2.3.6. *Композиција хомографије и антихомографије је антихомографија, а композиција две антихомографије је хомографија.*

Доказ. Свака антихомографија је дата са $z \mapsto m(\overline{z})$, где је m хомографија. Ако је M матрица хомографије m, тада је $z \mapsto \overline{m(\overline{z})} = \overline{m}(z)$ хомографија са матрицом $\overline{M}$. Нека су m_1 и m_2 две хомографије. Тада су композиције хомографије $z \mapsto m_2(z)$ и антихомографије $z \mapsto m_1(\overline{z})$ дате са

$$z \mapsto m_2(m_1(\overline{z})) = (m_2 \circ m_1)(\overline{z}),$$

$$z \mapsto m_1(\overline{m_2(z)}) = m_1(\overline{m_2}(\overline{z})) = (m_1 \circ \overline{m_2})(\overline{z}),$$

те су у питању антихомографије. Композиција две антихомографије $z \mapsto m_2(\overline{z})$ и $z \mapsto m_1(\overline{z})$ дата је са

$$z \mapsto m_2(\overline{m_1(\overline{z})}) = m_2(\overline{m_1}(z)) = (m_2 \circ \overline{m_1})(z),$$

па је у питању хомографија.

■

Једноставни типови Мебијусових трансформација

Наведимо неке од специфичних типова Мебијусових трансформација.

Идентитет: Идентичко пресликавање је у комплексним координатама дато формулом:

$$Z = z.$$

Матрица пресликавања је тада

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Код ове специјалне врсте Мебијусових трансформација матрица пресликавања је јединична матрица.

Транслација: Транслација је у комплексним координатама дата формулом:

$$Z = z + b. \tag{2.1}$$

Матрица пресликавања је тада

$$T_b = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b \neq 0, b \in \mathbb{C}.$$

Свака права паралелна са вектором транслације $\overrightarrow{Ob}$ остаје инваријантна (или се трансформише у саму себе) помоћу транслације $Z = z + b$. Праве сваког другог прамена паралелних правих се размењују; посебно, ово важи и за прамен правих које су нормалне на $\overrightarrow{Ob}$. Из једначине (2.1) директно следи да је $z = \infty$ је једина фиксна тачка транслације.

Транслација T_b је производ (тј. резултат) композиције две уопштене инверзије. Транслација је композиција две рефлексије, у односу на праве које су нормалне на вектор транслације $\overrightarrow{Ob}$. За прву инверзију узимамо праву кроз O, дату једначином $\overline{b}z + b\overline{z} = 0$. Као одговарајућу уопштену инверзију имамо:

$$z^* = -\frac{b}{\overline{b}}\overline{z}.$$

Као други уопштени круг бирамо праву $\bar{b}z + b\bar{z} = b\bar{b}$ која има растојање $\frac{1}{2}|b|$ од O, мерено у правцу $\overrightarrow{Ob}$. Одговарајућа инверзија пресликава z^* у:

$$Z = -\frac{b\overline{z^*} - b\bar{b}}{\bar{b}} = \frac{\bar{b}z + b\bar{b}}{\bar{b}} = z + b.$$

Ротација око O за угао α: Ротација око координатног почетка за угао α дата је формулом:

$$Z = e^{i\alpha}z. \tag{2.2}$$

Матрица пресликавања је тада

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Сваки круг са центром у O је инваријантан. Размењују се кругови из прамена који је нормалан на прамен тих концентричних кругова, односно прамен свих правих које пролазе кроз O. Из једначине (2.2) следи да су 0 и ∞ једине фиксне тачке. Свака ротација R_α је производ две уопштене инверзије.

За осу прве уопштене инверзије бирамо реалну осу: $iz - i\bar{z} = 0$. Дакле, $z^* = \bar{z}$. Као други уопштени круг узимамо праву кроз O која одређује угао $\frac{\alpha}{2}$ са реалном осом:

$$e^{-i\frac{\alpha}{2}}z - ie^{i\frac{\alpha}{2}}\bar{z} = 0.$$

Друга инверзија преноси z^* у $Z = (e^{i\frac{\alpha}{2}}/e^{-i\frac{\alpha}{2}})\overline{z^*} = e^{i\alpha}z$.

Хомотетија са центром у O и коефицијентом $\rho > 0$: Хомотетија проширене равни са центром у координатном почетку, и коефицијентом ρ, дата је формулом:

$$Z = \rho z.$$

Матрица пресликавања је тада

$$H_{O,\rho} = \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Свака права кроз O је инваријантна. Сви кругови са центром у O се размењују. Фиксне тачке су поново O и ∞. Свака хомотетија $H_{O,\rho}$ је производ две инверзије.

