СРПСКА АКАДЕМИЈА НАУКА

ЗБОРНИК РАДОВА

Књ. VII

МАТЕМАТИЧКИ ИНСТИТУТ

Књ. I

БЕОГРАД
1951

СРПСКА АКАДЕМИЈА НАУКА

ЗБОРНИК РАДОВА

Књ. VII

МАТЕМАТИЧКИ ИНСТИТУТ

Књ. I

БЕОГРАД
1951

ACADÉMIE SERBE DES SCIENCES

RECUEIL DES TRAVAUX

T. VII

INSTITUT MATHEMATIQUE

№ 1

Уредник:
Дописник Д-р РАДИВОЈ КАШАНИН
управник Математичког института САН

Примљено на XII скупу Одељења природно математичких наука
7 XII 1950 године

Научна књига

ИЗДАВАЧКО ПРЕДУЗЕЋЕ НАРОДНЕ РЕПУБЛИКЕ СРБИЈЕ

Штампарија и књиговезница Српске академије наука, Космајска бр. 28

САДРЖАЈ:

УВОДНА РЕЧ

Пре другог светског рата математичари Београдског универзитета, свих факултета, припадали су једној организацији која није носила формални карактер и није имала неки званични назив, али је радила интезивно, солидно и успешно. Као резултат тог рада она је издавала свој часопис који је носио назив „Publications mathematiques de l'Université de Belgrade". Сем тога, многи радови, о којима је било реферисано на седницама те организације, били су штампани и у другим часописима код нас и у иностранству, пре свега у „Гласу" Академије природних наука и у Билтену Академије. При ступању у ту организацију није се тражила никаква квалификација сем да лице припада математичком наставничком кору Универзитета; математичари са стране нису могли учествовати у њој, јер је то била унутрашња универзитетско-наставничка организација. Тој организацији су припадала лица која су радила на науци, а такође и лица која на науци нису радила, али су била наставници Универзитета.

После ослобођења у Српској академији наука појачала се тежња за бољом и широм организацијом научне делатности у Србији. У Академији, у току низа седница, такозваним „Саветовањима" расправљало се о облицима те организације. Још пре тих седница група математичара, академика и дописних чланова, почела је поново да ради колективно и да постепено формира нову математичку организацију, у оквиру Академије, која би била посвећена углавном научном раду. Како су математичари, с једне стране, већ имали довољно искуства са организацијом свог научног рада, а с друге стране, имали су већ и кадрове делом у саставу Академије делом ван ње, за формирање организације, један од њихових претставника, академик А. Билимовић, изнео је, на једној од седница „Саветовања", предлог о конституисању Математичког института Српске Академије наука. У записнику седнице од 18 септембра 1945 године (Годишњак Српске академије наука за 1955 год., књига 4 II стр. 38), стоји:

Академик А. Билимовић примећује да су се готово сви досадашњи предлози односили на проблеме и теме на којима Академија уопште није радила, нити се њима бавила. Жели да изнесе предлог који се тиче области на којој је Академија и досад са великим успехом радила и за коју има људе у својој средини.

Истиче како Математика све више постаје основа свеколиког културног напретка. На супрот тој чињеници и доскорашњем доминантном положају математичке групе код нас, он сматра да би требало што пре нешто предузети, и с обзиром на губитке у научном кадру, а нарочито због уништења скупоцене библиотеке Математичког семинара, — да се положај те групе одржи на потребној висини. Мишљења је да би у том правцу Академија могла много да учини оснивањем Института за Математику.

Враћа се поново на улогу коју Математика и њен апарат играју, напр., у развитку Ваздухопловства, које је код нас кренуло напред пред сам почетак овог рата; па онда у Механици атома, која данас у целом свету добија све већи практични значај. Да један народ може на том пољу да буде корисно активан, треба да има за то спремне стручне људе и могућности за њихов рад. Код нас за ове дисциплине има диспозиције. Академија би лако могла, оснивањем Института за Математику и окупљањем свих способних људи око њега, ове велике задатке испунити и без великих издатака.

Академик М. Милановић се слаже са предлагачем и предлог сматра као врло користан и актуелан.

Претседник Белић истиче да је у животу Академије било епоха у којима су се поједине научне гране нарочито истицале. Помиње епоху еминентних историка, затим епоху геолога. Признаје да је штета што тада није била остварена и нека установа трајнијег значаја и дејства. Сад имамо у Академији епоху математичара која уз то одговара и духу времена у коме живимо. Слаже се са изнесеним да треба створити Институт који би, под Академијиним руководством, могао корисно деловати.

Исто тако би се, по његову мишљењу, могло нешто урадити и за биолошке науке.

На IX скупу Академије природних наука, 18 октобра 1945 године, био је примљен нацрт Правила Математичког института Српске Академије наука и упућен на одобрење Скупу целокупне Академије. На I скупу целокупне Академије, 26 априла 1946 године, Правила Математичког института Српске Академије наука била су одобрена и, почев од седнице 15 маја 1946 године, Математички институт је почео да ради као званична академиска институција.

Према Правилима били су формирани органи Института: Савет М. И. С. А. Н., Веће и низ Одбора и Комисија. Прва седница Већа у које су ушли ови чланови: М. Миланковић, Б. Гавриловић, В. Мишковић, А. Билимовић, Н. Салтиков, Ј. Карамата, Р. Кашанин, И. Арновљевић, Ј. Хлитчијев, Т. Пејовић, М. Вречко, М. Радојчић, В. Авакумовић и Т. Анђелић, са претседником Института А. Билимовићем, секретаром Р. Кашанином, и записничарем Т. Анђелићем, била је одржана 22 јула 1946 године. Институт прво време није имао никаквог помоћног персонала, ни послужитеља, што је знатно отежавало административни рад у Институту и вођење библиотеке Института. Кад је Институт почео да ради, наступиле су нове тешкоће, пре свега, недостатак погодних сталних просторија, Ова тешкоћа није ни до данас савладана јер Институт располаже просторијама у којима је рад врло тежак.

Такви су били први кораци у животу Математичког института Српске Академије Наука.

После оснивања других институција Српске Академије Наука, Математички институт је укључен у општу организацију тих Института.

До краја 1949 године одржано је 24 седнице Научног Савета, 18 седница Терминолошке комисије, и 88 седница Већа. На овим последњим учињено је 124 саопштења, која су већином и штампана, и то у Publications de l' Institute mathématique и у Гласу С. А. Н.

Институт је издао досад као своје издање: три тома Publications, једну књигу Посебних издања и једну књигу Класичних научних списа.

*

Стваралачку делатност на пољу математике тешко је данас пратити са стварним разумевањем и онда кад се располаже знањем које пружа Универзитетска настава. Док се и најмодерније тековине у свим осталим наукама могу, колико-толико, приказати и најширим слојевима, дотле су се математичке науке одмах од својих почетака истицале извесном тешком приступачношћу; то важи још и више у данашње доба, кад се до потпуног схватања савремених резултата долази солидним и истрајним радом, после завршених универзитетских студија.

Али тај интелектуални напор, потребан да се схвате математичке кристално логичке творевине саздане од најапстрактнијих појмова, јесте оно што математици даје и велику васпитну вредност: оспособљава генерације за објективно закључивање, пружући им ону снагу апстрактног мишљења која је и у најконкретнијем животу потребна.

Да би се неговале и унапређивале математичке дисциплине; да би се допринело изграђивању корисних научних радника; да би се нашим млађим нараштајима створила могућност упознавања с методама научног рада и с проблемима савремених математичких наука; да би се растојање између научног и практичног живота смањило: Математички институт покреће свој зборник радова.

Ово је четврта врста издања Математичког института.

УРЕЂИВАЧКИ ОДБОР

СУКЦЕСИВНА АПРОКСИМАЦИЈА И НУЛЕ ИНТЕГРАЛА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА ДРУГОГ РЕДА*

ВОЈИСЛАВ Г. АВАКУМОВИЋ (Београд)

1. 1° Данас ћу говорити о егзистенцији интеграла нелинеарних диференцијалних једначина другог реда који пролазе кроз две унапред дате тачке x, y равни. При томе ћу се ограничити на оне ставове који се добивају на основу т. зв. методе сукцесивне апроксимације. Као непосредну последицу ових ставова добићу ставове о најмањој удаљености двају узастопних нула нетривијалних интеграла нелинеарне диференцијалне једначине другог реда.

2° Да вам техничке потешкоће не би сметале у уочавању онога што је битно у проблему егзистенције интеграла, ја ћу се ограничити на диференцијалне једначине облика

$$y'' = f(x,y),$$

мада одговарајући ставови важе и за оне диференцијалне једначине у којима се са десне стране појављује $f(x, y, y')$.

Из истог разлога претпоставићу да су $(a, 0)$ и $(b, 0)$ тачке кроз које треба да пролази интеграл посматране диференцијалне једначине, тако да се гранични услови појављују у облику

$$y(a) = y(b) = 0.$$

Једноставним линеарним сменама може се прећи на општији случај када су задане тачке (a, A) и (b, B).

3° Основни став о егзистенцији интеграла који пролази кроз тачке $(a, 0)$ и $(b, 0)$ је познати Picard-ов став[1]):

---

*) Предавање одржано на курсу „О неким проблемима у вези са диференцијалним једначинама математичке физике“ у Математичком Институту Српске Академије Наука.

1) E. Picard, *Leçons sur quelques problèmes aux limites de la théorie dse équations différentielles*, *Paris (1930).*

За све x, y области

$$D_P:\ a \leqslant x \leqslant b;\ |y| \leqslant K,$$

нека је:

$$f(x, y) \text{ непрекидно}$$

$$|f(x, y)| \leqslant M$$

и

$$|f(x, \overline{y}) - f(x, \underline{y})| \leqslant \alpha |\overline{y} - \underline{y}|,$$

Ако бројеви K, M и α задовољавају услове:

I) $$\alpha (a - b)^2 < 8$$

и

II) $$M (a - b)^2 < 8K,$$

тада диференцијални задатак

$$y'' = f(x, y);\ y(a) = y(b) = 0$$

има једно једино решење које припада области D_P. Ово решење може се добити методом сукцесивне апроксимације.

4^0 Уочимо сада оне функције $f(x, y)$ које задовољавају услов

$$f(x, 0) \equiv 0.$$

Даље претпоставимо да $f(x, y)$ задовољава све услове Picard-ова става сем евентуално услова I) и да су $x = a$ и $x = b$ нуле неког нетривијалног интеграла посматране диференцијалне једначине. Ако је поред тога задовољен још и услов I), тада је овај интеграл једини интеграл који пролази кроз тачке $(a, 0)$ и $(b, 0)$, као што то следи из Picard-ова става. То је међутим противречно с чињеницом да је, с обзиром на $f(x, 0) \equiv 0$, функција $y \equiv 0$ такође решење граничног задатка. Стога мора да је

$$b - a \geqslant \sqrt{\frac{8}{\alpha}}.$$

Ако функција $f(x, y)$ у области у којој је дефинисана има непрекидан парцијалан извод по y, онда је

$$\alpha = \mathrm{Max} \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right|,$$

јер је

$$|f(x, \overline{y}) - f(x, \underline{y})| = \left| \int_{\underline{y}}^{\overline{y}} \frac{\partial f}{\partial y} \right| \leqslant \mathrm{Max} \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| |\overline{y} - \underline{y}|.$$

У случају линеарне диференцијалне једначине

$$y'' = -\varphi(x)\, y$$

према томе је

$$\alpha = \underset{a \leqslant x \leqslant b}{\mathrm{Max}} |\varphi(x)|.$$

Како је

$$M = \mathrm{Max}\, |\varphi(x)|\, \mathrm{Max}\, |y|,$$

то из услова $|y| \leqslant K$ следи

$$M = \alpha K,$$

па услов II) добива облик: $\alpha\,(b-a)^2 < 8$. То значи: ако је линеарна диференцијална једначина таква да је задовољен услов II), онда је задовољен и услов I). Стога се не може закључити да је размак између нула неког нетривијалног интеграла линеарне диференцијалне једначине већи, односно једнак, $\sqrt{\frac{8}{\alpha}}$. Међутим, као што сте у прошлом предавању видели, Sturm-ова теорема казује, између осталога, да за линеарне диференцијалне једначине важи

$$b - a \geqslant \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}}.^{2)}$$

Према томе, постављају се ова два питања:

1. Може ли се у неједначини I) константа 8 повећати, односно колика је највећа константа која може да стоји на десној страни неједначине I)?

С обзиром на линеарне једначине очигледно је да ова константа не може бити већа од π^2.

2. Могу ли се остале претпоставке Picard-ова става толико проширити да се став са успехом може применити на линеарне једначине? Специјално, може ли се област D_P смањити, односно, колика је најмања област којом се област D_P може заменити?

Показаћу да се у неједначини I) број 8 може заменити бројем π^2.

---

[2]) Ова неједначина чини само једну половину Sturm-ове теореме; друга половина гласи: ако је $\beta = \mathrm{Min}\, |\varphi(x)|$ тада је

$$b - a \leqslant \frac{\pi}{\sqrt{\beta}}.$$

У вези с овим види: E. Kamke, *Differentialgleichungen (Lösungsmethoden)*, *Leipzig* (1942), pp. 125-128.

Међутим, не знам како гласи одговор на друго питање. Показаћу једино да се област D_P може смањити, али и овако смањена област је још увек сувише велика да би се из тако пооштреног става могла извести Sturm-ова неједначина за линеарне диференцијалне једначине.

Изгледа ми да ће се овај циљ пре постићи мењањем природе претпоставки о функцији $f(x,y)$, него даљим смањењем области D_P.

5° Став који ћу овде доказати гласи:

Став А. *За све* x, y *области*

$$D(a,b,M):\ a \leqslant x \leqslant b;\quad |y| \leqslant \frac{M}{2}(x-a)(b-x)$$

нека је

$$f(x,y)\ \text{\textit{непрекидно}},$$

$$|f(x,y)| \leqslant M$$

и

$$|f(x,\overline{y}) - f(x,\underline{y})| \leqslant \alpha\,|\overline{y} - \underline{y}|.$$

Ако је

$$\alpha(b-a)^2 < \pi^2,$$

онда диференцијални задатак

$$y'' = f(x,y);\quad y(a) = y(b) = 0$$

има једно једино решење које припада области $D(a,b,M)$. *Ово решење може се добити методом сукцесивне апроксимације.*

Да су претпоставке овога става испуњене кад год су испуњене претпоставке Picard-ова става, види се сасвим лако ако уочимо да из II), тј, из $M(b-a)^2 < 8K$ следи

$$|y| \leqslant \frac{M}{2}(x-a)(b-x) \leqslant \frac{M}{8}(b-a)^2 < K$$

што показује да област $D(a,b,M)$ припада области D_P.

6° На исти начин као што смо у 4° на основу Picard-ова става закључили да је размак између нула неког нетривијалног интеграла увек $\geqslant \sqrt{\dfrac{8}{\alpha}}$ кад год функција $f(x,y)$ поред осталог задовољава и услов $f(x,0) \equiv 0$, тако сада на основу става А добивамо овај став:

Став B. *За све* x, y *области* $D(a, b, M)$ *нека је*

$$f(x, y) \text{ непрекидно,}$$

$$|f(x, y)| \leqslant M,$$

$$|f(x, \overline{y}) - f(x, \underline{y})| \leqslant \alpha\, |\overline{y} - \underline{y}|$$

и

$$f(x, 0) \equiv 0.$$

Ако су $x = a$ *и* $x = b$ *узастопне нуле неког нетривијалног интеграла диференцијалне једначине*

$$y'' = f(x, y),$$

онда је

$$b - a \geqslant \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}}.$$

2. 1° Да би доказ става А упростили, ставимо

$$x = a + (b - a)\, t \quad \text{и} \quad y(x) = (b - a)^2 M z(t).$$

Тада се диференцијална једначина $y'' = f(x, y)$ своди на диференцијалну једначину

$$z'' = \frac{1}{M} f(a + (b - a)\, t, (b - a)^2 M z) = \wedge (t, z),$$

а гранични услови $y(a) = y(b) = 0$ на услове $z(0) = z(1) = 0$. При овој смени област $D(a, b, M)$ се пресликава на t, z област $0 \leqslant t \leqslant 1$; $|z| \leqslant \frac{1}{2} t(1 - t)$, док се услов $|f(x, y)| \leqslant M$ претвара у услов $|\wedge(t, z)| \leqslant 1$. Коначно, $\alpha(b - a)^2$ је Lipschitz-ова константа диференцијалне једначине $z'' = \wedge(t, z)$.

Према томе довољно је да докажемо овај став:

Став I. *За све* x, y *области*

$$D\colon\ 0 \leqslant x \leqslant 1; \quad |y| \leqslant \frac{1}{2} x(1 - x)$$

нека је

$$f(x, y) \text{ непрекидно,}$$

A) $$|f(x, y)| < 1$$

и

$$|f(x, \overline{y}) - f(x, \underline{y})| \leqslant \alpha\, |\overline{y} - \underline{y}|.$$

Ако је

$$\alpha < \pi^2$$

онда диференцијални задатак

$$y'' = f(x, y); \quad y(0) = y(1) = 0,$$

има једно једино решење које припада области D. Ово решење може се добити методом сукцесивне апроксимације.

2° Као што је познато сукцесивне апроксимације $y_n = y_n(x)$ интеграла $y = y(x)$ диференцијалног задатка

$$y'' = f(x, y)\,;\quad y(0) = y(1) = 0\,,$$

дефинишу се помоћу рекурентног обрасца

$$y_n'' = f(x, y_{n-1})\,,\quad n = 1, 2, \ldots$$

уз захтев да све функције y_n задовољавају гранични услов $y_n(0) = y_n(1) = 0$. Ова дефиниција функције y_n је еквивалентна дефиницији помоћу рекурентног обрасца

$$\text{B)}\qquad y_n = (x-1)\int_0^x t f(t, y_{n-1})\,dt - x\int_x^1 (1-t) f(t, y_{n-1})\,dt.$$

Јер, овако дефинисане функције y_n очито задовољавају граничне услове, а кад овај образац два пута диференцирамо, видећемо да y_n и y_{n-1} задовољавају рекурентни образац $y''_n = f(x, y_{n-1})$.

Ако при формирању функција y_n пођемо од неке функције y_0 која припада области D, тада ће и остале функције y_n припадати области D, тј. биће

$$|y_n| \leqslant \frac{1}{2}\, x(1-x).$$

Заиста, ако претпоставимо да y_{n-1} припада области D биће

$$|y_n| \leqslant (1-x)\int_0^x t\,|f(t, y_{n-1})|\,dt + x\int_x^1 (1-t)\,|f(t, y_{n-1})|\,dt\,,$$

па је због A)

$$|y_n| \leqslant (1-x)\int_0^x t\,dt \quad + x\int_x^1 (1-t)\,dt = \frac{1}{2}\, x(1-x)\,,$$

одакле, прелазом са $n-1$ на n, следи тврђење, јер y_0 припада области D.

То значи да за сваки пар функција y_n и y_{n+1} важи неједначина

$$\text{C)}\qquad |f(x, y_{n+1}) - f(x, y_n)| \leqslant \alpha\,|y_{n+1} - y_n|\,.$$

Сада се лако може доказати ово: *Ако је за све* $0 \leqslant x \leqslant 1$ *функција* $p_1(x)$ *непрекидна, а функције* $p_{n+1}(x)$, $n = 1, 2, \ldots$ *у* *истом размаку задовољавају услове*

$$p_{n+1}''(x) = -\alpha\, p_n(x)$$

и

$$p_n(0) = p_n(1) = 0\,,$$

онда из

$$|y_n - y_{n-1}| \leqslant p_n(x)$$

следи

$$|y_{n+1} - y_n| \leqslant p_{n+1}(x)\,.$$

Да бисмо ово доказали, приметимо пре свега да је

$$\text{D)} \qquad p_{n+1}(x) = \alpha\,(1-x)\int_0^x t\,p_n(t)\,dt + \alpha\, x \int_x^1 (1-t)\,p_n(t)\,dt\,.$$

Ако сада од обрасца B) одузмемо аналогни образац за y_n и тако добивени израз модулирамо, добићемо

$$|y_{n+1} - y_n| \leqslant (1-x)\int_0^x t\,|f(t,y_n) - f(t,y_{n-1})|\,dt$$

$$+\, x \int_x^1 (1-t)\,|f(t,y_n) - f(t,y_{n-1})|\,dt\,,$$

одакле, с обзиром на C), следи да је

$$|y_{n+1} - y_n| \leqslant \alpha\,(1-x)\int_0^x t\,|y_n - y_{n-1}|\,dt + \alpha\, x \int_x^1 (1-t)\,|y_n - y_{n-1}|\,dt\,.$$

Како је по претпоставци $|y_n - y_{n-1}| \leqslant p_n(x)$, то је

$$|y_{n+1} - y_n| \leqslant \alpha\,(1-x)\int_0^x t\,p_n(t)\,dt + \alpha\, x \int_x^1 (1-t)\,p_n(t)\,dt\,,$$

дакле, с обзиром на D),

$$|y_{n+1} - y_n| \leqslant p_{n+1}(x)\,.$$

Због $|y_n| \leqslant \dfrac{1}{2}x\,(1-x)$ биће

$$|y_1 - y_0| \leqslant |y_1| + |y_0| \leqslant x\,(1-x)\,.$$

Стога можемо узети да је

$$p_1(x) = x(1-x).$$

Тада су и $p_n(x)$ полиноми по x.

3° Сада је јасно на шта се своди доказ става I. Да би доказали егзистенцију најмање једног решења $y = \lim_{n=\infty} y_n$, довољно је, с обзиром на

$$|y_n - y_0| \leqslant \sum_{\nu=1}^{n} |y_\nu - y_{\nu-1}| \leqslant \sum_{\nu=1}^{n} p_\nu(x)$$

доказати да

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \operatorname*{Max}_{0 \leqslant x \leqslant 1} p_\nu(x)$$

конвергира за све $0 \leqslant \alpha < \pi^2$. Јер, тада је конвергенција низа y_n униформна за све $0 \leqslant x \leqslant 1$, па се у обрасцу B) прелаз $n \to \infty$ испред знака интеграције може заменити прелазом иза знака интеграције. На тај би начин добили да је

$$y = (x-1)\int_0^x t f(t,y)\,dt - x\int_x^1 (1-t) f(t,y)\,dt,$$

одакле диференцирањем следи да је $y'' = f(x,y)$.

Ако је егзистенција најмање једне граничне функције y већ осигурана, онда се јединственост овога решења може овако доказати: Нека је Y неко решење диференцијалног задатка које није идентички једнако решењу y. Функција

$$\psi = (x-1)\int_0^x t f(t,Y)\,dt - x\int_x^1 (1-t) f(t,Y)\,dt$$

је једно решење диференцијалног задатка. Јер, ако овај израз два пута диференцирамо по x добићемо

$$\psi'' = f(x,Y),$$

тј.

$$\psi'' \equiv Y'',$$

одакле закључујемо да је $\psi - Y$ линеарна функција. Но како ова функција пролази кроз тачке (0,0) и (1,0), то њени коефицијенти морају бити једнаки нули па је

$$\psi \equiv Y,$$

тј.

$$Y=(x-1)\int_0^x t\,f(t,\,Y)\,dt\;-x\int_x^1(1-t)\,f(t,\,Y)\,dt.$$

Дакле,

$$Y-y_n=(x-1)\int_0^x t\{f(t,Y)-f(t,y_{n-1})\}\,dt$$

$$-x\int_x^1(1-t)\{f(t,Y)-f(t,y_{n-1})\}\,dt.$$

Полазећи од овог обрасца добићемо, на исти начин као и напред да је за све $0\leqslant x\leqslant 1$

$$|\,Y-y_n\,|\leqslant p_{n+1}(x).$$

Према томе је $Y\equiv y$ кадгод $p_{n+1}(x)\to 0, n\to\infty$, што је свакако случај ако

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\max_{0\leqslant x\leqslant 1}p_\nu(x)$$

конвергира за све $0\leqslant\alpha<\pi^2$.

4^0 Полиноми $p_n(x)=p_n(x,\alpha)$, с којим ћемо одсад имати посла, су полиноми по промењљивој x чији коефициенти зависе од параметра α, који може да буде ма какав комплексан број. За реалне позитивне α полиноми $p_n(x,\alpha)$ су идентични са напред употребљаваним полиномима.

Дефиниција полинома $p_n(x)$:

(1) $$p_1(x)=x(1-x);$$

За свако комплексно α и $n=1,2,\ldots$ је

(2) $$p''_{n+1}(x)=-\alpha\,p_n(x)$$

и

(3) $$p_n(0)=p_n(1)=0.$$

Ставимо

$$m_{n+1}(\alpha)=\alpha\int_0^{\frac{1}{2}}t\,p_n(t)\,dt,\quad n=1,2,\ldots$$

Тада важи овај став:

Став II. *За* $|\alpha| < \pi^2$ *је*

$$\sum_{\mu=2}^{\infty} m_\mu(\alpha) = -\frac{2}{\alpha}\,\frac{\cos\sqrt{\frac{\alpha}{4}}-1}{\cos\sqrt{\frac{\alpha}{4}}} - \frac{1}{4}. \tag{4}$$

Овим ставом је доказ става I завршен, јер је за реалне позитивне α

$$\operatorname*{Max}_{0 \leqslant x \leqslant 1} p_n(x) = m_n(\alpha),$$

(што ћемо доказати у помоћном ставу 1), а (према ставу II) $\sum m_\mu(\alpha)$ конвергира за све $0 \leqslant \alpha < \pi^2$.

Доказ става II који ћу вам овде изнети није елементаран, будући да на једном месту употребљавам познати став теорије функција комплексне променљиве, по коме потенцијални ред неке аналитичке функције конвергира у унутрашњости највећег круга унутар кога функција нема сингуларитета.

Међутим, доказ Picard-ова става је елементаран. Наиме, да би доказали Picard-ов став, довољно је да покажемо да $\sum m_\mu(\alpha)$ конвергира за све $0 \leqslant \alpha < 8$, а то се, као што ћете видети из доказа неједначине (e) помоћног става 1, доказује потпуно елементарно.

Лема 1. *За реалне позитивне* α, $0 \leqslant x \leqslant 1$ *и* $n = 1, 2, \ldots$ *је*

(a) $$p_n(x) \geqslant 0,$$

(b) $$p_{n+1}(x) = (1-x)\int_0^x t\, p_n(t)\,dt + x\int_x^1 (1-t)\,p_n(t)\,dt,$$

(c) $$p_n(x) = p_n(1-x),$$

(d) $$\operatorname{Max} p_n(x) = p_n\left(\frac{1}{2}\right) = m_n(\alpha).$$

и

(e) $$m_n(\alpha) = O(\alpha^{n-1}),\ n \to \infty.$$

Доказ:

(a) и (b). Како су за реалне позитивне α полиноми, $p_n(x)$ идентични са полиномима које смо посматрали у тачки **2.** 2^0, то су тврђења (a) и (b) већ доказана.

(c) Ово тврђење је тачно за $n=1$, јер је $p_1(x)=x(1-x)$. Претпоставимо да је оно тачно за неко $n \geqslant 1$. Тада је, с обзиром на (b),

$$p_{n+1}(1-x) = \alpha x \int_0^{1-x} t\, p_n(1-t)\, dt + \alpha(1-x) \int_{1-x}^{1} (1-t)\, p_n(1-t)\, dt$$

$$= \alpha x \int_x^1 (1-t)\, p_n(t)\, dt + \alpha(1-x) \int_0^x t\, p_n(t)\, dt = p_{n+1}(x).$$

(d) Због $p_n(x) \geqslant 0$ и $p''_{n+1}(x) = -\alpha\, p_n(x)$ је $p_{n+1}(x)$ конкавна функција. Због (c) је $p_{n+1}(x)$ симетрично с обзиром на праву $x=\frac{1}{2}$. Стога је

$$\operatorname*{Max}_{0 \leqslant x \leqslant 1} p_{n+1}(x) = p_{n+1}\left(\frac{1}{2}\right).$$

Због (b) и (c) је

$$p_{n+1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\alpha}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} t\, p_n(t)\, dt + \frac{\alpha}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} (1-t)\, p_n(1-t)\, dt$$

$$= \alpha \int_0^{\frac{1}{2}} t\, p_n(t)\, dt = m_{n+1}(\alpha).$$

(e) Због (d) је за свако $\nu = 1, 2, \ldots$

$$m_\nu(\alpha) \leqslant m_{\nu-1}(\alpha)\, \alpha \int_0^{\frac{1}{2}} t\, dt = m_{\nu-1}(\alpha) \frac{\alpha}{8},$$

па је

$$\frac{m_n(\alpha)}{m_1(\alpha)} = \prod_{\nu=1}^{n-1} \frac{m_{\nu+1}(\alpha)}{m_\nu(\alpha)} \leqslant \left(\frac{\alpha}{8}\right)^{n-1},$$

дакле, шта више $m_n(\alpha) \leqslant \frac{1}{4}\left(\frac{\alpha}{8}\right)^{n-1}$ јер је $m_1(\alpha) = \frac{1}{4}$.

Лема 2. *За све* (комплексне) α *и* $n = 1, 2, \ldots$ *је*:

$$(f) \qquad \sum_{\nu=0}^{n-1} (1-)^{\nu} \frac{\left(\frac{\alpha}{4}\right)^{\nu}}{2\,\nu\,!} m_{n-\nu+1}(\alpha) = \frac{(-1)^n}{2} \frac{\left(\frac{\alpha}{4}\right)^n}{2\,n\,!} \frac{n(2n+3)}{(2n+1)(2n+2)}$$

и

(g) $$m_n(\alpha)=\alpha^{n-1}\lambda_n,$$

йри чему бројеви λ_n *не зависе* од α.

Доказ:

(f) Из дефиниције полинома $p_n(x,\alpha)$ и функције $m_n(\alpha)$ следи да је $m_n(\alpha)$ цела функција променљиве α. С тога је довољно да докажемо да је образац f тачан за реалне позитивне α. Према томе, нека је $\alpha\geqslant 0$.

Из обрасца

$$p_{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)=\alpha\int_0^{\frac{1}{2}} t p_n(t)\,dt$$

делимичном интеграцијом добивамо

$$p_{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\alpha}{2^3}p_n\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{\alpha}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} t^2 p'_n(t)\,dt.$$

Ако интеграл с десне стране још једном делимично интегришемо, добићемо

$$p_{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\alpha}{2^3}p_n\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{\alpha}{2.3}\int_0^{\frac{1}{2}} t\,p''_{n-1}(t)\,dt.$$

јер је $p'_n\left(\frac{1}{2}\right)=0$. Због $p''_n(x)=-\alpha p_{n-1}(x)$ и (d) је, дакле,

$$m_{n+1}(\alpha)-\frac{\frac{\alpha}{4}}{2!}m_n(\alpha)=-\frac{\alpha^2}{3!}\int_0^{\frac{1}{2}} t^3 p_{n-1}(t)\,dt.$$

Ако овај поступак применимо μ пута на интеграл са десне стране, добићемо

$$m_{n+1}(\alpha)-\sum_{\nu=1}^{\mu}(-1)^{\nu}\frac{\left(\frac{\alpha}{4}\right)^{\nu}}{2\nu!}m_{n-\nu+1}(\alpha)$$

$$=-(-1)^{\mu+1}\frac{\alpha^{\mu+1}}{(2\mu+1)!}\int_0^{\frac{1}{2}} t^{2\mu-1}p_{n-\mu}(t)\,dt.$$

Ставимо ли овде $\mu = n-1$, добићемо образац (f), јер је

$$\int_0^{\frac{1}{2}} t^{2n-1} p_1(t)\, dt = \frac{1}{4^{n+1}} \frac{2n+3}{(2n+1)(2n+2)} \,.$$

(g) је тачно за $n=1$ јер је $m_1(\alpha) = \frac{1}{4}$. Претпоставимо да је (g) тачно за неко $n \geqslant 1$. Због (f) је тада

$$m_n(\alpha) = \sum_{\nu=1}^{n-1} (-1)^\nu \frac{\left(\frac{\alpha}{4}\right)^\nu}{2\,\nu\,!} \alpha^{n-\nu} \lambda_{n-\nu+1} - \frac{(-1)^n}{2} \frac{\left(\frac{\alpha}{4}\right)^n}{2\,n\,!} \frac{n(2n+3)}{(2n+1)(2n+2)}$$
$$= \alpha^n \lambda_{n+1} \,.$$

5⁰ Доказ става II. Краткоће ради ставимо

$$\varepsilon_\nu = -\frac{(-1)^\nu}{2} \frac{\left(\frac{\alpha}{4}\right)^\nu}{2\,\nu\,!} \frac{\nu(2\nu+3)}{(2\nu+1)(2\nu+2)}, \quad \nu = 1, 2, \ldots$$

Тада првих $2n-2$ једначина (f) изгледају опширно написане овако:

$$\begin{array}{r}
+ m_2(\alpha) = \varepsilon_1 \\[4pt]
+ m_3(\alpha) - \dfrac{\frac{\alpha}{4}}{2\,!} m_2(\alpha) = \varepsilon_2 \\[8pt]
+ m_{n+1}(\alpha) + \ldots \qquad \ldots \pm (-1)^{n-1} \dfrac{\left(\frac{\alpha}{4}\right)^{n-1}}{2(n-1)!} m_2(\alpha) = \varepsilon_n \\[12pt]
\ldots + (-1)^{n-1} \dfrac{\left(\frac{\alpha}{4}\right)^{n-1}}{2(n-1)!} m_{n+1}(\alpha) + \ldots \quad \ldots + (-1)^{2n-2} \dfrac{\left(\frac{\alpha}{4}\right)^{2n-2}}{4(n-1)!} m_2(\alpha) = \varepsilon_{2n}
\end{array}$$

Ако ове једначине саберемо и на левој страни задржимо само уоквирене чланове, добићемо:

$$\sum_{\mu=2}^{n+1} m_\mu(\alpha) \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{(-1)^\nu}{2\nu\,!}\left(\sqrt{\frac{\alpha}{4}}\right)^{2\nu} = \sum_{\mu=2}^{2n} \varepsilon_\mu$$

$$- \sum_{\mu=2}^{n-1} m_{n+\mu}(\alpha) \sum_{\nu=0}^{n} \frac{(-1)^\nu}{2\nu\,!}\left(\frac{\alpha}{4}\right)^\nu$$

$$- \sum_{\mu=2}^{n-1} m_\mu(\alpha) \sum_{\nu=0}^{n-\mu} \frac{(-1)^{n+\nu}}{2(n+\nu)\,!}\left(\frac{\alpha}{4}\right)^{n+\nu}$$

$$= \sum_{\mu=2}^{2n} \varepsilon_\mu - J_1 - J_2\,.$$

У случају да је $0 \leqslant \alpha < 1$ биће, с обзиром на (e) тј. $m_n(\alpha) \leqslant C\alpha^{n-1}$

$$|J_1| \leqslant C \sum_{\mu=2}^{n+1} \alpha^{n+\mu} \sum_{\nu=0}^{n-\mu} \frac{1}{\nu\,!}\left(\frac{\alpha}{4}\right)^\nu < C\,n\,\alpha^n \exp\left[\frac{\alpha}{4}\right]$$

$$J_1 = O(n\,\alpha^n)\,,\; n \to \infty\,.$$

Исто тако се види да тада и J_2 задовољава исту неједначину Према томе, у случају $0 \leqslant \alpha < 1$ биће

$$\sum_{\mu=2}^{n+1} m_\mu(\alpha) \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{(-1)^\nu}{2\nu\,!}\left(\sqrt{\frac{\alpha}{4}}\right)^{2\nu} = \sum_{\mu=2}^{2n} \varepsilon_\mu + O(n\,\alpha^n)\,, n \to \infty. \tag{5}$$

Због (g) лева страна обрасца (4) је потенцијални ред по промењивој (α); десна страна овог обрасца је регуларна функција за све $|\alpha| < \pi^2$. Водећи рачуна о поменутом ставу теорије функција, видимо да је за доказ става II довољно доказати да образац (4) важи за све α неког лука C који лежи унутар области $|\alpha| < \pi^2$. У ту сврху узећемо да је лук C дуж $0 \leqslant x < 1$. У том случају можемо у окрасцу (5) извршити прелаз $n \to \infty$; добићемо

$$\cos\sqrt{\frac{\alpha}{4}} \sum_{\mu=2}^{\infty} m_\mu(\alpha) = -\frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\mu}{2\mu\,!}\left(\sqrt{\frac{\alpha}{4}}\right)^{2\mu} \frac{\mu(\mu+3)}{(2\mu+1)(2\mu+2)}\,.$$

Полазећи од потенцијалног реда функције $\cos\sqrt{\frac{\alpha}{4}}$, лако се може проверити да је десна страна горњег израза једнака

$$-\frac{1}{2}\left\{\frac{\cos\sqrt{\frac{\alpha}{4}}-1}{\frac{\alpha}{4}}+\frac{\cos\sqrt{\frac{\alpha}{4}}}{2}\right\}.$$

Тиме је став II доказан.

3. 1° Доказ става I има и поред своје дужине ту добру страну да не почива ни на којој теореми диференцијалних једначина другог реда. Међутим, ако претпоставим да су вам познате основне особине линеарних диференцијалних једначина, онда доказ става могу осетно скратити. Овај поступак интересантан је и с тога што пружа могућност да се докажу ставови са уопштеним Lipschitz-овим условом. О овоме ћу вам говорити идући пут. За сада хтео бих да вам изнесем други доказ става I. При томе ћу од онога што сам већ доказао употребити помоћни став 1 и оно што му претходи.

2° Приметимо претходно да је

$$p_n(x) = \alpha^{n-1} q_n(x) \tag{6}$$

при чему је $q_n(x)$ неки полином по x чији коефициенти не зависе од α.

Заиста, ако је ово тачно за неко $n \geqslant 1$, биће с обзиром на D),

$$p_{n+1}(x) = \alpha^n (1-x)\int_0^x t q_n(t)dt + \alpha^n x \int_x^1 (1-t)\, q_n(t)\, dt = \alpha^n q_{n+1}(x).$$

За $n=1$ је тврђење тачно, јер је $p_1(x) = x(1-x)$.

Ставимо

$$P_n(x) = P_n(x,\alpha) = \sum_{\nu=1}^{n} p_\nu(x).$$

Како је

$$p_1''(x) = -2,$$

то сабирањем ове и n првих једначина $p''_{\nu+1}(x) = -\alpha\, p_\nu(x)$ добивамо

$$P''_{n+1}(x) = -2 - P_n(x).$$

Нека је $0 < \alpha < 1$. Тада с обзиром на (е), $P_n(x)$ тежи некој граничној функцији $P(x)$. Очито да тада и

$$P_n''{}_{+1}(x) \to P''(x), \quad \text{кад } n \to \infty$$

Стога у горњој једначини можемо учинити прелаз $n \to \infty$. На тај начин добивамо

$$P''(x) + \alpha P(x) = -2.$$

Очито је да $P(x)$ задовољава гранични услов

$$P(0) = P(1) = 0,$$

јер је то случај са сваким од полинома $p_n(x)$. Стога је

$$P(x) = \frac{2}{\alpha}(\cos\sqrt{\alpha}\, x - 1) + \frac{2}{\alpha}\frac{1 - \cos\sqrt{\alpha}}{\cos\sqrt{\alpha}}\sin\sqrt{\alpha}\, x.$$

Десна страна овог обрасца даје нам аналитичко продужење функције $P(x, \alpha)$ по промењивој α. Према томе, $P(x, \alpha)$ је регуларно за све $|\alpha| < \pi^2$. С обзиром на (6) и поменуту теорему теорије функција, јасно је да потенцијални ред

$$\sum p_\nu(x) = \sum \alpha^\nu q_{\nu+1}(x)$$

конвергира за $|\alpha| < \pi^2$ што је и требало доказати.

ÜBER DIE NULLSTELLEN DER INTERGRALE NICHTLINEARER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN ZWEITER ORDNUNG

Von V. G. Avakumović (Beograd)

Wiedergabe einer Kursusvorlesung über die Randwertaufgabe (1) $y'' = f(x, y)$; $y(a) = y(b) = 0$. Dabei wird stets vorausgesetzt dass im Gebiete $D: a \leqslant x \leqslant b$, $|y| \leqslant \frac{1}{2} M(x-a)(b-x)$ die Funktion $f(x, y)$ stetig und dem Betrage nach $\leqslant M$ ist. Es wird folgende Verallgemeinerungdes Picardschen Satzes bewiesen (Satz A): *Genügt $f(x, y)$ ausserdem der Bedingung* (2) $|f(x\bar{y}) - f(x, \underline{y})| \leqslant \alpha|\bar{y} - \underline{y}|$ *mit* (3) $\alpha(b-a)^2 < \pi^2$, *so hat* (1) *genau eine in D liegende Lösung. Diese Lösung lässt sich mittels der Methode der Schrittweisen Annäherung berechnen.* In (3) lässt sich das Zeichen $<$ nicht durch $\leqslant$ ersetzen. Aus diesem Satz ergibt sich folgendes Analogon der Sturmschen Ungleichung (Satz B): *Genügt $f(x, y)$ ausser der Bedingung* (2) *noch der Bedingung $f(x, 0) \equiv 0$ und sind a und b zwei nacheinanderfolgende Nullstellen einer Lösung von $y'' = f(x, y)$ so ist notwendigerweise* $b - a \geqslant \pi/\sqrt{\alpha}$.

ОПШТЕ ЈЕДНАЧИНЕ КРЕТАЊА СИСТЕМА МАТЕРИЈАЛНИХ ТАЧАКА

РАДИВОЈЕ КАШАНИН (Београд)

При проучавању кретања система материјалних тачака подвргнутих везама редовно се узимају или холономне везе или, ако су везе нехолономне, линеарне по координатама брзина (Декартовим или генералисаним). Изузетно су се проучавале и везе квадратне по координатама брзине, ако те везе резултују једним лимитним процесом из линеарних веза.

Циљ овога рада је:

1. Да се даду диференцијалне једначине свих реалних кретања компатибилних са везама без обзира на то какве су ове везе: холономне, или нехолономне, линеарне по брзинама или не (IV);

2. Да се, између свих могућих реалних кретања, истакну и дефинишу кретања са идеално успостављеним везама (V);

3. Да се дефинише појам виртуелних померања и склерономост и реономост у најопштијем случају веза (VI), и на основи тога изведе т. зв. основна једначина Динамике ма за какве везе (VII);

4. Да се појму кретања са идеално успостављеним везама даде конкретно тумачење (VIII).

I

Кад су дате спољашње и унутрашње силе и почетни услови за систем материјалних тачака, кретање сваке од тих тачака потпуно је одређено основним једначинама Динамике, тј. не могу се дати унапред више никакви услови које би требало да испуњавају вектори положаја и брзина датих тачака. Да би били испуњени још и неки унапред дати услови, потребно је уопште увести и нове силе поред већ датих. Проблем се може овако формулисати: на поједине материјалне тачке неког система дејствују познате спољашње и унутрашње силе; какве силе треба још за поједине материјалне тачке додати и какве почетне услове узети да би, у току кретања, између вектора положаја и брзина тих тачака постојале извесне везе, изражене неким, унапред датим, једначинама или неједначинама? — Разуме се, све се то ради у одређеном систему референције у ком се кретање проучава.

За овакве системе материјалних тачака се каже да су везани. Везе изражене једначинама су билатералне, а везе изражене неједначинама су унилатералне. Силе које треба додати да би везе биле реализоване зову се силе веза. У даљем ћемо се бавити само билатералним везама.

Билатералне везе су изражене једначинама у којима долазе уопште $3n$ координата x_i, y_i, z_i материјалних тачака, $3n$ координата $\dot{x}_i$, $\dot{y}_i$, $\dot{z}_i$ брзина тих тачака и време t. Неке од тих једначина садржаваће само координате тачака, а не и координате брзина, а неке ће, поред координата тачака, садржавати и координате брзина. Првих нека буде μ, а других μ':

$$f_j(x_1, y_1, z_1; \ldots; x_n, y_n, z_n; t) = 0, \quad g_k(x_1, y_1, z_1; \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1; \ldots, \dot{z}_n; t) = 0$$
$$(j = 1, 2, \ldots, \mu) \qquad (k = 1, 2, \ldots, \mu'). \tag{1}$$

Укупан број $\nu = \mu + \mu'$ тих једначина мањи је од $3n$, јер би иначе већ самим тим једначинама кретање било потпуно одређено или онемогућено.

