О РАЗДЕОБИ RIEMANN-ОВИХ ПОВРШИНА НА ЛИСТОВЕ

од

МИЛОША РАДОЈЧИЋА

О РАЗДЕОБИ RIEMANN-ОВИХ ПОВРШИНА НА ЛИСТОВЕ

ОД МИЛОША РАДОЈЧИЋА

(Приказано на скупу Академије Природних Наука 31. децембра 1928.)

1.

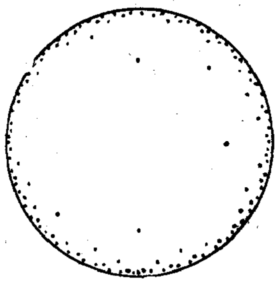
Као што је познато, област Riemann-ове површине неке аналитичке функције назива се онда, *лист*, када се та област распростире преко целе бројне равни а да ју нигде не покрива више од једанпут. У радовима где је реч о Riemann-овим површинама, говори се и о *раздеоби Riemann-ових површина на листове*. Штавише, неки пут се прво конструишу листови који чине једну такву раздеобу, па се тек њиховим међусобним спајањем долази до појма Riemann-ових површина. Те се раздеобе редовно односе на Riemann-ове површине једноставнијих врста функција (специјални примери или опште алгебарске функције). Међутим, мислим да нигде у математичкој литератури није обрађен *општи проблем раздеобе на листове, најопштијих врста Riemann-ових површина, за које та раздеоба уопште постоји*. Има Riemann-ових површина које се не могу разделити на један потпун *систем листова*, има их које уопште немају листова у горњем смислу те речи. Када раздеоба и постоји, она није увек унапред јасна, те се мора доказати. Видећемо да тај проблем није тако прост. Његова компликованост сигурно је један узрок, зашто он није решаван до данас. Међутим, извесне групе проблема у теорији функција показују, да ће у њеном даљем развоју, ускоро раздеоба на листове бити неизбежна. Ја сам, на пр., до овог проблема раздеобе дошао на путу ка *геометријском* доказу познатог Picard-овог става о изузетним вредностима аналитичких функција у околини изолованих есенцијалних сингуларних тачака. Ту је раздеоба на листове проблем, који се, изгледа, не може мимоићи.

2.

Претходно морамо нешто рећи о Riemann-овим површинама. До појма Riemann-ове површине долазимо најприродније, преко аналитичких функција. Без да дајемо исцрпну дефиницију, рецимо само да је Riemann-ова површина област, у којој је дотична мултиформна аналитичка функција, униформна. Нагласимо само то, да је та област једна *отворена област*[1].

Све Riemann-ове површине можемо уврстити у две опште категорије: *ограничене* и *неограничене* Riemann-ове површине. *Неограничене* Riemann-ове површине су оне, по којима се можемо слободно кретати, описујући у бројној равни произвољне линије, будући да је довољно да сваку тачку гранања коју би на тим линијама срели, обиђемо у њеној непосредној близини. Остале су површине *ограничене*. Границе ограничених Riemann-ових површина састоје се из нарочитих сингуларних линија, које на тим површинама имају дотичне аналитичке функције.

Ако је Riemann-ова површина неограничена, онда је скуп њених тачака гранања, скуп који није нигде густ на самој површини. То произлази непосредно из горње дефиниције неограничених површина. Ако је пак Riemann-ова површина ограничена, онда се њене тачке гранања гомилају и дуж граничних линија. Разјаснимо ову последњу околност на следећем примеру. Нацртајмо у једном кругу бројне равни бескрајан скуп тачака, коjему је свака тачка обода тога круга, тачка гомилања[2]. Претпоставимо да је Riemann-ова површина која се распростире изнад ове равни таква, да свакој тачки овога скупа одговара *на сваком* листу површине по једна тачка гранања. Онда је тај круг, *природна граница* наше површине: Ма како се приближавали ободу круга, бескрајно се приближавамо тачкама гранања.