Као први фундаментални круг узимамо јединични круг око O:

$$z^* = \frac{1}{\overline{z}}.$$

За другу инверзију посматрамо круг полупречника $\sqrt{\rho}$ око O; онда:

$$Z = \frac{\rho}{\overline{z^*}} = \rho z.$$

Реципрочност: Следеће пресликавање називамо реципрочност и његова формула је:

$$Z = \tfrac{1}{z}. \tag{2.3}$$

Матрица пресликавања је тада

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Можемо да представимо реципрочност као композицију рефлексије у односу на x осу и инверзије у односу на јединични круг са центром у O.

Тврђење 2.3.7. *Трансформација проширене еуклидске равни је инверзивна ако и само ако је хомографија или антихомографија.*

Доказ. Покажимо да су Мебијусове трансформације инверзивне. Ако је $c = 0$, а самим тим $ad \neq 0$, трансформација је композиција изометрије и хомотетије $H_{O,|a|}$, па је инверзивно пресликавање.

Нека је $c \neq 0$. Тада је:

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} = \frac{\frac{a}{c}(cz+d)+b-\frac{a}{c}d}{cz+d} = \frac{b-\frac{a}{c}d}{c}\frac{1}{z+\frac{d}{c}} + \frac{a}{c}$$

па добијамо композицију инверзних пресликавања.

Како је свака антихомографија композиција хомографије и рефлексије онда је и она инверзивно пресликавање. Покажимо сада обрнуто тврђење, односно да је свака инверзивна трансформација хомографија или антихомографија. Изометрије добијамо за $c = 0$ и $|a| = 1$.

Инверзија у односу на круг $k(S,r)$ где је комплексна координата тачке S дата са $c = a + ib$ је:

$$\psi_k(z) = \frac{r^2}{\overline{\overline{z-c}}} + c = \frac{c\overline{z} + (r^2 - \overline{c}c)}{\overline{z} - \overline{c}},$$

па је ψ_k антихомографија. С обзиром да свако инверзивно пресликавање добијамо као композицију инверзија и рефлексија, а унија Мебијусових трансформација и антихомографија је затворена за композиције, добијамо да важи тврђење.

■

Свака инверзија у односу на круг је антихомографија, као и рефлексије у односу на праве које садрже координатни почетак. Ако права r не садржи координатни почетак, постоји транслација τ која је слика у праву q кроз O. Тада је $S_r = \tau \circ S \circ \tau^{-1}$ па је свака рефлексија антихомографија.

Свака Мебијусова трансформација је композиција парног броја уопштених инверзија и називамо је **директна инверзивна трансформација**. Свака антихомографија је композиција непарног броја уопштених инверзија и називамо је **индиректна инверзивна трансформација**.

С обзиром на особине осних рефлексија и инверзија важи следеће тврђење.

Тврђење 2.3.8.

а) *Инверзивна пресликавања сликају уопштене кругове у уопштене кругове.*

б) *Инверзивна пресликавања чувају двоfразмеру.*

в) *Две криве које се секу пресликавају се инверзивним пресликавањем у криве које се секу под истим углом. При том, директне трансформације чувају оријентацију углова, а индиректне мењају.*

Класификација на основу фиксних тачака

Сада ћемо дати одговор на питање како се матрица M Мебијусове трансформације $Z = M(z)$ мења ако се променљиве z, Z истовремено замене новим променљивама:

$$z^* = N(z), \quad Z^* = N(Z), \quad N = \begin{pmatrix} t & u \\ p & w \end{pmatrix}, \quad |N| \neq 0.$$

Нека је $Z = f(z)$ произвољна функција са комплексним вредностима. Ако као последицу претходног имамо релацију $Z^* = f^*(z^*)$, функција f^* ће се називати **сличном функцији** f. Израз за f^* се лако може наћи:

$$Z^* = N(Z) = N[f(z)] = N[f[N^{-1}(z^*)]].$$

Ако је $f(z) = M(z)$ Мебијусова трансформација, онда је свака слична трансформација поново Мебијусова трансформација $Z^* = M^*(z^*)$, чија је матрица:

$$M^* = qNMN^{-1}, \quad q \neq 0. \tag{2.4}$$

Ако је $M = E$ (јединична матрица), онда је $M^* = qE$ за сваку N; дакле, само је идентитет сличан идентичној трансформацији.

За матрицу NMN^{-1} се каже да је слична матрици M.