Да не бисмо стално разликовали две врсте једначина, оне које садрже координате брзина и оне које их не садрже, ми ћемо, помоћу диференцирања по t, и првој врсти дати облик друге:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial f_j}{\partial y_i} \dot{y}_i + \frac{\partial f_j}{\partial z_i} \dot{z}_i \right) + \frac{\partial f_j}{\partial t} = 0. \tag{2}$$

Означимо ли леву страну ове једначине са $g_{\nu+j}$, имаћемо као везе:

$$g_k(x_1, y_1, z_1; \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1; \ldots; x_n, y_n, z_n; \dot{x}_n, \dot{y}_n, \dot{z}_n; t) = 0,$$
$$(k = 1, 2, \ldots, \nu < 3n) \tag{3}$$

где свака једначина садржи бар једну координату брзине. Интегрирањем из (2) добивамо $f_j = C_j$, где су C_j константе; но, како и почетни услови морају задовољавати једначине $f_j = 0$, то излази $C_j = 0$, па је опет $f_j = 0$. Према томе, систем једначина (3) еквивалентан је са системом једначина (1).

Из система (3) моћи ће се уопште ν координата брзина изразити као функције $3n$ координата датих тачака, преосталих $3n - \nu$ координата брзина и времена t. Ако то није могуће, онда ће се моћи начинити известан број елиминаната, тј. једначина без координата брзина, па ћемо те једначине опет диференцирати по t.

У сваком случају, дакле, ако су једначине (1) независне, можемо претпоставити да систем (3) дефинише ν координата брзинâ као функције $3n$ координата тачака, преосталих $3n-\nu$ координата брзина и времена t. Тих ν координата брзина означићемо са ξ_1, ξ_2, $\ldots$, ξ_ν. Онда је:

$$\xi_j = \Theta_j(x_1, y_1, z_1; \ldots; x_n, y_n, z_n; \xi_{\nu+1} \ldots, \xi_{3n}), \quad (j=1,2,\ldots,\nu) \tag{4}$$

где су $\xi_{\nu+1} \ldots, \xi_{3n}$ оне координате брзина које су после $\xi_1, \ldots, \xi_\nu$ преостале. Претпостављамо, дакле, да су везе независне и непротивречне; то значи да мора бити

$$\frac{\partial(g_1, g_2, \ldots, g_\nu)}{\partial(\dot{\xi}_1, \dot{\xi}_2, \ldots, \dot{\xi}_\nu)} \neq 0. \tag{4bis}$$

Диференцирањем по t добивамо из (3):

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial g_k}{\partial \dot{x}_i}\ddot{x}_i + \frac{\partial g_k}{\partial \dot{y}_i}\ddot{y}_i + \frac{\partial g_k}{\partial \dot{z}_i}\ddot{z}_i\right) + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial g_k}{\partial x_i}\dot{x}_i + \frac{\partial g_k}{\partial y_i}\dot{y}_i + \frac{\partial g_k}{\partial z_i}\dot{z}_i\right) + \frac{\partial g_k}{\partial t} = 0$$

$$(k = 1, 2 \ldots, \nu). \tag{5}$$

Интегрирањем добивамо одавде $g_k = C'_k$, где су C'_k константе. Но, како почетни услови морају задовољавати једначине $g_k = 0$, то је $C_k' = 0$, па је опет $g_k = 0$. Према томе можемо рећи: почетни услови морају задовољавати једначине $f_j = 0$ и $g_k = 0$, $(j = 1,2,\ldots,\mu;\ k = 1,2,\ldots,\nu)$; ако почетни услови те једначине задовољавају, за систем веза може се узети систем једначина (5). Тако смо решили питање почетних услова и дошли за везе до облика (5).

Да би нам писање у облику (5) било лакше, употребићемо векторски рачун. Увешћемо формалне векторе ∇_i и ∇'_i, т. зв. Хамилтонов оператор, са координатама

$$\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial y_i}, \frac{\partial}{\partial z_i} \quad \text{и} \quad \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i}, \frac{\partial}{\partial \dot{y}_i}, \frac{\partial}{\partial \dot{z}_i}.$$

Вектор положаја тачке (x_i, y_i, z_i) означићемо са $\mathfrak{r}_i$, а његове изводе по t првог и другог реда са $\dot{\mathfrak{r}}_i$ и $\ddot{\mathfrak{r}}_i$. Онда се систем (5) може писати у облику

$$\sum_{i=1}^{n} \ddot{\mathfrak{r}}_i \cdot \nabla'_i g_k + \sum_{i=1}^{n} \dot{\mathfrak{r}}_i \cdot \nabla_i g_k + \frac{\partial g_k}{\partial t} = 0 \tag{6}$$

$$(k = 1, 2, \ldots, \nu).$$

Испитаћемо прво какве треба да буду спољашње силе $\mathfrak{F}_i$ и унутрашње силе $\mathfrak{F}'_i$, па да везе при кретању буду задовољене ма какви били почетни услови компатибилни са $f_j = 0$ и $g_k = 0$. У том случају, поред једначина (6), морају бити задовољене и основне једначине Динамике:

$$m_i \ddot{\mathfrak{r}}_i = \mathfrak{F}_i + \mathfrak{F}_i', \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

где је m_i маса материјалне тачке (x_i, y_i, z_i). Узмемо ли одавде вредност $\ddot{\mathfrak{r}}_i$ и ставимо је у (6), добићемо за $\mathfrak{F}_i$ и $\mathfrak{F}'_i$ ν услова:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{m_i} (\mathfrak{F} + {}_i\mathfrak{F}'_i) . \nabla'_i g_k + \sum_{i=1}^{n} \dot{\mathfrak{r}}_i . \nabla_i g_k + \frac{\partial g_k}{\partial t} = 0 \tag{7}$$

$$(k = 1, 2, \ldots, \nu).$$

Силе $\mathfrak{F}_i$ и $\mathfrak{F}'_i$ дате су унапред као функције вектора положаја $\mathfrak{r}_i$, вектора брзина $\mathfrak{r}_i$ и времена t; униврстимо ли те функције у леву страну једначине (7), мора она дати идентички нулу. Тада су постављене везе први интеграли диференцијалних једначина кретања.

Ако силе $\mathfrak{F}_i$ и $\mathfrak{F}'_i$ задовољавају услове (7), нису то једине силе под чијим ће утицајем бити везе (3) одржане. Додајмо, наиме, датим силама $\mathfrak{F}_i$ и $\mathfrak{F}'_i$ за сваку тачку још силу $\overline{\mathfrak{F}}_i$, па покушајмо ову одредити тако да буду одржане везе (6). Онда, поред једначина (6), морају бити задовољене и једначине

$$m_i \ddot{\mathfrak{r}}_i = \mathfrak{F}_i + \mathfrak{F}_i' + \overline{\mathfrak{F}}_i, \; (i = 1, 2, \ldots, n)$$

Узмемо ли одавде $\ddot{\mathfrak{r}}_i$ и униврстимо у (6), добићемо

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{m_i} (\dot{\mathfrak{F}}_i + \mathfrak{F}_i' + \overline{\mathfrak{F}}_i) . \nabla' g_k + \sum_{i=1}^{n} \dot{\mathfrak{r}}_i . \nabla_i g_k + \frac{\partial g_k}{\partial t} = 0$$

што са (7) даје:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{m_i} \overline{\mathfrak{F}}_i \cdot \nabla_i' g_k = 0, \quad (k = 1, 2, \ldots \nu). \tag{8}$$

Овде имамо ν једначина за $3\,n > \nu$ координата вектора $\overline{\mathfrak{F}}_i$, те када узмемо ма какве силе $\overline{\mathfrak{F}}_i$ које задовољавају ових ν једначина, биће везе одржане, само ће кретања, наравно, увек уопште бити друга. Према томе, да би под утицајем датих спољашњих и унутрашњих сила $\mathfrak{F}_i$ и $\mathfrak{F}_i'$ везе $g_k = 0$ биле одржане без обзира на почетне услове, потребно је и довољно да те силе задовољавају једначине (7); ако је то случај, те силе нису једине под чијим утицајем су дате везе одржане, већ се за сваку тачку може додати сила $\overline{\mathfrak{F}}_i$, но тако да ове силе $\overline{\mathfrak{F}}_i$ задовољавају једначине (8).

Ако дате спољашње и унутрашње силе $\mathfrak{F}_i$ и $\mathfrak{F}_i'$ не задовољавају једначине (7), кретање под њиховим утицајем не задовољава дате везе, осим, може бити, под извесним почетним условима. Ми ћемо онда покушати да поред тих сила додамо тачки нову силу $\mathfrak{F}_i^*$, коју ћемо одредити тако да сад везе буду одржане. То значи, треба одредити $\mathfrak{F}_i^*$ тако да поред једначина (6) важе и једначине

$$m_i\,\ddot{\mathfrak{r}}_i = \mathfrak{F}_i + \mathfrak{F}_i' + \mathfrak{F}_i^*, \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Узмемо ли одавде $\ddot{\mathfrak{r}}_i$ и ставимо у (6), добићемо за $\mathfrak{F}_i^*$ једначине

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{m_i}\mathfrak{F}_i^* \cdot \nabla_i' g_k = -\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{m_i}(\mathfrak{F}_i + \mathfrak{F}_i') \cdot \nabla_i' g_k + \sum_{i=1}^{n} \dot{\mathfrak{r}}_i \cdot \nabla^i g_k + \frac{\partial g_k}{\partial t}\right]$$
$$(k = 1, 2, \ldots, \nu).$$

Како су $\mathfrak{F}_i, \mathfrak{F}_i', \nabla_i g_k, \nabla_i' g_k$ и $\dfrac{\partial g_k}{\partial t}$ познате функције координата материјалних тачака, координата њихових брзина и времена, то на десној страни последње једначине имамо познату функцију тих координата и времена; означићемо је са G_k:

$$G_k = -\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{m_i}(\mathfrak{F}_i + \mathfrak{F}_i') \cdot \nabla_i' g_k + \sum_{i=1}^{n} \dot{\mathfrak{r}}_i \cdot \nabla_i\, g_k + \frac{\partial g_k}{\partial t}\right]. \tag{9}$$

За $\mathfrak{F}_i^*$ имаћемо тако једначине:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{m_i}\,\mathfrak{F}_i^* \cdot \nabla_i' g_k = G_k \tag{10}$$
$$(k = 1, 2, \ldots, \nu).$$

Постављени проблем се, дакле, своди на питање имају ли једначине (10) решења по $\mathfrak{F}_i^*$, и ако имају, како ћемо их наћи.

Напред смо у (4^{bis}) претпоставили да је

$$\frac{\partial(g_1, g_2, \ldots, g_\nu)}{\partial(\dot{\xi}_1, \dot{\xi}_2, \ldots, \dot{\xi}_\nu)} \neq 0.$$

Међутим, једначине (10) линеарне су по координатама векторâ $\dfrac{1}{m_i}\mathfrak{F}_i^*$, са коефицијентима $\dfrac{\partial g_k}{\partial \dot{\xi}_j}$, $(j = 1, 2, \ldots, 3n)$, те ће се моћи решити по онима од тих координата уз које су коефицијенти $\dfrac{\partial g_k}{\partial \dot{\xi}_j}$ за $j = 1, 2, \ldots, \nu$, јер је детерминанта начињена од тих коефицијената баш наведена функционална детерминанта; осталих $3n-\nu$ координата сила $\mathfrak{F}_i^*$ могу се узети произвољно. Према томе, систем (10) има решења по $\mathfrak{F}_i^*$, и то бесконачно много. Нека буде $\mathfrak{F}_i''$, $(i=1,2,\ldots,n)$ један спрег таквих решења. Ставимо ли $\mathfrak{F}_i^* = \mathfrak{F}_i''+\overline{\mathfrak{F}}_i$ онда ће, као што је лако уверити се рачуном, а што следује и из раније реченог, вектори $\overline{\mathfrak{F}}_i$ задовољавати једначине (8).

И тако дошли смо до овог резултата: да би се при кретању система од n материјалних тачака са масама m_i, под утицајем датих спољашњих и унутрашњих сила $\mathfrak{F}_i$ и $\mathfrak{F}_i'$, одржавале унапред дате везе $g_k=0, (k=1,2,\ldots,\nu)$, потребно је за сваку од тих тачака додати једну одређену силу веза̂ $\mathfrak{F}_i''$ која задовољава једначине

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{m_i}\mathfrak{F}_i''\cdot\nabla_i' g_k = G_k,\quad (k=1,2,\ldots\nu) \tag{11}$$

и силе $\overline{\mathfrak{F}}_i$ које задовољавају једначине

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{m_i}\overline{\mathfrak{F}}_i\cdot\nabla_i' g_k = 0,\quad (k=1,2,\ldots.\nu). \tag{11bis}$$

На тај начин, цео проблем се своди на једначине:

$$\left.\begin{array}{c} m_i\ddot{\mathfrak{r}}_i = \mathfrak{F}_i+\mathfrak{F}_i'+\mathfrak{F}_i''+\overline{\mathfrak{F}}_i,\quad g_k=0; \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{m_i}\mathfrak{F}_i''\cdot\nabla_i' g_k = G_k,\quad \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{m_i}\overline{\mathfrak{F}}_i\cdot\nabla_i' g_k = 0; \\ (i=1,2,\ldots,n;\ k=1,2,\ldots,\nu) \\ \text{уз почетне услове} \\ f_j|_0=0,\quad g_k|_0=0;\quad (j=1,2,\ldots,\mu). \end{array}\right\} \tag{12}$$

У једначинама (12) остали су нам још вектори $\mathfrak{F}_i''$ непрецизирани: они су нека одређена решења једначина (11), но није речено која. Треба се, дакле, определити за нека одређена решења између свих могућих решења тих једначина. Ако се то учини и ако се онда узму и вектори $\overline{\mathfrak{F}}_i$ тако да задовољавају једначине (11bis), проблем се своди на интегрирање $3n$ скаларних диференцијалних једначина другог реда са $3n$ непознатих функција x_i, y_i, z_i времена t; ове једначине су линеарне по $\ddot{x}_i, \ddot{y}_i, \ddot{z}_i$.

II

Везе се могу дати у много оштијем облику него што смо досад радили. Нека буду, наиме, $q_1, q_2, \ldots, q_\alpha$ α параметара — функција од t — и нека координате x_i, y_i, z_i буду функције тих параметара:

$$x_i = x_i(q_1, q_2, \ldots, q_\alpha),\ y_i = y_i(q_1, q_2, \ldots, q_\alpha),\ z_i = z_i(q_1, q_2, \ldots, q_\alpha), \tag{13}$$

или у векторском облику:

$$\mathfrak{r}_i = \mathfrak{r}_i(q_1, q_2, \ldots, q_\alpha). \tag{14}$$

Између тих α параметара q_j нека постоји β веза:

$$\gamma_k(q_1, q_2, \ldots, q_\alpha;\ \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_\alpha) = 0, \quad (k = 1, 2, \ldots, \beta), \tag{15}$$

$\left(\text{где је } \dot{q}_j = \dfrac{dq_j}{dt}\right)$, од којих свака садржи бар по један извод, и то тако да систем једначина (15) дефинише β тих извода као функције осталих извода и параметара q_j, на пример

$$\dot{q}_j = \vartheta_j(q_1, \ldots, q_\alpha;\ \dot{q}_{\beta+1},\ \dot{q}_{\beta+1}, \ldots, \dot{q}_\alpha) \tag{16}$$
$$(j = 1, 2, \ldots, \beta.$$

Претпостављамо да су везе независне и непротивречне; то значи да мора бити

$$\frac{\partial(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_\beta)}{\partial(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_\beta)} \neq 0. \tag{16bis}$$

Ако везе између параметра q_j не садрже изводе, може се, као и у I, диференцирањем по t постићи да садрже; претпостављамо да је то учињено и да су то једначине (15). Кретање тачака (x_i, y_i, z_i) биће познато ако знамо параметре q_j као функције времена.

Да би наш проблем имао смисла, морамо претпоставити $0 < \alpha - \beta \leqq 3n$. Јер, за $\alpha - \beta < 0$ био би број једначина (15) већи од броја параметара, а за $\alpha - \beta > 3n$ био би број независних параметара већи од броја координата, што ни једно ни друго нема за постављени проблем смисла; за $\alpha - \beta = 0$ био би број параметара једнак броју једначина (15), те би се из (15) могли ти параметри одредити као функције од t, тј. било би, на основи (13), кретање потпуно одређено.

У I посматране везе су специјалан случај ових. Треба, наиме, узети $\alpha = 3n + 1$, $\beta = \nu$, $x_i = q_i$, $y_i = q_{n+i}$, $z_i = q_{2n+i}$, $t = q_{3n+1}$, па ће (13) и (15) прећи у (3). На овај облик веза (13) и

(15) могу се лако свести још компликованије везе. Узмимо да су координате x_i, y_i, z_i функције не само параметара q_j, већ и њихових извода по t до извесног реда. Нека, на пример, од параметра q_1 долазе и изводи вишег реда, и највиши ред нека буде h. Ставићемо

$$\frac{dq_1}{dt} = r_1, \quad \frac{d^2 q_1}{dt^2} = r_2, \ldots, \quad \frac{d^h q_1}{dt^h} = r_h .$$

Тако смо увели нових h параметара $r_1, r_2, \ldots, r_h$, али и нових h веза:

$$\dot{q}_1 = r_1, \quad \dot{r}_1 = r_2, \ldots, \quad \dot{r}_{h-1} = r_h .$$

Урадимо ли то за све параметре који долазе са изводима вишег реда у (13), имаћемо коначно опет облик (13) и (15), само ће број параметара бити повећан, а за исто толико и број веза; број $\alpha - \beta$ остаје непромењен. Слично ћемо урадити ако у једначинама (15) долазе изводи реда већег од један. Ако функције на десној страни у (13) и једначине (15) садрже време t, ставићемо $t = q_{\alpha+1}$; тиме смо увели нов параметар $q_{\alpha+1}$, али и нову везу $\dot{q}_{\alpha+1} - 1 = 0$, па опет имамо облик (13) и (15). Сличним путем може се на овај облик свести и случај кад су дате везе између правоуглих координата и њихових извода ма до ког реда, а не само првог као у I.

Параметри q_j су генералисане координате, њихови изводи првог реда по t, $\dot{q}_j = \dfrac{dq_j}{dt}$, су генералисане брзине, а изводи другог реда по t, $\ddot{q}_j = \dfrac{d^2 q_j}{dt^2}$ генералисана убрзања.

У случају веза (13) и (15) може се наш задатак овако формулисати: кад су дате спољашње и унутрашње силе $\mathfrak{F}_i$ и $\mathfrak{F}'_i$, какве силе веза $\mathfrak{F}_i^*$ треба додати, па да приликом кретања те везе буду одржане? Другим речима, наш задатак је у овоме: решити $6n+\beta$ скаларних једначина:

$$m_i \ddot{\mathfrak{r}}_i = \mathfrak{F}_i + \mathfrak{F}'_i + \mathfrak{F}_i^*, \quad \mathfrak{r}_i = \mathfrak{r}_i (q_1, q_2, \ldots, q_\alpha), \; \gamma_k = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n; \; k = 1, 2, \ldots, \beta) \tag{17}$$

по α скалара $q_1, q_2, \ldots, q_\alpha$, по $3n$ скалара x_i, y_i, z_i и $3n$ координата вектора $\mathfrak{F}_i^*$, тј. одредити генералисане координате као функције времена и одредити силе веза̂. Кад су генералисане координате одређене као функције времена, биће, помоћу (13) или (14), познато и кретање сваке појединe материјалне тачке.

Према (13), брзине и убрзања материјалних тачака, силе итд., — све се то може изразити помоћу генералисаних координата и њихових извода по t. На пример, за вектор брзине $\dot{\mathfrak{r}}_i$ имаћемо из (14):

$$\dot{\mathfrak{r}}_i = \sum_{\iota=1}^{\alpha} \frac{\partial \mathfrak{r}_i}{\partial q_\iota} \dot{q}_\iota , \tag{18}$$

а одавде за вектор убрзања

$$\ddot{\mathfrak{r}}_i = \sum_{\iota=1}^{\alpha} \frac{\partial \mathfrak{r}_i}{\partial q_\iota} \ddot{q}_\iota + \sum_{r=1}^{\alpha} \sum_{s=1}^{\alpha} \frac{\partial^2 \mathfrak{r}_i}{\partial q_r \partial q_s} \dot{q}_r \dot{q}_s . \tag{19}$$

Силе $\mathfrak{F}_i$ и $\mathfrak{F}_i'$ су познате функције координата материјалних тачака, координата брзина тих тачака и времена; према томе, треба их, на основи (14) и (18), сматрати као познате функције генералисаних координата и генералисаних брзина и тако с њима оперисати. На пример, укупан елементарни рад свих спољашњих сила биће:

$$\sum_{i=1}^{n} \mathfrak{F}_i \cdot d\mathfrak{r}_i = \sum_{i=1}^{n} \left[\mathfrak{F}_i \sum_{j=1}^{\alpha} \frac{\partial \mathfrak{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \right] dt = \sum_{j=1}^{\alpha} \left(\sum_{i=1}^{n} \mathfrak{F}_i \cdot \frac{\partial \mathfrak{r}_i}{\partial q_j} \right) dq_j .$$

Скалари

$$Q_j = \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{F}_i \cdot \frac{\partial \mathfrak{r}_i}{\partial q_j} , \; (j = 1, 2, \ldots, \alpha) \tag{20}$$

зову се генералисане спољашње силе. Слично овоме имамо генералисане унутрашње силе:

$$Q'_j = \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{F}'_i \cdot \frac{\partial \mathfrak{r}_i}{\partial q_j} , \; (j = 1, 2, \ldots, \alpha) \tag{21}$$

и генералисане силе веза:

$$Q_j^* = \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{F}^*_i \cdot \frac{\partial \mathfrak{r}_i}{\partial q_j} , \; (j = 1, 2, \ldots, \alpha) \tag{22}$$

Генералисане силе су, тако, познате функције генералисаних координата и генералисаних брзина, ако су саме силе дате. Укупан елементарни рад свих спољашњих сила биће онда

$$\sum_{j=1}^{\alpha} Q_j \, dq_j ,$$

и слично за унутрашње силе и силе веза.

Скаларним множењем прве једначине из (17) са $\frac{\partial \mathfrak{r}_i}{\partial q_j}$ добивамо

$$m_i \ddot{\mathfrak{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathfrak{r}_i}{\partial q_j} = \mathfrak{F}_i \cdot \frac{\partial \mathfrak{r}_i}{\partial q_j} + \mathfrak{F}'_i \cdot \frac{\partial \mathfrak{r}_i}{\partial q_j} + \mathfrak{F}_i^* \cdot \frac{\partial \mathfrak{r}_i}{\partial q_j},$$

па је, према (20), (21) и (22),

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \ddot{\mathfrak{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathfrak{r}_i}{\partial q_j} = Q_j + Q'_j + Q_j^* \qquad (j = 1, 2, \ldots, \alpha). \tag{23}$$

Како су $\mathfrak{r}_i$ познате функције генералисаних координата, то ћемо на левој страни ове једначине имати познату функцију генералисаних координата и њихових извода првог и другог реда; треба је само израчунати. Онда ће нам (23) дати α једначина по непознатих α генералисаних координата и непознатих α генералисаних сила веза. Но, уз то постоји још и β једначина $\gamma_k = 0$, укупно, дакле, $\alpha+\beta$ једначина по 2α непознатих, $2\alpha > \alpha+\beta$. Помножимо ли једначину (19) скаларно са $\frac{\partial \mathfrak{r}_i}{\partial q_j}$, добићемо сабирањем од $i=1$ до $i=n$, у вези са (23),

$$\sum_{\iota=1}^{\alpha} \left(\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\partial \mathfrak{r}_i}{\partial q_\iota} \cdot \frac{\partial \mathfrak{r}_i}{\partial q_\iota} \right) \ddot{q}_\iota + \sum_{r=1}^{\alpha} \sum_{s=1}^{\alpha} \left(\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\partial^2 \mathfrak{r}_i}{\partial q_r \partial q_s} \cdot \frac{\partial \mathfrak{r}_i}{\partial q_j} \right) \dot{q}_r \dot{q}_s = Q_j + Q_j + Q_j^* . \qquad (j = 1, 2, \ldots, \alpha) \tag{24}$$

Левој страни ове једначине може се дати сажетији облик. Величина T одређена са

$$2\,T = \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\mathfrak{r}}_i \cdot \dot{\mathfrak{r}}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \,(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) \tag{25}$$

зове се кинетичка енергија система материјалних тачака. Диференцирањем добивамо:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\mathfrak{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathfrak{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} .$$

Но, из (18) добивамо, како у $\mathfrak{r}_i$ не улазе генералисане брзине,

$$\frac{\partial \dot{\mathfrak{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \mathfrak{r}_i}{\partial q_j},$$

па је

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\mathfrak{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathfrak{r}_i}{\partial q_j}.$$

Диференцирање по времену t даје:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{i=1}^{n} m_i \ddot{\mathfrak{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathfrak{r}_i}{\partial q_j} + \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\mathfrak{r}}_i \cdot \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{r}_i}{\partial q_j}$$

С друге стране, из (25) добивамо

$$\frac{\partial T}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\mathfrak{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathfrak{r}}_i}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\mathfrak{r}}_i \cdot \frac{\partial}{\partial q_j}\frac{d\mathfrak{r}_i}{dt}.$$

Према томе је

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^{n} m_i \ddot{\mathfrak{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathfrak{r}_i}{\partial q_j} + \sum_{i=1}^{n} m_i \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{r}_i}{\partial q_j} - \frac{\partial}{\partial q_j}\frac{d\mathfrak{r}_i}{dt} \right).$$

Лако се, међутим , уверити да је

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{r}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j}\frac{d\mathfrak{r}_i}{dt}.$$

И тако, с обзиром на (23), имамо:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j + Q_j' + Q_j^*. \tag{26}$$

Величина S одређена са

$$2S = \sum_{i=1}^{n} m_i \ddot{\mathfrak{r}}_i \cdot \ddot{\mathfrak{r}}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i (\ddot{x}_i^2 + \ddot{y}_i^2 + \ddot{z}_i^2) \tag{27}$$

зове се енергија убрзања система материјалних тачака. Диференцирањем добивамо:

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_j} = \sum_{i=1}^{n} m_i \ddot{\mathfrak{r}}_i \cdot \frac{\partial \ddot{\mathfrak{r}}_i}{\partial \ddot{q}_j}.$$

Међутим, из (19) излази

$$\frac{\partial \ddot{\mathfrak{r}}_i}{\partial \ddot{q}_j} = \frac{\partial \mathfrak{r}_i}{\partial q_j},$$

па је, на основи (23),

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_j} = Q_j + Q_j' + Q_j^*. \tag{28}$$

Тако смо изнели четири начина за формирање потребних нам диференцијалних једначина: (23), (24), (26) и (28). Који ће се од ова четири начина у неком конкретном случају употребити, зависи од тога шта је лакше из (13) израчунати. За писање је најзгоднији облик (28). Скалар на левој страни тих једначина означићемо са $-J_j$, и звaћемо J_j генералисана сила инерције:

$$\begin{aligned} -J_j &= \sum_{i=1}^{n} m_i \ddot{\mathfrak{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathfrak{r}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = \frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_j} = \\ &= \sum_{\iota=1}^{\alpha}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\partial \mathfrak{r}_i}{\partial q_\iota}\cdot\frac{\partial \mathfrak{r}_i}{\partial q_j}\right)\ddot{q}_\iota + \sum_{r=1}^{\alpha}\sum_{s=1}^{\alpha}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\partial^2 \mathfrak{r}_i}{\partial q_r\,\partial q_s}\frac{\partial \mathfrak{r}_i}{\partial q_j}\right)\dot{q}_r\,\dot{q}_s. \end{aligned} \tag{29}$$

Наш задатак је тако сведен на овај: из $\alpha+\beta$ једначина

$$\begin{gathered} J_j + Q_j + Q'_j + Q_j^* = 0, \ \ \gamma_k = 0, \\ (j = 1,2,\ldots,\alpha;\ \ k = 1,2,\ldots,\beta) \end{gathered} \tag{30}$$

где су Q_j, Q'_j, γ_k познате функције од $q_1, q_2, \ldots, q_\alpha, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_\alpha$, а J_j још и од $\ddot{q}_1, \ddot{q}_2, \ldots, \ddot{q}_\alpha$, одредити 2α величина q_j и Q_j^* као функције од t. Непознатих има, дакле, више него једначина, јер је $\alpha-\beta > 0$. Према томе, рачунски би требало постављени задатак овако решавати: 1° из познатих функција x_i, y_i, z_i у (13) треба формирати J_j, по једном од начина датих у (29), и Q_j и Q'_j, по (20) и (21); 2° наћи решења система једначина (30) по q_j и Q_j^*; 3° нађене функције q_j ставити у (13), чиме ће се и координате x_i, y_i, z_i добити као функције времена; 4° из $m_i \ddot{\mathfrak{r}}_i = \mathfrak{F}_i + \mathfrak{F}'_i + \mathfrak{F}_i^*$ одредити силе веза $\mathfrak{F}_i^*$. Сви су ови послови врло прости и елементарни, осим 2°, тј. решавања система диференцијалних једначина (30).

У специјалном случају који смо третирали у I прва група једначина из (30) постаје $3n$ скаларних једначина изведених из n векторских једначина $m_i \ddot{\mathfrak{r}}_i = \mathfrak{F}_i + \mathfrak{F}'_i + \mathfrak{F}_i^*$, а друга група је ν веза $g_k = 0$.

III

Ради лакшег писања ставићемо:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\partial \mathfrak{r}_i}{\partial q_\iota} \cdot \frac{\partial \mathfrak{r}_i}{\partial q_j} = a_{j\iota}, \tag{31}$$

$$Q_j + Q'_j - \sum_{r=1}^{\alpha} \sum_{s=1}^{\alpha} \left(\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\partial^2 \mathfrak{r}_i}{\partial q_r \partial q_s} \cdot \frac{\partial \mathfrak{r}_i}{\partial q_j} \right) \dot{q}_r \dot{q}_s = b_j, \tag{32}$$

Једначине (30) могу се тада писати

$$\sum_{\iota=1}^{\alpha} a_{j\iota} \ddot{q}_\iota = b_j + Q_j^*.$$

Може се лако показати да величине $a_{j\iota}$ долазе при израчунавању кинетичке енергије:

$$2T = \sum_{j=1}^{\alpha} \sum_{\iota=1}^{\alpha} a_{j\iota} \dot{q}_j \dot{q}_\iota,$$

и да је

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\partial^2 \mathfrak{r}_i}{\partial q_r \partial q_s} \cdot \frac{\partial \mathfrak{r}_i}{\partial q_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial a_{jr}}{\partial q_s} + \frac{\partial a_{js}}{\partial q_r} - \frac{\partial a_{sr}}{\partial q_j} \right) = \begin{bmatrix} s & r \\ & j \end{bmatrix}$$

(Христофелов симбол са три индекса).

Диференцирањем једначине (15) по t добивамо:

$$\sum_{\iota=1}^{\alpha} \frac{\partial \gamma_k}{\partial \dot{q}_\iota} \ddot{q}_\iota + \sum_{\iota=1}^{\alpha} \frac{\partial \dot{\gamma}_k}{\partial \dot{q}_\iota} \dot{q}_\iota = 0.$$

Ставимо ли

$$-\sum_{\iota=1}^{\alpha} \frac{\partial \dot{\gamma}_k}{\partial \dot{q}_\iota} \dot{q}_\iota = c_k, \tag{33}$$

имаћемо

$$\sum_{\iota=1}^{\alpha} \frac{\partial \gamma_k}{\partial \dot{q}_\iota} \ddot{q}_\iota = c_k. \tag{33bis}$$

На тај начин, дошли смо до система од $\alpha+\beta$ једначина

$$\sum_{\iota=1}^{\alpha} a_{j\iota}\ddot{q}_\iota = b_j + Q_j^*, \quad \sum_{\iota=1}^{\alpha} \frac{\partial \gamma_k}{\partial \dot{q}_\iota}\ddot{q}_\iota = c_k, \tag{34}$$

из којих треба одредити 2α величина $\ddot{q}_\iota$ и Q_j^* као функције генералисаних координата и генералисаних брзина. Имамо, дакле, за $\alpha-\beta$ више непознатих него једначина. При том су $a_{j\iota}$, b_j и c_k, према (31), (32) и (33), познате функције генералисаних координата и генералисаних брзина. Из тих једначина (34) могу се $\ddot{q}_\iota$ и Q_j^* на бесконачно много начина одредити као функције генералисаних координата и генералисаних брзина, јер је $2\alpha > \alpha+\beta$.

Како је, наиме, по претпоставци (16^{bis})

$$\frac{\partial(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_\beta)}{\partial(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_\beta)} \neq 0,$$

то се из друге групе једначина могу $\ddot{q}_1, \ddot{q}_2, \ldots, \ddot{q}_\beta$ израчунати као линеарне функције од $\ddot{q}_{\beta+1}, \ldots, \ddot{q}_\alpha$. Ставимо ли то у прву групу једначина (34), добићемо и Q_j^* као линеарне функције од $\ddot{q}_{\beta+1}, \ldots, \ddot{q}_\alpha$, а ових $\alpha-\beta$ величина остају произвољне. Према томе, систем (34) сигурно има решења по $\ddot{q}_\iota$ и Q_j^*, и то бесконачно много. Нека буде q_1'', q_2'', $\ldots$, q_α'', Q_1'', Q_2'', $\ldots$, Q''_α један спрег таквих решења:

$$\sum_{\iota=1}^{\alpha} a_{j\iota} q_\iota'' = b_j + Q_j'', \quad \sum_{\iota=1}^{\alpha} \frac{\partial \gamma_k}{\partial \dot{q}_\iota} q_\iota'' = c_k. \tag{35}$$

Ставићемо

$$\ddot{q}_\iota = q_\iota'' + \mu_\iota, \quad Q_j^* = Q_j'' + \overline{Q}\,. \tag{36}$$

Тада из (34), с обзиром на (35), излази:

$$\overline{Q}_j = \sum_{\iota=1}^{\alpha} a_{j\iota}\mu_\iota, \quad (j=1,2,\ldots,\alpha) \tag{37}$$

$$\sum_{\iota=1}^{\alpha} \frac{\partial \gamma_k}{\partial \dot{q}_\iota}\mu_\iota = 0, \quad (k=1,2,\ldots,\beta). \tag{38}$$

Из једначина (38) могу се $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\beta$ одредити помоћу $\mu_{\beta+1}$, $\mu_{\beta+2}, \ldots, \mu_\alpha$, а ове величине остају слободне; једначине (37) дају онда $\overline{Q}_j$.

На тај начин, једначине (30) постале су

$$J_j + Q_j + Q'_j + Q_j'' + \overline{Q}_j = 0, \quad \gamma_k = 0, \qquad (39)$$
$$(j = 1, \ldots, \alpha; \quad k = 1, \ldots, \beta).$$

При том, Q_j'' су одређена решења система (34), а $\overline{Q}_j$ су дати са (37) и (38). $\overline{Q}_j$ зависе од $\alpha - \beta$ неодређених величина. Што се тиче величина Q_j'', оне још нису прецизиране: то су нека одређена решења једначина (34), но није речено која. Треба се, дакле, определити за нека одређена решења између свих могућих решења тих једначина. Дошли смо, тако, до сличног резултата као у I. Уосталом, једначине (37), (38) и (39) могу се у том специјалном случају свести на једначине (11) и (11^{bis}).

Ако одаберемо генералисане силе Q_j'' и ако међу величинама μ_ι изаберемо, на пример, $\mu_{\beta+1}, \mu_{\beta+2}, \ldots, \mu_\alpha$ по вољи, онда нам једначине (39) решавају проблем кретања: из њих се могу генералисане координате $q_1, q_2, \ldots, q_\alpha$ одредити као функције времена, па онда из (13) координате x_i, y_i, z_i као функције времена, тј. и вектори положаја биће одређени као функције времена. Кад је то постигнуто, биће одређене и силе веза $\mathfrak{F}_i^*$:

$$\mathfrak{F}_i^* = m_i \ddot{\mathfrak{r}}_i - \mathfrak{F}_i - \mathfrak{F}_i'. \qquad (39^{bis})$$

Испитиваћемо ове силе веза.

На основи (19) имамо:

$$\mathfrak{F}_i^* = m_i \sum_{\iota=1}^{\alpha} \frac{\partial \mathfrak{r}_i}{\partial q_\iota} \ddot{q}_\iota + m_i \sum_{r=1}^{\alpha} \sum_{s=1}^{\alpha} \frac{\partial^2 \mathfrak{r}_i}{\partial q_r \partial q_s} \dot{q}_r \dot{q}_s - \mathfrak{F}_i - \mathfrak{F}_i'. \qquad (40)$$

Како је, према (36), $\ddot{q}_\iota = q_\iota'' + \mu_\iota$, то можемо писати

$$\mathfrak{F}_i^* = \mathfrak{F}_i'' + \overline{\mathfrak{F}}_i, \qquad (41)$$

где је

$$\mathfrak{F}_i'' = m_i \sum_{\iota=1}^{\alpha} \frac{\partial \mathfrak{r}_i}{\partial q_\iota} q_\iota'' + m_i \sum_{r=1}^{\alpha} \sum_{s=1}^{\alpha} \frac{\partial^2 \mathfrak{r}_i}{\partial q_r \partial q_s} \dot{q}_r \dot{q}_s - \mathfrak{F}_i - \mathfrak{F}_i', \qquad (42)$$

$$\overline{\mathfrak{F}}_i = m_i \sum_{\iota=1}^{\alpha} \frac{\partial \mathfrak{r}_i}{\partial q_\iota} \mu_\iota. \qquad (43)$$

Кад су једном Q_ι'' и q_ι'' одабрани, компонента $\mathfrak{F}_i''$ је потпуно одређена. Компонента $\overline{\mathfrak{F}}_i$ зависи од величина μ_ι.

Генералисане силе које произилазе из сила $\overline{\mathfrak{F}}_i$ јесу

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{\mathfrak{F}}_i \cdot \frac{\partial \mathfrak{r}_i}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^{n} \left(m_i \sum_{\iota=1}^{\alpha} \frac{\partial \mathfrak{r}_i}{\partial q_\iota} \mu_\iota \right) \cdot \frac{\partial \mathfrak{r}_i}{\partial q_j}$$

$$= \sum_{\iota=1}^{\alpha} \left(\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\partial \mathfrak{r}_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \mathfrak{r}_i}{\partial q_\iota} \right) \mu_\iota = \sum_{\iota=1}^{\alpha} a_{j\iota} \mu_\iota = \overline{Q}_j$$

Како из $\mathfrak{F}_i^*$ произилази генералисана сила Q_j^*, то из силе $\mathfrak{F}_i'$ произилази генералисана сила Q_j''. Компоненте $\overline{\mathfrak{F}}_i$ и генералисане силе $\overline{Q}_j$ зависе само од веза̂, а компоненте $\mathfrak{F}_i''$ и генералисане силе Q_j'' и од веза и од датих спољашњих и унутрашњих сила.

Услов (38) биће задовољен ако су сви $\mu_\iota = 0$. Онда ће бити, према (37), сви $\overline{Q}_j = 0$, а према (43) и све компоненте $\overline{\mathfrak{F}}_i = 0$. Ако је могуће изабрати Q_j'' тако да и ови сви буду нуле без обзира на то какви су почетни услови, то ће значити да су већ саме спољашње и унутрашње силе $\mathfrak{F}_i$ и $\mathfrak{F}_i'$ такве да су дате везе у сваком случају одржане. Према (35) за то је потребно и довољно да систем од $\alpha + \beta$ једначина

$$\sum_{\iota=1}^{\alpha} a_{j\iota} \ddot{q}_\iota = b_j, \quad \sum_{\iota=1}^{\alpha} \frac{\partial \gamma_k}{\partial \dot{q}_\iota} \ddot{q}_\iota = c_k$$

$$(j = 1, 2, \ldots, \alpha; \quad k = 1, 2, \ldots, \beta),$$

има одређена решења по α величина $\ddot{q}_\iota$, а за то је потребно и довољно да матрице

$$\left\{ \begin{array}{ccc} a_{11} & \ldots & a_{1\alpha} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{\alpha 1} & \ldots & a_{\alpha\alpha} \\ \dfrac{\partial \gamma_1}{\partial \dot{q}_1} & \ldots & \dfrac{\partial \gamma_1}{\partial \dot{q}_\alpha} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial \gamma_\beta}{\partial \dot{q}_1} & \ldots & \dfrac{\partial \gamma_\beta}{\partial \dot{q}_\alpha} \end{array} \right. \quad \text{и} \quad \left\{ \begin{array}{cccc} a_{11} & \ldots & a_{1\alpha} & b_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{\alpha 1} & \ldots & a_{\alpha\alpha} & b_\alpha \\ \dfrac{\partial \gamma_1}{\partial \dot{q}_1} & \ldots & \dfrac{\partial \gamma_1}{\partial \dot{q}_\alpha} & c_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial \gamma_\beta}{\partial \dot{q}_1} & \ldots & \dfrac{\partial \gamma_\beta}{\partial \dot{q}_\alpha} & c_\alpha \end{array} \right.$$

имају обе ранг α. То уопште неће бити случај, те се зато неће моћи, осим по изузетку, узети $Q_j'' = 0$ за свако j. Другим речима, $\overline{Q}_j$ можемо узети једнако нули за свако j, а Q_j'' не. Према томе, све компоненте $\overline{\mathfrak{F}}_i$ сила веза можемо узети за нуле, но компоненте $\mathfrak{F}_i$ не. Ако и њих можемо узети за нуле, то значи, да већ

2. Лема *Нека је*

$$a_\nu^{(n)} \geqslant a_{\nu+1}^{(n)} \quad \textit{за свако} \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

и

$$a_\nu^{(n)} \to a_\nu \quad \textit{кад} \quad n \to \infty.$$

Ако

$$a_\nu \to 0 \ \textit{кад} \ \nu \to \infty,$$

тада

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu^{(n)}\, e^{\nu\vartheta i} \to \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu e^{\nu\vartheta i}, \quad n \to \infty,$$

униформно по ϑ *за свако*

$$0 < \alpha \leqslant \vartheta \leqslant \pi - \alpha.$$

Доказ. При доказу користићемо се неједначином (види [3])

$$\left|\sum_{\nu=n}^{\infty} A_\nu\, e^{\nu\vartheta i}\right| \leqslant \frac{A_n}{\sin \vartheta/2}, \quad 0 < \vartheta < \pi, \tag{1}$$

која важи кадгод низ A_ν опада, тј. кад је

$$A_\nu \geqslant A_{\nu+1}.$$

Како је

$$\Delta_n = \left|\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu^{(n)}\, e^{\nu\vartheta i} - \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu\, e^{\nu\vartheta i}\right| =$$

$$= \left|\sum_{\nu=0}^{k-1} (a_\nu^{(n)} - a_\nu)\, e^{\nu\vartheta i} + \sum_{\nu=k}^{\infty} (a_\nu^{(n)} - a_\nu)\, e^{\nu\vartheta i}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\sum_{\nu=0}^{k-1} (a_\nu^{(n)} - a_\nu) e^{\nu\vartheta i}\right| + \left|\sum_{\nu=k}^{\infty} a_\nu^{(n)}\, e^{\nu\vartheta i}\right| + \left|\sum_{\nu=k}^{\infty} a_\nu\, e^{\nu\vartheta i}\right|,$$

то је, према (1),

$$\Delta_n \leqslant \left|\sum_{\nu=0}^{k-1} (a_\nu^{(n)} - a_\nu)\, e^{\nu\vartheta i}\right| + \frac{a_k^{(n)}}{\sin \vartheta/2} + \frac{a_k}{\sin \vartheta/2}.$$

Према томе је

$$\limsup_{n=\infty} \Delta_n \leqslant 2\, \frac{a_k}{\sin \vartheta/2}.$$

Како је

$$\frac{2\, a_k}{\sin \vartheta/2} < \varepsilon_\alpha \quad \text{за свако} \quad 0 < \alpha \leqslant \vartheta \leqslant \pi - \alpha,$$

ако само изаберемо довољно велико k, то мора $\Delta_n \to 0$ кад $n \to \infty$, чиме је горња лема доказана.

2. Heine-ов {2} ред за Legendre-ов полином $P_n(\cos\vartheta)$ има облик

$$P_n(\cos\vartheta)=\frac{4}{\pi}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{a_\nu}{a_{n+\nu}}\,\frac{\sin(n+2\nu+1)\vartheta}{2n+2\nu+1}\,, \tag{2}$$

где су бројеви a_ν, $\nu=0,1,2,\ldots$ Taylor-ови коефициенти функције

$$f(z)=\frac{1}{\sqrt{1-z}}=\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu\, z^\nu\,, \tag{3}$$

тј. где је

$$a_0=1,\ a_n=\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot 2n-1}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot 2n}=\frac{2n-1}{2n}a_{n-1},\ n=1,2,3,\ldots. \tag{3'}$$

Према томе можемо ставити

$$P_n(\cos\vartheta)=2\,a_n\,R\{e^{(n+1)\vartheta i}\,f(e^{2\vartheta i})\}-R\{e^{(n+1)\vartheta i}\,\delta_n(\vartheta)\}\,, \tag{4}$$

где је

$$\delta_n(\vartheta)=\sum_{\nu=0}^{\infty}c_\nu^{(n)}\,e^{2\nu\vartheta i}\,, \tag{5}$$

а

$$c_\nu^{(n)}=2\,a_\nu\left(a_n-\frac{2}{\pi}\,\frac{1}{a_{n+\nu}(2n+2\nu+1)}\right). \tag{6}$$

Како је

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{\pi n}}\left(1-\frac{1}{8n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right), \tag{7}$$

то образац (4) даје први члан асимптотског развитка за $P_n(\cos\vartheta)$. Да бисмо добили и други члан, потребно је да још оценимо $\delta_n(\vartheta)$ кад $n\to\infty$.

Из асимптотског израза (7) за a_n следи, према (6), да је

$$c_\nu^{(n)}=\frac{2a_\nu}{a_{n+\nu}}\left\{a_n\,a_{n+\nu}-\frac{2}{\pi}\,\frac{1}{2n+2\nu+1}\right\}=$$

$$=\frac{2a_\nu}{\pi\,a_{n+\nu}}\left\{\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+\nu}}\left[1-\frac{1}{8n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right]\right.$$

$$\left.\left[1-\frac{1}{8(n+\nu)}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right]-\frac{2}{2n+2\nu+1}\right\}=$$

$$= \frac{2a_\nu}{\pi n a_{n+\nu}} \left\{ \sqrt{\frac{n}{n+\nu}} \left[1 - \frac{1}{8n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right] - \frac{2n}{2n+2\nu+1} \right\} =$$

$$= \frac{2a_\nu}{\pi n/\sqrt{n\pi}} \left\{ \left[1 - \frac{2\nu+1}{4n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right] - \left[1 - \frac{2\nu+1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right] \right\} =$$

$$= \frac{2a_\nu}{\sqrt{\pi}\, n\sqrt{n}} \left[\frac{2\nu+1}{4} + o(1) \right] = \frac{(2\nu+1)a_\nu}{2\sqrt{n}\sqrt{n}\,\pi} + o(1/n\sqrt{n}). \qquad (8)$$

Отуда видимо да је

$$n\sqrt{n}\, c_\nu^{(n)} = c_\nu + o(1).$$

где је

$$c_\nu = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} (2\nu+1)\, a_\nu.$$

Како c_ν не само да не тежи нули са $1/\nu$, већ тежи монотоно бесконачности, то да бисмо на израз за $\delta_n(\vartheta)$ могли применити наведену лему, морамо га претходно трансформисати, тј. свести на изразе на које ту лему можемо применити. Ако у реду за $\delta_n(\vartheta)$ извршимо делимично сабирање, добићемо

$$\delta_n(\vartheta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu^{(n)} e^{2\nu\vartheta i} = \frac{1}{1 - e^{2\vartheta i}} \left\{ c_0^{(n)} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (c_\nu^{(n)} - c_{\nu-1}^{(n)}) e^{2\nu\vartheta i} \right\}.$$

Показаћемо да се ред

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} (c_\nu^{(n)} - c_{\nu-1}^{(n)}) e^{2\nu\vartheta i} = \sum_{\nu=1}^{\infty} d_\nu^{(n)} e^{2\nu\vartheta i}$$

може написати у облику

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} d_\nu^{(n)} e^{2\nu\vartheta i} = \sum_{\nu=1}^{\infty} e_\nu^{(n)} e^{2\nu\vartheta i} - \sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu^{(n)} e^{2\nu\vartheta i},$$

тј. ставити

$$d_\nu^{(n)} = e_\nu^{(n)} - f_\nu^{(n)},$$

где низови

$$n\sqrt{n}\, e_\nu^{(n)} \text{ и } n\sqrt{n}\, f_\nu^{(n)}$$

задовољавају услове леме, тако да се она може применити на сваки од редова

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} e_\nu^{(n)} e^{2\nu\vartheta i} \text{ и } \sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu^{(n)} e^{2\nu\vartheta i}.$$

4. У ту сврху пођимо од Wallis-ова обрасца

$$\frac{2}{\pi}=\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{(2\nu)^2}\right)=\prod_{\nu=1}^{\infty}\frac{2\nu-1}{2\nu}\,\frac{2\nu+1}{2\nu}.$$

Како је

$$a_n=\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot2n-1}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot2n}=\frac{2n-1}{2n}a_{n-1}, \tag{9}$$

то је

$$(2n+1)\,a_n^2=\prod_{\nu=1}^{n}\left(1-\frac{1}{(2\nu)^2}\right).$$

Према томе, низ $(2n+1)a_n^2$ монотоно опада и тежи $2/\pi$; дакле,

$$\frac{2}{\pi}<(2n+1)a_n^2. \tag{10}$$

Ако још ставимо

$$b_n=\frac{2}{\pi(2n+1)a_n},$$

биће, према (9),

$$b_n=\frac{2n}{2n+1}\,b_{n-1}<b_{n-1}, \tag{11}$$

а сам низ $c_\nu^{(n)}$ можемо тада написати у облику

$$c_\nu^{(n)}=2\,a_\nu\,(a_n-b_{n+\nu}).$$

Како је, према (9),

$$c_\nu^{(n)}=\frac{2\nu-1}{\nu}\,a_{\nu-1}\,(a_n-b_{n+\nu}),$$

а, према (11),

$$\begin{aligned}c_{\nu-1}^{(n)}&=2\,a_{\nu-1}\,(a_n-b_{n+\nu-1})=\\&=2\,a_{\nu-1}\,(a_n-\frac{2n+2\nu+1}{2n+2\nu}\,b_{n+\nu}),\end{aligned}$$

то је

$$\begin{aligned}d_\nu^{(n)}&=c_\nu^{(n)}-c_{\nu-1}^{(n)}=\\&=2\,a_{\nu-1}\left\{(\frac{2\nu-1}{2\nu}-1)a_n-\left(\frac{2\nu-1}{2\nu}-\frac{2n+2\nu+1}{2n+\nu}\right)b_{n+\nu}\right\}=\\&=\frac{a_{\nu-1}}{\nu}\left\{\frac{n+2\nu}{n+\nu}\,b_{n+\nu}-a_n\right\}=\\&=2\frac{a_{\nu-1}\,b_{n+\nu}}{n+\nu}-\frac{a_{\nu-1}}{\nu}\left\{a_n-\frac{n}{n+\nu}b_{n-\nu}\right\}=\\&=e_\nu^{(n)}-f_\nu^{(n)}.\end{aligned}$$

Јасно је да низ

$$e_\nu^{(n)} = 2\,\frac{a_{\nu-1}\,b_{n+\nu}}{n+\nu}$$

опада с обзиром на ν за свако n, јер, према (9) и (11), низови a_ν и $b_{n+\nu}$ опадају кад ν расте. Да бисмо показали да и низ

$$f_\nu^{(n)} = \frac{a_{\nu-2}}{\nu}\left\{a_n - \frac{n}{n+\nu}\,b_{n+\nu}\right\}$$

опада, посматрајмо разлику

$$f_\nu^{(n)} - f_{\nu+1}^{(n)}.$$

Како је, према (9)

$$f_\nu^{(n)} = \frac{a_{\nu-1}}{\nu}\left\{a_n - \frac{n}{n+\nu}\,b_{n+\nu}\right\} =$$

$$= \frac{2\,a_\nu}{2\nu-1}\left\{a_n - \frac{n}{n+\nu}\,b_{n+\nu}\right\},$$

а, према (10)

$$f_{\nu+1}^{(n)} = \frac{a_\nu}{\nu+1}\left\{a_n - \frac{n}{n+\nu+1}\,b_{n+\nu+1}\right\} =$$

$$= \frac{a_\nu}{\nu+1}\left\{a_n - \frac{n}{n+\nu+1}\,\frac{2\,n+2\,\nu+2}{2\,n+2\,\nu+3}\,b_{n+\nu}\right\} =$$

$$= \frac{a_\nu}{\nu+1}\left\{a_n - \frac{2\,n}{2\,n+2\,\nu+3}\,b_{n+\nu}\right\},$$

то је

$$f_\nu^{(n)} - f_{\nu+1}^{(n)} =$$

$$= \frac{a_\nu}{\nu\,(2\,\nu-1)}\left\{\Big[(2\,\nu+2) - (2\,\nu-1)\Big]a_n - \left[\frac{\nu+1}{n+\nu} - \frac{2\,\nu-1}{2n+2\nu+3}\right]2\,n\,b_{n+\nu}\right\} =$$

$$= \frac{3\,a_\nu}{\nu\,(2\,\nu-1)}\left\{a_n - \frac{2\,n\,(n+2\,\nu+3)}{(n+\nu)\,(2\,n+2\nu+3)}\,b_{n+\nu}\right\} =$$

$$= \frac{3\,a_\nu}{\nu\,(2\,\nu-1)}\left\{a_n - \frac{2\,(n+\nu)^2+2\,(n-\nu^2)}{2\,(n+\nu)^2+3\,(n+\nu)}\,b_{n+\nu}\right\}.$$

А како је

$$\frac{2\,(n+\nu)^2+2\,(n-\nu^2)}{2\,(n+\nu)^2+3\,(n+\nu)} < 1,$$

и, према (11),

$$b_{n+\nu} < b_n,$$

а

$$b_n < a_n\,,$$

јер је, према (10),

$$b_n = \frac{2}{\pi(2n+1)\,a_n} < a_n,$$

то је израз у витичастој загради позитиван, тј.

$$f_\nu^{(n)} > f_{\nu+1}^{(n)}.$$

Најзад, је, према (7),

$$b_n = \frac{1}{\pi n\sqrt{n}}\left(1 - \frac{3}{8n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

и

$$e_\nu^{(n)} \sim \frac{2a_\nu}{\sqrt{\pi n\sqrt{n}}}\,,$$

$$f_\nu^{(n)} \sim \frac{3a_\nu}{2\sqrt{\pi n\sqrt{n}}}.$$

а

$$d_\nu^{(n)} = c_\nu^{(n)} - c_{\nu-1}^{(n)} \sim \frac{a_\nu}{2\sqrt{\pi n\sqrt{n}}}\,,\quad n \to \infty\,.$$

Према томе

$$e_\nu^{(n)} > e_{\nu-1}^{(n)},\quad \text{за свако } n,$$

и

$$\sqrt{\pi n\sqrt{n}}\,e_\nu^{(n)} \to 2a_\nu \quad \text{кад } n \to \infty, \tag{12}$$

а

$$f_\nu^{(n)} > f_{\nu+1}^{(n)} \quad \text{за свако } n,$$

и

$$\sqrt{\pi n\sqrt{n}}\,f_\nu^{(n)} \to \frac{3}{2}a_\nu \quad \text{кад } n \to \infty\,, \tag{13}$$

Како $a_\nu \to 0$, то можемо на редове

$$\Sigma e_\nu^{(n)} e^{2\nu\vartheta i} \text{ и } \Sigma f_\nu^{(n)} e^{2\nu\vartheta i}$$

применити лему из тачке **2**.

Како је

$$c_\nu^{(n)} - c_{\nu-1}^{(n)} = d_\nu^{(n)} = e_\nu^{(n)} - f_\nu^{(n)},$$

то, према (12) и (13),

$$\sqrt{\pi n\sqrt{n}}\,(e_\nu^{(n)} - f_\nu^{(n)}) \to \frac{1}{2}a_\nu = \frac{1}{2}\{(2\nu+1)\,a_\nu - (2\nu-1)\,a_{\nu-1}\},$$

па је

$$c_\nu^{(n)} - c_{\nu-1}^{(n)} \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi n\sqrt{n}}}\{(2\nu+1)\,a_\nu - (2\nu-1)\,a_{\nu-1}\}.$$

Отуда следи да је

$$\delta_n(\vartheta)=\frac{1}{1-e^{2\vartheta i}}\left\{c_0^{(n)}+\sum_{\nu=1}^{\infty}(c_\nu^{(n)}-c_{\nu-1}^{(n)})e^{2\nu\vartheta i}\right\}+o(1/n\sqrt{n})=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\pi}\,n\sqrt{n}}\,\frac{1}{1-e^{2\vartheta i}}\left\{a_0+\sum_{\nu=1}^{\infty}[(2\nu+1)a_\nu-(2\nu-1)a_{\nu-1}]\,e^{2\nu\vartheta i}\right\}+$$

$$+o(1/n\sqrt{n}).\quad(14)$$

За $|z|<1$ је

$$\frac{1}{1-z^2}\left\{a_0+\sum_{\nu=1}^{\infty}[(2\nu+1)-(2\nu-1)a_{\nu-1}]z^{2\nu}\right\}=\sum_{\nu=0}^{\infty}(2\nu+1)a_\nu z^{2\nu}=$$

$$=\{zf(z^2)\}',$$

па је, према (14), и

$$\delta_n(\vartheta)=[z f(z^2)]'+o(1/n\sqrt{n},\quad \text{за } z=e^{\vartheta i}.$$

Ако ову вредност за $\delta_n(\vartheta)$ уврстимо у образац (4), добивамо коначно прва два члана асимптотског развитка за $P_n(\cos\vartheta)$, који можемо написати овако

$$P_n(\cos\vartheta)=2\,a_n\,R\{z^{n+1}f(z^2)\}-\frac{1}{2\sqrt{\pi}\,n\sqrt{n}}R\{z^{n+1}[z f(z^2)]'\}+$$

$$+o(1/n\sqrt{n}).$$

са $z=e^{\vartheta i}$; или, према (7),

$$P_n(\cos\vartheta)=2\,a_n\left\{\varphi_0(\vartheta)-\frac{1}{4n}\varphi_1(\vartheta)+o\left(\frac{1}{n}\right)\right\},$$

где је

$$\varphi_0(\vartheta)=R\{z^{n+1}f(z^2)\},$$

а

$$\varphi_1(\vartheta)=R\{z^{n+1}[z f(z^2)]'\},\quad \text{са } z=e^{\vartheta i}.$$

Тиме је образац наведен у тачки 1 доказан.

БИБЛИОГРАФИЈА

[1] Darboux G. — *Journ, de math.* (3), *4* (1878), str. 5 i 377. За Laplace—Stieltjes-ов као и Darboux-Stieltjes образац види још: Whittaker E. T. and Watson G. N. — A course of modern analysis. Cambridge1946,стр.315, као и Copson E. T. — Theory of functions, Oxford 1935, стр. 282.

[2] Heine E. — Theorie der Kugelfunktionen und der verwandten Funktionen, 2-te Aufl. Berlin 1878.

[3] Karamata J. et Tomić M. — Considérations géométriques relatives aux polynômes et séries trigonométriques. *Publ. de l'Inst. Math. de l'Acad. serbe des sciences, 2* (1948) стр. 160.

ÜBER DIE ASSYMPTOTISCHE FORMEL FÜR DIE LEGENDRESCHE POLYNOME

Von J. Karamata und M. Tomić (Beograd)

Die Verfasser leiten die bekannte Darboux-Stieltjessche Assymptotische Formel aus der Fourierschen Reihe dieser Polynome ab. Als wesentlich erweist sich dabei die Vollmonotonie der Koeffizienten der Fourierschen Reichen. Dem ersten der Verfasser ist es inzwischen gelungen einen allgemeinen Satz über die assymptotische Entwiclyng Fourierschen Reihen mit vollmonotonen Koeffizienten zu beweisen. (*Publ. de l'Inst. Math. de l'Acad. serbe*, IV, in Druck).

ПРИЛОГ ТЕОРИЈИ LEGENDRE-ових ПОЛИНОМА

МИОДРАГ ТОМИЋ (Београд)

1. Више аутора (S. Bernstein [1], G. Szegö [2], H. Rau [3], Н. Обрешков [4]) употребљавају при доказу многих ставова из теорије Legendre-ових полинома чињеницу да за два узастопна Legendre-ова полинома важи

$$|P_n(\cos\vartheta)-P_{n+1}(\cos\vartheta)|\leqslant A\sqrt{\frac{\vartheta}{n}},\ 0\leqslant\vartheta\leqslant\frac{\pi}{2} \tag{1}$$

где је A једна позитивна апсолутна константа. Неједначина (1) уопштава Stieltjes-ову [5] неједначину, где на десној страни место члана $A\sqrt{\vartheta/n}$ стоји $A/\sqrt{n}$.

У овом раду дајем за израз

$$\Delta P_n=P_n(\cos\vartheta)-P_{n+1}(\cos\vartheta) \tag{2}$$

један експлицитан облик из ког се може извести неједначина (1). Тај поступак се може применити и за нешто општије класе полинома, посматраних у тачки 2.

Поред тога, користећи познати идентитет

$$s_n(x)=(n+1)\frac{P_n(x)-P_{n+1}(x)}{1-x}=P'_n(x)+P'_{n+1}(x) \tag{3}$$

који потиче од Christoffel-а [6], извешћу Gronwall-ов [7] став о асимптотској вредности Lebesgue-ове константе редова уређених по Legendre-овим полиномима. Ова константа је дата изразом

$$\rho_n=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}|s_n(x)|\,dx,$$

где је $s_n(x)$ дато са (3), а Gronwall-ов став казује да

$$\frac{\rho_n}{\sqrt{n}}\to 2\sqrt{\frac{2}{\pi}},\ \text{кад}\ n\to\infty. \tag{4}$$

Доказ ове чињенице дат је у тачки **4** и претставља извесно упрошћење Szegö-ова [2] обрасца (*4*). У тачки **4** показаћу да је шта више

$$\frac{\rho_n}{\sqrt{n}} = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \text{ кад } n \to \infty.$$

2. Legendre-ови полиноми припадају класи полинома $P_n(\cos\vartheta)$ дефинисаних функцијом генератрисом облика

$$f(re^{\vartheta i})\, f(re^{-\vartheta i}) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\vartheta)\, r^n,$$

где је

$$f(re^{\vartheta i}) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu r^\nu e^{\nu\vartheta i},$$

а c_ν произвољан низ такав да ред конвергира у кругу $r < 1$.

Отуда је

$$\begin{aligned} P_n(\cos\vartheta) = {} & 2\, c_0 c_n \cos n\vartheta + 2\, c_1 c_{n-1} \cos(n-2)\vartheta + \\ & + 2\, c_2 c_{n-2} \cos(n-4)\vartheta + \ldots + \\ & + 2\, c_{m-1} c_{m-n-1} \cos(n-2m+2)\vartheta + r_m, \end{aligned} \tag{5}$$

где је

$$m = \left[\frac{n}{2}\right] \text{ и } r_m = \begin{cases} c_m^2 & \text{за } n = 2m \\ 2 c_m c_{m+1} \cos\vartheta & \text{за } n = 2m+1. \end{cases} \tag{6}$$

Специјално за

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{1-z}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu z^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2\nu-1)}{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot 2\nu} z^\nu$$

добивамо обичан Legendre-ов полином.

За класу полинома датих са (5) и (6) претпоставићемо још да је

$$P_n(0) = 1 \text{ за свако } n, \tag{7}$$

што је испуњено код Legendre-ових полинома.

Због (7) разлика (2) се може написати као

$$\begin{aligned} \Delta P_n = {} & P_n(\cos\vartheta) - P_n(0) - \{P_{n+1}(\cos\vartheta) - P_{n+1}(0)\} = \\ = {} & 4\left\{\sum_{\nu=0}^{m} c_\nu c_{n+1-\nu} \sin^2\frac{n+1-2\nu}{2}\vartheta - \sum_{\nu=0}^{m} c_\nu c_{n-\nu} \sin^2\frac{n-2\nu}{2}\vartheta\right\} = \\ = {} & 4\sum_{\nu=0}^{m} c_\nu(c_{n+1-\nu} - c_{n-\nu})\left\{\sin^2\frac{n+1-2\nu}{2}\vartheta - \sin^2\frac{n-2\nu}{2}\vartheta\right\}, \end{aligned} \tag{8}$$

или на основу идентитета

$$\sin^2 \frac{n\vartheta}{2} = \left[\sin\frac{\vartheta}{2} + \sin\frac{3\vartheta}{2} + \ldots + \sin\frac{(2n-1)\vartheta}{2}\right]\sin\frac{\vartheta}{2}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

у облику

$$\frac{\Delta P_n}{4\sin\vartheta/2} = -\sum_{\mu=0}^{n}\left(\sum_{\mu=0}^{m-[(\mu+1)/2]} c_\nu\,(c_{n-\nu} - c_{n+1-\nu})\right)\sin\frac{2\mu+1}{2}\vartheta +$$

$$+\sum_{\nu=0}^{m} c_{m-\nu}\,c_{m+\nu}\sin\frac{4\nu+1}{2}\vartheta. \tag{9}$$

Други од ових збирова можемо трансформисати овако:

$$\sum_{\nu=0}^{m} c_{m-\nu}\,c_{m+\nu}\sin\frac{4\nu+1}{2}\vartheta = \frac{1}{2}\left\{\sin\frac{\vartheta}{2}P_n(\cos\vartheta) + \cos\frac{\vartheta}{2}J_n(\sin\vartheta)\right\}$$

где је $P_n(\cos\vartheta)$ дефинисано са (5), а $J_n(\sin\vartheta)$ дато са

$$J_n(\sin\vartheta) = 2\,c_0 c_n \sin n\vartheta + 2\,c_1\,c_{n-1}\sin(n-2)\vartheta + \ldots +$$

$$+2\,c_{m-1}\,c_{n-m-1}\sin(n-2\,m+2)\vartheta +$$

$$+2\,c_m\,c_{n-m}\sin(n-2\,m)\vartheta.$$

На тај начин разлика (8) постаје

$$\frac{\Delta P_n}{4\sin\vartheta/2} = -\sum_{\mu=0}^{n}\left(\sum_{\nu=0}^{m-[(\mu+1)/2]} c_\nu\,(c_{n-\nu} - c_{n+1-\nu})\right)\sin\frac{2\mu+1}{2}\vartheta +$$

$$+\frac{1}{2}\left\{\sin\frac{\vartheta}{2}P_n(\cos\vartheta) + \cos\frac{1}{2}J_n(\sin\vartheta)\right\}, \tag{9'}$$

где у случају парног $n = 2m$ у првом двоструком збиру место члана

$$c_m^2 \sin\frac{\vartheta}{2} \text{ долази } \frac{c_m^2}{2}\sin\frac{\vartheta}{2}.$$

Напоменимо да је у (9') синусни полином

$$\delta_n(\vartheta) = \sum_{\mu=0}^{n}\left(\sum_{\nu=0}^{m-[(\mu+1)/2]} c_\nu\,(c_{n-\nu} - c_{n+1-\nu})\right)\sin\frac{2\mu+1}{2}\vartheta, \tag{10}$$

стално позитиван ако је

$$c_s > c_{s+1}, \quad s = 0, 1, 2, \ldots,$$

јер су тада његови коефициенти

$$A_\mu = \sum_{\nu=1}^{m-[(\mu+1)/2]} c_\nu (c_{n-\nu} - c_{n+1-\nu})$$

позитивни и опадају кад μ расте, тј.

$$A_\mu > A_{\mu+1}, \quad \mu = 0, 1, 2, \ldots n,$$

на основу Fejér-ова [7] става о синусном полиному

$$\sum_{\mu=0}^{n} A_\mu \sin \frac{2\mu+1}{2} \vartheta$$

са коефицијентима који монотоно опадају

3. Да бисмо из обрасца (9′) извели неједначину (1) за Legendre-ов полином, користићемо познате неједначине за $P_n(\cos\vartheta)$ и $J_n(\sin\vartheta)$ [7]

$$\left.\begin{array}{l} |P_n(\cos\vartheta)| \\ |J_n(\sin\vartheta)| \end{array}\right\} < \frac{C_0}{\sqrt{n \sin\vartheta}}, \quad 0 < \vartheta < \pi. \tag{11}$$

Израз

$$Q_n(\vartheta) = 2 \sin\frac{\vartheta}{2} \left| \sin\frac{\vartheta}{2} P_n(\cos\vartheta) + \cos\frac{\vartheta}{2} J_n(\sin\vartheta) \right|$$

можемо, према (11), оценити за

$$Q_n(\vartheta) \leqslant 2 \sin\frac{\vartheta}{2} \frac{C_0}{\sqrt{n\pi \sin\vartheta}} \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\vartheta}{2}\right) \leqslant$$

$$\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{2}} \sqrt{\frac{\sin\vartheta/2}{n}} = C \sqrt{\frac{\sin\vartheta/2}{n}}, \quad 0 \leqslant \vartheta \leqslant \frac{\pi}{2}. \tag{12}$$

Остаје нам да оценимо синусни полином $4 \sin\vartheta/2\, \delta_n(\vartheta)$ где је $\delta_n(\vartheta)$ дато са (10). Ради овога користићемо две неједначине за коефициенте

$$c_\nu = \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2\nu - 1)}{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2\nu},$$

наиме

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{\nu + 1/2}} < c_\nu < \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{\nu + 1/2}} \left(1 + \frac{1}{2\nu}\right). \tag{13}$$

Обе ове неједначине следе из чињенице да је (Wallis-ов образац)

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2\nu\cdot 2\nu}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2\nu-1)(2\nu+1)}\,\frac{\int\limits_0^{\pi/2}\sin^{2\nu}x\,dx}{\int\limits_0^{\pi/2}\sin^{2\nu+1}x\,dx}$$

и

$$1\leqslant\frac{\int\limits_0^{\pi/2}\sin^{2\nu}x\,dx}{\int\limits_0^{\pi/2}\sin^{2\nu+1}x\,dx}\leqslant 1+\frac{1}{2\nu}.$$

Показаћемо да постоји једна апсолутна константа C_1 тако да је

$$C_1\sqrt{\frac{\sin\vartheta/2}{n}}>4\sin\frac{\vartheta}{2}\,\delta_n(\vartheta),\quad 0\leqslant\vartheta\leqslant\pi. \tag{14}$$

Из (14) и (12) следи тада (1).

a) Нека је $\vartheta\leqslant 1/n$.

Пре свега, $\delta_n(\vartheta)<C_2$ за свако ϑ. Према (10) је

$$\delta_n(\vartheta)\leqslant\sum_{\mu=0}^{n}\Bigl(\sum_{\nu=0}^{m-[(\mu+1)/2]}c_\nu\,(c_{n-\nu}-c_{n+1-\nu})\Bigr)=$$

$$=\sum_{\nu=0}^{m}(n+1-2\nu)\,c_\nu\,(c_{n-\nu}-c_{n+1-\nu})<$$

$$<(c_{n-m}-c_{n+1-m})\sum_{\nu=0}^{m}(n+1-2\nu)\,c_\nu. \tag{15}$$

С обзиром на (13) и $m=[n/2[$ имамо

$$c_{n-m}-c_{n+1-m}<\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\,\frac{1}{n\sqrt{n}}=\frac{C_3}{n\sqrt{n}}. \tag{16}$$

С друге стране, према (13), је

$$c_\nu<C_4\frac{1}{\sqrt{\nu}},\quad \nu=0,1,2,\ldots, \tag{17}$$

тако да сви чланови $(n+1-4\nu)\,c_\nu$, у збиру (15), монотоно опадају па је

$$\sum_{\nu=0}^{m}(n+1-2\nu)\,c_\nu < C_5\int_1^m (n+1-2x)\frac{dx}{\sqrt{x+1}} = C_6\, n\sqrt{n}\,. \tag{18}$$

Због (16) и (18) је

$$\delta_n(\vartheta) < \frac{C_3}{n\sqrt{n}}\, C_6\, n\sqrt{n} = C_7\,. \tag{19}$$

Према томе, у случају $\vartheta \leqslant 1/n$ константу C_1 из (14) ћемо одредити тако да буде

$$C_1 \geqslant 2\sqrt{2}\, C_7\,,$$

јер је тада, због (19),

$$C_1\frac{1}{\sqrt{n}} > 4\, C_7\sqrt{\frac{1}{2n}} > 4\sin\frac{\vartheta}{2}\,\delta_n(\vartheta)\,.$$

b) Нека је $\vartheta > 1/n$.

Тада је (види {8. 2}) за све $\vartheta \neq 0$

$$4\sin\frac{\vartheta}{2}\,\delta_n(\vartheta) < 4\sin\frac{\vartheta}{2}\,\frac{A_0}{\sin\vartheta/2} = 4\,A_0\,, \tag{20}$$

где је

$$A_0 = \sum_{\nu=0}^{m} c_\nu\,(c_{n-\nu} - c_{n+1-\nu})\,,\quad m = [n/2]\,.$$

Сада је због (16), (17) и $m = [n/2]$,

$$A_0 = \sum_{\nu=0}^{m} c_n\,(c_{n-\nu} - c_{n+1-\nu}) < (c_{n-m} - c_{n+1-m})\sum_{\nu=0}^{m} c_\nu <$$

$$< \frac{C_2}{n\sqrt{n}}\, C_4 \sum_{\nu=0}^{m}\frac{1}{\sqrt{\nu}} = C_8\,\frac{1}{n}\,. \tag{21}$$

Да бисмо, према̂ (14), нашли у овом случају (тј. када је $\vartheta > 1/n$), константу C_1, довољно је да одредимо C_1 тако да буде

$$C_1 > 8\sqrt{2}\, C_8\,,$$

јер је тада, према (20) и (21), због

$$\sin\frac{\vartheta}{2} > \frac{1}{2n} - \frac{1}{48\,n^3}\quad \text{за}\ \vartheta > \frac{1}{n}\,,$$

$$C_1\sqrt{\frac{\sin\vartheta/2}{n}} > 4\,C_8\,\frac{1}{n}.$$

4. Из (3) добивамо

$$\rho_n = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} |s_n(x)|\,dx = \frac{n+1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{|P_n(x)-P_{n+1}(x)|}{1-x}\,dx,$$

тј.

$$\rho_n = \frac{n+1}{2}\int_0^{\pi} |\Delta\,P_n(\cos\vartheta)|\,\frac{\sin\vartheta}{1-\cos\vartheta}\,d\vartheta. \tag{22}$$

Како сада имамо за $P_n(\cos\vartheta)$ и $J_n(\sin\vartheta)$ (види {9}) асимптотске релације

$$P_n(\cos\vartheta) = \sqrt{\frac{2}{n\pi\sin\vartheta}}\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\vartheta-\frac{\pi}{4}\right]+O(c_{m-1}^2)$$

$$J_n(\sin\vartheta) = -\sqrt{\frac{2}{n\pi\sin\vartheta}}\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)-\frac{\pi}{4}\right]+O(c_{m-1}^2),$$

то израз

$$4\sin\frac{\vartheta}{2}\,\frac{1}{2}\left\{\sin\frac{\vartheta}{2}P_n(\cos\vartheta)+\cos\frac{\vartheta}{2}\,J_n(\sin\vartheta)\right\}$$

има асимптотску вредност

$$2\sin\frac{\vartheta}{2}\sqrt{\frac{2}{n\pi\sin\vartheta}}\sin\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)\vartheta+\frac{\vartheta}{2}-\frac{\pi}{2}\right\}+O(c_{m-1}^2) =$$

$$= 2\sin\frac{\vartheta}{2}\sqrt{\frac{2}{n\pi\sin\vartheta}}\cos(n+1)\,\vartheta+O(c_{m-1}^2). \tag{23}$$

С друге стране, према обрасцу (20), за све $\vartheta\neq 0$ је

$$4\sin\frac{\vartheta}{2}\delta_n(\vartheta) < 4\,A_0 \sim \frac{C'}{n}. \tag{24}$$

Према (9') и (22) биће

$$\limsup_{n=\infty}\frac{\rho_n}{\sqrt{n}} = \lim_{n=\infty}\frac{(n+1)}{\sqrt{n}}\int_0^{\pi}\left|\sin\frac{\vartheta}{2}P_n(\cos\vartheta)+\right.$$

$$\left.+\cos\frac{\vartheta}{2}J_n(\sin\vartheta)\right|\cos\frac{\vartheta}{2}d\vartheta+\lim_{n=\infty}\frac{(n+1)}{2\sqrt{n}}\int_0^{\pi}4\sin\frac{\vartheta}{2}\delta_n(\vartheta)\,d\vartheta,$$

као и

$$\lim_{n=\infty}\inf \frac{\rho_n}{\sqrt{n}} = \lim_{n=\infty}\frac{(n+1)}{2\sqrt{n}}\int_0^{\pi}\left|\sin\frac{\vartheta}{2}P_n(\cos\vartheta)+\right.$$

$$\left.+\cos\frac{\vartheta}{2}J_n(\sin\vartheta)\right|\cos\frac{\vartheta}{2}\,d\vartheta-\lim_{n=\infty}\frac{(n+1)}{\sqrt{n}}\int_0^{\pi}4\sin\frac{\vartheta}{2}\,\delta_n(\vartheta)\,d\vartheta.$$

Због (24) последњи лимеси у оба горња израза теже нули као $1/\sqrt{n}$, а из (23) следи да је први лимес једнак са

$$\lim_{n=\infty}\frac{(n+1)}{\sqrt{n}}\int_0^{\pi}\sqrt{\frac{2}{n\pi\sin\vartheta}}\,|\cos(n+1)\vartheta|\cos\frac{\vartheta}{2}\,d\vartheta+O(\sqrt{n}\,c^2_{m-1})=$$

$$=\frac{n+1}{n\sqrt{n}}\int_0^{\pi}\sqrt{\cot\frac{\vartheta}{2}}\,|\cos(n+1)\vartheta|\,d\vartheta+O(\sqrt{n}\,c^2_{m-1}).$$

На основу једног Fejér-овог {9} става имамо

$$\int_0^{\pi}\sqrt{\cot\frac{\vartheta}{2}}\,|\cos(n+1)\vartheta|\,d\vartheta\to\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sqrt{\cot\frac{\vartheta}{2}}\,d\vartheta=$$

$$=\frac{4}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{dt}{\sqrt{t}\,(1+t^2)}=\frac{8}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{dz}{1+z^4}=\frac{8\pi}{2\pi\sqrt{2}}=2\sqrt{2}.$$

Према томе за Lebesgue-ову константу добивамо

$$\lim_{n=\infty}\frac{\rho_n}{\sqrt{n}}=2\sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

Да бисмо показали да је чак

$$\frac{\rho_\nu}{\sqrt{n}}=2\sqrt{\frac{2}{\pi}}+O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

довољно је, због чињенице да је $O(\sqrt{n}\,c^2_{m-1})=O(1/\sqrt{n})$ и због тога што су последњи лимеси у изразима за lim sup, односно lim inf од $\rho_n/\sqrt{n}$ реда $O(1/\sqrt{n})$, да покажемо само да

$$\int_0^{\pi}\sqrt{\cot\frac{\vartheta}{2}}\,|\cos(n+1)\vartheta|\,d\vartheta\to\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sqrt{\cot\frac{\vartheta}{2}}\,d\vartheta$$

Он, дакле, уопште није нула. Биће сигурно нула ако је систем веза склероном.

Код идеално успостављених веза једначине (53) гласе:

$$J_j + Q_j + Q_j' + \sum_{k=1}^{\beta} \lambda_k \frac{\partial \gamma_k}{\partial \dot{q}_j} = 0, \quad \gamma_k = 0, \tag{65}$$

$$(j = 1, 2, \ldots, \alpha; \; k = 1, 2, \ldots, \beta).$$

Како је за виртуелна померања $\sum_{j=1}^{\alpha} Q_j'' \delta q_j = 0$, то ће код идеално успостављених веза бити

$$\sum_{j=1}^{\alpha} (J_j + Q_j + Q_j') \, \delta q_j = 0 \tag{66}$$

за сва виртуелна померања. Обрнуто, ако једначина (66) важи за све δq_j који задовољавају једначину (63^{bis}), онда из ње излазе, као последице, једначине (65) за кретања са идеално успостављеним везама. Наиме, из (66) и (63^{bis}) може се, апсолутно истим начином као у IV за Q_j'', извести да мора бити

$$J_j + Q_j + Q_j' = \sum_{\iota=1}^{\alpha} \lambda_k' \frac{\partial \gamma_k}{\partial \dot{q}_\iota};$$

ставимо ли $\lambda_k' = -\lambda_k$, добићемо једначине (65).

С обзиром на значење скалара J_j, Q_j, Q_j' и δq_j, једначине (66) могу се писати у облику

$$\sum_{i=1}^{m} (-m_i \ddot{\mathfrak{r}}_i + \mathfrak{F}_i + \mathfrak{F}_i') \, . \, \delta \mathfrak{r}_i = 0. \tag{67}$$

Ова једначина, дакле, уз дате везе потпуно одређује кретање при идеално успостављеним везама; то је т.зв. основна једначина Динамике система материјалних тачака са идеално успостављеним везама. За $\ddot{\mathfrak{r}}_i = 0$ за свако i добива се из (67) основна једначина Статике система материјалних тачака са идеално успостављеним везама.

Из (38), (43) и (58) излази да је

$$\overline{\mathfrak{F}}_i = c \, m_i \mathfrak{V}_i = c \, m_i \frac{\delta \mathfrak{r}_i}{dt}, \tag{68}$$

где је фактор c исти за свако i. Према томе, ако везе нису идеално успостављене, место једначине (67) имаћемо једначину

$$\sum_{i=1}^{n}\left(-m_i \ddot{\mathfrak{r}}_i + \mathfrak{F}_i + \mathfrak{F}_i' + c\, m_i \frac{\delta \mathfrak{r}_i}{dt}\right) . \delta \mathfrak{r}_i = 0,$$

Ако са E означимо кинетичку енергију при виртуелном кретању, биће

$$2E = \sum_{i=1}^{n} m_i \mathfrak{B}_i \cdot \mathfrak{B}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\delta \mathfrak{r}_i}{dt} \cdot \frac{\delta \mathfrak{r}_i}{dt} = \frac{1}{dt^2} \sum_{j=1}^{\alpha} \sum_{\iota=1}^{\alpha} a_{j\iota}\, \delta q_j\, \delta q_\iota,$$

па ћемо последњу једначину моћи писати у облику

$$\sum_{i=1}^{n}(-m_i \ddot{\mathfrak{r}}_i + \mathfrak{F}_i + \mathfrak{F}_i') . \delta \mathfrak{r}_i + 2cE\, dt = 0. \tag{69}$$

За $c=0$ добива се одавде једначина (67).

VIII

Сва кретања материјалних тачака (x_i, y_i, z_i) под дејством познатих спољашњих и унутрашњих сила $\mathfrak{F}_i$ и $\mathfrak{F}_i'$, а компатибилна с везама (13) и (15), дата су једначинама (30), односно (39). Које од свих тих кретања да се истакне, да се сматра за идеално?

Гаус захтева да то буде оно код којег енергија убрзања сила веза има минимум, тј. код којег је укупна енергија убрзања изгубљених сила минимална. Овај захтев спада у т.зв. принципе минимума, принципе економије, и томе сличне телеолошке принципе.

Принцип виртуелних померања захтева да то буде оно кретање код којег је укупан елементаран виртуелни рад сила веза нула. Међутим, виртуелна кретања била су дефинисана само за холономне везе и за оне нехоломне које су линеарне по брзинама, а за остале нехолономне не; према томе, тај принцип је дефектан. У VI смо дефинисали виртуелна кретања за сваки облик веза, те тиме уклонили дефектност принципа, но увек остаје отворено питање зашто баш тај принцип да се узме: виртуелна кретања су она којима се материјалне тачке не само не крећу, него уопште и не могу да се крећу (осим код склерономних система).

Ми смо у IV захтевали да кретање са идеално успостављеним везама буде оно за које је увек $J''=0$. Математички, тај захтев нам изгледа више логичан и образложен него прва два:

наишли смо на једну инваријанту силе, па захтевамо да та инваријанта буде нула. И са гледишта Механике био би тај захтев потпуно образложен и врло плаузибилан кад би та инваријанта нешто механички значила. Она и значи, но опет се своди на виртуелан рад. Тиме је, истина, проширен појам виртуелног рада на све везе, но принципска тешкоћа није уклоњена. Као год што нам Ѓаусов захтев изгледа метафизички, а принцип виртуелног рада необразложен, тако нам захтев који смо поставили у IV изгледа натегнут. Зато ћемо покушати да подухватимо проблем и с друге стране.

Да би после било опште излагање јасније, изложићемо идеју прво на неколико простих примера.

Узећемо, прво, кретање по косој равни под утицајем силе теже. Ако поред силе теже додамо још ма какве силе које се налазе у косој равни, оне неће утицати да материјална тачка изађе из косе равни, него могу утицати само на кретање у тој равни. Сила теже је та која вуче тачку из косе равни, и ту силу треба парирати. Међутим, и сила теже има компоненту у косој равни, па ова не вуче тачку из равни. Из равни тачку вуче само компонента ортогонална на косу раван и само ову компоненту треба силом везе парирати. Другим речима, дата је сила у простору од три димензије, а кретање треба да се врши у две димензије. Свако додавање сила које се налазе у те две димензије могуће је, али није потребно. Оно што је неопходно додати то је нека сила везе која нема ортогоналну компоненту у косој равни. Учинивши то, из Механике у тродимензионалном простору прелазимо у Механику у једној одређеној равни, у којој можемо додавати силе како хоћемо.

Узмимо, друго, кретање по непокретној површини $f(x, y, z) = 0$. Дате силе вуку тачку са те површине. У неком одређеном тренутку све силе које леже у тангенцијалној равни положеној кроз материјалну тачку на површину не вуку тачку са површине; могу вући оне које не леже у тој равни. Да би веза била одржана, неопходно је додати неку силу везе која нема ортогоналну компоненту у тој тангенцијалној равни, тј. која је ортогонална на њу. Учинивши то, из Механике у тродимензионалном простору прелазимо у Механику на површини, тј. на једном дводимензионалном варијетету, у којем можемо додавати силе какве хоћемо, остајући са њима у тангенцијалној равни.

Узмимо, напослетку, кретање из примера 6° у V: $\dot{x}^2+\dot{y}^2=a^2$. Ако сила везе (X'', Y'') уз дату силу (X, Y) већ одржава ову везу, па додамо силу $(\bar{X}, \bar{Y})$, мора бити задовољена једначина

I 1

$\dot{x}\bar{X}+\dot{y}\bar{Y}=0$, тј. додата сила мора бити управна на брзину. Према томе, овде силе управне на брзину не кваре везу. Да би, дакле, веза била одржана, неопходно је парирати кварење везе од стране дате силе (X, Y) силом везе у правцу брзине. То се, истина, може постићи и другом неком силом, но ова се онда може разложити у две компоненте: једна у правцу брзине, друга управно на њу; прва је потребна, друга спада у оне силе које су у складу са везама и које се могу додавати како год хоћемо.

После ових примера прећи ћемо на опште разматрање.

У једначинама (37) и (38) узећемо $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\alpha$ као координате вектора $\vec{\mu}$ у простору од α димензија. Исто тако ћемо $\frac{\partial \gamma_k}{\partial \dot{q}_1}, \frac{\partial \gamma_k}{\partial \dot{q}_2}, \ldots, \frac{\partial \gamma_k}{\partial \dot{q}_\alpha}$ узети као координате вектора у истом простору; тај вектор се може означити са $\nabla' g_k$, где је ∇' Хамилтонов оператор у простору од α димензија по величинама $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_\alpha$. Слично ће бити:

$\mathfrak{q}$	вектор са	координатама		$q_1, q_2, \ldots, q_\alpha$;
$\ddot{\mathfrak{q}}$	"	"	"	$\ddot{q}_1, \ddot{q}_2, \ldots, \ddot{q}_\alpha$;
$\mathfrak{Q}$	"	"	"	$Q_1, Q_2, \ldots, Q_\alpha$;
$\mathfrak{Q}'$	"	"	"	$Q_1', Q_2', \ldots, Q_\alpha'$;
$\mathfrak{Q}''$	"	"	"	$Q_1'', Q_2'', \ldots, Q_\alpha''$;
$\mathfrak{Q}^*$	"	"	"	$Q_1^*, Q_2^*, \ldots, Q_\alpha^*$;
$\mathfrak{a}$	"	"	"	$a_1, a_2, \ldots, a_\alpha$;

где је

$$a_j = \sum_{r=1}^{\alpha}\sum_{s=1}^{\alpha}\begin{bmatrix} s & r \\ & j \end{bmatrix}\dot{q}_r\,\dot{q}_s.$$

Осим тога, са $\mathcal{A}$ означићемо тензор

$$\left\{\begin{matrix} a_{11}\ldots\ldots a_{1\alpha} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ a_{\alpha 1}\ldots\ldots a_{\alpha\alpha}. \end{matrix}\right.$$

Тада се опште једначине кретања (37), (38) и (39) могу писати овако:

$$\left.\begin{matrix} \mathcal{A}\ddot{\mathfrak{q}}+\mathfrak{a}=\mathfrak{Q}+\mathfrak{Q}'+\mathfrak{Q}''+\mathcal{A}\vec{\mu} \\ \gamma_k=0, \quad \vec{\mu}\cdot\nabla'\gamma_k=0, \\ (k=1, 2, \ldots, \beta). \end{matrix}\right\} \tag{70}$$

Вектор $\overline{\mathfrak{Q}} = A\vec{\mu}$ не дира у везе. Према томе, кварење веза од стране вектора $\mathfrak{Q}$ и $\mathfrak{Q}'$ треба парирати вектором $\mathfrak{Q}''$. То ће се моћи учинити ако је вектор $\mathfrak{Q}''$ управан на сваки вектор $\vec{\mu}$ који задовољава трећу једначину у (70), тј. ако је $\mathfrak{Q}'' \cdot \vec{\mu} = 0$ за свако $\vec{\mu}$. Ово се, истина, може постићи и другим неким вектором $\mathfrak{Q}''$, но он ће имати компоненту која није потребна, него спада у оне векторе који су у складу са везама и који се могу додавати како год хоћемо. Услов $\mathfrak{Q}'' \cdot \vec{\mu} = 0$ у скаларном облику гласи $\sum_{i=1}^{\alpha} Q_i'' \mu_i = 0$, па смо дошли до резултата као и у IV, тј.

$$\mathfrak{Q}'' = \sum_{k=1}^{\beta} \lambda_k \nabla' \gamma_k. \tag{71}$$

Што смо употребили векторе у простору од α димензија, било је само ради лакшег изражавања. До истог резултата може се доћи и помоћу скалара и скаларних једначина.