У алгебри матрица је познато (у овом случају, код дводимензионалних матрица лако се потврђује) да сличне матрице имају једнаке детерминанте и једнак траг матрице. Тако

$$\delta = |M| = ad - bc, \quad \mathrm{tr}(M) = a + d = \tau,$$

то јест

$$|NMN^{-1}| = |M|, \quad \mathrm{tr}(NMN^{-1}) = \mathrm{tr}(M).$$

Две Мебијусове трансформације са сличним матрицама су сличне ($q = 1$). Обрнуто матрице две сличне Мебијусове трансформације имају своје инваријанте сличности повезане са

$$|M^*| = q^2|M|, \quad \mathrm{tr}(M^*) = q\,\mathrm{tr}(M).$$

Тако ће количник $\dfrac{(\operatorname{tr} M)^2}{|M|}$ бити инваријанта сличности Мебијусове трансформације са матрицом $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. За идентичну трансформацију $M = qE$ овај количник има вредност 4. Као основну инваријанту сличности Мебијусове трансформације можемо стога увести величину

$$\sigma = \sigma(M) = \frac{(\operatorname{tr} M)^2}{|M|} - 4 = \frac{\tau^2}{\delta} - 4 = \frac{(a-d)^2 + 4bc}{ad - bc},$$

тако да важи

$$\sigma(M^*) = \sigma(M)$$

ако су трансформације M, M^* сличне.

Свака трансформација M је слична сама себи (нпр. $N = E$). Ако је M^* слична M као што је изражено у (2.4), онда је M слична са M^*:

$$M = \frac{1}{q} N^{-1} M^* N = \frac{1}{q} N^{-1} M^* (N^{-1})^{-1}.$$

Коначно, ако је M_2 слична са M_1, и M_3 слична са M_2, онда је M_3 слична са M_1 јер постоје трансформације N_1 и N_2 такве да је $M_2 = N_1 M_1 {N_1}^{-1}$ и $M_3 = N_2 M_2 {N_2}^{-1}$, а онда је

$$M_3 = (N_2 N_1) M_1 (N_2 N_1)^{-1}.$$

Дакле, сличност је рефлексивна, симетрична и транзитивна релација, односно, у питању је релација еквиваленције.

Дакле, све трансформације M сличне одређеној M_0 су сличне једна другој; оне формирају класу (то јест, класу конјугованих елемената) у групи свих Мебијусових трансформација. Сваки елемент у класи може се добити од било ког другог елемента у класи помоћу сличности са одговарајућом матрицом N, то јест, у форми

$$M = qNM_0N^{-1}.$$

Параболичке трансформације

Систем Мебијусових трансформација који садржи један и само један елемент из сваке класе ће се звати **потпун систем нормалне форме**. За одређивање таквог система, фиксне тачке Мебијусове трансформације M су најбитније. Те тачке су корени једначине $M(z) = z$, то јест,

$$cz^2 - (a-d)z - b = 0.$$

Дакле, постоје највише две фиксне тачке и оне могу да се поклопе. Обе су коначне ако је $c \neq 0$; једна од њих је у бесконачности ако је $c = 0$ и $a \neq d$, а обе су у бесконачности ако је $c = 0$ и $a = d$. Мебијусова трансформација са фиксном тачком у бесконачности је линеарна; то је транслација ако се обе фиксне тачке поклопе у бесконачности. Означимо ове тачке са γ_1, γ_2.

Ако је γ фиксна тачка M, онда је $N(\gamma)$ фиксна тачка NMN^{-1}; у ствари, ако $M(\gamma) = \gamma$, онда

$$NMN^{-1}[N(\gamma)] = NM(\gamma) = N(\gamma).$$

Зато је очигледно да било које две сличне Мебијусове трансформације имају исти број различитих фиксних тачака.

Тврђење 2.3.9. *Свака Мебијусова трансформација $M = M(z)$ је слична линеарној трансформацији*

$$Z^* = M^*(z^*) = kz^* + t.$$

Константа k је дефинисана класом M (то јест, има исту вредност за све сличне трансформације); може се заменити са $\frac{1}{k}$. Број t је произвољан ако $k \neq 1$.

Доказ. Нека је M нелинеарна, тј. нека је $c \neq 0$. Нека је γ решење једначине $M(z) = z$. Трансформацијом

$$z^* = N(z) = \frac{1}{z-\gamma}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\gamma \end{pmatrix},$$

за коју је $N(\gamma) = \infty$, прелазимо са M на сличну трансформацију NMN^{-1} која има ∞ као фиксну тачку и стога је линеарна:

$$NMN^{-1}(z^*) = kz^* + t, \quad M^* = NMN^{-1}.$$

Пошто је $|M^*| = k$ и $tr(M^*) = k+1$, налазимо

$$\sigma = \sigma(M) = \sigma(M^*) = \frac{(k+1)^2}{k} - 4 = \frac{(k-1)^2}{k} = k + \frac{1}{k} - 2.$$

За сваки комплексни број σ, постоји M и стога и класа NMN^{-1}, чији је M представник, таква да је $\sigma = \sigma(M)$. Потребно је само добити k као корен квадратне једначине, други корен је тада једнак $\frac{1}{k}$. Заиста, $Z^* = kz^*$, са матрицом $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $\tilde{Z} = \frac{1}{k}\tilde{z}$ су сличне трансформације. Осим тога, ако $k \neq 1$,