Кад укупан елементаран виртуелни рад сила веза није нула, обично се каже да постоји трење. Према изложеном, то није сасвим тачно. Ако тај рад није нула, то значи да поред сила веза $\mathfrak{F}_i''$ постоје још и силе $\overline{\mathfrak{F}}_i$ које не морају бити баш трење.

IX

Једначине (53), тј. у векторском облику једначине (70) и (71), извео сам у чланку Les équations générales du mouvement d'un système de points matériels aux liaisons données (*Publications de l'Institut mathématique de l'Académie serbe des sciences*, T. II, 1948; p. 116—130). То њихово извођење може се сад кратко овако репродуковати.

Полазне једначине (34) могу се помоћу вектора $\mathfrak{q}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{Q}', \mathfrak{Q}^*$ и $\mathfrak{a}$ и тензора A писати у облику

$$\begin{aligned} A\ddot{\mathfrak{q}} + \mathfrak{a} &= \mathfrak{Q} + \mathfrak{Q}' + \mathfrak{Q}^*, \\ \ddot{\mathfrak{q}} \cdot \nabla' \gamma_k &= c_k, \quad (k = 1, 2, \ldots, \beta). \end{aligned} \tag{72}$$

Узмимо да је квадратна форма $2T$ дефинитна, тј. да детерминанта начињена од њених коефицијената није идентички једнака нули.

Ако са $\mathcal{A}^{-1}$ означићемо реципрочни тензор тензора $\mathcal{A}$, добићемо из (72)

$$\ddot{q} = \mathcal{A}^{-1}(\mathfrak{Q}+\mathfrak{Q}'-\mathfrak{a})+\mathcal{A}^{-1}\mathfrak{Q}^*.$$

Према томе је

$$\mathcal{A}^{-1}\mathfrak{Q}^* \cdot \nabla'\gamma_k = c_k - \mathcal{A}^{-1}(\mathfrak{Q}+\mathfrak{Q}'-\mathfrak{a}).\ \nabla'\gamma_k, \quad (k=1,2,\ldots,\beta) \tag{73}$$

тј.:

(А) Ортогоналне алгебарске пројекције вектора $\mathcal{A}^{-1}\mathfrak{Q}^*$ на векторе $\nabla'\gamma_k$ потпуно су одређене функције од $q_1, q_2, \ldots, q_\alpha$, $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_\alpha$.

У (73) имамо β скаларних једначина по $\alpha > \beta$ непознатих координата вектора $\mathfrak{Q}^*$. Нека буде $\mathfrak{Q}_*$ једно решење једначина (73):

$$\mathcal{A}^{-1}\mathfrak{Q}_* \cdot \nabla'\gamma_k = c_k - \mathcal{A}^{-1}(\mathfrak{Q}+\mathfrak{Q}'-\mathfrak{a}).\ \nabla'\gamma_k.$$

Ставимо ли $\mathfrak{Q}^* - \mathfrak{Q}_* = \mathfrak{A}$, имаћемо онда за $\mathfrak{A}$ једначине

$$\mathcal{A}^{-1}\mathfrak{A}.\ \nabla'\gamma_k = 0.$$

Означимо ли вектор $\mathcal{A}^{-1}\mathfrak{A}$ са $\vec{\mu}\{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\alpha$, можемо рећи:

(В) Ако вектор $\mathfrak{Q}_*$ успоставља везе, сваки други вектор $\mathfrak{Q}^*$ који успоставља везе јесте $\mathfrak{Q}^* = \mathfrak{Q}_* + \mathcal{A}\vec{\mu}$ где је $\vec{\mu}$ вектор који задовољава једначине

$$\vec{\mu} \cdot \nabla'\gamma_k = 0, \quad (k=1,2,\ldots,\beta). \tag{74}$$

На основи тога:

(С) Ма како узели вектор $\vec{\mu}$ који задовољава једначине (74), вектор $\mathcal{A}\vec{\mu}$ не дира у везе, него је с њима у сагласности; овакве векторе $\mathcal{A}\vec{\mu}$ можемо по вољи додавати, – везе, једном успостављене, биће и надаље очуване, само ће кретање бити друго.

Пошто смо тако увели вектор $\vec{\mu}$, лако је доказати:

(D) Међу векторима $\mathfrak{Q}^*$ којима су успостављене везе, налази се један и само један вектор $\mathfrak{Q}''$ који је управан на све векторе $\vec{\mu}$ који задовољавају једначине (74), $\vec{\mu} \cdot \mathfrak{Q}'' = 0$. Како, наиме, вектор $\mathfrak{Q}''$ треба да буде управан на све векторе $\vec{\mu}$, а ови су управни на све векторе $\nabla'\gamma_k$, мора бити

$$\mathfrak{Q}'' = \lambda_1 \nabla'\gamma_1 + \lambda_2 \nabla'\gamma_2 + \ldots + \lambda_\beta \nabla'\gamma_\beta,$$

где су λ_r скалари. Ставимо ли ово у (73), добићемо β једначина

$$\sum_{r=1}^{\beta} \lambda_r \mathcal{A}^{-1} \nabla'\gamma_r \cdot \nabla'\gamma_k = c_k - \mathcal{A}^{-1}(\mathfrak{Q}+\mathfrak{Q}'-\mathfrak{a})$$

из којих ће се одредити β скалара λ_r као функције од $q_1, q_2, \ldots, q_\alpha, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_\alpha$.

На основи тога:

(E) Вектор $\mathfrak{Q}''$ је потпуно одређен везама и спољашњим и унутрашњим силама.

Из (B) излази:

(F) Сваки вектор $\mathfrak{Q}^*$ који успоставља везе има облик $\mathfrak{Q}^* = \mathfrak{Q}'' + \mathcal{A}\vec{\mu}$, где је $\mathfrak{Q}''$ вектор наведен у (B), а $\vec{\mu}$ вектор који задовољава једначине (74).

На основи тога, једначине (72) и (74) могу се писати овако:

$$\mathcal{A}\ddot{\mathfrak{q}} + \mathfrak{a} = \mathfrak{Q} + \mathfrak{Q}' + \sum_{r=1}^{\beta} \lambda_r \nabla'\gamma_r + \mathcal{A}\vec{\mu},$$

$$\ddot{\mathfrak{q}} \cdot \nabla'\gamma_k = c_k, \quad \vec{\mu} \cdot \nabla'\gamma_k = 0;$$

$$(k = 1, 2, \ldots, \beta).$$

Место друге групе једначина можемо писати једначине $\gamma_k = 0$ од којих смо их добили диференцирањем. Тако ћемо доћи до векторских једначина (70) и (71), тј. до скаларних једначина (53)

X

Узмимо, на пример, да систем од n материјалних тачака приликом кретања има особине чврстог тела, тј. да отстојање сваког пара материјалних тачака остане приликом кретања константно. Тада ће бити за тачке P_1, P_2, P_3;

$$f_1 \equiv \mathfrak{r}_{32} . \mathfrak{r}_{32} = C_1, \quad f_2 \equiv \mathfrak{r}_{13} . \mathfrak{r}_{13} = C_2, \quad f_3 \equiv \mathfrak{r}_{21} . \mathfrak{r}_{21} = C_3;$$

са $\mathfrak{r}_i$ означили смо вектор положаја тачке P_i, а са $\mathfrak{r}_{ij}$ разлику $\mathfrak{r}_j - \mathfrak{r}_i$. Да би и сва друга отстојања била константна, потребно је и довољно да буду константе отстојања $P_1 P_k, P_2 P_k, P_3 P_k$ за $k = 4, 5, \ldots, n$. То даје још $3(n-3)$ веза

$$f_k^{(1)} \equiv \mathfrak{r}_{1k} . \mathfrak{r}_{1k} = C_k^{(1)}, \quad f_k^{(2)} \equiv \mathfrak{r}_{2k} . \mathfrak{r}_{2k} = C_k^{(2)}, \quad f_k^{(3)} \equiv \mathfrak{r}_{3k} . \mathfrak{r}_{3k} = C_k^{(3)}.$$

Укупно, дакле, имамо

$$3 + 3(n-3) = 3n - 6$$

независних веза.

Диференцирањем одавде добивамо:

$$g_1 \equiv \mathfrak{r}_{32}.(\dot{\mathfrak{r}}_2-\dot{\mathfrak{r}}_3)=0,\; g_2 \equiv \mathfrak{r}_{13}.(\dot{\mathfrak{r}}_3-\dot{\mathfrak{r}}_1)=0,\; g_3 \equiv \mathfrak{r}_{21}.(\dot{\mathfrak{r}}_1-\dot{\mathfrak{r}}_2)=0;$$

$$g_k^{(1)} \equiv \mathfrak{r}_{1k}.(\dot{\mathfrak{r}}_k-\dot{\mathfrak{r}}_1)=0,\; g_k^{(2)} \equiv \mathfrak{r}_{2k}.(\dot{\mathfrak{r}}_k-\dot{\mathfrak{r}}_2)=0,\; g_k^{(3)}=\mathfrak{r}_{3k}.(\dot{\mathfrak{r}}_k-\dot{\mathfrak{r}}_3)=0.$$

Идеалне силе веза биће, дакле,

$$\mathfrak{F}_i''=\lambda_1\nabla_i' g_1+\lambda_2\nabla_i' g_2+\lambda_3\nabla_i' g_3$$
$$+\sum_{k=4}^{n}(\lambda_k^{(1)}\nabla_i' g_k^{(1)}+\lambda_k^{(2)}\nabla_i' g_k^{(2)}+\lambda_k^{(3)}\nabla_i' g_k^{(3)}).$$

Ако је $i \geqslant 4$, онда g_1, g_2, g_3 не садрже $\dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i$, а $g_k^{(1)}, g_k^{(2)}, g_k^{(3)}$ садрже само ако је $k=i$; према томе је

$$\mathfrak{F}_i''=\lambda_i^{(1)}\nabla_i' g_i^{(1)}+\lambda_i^{(2)}\nabla_i' g^{(2)}+\lambda_i^{(3)}\nabla_i' g_i^{(3)} \text{ за } i \geqslant 4.$$

Међутим је

$$\nabla_i' g_i^{(1)}=\mathfrak{r}_{1i},\; \nabla_i' g_i^{(2)}=\mathfrak{r}_{2i},\; \nabla_i' g_i^{(3)}=\mathfrak{r}_{3i},$$

па је коначно

$$\mathfrak{F}_i''=\lambda_i^{(1)}\mathfrak{r}_{1i}+\lambda_i^{(2)}\mathfrak{r}_{2i}+\lambda_i^{(3)}\mathfrak{r}_{3i} \text{ за } i \geqslant 4.$$

Ако је $i=1$, онда g_1, $g_k^{(2)}$, $g_k^{(3)}$ не садрже $\dot{x}_1$, $\dot{y}_1$, $\dot{z}_1$; према томе је

$$\mathfrak{F}_1''=\lambda_2\nabla_1' g_2+\lambda_3\nabla_1' g_3+\sum_{k=4}^{n}\lambda_k^{(1)}\nabla_1' g_k^{(1)},$$

тј.

$$\mathfrak{F}_1''=-\lambda_2\mathfrak{r}_{13}+\lambda_3\mathfrak{r}_{21}-\sum_{k=4}^{n}\lambda_k^{(1)}\mathfrak{r}_{1k}.$$

Слично је

$$\mathfrak{F}_2''=-\lambda_3\mathfrak{r}_{21}+\lambda_1\mathfrak{r}_{32}-\sum_{k=4}^{n}\lambda_k^{(2)}\mathfrak{r}_{2k},$$

$$\mathfrak{F}_3''=-\lambda_1\mathfrak{r}_{32}+\lambda_2\mathfrak{r}_{13}-\sum_{k=4}^{n}\lambda_k^{(3)}\mathfrak{r}_{3k}.$$

На основи тога имамо:

$$\sum_{i=1}^{n}\mathfrak{F}_i''=\mathfrak{F}_1''+\mathfrak{F}_2''+\mathfrak{F}_3''+\sum_{i=4}^{n}\mathfrak{F}_i''$$
$$=-\sum_{k=4}^{n}(\lambda_k^{(1)}\mathfrak{r}_{1k}+\lambda_k^{(2)}\mathfrak{r}_{2k}+\lambda_k^{(2)}\mathfrak{r}_{3k})+$$
$$+\sum_{i=4}^{n}\lambda_i^{(1)}\mathfrak{r}_{1i}+\lambda_i^{(2)}\mathfrak{r}_{2i}+\lambda_i^{(3)}\mathfrak{r}_{3i})=0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} \mathfrak{r}_i \times \mathfrak{F}_i'' = \mathfrak{r}_1 \times \mathfrak{F}_1'' + \mathfrak{r}_2 \times \mathfrak{F}_2'' + \mathfrak{r}_3 \times \mathfrak{F}_3'' + \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{r}_i \times \mathfrak{F}_i''$$

$$= \lambda_1(\mathfrak{r}_2 \times \mathfrak{r}_{32} - \mathfrak{r}_3 \times \mathfrak{r}_{32}) + \lambda_2(\mathfrak{r}_3 \times \mathfrak{r}_{13} - \mathfrak{r}_1 \times \mathfrak{r}_{13}) + \lambda_3(\mathfrak{r}_1 \times \mathfrak{r}_{21} - \mathfrak{r}_2 \times \mathfrak{r}_{21})$$

$$- \sum_{k=4}^{n} (\lambda_k^{(1)}\, \mathfrak{r}_1 \times \mathfrak{r}_{1k} + \lambda_k^{(2)}\, \mathfrak{r}_2 \times \mathfrak{r}_{2k} + \lambda_k^{(3)}\, \mathfrak{r}_3 \times \mathfrak{r}_{3k})$$

$$+ \sum_{i=4}^{n} (\lambda_i^{(1)}\, \mathfrak{r}_1 \times \mathfrak{r}_{1i} + \lambda_i^{(2)}\, \mathfrak{r}_2 \times \mathfrak{r}_{2i} + \lambda_i^{(3)}\, \mathfrak{r}_3 \times \mathfrak{r}_{3i}) = 0.$$

И тако, код чврстог система материјалних тачака идеалне силе веза имају карактеристичне особине унутрашњих сила. Због тога, оне не утичу ни на налет (количина кретања) ни на замах (момент количине кретања) таквог система.

LES ÉQUATIONS GÉNÉRALES DU MOUVEMENT D'UN SYSTÈME DE POINTS MATÉRIELS

Par R. Kašanin

L'auteur soummet à l'analyse mathématique le mouvement d'un système de points matériels aux liaisons quelconques (holonomes ou non-holonomes, linéaires ou non-linéaires). Par cette voie, il parvient aux équations générales (53) (sous forme vectorielle (70) et (71)). En les discutant, on est conduit tout naturellement à la notion des forces idéales. Partant de cette notion, l'auteur interprète les principes des déplacements virtuels et de Gauss.

Les résultats essentiels de cet article ont parus dans les Publications de l'Institut mathématique de l'Académie serbe des sciences, T. II (1948) p. 116–129.

СИСТЕМ ПОСТУЛАТА ЕУКЛИДОВЕ n-ДИМЕНЗИОНАЛНЕ ГЕОМЕТРИЈЕ

Д-р БРАНИСЛАВ ПЕТРОНИЈЕВИЋ (Београд)

Уводна реч

У редовима који следују писац је покушао да формулише постулате Еуклидове n-димензионалне геометрије. Тај се покушај разликује од ранијих покушаја те врсте (од стране Euklid-а, Hilbert-а и Thieme-а) углавном овим трима новинама:

1° одвајањем геометрије једнодимензионалне праве (*ректометрије*) од геометрије дводимензионалне равни (*планиметрије*);

2° проглашавањем појма дужи за основни појам ректометрије, и

3° увођењем постулата везе за просторе са више од три димензије.

А. Ректометрија

1. ПОСТУЛАТИ ВЕЗЕ.

Постулат 1. *Ван дате тачке постоји бар још једна тачка.*

Постулат 2. *Те две тачке спаја једна и само једна дуж.*

Дефиниција. Тачке, које спаја дуж, називају се њеним *крајњим тачкама.*

2. ПОСТУЛАТИ РЕДА.

Постулат 1. *Између крајњих тачака дужи постоји бар још једна тачка.*

Став 1. Између крајњих тачака дужи постоји бесконачно много тачака.

Дефиниција 1. Ако се са C означи трећа тачка на дужи AB‘ дужи AC и CB називају се *делимичним дужима* дужи AB.

Постулат 2. *Ван сваке крајње тачке дужи постоји бар још једна тачка.*

Дефиниција 2. Дуж, која спаја крајњу тачку дужи са тачком ван ње, назива се *продужење* дате дужи.

Став 2. Дуж има два продужења.

Постулат 3. *Продужење дужи изван једне крајње тачке њене поклапа се са продужењем делимичне дужи са истом крајњом тачком.*

3. ПОСТУЛАТИ КОНГРУЕНЦИЈЕ.

Постулат 1. *На продужењу дужи АВ постоји једна и само једна тачка С тако да је дуж* $BC \cong AB$.

Став 1. На сваком од своја два продужења дуж се да продужити *произвољно много* пута.

Дефиниција 1. Дуж заједно са своја два неодређено велика продужења назива се *правом линијом.*

Дефиниција 2. За сваку тачку праве линије каже се да дели праву на две *полуправе.*

Постулат 2. *Дата дуж да се* (тачкама за које се претпоставља да постоје између њених крајњих тачака) *поделити на n конгруентних делимичних дужи, при чему је n редом равно свакол од простих бројева,* 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 *итд.*

Став 2. Дата дуж да се (тачкама које постоје између њених крајњих тачака) поделити на n конгруентних делимичних дужи, при чему је *n* редом равно сваком целом позитивном броју почев са 2.

4. ПОСТУЛАТ БЕСКРАЈНЕ ПРАВЕ.

Дефиниција. Бескрајном називамо праву чије полуправе имају *померљиве* крајње тачке.

Постулат. *Неодређено велике полуправе бескрајне праве, маколико их продужилп, немају заједничке тачке.*

Напомена. Поред горње (Еуклид-ове) дефиниције бескрајне праве постоји у Еуклидовој геометрији још једна дефиниција бескрајне праве: Бескрајном називамо праву чије полуправе *немају крајњих тачака.* Ова друга дефиниција одговара претпоставци, да једна полуправа може реализовати *цео* бесконачан низ коначних целих бројева, док прва дефиниција почива на претпоставци, да једна полуправа може реализирати само један *коначни* (иако неодређено велики) *део* тог низа.

В. Планиметрија

1. ПОСТУЛАТИ ВЕЗЕ.

Постулат 1. *Ван праве постоји бар још једна тачка.*

Став 1. Ван праве постоји бесконачно много дужи, правих и тачака.

Постулат 2. *Права и тачка ван ње одређују раван.*

Став 2. Положај праве у равни одређен је са две тачке равни.

Став 3. Две праве у равни или се секу у једној тачци или немају ниједне заједничке тачке.

Дефиниција 1. За две полуправе равни, које полазе од исте тачке, каже се да заклапају међу собом *угао.*

Дефиниција 2. За полуправу, која са обе полуправе једне праве заклапа једнаке углове, каже се да је *управна* на датој правој, а за углове да су *прави.*

Став 4. Ако је једна полуправа једне праве управна на другој правој, онда је и друга полуправа њена управна на овој другој правој.

Став 5. Две су праве управне једна на другој, ако је свака полуправа једне праве управна на другој правој.

Став 6. Сви су прави углови једнаки.

2. ПОСТУЛАТ РЕДА.

Постулат. *Ако су A, B и C три тачке, које не леже на истој правој, и a једна права која у равни троугла ABC не пролази ни кроз једну од тачака A, B, C, тада ће, ако та права пролази кроз једну од тачака дужи AB, она морати пролазити или кроз једну од тачака дужи BC или кроз једну од тачака дужи AC.* (Pasch-ов постулат).

3. ПОСТУЛАТИ КОНГРУЕНЦИЈЕ.

Постулат 1: *Ако су A и B две тачке на правој a, а A' тачка на правој a', постојаће, на са A', почињућој полуправој праве a' једна и само једна тачка B' тако, да дуж A' B' буде конгруентна са дужи A B* ($A'B' \cong AB$).

Постулат 2. *Ако је дат угао BAC и ван њега права a са полуправом која почиње тачком A' тада ће постојати један и само један* $\sphericalangle B'A'C'$ *тако да буде* $\sphericalangle B'A'C' \cong \sphericalangle BAC$.

Постулат 3. *Ако за два троугла ABC и A'B'C' постоје конгруенције:*

$$AB \cong A'B', \; AC \cong A'C' \text{ и } \sphericalangle A \cong \sphericalangle A',$$

постојаће и конгруенције:

$$\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle A'B'C' \text{ и } ACB \cong \sphericalangle A'C'B'.$$

Став 1. Ако су у два троугла конгруентне две стране и захваћени угао, биће конгруентни и остала два угла и трећа страна.

Став 2. Ако су у два троугла конгруентни једна страна и два угла на њој, биће и остале две стране и трећи угао конгруентни.

4. ПОСТУЛАТ ПАРАЛЕЛНИХ.

Дефиниција. За праву кроз дату тачку ван дате праве у равни каже се да је *паралелна* са овом правом ако се не сече са њом.

Став 1. Ако две праве имају *заједничку управну*, оне су паралелне.

Став 2. Кроз дату тачку ван дате праве пролази *бар једна* права која је паралелна са њом.

Став 3. Ако су две праве пресечене трећом тако да унутрашњи наизменични углови буду једнаки, те две праве имаће заједничку управну и бити паралелне.

Постулат. *Кроз дату тачку ван дате праве може пролазити само једна паралелна* (Еуклид-ов постулат).

Став 4. Ако су две паралелне праве пресечене трећом правом биће унутрашњи наизменични углови једнаки.

5. ПОСТУЛАТИ НЕПРЕКИДНОСТИ.

Постулат 1. *Ако су дате две дужи a и b тако да је $a > b$, постојаће увек коначан цео број n тако велики да ће се, ако се њим помножи мања дуж, добити дуж која ће бити већа од веће дужи, тј. $a.n$ биће $> b$* (Архимед-ов постулат).

Постулат 2: *Ако су на једној дужи дата два бескрајна низа тачака, који се у супротном правцу један другом приближују, а од којих први нема последњег а други првог члана, мораће између та два низа постојати једна гранична тачка, која ће се моћи придати или првом низу као горња или другом низу као доња граница* (Dedekind-ов постулат).

С. Стереометрија

ПОСТУЛАТИ ВЕЗЕ.

Постулат 1: *Ван равни постоји бар још једна тачка.*

Став 1. Ван равни постоји *бесконачно много* правих, равни и тачака.

Постулат 2. *Раван и тачка ван равни одређују простор.*

Став 2. Положај равни у простору одређен је са *три тачке* простора, које не леже на једној правој.

Став 3. Две равни у простору или немају ниједне заједничке тачке или је њихов пресек права.

Став 4. Раван и права ван ње или немају ниједне заједничке тачке, или им је само једна тачка заједничка.

Став 5. Две праве које се секу одређују у простору само једну раван.

Дефиниција. Једна полуправа *управна* је на једној равни, ако је управна на свима правима те равни које пролазе кроз њено подножје.

D. Хиперстереометрија

ПОСТУЛАТИ ВЕЗЕ.

Постулат 1. *Ван простора постоји бар још једна тачка.*

Постулат 2. *Простор и тачка ван њега одређују хиперпростор.*

Став 1. Положај простора у хиперпростору одређен је са *четири* тачке хиперпростора, које не леже ни у једној равни ни на једној правој.

Став 2. Две равни у хиперпростору, које припадају двама тродимензионалним просторима, ако се секу, секу се у *једној тачки.*

Дефиниција. Једна полуправа *управна* је на једном простору ако је управна на свима правима тога простора, које пролазе кроз њено подножје.

E. Геометрија n-димензионалног простора

ПОСТУЛАТИ ВЕЗЕ.

Дефиниција. Под n-димензионалним простором разумемо простор са *више од четири* димензије.

Постулат 1: *Ван* $n-1$ *димензионалног простора постоји бар још једна тачка.*

Постулат 2: $n-1$ *димензионални простор и тачка ван њега одређују* n*-димензионални простор.*

Завршна примедба

Истинитост одвајања ректометрије од планиметрије потврђује општа Ајлер-ова теорема Еуклид-ове n-димензионалне геометрије. А ево како.

Ајлер-ова теорема за конвексне полиедре гласи (ако се са e означи број темена, са k број ивица, са f број површина, одн. страна):

$$e-k+f=2.$$

Одговарајућа Ајлер-ова теорема за конвексне политопе биће (ако се број страна политопа означи са v):

$$e-k+f-v=0,$$

а одговавајућа Ајлер-ова теорема за петодимензионални простор биће (ако се са h означи број четиридимензионалних страна):

$$e-k+f-v+h=2.$$

Те три Ајлер-ове теореме могу се написати и овако:

$$(e+f)-k=2,$$
$$(e+f)-(k+v)=0,$$
$$(e+f+h)-(k+v)=2.$$

Овако написане оне показују, да ће лева страна Ајлер-ове теореме за простор непарног броја димензија бити $=2$, а парног броја $=0$. Према томе Ајлер-ова теорема за дводимензионални простор била би:

$$e-k=0,$$

а за једнодимензионални

$$e=2.$$

Доиста број темена конвексних полигона у равни исти је са бројем њихових страна, а 2 у изразу $e=2$ је број крајњих тачака дужи.

POSTULATENSYSTEM DER n-DIMENSIONALEN EUKLIDISCHEN GEOMETRIE

Von Branistav Petronijević (Beograd)

Versuch eines Postulatensystems der n-dimensionalen Euklidischen Geometrie. Zum Unterschied von früheren Versuchen dieser Art (Euklid, Hilbert, Thieme) werden vom Verfasser folgende drei Neuigkeiten eingeführt: 1. Abtrennung der Geometrie der eindimensionalen Geraden (Rectometrie) von derjenigen der zweidimensionalen Ebene (Planimetrie). 2. Erhebung des Begriffes der Strecke zu dem Grundbegriffe der Rectometrie. 3. Einführund der Verknüpfungspostulate in die n-dimensionale ($n \geqslant 3$) Geometrie.

О АСИМПТОТСКОЈ ВРЕДНОСТИ LEGENDRE-ОВИХ ПОЛИНОМА

ЈОВАН КАРАМАТА и МИОДРАГ ТОМИЋ (Београд)

1. Позната Darboux-Stieltjes-ова [1] асимптотска формула за Legendre-ов полином $P_n(\cos\vartheta)$ изводи се из Dirichlet-Mehler-овог обрасца

$$P_n(\cos\vartheta)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin(n+{}^1/_2)\varphi\, d\varphi}{\{2(\cos\vartheta-\cos\varphi)\}^{1/2}}$$

или сличних интеграла, из којих се добива ред конвергентан за $\pi/6<\vartheta<5\pi/6$, а који се у ствари своди на асимптотски ред који важи за свако $\varepsilon<\vartheta<\pi-\varepsilon$.

У свом саопштењу од 18-I-1950 М. Томић је показао да се први члан тог асимптотског развитка, тј. Laplace-Stieltjes-ова формула [1], може добити из Fourier-ова реда Legendre-ова полинома, који је дао Heine [2]. На седници од 25-I-1950 Ј. Карамата је показао да се овим путем могу добити и остали чланови асимптотског развитка. Овде ћемо извести рачун само за други члан, при чему напомињемо да се овим поступком може добити не само цео асимптотски развитак Legendre-ова полинома већ се исти може применити и на класу извесних Fourier-ових редова са тотално монотоним коефицијентима.

Сам поступак употребљава најједноставнија сретства анализе и користи се искључиво Abel-овим делимичним сабирањем, а почива на леми наведеној у тачки 2. Нагласимо и то да се облик овог асимптотског реда добива непосредно преко функције

$$f(z)=\frac{1}{\sqrt{1-z}}=\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu z^\nu,$$

и њених извода што је у складу са познатим асимптотским редовима. У Darboux-Stieltjes--ову обрасцу треба наиме, поједине чланове поново скупити да би се добио овај образац

$$P_n(\cos\vartheta)=2\,a_n\,R\left\{z^{n-1}f(z^2)+\frac{z^{n-1}}{4\pi}[z\,f(z^2)]'\right\}+o\left({}^1/n\sqrt{n}\right)\ \text{ са }\ z=e^{\vartheta i}.$$

2. Лема *Нека је*

$$a_\nu^{(n)} \geqslant a_{\nu+1}^{(n)} \quad \textit{за свако} \quad n=1,2,3,\ldots,$$

и

$$a_\nu^{(n)} \to a_\nu \quad \textit{кад} \quad n \to \infty .$$

Ако

$$a_\nu \to 0 \ \textit{кад} \ \nu \to \infty ,$$

тада

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu^{(n)} \, e^{\nu\vartheta i} \to \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu e^{\nu\vartheta i}, \qquad n \to \infty ,$$

униформно по ϑ за свако

$$0 < \alpha \leqslant \vartheta \leqslant \pi - \alpha .$$

Доказ. При доказу користићемо се неједначином (види [3])

$$\left| \sum_{\nu=n}^{\infty} A_\nu \, e^{\nu\vartheta i} \right| \leqslant \frac{A_n}{\sin \vartheta/2}, \quad 0 < \vartheta < \pi , \tag{1}$$

која важи кадгод низ A_ν опада, тј. кад је

$$A_\nu \geqslant A_{\nu+1} .$$

Како је

$$\Delta_n = \left| \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu^{(n)} \, e^{\nu\vartheta i} - \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \, e^{\nu\vartheta i} \right| =$$

$$= \left| \sum_{\nu=0}^{k-1} (a_\nu^{(n)} - a_\nu) \, e^{\nu\vartheta i} + \sum_{\nu=k}^{\infty} (a_\nu^{(n)} - a_\nu) \, e^{\nu\vartheta i} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \sum_{\nu=0}^{k-1} (a_\nu^{(n)} - a_\nu) e^{\nu\vartheta i} \right| + \left| \sum_{\nu=k}^{\infty} a_\nu^{(n)} e^{\nu\vartheta i} \right| + \left| \sum_{\nu=k}^{\infty} a_\nu \, e^{\nu\vartheta i} \right| ,$$

то је, према (1),

$$\Delta_n \leqslant \left| \sum_{\nu=0}^{k-1} (a_\nu^{(n)} - a_\nu) \, e^{\nu\vartheta i} \right| + \frac{a_k^{(n)}}{\sin \vartheta/2} + \frac{a_k}{\sin \vartheta/2} .$$

Према томе је

$$\limsup_{n=\infty} \Delta_n \leqslant 2 \frac{a_k}{\sin \vartheta/2} .$$

Како је

$$\frac{2 a_k}{\sin \vartheta/2} < \varepsilon_\alpha \ \text{за свако} \ 0 < \alpha \leqslant \vartheta \leqslant \pi - \alpha ,$$

ако само изаберемо довољно велико k, то мора $\Delta_n \to 0$ кад $n \to \infty$, чиме је горња лема доказана.

2. Heine-ов {2} ред за Legendre-ов полином $P_n(\cos\vartheta)$ има облик

$$P_n(\cos\vartheta) = \frac{4}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_\nu}{a_{n+\nu}} \frac{\sin(n+2\nu+1)\vartheta}{2n+2\nu+1}, \tag{2}$$

где су бројеви a_ν, $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ Taylor-ови коефициенти функције

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{1-z}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu, \tag{3}$$

тј. где је

$$a_0 = 1, \quad a_n = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot 2n-1}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 2n} = \frac{2n-1}{2n} a_{n-1}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots . \tag{3'}$$

Према томе можемо ставити

$$P_n(\cos\vartheta) = 2\, a_n\, R\{e^{(n+1)\vartheta i} f(e^{2\vartheta i})\} - R\{e^{(n+1)\vartheta i}\, \delta_n(\vartheta)\}, \tag{4}$$

где је

$$\delta_n(\vartheta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu^{(n)}\, e^{2\nu\vartheta i}, \tag{5}$$

а

$$c_\nu^{(n)} = 2\, a_\nu \left(a_n - \frac{2}{\pi} \frac{1}{a_{n+\nu}(2n+2\nu+1)} \right). \tag{6}$$

Како је

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \left(1 - \frac{1}{8n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right), \tag{7}$$

то образац (4) даје први члан асимптотског развитка за $P_n(\cos\vartheta)$. Да бисмо добили и други члан, потребно је да још оценимо $\delta_n(\vartheta)$ кад $n \to \infty$.

Из асимптотског израза (7) за a_n следи, према (6), да је

$$c_\nu^{(n)} = \frac{2\, a_\nu}{a_{n+\nu}} \left\{ a_n\, a_{n+\nu} - \frac{2}{\pi} \frac{1}{2n+2\nu+1} \right\} =$$

$$= \frac{2\, a_\nu}{\pi\, a_{n+\nu}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+\nu}} \left[1 - \frac{1}{8n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right] \right.$$

$$\left. \left[1 - \frac{1}{8(n+\nu)} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right] - \frac{2}{2n+2\nu+1} \right\} =$$

$$= \frac{2a_\nu}{\pi n a_{n+\nu}}\left\{\sqrt{\frac{n}{n+\nu}}\left[1-\frac{1}{8n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right]-\frac{2n}{2n+2\nu+1}\right\}=$$

$$= \frac{2a_\nu}{\pi n/\sqrt{n\pi}}\left\{\left[1-\frac{2\nu+1}{4n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right]-\left[1-\frac{2\nu+1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right]\right\}=$$

$$= \frac{2a_\nu}{\sqrt{\pi}\,n\sqrt{n}}\left[\frac{2\nu+1}{4}+o(1)\right]=\frac{(2\nu+1)a_\nu}{2\sqrt{n}\sqrt{n}\,\pi}+o(1/n\sqrt{n}). \qquad (8)$$

Отуда видимо да је

$$n\sqrt{n}\,c_\nu^{(n)}=c_\nu+o(1).$$

где је

$$c_\nu=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}(2\nu+1)a_\nu.$$

Како c_ν не само да не тежи нули са $1/\nu$, већ тежи монотоно бесконачности, то да бисмо на израз за $\delta_n(\vartheta)$ могли применити наведену лему, морамо га претходно трансформисати, тј. свести на изразе на које ту лему можемо применити. Ако у реду за $\delta_n(\vartheta)$ извршимо делимично сабирање, добићемо

$$\delta_n(\vartheta)=\sum_{\nu=0}^{\infty}c_\nu^{(n)}e^{2\nu\vartheta i}=\frac{1}{1-e^{2\vartheta i}}\left\{c_0^{(n)}+\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(c_\nu^{(n)}-c_{\nu-1}^{(n)}\right)e^{2\nu\vartheta i}\right\}.$$

Показаћемо да се ред

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(c_\nu^{(n)}-c_{\nu-1}^{(n)}\right)e^{2\nu\vartheta i}=\sum_{\nu=1}^{\infty}d_\nu^{(n)}e^{2\nu\vartheta i}$$

може написати у облику

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}d_\nu^{(n)}e^{2\nu\vartheta i}=\sum_{\nu=1}^{\infty}e_\nu^{(n)}e^{2\nu\vartheta i}-\sum_{\nu=1}^{\infty}f_\nu^{(n)}e^{2\nu\vartheta i},$$

тј. ставити

$$d_\nu^{(n)}=e_\nu^{(n)}-f_\nu^{(n)},$$

где низови

$$n\sqrt{n}\,e_\nu^{(n)} \text{ и } n\sqrt{n}\,f_\nu^{(n)}$$

задовољавају услове леме, тако да се она може применити на сваки од редова

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}e_\nu^{(n)}e^{2\nu\vartheta i} \text{ и } \sum_{\nu=1}^{\infty}f_\nu^{(n)}e^{2\nu\vartheta i}.$$

4. У ту сврху пођимо од Wallis-ова обрасца

$$\frac{2}{\pi} = \prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{(2\,\nu)^2}\right) = \prod_{\nu=1}^{\infty}\frac{2\,\nu-1}{2\,\nu}\,\frac{2\,\nu+1}{2\,\nu}.$$

Како је

$$a_n = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot 2\,n-1}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2\,n} = \frac{2\,n-1}{2\,n}a_{n-1}, \tag{9}$$

то је

$$(2\,n+1)\,a_n^2 = \prod_{\nu=1}^{n}\left(1-\frac{1}{(2\,\nu)^2}\right).$$

Према томе, низ $(2\,n+1)a_n^2$ монотоно опада и тежи $2/\pi$; дакле,

$$\frac{2}{\pi} < (2\,n+1)a_n^2. \tag{10}$$

Ако још ставимо

$$b_n = \frac{2}{\pi\,(2\,n+1)a_n},$$

биће, према (9),

$$b_n = \frac{2\,n}{2\,n+1}\,b_{n-1} < b_{n-1}, \tag{11}$$

а сам низ $c_\nu^{(n)}$ можемо тада написати у облику

$$c_\nu^{(n)} = 2\,a_\nu\,(a_n - b_{n+\nu}).$$

Како је, према (9),

$$c_\nu^{(n)} = \frac{2\,\nu-1}{\nu}\,a_{\nu-1}\,(a_n - b_{n+\nu}),$$

а, према (11),

$$\begin{aligned} c_{\nu-1}^{(n)} &= 2\,a_{\nu-1}\,(a_n - b_{n+\nu-1}) = \\ &= 2\,a_{\nu-1}\,(a_n - \frac{2\,n+2\,\nu+1}{2\,n+2\,\nu}\,b_{n+\nu}), \end{aligned}$$

то је

$$d_\nu^{(n)} = c_\nu^{(n)} - c_{\nu-1}^{(n)} =$$

$$= 2\,a_{\nu-1}\left\{(\frac{2\,\nu-1}{2\,\nu}-1)a_n - \left(\frac{2\,\nu-1}{2\,\nu} - \frac{2\,n+2\,\nu+1}{2\,n+\nu}\right)b_{n+\nu}\right\} =$$

$$= \frac{a_{\nu-1}}{\nu}\left\{\frac{n+2\,\nu}{n+\nu}\,b_{n+\nu} - a_n\right\} =$$

$$= 2\,\frac{a_{\nu-1}\,b_{n+\nu}}{n+\nu} - \frac{a_{\nu-1}}{\nu}\left\{a_n - \frac{n}{n+\nu}b_{n-\nu}\right\} =$$

$$= e_\nu^{(n)} - f_\nu^{(n)}.$$

Јасно је да низ

$$e_\nu^{(n)} = 2\,\frac{a_{\nu-1}\,b_{n+\nu}}{n+\nu}$$

опада с обзиром на ν за свако n, јер, према (9) и (11), низови a_ν и $b_{n+\nu}$ опадају кад ν расте. Да бисмо показали да и низ

$$f_\nu^{(n)} = \frac{a_{\nu-2}}{\nu}\left\{a_n - \frac{n}{n+\nu}\,b_{n+\nu}\right\}$$

опада, посматрајмо разлику

$$f_\nu^{(n)} - f_{\nu+1}^{(n)}.$$

Како је, према (9)

$$f_\nu^{(n)} = \frac{a_{\nu-1}}{\nu}\left\{a_n - \frac{n}{n+\nu}\,b_{n+\nu}\right\} =$$

$$= \frac{2\,a_\nu}{2\nu-1}\left\{a_n - \frac{n}{n+\nu}\,b_{n+\nu}\right\},$$

а, према (10)

$$f_{\nu+1}^{(n)} = \frac{a_\nu}{\nu+1}\left\{a_n - \frac{n}{n+\nu+1}\,b_{n+\nu+1}\right\} =$$

$$= \frac{a_\nu}{\nu+1}\left\{a_n - \frac{n}{n+\nu+1}\,\frac{2\,n+2\,\nu+2}{2\,n+2\,\nu+3}\,b_{n+\nu}\right\} =$$

$$= \frac{a_\nu}{\nu+1}\left\{a_n - \frac{2\,n}{2\,n+2\,\nu+3}\,b_{n+\nu}\right\},$$

то је

$$f_\nu^{(n)} - f_{\nu+1}^{(n)} =$$

$$= \frac{a_\nu}{\nu\,(2\,\nu-1)}\left\{\Big[(2\,\nu+2) - (2\,\nu-1)\Big]a_n - \left[\frac{\nu+1}{n+\nu} - \frac{2\,\nu-1}{2n+2\nu+3}\right]2\,n\,b_{n+\nu}\right\} =$$

$$= \frac{3\,a_\nu}{\nu\,(2\,\nu-1)}\left\{a_n - \frac{2\,n\,(n+2\,\nu+3)}{(n+\nu)\,(2\,n+2\nu+3)}\,b_{n+\nu}\right\} =$$

$$= \frac{3\,a_\nu}{\nu\,(2\,\nu-1)}\left\{a_n - \frac{2\,(n+\nu)^2+2\,(n-\nu^2)}{2\,(n+\nu)^2+3\,(n+\nu)}\,b_{n+\nu}\right\}.$$

А како је

$$\frac{2\,(n+\nu)^2+2\,(n-\nu^2)}{2\,(n+\nu)^2+3\,(n+\nu)} < 1,$$

и, према (11),

$$b_{n+\nu} < b_n,$$

а

$$b_n < a_n ,$$

јер је, према (10),

$$b_n = \frac{2}{\pi(2n+1)a_n} < a_n,$$

то је израз у витичастој загради позитиван, тј.

$$f_\nu^{(n)} > f_{\nu+1}^{(n)}.$$

Најзад, је, према (7),

$$b_n = \frac{1}{\pi n \sqrt{n}} \left(1 - \frac{3}{8n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

и

$$e_\nu^{(n)} \sim \frac{2a_\nu}{\sqrt{\pi n \sqrt{n}}},$$

$$f_\nu^{(n)} \sim \frac{3a_\nu}{2\sqrt{\pi n \sqrt{n}}}.$$

а

$$d_\nu^{(n)} = c_\nu^{(n)} - c_{\nu-1}^{(n)} \sim \frac{a_\nu}{2\sqrt{\pi n \sqrt{n}}}, \quad n \to \infty.$$

Према томе

$$e_\nu^{(n)} > e_{\nu-1}^{(n)}, \quad \text{за свако } n,$$

и

$$\sqrt{\pi n \sqrt{n}}\, e_\nu^{(n)} \to 2a_\nu \quad \text{кад } n \to \infty, \tag{12}$$

а

$$f_\nu^{(n)} > f_{\nu+1}^{(n)} \quad \text{за свако } n,$$

и

$$\sqrt{\pi n \sqrt{n}}\, f_\nu^{(n)} \to \frac{3}{2} a_\nu \quad \text{кад } n \to \infty, \tag{13}$$

Како $a_\nu \to 0$, то можемо на редове

$$\Sigma e_\nu^{(n)} e^{2\nu\vartheta i} \text{ и } \Sigma f_\nu^{(n)} e^{2\nu\vartheta i}$$

применити лему из тачке 2.