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{t}{k-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{t}{k-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Константа t се тако може свести на нулу помоћу сличне трансформације, наиме оне која трансформише фиксну тачку $\gamma_1 = -\frac{t}{k-1}$ од M^* у нулу. Сада, $k = 1$ ако и само ако $\sigma = 0$. У том случају или је M^*, и стога M, идентична трансформација I, или је M^* транслација $Z^* = z^* + t, (t \neq 0)$. Помоћу замене $z^* = t\tilde{z}, Z^* = t\tilde{Z}$, можемо трансформисати ову транслацију у

$$\tilde{Z} = \tilde{z} + 1, \quad \text{матрице} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тако су све транслације сличне једна другој.
Било која трансформација $M \neq I$, за коју је $\sigma = \sigma(M) = 0$, јер је слична транслацији (са једном фиксном тачком бесконачности), мора бити трансформација са само једном фиксном тачком (која је коначна или бесконачна). Све ове трансформације називају се **параболичким**. Све параболичке трансформације чине класу. Представник ове класе је „нормална форма" $\tilde{Z} = \tilde{z} + 1$. Постоји параболички прамен кругова, сваки је инваријантан под M. То је слика прамена свих правих паралелних реалној оси помоћу Мебијусове трансформације N која трансформише $\tilde{Z} = \tilde{z} + 1$ у M.

Ако $\sigma \neq 0$, онда $k \neq 1$ и нормална форма M, као и представник класе M, је дат са:

$$\tilde{Z} = k\tilde{z}, \quad \text{матрице} \quad \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

■

Теорема 2.3.1. *Нека су M_1 и M_2 две Мебијусове трансформације, обе различите од идентичне; оне су сличне једна другој ако и само ако је*

$$\sigma(M_1) = \sigma(M_2).$$

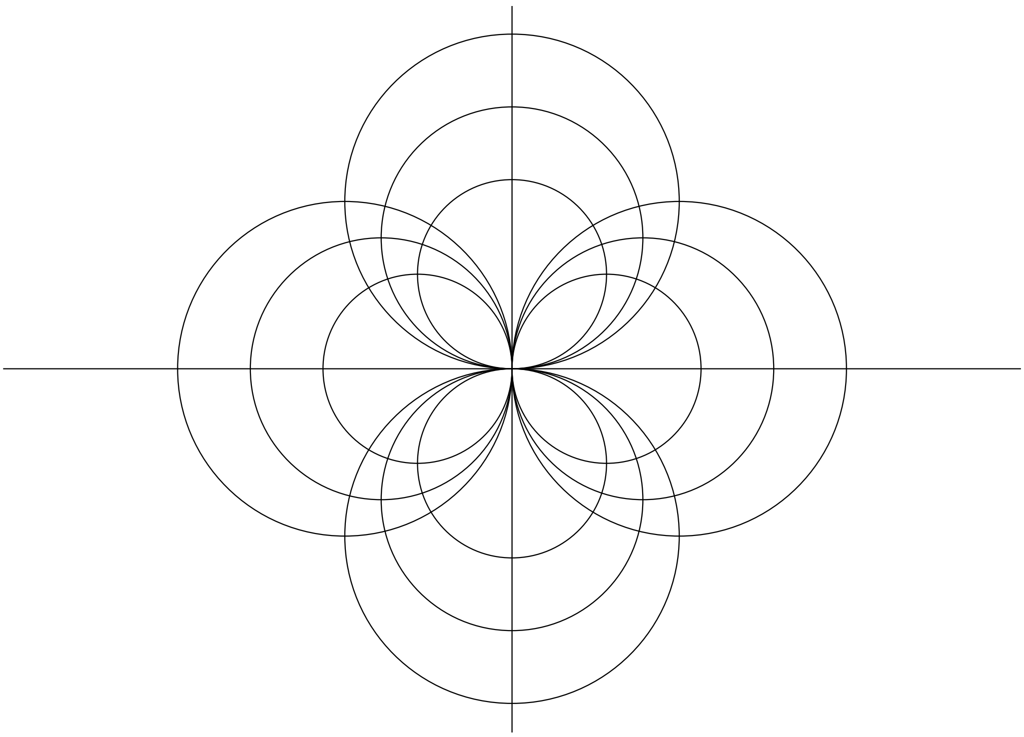
Доказ. У случају $\sigma = 0$, теорема је управо доказана и услов неопходан и ако $\sigma \neq 0$. Претпоставимо сада да је услов испуњен и $\sigma \neq 0$. Пошто је

$$\sigma(M_1) = \sigma \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \sigma \begin{pmatrix} \frac{1}{k_1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = k_1 + \frac{1}{k_1} - 2,$$

$$\sigma(M_2) = \sigma \begin{pmatrix} k_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = k_2 + \frac{1}{k_2} - 2,$$