Како је

$$c_\nu^{(n)} - c_{\nu-1}^{(n)} = d_\nu^{(n)} = e_\nu^{(n)} - f_\nu^{(n)},$$

то, према (12) и (13),

$$\sqrt{\pi n \sqrt{n}}\,(e_\nu^{(n)} - f_\nu^{(n)}) \to \frac{1}{2} a_\nu = \frac{1}{2}\{(2\nu+1)a_\nu - (2\nu-1)a_{\nu-1}\},$$

па је

$$c_\nu^{(n)} - c_{\nu-1}^{(n)} \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi n \sqrt{n}}}\{(2\nu+1)a_\nu - (2\nu-1)a_{\nu-1}\}.$$

Отуда следи да је

$$\delta_n(\vartheta)=\frac{1}{1-e^{2\vartheta i}}\left\{c_0^{(n)}+\sum_{\nu=1}^{\infty}(c_\nu^{(n)}-c_{\nu-1}^{(n)})e^{2\nu\vartheta i}\right\}+o(1/n\sqrt{n})=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\pi n}\sqrt{n}}\,\frac{1}{1-e^{2\vartheta i}}\left\{a_0+\sum_{\nu=1}^{\infty}[(2\nu+1)a_\nu-(2\nu-1)a_{\nu-1}]e^{2\nu\vartheta i}\right\}+$$

$$+o(1/n\sqrt{n}).\quad(14)$$

За $|z|<1$ је

$$\frac{1}{1-z^2}\left\{a_0+\sum_{\nu=1}^{\infty}[(2\nu+1)-(2\nu-1)a_{\nu-1}]z^{2\nu}\right\}=\sum_{\nu=0}^{\infty}(2\nu+1)a_\nu z^{2\nu}=$$

$$=\{zf(z^2)\}',$$

па је, према (14), и

$$\delta_n(\vartheta)=[zf(z^2)]'+o(1/n\sqrt{n},\quad \text{за } z=e^{\vartheta i}.$$

Ако ову вредност за $\delta_n(\vartheta)$ уврстимо у образац (4), добивамо коначно прва два члана асимптотског развитка за $P_n(\cos\vartheta)$, који можемо написати овако

$$P_n(\cos\vartheta)=2a_nR\{z^{n+1}f(z^2)\}-\frac{1}{2\sqrt{\pi n}\sqrt{n}}R\{z^{n+1}[zf(z^2)]'\}+$$

$$+o(1/n\sqrt{n}).$$

са $z=e^{\vartheta i}$; или, према (7),

$$P_n(\cos\vartheta)=2a_n\left\{\varphi_0(\vartheta)-\frac{1}{4n}\varphi_1(\vartheta)+o\left(\frac{1}{n}\right)\right\},$$

где је

$$\varphi_0(\vartheta)=R\{z^{n+1}f(z^2)\},$$

а

$$\varphi_1(\vartheta)=R\{z^{n+1}[zf(z^2)]'\},\quad \text{са } z=e^{\vartheta i}.$$

Тиме је образац наведен у тачки 1 доказан.

БИБЛИОГРАФИЈА

[1] Darboux G. — *Journ, de math.* (3), *4* (1878), str. 5 i 377. За Laplace—Stieltjes-ов као и Darboux-Stieltjes образац види још: Whittaker E. T. and Watson G. N. — A course of modern analysis. Cambridge1946, стр.315, као и Copson E. T. — Theory of functions, Oxford 1935, стр. 282.

[2] Heine E. — Theorie der Kugelfunktionen und der verwandten Funktionen, 2-te Aufl. Berlin 1878.

[3] Karamata J. et Tomić M. — Considérations géométriques relatives aux polynômes et séries trigonométriques. *Publ. de l'Inst. Math. de l'Acad. serbe des sciences, 2* (1948) стр. 160.

ÜBER DIE ASSYMPTOTISCHE FORMEL FÜR DIE LEGENDRESCHE POLYNOME

Von J. Karamata und M. Tomić (Beograd)

Die Verfasser leiten die bekannte Darboux-Stieltjessche Assymptotische Formel aus der Fourierschen Reihe dieser Polynome ab. Als wesentlich erweist sich dabei die Vollmonotonie der Koeffizienten der Fourierschen Reichen. Dem ersten der Verfasser ist es inzwischen gelungen einen allgemeinen Satz über die assymptotische Entwiclyng Fourierschen Reihen mit vollmonotonen Koeffizienten zu beweisen. (*Publ. de l'Inst. Math. de l'Acad. serbe*, IV, in Druck).

ПРИЛОГ ТЕОРИЈИ LEGENDRE-ових ПОЛИНОМА

МИОДРАГ ТОМИЋ (Београд)

1. Више аутора (S. Bernstein [1], G. Szegö [2], H. Rau [3], Н. Обрешков {4}) употребљавају при доказу многих ставова из теорије Legendre-ових полинома чињеницу да за два узастопна Legendre-ова полинома важи

$$|P_n(\cos\vartheta)-P_{n+1}(\cos\vartheta)|\leqslant A\sqrt{\frac{\vartheta}{n}},\ 0\leqslant\vartheta\leqslant\frac{\pi}{2} \tag{1}$$

где је A једна позитивна апсолутна константа. Неједначина (1) уопштава Stieltjes-ову {5} неједначину, где на десној страни место члана $A\sqrt{\vartheta/n}$ стоји $A/\sqrt{n}$.

У овом раду дајем за израз

$$\Delta P_n=P_n(\cos\vartheta)-P_{n+1}(\cos\vartheta) \tag{2}$$

један експлицитан облик из ког се може извести неједначина (1). Тај поступак се може применити и за нешто општије класе полинома, посматраних у тачки 2.

Поред тога, користећи познати идентитет

$$s_n(x)=(n+1)\frac{P_n(x)-P_{n+1}(x)}{1-x}=P'_n(x)+P'_{n+1}(x) \tag{3}$$

који потиче од Christoffel-а [6], извешћу Gronwall-ов [7] став о асимптотској вредности Lebesgue-ове константе редова уређених по Legendre-овим полиномима. Ова константа је дата изразом

$$\rho_n=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}|s_n(x)|\,dx,$$

где је $s_n(x)$ дато са (3), а Gronwall-ов став казује да

$$\frac{\rho_n}{\sqrt{n}}\to 2\sqrt{\frac{2}{\pi}},\ \text{кад}\ n\to\infty. \tag{4}$$

Доказ ове чињенице дат је у тачки **4** и претставља извесно упрошћење Szegö-ова [2] обрасца (*4*). У тачки **4** показаћу да је шта више

$$\frac{\rho_n}{\sqrt{n}} = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \text{ кад } n \to \infty .$$

2. Legendre-ови полиноми припадају класи полинома $P_n(\cos\vartheta)$ дефинисаних функцијом генератрисом облика

$$f(re^{\vartheta i})\, f(re^{-\vartheta i}) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\vartheta)\, r^n,$$

где је

$$f(re^{\vartheta i}) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu\, r^\nu e^{\nu\vartheta i},$$

а c_ν произвољан низ такав да ред конвергира у кругу $r < 1$.

Отуда је

$$\begin{aligned} P_n(\cos\vartheta) = {} & 2\, c_0\, c_n \cos n\vartheta + 2\, c_1\, c_{n-1} \cos(n-2)\vartheta + \\ & + 2\, c_2\, c_{n-2} \cos(n-4)\vartheta + \ldots + \\ & + 2\, c_{m-1}\, c_{m-n-1} \cos(n-2\,m+2)\vartheta + r_m, \end{aligned} \tag{5}$$

где је

$$m = \left[\frac{n}{2}\right] \text{ и } r_m = \begin{cases} c_m^2 \text{ за } n = 2\,m \\ 2\, c_m\, c_{m+1} \cos\vartheta \text{ за } n = 2\,m+1. \end{cases} \tag{6}$$

Специјално за

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{1-z}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu z^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2\nu-1)}{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot 2\nu} z^\nu$$

добивамо обичан Legendre-ов полином.

За класу полинома датих са (5) и (6) претпоставићемо још да је

$$P_n(0) = 1 \text{ за свако } n, \tag{7}$$

што је испуњено код Legendre-ових полинома.

Због (7) разлика (2) се може написати као

$$\begin{aligned} \Delta P_n = {} & P_n(\cos\vartheta) - P_n(0) - \{P_{n+1}(\cos\vartheta) - P_{n+1}(0)\} = \\ = {} & 4\left\{\sum_{\nu=0}^{m} c_\nu\, c_{n+1-\nu} \sin^2\frac{n+1-2\nu}{2}\vartheta - \sum_{\nu=0}^{m} c_\nu' c_{n-\nu} \sin^2\frac{n-2\nu}{2}\vartheta\right\} = \\ = {} & 4\sum_{\nu=0}^{m} c_\nu(c_{n+1-\nu} - c_{n-\nu})\left\{\sin^2\frac{n+1-2\nu}{2}\vartheta - \sin^2\frac{n-2\nu}{2}\vartheta\right\}, \end{aligned} \tag{8}$$

или на основу идентитета

$$\sin^2\frac{n\vartheta}{2}=\left[\sin\frac{\vartheta}{2}+\sin\frac{3\vartheta}{2}+\ldots+\sin\frac{(2n-1)\vartheta}{2}\right]\sin\frac{\vartheta}{2},\quad n=1,2,\ldots$$

у облику

$$\frac{\Delta P_n}{4\sin\vartheta/2}=-\sum_{\mu=0}^{n}\Bigg(\sum_{\mu=0}^{m-[(\mu+1)/2]}c_\nu\,(c_{n-\nu}-c_{n+1-\nu})\Bigg)\sin\frac{2\mu+1}{2}\vartheta+$$

$$+\sum_{\nu=0}^{m}c_{m-\nu}\,c_{m+\nu}\sin\frac{4\nu+1}{2}\vartheta. \qquad (9)$$

Други од ових збирова можемо трансформисати овако:

$$\sum_{\nu=0}^{m}c_{m-\nu}\,c_{m+\nu}\sin\frac{4\nu+1}{2}\vartheta=\frac{1}{2}\left\{\sin\frac{\vartheta}{2}P_n(\cos\vartheta)+\cos\frac{\vartheta}{2}J_n(\sin\vartheta)\right\}$$

где је $P_n(\cos\vartheta)$ дефинисано са (5), а $J_n(\sin\vartheta)$ дато са

$$J_n(\sin\vartheta)=2\,c_0\,c_n\sin n\vartheta+2\,c_1\,c_{n-1}\sin(n-2)\vartheta+\ldots+$$
$$+2\,c_{m-1}\,c_{n-m-1}\sin(n-2m+2)\vartheta+$$
$$+2\,c_m\,c_{n-m}\sin(n-2m)\vartheta.$$

На тај начин разлика (8) постаје

$$\frac{\Delta P_n}{4\sin\vartheta/2}=-\sum_{\mu=0}^{n}\Bigg(\sum_{\nu=0}^{m-[(\mu+1)/2]}c_\nu\,(c_{n-\nu}-c_{n+1-\nu})\Bigg)\sin\frac{2\mu+1}{2}\vartheta+$$

$$+\frac{1}{2}\left\{\sin\frac{\vartheta}{2}P_n(\cos\vartheta)+\cos\frac{1}{2}J_n(\sin\vartheta)\right\},\qquad (9')$$

где у случају парног $n=2m$ у првом двоструком збиру место члана

$$c_m^2\sin\frac{\vartheta}{2}\ \text{долази}\ \frac{c_m^2}{2}\sin\frac{\vartheta}{2}.$$

Напоменимо да је у (9′) синусни полином

$$\delta_n(\vartheta)=\sum_{\mu=0}^{n}\Bigg(\sum_{\nu=0}^{m-[(\mu+1)/2]}c_\nu\,(c_{n-\nu}-c_{n+1-\nu})\Bigg)\sin\frac{2\mu+1}{2}\vartheta,\qquad (10)$$

стално позитиван ако је

$$c_s > c_{s+1}, \quad s = 0, 1, 2, \ldots,$$

јер су тада његови коефициенти

$$A_\mu = \sum_{\nu=1}^{m-[(\mu+1)/2]} c_\nu (c_{n-\nu} - c_{n+1-\nu})$$

позитивни и опадају кад μ расте, тј.

$$A_\mu > A_{\mu+1}, \quad \mu = 0, 1, 2, \ldots n,$$

на основу Fejér-ова [7] става о синусном полиному

$$\sum_{\mu=0}^{n} A_\mu \sin \frac{2\mu+1}{2} \vartheta$$

са коефицијентима који монотоно опадају

3. Да бисмо из обрасца (9') извели неједначину (1) за Legendre-ов полином, користићемо познате неједначине за $P_n(\cos\vartheta)$ и $J_n(\sin\vartheta)$ [7]

$$\begin{matrix} |P_n(\cos\vartheta)| \\ |J_n(\sin\vartheta)| \end{matrix} < \frac{C_0}{\sqrt{n \sin\vartheta}}, \quad 0 < \vartheta < \pi. \tag{11}$$

Израз

$$Q_n(\vartheta) = 2 \sin\frac{\vartheta}{2} \left| \sin\frac{\vartheta}{2} P_n(\cos\vartheta) + \cos\frac{\vartheta}{2} J_n(\sin\vartheta) \right|$$

можемо, према (11), оценити за

$$Q_n(\vartheta) \leqslant 2 \sin\frac{\vartheta}{2} \frac{C_0}{\sqrt{n\pi \sin\vartheta}} \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\vartheta}{2}\right) \leqslant$$

$$\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{2}} \sqrt{\frac{\sin\vartheta/2}{n}} = C \sqrt{\frac{\sin\vartheta/2}{n}}, \quad 0 \leqslant \vartheta \leqslant \frac{\pi}{2}. \tag{12}$$

Остаје нам да оценимо синусни полином $4 \sin\vartheta/2\, \delta_n(\vartheta)$ где је $\delta_n(\vartheta)$ дато са (10). Ради овога користићемо две неједначине за коефициенте

$$c_\nu = \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2\nu - 1)}{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2\nu},$$

наиме

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{\nu + 1/2}} < c_\nu < \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{\nu + 1/2}} \left(1 + \frac{1}{2\nu}\right). \tag{13}$$

Обе ове неједначине следе из чињенице да је (Wallis-ов образац)

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2\nu\cdot 2\nu}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2\nu-1)(2\nu+1)}\,\frac{\int\limits_0^{\pi/2}\sin^{2\nu}x\,dx}{\int\limits_0^{\pi/2}\sin^{2\nu+1}x\,dx}$$

и

$$1\leqslant\frac{\int\limits_0^{\pi/2}\sin^{2\nu}x\,dx}{\int\limits_0^{\pi/2}\sin^{2\nu+1}x\,dx}\leqslant 1+\frac{1}{2\nu}.$$

Показаћемо да постоји једна апсолутна константа C_1 тако да је

$$C_1\sqrt{\frac{\sin\vartheta/2}{n}}>4\sin\frac{\vartheta}{2}\,\delta_n(\vartheta),\quad 0\leqslant\vartheta\leqslant\pi. \tag{14}$$

Из (14) и (12) следи тада (1).

a) Нека је $\vartheta\leqslant 1/n$.

Пре свега, $\delta_n(\vartheta)<C_2$ за свако ϑ. Према (10) је

$$\delta_n(\vartheta)\leqslant\sum_{\mu=0}^{n}\Bigg(\sum_{\nu=0}^{m-[(\mu+1)/2]}c_\nu\,(c_{n-\nu}-c_{n+1-\nu})\Bigg)=$$

$$=\sum_{\nu=0}^{m}(n+1-2\nu)\,c_\nu\,(c_{n-\nu}-c_{n+1-\nu})<$$

$$<(c_{n-m}-c_{n+1-m})\sum_{\nu=0}^{m}(n+1-2\nu)\,c_\nu. \tag{15}$$

С обзиром на (13) и $m=[n/2[$ имамо

$$c_{n-m}-c_{n+1-m}<\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\,\frac{1}{n\sqrt{n}}=\frac{C_3}{n\sqrt{n}}. \tag{16}$$

С друге стране, према (13), је

$$c_\nu<C_4\frac{1}{\sqrt{\nu}},\quad \nu=0,1,2,\ldots, \tag{17}$$

тако да сви чланови $(n+1-4\nu)c_\nu$, у збиру (15), монотоно опадају па је

$$\sum_{\nu=0}^{m}(n+1-2\nu)\,c_\nu < C_5\int_1^m (n+1-2x)\frac{dx}{\sqrt{x+1}} = C_6\, n\sqrt{n}\,. \tag{18}$$

Због (16) и (18) је

$$\delta_n(\vartheta) < \frac{C_3}{n\sqrt{n}}\,C_6 n\sqrt{n} = C_7\,. \tag{19}$$

Према томе, у случају $\vartheta \leqslant 1/n$ константу C_1 из (14) ћемо одредити тако да буде

$$C_1 \geqslant 2\sqrt{2}\,C_7\,,$$

јер је тада, због (19),

$$C_1\frac{1}{\sqrt{n}} > 4\,C_7\sqrt{\frac{1}{2n}} > 4\sin\frac{\vartheta}{2}\,\delta_n(\vartheta)\,.$$

b) Нека је $\vartheta > 1/n$.

Тада је (види {8. 2}) за све $\vartheta \neq 0$

$$4\sin\frac{\vartheta}{2}\,\delta_n(\vartheta) < 4\sin\frac{\vartheta}{2}\,\frac{A_0}{\sin\vartheta/2} = 4\,A_0\,, \tag{20}$$

где је

$$A_0 = \sum_{\nu=0}^{m} c_\nu\,(c_{n-\nu}-c_{n+1-\nu})\,,\quad m=[n/2]\,.$$

Сада је због (16), (17) и $m=[n/2]$,

$$A_0 = \sum_{\nu=0}^{m} c_n\,(c_{n-\nu}-c_{n+1-\nu}) < (c_{n-m}-c_{n+1-m})\sum_{\nu=0}^{m} c_\nu <$$

$$< \frac{C_2}{n\sqrt{n}}\,C_4\sum_{\nu=0}^{m}\frac{1}{\sqrt{\nu}} = C_8\,\frac{1}{n}\,. \tag{21}$$

Да бисмо, према̂ (14), нашли у овом случају (тј. када је $\vartheta > 1/n$), константу C_1, довољно је да одредимо C_1 тако да буде

$$C_1 > 8\sqrt{2}\,C_8\,,$$

јер је тада, према (20) и (21), због

$$\sin\frac{\vartheta}{2} > \frac{1}{2n} - \frac{1}{48\,n^3}\quad \text{за } \vartheta > \frac{1}{n}\,,$$

$$C_1 \sqrt{\frac{\sin \vartheta/2}{n}} > 4\, C_8 \, \frac{1}{n}.$$

4. Из (3) добивамо

$$\rho_n = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} |s_n(x)|\, dx = \frac{n+1}{2} \int_{-1}^{1} \frac{|P_n(x) - P_{n+1}(x)|}{1-x}\, dx,$$

тј.

$$\rho_n = \frac{n+1}{2} \int_{0}^{\pi} |\Delta P_n(\cos\vartheta)| \frac{\sin\vartheta}{1-\cos\vartheta}\, d\vartheta. \tag{22}$$

Како сада имамо за $P_n(\cos\vartheta)$ и $J_n(\sin\vartheta)$ (види {9}) асимптотске релације

$$P_n(\cos\vartheta) = \sqrt{\frac{2}{n\pi\sin\vartheta}} \cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\vartheta - \frac{\pi}{4}\right] + O(c_{m-1}^2)$$

$$J_n(\sin\vartheta) = -\sqrt{\frac{2}{n\pi\sin\vartheta}} \sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right) - \frac{\pi}{4}\right] + O(c_{m-1}^2),$$

то израз

$$4\sin\frac{\vartheta}{2}\,\frac{1}{2}\left\{\sin\frac{\vartheta}{2} P_n(\cos\vartheta) + \cos\frac{\vartheta}{2} J_n(\sin\vartheta)\right\}$$

има асимптотску вредност

$$2\sin\frac{\vartheta}{2}\sqrt{\frac{2}{n\pi\sin\vartheta}}\sin\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)\vartheta + \frac{\vartheta}{2} - \frac{\pi}{2}\right\} + O(c_{m-1}^2) =$$

$$= 2\sin\frac{\vartheta}{2}\sqrt{\frac{2}{n\pi\sin\vartheta}}\cos(n+1)\,\vartheta + O(c_{m-1}^2). \tag{23}$$

С друге стране, према обрасцу (20), за све $\vartheta \neq 0$ је

$$4\sin\frac{\vartheta}{2}\delta_n(\vartheta) < 4\,A_0 \sim \frac{C'}{n}. \tag{24}$$

Према (9') и (22) биће

$$\limsup_{n=\infty} \frac{\rho_n}{\sqrt{n}} = \lim_{n=\infty} \frac{(n+1)}{\sqrt{n}} \int_0^{\pi} \left| \sin\frac{\vartheta}{2} P_n(\cos\vartheta) + \right.$$

$$\left. + \cos\frac{\vartheta}{2} J_n(\sin\vartheta) \right| \cos\frac{\vartheta}{2} d\vartheta + \lim_{n=\infty} \frac{(n+1)}{2\sqrt{n}} \int_0^{\pi} 4\sin\frac{\vartheta}{2}\delta_n(\vartheta)\, d\vartheta,$$

као и

$$\lim_{n=\infty} \inf \frac{\rho_n}{\sqrt{n}} = \lim_{n=\infty} \frac{(n+1)}{2\sqrt{n}} \int_0^\pi \left| \sin\frac{\vartheta}{2} P_n(\cos\vartheta) + \right.$$

$$\left. + \cos\frac{\vartheta}{2} \, J_n(\sin\vartheta) \right| \cos\frac{\vartheta}{2} \, d\vartheta - \lim_{n=\infty} \frac{(n+1)}{\sqrt{n}} \int_0^\pi 4\sin\frac{\vartheta}{2} \, \delta_n(\vartheta) \, d\vartheta.$$

Због (24) последњи лимеси у оба горња израза теже нули као $1/\sqrt{n}$, а из (23) следи да је први лимес једнак са

$$\lim_{n=\infty} \frac{(n+1)}{\sqrt{n}} \int_0^\pi \sqrt{\frac{2}{n\pi\sin\vartheta}} \, |\cos(n+1)\vartheta| \cos\frac{\vartheta}{2} \, d\vartheta + O(\sqrt{n}\, c^2_{m-1}) =$$

$$= \frac{n+1}{n\sqrt{n}} \int_0^\pi \sqrt{\operatorname{cotg}\frac{\vartheta}{2}} \, |\cos(n+1)\vartheta| \, d\vartheta + O(\sqrt{n}\, c^2_{m-1}).$$

На основу једног Fejér-овог {9} става имамо

$$\int_0^\pi \sqrt{\operatorname{cotg}\frac{\vartheta}{2}} \, |\cos(n+1)\vartheta| \, d\vartheta \to \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sqrt{\operatorname{cotg}\frac{\vartheta}{2}} \, d\vartheta =$$

$$= \frac{4}{\pi} \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{t}\,(1+t^2)} = \frac{8}{\pi} \int_0^\infty \frac{dz}{1+z^4} = \frac{8\pi}{2\pi\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}.$$

Према томе за Lebesgue-ову константу добивамо

$$\lim_{n=\infty} \frac{\rho_n}{\sqrt{n}} = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

Да бисмо показали да је чак

$$\frac{\rho_\nu}{\sqrt{n}} = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

довољно је, због чињенице да је $O(\sqrt{n}\, c^2_{m-1}) = O(1/\sqrt{n})$ и због тога што су последњи лимеси у изразима за lim sup, односно lim inf од $\rho_n/\sqrt{n}$ реда $O(1/\sqrt{n})$, да покажемо само да

$$\int_0^\pi \sqrt{\operatorname{cotg}\frac{\vartheta}{2}} \, |\cos(n+1)\vartheta| \, d\vartheta \to \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sqrt{\operatorname{cotg}\frac{\vartheta}{2}} \, d\vartheta$$

тежи брзином већом или једнаком $O(1/\sqrt{n})$.

Према наведеном Fejér-ову ставу (види такође [10], стр. 217 је

$$\int_0^\pi f(x)\,|\cos(n+1)\,x|\,dx = \sum_{\nu=1}^{n+1} f_{\nu,\,n+1} \int_{(\nu-1)\pi/(n+1)}^{\nu\pi/(n+1)} |\cos(n+1)\,x|\,dx,$$

где је $f_{\nu,\,n-1}$ једна вредност између горње и доње границе од $f(x)$ у размаку $(\nu-1)\,\pi/(n+1) \leqslant x < \nu\,\pi/(n+1)$. Како овде $f(x) = \sqrt{\operatorname{cotg} x/2}$ монотоно опада, то је

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\,\{1-|\cos(n+1)\,x|\,dx\} \leqslant \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\,dx - \frac{2}{\pi(n+1)}\left[f\left(\frac{\pi}{n+1}\right) + \dots + f\left(\frac{(n+1)\,\pi}{n+1}\right)\right],$$

а последњи израз тежи нули као $O(1/n)$ (види [10], стр. 27).

BIBLIOGRAFIJA

[1] Bernstein, S. — Sur les polynomes ortogonaux relatifs à un segment fini. *Journ. d. Math.* (9), 9 (1930), str. 127—177.

[2] Szegö, G. — Über eine von Herrn S. Bernstein herrührende Abschätzung der Legendreschen Polynome. *Math. Annalen*, Bd. **108**/3 (1933), str. 360—369.

[3] Rau, H. — Über die Lebesgueschen Konstanten der Reihenentwicklungen nach Jacobischen Polynomen. *Journ. f. d. reine u. angew. Math.* **161** (1929), str. 237—254.

[4] Обрешков, Н — О редовима уређеним по Legendre-овим и Jakobi-јевим полиномима. (на бугарском) *Зборник Универзитета у Софији*, 1932 god.

[5] Christoffel,. — Über die Gaussische Qnadratur und eine Verallgemeinerung derselben. *Journ. f. d. reine u. angew. Math.* Bd. LV (1858), str. 61—82.

[6] Gronwall, Th. — Über die Laplacesche Reihe, *Math. Annalen*, 14 (1913). str. 213—270.

[7] Fejér, L, — Trigonometrische Reihen und Potenzreihen mit mehrfach monotoner Koefizientenfolge. *Trans. of the Amer. Math. Soc.* **39** (1936), str. 53 (образац 23).

[8] Tomić, M. — Sur certaines propriétés des séries de Taylor dont les coefficients sont convexes ou satisfont à d'autres conditions analogues (обрасци 29 и 30). *Publ. de l'Inst. math. de l'Acad. serbe, III* (у штампи).

[9] Fejér, L. — *Journ. f. Math*, **138** (1910). st[illegible]

[10] Pólya, G. u. Szegö, G. — Aufgaben und [illegible]sätze aus der Analysis. *I*, str. 37, Berlin 1925.

ZUR THEORIE DER LEGENDRESCHEN POLYNOME

Von M. Tomić (Beograd)

Die Bernsteinsche Ungleichung (1) für die Legendresche Polynome wird für etwas allgemeinere Polynome gegeben. Die Koeffizienten dieser Polynome (5) sind monotone und befriedigen die Bedingung (7). Die Ungleichung (1) folgt aus einer expliziten Darstellung von ΔP_n (9') in der wie üblich $P_n(\cos\theta)$ die Legendreschen Polynome bezeichnet. $J_n(\sin\theta)$ ist das zu konjugierte Polynom. Weiter wird mit Hilfe der bekannten Identität (3) der Gronwallsche Satz über die Lebesguesche Konstante für Legendresche Polynome abgeleitet. Es wird gezeigt dass das zweite Glied dieser assymptotischen Darstellung von der Grössenordnung $O(1/\sqrt{n})$ ist. Die O – Konstante des zweiten Gliedes ist von den zwei ersten Gliedern der assymptotischen Entwicklung von $P_n(\cos\theta)$ und $J_n(\sin\theta)$ abhängig.

О НЕКИМ АСИМПТОТСКИМ ИНВЕРСИЈАМА CESÀRO-ВА ПОСТУПКА ЗБИРЉИВОСТИ

БОЖИДАР ПОПОВИЋ (Београд)

1. У једном свом раду [2] показао сам да из ограничености Лапласова интеграла

$$\sigma \int_0^\infty e^{-\sigma t} s(t)\, dt, \ \sigma \to 0,$$

и услова конвергенције облика

$$s(x') - s(x) > O(1), \tag{1}$$

испуњеног за свако x' из размака ужег него што је $(x, \lambda x)$, не може да следи ограниченост функције $s(x)$, већ само њена делимична ограниченост —

$$s(x) = O\{\varphi(x)\},$$

где је $\varphi(x)$ функција која испуњава одређене услове и везана је за размак конвергенције. Ако горњу границу тог размака конвергенције напишемо у облику

$$\gamma\{\lambda \Lambda(x)\},$$

где је $\gamma(t)$ инверсна функција извесне функције $\Lambda(t)$ — онда ће бити

$$\varphi(x) = x \frac{\Lambda'(x)}{\Lambda(x)}.$$

Одмах затим је проф. Карамата [1] показао, за специјални случај $\varphi(x) = x^\theta$, да се за Cesàro-ве поступке збирљивости добија повољнији резултат. Он је наиме показао да из

$$\frac{1}{x}\int_0^x s(t)\, dt = O(1), \ x \to \infty, \tag{2}$$

и услова конвергенције (1) испуњеног за x' у размаку $(x, x+\varepsilon x^{1-\theta})$, $\theta > 0$, следи

$$s(x) = O(x^{\theta/2}).$$

Исто је тако показао да, уз исти услов конвергенције, из ограничености Cesàro-ва збира вишег реда, тј. из

$$\frac{k!}{x^k} S_k(x) = \int_0^x \left(1 - \frac{t}{x}\right)^k d\,s(t)$$

следи

$$s(x) = O\left(x^{\frac{k}{k+1}\theta}\right) \text{ кад } x \to \infty .$$

Циљ ми је да овде покажем да се ови резултати проф. Карамате могу проширити увођењем општијег размака конвергенције, као у поменутом мом раду за Laplace-ов интеграл [2]. Притом сам размак конвергенције узео у облику који је независан од посредништва функција $\gamma(t)$ и $\Lambda(t)$, у складу са тежњом да се ово учини и у осталим инверсним ставовима ове врсте, коју сам мисао истакао у једном реферату о овом проблему [3]. Овакав размак конвергенције показује непосредно дужину размака конвергенције и углавном — бар асимптотски — има исту вредност као и размак са $\gamma\{\lambda\Lambda(t)\}$, а у добивеним резултатима се експлицитно види повезаност тих резултата са дужином размака конвергенције.

На крају рада даћу неке примедбе о овом проблему.

2. За Cesàro-ву збирљивост првог реда, тј. за аритметичку средину, имали бисмо:

Став 1. *Нека је $s(t)$ функција ограничене варијације у сваком коначном размаку и нека је*

$$s(x') - s(x) \geqslant -w(\varepsilon), \quad \varepsilon > 0, \tag{3}$$

$$x \leqslant x' \leqslant x + \varepsilon \cdot \frac{x}{\varphi(x)}$$

при чему монотона функција $\varphi(x)$ задовољава услове:

$$\varphi(x) \geqslant 1, \quad \varphi\left(x + \frac{x}{\sqrt{\varphi(x)}}\right) \leqslant N\varphi(x), \quad x \to \infty. \tag{4}$$

Тада из

$$\frac{1}{x}\int_0^x s(t)\,dt = O(1), \quad x \to \infty, \tag{2*}$$

следи

$$s(x) = 0\{\sqrt{\varphi(x)}\}. \tag{5}$$

Ради доказа ћемо узети низ тачака $x_0 x_1, x_2, \ldots x_n$, дефинисан рекурентно, и то

$$x_{\nu+1} = x_\nu + \varepsilon \cdot \frac{x_\nu}{\varphi(x_\nu)}, \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots, \quad x_0 = x. \tag{6}$$

Тада
$$x_n \to \infty \quad (n \to \infty), \tag{7}$$
јер је $x_{\nu+1} > x_\nu$ и када би било $x_n \to \xi$, према (6) би било
$$\xi = \xi + \varepsilon \frac{\xi}{\varphi(\xi)} > \xi.$$

Када рекурентну везу (6) напишемо у облику
$$(x_{\nu+1} - x_\nu)\frac{\varphi(x_\nu)}{x_\nu} = \varepsilon,$$
сабирањем добивамо
$$n\varepsilon = (x_1 - x)\frac{\varphi(x)}{x} + (x_2 - x_1)\frac{\varphi(x_1)}{x_1} + \cdots + (x_n - x_{n-1})\frac{\varphi(x_{n-1})}{x_{n-1}} =$$
$$= \frac{\varphi(x)}{x}\left[(x_1 - x) + (x_2 - x_1)\frac{x}{x_1}\frac{\varphi(x_1)}{\varphi(x)} + \cdots + (x_n - x_{n-1})\frac{x}{x_{n-1}}\frac{\varphi(x_{n-1})}{x_{n-1}}\right];$$
отуда, ако је
$$x_{n-1} \leqslant x + \frac{x}{\sqrt{\varphi(x)}}, \tag{8}$$
биће према (4)
$$n\varepsilon \leqslant N\frac{\varphi(x)}{x}\left[(x_1 - x) + (x_2 - x_1)\frac{x}{x_1} + \cdots + (x_n - x_{n-1})\frac{x}{x_{n-1}}\right] \leqslant$$
$$\leqslant N\frac{\varphi(x)}{x}\left[(x_1 - x) + (x_2 - x_1) + \cdots + (x_n - x_{n-1})\right],$$
дакле
$$n\varepsilon \leqslant N\frac{\varphi(x)}{x}(x_n - x). \tag{9}$$

Овај ћемо однос касније искористити, а сада да приступимо услову (2). Из њега следи
$$\int_x^{x_n} s(t)\,dt = \int_0^{x_n} s(t)\,dt - \int_0^x s(t)\,dt \leqslant M(x_n + x),$$
где је M неки сталан број, те је
$$M(x + x_n) \geqslant \int_x^{x_n} [s(t) - s(x)]\,dt + s(x)(x_n - x) =$$
$$= \sum_{\nu=0}^{n-1} \int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}} [s(t) - s(x)]\,dt + s(x)(x_n - x).$$

Овде ћемо у сваком интегралу $\nu+1$ пута применити услов конвергенције (3), што ће дати

$$(x_n - x)\, s(x) - M(x_n + x) \leqslant w(\varepsilon) \sum_{\nu=0}^{n-1} (\nu+1) \int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}} dt.$$

За $\nu+1$ се може искористити однос (9), узевши притом у обзир да је $x_{\nu+1} \leqslant x_n$, па ће се добити

$$(x_n - x)\, s(x) \leqslant M(x_n + x) + \frac{w(\varepsilon)}{\varepsilon} N \frac{\varphi(x)}{x} (x_n - x) \sum (x_{\nu+1} - x_\nu),$$

тј.

$$s(x) \leqslant M + M \cdot \frac{2x}{x_n - x} + N \frac{w(\varepsilon)}{\varepsilon} \varphi(x) \cdot \frac{x_n - x}{x}.$$

С обзиром на (7) и (8) можемо узети

$$x_n = x + \frac{x}{\sqrt{\varphi(x)}}, \quad \text{тј.} \quad \frac{x_n - x}{x} = \frac{1}{\sqrt{\varphi(x)}}, \tag{10}$$

чиме успостављамо најбољу равнотежу у брзини рашћења двају израза с десне стране последње неједначине. Тиме ће та неједначина дати први део тврђења става 1, наиме

$$s(x) \leqslant M + \left[2M + N \frac{w(\varepsilon)}{\varepsilon}\right] \sqrt{\varphi(x)}. \tag{11}$$

Да бисмо добили другу страну неједначине, поћи ћемо на исти начин од услова (2), односно од

$$\int_x^{x_n} s(t)\, dt \geqslant -M(x + x_n)$$

или

$$\int_x^{x_n} [s(t_n) - s(t)]\, dt \leqslant s(x_n)(x_n - x) + M(x_n + x).$$

Овде ћемо, исто као и горе, више пута применити услов (3), а затим на $n-\nu+1$ применити (9), па ћемо сличним путем добити

$$s(x_n) \geqslant -M \cdot \frac{2x}{x_n - x} - M - N \cdot \frac{w(\varepsilon)}{\varepsilon} \varphi(x) \cdot \frac{x_n - x}{x}$$

или, с обзиром на вредност (10),

$$-s(x_n) \leqslant M + \left[2M + N \frac{w(\varepsilon)}{\varepsilon}\right] \sqrt{\varphi(x)}, \tag{12}$$

што нам — узевши у обзир и монотонију функције φ — заједно са (11) потврђује став 1.

3. Одговарајући став за збирљивост (C, k) гласи

Став 2. *Нека је $s(t)$ функција ограничене варијације у сваком коначном размаку и нека испуњава услов (3) са*

$$\varphi(x) \geqslant 1, \quad \varphi\left(x + x \cdot [\varphi(x)]^{\frac{-1}{k+1}}\right) \leqslant N\varphi(x), \quad x \to \infty. \tag{13}$$

Тада из

$$\frac{k!}{x^k} S_k(x) = \frac{k}{x} \int_0^x \left(1 - \frac{t}{x}\right)^{k-1} s(t)\, dt = O(1), \quad x \to \infty, \tag{14}$$

(где је k цео број) следи

$$s(x) = O\{[\varphi(x)]^{\frac{k}{k+1}}\}. \tag{15}$$

Ради доказа овог става послужићемо се обрасцем

$$\bar{S}_k(x) = \int_0^h \int_0^h \cdots \int_0^h s(x + t_1 + t_2 + \cdots + t_k)\, dt_1\, dt_2 \cdots dt_k =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{k} (-1)^{k-\nu} \binom{k}{k-\nu} S_k(x + \nu h), \tag{16}$$

који се за цело k лако доказује индукцијом ([1], стр. 23).

Када је x дефинисано помоћу (6), закључно са

$$x_n = x + x \cdot [\varphi(x)]^{-1/k+1}, \tag{17}$$

и када узмемо

$$h = \frac{x_n - x}{k}, \tag{18}$$

биће (услед $\varphi \geqslant 1$)

$$h = O(x).$$

Узмемо ли затим у обзир да је према (14)

$$S_k(x) = O(x^k),$$

биће и

$$S_k(x + \nu h) = O(x^k),$$

па према томе и

$$-M x^k \leqslant \bar{S}_k(x) \leqslant M x^k, \tag{19}$$

где је M неки коначан број.

Како је $t_1 \leqslant h,\ t_2 \leqslant h \ldots, t_k \leqslant h$, тј. $x + t_1 + \cdots + t_k \leqslant x + kh = x_n$ то ћемо од x до x_n моћи употребити услов конвергенције (3) мање од n пута, због чега ћемо добити

$$\begin{cases} s(x + t_1 + \cdots + t_k) - s(x) \geqslant -n\, w(\varepsilon), \\ s(x_n) - s(x + t_1 + \cdots + t_k) \geqslant -n\, w(\varepsilon). \end{cases} \tag{20}$$

Интегришући k пута у границама $(0, h)$, прва ће неједначина, према ознаци (16), дати

$$\bar{S}_k(x) \geqslant -n\, w(\varepsilon)\, h^k + s(x) h^k$$

што заједно са (9) и (19) даје

$$s(x) \leqslant \frac{w(\varepsilon)}{\varepsilon} N \frac{\varphi(x)}{x}(x_n - x) + \left(\frac{x}{h}\right)^k M.$$

Ставимо ли за x_n и h вредности (17) и (18), ова ће неједначина постати

$$s(x) \leqslant N \frac{w(\varepsilon)}{\varepsilon}[\varphi(x)]^{1-\frac{k}{k+1}} + M k^k [\varphi(x)]^{\frac{k}{k+1}}$$

или

$$s(x) \leqslant \left[N \frac{w(\varepsilon)}{\varepsilon} + M k^k\right][\varphi(x)]^{\frac{k}{k+1}} \tag{21}$$

Интегришући затим другу неједначину (20) k пута у границама $(0, h)$, на сличан начин ћемо створити неједначину

$$s(x_n) \geqslant -N \frac{w(\varepsilon)}{\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}(x_n - x) - M\left(\frac{x}{h}\right)^k,$$

тј.

$$-s(x_n) \leqslant \left[N \frac{w(\varepsilon)}{\varepsilon} + M k^k\right][\varphi(x)]^{\frac{k}{k+1}}, \tag{22}$$

што заједно са (21) и с обзиром на монотонију функције φ потврђује став 2.

4. Ова два става, заједно са поменутим [2] ставом о Лапласовом интегралу, потврђују у општијем облику закључке проф. Карамате ([1], стр. 18) да резултати овакве врсте могу да послуже као мерило јачине конваргенције одговарајућих поступака збирљивости. Познато је наиме да као прво мерило за упоређивање различитих поступака збирљивости служи њихов нормални (или „карактеристични", [3]) размак конвергенције, тј. размак у коме мора бити задовољен услов конвергенције, па да се из ограничености (или конвергенције) збира добивеног тим поступком закључи на ограниченост (или конвергенцију) саме функције. Али ово мерило је врло слабо, јер многи врло различити поступци имају исти нормални размак конвергенције. Напр. за Cesàro-ве поступке првог, другог.... и маког реда, као и за Abel-ов поступак, постоји исти нормални размак конвергенције $(x, x+\varepsilon x)$.

Горњи ставови нам пружају друго, прецизније, мерило. Довољно је само упоредити добивене резултате, односно степене код $\varphi(x)$, па да се то види, наиме

Cesàr-ов збир првог реда (C_1).....$[\varphi(x)]^{1/2}$

Cesàr-ов збир k-тог реда (C_k).....$[\varphi(x)]^{k/k+1}$

Abel-ов збир $(C\infty, A)$.....$[\varphi(x)]^1$

Уколико је овај степен већи утолико је функција $s(x)$ слободнија у осциловању, те утолико тај поступак збирљивости обухвата шири круг функција, дакле јачи је. Према томе, горње збирљивости по јачини иду редом (почев од најслабије) .....: C_1, C_2, ...C_k, ...A.

Да би горње мерило било реално, потребно је показати и да су добивени резултати најпрецизнији могући, тј. да има функција које су збирљиве одговарајућим поступком, задовољавају све потребне услове. а понашају се местимично као граничне функције из горњих ставова. Проф. Карамата је дао такав пример за Cesàro-ву збирљивост првог реда ([1], стр. 22), а у мом раду ([2], стр. 41) дат је пример за Abel-ову збирљивост.

Општије решење проблема — нâиме оно што се може закључити о функцији збирљивој одређеним поступком, кад се зна да она задовољава услов конвергенције у размаку ужем од нормалног — служило би за упоређење других поступака збирљивости, нарочито кад они имају исти нормални размак конвергенције.

5. Примедба 1. Облик (3) за размак конвергенције погодан је зато што експлицитно показује колики је размак конвергенције и колико је ужи од нормалног $(x, x+\varepsilon x)$. За једну одређену класу функција се може показати да је он асимптотски једнак са $(x, \gamma\{\lambda\Lambda(x)\}$, у ком облику се обично размак узима у општијим ставовима. За све функције $\varphi(x)$, које долазе у обзир у вези са функцијама $\Lambda(x)$, треба ову асимптотску једнакост тек доказати, а врло је вероватно да она постоји скоро без икаквог ограничења, јер низ примера (в. [3]) показује да битних противпримера нема.

Друга предност облика (3) за размак конвергенције је у томе што се добивени резултати изражавају у непосредној зависности од дужине размака конвергенције.

Примедба 2. Монотоност функције $\varphi(x)$ може се заменити једним општијим условом, али би то доказ учинило знатно компликованијим, а стварно не би пружило никакву корист, јер су у овим проблемима битне брзина рашћења функције и ширина размака конвергенције (за које је довољна монотоност функције $\varphi(x)$), а нису битна нека специјална понашања.

Примедба 3. Неједначине (11) и (12), као и (21) и (22), показују да се ова два O — става могу претворити у o — ставове, али под претпоставком

$$w(\varepsilon) = o(\varepsilon), \quad \varepsilon \to 0,$$

што би дакле дало одговарајуће „лакше" o — ставове. Да би се добили они значајнији, „тежи" („tiefliegende") o — ставови потребно је доказ изменити тако да се o — закључак добије чим је $w(\varepsilon)=o(1)$, $\varepsilon \to 0$. Но ова измена доказа би изгледа била битна, тј. цео би доказ добио други облик.

НАВЕДЕНА ЛИТЕРАТУРА

[1]. Карамата J.: О неким инверсним ставовима Cesàro-ва поступка збирљивости вишег реда, *Глас Српске акад. наука* стр. 1—37.

[2]. Поповић Б.: Један инверсни став о асимптотским вредностима Лапласова интеграла. *Глас Српске акад. наука* CLXXXV, стр. 33—46. (1940 г.).

[3]. Поповић Б.: Веза између поступака збирљивости и размака конвергенције. *Весник Друштва математичара и физичара НР Србије*, бр. 4 (1950 г.).

SUR CERTAINES THÉORÉMES INVERSES DE SOMMABILITÉ DE CESÀRO

par Božidar Popović (Beograd)

L'auteur poursuit le problème (posé dans les travaux [1] et [2]) sur la croissance assymptotique d'une fonction $s(x)$, qui satisfait la condition (2) ou (14), la condition (1) etant satisfaite dans un intervalle plus étroit que l'intervalle „normale" de convergence (qui correspond à ce procédé de sommabillité). L'auteur prend cet intervalle sous la forme $\left(x, x+\varepsilon \cdot \frac{x}{\varphi(x)}\right)$; avec $\varphi(x)=x \cdot \frac{\Lambda'(x)}{\Lambda(x)}$ cet intervalle est presque égal à l' intervalle habituel $(x, \gamma\{\lambda \Lambda(x)\})$ (voir [3]). L' intervalle $\left(x, x+\varepsilon \cdot \frac{\varphi(x)}{x}\right)$ montre mieux — et sans l'intermédiaire des fonctions $\Lambda(x)$ et $\gamma(x)$ — de quelle mesure il est plus court que l'intervalle „normale".