закључујемо да је $k_2 = k_1$, или $k_2 = \frac{1}{k_1}$. Стога, $\begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} k_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, а самим тим и M_1 и M_2 су сличне. ■

Назваћемо k **карактеристичном константом Мебијусове трансформације** M; она дефинише класу трансформације M, али класа дефинише само вредност k или њен реципроцитет. Осим класе која садржи само идентитет I, свака класа јединствено дефинише вредност инваријанте σ и јединствено је дефинисана вредношћу σ. Извешћемо други потпуни систем нормалне форме за све неинволутивне Мебијусове трансформације.



Слика 2.9: Ортогонални параболички праменови кругова

Хиперболичке, елиптичке, локсодромске трансформације.

Нека је M Мебијусова трансформација са две различите фиксне тачке γ_1 и γ_2. Тада $k \neq 1$, односно $\sigma \neq 0$. Можемо је свести на свој нормални облик сличности помоћу трансформације N која помера γ_1 у 0 и γ_2 у ∞, односно:

$$z^* = N(z) = \frac{z - \gamma_1}{z - \gamma_2}, \quad Z^* = N(Z).$$

Трансформација M је имплицитно дефинисана са:

$$\frac{Z - \gamma_1}{Z - \gamma_2} = k \frac{z - \gamma_1}{z - \gamma_2}$$

где је k карактеристична константа трансформације M, или са:

$$[Z, z; \gamma_1, \gamma_2] = k.$$

Ако су познате две одговарајуће вредности, z и $Z = M(z)$ (различите од γ_1 и γ_2), ова формула даје експлицитан израз за k. На пример, ако су γ_1 и γ_2 обе коначне, тада:

$$k = (Z_\infty, \infty; \gamma_1, \gamma_2) = \frac{Z_\infty - \gamma_1}{Z_\infty - \gamma_2} = \frac{a - c\gamma_1}{a - c\gamma_2}.$$

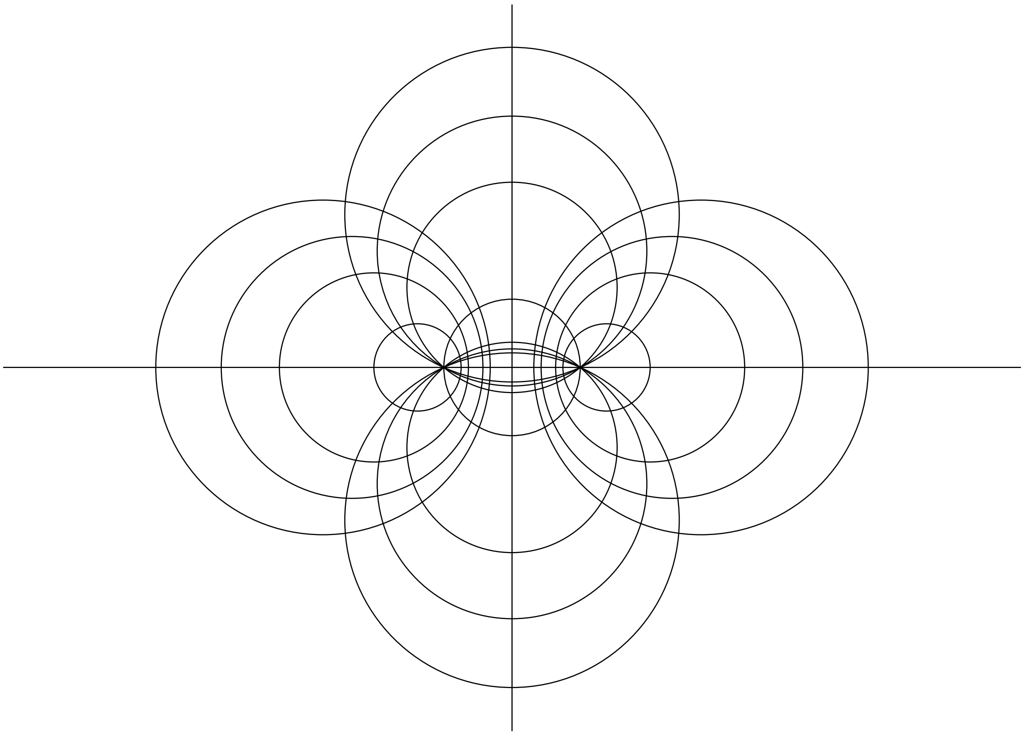
Заменом за γ_1 и γ_2 корен квадратне једначине, добијамо:

$$k = \frac{\tau + \sqrt{\sigma\delta}}{\tau - \sqrt{\sigma\delta}}.$$

Назваћемо трансформацију M:
елиптичка ако је $|k| = 1$, односно, $-4 \leq \sigma < 0$,
својствена хиперболичка ако је $k > 0$, односно $\sigma > 0$,
несвојствена хиперболичка ако је $k < 0$, односно $\sigma \leq -4$,
локсодромска ако $|k| \neq 1$ и k није реалан број, односно σ није реалан број.

Свака елиптичка трансформација М је слична ротацији $Z^* = e^{i\alpha} z^*$ око 0, где је $\alpha = \pm \arg k$. Тако M оставља инваријантим кругове хиперболичког прамена чији се кругови секу у фиксним тачкама γ_1 и γ_2 трансформације M. Важи :

$$\sigma = -4 \left(\sin \frac{\alpha}{2} \right)^2.$$



Слика 2.10: Ортогонални елиптички и хиперболички праменови кругова

Неопходан и довољан услов да M буде елиптичка трансформација може се лако извести из :

$$\frac{1}{2}(\tilde{\tau}\sqrt{\sigma\delta} + \tau\sqrt{\sigma\delta}) = \mathrm{Re}[\tilde{\tau}\sqrt{\sigma\delta}] = 0$$

или

$$(\tilde{\tau})^2(\tau^2 - 4\delta) < 0,$$

или ако је $\tau \neq 0$, τ^2 и δ имају једнаке углове и $4|\delta| > |\tau|^2$.

Ако је $\tau = 0$, то јест $k = -1$, односно $\sigma = -4$, трансформација ће бити слична

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

која представља трансформацију $Z^* = -z^*$. Ово пресликавање је инволуција. Пошто је свака трансформација која је слична инволуцији сама по себи инволуција, видимо да је M инволуција. Обрнуто, свака инволуција је слична

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Својствена хиперболичка трансформација M је слична хомотетији $Z^* = \rho z^*$ $(\rho > 0)$, где је $\rho = k$ или $\rho = \frac{1}{k}$. Прамен кругова од којих се сваки трансформише сам у себе помоћу M је елиптичан; он се састоји од свих кругова који пролазе кроз две фиксне тачке γ_1 и γ_2 трансформације M. Овај прамен је ортогоналан на хиперболички прамен инваријантних кругова елиптичке трансформације са истим фиксним тачкама .

Несвојствена хиперболичка трансформација M је слична трансформацији $Z^* = -\rho z^*$ $(\rho > 0)$, где је $\rho = -k$ или $\rho = -\frac{1}{k}$. Ове две трансформације

$$M_0 = N^{-1}\begin{pmatrix}\rho & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}N, \quad M = N^{-1}\begin{pmatrix}-\rho & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}N$$

имају очигледно исте фиксне тачке и исти прамен инваријантних кругова. Примећујемо да је:

$$M_0^{-1}M = N^{-1}\begin{pmatrix}\frac{1}{\rho} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}NN^{-1}\begin{pmatrix}-\rho & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}N = N^{-1}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}N = I$$

инволуција, наиме, једина у фамилији свих Мебијусових трансформација која има исте фиксне тачке γ_1 и γ_2 као M_0 и M. I је дефинисана са:

$$[Z, z; \gamma_1, \gamma_2] = -1.$$

У исто време, показали смо да за сваку несвојствену хиперболичку трансформацију M постоји својствена хиперболичка трансформација M_0 и инволуција I тако да:

$$M = M_0 I.$$

Локсодромска трансформација M нема инваријантних кругова. Наиме, може се показати да се круг $|z - c|^2 = r^2$, односно $z\overline{z} - \overline{c}z - c\overline{z} + (c\overline{c} - r^2) = 0$ слика у $k\overline{k}z\overline{z} - \overline{c}kz - c\overline{k}\overline{z} + (c\overline{c} - r^2) = 0$. С обзиром да је $|k| \neq 1$, одавде би следило да је $|c|^2 = r^2$ и $c \neq 0$, а како би тада требало да важи и да је $k \neq 0$, опет бисмо добили да је $k = 1$.

Пошто је нормалан облик локсодромске трансформације производ ротације $R_\alpha(\alpha \neq n\pi)$ и хомотетије $H_\rho(\rho \neq 1)$, добијамо:

Теорема 2.3.2. *Локсодромска трансформација M са фиксним тачкама γ_1 и γ_2 је производ елиптичке и својствене хиперболичке трансформације, обе са истим фиксним тачкама γ_1 и γ_2. Ова два фактора су комутативна.*

2.4 Фундаментална теорема

Геометријска карактеризација Мебијусове трансформације

Мебијусова трансформација је уведена њеном алгебарском дефиницијом

$$Z = M(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

и показано је да су Мебијусове трансформације као и антихомографије трансформације које чувају уопштене кругове. Назовимо бијективна пресликавања проширене еуклидске равни која сликају уопштене кругове у уопштене кругове **кружним пресликавањима**. Да ли поред Мебијусових трансформација и антихомографија постоје друга кружна пресликавања?