A l'aide de la suite (6), sous la condition (8), l'auteur obtient les relations (11) et (12), ce qui donne le

Théorème 1. *Si une fonction* $s(x)$, *à variation bornée dans chaque intervalle fini, satisfait la condition* (3), *tandis que la fonction monotone* $\varphi(t)$ *satisfait les conditions* (4), *alors de* (2) *il s'ensuit* (5). Puis en utilisant (16), où h est déterminé par (18) et (17), l'auteur élargit ce résultat aux sommabillités $(C-k)$, c.àd. il obtient le théorème 2, d'après lequel *de* (14) *il s' ensuit* (15), *l'orsque* k *est un nombre entier positif et* $\varphi(t)$ *satisfait les conditions* (13).

Avec les théorèmes de cette espèce nous obtenons une mesure pour la capacité de convergence de ceux procédés de sommabillité qui ont un même intervalle „normale" de convergence — par ex. $(x, \lambda x)$ pour $(C-1)$, $(C-k)$, Abel.

О НЕКИМ ПРОБЛЕМИМА СМЈЕШТАВАЊА

ДАНИЛО БЛАНУША (Загреб)

Нека је нека плоха у тродимензионалном еуклидском простору задана једнаџбама

$$x = f_1(u, v), \quad y = f_2(u, v), \quad z = f_3(u, v), \tag{1}$$

гдје су x, y, z Ҫартезијеве правокутне координате у простору, а u и v параметри (Gauss-ове координате) на плохи. Квадрат линијског елемента у простору дан је изразом

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2. \tag{2}$$

Уврстимо ли за диференцијале изразе

$$\left.\begin{aligned} dx &= \frac{\partial f_1}{\partial u} du + \frac{\partial f_1}{\partial v} dv, \\ dy &= \frac{\partial f_2}{\partial u} du + \frac{\partial f_2}{\partial v} dv, \\ dz &= \frac{\partial f_3}{\partial u} du + \frac{\partial f_3}{\partial v} dv, \end{aligned}\right\} \tag{2a}$$

добивамо за квадрат линијског елемента на плохи диференцијалну форму

$$ds^2 = g_{11}\, du^2 + 2 g_{12}\, du\, dv + g_{22}\, dv^2, \tag{3}$$

гдје величине g_{11}, g_{12}, g_{22} значе

$$\left.\begin{aligned} g_{11} &= \left(\frac{\partial f_1}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_3}{\partial u}\right)^2, \\ g_{12} &= \frac{\partial f_1}{\partial u}\frac{\partial f_1}{\partial v} + \frac{\partial f_2}{\partial u}\frac{\partial f_2}{\partial v} + \frac{\partial f_3}{\partial u}\frac{\partial f_3}{\partial v}, \\ g_{22} &= \left(\frac{\partial f_1}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_3}{\partial v}\right)^2. \end{aligned}\right\} \tag{3a}$$

Овом је диференцијалном формом одређена геометрија на плохи, па кажемо, да је тиме дана метрика плохе, индуцирана метриком (2) смјештајног (амбијентног) простора.

Но може се на неком ограниченом дијелу плохе умјетно дефинирати и било која друга метрика тиме, да се по вољи одаберу неке функције $\bar{g}_{11}$, $\bar{g}_{12}$, $\bar{g}_{22}$ варијабла u, v и сматра, да је квадрат линијског елемента

$$ds^2 = \bar{g}_{11}\, du^2 + 2\, \bar{g}_{12}\, du\, dv + \bar{g}_{22}\, dv^2.$$

Тиме онда на тој плохи вриједи и друкчија геометрија, која одговара одабраном изразу за линијски елемент, односно према томе одабраној дефиницији за дуљину $\int ds$ лука било које кривуље. Но диференцијална форма за ds^2 одређује само карактер геометрије у малом, док својства геометрије у великом, на пр. на некој затвореној плохи, могу бити различита. Тако се на пр. у не превеликим дијеловима плохе тзв. елиптичка геометрија (једна од нееуклидских геометрија) не разликује од сферне геометрије, која вриједи на кугли на темељу метрике индуциране од еуклидског смјештајног простора, у којем се кугла налази. Назовемо ли у аналогији с еуклидском геометријом „правцима" геодетске линије на некој плохи, тј. кривуље, које у смислу рачуна варијација задовољавају захтјев $\delta \int ds = 0$, бит ће на кугли главне кружнице „правци". Два различита правца сијеку се онда увијек у двије точке. У елиптичкој геометрији, напротив, два се правца сијеку само у једној точки.

Из функција g_{11}, g_{12}, g_{22} може се саградити израз, који се зове Gauss-ова закривљеност K:

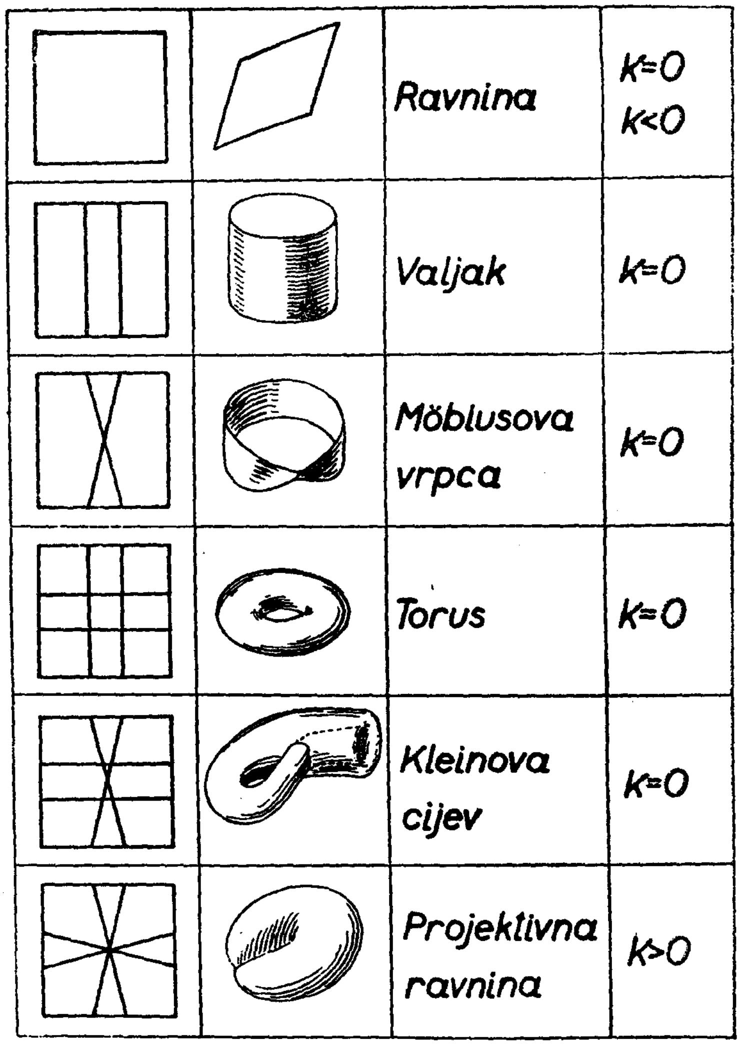
$$\begin{aligned} K = \frac{1}{4(g_{11}g_{22}-g^2_{12})^2} \Bigg\{ & g_{11}\left[\frac{\partial g_{11}}{\partial v}\frac{\partial g_{22}}{\partial v} - 2\frac{\partial g_{12}}{\partial u}\frac{\partial g_{12}}{\partial v} + \left(\frac{\partial g_{22}}{\partial u}\right)^2\right] + \\ & + g_{12}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial u}\frac{\partial g_{22}}{\partial v} - \frac{\partial g_{11}}{\partial v}\frac{\partial g_{22}}{\partial u} - 2\frac{\partial g_{11}}{\partial v}\frac{\partial g_{12}}{\partial v} + 4\frac{\partial g_{12}}{\partial u}\frac{\partial g_{12}}{\partial v} - \right. \\ & \left. - 2\frac{\partial g_{12}}{\partial u}\frac{\partial g_{22}}{\partial v}\right) + g_{22}\left[\frac{\partial g_{11}}{\partial u}\frac{\partial g_{22}}{\partial u} - 2\frac{\partial g_{11}}{\partial u}\frac{\partial g_{12}}{\partial v} + \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial v}\right)^2\right] - \\ & - 2(g_{11}\, g_{22} - g^2_{12})\left(\frac{\partial^2 g_{11}}{\partial v^2} - 2\frac{\partial^2 g_{12}}{\partial u\, \partial v} + \frac{\partial^2 g_{22}}{\partial u^2}\right)\Bigg\}. \end{aligned} \tag{4}$$

Тај је израз инваријантан с обзиром на било какве трансформације координата на плохи. У тзв. нееуклидским геометријама, тј. у елиптичкој геометрији, у хиперболној геометрији (геометрији Лобачевскога) и у њихову граничном случају, у еуклидској („параболној") геометрији, K је константан на цијелој плохи, и то $K=0$ у еуклидској, $K>0$ у елиптичкој и $K<0$ у хиперболној геометрији. У сферној геометрији (геометрији на кугли) вриједи $K=\frac{1}{R^2}$, где је R полумјер кугле. Испоредимо ли сферну геометрију с елиптичком, којој је својствен исти K, видимо још једну разлику тих геометрија у великом. „Правац" је у обје геометрије затворена линија. Но његова је дуљина у сферној геометрији $2R\pi=\frac{2\pi}{\sqrt{K}}$, док је у елиптичкој геометрији само половица тога износа, тј. $\frac{\pi}{\sqrt{K}}$.

Гледамо ли затворену плоху као цјелину, не можемо на њој дефинирати какву год геометрију. Тако је немогуће, да на читавој кугли дефинирамо ds^2 такав да буде K константан и негативан. А не можемо на њој дефинирати нити елиптичку геометрију, премда се ова од сферне уопће не разликује, ако се ограничимо на не превелик дио куглине плохе (точније: на такав дио, који не садржава ниједан пар дијаметралних точака).

За могућност, да се на некој плохи дефинира метрика с константним K данога предзнака, одлучна је тополошка повезаност те плохе. Тако примјерице кугла има друкчију тополошку повезаност него торус, што се очитује на пр. у томе да на торусу постоје затворене кривуље, које се не дају континуирано стегнути на једну точку, док на кугли не постоје. Двије плохе имају исту тополошку повезаност, ако се могу непрекинутим деформацијама превести једна у другу. Тако, рецимо, елипсоид има исту тополошку повезаност као кугла, и на њему се може дефинирати метрика с константним $K>0$.

Метрика $K=0$, која одговара еуклидској геометрији могућа је на 5 типова плоха, код чега узимамо у обзир и отворене плохе, не само затворене. Те су плохе: равнина, Möbius-ова врпца, ваљак, торус и Klein-ова цијев. Најлакше их је карактеризирати схематски тако, да пођемо од правокутника (или квадрата) и назначимо, како треба његове рубове спојити. Ако рубове никако не спајамо, правокутник је тополошки еквивалентан неизмјерној равнини. Спојимо ли један пар супротних рубова изравно, тј. тако, да се састану врхови, који су на крајевима исте странице, добивамо ваљак (за који је тополошки свеједно, да ли је коначне или неизмјерне дуљине). Спојимо ли један пар супротних рубова унакрст, тако да се састану врхови, који су на крајевима исте дијагонале, излази Möbius-ова врпца. Све су ово отворене плохе. Спојимо ли оба пара супротних страница изравно, добивамо торус. Један пар супротних страница спојен изравно, а други унакрст даје Klein-ову цијев. На овим се плохама може дефинирати еуклидска метрика.



Сл. 1

Елиптичка метрика (која вриједи у елиптичкој и у сферној геометрији) може се дефинирати на кугли и на затвореној плохи, која се обично зове „пројективна равнина", а добијемо је ако у правокутнику оба супротна руба спојимо унакрст. (Преглед тих плоха види на сл. 1). До исте плохе се долази, ако се на кугли идентифицирају дијаметралне точке. То се лако увиђа, ако од кугле одбацимо половицу. На преосталој полукугли су онда точке одбачене половице већ заступане као њихове дијаметралне точке. Треба само још идентифицирати дијаметралне точке на рубу полукугле. Замислимо ли полукуглу као еластичну мембрану и захватимо 4 точке њезина кружнога руба, па их раширимо тако, да се руб растегне у квадрат, а полукугла развуче у површину тога квадрата, види се одмах, да идентифицирање супротних точака на рубу значи спајање унакрст парова супротних страница квадрата.

Могућност дефинирања хиперболне метрике постоји на неизмјерно много тополошких типова плоха. Један је обична равнина, која се у том случају зове „хиперболна равнина", другу врсту облика добивамо, ако кроз куглу провртамо два или више канала (један канал би дао тополошки тип торуса). А има још и других могућности [в. [1]), стр. 331—348, напосе стр. 343. Тамо споменути „једнострани торус" је индентичан с Klein-овом цијеви].

Треба овдје још истаћи једно занимљиво тополошко својство плоха. Замислимо на плохи малену затворену кривуљу и придајмо јој смисао обилажења. Ако је немогуће ту кривуљу помакнути на плохи тако, да се врати у првотни положај па да јој се смисао обилажења обрнуо, велимо, да је плоха оријентабилна; ако је то напротив могуће, плоха није оријентабилна. Од споменутих плоха нису оријентабилне Möbius-ова врпца, Klein-ова цијев и пројективна равнина. Оријентабилне плохе се још зову и двостране, а неоријентабилне се зову једностране плохе. Ово зато, јер би на неоријентабилној плохи (на пр., на Möbius-овој врпци) животињица плазећи по плохи могла доспјети на противну страну плохе (не прекорачивши руб плохе, ако плоха има руб). Плоха има дакле у неку руку „само једну страну", она је једнострана. Но овај је назив прикладан само онда, ако је плоха смјештена у тродимензионалном простору, а нема више смисла, кад плоху замислимо смјештену у простору од више него три димензије. Да се то схвати, узмимо аналогни појам за творевине, које имају за једну димензију мање. Кривуља на плохи (тј. смјештена у дводимензионалном простору) има двије стране или „обале", ако замислимо, да кривуља назначује ток неке ријеке. Но кривуља у простору више нема никаквих „обала". Исто тако и плоха у простору од 4 или више димензија нема више „страна". Појам оријентабилности је, напротив, независан о смјештању плохе, јер се тиче само унутарњих својстава саме плохе.

Поставља се даље питање, да ли се споменуте плохе могу смјестити у тродимензионалном простору као плохе без сингуларитета и самопродирања. Ограничимо се при том на затворене плохе. Јасно је, да је могуће смјестити куглу и торус. Но није могуће овако смјестити пројективну равнину и Klein-ову цијев (У сл. 1 се види, да те плохе саме себе продиру). Но повећамо ли број димензија смјештајног простора, те се могућности побољшавају. Тако се све наведене плохе могу смјестити у четверодимензионалном простору без сингуларитета и самопродирања. Показат ћемо за неке случајеве, како се то може.

Пројективна равнина може се предочити у облику

$$x_1 = \cos 2u \sin^2 v, \quad x_2 = \frac{1}{2} \sin 2u \sin^2 v, \quad x_3 = \frac{1}{2} \cos u \sin 2v,$$

$$x_4 = \frac{1}{2} \sin u \sin 2v.$$

Може се показати [b.[2]), стр. 300], да та плоха има тополошку повезаност пројективне равнине и да нема сингуларитета ни самопродирања. Елиминација параметара даје једнаџбе

$$x_2 (x_3^2 - x_4^2) = x_1 x_3 x_4, \quad x_2^2 x_3^2 + x_2^2 x_4^2 + x_3^2 x_4^2 = x_2 x_3 x_4.$$

Плоха је дакле алгебарска. Но метрика, коју у њу индуцира смјештајни еуклидски простор, није метрика елиптичке геометрије, јер рачун [према (2), (2a), (3) и (3a), гдје само треба додати чланове за f_4] показује, да Gauss-ова закривљеност K плохе није константна. Плоха је дакле тополошки дводимензионални елиптички простор (тј. простор, у којем вриједи елиптичка геометрија), али није „изометрички" смјештен, јер се индуцирана метрика не подудара с елиптичком метриком, коју на тој плохи желимо дефинирати.

Промотримо даље торус, на којем се може дефинирати еуклидска метрика. Јасно је, да се торус може смјестити већ у тродимензионални простор без сингуларитета и самопродирања, али се у њему не може смјестити изометрички, дакле тако, да индуцирана метрика буде еуклидска. Но то се може у четвородимензионалном простору. Ево како:

$$x_1 = \cos u, \quad x_2 = \sin u, \quad x_3 = \cos v, \quad x_4 = \sin v. \tag{5}$$

Лако се докаже [в.[2]), стр. 301–302], да се точке плохе могу узајамно једнозначно и непрекинуто придружити точкама квадрата с врховима $A(0,0)$, $B(2\pi, 0)$, $C(2\pi. 2\pi)$, $D(0, 2\pi)$, ако u, v интерпретирамо као правокутне координате његових точака у равнини. Треба при томе само идентифицирати изравно парове супротних страница. Да је метрика еуклидска, види се лако, јер рачун даје

$$ds^2 = dx^2_1 + dx^2_2 + dx^2_3 + dx^2_4 = du^2 + dv^2.$$

Како се Klein-ова цијев може смјестити без сингуларитета и самопродирања у четверодимензионални простор, нећемо овдје расправити [в. о томе[2]), стр. 285]. Но навест ћемо занимљив примјер изометричкога смјештавања те плохе[3]). Једнацбе

$$x_1 = \cos u \cos v, \quad x_2 = \sin u \cos v,$$
$$x_3 = 2 \cos \frac{u}{2} \sin v, \quad x_4 = 2 \sin \frac{u}{2} \sin v \tag{6}$$

дају плоху, која је тополошки Klein-ова цијев. Овдје су странице *AB* и *CD* квадрата спојене изравно, а странице *BC* и *DA* унакрст. За индуцирану метрику добивамо израз

$$ds^2 = du^2 + (1 + 3\cos^2 v)\, dv^2,$$

и ако уведемо нови параметар

$$t = \int \sqrt{1 + 3\cos^2 v}\, dv,$$

излази еуклидска диференцијална форма

$$ds^2 = du^2 + dt^2.$$

И ова је плоха алгебарска. Но она сама себе продире уздуж кружнице

$$x^2_1 + x^2_2 = 1, \quad x_3 = x_4 = 0.$$

Није тешко од овога резултата пријећи на изометричко смјештење без самопродирања, ако се повиси број димензија смјештајног простора за један. Треба само додати на пр. једнацбу

$$x_5 = \sqrt{3} \cos v. \tag{7}$$

Лако се увиђа, да се тополошка повезаност не мијења, а израз за ds^2 постаје

$$ds^2 = du^2 + 4\, dv^2.$$

Сада трансформација

$$t = 2v$$

показује, да се ради о еуклидској метрици. Овдје дакле не треба ни трансформација помоћу елиптичкога интеграла. Самопродирање, које се код горњег примјера очитује тиме, да вриједностима $u = u_1$, $v = 0$ и $u_1 = \pm\pi$, $v = \pi$ одговарају исте точке плохе, наиме $x_1 = \cos u_1$, $x_2 = \sin u_1$, $x_3 = x_4 = 0$, сада је нестало, јер је у једном случају $x_5 = 1$, а у другом $x_5 = -1$.

Тиме је дакле еуклидска Klein-ова цијев смјештена изометрички и без сингуларитета и самопродирања у петеродимензионални еуклидски простор. Ова могућност у расправи цитираној под[3]) није споменута.

Прелазимо сада на питање, не би ли се дводимензионални елиптички простор (пројективна равнина) могао изометрички смјестити у еуклидски простор. То успијева, ако га смјестимо у петеродимензионални простор[4]). Једнаџбе су ове:

$$x_1=\frac{R}{2}\sin^2 u\sin 2v,\quad x_2=\frac{R}{2}\sin^2 u\cos 2v,\quad x_3=\frac{R}{2}\sin 2u\cos v,$$

$$x_4=\frac{R}{2}\sin 2u\cos v,\quad x_5=\frac{\sqrt{3}}{4}R\left(\frac{1}{3}+\cos 2u\right). \tag{8}$$

При том је $R=\frac{1}{\sqrt{K}}$, тј. то је полумјер кугле, на којој би вриједила иста метрика. Елиминација параметара даје

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2=\frac{R^2}{3},\quad x_1^2+x_2^2=\frac{1}{3}\left(x_5-\frac{R}{\sqrt{3}}\right)^2,$$

$$x_1(x_4^2-x_3^2)=2x_2x_3x_4. \tag{9}$$

Из прве једнаџбе се види, да се плоха налази на хиперсфери с полумјером $\frac{R}{\sqrt{3}}$. Смјештена је дакле уједно у четверодимензионални сферни простор. Плоха је таква, да су све њезине точке равноправне, тј. она са сваке своје точке гледана има исти облик. Она се може у себи помицати, слично као кугла, а ти се помаци добивају извјесним ротацијама хиперсфере, на којој плоха лежи.

Као даљи занимљив примјер изометричког смјештавања наведимо резултат, да се хиперболна равнина може изометрички и без сингуларитета и самопродирања смјестити у Hilbert-ов простор, дакле у еуклидски простор од неизмјерно много димензија[5]).

Дотичне формуле гласе:

$$x_{2n-1}+i\,x_{2n}=\frac{1}{\sqrt{n}}(u+iv)^n\quad (n\geqslant 1). \tag{10}$$

Растављање у реални и имагинарни дио даје параметарски облик једнаџби. Плоха се може помицати у себи без деформације. E. Schmidt је доказао, да у еуклидском простору коначног броја димензија нема плохе без сингуларитета и с константном негативном Gauss-овом закривљеношћу, која допушта једночлану групу еуклидских помака у себи. Да ли има таквих плоха, за које не вриједи тај увјет, изгледа, да још није познато.

Досад је било говора само о смјештавању плоха, тј. дводимензионалних простора, на којима треба да вриједи еуклидска или једна од нееуклидских метрика. Но може се то питање поставити и за просторе од више димензија. И овдје зависи од тополошке повезаности дотичнога простора, да ли се може на њему дефинирати једна од речених геометрија. Ево неколико података[6]).

За сваки број димензија n има коначан број отворених и коначан број затворених еуклидских просторних облика.

Постоје тродимензионални затворени просторни облици, а за $n > 1$ неизмјерно много отворених.

За так (паран) број димензија постоје само два елиптичка облика, сферни и елиптички простор. (Елиптички простор се најједноставније дефинира тако, да се у сферном простору [вишедимензионалном аналогону кугле] идентифицирају дијаметралне точке). За лих (непаран) број димензија има осим речених још неизмјерно много тополошки различитих облика с могућношћу елиптичке метрике.

И овдје се може поставити питање изометричког смјештавања без сингуларитета у виши еуклидски простор. Навест ћемо резултате за елиптичке просторе[4]).

Елиптички простор од n димензија може се смјестити изометрички и без сингуларитета и самопродирања у еуклидски простор од $\frac{n(n+3)}{2}$ димензија и то тако, да се налази на хиперсфери, да је дакле уједно смјештен у сферни простор од $\frac{n(n+3)}{3}-1$ димензија. Дајемо формуле само за специјални случај $n=3$ [за опћи случај в. [4])]:

$$x_1=\frac{R}{2}\sin^2 u\sin^2 v\sin 2w, \qquad x_2=\frac{R}{2}\sin^2 u\sin^2 v\cos 2w,$$

$$x_3=\frac{R}{2}\sin^2 u\sin 2v\sin w, \qquad x_4=\frac{R}{2}\sin^2 u\sin 2v\cos w,$$

$$x_5=\frac{\sqrt{3}}{4}R\sin^2 u\left(\frac{1}{3}+\cos 2v\right), \qquad x_6=\frac{R}{2}\sin 2u\sin v\sin w,$$

$$x_7=\frac{R}{2}\sin 2u\sin v\cos w, \qquad x_8=\frac{R}{2}\sin 2u\cos v,$$

$$x_9=\frac{R}{\sqrt{6}}\left(\frac{1}{2}+\cos 2u\right), \tag{11}$$

И овдје вриједи, да су све точке равноправне, и да се помаци простора у себи добивају ротацијама хиперсфере, у којој је простор смјештен. Полумјер те хиперсфере је овдје $\sqrt{\frac{3}{8}}R$, а у опћем случају n-димензионалног елиптичког простора $\sqrt{\frac{n}{2n+2}}R$.

На ове резултате могу се надовезати многа питања, напосе, да ли је $\frac{n(n+3)}{2}$ минимални број димензија, за који је такво смјештавање могуће, и да ли дане формуле представљају у битности (тј. без обзира на гибања и зрцаљења) једину могућност.

ЦИТИРАНА ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. В. Јефимов, Виша геометрија, Београд 1949.

[2] D. Hilbert u. R. Cohn-Vossen, Anschauliche Geometrie, Berlin 1932.

[3] C. Tompkins, A flat Klein bottle isometrically embedded in euclidean 4-space. *Bull. Amer. Math. Soc. 47*, 208 (1941).

[4] D. Blanuša, Le plongement isométrique des espaces elliptiques dans des espaces euclidiens, *Гласник маш. - физ. - и асшр., Т. 2*, Загреб 1947, стр. 248—249.

[5] L. Bieberbach, Eine singularitätenfreie Fläche konstanter negativer Krümmung im Hilbertschen Raum. *Comment. math. helv. 4*, 248—255 (1932).
Аутор је имао увид само у реферат у Zentralblatt *5*, 82 (1933).

[6] H. Hopf, Differentialgeometrie u. topologische Gestalt, *Jahresberichte der deutschen Mathematikervereinigung 41*, 209—229 (1932).

ÜBER EINIGE EINBETTUNGSPROBLEME

von D. Blanuša, (Zagreb)

Nach einer allgemeinen Einleitung werden einige bekannte Resultate über isometrische Einbettung euklidischer und nichteuklidischer Flächenformen in euklidische Räume besprochen. Insbesondere wird in Zusammenhang mit dem Tompkinsschen Beispiel[3]) einer isometrischen Einbettung des euklidischen Kleinschen Schlauches im R_4, die eine Selbstdurchdringung hat, darauf hingewiesen, dass man durch eine leichte Erweiterung (7) seiner Formeln (6) eine isometrische Einbettung ohne Selbstdurchdringung im R_5 erhält. Schliesslich werden die Resultate des Autors[4]) [(8), (9), (11)] betreffend die Einbettung elliptischer Räume in euklidische besprochen.

СФЕРНЕ КРИВЕ

ВОЈИСЛАВ Г. АВАКУМОВИЋ (Београд)

1. Криве

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}(t) = \{ x(t),\ y(t),\ z(t) \}$$

и површине

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}(u, v) = \{ x(u, v),\ y(u, v),\ z(u, v) \}$$

о којима је овде реч регуларне су у смислу диференцијалне геометрије. У погледу кривих то значи да функције $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$ имају изводе по t произвољно великог реда и да је

$$|\dot{\mathfrak{r}}(t)| \neq 0,$$

а у погледу површина да функције $x(u, v)$, $y(u, v)$ и $z(u, v)$ имају парцијалне изводе по u и v произвољно великог реда и да је у свим тачкама посматране површине

$$|\mathfrak{r}_u \times \mathfrak{r}_v| \neq 0,$$

тј. да се мрежа површине састоји искључиво из регуларних тачака.

Затворену криву која нема вишеструких тачака зваћу „затворена крива", а „затворену криву" која лежи на лопти полупречника 1 зваћу „сферна крива".

Сферне индикатрисе тангенте и главне нормале неке криве зваћу, краткоће ради, „сферна слика тангенте" и „сферна слика главне нормале".

У току даљег излагања претпоставља се да затворене криве о којима је овде реч имају особину да су њихове сферне слике (тангенте и главне нормале) сферне криве у смислу напред дате дефиниције.

2. Године 1842 C. G. Jacobi[1]) доказао је ову теорему:

J. *Сферна слика главне нормале неке затворене криве дели површину лопте на два једнака дела.*

---

[1]) Jacobi C. G. J., 1842, Werke, Bd. 7, S. 39.

Године 1934 приметио је W. Fenchel[2]) да је теорема J садржана у овој теореми:

F_1. *Сферна слика тангенте неке сферне криве дели површину лопте на два једнака дела.*

У § 5 показаћу да важи инверзија ове теореме. На тај начин долазимо до ове теореме:

А. *Да би сферна крива $\mathfrak{x}$ била сферна слика тангенте неке сферне криве потребно је и довољно да крива $\mathfrak{x}$ дели површину лопте на два једнака дела.*

Ако криволиниски интеграл торзије τ дуж затворене криве, т ј.

$$T = \oint \tau \, ds,$$

назовемо „тотална торзија", тада важи ова теорема W. Fenchel-a[3]):

F_2. *Тотална торзија дуж затворене линије кривине једнака је нули.*

Као што је W. Fenchel приметио, ова теорема у вези са Gauss-Bonnet-овом теоремом доводи до теореме F_1.

Но и назависно од ове примене, теорема F_2 је интересантна из овог разлога: Како је на лопти (и у равни) свака крива — линија кривине, то је дуж сваке сферне (и затворене равне) криве тотална торзија једнака нули. Поставља се питање да ли је ова особина карактеристична за лопту (и раван), тј. да ли су ове површине једине које имају ову особину. У § 6 доказаћу да је заиста тако, тј. да важи ово:

Ако је дуж сваке затворене криве неке површине тотална торзија једнака нули, онда је ова површина или део лопте или део равни.

У вези са напред реченим долазимо до ове теореме:

В. *Да би нека површина била део лопте или део равни, потребно је и довољно да је тотална торзија дуж сваке затворене криве једнака нули.*[4])

3. За разумевање даљег излагања потребно је да читалац познаје следеће класичне теореме, чији се докази налазе у скоро сваком уџбенику диференцијалне геометрије.

1. (Gauss-Bonnet-ова теорема на лопти). Ако са σ обележимо дужину лука сферне криве, са D онај део лопте који лежи са

[2]) Fenchel W., Über einen Jacobischen Satz der Kurventheorie, *Tohoku Math. J.* **39**$_2$ (1934) p. 95—97.

[3]) Loc. cit. [2])

[4]) Scherrer, *Vierteljahr. Naturforsch. Ges. Zürich* 85 (1940) p. 40—46.

леве стране сферне криве, а са k_g геодезиску кривину сферне криве, онда је

$$\oint k_g \, d\sigma = 2\pi - \int_D d O ,$$

при чему $d O$ обележава површински елемент лопте.

2 (Bonnet). Торзија τ, геодезиска торзија τ_g и угао ϑ између главне нормале криве и нормале на површину у којој крива лежи везани су једначином

$$\tau = \tau_g - \frac{d\vartheta}{d s} \tag{1}$$

при чему s означава дужину лука уочене криве.

3 (Bonnet). Ако са E, F и G обележимо Gauss-ове елементе прве врсте, а са L, M и N Gauss-ове елементе друге врсте, онда је

$$\tau_g = \frac{\begin{vmatrix} E\,du + F\,dv & L\,du + M\,dv \\ F\,du + G\,dv & M\,du + N\,dv \end{vmatrix}}{d s^2 \sqrt{E G - F^2}} . \tag{2}$$

4. Пре него што пређем на доказ ставова A и B, показаћу целине ради: ad 1°, да је теорема J садржана у теореми F_1; ad 2°, да је теорема F_2 последица Bonnet-ових теорема 2 и 3; ad 3°, да је теорема F_1 последица (али не непосредна) теорема F_2.

1° Обележимо са $\mathfrak{t} = \mathfrak{r}'(s)$ орт тангенте уочене затворене криве $\mathfrak{r}(s)$. а са σ дужину лука орта $\mathfrak{t}$. На основу теореме F_1 сферна слика тангенте криве $\mathfrak{t}$ тј. орт $\dfrac{d\,\mathfrak{t}}{d\sigma}$ дели површину лопте на два једнака дела. Међутим, орт $\dfrac{d\mathfrak{t}}{d\sigma}$ је орт главне нормале криве $\mathfrak{r}(s)$.

2° Дуж линије кривине геодезиска торзија је једнака нули (јер је по дефиницији дуж линије кривине бројитељ десне стране обрасца (2) једнак нули). Због (1) је, дакле, дуж затворене линије кривине

$$T = \oint \frac{d\vartheta}{d s} d s = \vartheta_1 - \vartheta_0$$

при чему је ϑ_0 угао између главне нормале и нормале на површину, а ϑ_1 угао између истих правих након обиласка затворене линије кривине. Дакле,

$$\vartheta_1 - \vartheta_0 = \pm 2 k \pi$$

где је k неки цео број.

Дуж линије кривине центри кривина нормалних пресека (у смеру тангенте) леже с једне стране површине. Осим тога у свакој тачки исте криве центри кривина равних пресека (у смеру тангенте) леже у унутрашњости лопте која пролази кроз уочену тачку криве, а центар јој се поклапа са центром кривине нормалног пресека (Meusnier-ова теорема). То значи да центри кривине линије кривине леже стално с једне стране површине. Стога је дуж линије кривине стално или $-\frac{\pi}{2} \leqslant \vartheta \leqslant \frac{\pi}{2}$ или $\frac{\pi}{2} \leqslant \vartheta \leqslant \frac{3\pi}{2}$. Отуда следи да је $k=0$.

3⁰ Ако је $\mathfrak{r}=\mathfrak{r}(s)$ нека сферна крива, а $\mathfrak{t}=\mathfrak{t}(\sigma)$ сферна слика њене тангенте (при чему s обележава дужину лука криве $\mathfrak{r}$ а σ дужину лука криве $\mathfrak{t}$), тада постоји таква функција $\alpha(\sigma)$ да се крива $\mathfrak{r}$ може написати у облику

$$\mathfrak{r}=\mathfrak{r}_0+\int_{\sigma_0}^{\sigma} \mathfrak{t}(\sigma)\,\alpha'(\sigma)\,d\sigma, \tag{3}$$

при чему је $\mathfrak{r}_0$ неки стални орт.

Заиста, ако је веза између s и σ дата једначином $s=\alpha(\sigma)$, тада је

$$\frac{ds}{d\sigma}=\alpha'(\sigma),$$

па је

$$\frac{d\mathfrak{r}}{d\sigma}=\frac{d\mathfrak{r}}{ds}\frac{ds}{d\sigma}=\mathfrak{t}(\sigma)\,\alpha'(\sigma), \tag{4}$$

одакле се интеграцијом добива образац (3).

Како је у нашем случају орт $\mathfrak{t}$ уједно орт нормале лопте на којој лежи крива $\mathfrak{t}$, то је геодезиска кривина криве $\mathfrak{t}$ дата једначином

$$k_g=(\mathfrak{t}_\sigma\,\mathfrak{t}_{\sigma\sigma}\,\mathfrak{t}),$$

јер је, као што је познато, геодезиска кривина мешовити производ вектора $\mathfrak{t}_\sigma, \mathfrak{t}_{\sigma\sigma}$ и орта нормале на површину.

Због (4) је

$$\mathfrak{r}_{\sigma\sigma}=\mathfrak{t}_\sigma\,\alpha'+\mathfrak{t}\alpha''$$

и

$$\mathfrak{r}_{\sigma\sigma\sigma}=\mathfrak{t}_{\sigma\sigma}\,\alpha'+2\,\mathfrak{t}_\sigma\,\alpha'+\mathfrak{t}\alpha'''.$$

Дакле

$$(\mathfrak{r}_\sigma\,\mathfrak{r}_{\sigma\sigma}\,\mathfrak{r}_{\sigma\sigma\sigma})=(\mathfrak{t}\,\mathfrak{t}_\sigma\,\mathfrak{t}_{\sigma\sigma})\,\alpha'^3$$

и

$$(\mathfrak{r}_\sigma\times\mathfrak{r}_{\sigma\sigma})^2=(\mathfrak{t}\times\mathfrak{t}_\sigma)^2\,\alpha'^4=\alpha'^4,$$

јер је $\mathfrak{t}_\sigma$ орт тангенте орта $\mathfrak{t}$, па је $\mathfrak{t}\times\mathfrak{t}_\sigma$ јединичан вектор.

Према томе, ако са τ обележимо торзију криве $\mathfrak{r}$, биће (с обзиром да је $\alpha'(\sigma)\neq 0$)

$$\tau=\frac{(\mathfrak{r}_\sigma\,\mathfrak{r}_{\sigma\sigma}\,\mathfrak{r}_{\sigma\sigma\sigma})}{(\mathfrak{r}_\sigma\times\mathfrak{r}_{\sigma\sigma})^2}$$

$$=\frac{(\mathfrak{t}\,\mathfrak{t}_\sigma\,\mathfrak{t}_{\sigma\sigma})}{\alpha'(\sigma)}.$$

Дакле

$$k_g\, d\sigma = -\tau\, ds,$$

па према томе и

$$\oint k_g\, d\sigma = -\oint \tau\, ds.$$

При томе је леви криволиниски интеграл узет дуж сферне криве $\mathfrak{t}$, а десни дуж сферне криве $\mathfrak{r}$. Како је на лопти, као што смо већ рекли, дуж сваке затворене криве тотална торзија једнака нули, то је десни интеграл једнак нули. Стога је, на основу Gauss-Bonnet-ове теореме

$$\int_D d\omega = 2\pi,$$

при чему D означава онај део лопте који лежи са десне стране сферне криве $\mathfrak{t}$. То значи, сферна крива $\mathfrak{t}$ дели површину лопте на два једнака дела, што је и требало доказати.

5. Доказ теореме А. Доказаћу прво: *Нека је* $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}(\sigma)$ *нека сферна крива при чему је* σ *дужина њеног лука; ако са* $\alpha = \alpha(\sigma)$ *обележимо неку произвољну функцију* („произвољну" у смислу диференцијалне геометрије) *и ставимо*

$$\beta = \beta(\sigma) = \int_0^\sigma (\mathfrak{r}\, \mathfrak{r}_\sigma\, \mathfrak{r}_{\sigma\sigma})\, d\sigma, \tag{5}$$

онда је сферна крива $\mathfrak{r}$ *сферна слика главне нормале криве*

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(\sigma) = -\int_0^\sigma (\mathfrak{r}_\sigma \cos\beta + (\mathfrak{r}_\sigma \times \mathfrak{r}) \sin\beta)\, \alpha\, d\sigma. \tag{6}$$

(Важи и обратно, тј, ако је крива $\mathfrak{r}$ сферна слика главне нормале неке криве $\mathfrak{R}$, тада постоји таква функција $\alpha = \alpha(\sigma)$ да се крива $\mathfrak{R}$ може написати у облику (5). Међутим, за доказ става А ово нам није потребно.)

Ако диференцијал дужине лука криве $\mathfrak{R}$ обележимо са ds, имаћемо, с обзиром на (6),

$$\begin{aligned} ds &= \pm |\mathfrak{R}_\sigma(\sigma)|\, d\sigma \\ &= \pm \sqrt{(\mathfrak{r}_\sigma \cos\beta + (\mathfrak{r}_\sigma \times \mathfrak{r}) \sin\beta)^2}\, |\alpha|\, d\sigma \\ &= \pm |\alpha(\sigma)|\, d\sigma, \end{aligned}$$

па је

$$\mathfrak{t} = \frac{d\mathfrak{R}}{ds} = \pm(-\mathfrak{r}_\sigma \cos\beta - (\mathfrak{r}_\sigma \times \mathfrak{r}) \sin\beta).$$

Због $\mathfrak{r}_\sigma^2 = 1$ је $\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{r}_\sigma = \mathfrak{r}_\sigma \cdot \mathfrak{r}_{\sigma\sigma} = 0$; дакле

$$\mathfrak{r}_\sigma = \lambda\, (\mathfrak{r} \times \mathfrak{r}_{\sigma\sigma}), \tag{7}$$

где је λ неки скалар. Како је, због (5),

$$\beta' = (\mathfrak{r}\, \mathfrak{r}_\sigma\, \mathfrak{r}_{\sigma\sigma}),$$

то скаларним множењем једначине (7) са $\mathfrak{r}_\sigma$ добивамо $\lambda = -1/\beta'$ па је $\beta' \mathfrak{r}_\sigma = \mathfrak{r}_{\sigma\sigma} \times \mathfrak{r}$. Дакле

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{t}_\sigma &= \pm \{ -\mathfrak{r}_{\sigma\sigma} \cos\beta - (\mathfrak{r}_{\sigma\sigma} \times \mathfrak{r}) \sin\beta + (\mathfrak{r}_\sigma \sin\beta - (\mathfrak{r}_\sigma \times \mathfrak{r}) \cos\beta) \beta' \} \\ &= \mp \{ \mathfrak{r}_{\sigma\sigma} + (\mathfrak{r}_\sigma \times \mathfrak{r}) \beta' \} \cos\beta . \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Због $\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{r}_\sigma = 0$ и $\mathfrak{r}_\sigma^2 = 1$ је $\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{r}_{\sigma\sigma} = -1$, дакле

$$\mathfrak{r}_\sigma \times \mathfrak{r} = \lambda (\mathfrak{r} \times \mathfrak{r}_{\sigma\sigma}) \times \mathfrak{r} = \lambda (\mathfrak{r}_{\sigma\sigma} - \mathfrak{r} \cdot \mathfrak{r}_{\sigma\sigma}) \mathfrak{r}) = \lambda (\mathfrak{r}_{\sigma\sigma} + \mathfrak{r}),$$

што заједно са (8) и $\lambda\beta' = -1$ даје

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{t}_\sigma &= \{ \mathfrak{r}_{\sigma\sigma} + \lambda (\mathfrak{r}_{\sigma\sigma} + \mathfrak{r}) \beta' \} \cos\beta \\ &= -\mathfrak{r} \cos\beta . \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Ако се $\mathfrak{n}$ обележимо орт главне нормале криве $\mathfrak{R}$, онда је по дефиницији

$$\mathfrak{n} = \mathfrak{t}_s / |\mathfrak{t}_s| = \pm \mathfrak{t}_\sigma / |\mathfrak{t}_\sigma|,$$

па је, с обзиром на (9), $\mathfrak{n} = \pm \mathfrak{r}$, што је и требало доказати.

Како је $\mathfrak{r}$ орт тангенте орта $\dfrac{d\,\mathfrak{R}}{d\,s}$, то да бисмо доказали теорему A, треба доказати још ово:

Ако сферна крива $\mathfrak{r}$ дели површину лопте на два једнака дела, онда је сферна слика тангенте криве $\mathfrak{R}$, која је дефинисана обрасцима (5) и (6), затворена крива.

Како по претпоставци сферна крива $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}(\sigma)$ дели површину лопте на два једнака дела, то је

$$\int_D d\,O = 2\pi ,$$

При томе смо са D обележили онај део лопте који лежи с десне стране сферне криве $\mathfrak{r}$. Отуда следи на основу Gauss-Bonnet-ове теореме да је

$$\oint k_g \, d\sigma = 0. \tag{10}$$

Како је орт $\mathfrak{r}$ уједно и орт нормале на лопту на којој крива лежи, то је

$$k_g = (\mathfrak{r}\, \mathfrak{r}_\sigma\, \mathfrak{r}_{\sigma\sigma}).$$

Према томе, ако са σ_0 обележимо дужину сферне криве $\mathfrak{r}$, онда (10) добива овај облик:

$$\int_0^{\sigma_0} (\mathfrak{r}\, \mathfrak{r}_\sigma\, \mathfrak{r}_{\sigma\sigma}) \, d\sigma = 0.$$

С обзиром на (5) то значи да функција $\beta(\sigma)$ задовољава услов

$$\beta(0) = \beta(\sigma_0),$$

Према томе $\beta(\sigma)$ је периодична функција са периодом σ_0. Отуда следи да је орт тангенте криве $\mathfrak{R}$, тј. орт

$$\frac{d\mathfrak{R}}{ds} = \mp \{ \mathfrak{r}_\sigma \cos\beta + (\mathfrak{r}_\sigma \times \mathfrak{r}) \sin\beta \}$$

периодичан орт, тј. сферна слика тангенте криве $\mathfrak{R}$ је затворена крива.