Питање је слично и заправо блиско повезано са одговарајућим проблемом у пројективној геометрији. Скоро је очигледно да свака инвертибилна линеарна хомогена трансформација у три хомогене координате представља колинеацију у пројективној равни, тј. јединствено инвертибилну трансформацију која слика тачке у тачке и праве у праве. Да ли постоје друге колинеације у реалној пројективној равни?

На оба ова питања одговор је не. У другом случају одговор даје једна од основних теорема реалне пројективне геометрије. У првом случају одговор је предмет следеће теореме.

Теорема 2.4.1. *Нека је $Z = f(z)$ кружно пресликавање проширене равни у саму себе. Тада је f или Мебијусова трансформација или антихомографија.*

Доказ. Производ две трансформације које чувају кругове је поново трансформација која чува кругове. Све ове трансформације стога чине групу која садржи групу свих Мебијусових трансформација и антихомографија. Нека је M Мебијусова трансформација која пресликава $f(0)$, $f(1)$, $f(\infty)$ у 0, 1, ∞. Тада $M(f(z))$ и $M(\bar{f}(z))$ су такође кружне трансформације проширене равни у саму себе која трансформише кругове у кругове; имају 0, 1, ∞ као фиксне тачке. Једна од ових трансформација, које можемо означити са $g(z)$, пресликава тачку $z = i$ у тачку горње полуравни:

$$\operatorname{Im}\, g(i) > 0.$$

Пошто је $g(\infty) = \infty$, праве (кругови који пролазе кроз ∞) се пресликавају у праве. Пошто је $g(0) = 0$, праве које пролазе кроз 0 се пресликавају у праве које пролазе кроз 0. Посебно, реална оса (права која пролази кроз фиксне тачке) ће бити пресликана сама у себе трансформацијом $g(z)$.

Кругови који се додирују имају тачно једну заједничку тачку; стога се њихове слике такође додирују. Посебно, паралелне праве (уопштени кругови који се додирују у ∞) се пресликавају у паралелне праве. (Напомена: паралелне праве у проширеној равни одговарају стереографски круговима на сфери који се додирују у тачки S, центру пројекције.)

Сада претпоставимо да три тачке z_0, z_1, z_2 нису колинеарне. Тада ће праве које пролазе кроз z_1 паралелне вектору $\overrightarrow{z_0z_2}$, и кроз z_2 паралелне вектору $\overrightarrow{z_0z_1}$, секу се у $z_1 + z_2 - z_0$. Њихове слике су праве кроз $g(z_1)$ паралелне вектору $\overrightarrow{g(z_0)g(z_2)}$, и кроз $g(z_2)$ паралелне вектору $\overrightarrow{g(z_0)g(z_1)}$. Њихов пресек $g(z_1) + g(z_2) - g(z_0)$ је слика $z_1 + z_2 - z_0$; стога

$$g(z_1 + z_2 - z_0) = g(z_1) + g(z_2) - g(z_0).$$

Посебно

$$g(z_1 \pm z_2) = g(z_1) \pm g(z_2). \tag{2.5}$$

ако 0, z_1, z_2 нису колинеарне. На основу претходног

$$g(z_1) - g(z) = g(z_1 - z) = g[z_1 + (-z)] = g(z_1) + g(-z).$$

или

$$g(-z) = -g(z)$$

Нека су 0, z_1, z_2 колинеарне, онда $z_1 - iz_1$, $z_2 \pm iz_1$ нису на истој правој заједно са 0 осим ако је $z_2 = \pm z_1$, при чему је један случај тривијалан, а други покривен са $g(-z) = -g(z)$. Стога се (2.5) може применити на $z_1 - iz_1$ и $z_2 \pm iz_1$ уместо z_1 и z_2:

$$\begin{aligned} g(z_1 \pm z_2) &= g[(z_1 - iz_1) \pm (z_2 \pm iz_1)] \\ &= g(z_1 - iz_1) \pm g(z_2 \pm iz_1) \\ &= g(z_1) - g(iz_1) \pm [g(z_2) \pm g(iz_1)] \\ &= g(z_1) \pm g(z_2). \end{aligned}$$

Тако је (2.5) тачно за све z_1 и z_2.

Сада закључујемо индукцијом да је

$$g(nz) = ng(z), (n = 0, \pm 1, \pm 2, ...).$$

Нека је m било који позитиван цели број. Тада

$$g(z) = g\left(m\frac{z}{m}\right) = mg\left(\frac{z}{m}\right)$$

или

$$g\left(\frac{z}{m}\right) = \frac{1}{m}g(z)$$

а стога

$$g(rz) = rg(z)$$

за сваки рационални број r. Посебно,

$$g(r) = rg(1) = r.$$

Дакле, сви рационални бројеви r су фиксне тачке.

Следећа геометријска аргументација показује да трансформација $Z = g(z)$ чува ортогоналност. Нека су l_1 и l_2 две нормалне праве. Нека су l_1' и l_2' (где $l_1 \neq l_1'$, $l_2 \neq l_2'$). Четири праве се секу у теменима правоуглог четвороугла . Пресеци њихових слика су стога темена четвороугла. Пошто четири темена правоуглог четвороугла леже на кругу, исто важи и за њихове слике. Стога је и слика правоугаоника такође правоугаоник; дакле, $g(l_1)$ је ортогонално на $g(l_2)$.

Сада следи да се комплексна оса пресликава сама у себе. Посебно,

$$g(i) = \lambda i,$$

за неки реални број λ и закључујемо

$$g(\pm 1 + i) = \pm 1 + \lambda i.$$

Даље, приметимо да су праве које пролазе кроз тачке 0 и $\pm 1 + i$ ортогоналне; исто мора важити и за њихове слике (трансформација $Z = g(z)$ чува ортогоналност) које пролазе кроз тачке $\pm 1 + \lambda i$. Стога је $\lambda = \pm 1$, па због $\operatorname{Im} g(i) > 0$:

$$\lambda = +1.$$

Тако је $g(i) = i$ и :

$$g(r + si) = r + si$$

за све рационалне r и s.

Сада, нека је α ирационалан број. Нека су r_0, r_1, r_2 рационални где је

$$r_0 < r_1 < \alpha < r_2.$$

Нека је K круг који пролази кроз r_1, r_2 и i. Сви кругови који пролазе кроз r_0 и α ће се сећи са K. Стога ће се сви кругови који пролазе кроз $g(\alpha)$ и $g(r_0) = r_0$ сећи са сликом круга $g(K)$, који се поклапа са K. Како је $g(\alpha)$ реалан, то подразумева

$$r_1 < g(\alpha) < r_2.$$

Ово важи за све парове рационалних бројева r_1, r_2 који задовољавају $r_0 < r_1 < \alpha < r_2$. Стога је $g(\alpha) = \alpha$. Слично, $g(\alpha i) = \alpha i$ и

$$g(z) = g(x + yi) = g(x) + g(yi) = x + yi = z$$

за све комплексне z. Стога је $g(z)$ идентитет и

$$f(z) = M^{-1}(z) \text{ или } f(z) = \overline{M^{-1}(z)}.$$

■

Дакле, трансформација која чува кругове у проширеној равни и која чува смисао ротације (оријентацију) у једној тачки, мора бити Мебијусова трансформација.

Глава 3

Закључак

У овом раду смо детаљно истражили инверзивне трансформације равни, са посебним фокусом на Мебијусове трансформације. Почели смо са основним појмовима и својствима инверзије у односу на круг и показали како инверзија, у комбинацији са другим основним трансформацијама као што су транслација, ротација и хомотетија, доводи до Мебијусових трансформација.

Мебијусове трансформације су изузетно значајне због своје способности да на једноставан начин описују сложене геометријске и аналитичке односе на проширеној комплексној равни. Њихова својства, као што су конформност и способност да преводе кругове и праве у кругове и праве, чине их неопходним алатом у многим областима математике, укључујући комплексну анализу, теорију функција и диференцијалну геометрију. Сложени геометријски проблеми могу поједноставити и решити применом инверзивних и Мебијусових трансформација. Један од најважнијих резултата овог рада је разматрање Фундаменталне теореме, а њена примена није ограничена само на теоријске аспекте, већ се јавља и у решавању конкретних геометријских и аналитичких проблема.

Правац за даље истраживање може бити проучавање других типова трансформација које се могу изводити комбинацијом инверзије са различитим геометријским операцијама, као и њихова примена у неким од савремених области математике, као што су теорија динамичких система или геометрија на различитим типовима површина. Осим тога, могуће је разматрање проширења ових концепата у вишедимензионалним просторима и истраживање њихове примене у физици и инжењерству.

Библиографија

[1] Мирослава Антић, ***Нееуклидске геометрије*** *(материјали за предмет Одабрана поглавља геометрије), Математички факултет, Београд 2022.*

[2] Зоран Лучић, ***Еуклидска и хиперболичка геометрија****, Total design i Matematicki fakultet , Београд 1997.*

[3] Hans Schwerdtfeger, ***Geometry of complex numbers****, Mathematical expositions No. 13, University of Toronto Press 1962.*