6. Доказ теореме В. Свака затворена крива посматране површине може се написати у облику

$$u = u(t; \eta), \quad v = v(t; \eta)$$

При томе је η параметар породице кривих. Параметар t се може тако изабрати да за свако η буде

$$u(0; \eta) = u(1; \eta) \quad \text{и} \quad v(0; \eta) = v(1; \eta)$$

и

$$\dot{s} = \frac{ds}{dt} \neq 0$$

При томе s обележава дужину лука уочене криве. На тај начин Bonnet-ов образац (2) добива облик:

$$\begin{aligned} \tau_g\, ds &= \{(EM - FL)\dot{u}^2 + (EN - LG)\dot{u}\dot{v} + (FN - MG)\dot{v}^2\} \frac{ds}{\dot{s}^2\sqrt{EG - F^2}} \\ &= \{A\dot{u}^2 + 2B\dot{u}\dot{v} + C\dot{v}^2\} \frac{dt}{\dot{s}} \\ &= F(u, v, \dot{u}, \dot{v}, \dot{s})\, dt. \end{aligned}$$

Дакле

$$T = \int_0^1 F(u, v, \dot{u}, \dot{v}, \dot{s})\, dt.$$

По претпоставци сваки од ових интеграла биће једнак нули, тј. свака затворена крива даваће интегралу T „екстремну вредност" једнаку нули. Стога ће Euler-ове једначине

$$\frac{d}{dt}F_{\dot{u}} - F_u = 0, \quad \frac{d}{dt}F_{\dot{v}} - F_v = 0, \quad \frac{d}{dt}F_{\dot{s}} - F_s = 0$$

овог „варијационог проблема" (са граничним условима $u(0) = u(1)$ и $v(0) = v(1)$) бити индентички задовољене за све „дозвољене" функције u и v (тј. затворене криве које леже на површини).

Прве две Euler-ове једначине изгледају овако:

$$A_v \dot{u}\dot{v}\dot{s} + (B_v - C_u)\dot{u}^2\dot{s} + A\ddot{u}\dot{s} + B\ddot{v}\dot{s} - A\dot{u}\ddot{s} - B\dot{v}\ddot{s} = 0$$

и

$$(B_u - A_v)\dot{u}^2\dot{s} + C_u\dot{u}\dot{v} + B\ddot{u}\dot{s} + C\ddot{v}\dot{s} - B\dot{u}\ddot{s} - C\dot{v}\ddot{s} = 0.$$

Како функције u и v можемо бирати по вољи, то горње једначине могу бити задовољене само онда ако су сви њихови коефицијенти идентички једнаки нули. Понаособ мора бити

$$A \equiv B \equiv C \equiv 0\,,$$

тј.

$$E\,M - F\,L \equiv E\,N - L\,G \equiv F\,N - M\,G \equiv 0.$$

Отуда следи да је дискриминанта једначине

$$(E\,G - F^2)\frac{1}{R^2} - (E\,N - 2F\,M + L\,G)\,\frac{1}{R} + (L\,N - M^2) = 0 \qquad (11)$$

идентички једнака нули. Наиме

$$\begin{aligned}&(E\,N - 2\,F\,M + L\,G)^2 - 4\,(E\,G - F^2)\,(L\,N - M^2)\\ &\equiv (E\,N - L\,G)^2 - 4\,(E\,M - F\,L)\,(F\,N - M\,G) \equiv 0.\end{aligned}$$

Једначина (11) је једначина главних полупречника кривине. Према томе су на целој површини оба главна полупречника кривине између себе једнака, тј. посматрана површина се састоји искључиво из кружних тачака. Како су као што је познато, лопта и раван једине површине које имају ову особину, то је наша површина или део лопте или део равни.

ÜBER GESCHLOSSENE KURVEN AUF DER KUGEL

Von Vojislav G. Avakumović (Beograd)

Bemerkungen über die W. Fenchelsche Fassung des Jacobischen Satzes über das Hauptnormalenbild einer geschlossenen und doppelpunktlosen Kurve. Der Fenchelsche Satz F_1: *Das Tangentenbild einer geschlossenen sphärischen Kurve begrenzt zwei flächengleiche Teile der Einheitskugel*, wird folgendermassen ergänzt (Satzt A): *Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür dass die sphärische Kurve* $\mathfrak{x}$ *das Tangentenbild einer geschlossenen und doppelpunktlosen sphärischen Kurve sei — ist, dass* $\mathfrak{x}$ *zwei flächengleiche Teile der Einheitskugel begrenzt.*

Anschliessend an den Fenchelschen Satz F_2: *Das Integral der Windung einer geschlossenen Krümmungslinie über die Bogenlänge ist gleich Null*, wird bewiesen (Satz B): *Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür dass eine Fläche ein Stück einer Kugel bzw. Ebene sei — ist, dass das Integral der Windung längs jeder geschlossenen Flächenkurve gleich Null ist.* (Satz von Scherrer).

О ПРИНЦИПИМА ИНДУКЦИЈЕ

ЂУРО КУРЕПА (Загреб)

1. Међу принципима индукције свакако је најважнији:

Принцип потпуне (тоталне) индукције, а гласи овако: Ако нека тврдња зависи од природних бројева, па ако је она истинита за број 1; ако из истинитости тврдње за природни број n слиједи њена истинитогт за природни број $n+1$, онда је дотична тврдња истинита за сваки природни број.

Тај исти принцип можемо изрећи и овако: означимо ли са

$$N \tag{1.1}$$

скуп свих природних бројева, а са M скуп свих природних бројева за које је тврдња истинита, тада је наравно M дио скупа N:

$$M \subseteq N. \tag{1.2}$$

К томе су према горњему испуњена ова два услова:

1. I. $1 \in M$ (тј. тврдња је истинита за број 1);

1. II. из $n \in M$ слиједи $n+1 \in M$ (тј. чим је тврдња истинита за неки број n, истинита је она и за $n+1$).

Закључак је онда овај:

$$M = N \text{ (а не само } M \subseteq N).$$

Другим ријечима, код принципа тоталне индукције ради се о томе, да уз горња два услова 1.I., 1.II сваки $M \subseteq N$ нужно се подудара са читавим N. На тај начин, принцип исказује извјестан начин исцрпљивања скупа N:

$1 \in M$ (по својству I), $2 \in M$ (јер је $1 \in M$ па по II и $1+1 \in M$), $3 \in M$ (јер је $3=2+1$ па из $2 \in M$ по II слиједи $2+1 \in M$ итд.).

Видимо, да у својој суштини принцип потпуне индукције значи исто што и само *бројање*. Зато га многи математичари и стављају као основни логичко-математички суд, који се не може доказати. Само се притом ипак морамо запитати: „Шта су природни бројеви?“

Дефинишући природне бројеве као главне (кардиналне) бројеве *коначних* скупова може се ипак принцип тоталне индукције потпуно доказати (в. Курепа [2]). О тоталној индукцији види такођер: Б. Петронијевић [4] и М. Попадић [5].

2. Проблем исцрпљења задана скупа. Можемо поставити ово питање: нека је задан неки скуп S и његов дио M, дакле

$$M \subseteq S; \tag{2.1}$$

када смо осигурани да ће бити $M=S$ и тиме скуп S бити исцрпљен до своје последње тачке помоћу скупа M? Другим ријечима, шта је потребно и довољно па да из $M \subseteq S$ слиједи $M=S$?

Теорем 2. 1. *Да из $M \subseteq S$ слиједи $M=S$ треба, а и доста је да из система*[1])

$$X \subseteq M, \ X \neq S$$

слиједи $X_0 \subseteq M$ за бар један скуп $X_0 \supset X$. Другим ријечима, чим M садржи неки скуп X садржи он и још опсежнији скуп X_0, уколико већ скупом X није исцрпљена читава подлога S.

Доказ је ванредно прост.

Услов је потребан. Нека је $M=S$; ако је тада $X \subseteq M$, $X \neq S$ дакле $X \subset M$, садржи M и скуп $S \supset X$, јер је по хипотези $M=S$; према томе довољно је ставити $X_0=S$, па да се види да је услов теорема потребан.

Услов теорема је и довољан. Означимо наиме са Φ обитељ свих скупова $X \subseteq S$ који су садржани у M; према томе односи

$$X \subseteq S, \ X \subseteq M \tag{2.2}$$

те

$$X \in \Phi \tag{2.3}$$

међусобно су равноправни. Но, одатле непосредно слиједи, да је и спој

$$\bigcup_x X, \ (X \in \Phi), \tag{2.4}$$

тј. скуп свих тачака које се налазе у бар једном $X \in \Phi$, такођер садржан у M. Тврдимо да је скуп (2.4) идентичан са заданим скупом S.

У обрнутом случају, по условима теорема, постојао би један још опсежнији скуп

$$Y \tag{2.5}$$

(рецимо скуп $(2.4.)_0$ у горњој ознаци) са својством

$$Y \subseteq M.$$

[1]) Треба држати на уму да је по конвенцији празан скуп v садржан у сваком скупу.

Но тиме би по дефиницији скупа Φ било $Y \in \Phi$, па дакле и $Y \subseteq (2.4)$, противно томе да је $Y = (2.4)_0 \supset (2.4)$, јер је по претпоставци $(2.4) \subset S$.

Тиме је теорем 2.1 доказан.

Њиме се исказује, да се скуп S може исцрпсти преко својих дијелова. О томе какви су ти дијелови, теорем не каже ништа, нити у опћем случају може да штогод каже. Но, ако је скуп S извјесне специјалне грађе, моћи ће се нешто казати и о „комадима" X преко којих можемо до последње тачке исцрпсти S. Нас ће овдје особито занимати случај, кад је скуп S снабдјевен извесним уређењем.

3. Опћи принцип индукције: исцрпљивање дјелимично уређених скупова: Нека је S одн. $(S; \leqslant)$ било какав дјелимично уређен скуп.[1]) Међу дијеловима скупа S истичу се тзв. *почетни комади скупа* S.

Дефиниција 3.1. Под почетним комадом дјелимично уређена скупа S разумијевамо сваки скуп $K \subseteq S$ који има ово својство: чим K садржи неку тачку x, садржи K и скуп $(-\infty, x)_S$ свих тачака из S које леже испред x, оперативно:

$$\text{из } x \in K \text{ слиједи } (-\infty, x)_S \subseteq K.$$

Празни скуп (vakuum) v као и сам скуп S сматрамо такође (неправим) почетним комадом скупа S.

Слично се уводи појам завршних комада скупа S. Почетни и завршни комади зову се једним именом *крајњи комади скупа* S. Тако на пр. за сваки $a \ni S$ скуп $(-\infty, a)_S$ је одређен почетан комад од S; исто важи за скуп $(-\infty, a]_S$ свих $x \ni S$ за који је $x \leqslant a$.

Дефиниција 3.2. Празни скуп и скупови

$$(-\infty, x)_S, \ (-\infty, x]_S, \ (x \ni S)$$

зову се *једноставни* (*елементарни*) *почетни комади скупа* S.

За вјежбу нека читалац докаже да одстрањивањем из S неког почетног (завршног) комада преостаје одређен завршни (почетни) комад скупа S. Напоменућемо успут, да се поимање реза или пресјека или сецирање у скупу $(S; \leqslant)$ темељи на поимању *крајњих* комада тога скупа, јер се под опћим резом скупа $(S; \leqslant)$ разумијева свако растављање тога скупа на почетни (завршни) комад скупа и на одговарајући преостатак скупа S; у случају кад ниједан од та два скупа (компоненте реза) није пуст, говори се о Дедекиндовом резу.

---

[1]) У новије вријеме све више продире ова терминологија: уређен скуп ($\equiv$ досадашњи: дјелимично или парцијално уређен); потпуно (посве) уређен мјесто досадашњег: уређен; потпуно неуређен или анти-уређен: који нема различитих упоредљивих тачака.

Теорем 3.1. *(ойћи йринций индукције за дјелимично уређене скуйове). (в.* Курепа [1] п. 23 теор. 1*). Нека је S йроизвољан дјелимично уређен скуй; да из $M \subseteq S$ слиједи $M = S$, йреба а и досйа је, да скуй M има ово својсйво: из чињенице да M садржи извјесйан йочейан комад K скуйа S слиједи, уколико већ није $K = S$, да M садржи извјесйан йочейни комад $K_0 \supset K$ скуйа S.*

Доказ је врло једноставан и потпуно сличан са доказом теорема 2.1; сличност у доказивању темељи се на овој очигледној чињеници: *сйој (унија) од било колико йочейних комада дјелимично уређена скуйа ойей је одређен йочейан комад йога скуйа.*

Но почетан комад опћег скупа $(S; \leqslant)$ може имати врло замршен састав. Тако на пр. ако радимо с уређеним скупом R рационалних бројева, почетни се његов комад $(-\infty, 0)_R$ битно разликује од почетног његова комада $(-\infty, \sqrt{2})_R$; док је наиме први од њих могуће окарактеризирати помоћу једног јединог *члана из самог скуйа R*, дотле то за други комад није могуће учинити (на сличној појави темељи се Дедекиндова теорија ирационалнuх и реалних бројева).

Не улазећи у даља разматрања о уређеним скуповима, ограничимо се на потпуно уређене скупове. Може ли се можда сваки посве уређен скуп исцрпсти преко својих елементарних почетних комада? Наравно да може, јер је очигледно

$$S = \bigcup_x (-\infty, x]_S, \ (x \in S).$$

Но, то је врло специјалан начин одабирања почетних једноставних комада. Да ли се S потпуно исцрпљује, ако у теорему 3.1 претпоставимо, да су почетни комади о којима је ријеч елементарни? Не, како то показује примјер скупа R рационалних бројева и случај, када проматрамо *једино йочейне комаде облика*

$$(-\infty, a_n)_R,$$

притом је $a_1, a_2, \ldots$ било који строго узлазан, а ограничен низ *рационалних* бројева који у скупу R не конвергира; ако је r реалан број према којем тежи низ a_n, можемо ставити $M = (-\infty, r)_R$ и увјерити се да M задовољава услову да чим M садржи извјестан *елеменйаран* поч. комад од R садржи M и још опсежнији почетни *елеменйаран* комад од R. А ипак није $M = R$.

Примједба 3. 1. Читамо ли у теореми 3. 1. свуда „завршан" мјесто „почетан", добије се опет исправна изрека[1]).

[1]) Наравно да се при исцрпљивању скупа можемо служити и са његовим завршним комадима; дефиниција ових је слична дефиницији првих. Уосталом „завршан" у скупу $(s; \leqslant)$ је исто што и „почетан" у дуалном уређењу $(s; \geqslant)$ — (свуда мјесто $<$ и $>$ писати $>$ и $<$).

4. ***Посве уређени скупови који се могу исцрпсти једноставним почетним комадима*** (одсуство нутрашњих понора у S).

Дефиниција 4. 1. Вели се да је посве уређен скуп S без нутрашњих понора (lacune intérieure), ако код сваког Дедекиндског резања скупа S ($\equiv$ растављање скупа S на два пуна дисјунктна комада, од којих је један почетан, а други завршан), не може се десити, да нити прва компонента реза нема завршног нити друга компонента почетног елемента.

Дефиниција 4. 2. Вели се, да посве уређен скуп S има Борел-Хинчин-ово својство, ако за S вриједи овај начин исцрпљивања:

Претпоставка. Нека је $M \subseteq S$; нека надаље скуп M задовољава овим двама условима;

4. I M садржи бар један *елементаран* почетан комад скупа S;

4. II Ако M садржи *елементаран* почетни комад K скупа, па ако је $K \neq S$, постоји *елементаран* почетан комад K_0 скупа S са својством

$$K \subset K_0 \subseteq M.$$

Закључак: Тада је $M = S$.

Теорема 4. 1. *Да посве уређен скуп S буде без нутрашњих понора, треба, а и доста је да скуп S посједује* Борел-Хинчин-*ово својство* (исп. Курепа [1] п. 23. théor. 3).

И овога пута доказ је сличан са доказом теорема 2. 1., као што ћемо се одмах увјерити.

Услов теорема 4. 1. је нуждан: нека је S било какав потпуно уређен скуп са бар два елемента и без нутрашњих рупа; тврдимо, да скуп S посједује Борел-Хинчиново својство тј. да из $M \subseteq S$, 4. I, 4. II слиједи $M = S$.

Нека је наиме Y спој свих елем. поч. комада K скупа S за које је $K \subseteq M$; наравно Y је почетан комад скупа S, а садржан је у M:

$$Y \subseteq M.$$

Ако је $Y = S$, ствар је готова, јер из $S = Y \subseteq M \subseteq S$ слиједи $M = Y$. Но, мора бити $Y = S$.

Иначе би било $Y \subset S$; проматрајући тада рез којему је Y прва компонента, означујући са A скуп састављен од завршне тачке скупа Y и почетне тачке преостатка $S \setminus Y$, скуп A није празан (одсуство рупа у скупу S), па се свакако Y може окарактерисати помоћу једне тачке из A; другим ријечима, Y је елементаран почетни комад од S. Како је према претпоставци $Y \neq S$, то би на основу услова 4.II произлазило да постоји још већи поч. комад $Y_0 \supset Y$ за којега је $Y_0 \subseteq M$. А то је немогуће, јер је $K \subseteq Y$ за ***сваки*** поч. ел. комад K скупа S за који је $K \subseteq M$, па би зато било $Y_0 \subseteq Y$, што је апсурд.

Услов теорема је довољан. У обрнутом случају, постојао би растав скупа S на поч. комад

$$P \supset \nu \tag{4.1}$$

без завршног члана и преостатак

$$S \setminus P \supset \nu \tag{4.2}$$

без почетног елемента. Према томе, P би био почетан комад скупа S, али не једноставан. Ставимо ли

$$P = M, \tag{4.3}$$

тада видимо, да је $M \subseteq S$ и да је задовољен услов 4.I јер из (4.1) слиједи да постоји $x \in P$ дакле $x \in M$ са својством $(-\infty, x]_S \subseteq P$. Но, задовољен је и услов 4.II; нека је наиме K произвољан поч. елем. комад од S са својством $K \subseteq M$ дакле $K \subset M$ (јер, како видјесмо, M није елементаран). Како је K једноставан, постоји тачка $z \in S$ дакле и $z \in M$ тако да све тачке из K буду $\leqslant z$; но како, по хипотези, P нема завршне тачке, нека је $z_0 \in P$ и $z < z_0$; тада је довољно ставити

$$K_0 = (-\infty, z_0]_S$$

па да се види, да је испуњен и услов 4.II.

Како скуп S посједује, по хипотези, Борел-Хинчин-ово својство, одатле би морао слиједити и закључак: $M = S$ тј. $P = S$, у противности са претпоставком (4.2). Другим ријечима претпоставка о унутрашњој провалији скупа S није исправна. Тиме је теорем 4.1 доказан.

Примједба 4.1. Из теорема 4.1. произлази исправна изрека читајући у њему свуда „завршан“ мјесто „почетан“.

5. *Аналогон потпуне индукције.* У § 4 исцрпљивали смо скуп S тако да смо с произвољна елем. почетног комада K скупа S коракнули на један шири поч. ел. комад K_0, истог скупа S; но у опћем случају, скуп

$$K_0 \setminus K \tag{5.1}$$

тако придошлих елемената је многобројан. Шта ће бити, ако претпоставимо да је скуп (5.1) вазда једночлан одн. пуст? Сличан је случај код тоталне индукције, јер код ње за сваки $n \in N$ са поч. комада $(-\infty, n]_N$ прелазимо на $(-\infty, n+1]_N$ довлачењем једино $n+1$ као новог елемента у први поч. комад.

Теорем 5.1. *За потпуно уређен скуп S слиједећа два својства су међусобно равноправна:*[1])

[1]) Добро је споменути да је свако од тих двају својстава равноправно са овим својством:

Скуп S је сличан дијелу уређена скупа цијелих бројева.

Прво својство. Сваки Дедекиндов рез скупа S показује ***скок*** тј. прва компонента реза има завршан члан, а друга компонента почетан члан (према томе у скупу S нема нити нутрашњих провалија нити граничних тачака).[2])

Друго својство Важи слиједеће закључивање:

Претпоставка. Ако је $M \subseteq S$ па ако M задовољава ова два услова:

5.I M садржи бар један елем. поч. комад скупа S;

5.II. Ако M садржи почетан ел. комад K скупа S, па ако је $K \neq S$, тада постоји поч. елементаран комад K_0 скупа S са својством $K \subset K_0 \subseteq M$ и да $K_0 \setminus K$ буде једночлан.

Закључак: Тада је $M = S$.

Доказ се води као код теорема 4.1.

Примједба 5.1. Из теорема 5.1 произлази исправна чињеница надомјештавајући свуда „почетан" са „завршан".

6. ***Принцип трансфинитне индукције (исцрпљивање посве добро уређених скупова).*** Једно од основних својстава скупа N природних бројева јесте, да је он ***посве добро уређен*** у смислу, да сваки дио X скупа N, уколико није празан, посједује ***свој властити почетни елемент.***

Уистини, ако је $1 \in X$, ствар је очигледна; ако пак није $1 \in X$, поставимо

$$X' = U_n [n, \infty)_N, (n \in X).$$

Очигледно, X' је завршан комад скупа N. Претпоставимо да X нема почетног члана, тада га не би имао нити X'; но то би значило да из $m \in X'$ нужно слиједи и $m-1 \in X'$ (иначе би m био поч. елемент у X' дакле и у X). Проматрајмо скуп

$$N \setminus X'; \tag{6.2}$$

према претпоставци, он садржи број 1:

$$1 \in (6.2); \tag{6.3}$$

надаље, докажимо да би из

$$n \in (6.2) \text{ слиједило } n+1 \in (6.2). \tag{6.4}$$

У обрнутом наиме случају постојао би извјестан $n \in (6.2)$ тако да не буде $n+1 \in (6.2)$ него дакле $n+1 \in X'$; одатле би даље произлазило, да је $n+1$ почетан члан у X' дакле и у X, противно хипотези да X нема поч. члана.

Но, из односа (6.2) - (6.4) произлазило би на основу принципа тоталне индукције да је $(6.2) = N$, што је апсурд, јер скуп X' није празан.

[2]) Свака тачка a скупа S са својством, да сваки интервал скупа S садржи бар једну тачку из $S \setminus \{a\}$ чим у својој нутрини садржи тачку a зове се гранична тачка или гомилиште скупа S.

8*

Врло је важан разред посве добро уређених скупова, јер је њихово изучавање непосредно проширење изучавања самих природних бројева. За њих постоји карактеристичан начин исцрпљења, као што то показује.

Теорем 6.1. *Нека* је S *било какав посве уређен скуп с почетним чланом; тада су слиједећа два својства еквивалентна*:

Прво својство: *Скуп S је посве уређен;*

Друго својство: *За скуп S важи слиједеће закључивање* (принцип трансфинитне индукције):

Претпоставка. *Нека је $M \subseteq S$ и к томе:*

6.I. *Скуп M садржи почетну тачку скупа S.*

6.II. *Из $x \in S$ и $(-\infty, x)_S \subseteq M$ слиједи $x \in M$.*

Закључак: $M = S$.

Према томе, код трансфинитне индукције закључујемо на чињеницу да ли нека тачка $x \in S$ лежи или не лежи у M из сличног питања за *скуп свих претходника* дотичног елемента x.

Услов теорема је нуждан: сваки посве добро уређени скуп допушта принцип тоталне индукције тј. ако $M \subseteq S$ задовољава 6.I и 6.II, тада је $M = S$.

Стварно, ставимо

$$P = U\,(-\infty, x]_S, \tag{6.1}$$

при чему x пролази свима елементима скупа S за које је

$$(-\infty, x]_S \subseteq M; \tag{6.2}$$

свакако је P почетан комад скупа S; тврдимо, да је $P = S$. У обрнутом случају било би $P \subset S$, па би скуп $S \setminus P$ као непразан дио посве уређена скупа S посједовао свој почетни члан, рецимо p. Но, како је P поч. комад, било би

$$(-\infty, p]_S = P, \ p \operatorname{non} \in P; \tag{6.3}$$

према услову 6.II, одатле би закључили, да је и $p \in M$, што значи, да је и скуп $(-\infty, p]_S$ поч. комад од S садржан у M, одакле и $p \in M$, противно другој релацији у (6.3).

Услов теорема 6.1 је довољан: ако S има први елемент и допушта принцип транфинитне индукције, S је посве добро уређен.

У обрнутом случају, S не би био добро уређен. То значи да би постојао један непразан скуп $X \subseteq S$ без својега почетног елемента. Наравно, $X \subset S$, јер по претпоставци S има свој први елемент. Проматрајмо множину M свих тачака $t \in S$ са својством да је t испред читава скупа X дакле

$$(t, \infty)_S \supseteq X. \tag{6.4}$$

Докажимо, да би скуп M задовољавао 6.I и 6.II. Да је поч. тачка од S садржана у M, то је очигледно, јер би иначе та поч.

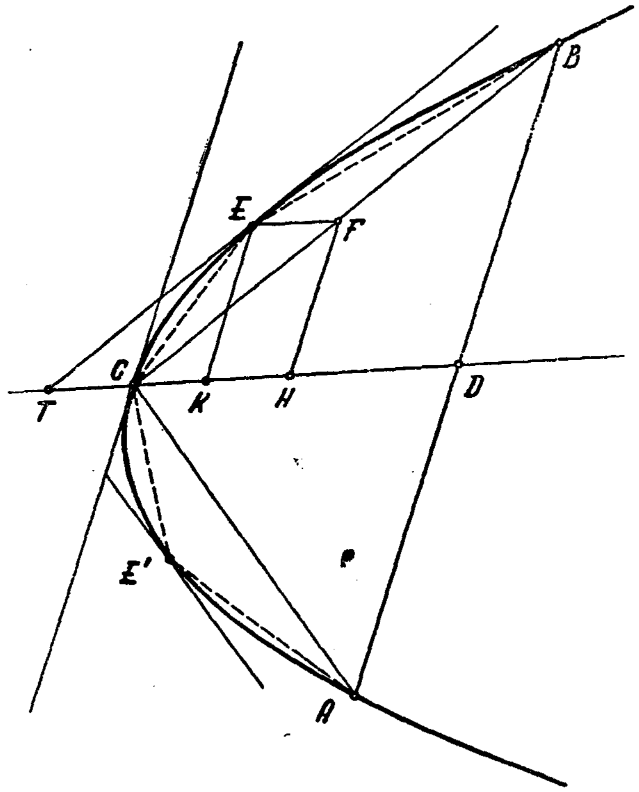
тачка била поч. тачком и у X. Докажимо, да M задовољава и 6.II. Најприје, M је очигледно почетан комад скупа S; па нека је дакле

$$x \in S \text{ и } (-\infty, x)_S \subseteq M;$$

тврдимо да је $x \in M$; у обрнутом случају, била би тачка x почетном у скупу $S \setminus M$, дакле и почетном тачком скупа X, противно хипотези да X нема поч. тачке.

По принципу транфинитне индукције, закључили би, да је $M = S$, што је немогуће, јер скуп $S \setminus M$ садржи читав пуни скуп X.

Симе је теорем 6.1 потпуно доказан.



Сл. 1

7. *Ексхаустија као принцип индукције.* Већ су се стари Грци служили једном врстом исцрпљивања извесних једноставнијих скупова. У том погледу, класичан је примјер одређивање површине параболиног сегмента. Ту се посматра дирка (тангента) паралелна са међашњом тетивом AB сегмента; споји ли се тако добивена тачка додира C са крајевима дужи AB, распада се сегмент на два нова сегмента и један трокут. Тиме што смо добили ABC сматраћемо да је учињен први корак исцрпљивања.

Други корак исцрпљивања састојаће се у посматрању суме S_1 површинâ оних двају трокутова, што их добијемо примијењујући почетни процес на сваком од оба преостала сегмента; зна се да је $S_1 = \frac{1}{4} ABC$; трећи ће нас корак довести до суме S_2 површина од 4 нова трокута; опет је $S_2 = \frac{1}{4} S_1$ итд. итд. На тај начин за површину P параболиног сегмента имамо

$$p = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s}{4^n} = \frac{4}{3} s$$

где је s површина трокута ABC.

Додуше, тако добивени трокутови не исцрпљују сваку тачку заданог одреска параболе; но исцрпљују они читаву *нутрину* одреска, а то је довољно, кад проматрамо саму површину одреска.

Уосталом, примијетимо да се читав одрезак параболе (лук укључен) ни не може исцрпсти помоћу трокутова који се не преклапају, јер овакових трокутова има највише пребројиво много, сваки од њих садржи највише три тачке лука, а самих тачака на луку има континум много дакле непребројиво много.

Математички Институт
Природословно-математичког факултета.
Загреб

ЛИТЕРАТУРА

[1] Kurepa G. Ensembles ordonnés et ramifiés; Thèse, Paris, 1935 (*Publ. Math. Univ. Beograd*, *4* (1935), 1—138).

[2] Kurepa G. Démonstration du principe de l'induction totale (*Comptes rendus Ac, Sci, Paris, 230* (1950), 703—705).

[3] Курепа Ђ. Појам бинарне релације. Однос равноправности. Уређајни односи (*Весник Друштва мат. физ. Н. П. Србије I 3—4* (1949), 53—58).

[4] Б. Петронијевић. Les lois fondamentales de l'addition arithmétique et le principe de l'induction mathématique (*Revue de métaphysique et de Morale*, 192, 1—8).

[5] Попадић М. Математичка индукција (*Посебна издања Фил. фак. Скопље, књ. 2* (1950), стр. 50).

ÜBER DIE PRINZIPIEN DER INDUKTION

Von Đuro Kurepa (Zagreb)

Verfasser befasst sich mit der Frage wann aus $\pi \subseteq S$ auf die Identität der Mengen π und S geschlossen werden kann. Folgende Fälle werden betrachtet: 1) S ist eine beliebige Menge; 2) S ist teiweise geordnet; 3) S ist geordnet und lückenlos; 4) S ist wohlgeordnet (transfinite Induktion) und schliesslich 5) S ist die Menge der natürlichen Zahlen (totale Induktion).

О ТЕОРЕМИ О СРЕДЊОЈ ВРЕДНОСТИ

ЈОВАН КАРАМАТА (Београд)

Први став о средњој вредности у свом најопштијем облику гласи:

Нека је функција $f(x)$ дефинисана и непрекидна у затвореном размаку (a, b). Ако постоји одређен извод $f'(x)$ за свако x отворена размака $(a+0, b-0)$, тада постоји најмање једно ξ тога размака тако да је

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi),\ a<\xi<b.$$

У већини уџбеника овај се став изводи ослањајући се на низ општих ставова о реалним функцијама, тако да су ови докази доста дугачки.[1])

Један непосредан доказ овог става налази се код Г. Kowalewski-a: Die klassischen Probleme der Analysis des Unendlichen. Leipzig 1910, стр. 177 - 179, а ослања се једино на чињеницу да непрекидна функција $f(x)$ узима најмање једанпут сваку вредност између $f(x_1)$ и $f(x_2)$ док x варира од x_1 до x_2.

Kowalewski прво показује да се у размаку (a, b) увек може наћи један размак (a', b') чија дужина није већа од половине датог размака а за који важи образац

$$\frac{f(b')-f(a')}{b'-a'}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

ако је само функција $f(x)$ непрекидна у размаку (a, b).[2])

---

[1]) Р. Кашанин, Виша математика I, Београд 1946, Ж. Марковић, Увод у вишу анализу, „Загреб 1947, Witting, Differentialrechnung, Berlin 1944, H. Rothe, Höhere Mathematik Wien 1921, etc.

[2]) Једно упрошћење овог поступка дао је Kowalewski у књизи: Lehrbuch der Differential — und Integralrechnung, Leipzig — Berlin 1928, примењујући га на доказ Rolle-ова става.

Полазећи од сличне чињенице овде ћемо показати да се доказ Kowalewski-а може скратити и прегледније извести, шта више и сам нешто проширити и то овако:

Нека је $f(x)$ непрекидна функција у затвореном размаку (a, b). Ако за свако x отворена размака $(a+0, b-0)$ постоји леви извод $f'_-(x)$ и десни извод $f'_+(x)$ функције $f(x)$, тада постоји најмање једно ξ тога размака и два позитивна броја

$$p > 0, \ q > 0 \quad \text{са} \quad p+q=1$$

тако да буде

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = p f'_+(\xi) + q f'_-(\xi). \tag{1}$$

Доказ. Ставимо краткоће ради,

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = Q,$$

и разделимо тачкама a' и b' размак (a, b) у три једнака дела, тј.

$$a_{\prime} = a + \frac{b-a}{3}, \quad b' = a + 2\frac{b-a}{3},$$

тада је

$$\frac{1}{3}\left\{\frac{f(a')-f(a)}{a'-a} + \frac{f(b')-f(a')}{b'-a'} + \frac{f(b)-f(b')}{b-b'}\right\} = Q, \tag{2}$$

и могу се појавити ова два случаја:

1° Или је

$$\frac{f(b')-f(a')}{b'-a'} = Q.$$

2° Или то није случај, већ је, рецимо,

$$\frac{f(b)-f(a')}{b'-a'} > Q. \tag{3}$$

Тада један од израза

$$\frac{f(a')-f(a)}{a'-a} \quad \text{и} \quad \frac{f(b)-f(b')}{b-b'}$$

мора бити $< Q$; јер кад би ова била $\geqslant Q$, онда би, према (3), аритметичка средина (2) била $> Q$, што се противи са (2).

Ако, дакле посматрамо израз

$$\varphi(x) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \quad \text{са} \quad h = \frac{b-a}{3},$$

(2) се своди на

$$\frac{1}{3}\{\varphi(a) + \varphi(a') + \varphi(b')\} = Q, \tag{4}$$

па је, или

1° $$\varphi(a') = Q,$$

или

2° док x варира од a до a' (односно од a' до b') функција $\varphi(x)$ варира од

$$\varphi(a) = \frac{f(a') - f(a)}{a' - a} < Q$$

до

$$\varphi(a') = \frac{f(b') - f(a')}{b' - a'} > Q,$$

(односно од

$$\varphi(a') = \frac{f(b') - f(a')}{b' - a'} > Q$$

до

$$\varphi(b') = \frac{f(b) - f(b')}{b - b'} < Q).$$

Према томе, из непрекидности функције $f(x)$, односно $\varphi(x)$, следи да мора постојати једно x' између a и a' (односно a' и b'), тако да буде

$$\varphi(x') = Q.$$

Дакле, ако са a_1 и b_1 означимо у првом случају a' и b', а у другом x' и $x'+h$, долазимо до ове чињенице:

Ако је $f(x)$ непрекидна функција у затвореном размаку (a, b), тада у унутрашњости тог размака постоје увек два броја a_1 и b_1, $a < a_1$ и $b, < b_1$, тако да је

$$b_1 - a_1 = \frac{b - a}{3}$$

и

$$\frac{f(b_1) - f(a_1)}{b_1 - a_1} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Применимо ли на размак (a_1, b_1) исто резоновање добићемо два броја a_2 и b_2 таква да је

$$b_2 - a_2 = \frac{b_1 - a_1}{3} = \frac{b - a}{9}$$

и

$$\frac{f(b_2) - f(a_2)}{b_2 - a_2} = \frac{f(b_1) - f(a_1)}{b_1 - a_1} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Уопште, после n-тог поступка, добићемо бројеве a_n и b_n такве да је

$$b_n - a_n = \frac{b - a}{3^n} \tag{5}$$

и

$$\frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}. \tag{6}$$

Како се сваки од размака $(a, b), (a_1, b_1), (a_2, b_2)$ итд. налази у унутрашњости претходног размака, и како према (5) дужина ових размака тежи нули кад $n\to\infty$, то постоји број ξ (према Bolzano-Weierstrass-ову или неком њему еквивалентном ставу) који се налази у унутрашњости свих ових размака, тако да

$$a_n\to\xi \text{ и } b_n\to\xi \text{ кад } n\to\infty. \tag{7}$$

Написаћемо образац (6) у облику

$$p_n\frac{f(b_n)-f(\xi)}{b_n-\xi}+q_n\frac{f(\xi)-f(a_n)}{\xi-a_n}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}, \tag{8}$$

где је

$$p_n=\frac{b_n-\xi}{b_n-a_n}, \quad q_n=\frac{\xi-a_n}{b_n-a_n}$$

и

$$p_n+q_n=1. \tag{9}$$

Према претпоставци о егзистенцији левих и десних извода,

$$\frac{f(b_n)-f(\xi)}{b_n-\xi}\to f_+'(\xi),$$

а

$$\frac{f(\xi)-f(a_n)}{\xi-a_n}\to f'_-(\xi) \text{ кад } n\to\infty,$$

Одавде видимо две ствари.

Прво: ако је

$$f'_-(\xi)=f'_+(f)=f'(\xi) \tag{10}$$

и од обе стране обрасца (8) одузмемо (према (9)), идентитет

$$p_n f'(\xi)+q_n f'(\xi)=f'(\xi),$$

добивамо

$$p_n\left\{\frac{f(b_n)-f(\xi)}{b_n-\xi}-f'(\xi)\right\}+q_n\left\{\frac{f(\xi)-f(a_n)}{\xi-a_n}-f'(\xi)\right\}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}-f'(\xi).$$

Пустимо ли овде да n тежи бесконачности, оба израза у витичастим заградама теже нули; како су пак p_n и b_n стално позитивни и <1, то цела лева страна горњег обрасца тежи нули, тако да његова десна страна мора бити једнака нули, тј.

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi). \tag{11}$$

Друго: Ако је

$$f'_-(\xi) \neq f'_+(\xi),$$

и од обе стране обрасца (8) одузмемо, на пример,

$$\frac{f(\xi)-f(a_n)}{\xi-a_n}$$

односно, према (8),

$$p_n \frac{f(\xi)-f(a_n)}{\xi-a_n} + q_n \frac{f(\xi)-f(a_n)}{\xi-a_n},$$

биће

$$p_n \left\{ \frac{f(b_n)-f(\xi)}{b_n-\xi} - \frac{f(\xi)-f(a_n)}{\xi-a_n} \right\} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} - \frac{f(\xi)-f(a_n)}{\xi-a_n}.$$

Кад овде пустимо да $n \to \infty$, десна страна, према претпоставци, тежи одређеној граничној вредности

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} - f'_-(\xi),$$

а израз у витичастим заградама на левој страни тежи граничној вредности

$$f'_+(\xi) - f'_-(\xi) \neq 0,$$

зато мора и низ p_n тежити одређеној граничној вредности,

$$p_n \to p \text{ кад } n \to \infty,$$

па, према (9), и

$$q_n \to q \text{ кад } n \to \infty;$$

при томе је

$$p+q=1.$$

Према томе, ако у (8) пустимо да $n \to \infty$, добивамо образац (1), који, према (11), важи било да је (10) испуњено или не, а чиме је други од горе наведених ставова у потпуности доказан.

Београд, 1 фебруара 1950.

SUR LA FORMULE DES ACCROISSEMENTS FINIS

Jovan Karamata, Beograd

Par une methode, semblable à celle employée par G. Kowalewski dans la preuve du théorème de Rolle („Lehrbuch der Differential — und Integralrechnung", Leipzig Berlin 1928 p. 62—63), l' auteur établit l'extension suivante de la formule des accroisséments finis:

Soit $f(x)$ une fonction continue dans l' intervalle fermée (a, b), qui admet une dérivée gauche $f_-(x)$ et une dérivée droite $f_+(x)$ pour

toutes les valeurs de x de l'intervalle auverte $(a+0, b-0)$. Allors il existent deux nombres positifs

$$p > 0, \quad q > 0, \quad \text{avec } p+q=1$$

et au moins un ξ entre a et b tel que la formule

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = p f'_{+}(\xi) + q f'_{-}(\xi)$$

sait valable.

О ГЕОМЕТРИСКОЈ ИНТЕРПРЕТАЦИЈИ М. МИЛАНКОВИЋА КОНВЕРГЕНЦИЈЕ БЕСКОНАЧНИХ РЕДОВА

ЈОВАН КАРАМАТА (Београд)

1. У свом чланку „Eine graphische Darstellung der geometrischen Progressionen" {*Zeitschr. f. math. u. naturw. Unterr. XL. Heft* 6/7 (1909), стр. 22} проф. М. Миланковић је показао како се може геометриски интерпретисати конвергенција, односно дивергенција геометрискога реда. Ова претстава са извесним изменама ушла је у многе уџбенике, међутим, у необјављеном рукопису проф. Миланковића налазе се извесне измене, а поред тога и проширења овог геометриског расуђивања на неке друге редове. Ове допуне са методолошког гледишта омогућавају геометриску претставу извесних типичних редова, као што су

$$\Sigma q^n,\ \Sigma n,\ \Sigma 1/n(n+1),\ \Sigma 1/n,$$

и јаснију претставу њиховог поређења, а сам поступак као такав стоји у вези са сукцесивном апроксимацијом и методом итерације, и даје могућност да се не само корвергенција већ и брзина конвергенције ових редова прегледније интерпретира.

Излажући најпре разматрања М. Миланковића, према самим ауторовим забелешкама, циљ ми је да укажем и на овај други део проблема. Стога у **2** износим резултате из поменутог необјављеног рукописа, а у **3** показујем како се из ове интерпретације могу извући извесни закључци о брзини конвергенције ових редова и указујем на везу са брзином конвергенције приближних решења једначине

$$x = \zeta(x)$$

методом сукцесивне апроксимације.

2. Основна идеја изложена у поменутом чланку проф. М. Миланковића је ова.

Нека је $\overline{AB} = a$, $\measuredangle\, CBA = 90^\circ$. Ако повучемо праве $\overline{AS}$ и $\overline{BS'}$ тако да буде $\measuredangle\, CAB = \measuredangle\, CBD = \alpha$ (в. сл. 1) и ставимо $q = \operatorname{tg}\alpha$, тада поједине стране правоугле полигоналне линије $ABCDEF$ претстављају чланове геометриске прогресије

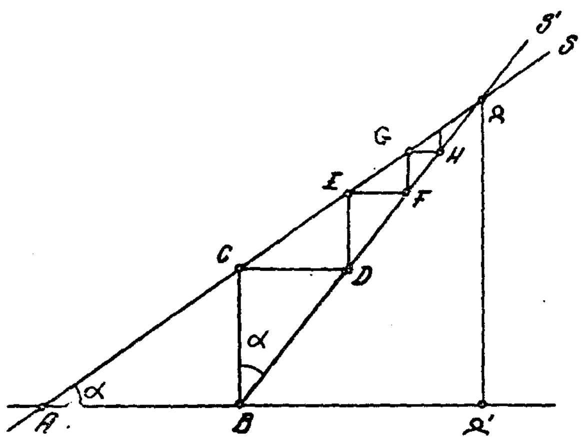
$$a, aq, aq^2, \ldots\ldots$$

Ако је $\alpha < 45^0$, тј. $q < 1$, полуправе AS и BS' су конвергентне и секу се у тачки Ω. Геометриски ред

$$a + aq + aq^2 + \ldots$$

је конвергентан и његов збир износи

$$S = \overline{A\Omega'} + \overline{\Omega'\Omega}.$$



Сл. 1.

Ако је, међутим, $\alpha \geqslant 45^0$, тј. $q \geqslant 1$, ове полуправе дивергирају или су паралелне, тачке пресека нема, а геометриски ред је дивергентан.

У поменутом рукопису проф. Миланковић посматра општи случај, тј. ред

$$\Sigma a_n. \qquad (1)$$

чији је општи члан a_n реалан и позитиван, и покушава да изведе сличну геометриску интерпретацију, с том разликом што за дужине страна полигоналне линије $ABCDEF\ldots$ не узима редом чланове $a_1, a_2, a_3, \ldots$ као што је то случај код слике 1, него узима да је дужина првих двеју страна AB и BC једнака a_1, дужина других двеју страна CD и DE једнака a_2 итд., наносећи при томе прву страну на Y-осу, а не на X-осу (в. сл. 2),

Уместо ранијих правих AS и BS' овде се појављује права AS (која заклапа угао од 45^0 са X-осом), на којој се налазе темена $ACEG\ldots$, и извесна крива BS', на којој се налазе темена $BDFH\ldots$ поменуте полигоналне линије (в. сл. 2).

Једначину ове криве линије

$$y = f(x)$$

можемо у узвесним случајевима накнадно да одредимо из структуре самог реда (1), док се темена $ACEG\ldots$ увек налазе на правој

$$y = x.$$

Означимо са s_n збир n првих чланова реда (1), тј.

$$a_n = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu .$$

Како је општи члан a_n извесна функција индекса, рецимо,

$$a_n = \varphi(n),$$

то је и збир s_n нека функција индекса; ако ставимо

$$s_n = \psi(n), \tag{2}$$

координате x и y неког темена које лежи на кривој BS', тј. на кривој $y = f(x)$, дате су са

$$x = s_{n-1} = \psi(n-1), \tag{3}$$

$$y = s_n = \psi(n). \tag{4}$$

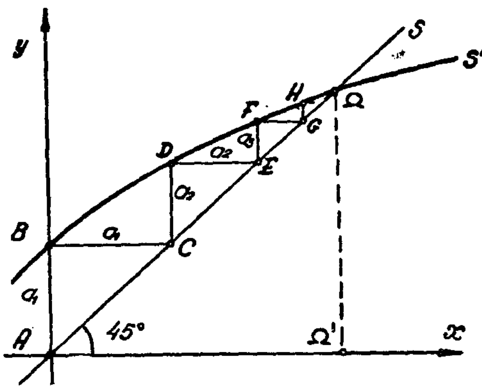
Из (3) следи

$$n = 1 + \rotatebox[origin=c]{180}{\ensuremath{\psi}}(x),$$

где смо са $\rotatebox[origin=c]{180}{\ensuremath{\psi}}(x)$ означили инверзну функцију функције $\psi(x)$, а сменом ове вредности у (4) добивамо

(5) $$y = \psi\{1 + \rotatebox[origin=c]{180}{\ensuremath{\psi}}(x)\},$$

као једначину криве BS'.



Сл. 2.

Према томе, кад год обрасцем (2) можемо изразити збир s_n као функцију индекса, тада увек можемо добити и једначину криве BS', тј. карактеристичну функцију $f(x)$: она је, према (5), дата обрасцем

$$f(x) = \psi\{1 + \rotatebox[origin=c]{180}{\ensuremath{\psi}}(x)\}. \tag{6}$$

Кад је функција $f(x)$ једном позната, из слике 2 видимо да ће ред (1) бити конвергентан или дивергентан према томе да ли крива BS' сече праву AS или не.

У првом случају, ако са Ω означимо тачку пресека, збир реда (1) ће бити дат било ординатом било апсцисом ове тачке, тј.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \overline{A\Omega'} = \overline{\Omega'\Omega}.$$

Дакле, испитивање конвергенције реда (1) се своди на решавање система

$$y = f(x),$$

$$y = x,$$

тј. на решавање једначине

$$x = f(x); \tag{7}$$

решење ове једначине, ако постоји, даје збир посматраног реда.

Тако је, на пример, у случају геометриског реда

$$\Sigma\, a q^n$$

збир

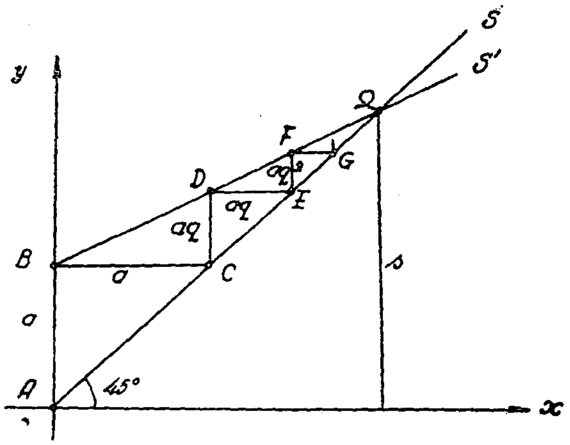
$$s_n = \sum_{\nu=0}^{n-1} a q^\nu$$

дат изразом

$$s_n = a\frac{1-q^n}{1-q} = \psi(n).$$

Отуда се, кад се према (2) и (3) елиминише n, однсно q^n, добива

$$y = a + q x.$$



Сл. 3.

У овом се случају дакле, крива BS' своди на праву са

$$f(x) = a + q x,$$

тако да се једначина (7) своди на

$$x = a + q x,$$

чије решење

$$s = \frac{a}{1-q}$$

даје збир бесконачног геометриског реда; то можемо добити и непосредно из сл. 3.

Приметимо да кад је q негативно, тј. кад је $-1 < q < 0$, да тада положај правих AS и BS' има облик слике 4, а полигонална линија прелази у спиралну полигоналну линију. Ово је карактеристичан пример за редове чији чланови алтернативно мењају предзнак. Док је код редова са позитивним члановима полигонална линија степенастог облика, као на слици 2, дотле је код алтернативних редова полигонална линија спиралног облика, што се сличним резоновањем може лако показати.

Овде ћемо се ограничити само са редове са позитивним члановима и навести још ове примере.

Као пример реда који дивергира посматрајмо аритметичку прогресију

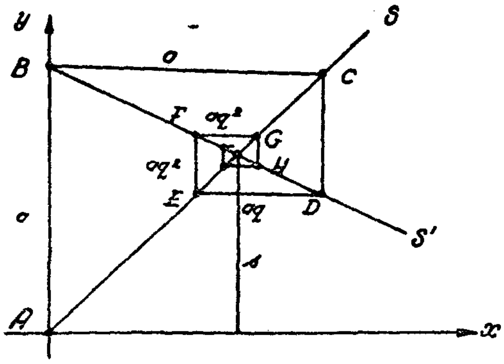
$$1, 2, 3, \ldots, n, \ldots,$$

тј. ред

$$\Sigma n.$$

Како је овде

$$s_n = \sum_{\nu=1}^{n} \nu = \frac{1}{2} n(n+1),$$



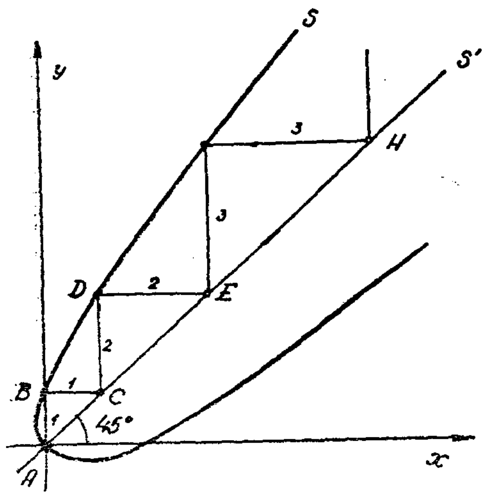
Сл. 4.

то је

$$\psi(n) = \frac{1}{2} n(n+1).$$

Отуда се, према (2) и (3), елиминацијом n-а добива за једначину криве BS'

$$(x-y)^2 = x+y.$$



Сл. 5.

Ово је парабола са теменом у почетку, а чији је осовина права $y=x$ (в. сл. 5).

У првом од наведених примера крива BS' сече праву AS док се у другом она од ове праве удаљује.

Наведимо сад један пример конвергентног реда код кога крива BS' додирује праву AS. У ту сврху уочимо ред који је посматрао још Leibnitz;

$$\sum \frac{2}{n(n+1)},$$

а чији је општи члан реципрочна вредност троуглих бројева

$$1, 3, 6, 10, \ldots, \frac{1}{2} n(n+1), \ldots.$$

Како је

$$a_n = \frac{2}{n(n+1)} = 2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right),$$

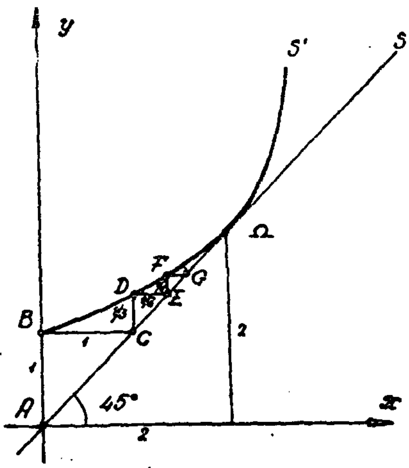
то је

$$s_n = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu = 2\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \psi(n).$$

Увршатвајући ову вредност од $\psi(n)$ у (2) и (3), елиминацијом n-а добива се за једначину криве BS' (в. сл. 6)

$$y = \frac{4}{4-x}.$$

Ово је хипербола која додирује праву $y = x$ у тачки $\Omega(2, 2)$, тако да збир овога реда износи $S = 2$.



Сл. 6.

Уочимо најзад случај хармониске прогресије

$$a_n = 1/n.$$

Како је овде

$$s_n = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu} = \lg n + C + o\left(\frac{1}{n}\right), n \to \infty,$$

то, да бисмо одредили функцију $f(x)$ која одговара овом хирмоническом реду, довољно је да, у првој апроксимацији, посматрамо низ

$$s_n = \lg n = \psi(n).$$

Према томе, стављајући

$$x = s_{n-1} = \lg(n-1)$$

и

$$y = s_n = \lg n,$$

добивамо из прве од ових једначина

$$n = 1 + e^x,$$

што заменом у другу даје

$$y = \lg(1 + e^x).$$

Дакле, у овом случају је

$$f(x) = \lg(1 + e^x) = x + \lg(1 + e^{-x}) > x,$$

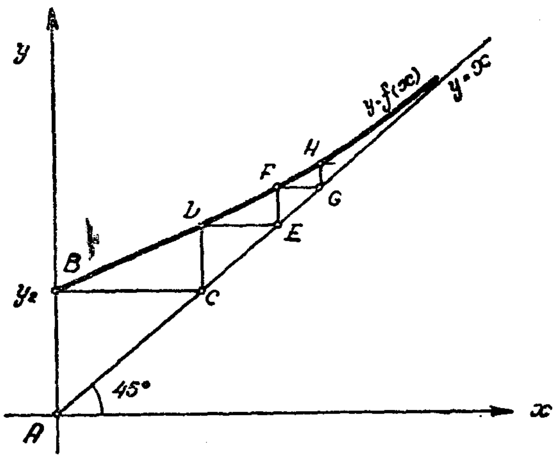
тако да се крива BS' стално налази изнад праве AS и асимптотски јој се приближава (в. сл. 7).

3. Из напред наведених типичних примера можемо извести ове закључке.

Кад ред Σa_n конвергира брзином геометриске прогресије, диаграм функције $f(x)$ пресеца праву $y=x$ под извесним углом α, који је >0 и $<45^0$.

Кад је конвергенција слабија, као што је то случај код реда $\Sigma \frac{2}{n(n+1)}$, или реда $\Sigma \frac{1}{n^2}$, тада је $\alpha=0$, тј. диаграм функције додирује праву у тачки која одговара збиру.

Кад је ред слабо дивергентан диаграм не пресеца праву, али је та права асимптота, као што је то случај код хармониског реда $\Sigma \frac{1}{n}$.



Сл. 7.

Најзад, кад ред брзо дивергира као што је то случај код аритметичког реда Σn, диаграм функције $f(x)$ се од ове праве удаљује.

Из ових разлога видимо да је положај диаграма функције $f(x)$ према правој $y=x$ карактеристичан не само за конвергенцију већ и за брзину конвергенције, и то:

1° он је карактеристичан за конвергенцију, према томе да ли он пресеца ову праву или не,

2° он је карактеристичан за брзину конвергенције према врсти додира у тачки пресека, односно у случају дивергенције према брзини приближавања, односно удаљавања од праве.

Због тога је од интереса да се закључак *2*° проучи и у општем случају. У ту сврху пођимо од функције $f(x)$ дате обрасцем (6), тј изразом

$$y=f(x)=\psi\{1+\phi(x)\}.$$

Да бисмо одредили под којим углом α диаграм ове функције сече праву $y=x$ ставимо

$$y'=\operatorname{tg}\theta.$$

Како је према слици 8

$$\alpha+\theta=45^0, \text{ тј. } \alpha=45^0-\theta,$$

то је

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}\theta}{1+\operatorname{tg}\theta}=\frac{1-y'}{1+y'}. \tag{9}$$

Образујмо сад извод

$$y'=\psi'\{1+\phi(x)\}\phi'(x).$$

Како из

$$\psi\{\phi(x)\} = x$$

следи

$$\psi'\{\phi(x)\}\,\phi'(x) = 1,$$

тј.

$$\phi'(x) = -\frac{1}{\psi'\{\phi(x)\}},$$

то је

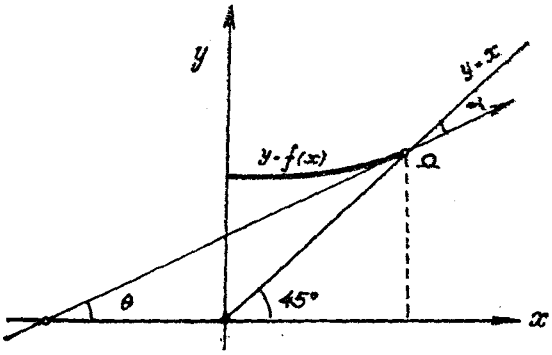
$$y' = -\frac{\psi'\{1+\phi(x)\}}{\psi'\{\phi(x)\}},$$

Ако ставимо

$$t = \phi(x),$$

биће

$$y' = \frac{\psi'(1+t)}{\psi'(t)}.$$



Сл. 8.

Уочимо даље количник два узастопна члана посматраног реда Σa_n. Према Cauchy-еву ставу о средњим вредностима је

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\psi(n+1)-\psi(n)}{\psi(n)-\psi(n-1)} = \frac{\psi'(n+\xi)}{\psi'(n-1+\xi)};$$

стављајући

$$t = n-1+\xi,$$

биће

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\psi'(1+t)}{\psi'(t)}.$$

То значи да се за известан низ t-вредности извод

$$y' = f'(t)$$

понаша као количник a_{n-1}/a_n два узастопна члана посматраног реда. Дакле, ако је овај ред конвергентан и задовољава D'Alembert-ов критериум

$$\frac{a_n+1}{a_n} \to q < 1 \text{ кад } n\to\infty, \tag{10}$$

добивамо, према (9), да је

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1-q}{1-q}. \tag{11}$$

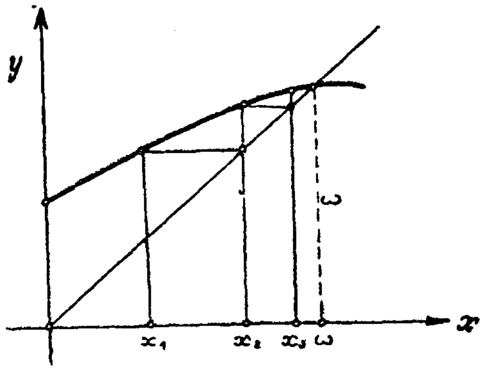
Према томе видимо да и у општем случају, као и код специалног геометриског реда, диаграм функције $f(x)$ пресеца праву $y=x$ ако овај ред конвергира експоненциалном брзином, тј. ако он задовољава услов (10), и да је у том случају угао пресека α дат обрасцем (11).

Међутим, ако овај ред спорије конвергира, на пример кад наступа случај D'Alembert-овог критериума

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1,$$

тада видимо из (11) да мора бити $\alpha = 0$, јер је у том случају $q = 1$. Дакле, кад ред Σa_n конвергира спорије од геометриског реда диаграм функције $f(x)$ мора додиривати праву $y = x$.

Испитивање овог случаја је утолико од интереса што се поставља питање да ли се из реда додира диаграма функције $f(x)$ и праве $y = x$ може закључити нешто и о брзини конвергенције посматраног реда, као и обратно. Ово утолико пре што је геометриска интерпретација проф. Миланковића уствари еквивалентна са решавањем једначине $x = f(x)$ методом сукцесивне апроксимације, итерирањем функције $f(x)$, тако да се ово питање своди на проучавање брзине конвергенције сукцесивних решења једначине $x = f(x)$ према положају, и то специално додиру, диаграма функције $f(x)$ и праве $y = x$.



Сл. 9.

Видели смо, наиме, да је функција $f(x)$ везана за функцију $\psi(x)$ обрасцем (8). Ако у том обрасцу ставимо прво

$$n = 1 + \phi(x).$$

биће

$$\psi(n) = f\{\psi(n-1)\}.$$

Ако затим ставимо

$$x_n = \psi(n)$$

биће

$$x_n = f(x_{n-1}), \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Отуда следи (в. сл. 9) да је низ вредности x_n које настају постепеним итерирањем функције $f(x)$ заиста низ приближних вредности решења једначине $y = f(x)$ које добивамо методом сукцесивне апроксимације.

Да стварно брзина конвергенције којом ова приближна решења x_n теже граничној вредности, тј. решењу једначине $y = f(x)$, зависи од реда додира диаграма функције $f(x)$ са правом $y = x$ увиђамо ако претпоставимо да диаграм функције $f(x)$ има додир k-тог реда, рецимо у тачки $x = \omega$, са правом $y = x$. У том случају у близини ове тачке функција $f(x)$ је облика

$$f(x) = x + a(\omega - x)^k + o\{(\omega - x)^k\}, \quad x \to \omega, \quad a > 0.$$

Тада, полазећи од извесне подесно изабране почетне вредности x_0, сукцесивна приближна решења x_n теже граничној вредности ω и овој се граничној вредности утолико спорије приближава уколико је k веће. Заиста, за велике вредности од n ова су решења дата асимптотским обрасцем

$$x_n = \omega + \frac{A}{n^{\frac{k-1}{2}}} + o\left(\frac{1}{n^{\frac{k-1}{2}}}\right), \; n \to \infty, \quad \text{где је} \quad A = \left(\frac{1}{((k-1)\,a)^{\frac{k-1}{2}}}\right),$$

(види Pólya-Szegö, Bd. I, Absch. I. Aufg. 174 и 173, стр 31), тако да $x_n - w$ тежи нули утолико спорије уколико је k веће.

На пример, у трећем од примера наведених у тачки 2 је

$$f(x) = \frac{4}{4-x} = x - \frac{(2-x)^2}{4-x} = x + \frac{1}{2}(2-x)^2 + o\{(2-x)^2\}, \; x \to 2,$$

дакле, по среди је додир другог реда тј. $k=2$, тако да ред $\Sigma \frac{2}{n(n+1)}$ конвергира брзином $\frac{1}{n}$, као што је то заиста и случај.

Код примера

$$f(x) = 1 + \sin(x-1) = x + (1-x)\left\{1 - \frac{\sin(1-x)}{1-x}\right\}$$
$$= x + \frac{1}{6}(1-x)^3 + o\{(1-x)^3\}, \; x \to 1,$$

по среди је додир трећег реда, $k=3$, тако да овде приближна решења x_n конвергирају брзином $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Из овог расматрања се види да је за геометриско проучавање конвергенције редова горе дефинисана функција $f(x)$ карактеристична како за конвергенцију, тако и за природу конвергенције тога реда, па би било од интереса, бар за извесне специалне класе редова, детаљније испитати везу између општег члана реда и ове функције.

SUR INTERPRETATION GEOMETRIQUE DE M. MILANKOVIĆ RELATIVE AUX SERIES GEOMETRIQUES

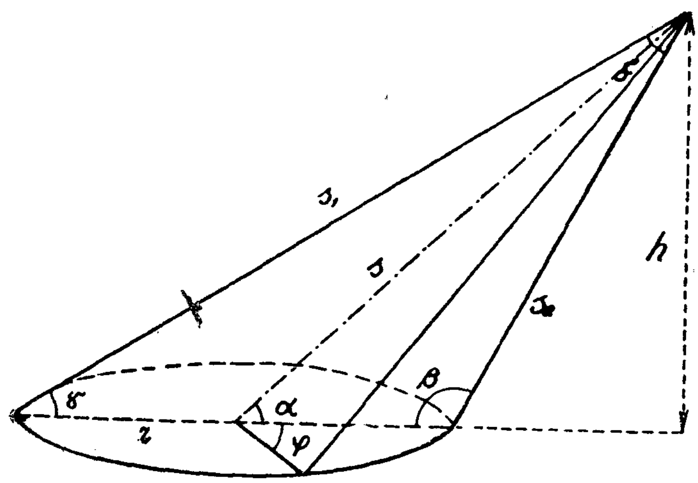
Par Jovan Karamata (Beograd)

L' auteur a montré que l' interprétation géométrique de M. Milanković sur la progression géométrique peut être même appliquée aux certaines séries de nature simple (série harmonique etc). En même temps, de cette interprétation on peut détérminer l' ordre de grandeur du reste des série considérés.

ПРИБЛИЖНА ФОРМУЛА ЗА ОМОТАЧ КОСЕ КРУЖНЕ КУПЕ

СТАНИМИР ФЕМПЛ (Београд)

Нека су s_1 и s_2 највећа и најмања изводница косе кружне купе, r полупречник основе, β и γ наспрамни углови тих трију страна карактеристичног троугла, s осовина купе, α угао осовине према бази, h висине купе (в. сл. 1).



Сл, 1.

У своме раду [1] показао сам да се омотач M косе кружне купе који је дат интегралом

$$M = r\int_0^{\pi} \sqrt{h^2 + (r - s\cos\alpha\cos\varphi)^2}\, d\varphi, \tag{1}$$

своди на облик

$$M = 2\, r \sqrt{s_1 s_2}\left(E - F\sin^2\frac{\delta}{2}\right) + 2\, r^2 \{E_1 F - (F - E) F_1\},$$

где су F и E потпуни нормални елиптички интеграли I и II врсте са модулом

$$k = \sin\frac{\beta-\gamma}{2}$$

и где су F_1 и E_2 нормални елиптички интеграли I и II врсте са модулом

$$k' = \cos\frac{\beta-\gamma}{2}$$

и са амплитудом

$$\Theta = \arc\sin\frac{2r}{s_1+s_2}.$$

На тај начин, на основу постојећих таблица за елиптичке интеграле [2], може се израчунати омотач косе кружне купе.

У овом раду показаћу да се вредност омотача са довољном тачношћу може добити из приближног обрасца

$$M \approx \frac{r}{2}\left(\frac{s_1+s_2}{2}+\sqrt{h^2+r^2}\right)\pi \tag{1}$$

и поставићу горње границе отступања ове приближне вредности од праве.

Раставимо интеграл (1) на два интеграла са границама $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ и $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$. Кад се у другом интегралу φ смени са $\pi-\varphi$ и овај поново скупи са првим интегралом, једначина (1) добива облик

$$\frac{M}{r} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\sqrt{h^2+(r+s\cos\alpha\cos\varphi)^2}+\sqrt{h^2+(r-s\cos\alpha\cos\varphi)^2}\right]d\varphi. \tag{2}$$

Подинтегрална функција $F(\varphi)$ монотоно опада од 0 до $\frac{\pi}{2}$, а има максимум за $\varphi=0$, тј.

$$F_{max.} = F(0) = s_1+s_2,$$

јер је

$$\sqrt{h^2+(r+s\cos\alpha)^2} = s_1, \quad \sqrt{h^2+(r-s\cos\alpha)^2} = s_2,$$

и има минимум за $\varphi = \frac{\pi}{2}$, тј.

$$F_{min.} = F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\sqrt{h^2+r^2}.$$

Према томе је

$$2\sqrt{h^2+r^2} \leqslant F(\varphi) \leqslant s_1+s_2, \tag{3}$$

а отуда, интеграцијом,

$$\pi\sqrt{h^2+r^2} \leqslant \frac{M}{r} \leqslant (s_1+r_2)\frac{\pi}{2}. \tag{4}$$

Обе ове границе постигнуте су за $s_1=s_2$, тј. у случају када је купа усправна; тада образац (I) даје тачну вредност омотача.

Узме ли се за M/r аритметичка средина размака (4), добива се као приближна вредност израз

$$M=\frac{r}{2}\left(\frac{s_1+s_2}{2}+\sqrt{h^2+r^2}\right)\pi. \tag{5}$$

Учињена грешка ([3], стр. 66—67) није већа од

$$\Delta=\frac{r}{2}\left(\frac{s_1+s_2}{2}-\sqrt{h^2+r^2}\right)\pi,$$

и релативна грешка била би

$$\delta=\frac{\Delta}{M}<\frac{s_1+s_2-2\sqrt{h^2+r^2}}{s_1+s_2+2\sqrt{h^2+r^2}}. \tag{6}$$

Тако на пр. за $s_1=24$, $s_2=16$, $2r=13$, на основу обрасца

$$s_1^2-s_2^2=4rs\cos\alpha,$$

$$h^2+r^2=s^2\sin^2\alpha+r^2=s^2+r^2-s^2\cos^2\alpha=\frac{s_1^2+s_2^2}{2}-\frac{(s_1^2-s_2^2)^2}{16r^2}, \tag{7}$$

образац (6) даје релативну грешку око 8%. Међутим показаћу да вредност (I) лежи у много ужем размаку.

Ради тога, посматрајмо функцију која претставља отступање функције

$$K(\varphi)=(s_1+s_2)\cos^2\varphi+2\sqrt{h^2+r^2}\sin^2\varphi \tag{8}$$

од подинтегралне функције. Крива $K(\varphi)$ је доста прињубљена уз подинтегралну криву, а екстремне им се тачке поклапају. Ставимо ли, краткоће ради,

$$K_1(\varphi)=h^2+(r+s\cos\alpha\cos\varphi)^2, \quad K_2(\varphi)=h^2+(r-s\cos\alpha\cos\varphi)^2,$$

поменуто отступање се може написати у облику

$$\Phi(\varphi)=\sqrt{K_1}+\sqrt{K_2}-K=\frac{(\sqrt{K_1}+\sqrt{K_2})^2-K^2}{\sqrt{K_1}+\sqrt{K_2}+K}$$

$$=\frac{2(K_1+K_2)-(\sqrt{K_1}-\sqrt{K_2})^2-K^2}{\sqrt{K_1}+\sqrt{K_2}+K}$$

$$=\frac{2(K_1+K_2)-K^2-\dfrac{(K_1-K_2)^2}{(\sqrt{K_1}+\sqrt{K_2})^2}}{\sqrt{K_1}+\sqrt{K_2}+K}=$$

$$=\frac{2(K_1+K_2)-K^2-\dfrac{(K_1-K_2)^2}{F^2(\varphi)}}{\sqrt{K_1}+\sqrt{K_2}+K}.$$

Услед неједначина (3), ово отступање лежи између граница

$$\left.\begin{aligned}&\frac{2(K_1+K_2)-K^2-\dfrac{(K_1-K_2)^2}{4(h^2+r^2)}}{\sqrt{K_1}+\sqrt{K_2}+K}\leqslant\Phi(\varphi),\\&\Phi(\varphi)\leqslant\frac{2(K_1+K_2)-K^2-\dfrac{(K_1-K_2)^2}{(s_1+s_2)^2}}{\sqrt{K_1}+\sqrt{K_2}+K}.\end{aligned}\right\}\quad(9)$$

На основу једначине (8), израз

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}K(\varphi)\,d\varphi=\left(\frac{s_1+s_2}{2}+\sqrt{h^2+r^2}\right)\frac{\pi}{2}$$

даје приближну вредност за M/r. Зато интеграција функције $r\,\Phi(\varphi)$ даје отступање приближне вредности омотача од његове праве вредности, а лева и десна страна неједначина (9) дају после интеграције и множења са r границе тога отступања.

Функција $\sqrt{K_1}+\sqrt{K_2}+K$ монотоно опада у размаку интеграције, тј. реципрочна вредност функције монотоно расте. Услед тога, на левој и десној страни (9) можемо применити теорему Ossian Bonet-а [3] за средње вредности одређених интеграла, па се због

$$\sqrt{K_1\left(\frac{\pi}{2}\right)}+\sqrt{K_2\left(\frac{\pi}{2}\right)}+K\left(\frac{\pi}{2}\right)=4\sqrt{h^2+r^2}$$

добија

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2(K_1+K_2)-K^2-\dfrac{(K_1-K_2)^2}{4(h^2+r^2)}}{\sqrt{K_1}+\sqrt{K_2}+K}\,d\varphi$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{h^2+r^2}}\int_{\xi_1}^{\frac{\pi}{2}}\left[2(K_1+K_2)-K^2-\frac{(K_1-K_2)^2}{4(h^2+r^2)}\right]d\varphi,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2(K_1+K_2)-K^2-\dfrac{(K_1-K_2)^2}{(s_1+s_2)^2}}{\sqrt{K_1}+\sqrt{K_2}+K}\,d\varphi$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{h^2+r^2}}\int_{\xi_2}^{\frac{\pi}{2}}\left[2(K_1+K_2)-K^2-\frac{(K_1-K_2)^2}{(s_1+s_2)^2}\right]d\varphi,$$

где ξ_1 и ξ_2 леже између 0 и $\frac{\pi}{2}$. Услед тога, из (9) следи

$$\frac{r}{4\sqrt{h^2+r^2}}\ \mathrm{Min.}\int_{\xi_1}^{\frac{\pi}{2}}\left[2(K_1+K_2)-K^2-\frac{(K_1-K_2)^2}{4(h^2+r)^2}\right]d\varphi\leqslant r\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Phi(\varphi)\,d\varphi, \tag{10}$$

$$r\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Phi(\varphi)\,d\varphi\leqslant\frac{r}{4\sqrt{h^2+r^2}}\ \mathrm{Max.}\int_{\xi_2}^{\frac{\pi}{2}}\left[2(K_1+K_2)-K^2-\frac{(K_1-K_2^2)}{(s_1+s_2)^2}\right]d\varphi,$$

где изрази Min. и Max. претстављају најмању и највећу вредност горњих интеграла.

Због

$$\begin{aligned}2(K_1+K_2)&=4(h^2+r^2)+4s^2\cos^2\alpha\cos^2\varphi\\&=4(h^2+r^2)+\frac{(s_1^2-s_2^2)^2}{4r^2}\cos^2\varphi,\end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}K^2&=(s_1+s_2)^2\cos^4\varphi+4(s_1+s_2)\sqrt{h^2+r^2}\sin^2\varphi\cos^2\varphi+4(h^2+r^2)\sin^4\varphi\\&=4(h^2+r^2)+4\sqrt{h^2+r^2}(s_1+s_2-2\sqrt{h^2+r^2})\cos^2\varphi+\\&\quad+(s_1+s_2-2\sqrt{h^2+r^2})^2\cos^4\varphi,\end{aligned} \tag{12}$$

$$\frac{(K_1-K_2)^2}{(s_1+s_2)^2}=\frac{(4r\,s\cos\alpha\cos\varphi)^2}{(s_1+s_2)^2}=(s_1-s_2)^2\cos^2\varphi,$$

за подинтегралну функцију десне стране добива се израз

$$(s_1+s_2-2\sqrt{h^2+r^2})^2 \sin^2\varphi \cos^2\varphi ,$$

а интеграција те функције даје

$$\psi(\xi_2)=\frac{1}{32}(s_1+s_2-2\sqrt{h^2+r^2})^2(2\pi-4\xi_2+\sin 4\xi_2).$$

Ова функција од ξ_2 нема екстрема у размаку $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Како је

$$\psi(0)=\frac{\pi}{16}(s_1+s_2-2\sqrt{h^2+r^2})^2, \quad \psi\left(\frac{\pi}{2}\right)=0,$$

то је највећа вредност функције $\psi(\xi_2)$ вредност $\psi(0)$. Услед тога, десна граница отступања износи

$$G=\frac{r\pi}{16\sqrt{h^2+r^2}}\left(\frac{s_1+s_2}{2}-\sqrt{h^2+r^2}\right)^2. \tag{13}$$

Због једначина (11) и (12) и због једначине

$$\frac{(K_1-K_2)^2}{4(h^2+r^2)}=\frac{(s_1{}^2-s_2{}^2)^2}{4(h^2+r^2)}\cos^2\varphi ,$$

добива се за подинтегралну функцију леве стране израз

$$\left[\frac{(s_1{}^2-s_2{}^2)^2}{4r^2}-4(s_1+s_2)\sqrt{h^2+r^2}+8(h^2+r^2)\right.$$
$$\left.-\frac{(s_1{}^2-s_2{}^2)^2}{4(h^2+r^2)}\right]\cos^2\varphi-(s_1+s_1-2\sqrt{h^2+r^2})^2\cos^4\varphi .$$

Израз у средњој загради, обзиром на (7), може се довести на овај облик:

$$[(s_1-s_2)^2+4(s_1+s_2)\sqrt{h^2+r^2}+4(h^2+r^2)]$$
$$+\left[4(h^2+r^2)+\frac{(s_1{}^2-s_2{}^2)^2}{4r^2}-(s_1+s_2)^2-\frac{(s_1{}^2-s_2)^2}{4(h^2+r^2)}\right]$$
$$=(s_1+s_2-2\sqrt{h^2+r^2})^2+\left[(s_1-s_2)^2-\frac{(s_1{}^2-s_2{}^2)^2}{4(h^2+r^2)}\right]$$
$$=(s_1+s_2-2\sqrt{h^2+r^2})^2\left[1-\frac{(s_1-s_2)^2}{4(h^2+r^2)}\cdot\frac{s_1+s_2+2\sqrt{h^2+r^2}}{s_2+s_2-2\sqrt{h^2+r^2}}\right].$$

Ставимо ли још

$$A=\frac{(s_1-s_2)^2}{h^2+r^2}\cdot\frac{s_1+s_2+2\sqrt{h^2+r^2}}{s_1+s_2-2\sqrt{h^2+r^2}},$$

подинтегрална функција леве стране добива облик

$$(s_1+s_2-2\sqrt{h^2+r^2})^2\left[(1-\frac{A}{4})\cos^2\varphi-\cos^4\varphi\right],$$

а после интеграције биће

$$\Omega(\xi_1)=(s_1+s_2-2\sqrt{h^2+r^2})^2\left[\left(1-\frac{A}{4}\right)\cdot\frac{\pi-2\xi_1-\sin 2\xi_1}{4}\right.$$
$$\left.-\frac{3\pi-6\xi_1}{16}+\frac{\sin 2\xi_1}{4}+\frac{\sin 4\xi_1}{32}\right].$$

Извод ове функције

$$\Omega'(\xi_1)=\frac{1}{8}(s_1+s_2-2\sqrt{h^2+r^2})^2(2\cos^2 2\xi_1+A\cos 2\xi_1+A-2) \quad (14)$$

има у тачки $\xi_1=0$ вредност

$$\Omega'(0)=\frac{A}{4}(s_1+s_2-2\sqrt{h^2+r^2})^2>0,$$

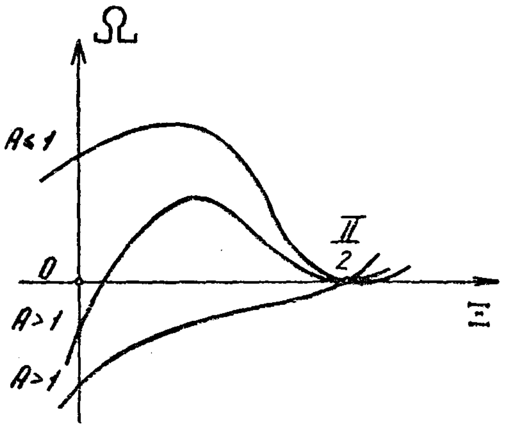
што значи да функција Ω расте у близини тачке 0. Како је

$$\Omega\left(\frac{\pi}{2}\right)=0,\qquad \Omega'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0,\qquad \Omega''\left(\frac{\pi}{2}\right)=0,$$

и

$$\Omega(0)=\frac{\pi}{16}(s_1+s_2-2\sqrt{h^2+r^2})^2(1-A), \quad (15)$$

а према (10) извод функције Ω може имати највише две нуле у размаку $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, то дијаграм функције Ω може имати један од три облика назначених на слици.



Сл. 2.

У случају $A\leqslant 1$, према (15), најмања вредност функције Ω у размаку $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ једнака је нули. У том случају је лева граница једнака нули, а отступање је позитивно. Напротив, ако је $A>1$, вредност (15) је најмања вредност. Како је на основу (13) и (15)

$$\Omega(0)=\frac{4G(1-A)}{r}\sqrt{h^2+r^2},$$

то је обзиром на (10), лева граница отступања $G(1-A)$. У првом случају је граница грешке мања од G, у другом је граница грешке мања од

$$G-G(1-A)=GA.$$

Релативна грешка је у првом случају мања од G/M, у другом, мања од AG/M.

На тај начин долази се до следећег става за одређивање граница грешке:

Нека је

$$A=\frac{(s_1-s_2)^2}{h^2+r^2}\cdot\frac{\frac{s_1+s_2}{2}+\sqrt{h^2+r^2}}{\frac{s_1+s_2}{2}-\sqrt{h^2+r^2}}$$

и

$$G=\frac{r\pi}{16\,(h^2+r^2)}\left(\frac{s_1+s_2}{2}-\sqrt{h^2+r^2}\right)^2.$$

Ако је

$$A\leqslant 1,$$

релативна грешка је

$$\delta<\frac{G}{M};$$

ако је

$$A>1,$$

релативна грешка је

$$\delta<\frac{AG}{M}.$$

Примера ради, нека је опет $s_1=24$, $s_2=16$, $2r=13$. Због

$$M=370{,}26,\quad A=2{,}3485>1,\quad G=1{,}0953,$$

рачун показује да је релативна грешка

$$\delta<0{,}007$$

тј. 0,7%.

(Права вредност за омотач је [1] $M=370{,}67$).

ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Фемпл. Компланација косе кружне купе. *Гласник математичко физички и астрономски.* Серија II, Том 4. № 3. Стр. 127—134. Загреб 1949.

[2] Jahnke u. Emde. Funktionentafeln. Leipzig u. Berlin 1909.

[3] М. Петровић. Рачунање са бројним размацима. Београд, 1932.

NÄHERUNGSFORMEL ZUR MANTELBERECHNUNG DES SCHIEFEN KREISKEGELS

Von Stanimir Fempl (Beograd)

Verfasser beweist eine angenäherte Formel zur Flächenberechnung des Mantels des schiefen Kreiskegels (Formel (I)) und schätzt den dabei gemachten (relativen) Fehler ab.

РЕФЕРАТ О ДОКТОРСКОЈ ТЕЗИ М. ТОМИЋА

Члан математичког института Миодраг Томић поднео је Српској Академији Наука своју докторску тезу *О тригонометриским збировима*. Комисија, одређена од стране Одељења природно-математичких Наука САН поднела је о тези овај реферат:

„Теорија тригонометриских — посебно Fourier-ових редова — једна је од најсуптилнијих грана математичке анализе. Она се може сматрати и као једна од њених најобимнијих грана, јер су из ње проистекли многи проблеми који су се доцније развили у посебне теорије, и сачињавају данас основне гране и појмове математичке анализе. — Тако су већ у прошлом столећу Fourier-ови редови довели Cauchy-a, Dirichlet-a и најзад Weierstrass-a до прецизирања појма функције, Riemann-a до прецизне формулације појма одређеног интеграла, док је Du Bois-Reymond, вођен основним проблемом конвергенције Fourier-ових редова, разрадио свој „Infinitärcalcul", којим је дао модерни аспект инфинитезималном рачуну.

Концем прошлог столећа покушај класификације прекидних места функције дефинисане тригонометриским редом довео је Cantor-a до нове дисциплине — теорије скупова. Ова теорија је најзад довела до ригурозног појма функције, а Lebesgue-y омогућила једно значајно откриће — нов појам интеграла, чије порекло такође лежи у теорији Fourier-ових редова.

Савремена теорија тригонометриских редова развија се данас у два правца. Први тежи да дубље проучи основне особине функција које се могу развити у Fourier-ов ред, као и њихову конвергенцију, односно збирљивост, користећи се при томе модерном математичком апаратуром која је потекла из радова Du Bois-Reymond-a, а коју су усавршили Borel и Hardy. Други правац има практични карактер. Он се развио у тзв. хармониску анализу и има за циљ да, при проучавању периодичких појава испита понашање тригонометриских збирова и укључи их у што прецизније границе. Међутим, овај правац се показао од велике користи и у многим гранама теориске математике, специално у теорији функција, како реалне тако и комплексне промењљиве, па чак и у аналитичкој теорији бројева код Диофантових апроксимација.

Докторска дисертација Миодрага Томића је у овом другом правцу.

У самој природи проблематике ове области лежи да се испитивања врше на специјалним тригонометриским збировима, тј. таквим збировима код којих коефициенти имају специалну структуру, или припадају специалним класама. Због тога се за ова испитивања прибегавало разноврсним поступцима, прилагођеним посебној структури, односно класи, ових коефициената. Кандидат у својој тези даје један веома општи поступак који му омогућава да обухвати целу групу проблема, за чије се испитивање до сада служило диспаратним сретствима.

У ту групу спадају сви они проблеми који се односе на тригонометриске збирове код којих су било коефициенти, било експоненти правилни и то у смислу да су ови једноструко или вишеструко монотони. Ова метода, поред тога што отступа од досадашњих аналитичких поступака, нова је и утолико што почива на чисто геометриским расуђивањима. Она омогућава не само да се истакне заједнички карактер наведене групе проблема, већ исти постају знатно прегледнији, тако да се поједини ставови могу непосредно проширити и изводити у њиховом најопштијем облику. Истовремено, она пружа могућност да се добију и најпрецизнији, резултати, показујући када су, под учињеним претпоставкама добивене границе ефективно постигнуте.

Оваква геометриска интерпретација је у суштини нова. Раније су дати неки изоловани покушаји (као што је то случај код Kuzmin-а и Popken-а) да се геометриским расуђивањем добију подаци о тригонометриским збировима. Но, ови су били специалне структуре и намењени решавању специјалних проблема, тј. прилагођени уоченим специалним збировима, а у поступку М. Томића истакнут је општи принцип. Ово се нарочито истиче кад се Томићев поступак упореди баш са поступцима Kuzmin-а и Popken-а. Док су, наиме, ови специални поступци довели поменуте ауторе само до делимичних резултата, дотле Томићев општи принцип даје ставове у најопштијем облику, показујући истовремено да се они не могу више проширити.

У глави првој кандидат износи опште принципе на којима почива његова геометриска метода. У првој тачки ове главе он даје неколико општих елементарних ставова о скуповима кругова и показује да се, узимајући као основни елемент круг место тачке могу основни појмови који вреде за скупове тачака пренети на скупове кругова.

Основну идеју помоћу које кандидату полази за руком да повеже ове елементарне ставове са целом групом ставова о тригонометриским збировима, он у главним потезима износи у другој тачки ове главе. Ово постиже тако што свакој страни произвољне полигоналне линије подесно асоцира круг, тако да је полигоналном линијом одређен систем кругова, од којих крајњи увек садржи крајњу тачку полигоналне линије. Како крајње тачке ових полигоналних линија претстављају делимичне збирове тригонометриских полинома, то примењујући на овај систем кругова основне појмове множине кругова дефинисане у претходној тачки (нарочито појам монотоније и монотоне конвергенције), он добива низ области дефинисаних овим круговима у којима се морају налазити збирови посматраних тригонометриских полинома.

У трећој, четвртој и петој тачки Томић примењује ова општа геометриска расуђивања на извесне специалне класе полигоналних линија, као и њима нарочито асоциране кругове. Случајеве третиране у трећој и четвртој тачки наводи само сумарно, целине ради, а детаљнију обраду, као и примене на извесне проблеме теорије бројева, Диофантове апроксимације и Dirichlet-ове редове, дао је у два рада која су поднета за штампу (од којих је први примљен за „Глас“ САН).

У тачки петој, кандидат детаљно обрађује најспециалнији случај полигоналних линија, оне које се своде на правилне спирале, уводећи при томе и појам вишеструко монотоног система кругова. Све примене на тригонометриске и Taylor-ове редове које кандидат даје у доцнијим главама ослањају се искључиво на ове специалне спиралне полигоналне линије. Многобројне примене само овог најспециалнијег случаја довољно већ показују плодност оваквог геометриског расуђивања, тако да кандидат није ни обрађивао, нити је имао потребе за то, опште случајеве наведене у овој глави.

У другој глави кандидат показује како се његовим поступком може непосредно добити низ ставова Fejér-a, Pólya, Szegö-a и других, а који се односе на тригонометриске полиноме и редове са монотоним коефициентима. Поред веома прецизних граница између којих се налазе збирови таквих полинома, као и граница између којих се налазе њихове нуле, кандидат добива и ставове теориског карактера; на пример, став за униформну ограниченост и униформну конвергенцију тригонометриских редова.

У трећој глави Томић преноси иста ова расуђивања на полиноме и редове чији су коефициенти двоструко монотони и, као и у претходној глави, показује како се овом методом могу извести извесни познати ставови не само краће и прегледније, већ и до које мере се ови могу проширити и допунити.

У четвртој глави кандидат примењује ова расуђивања на неке ставове из теорије функција који се односе Taylor-ове редове са монотоним и вишеструко монотоним коефициентима. Један од најлепших резултата је доказ става А ове главе (Fejér-a и Szegö-a), који казује да отстатци Taylor-ова реда са двоструко монотоним коефициентима „монотоно конвергирају" нули. Док су се поменути аутори за доказ овог става служили компликованим методама теорије функција (Abel-овим ставом о конвергенцији на рубу и другим), дотле Томић показује, посматрањем конвергенције непосредно на самом рубу, да је овај став непосредна последица једне од особина спирала које одговарају овим редовима. Поред тога, ставом B′, кандидат даје нов општи став, који садржи као специалан случај Szegö-ов став о биномном реду, а за који је Szegö изричито напоменуо да му није пошло за руком да нађе његов општи облик.

Најзад, у последњој тачки ове главе, кандидат показује како се ова расматрања могу применити на проучавање асимптотског понашања Legendre-ових полинома, као и на положај њихових нула. Ставом C′ он даје један општи став, који у извесном правцу допуњује један став Szegö-a. а који као специалан случај садржи Laplace-ов асимптотски образац за Legendre-ове полиноме.

Овим радом кандидат је показао да је добро упознат не само са ужом облашћу из које је радио дисертацију, већ и са широким областима математичке анализе, као што се то види из наведених примена и литературе. Он уочава проблематику у овим областима и може самостално научно да ради, што показују нови резултати добивени његовом оригиналном методом."

J. Карамата с. р.
А. Билимовић с. р.
Р. Кашанин с. р.

IA

Пред комисијом, у којој су поред већ наведена три члана били још и академик и професор Универзитета Милутин Миланковић и професор Универзитета Тадија Пејовић, кандидат М. Томић је 24 марта 1950 своју тезу одлично бранио.