Сл. 1.

Међутим и код неограничених Riemann-ових површина

---

[1] *Отворена област* = *domaine ouvert*. За овај, као и за друге називе, види мој рад: „Аналитичке функције претстављене конвергентним низовима алгебарских функција“. Књига LXXI посебних издања Срп. Кр. Акад.

[2] *Тачка гомилања* = *point limite* = *Häufungspunkt*.

може доћи до врло замршених околности. Осим изолованих тачака гранања и њихових тачака гомилања, могу неограничене Riemann-ове површине имати и перфектних скупова тачака гранања. За пример, довољно је поћи у бројној равни од познатог нигде густог а перфектног линеарног скупа тачака, које преостају на сегменту праве $[0, 1]$ када извадимо из њега „средњу трећину“, т. ј. отворени интервал $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, затим од преосталих интервала извадимо њихове „средње трећине“, па од преосталих интервала опет, и т. д...

Замислимо сада следећу површину: Описани скуп тачака нека јој буде скуп критичних тачака. Кад год, на којем било листу, прођемо кроз један од оних извађених интервала, увек долазимо на један нови лист, а никада кроз два разна интервала на исти лист... Тако замишљена Riemann-ова површина је неограничена, има бескрајно листова, међутим ниједна њена тачка гранања није изолована, ни у пројекцији, ни на самој површини. Тај пример можемо постепено компликовати и тако доћи до површина где се у пројекцији на раван, скуп трансцендентних критичних тачака састоји из свију тачака равни[1].

Први од горњих примера, где је круг природна граница Riemann-ове површине, показује нам да би имало смисла и кад би се проширило појам листа. Тако на пр., може бити од интереса, разделити у том примеру површину на листове који тачно једанпут испуњавају тај круг. За нашу сврху ми остајемо при првом смислу, само изрецимо једну строжију дефиницију. То можемо на пр. следећим речима:

Лист једне Riemann-ове површине је свака она затворена област те површине, којој ако одузмемо њену међу, настаје једна отворена област следећих особина:

I. *Та област не покрива бројну раван нигде више од једанпут.*

II. *Њена пројекција на бројну раван јесте отворена област која нема комплементарних области.*

Назив „затворене“ области губи, разуме се, важност тамо, где међа листа пролази кроз трансцендентну тачку гранања, јер пошто та тачка не припада површини, не може припадати

---

[1] Треба само употребити перфектне нигде густе скупове тачака, чија површинска мера јесте > 0.

ни листу. Из дефиниције се види да се међа поменуте отворене области у равни, састоји из самих *критичних линија* (линија гранања, lignes de ramification).

Додајмо на крају једну тачну дефиницију појма раздеобе Riemann-ове површине на листове:

Разделити неку Riemann-ову површину на листове значи, наћи један низ листова те површине (коначан или бесконачан, према врсти површине), *који немају међу собом заједничких области, а обухватају све тачке те површине.*

3.

Будући да се свака Riemann-ова површина не може разделити на *листове*, то морамо уочити једну општу врсту Riemann-ових површина, за коју је та раздеоба могућа, па ту могућност доказати. У самој природи ствари лежи да за ту врсту изаберемо *категорију свију неограничених Riemann-ових површина.* Иако је та категорија врло обимна (то смо видели у прошлом броју; напоменимо још, да у њу спадају и све Riemann-ове површине алгебарских функција и њихових интеграла), унапред изгледа разумљиво да је раздеоба могућа.

Међутим, раздеоба на листове биће кориснија по разне примене, ако узмогнемо додати неке услове који би упростили облик листова. Облик једног листа може бити нарочито замршен, ако међа листа има т. з. *дисконтинуираних елемената*[1]. Рецимо једноставно, да на међи неке области D, неки лук Λ припада једном дисконтинуираном елементу међе, ако му конвергира бескрајан низ лукова исте међе тако, да се унутрашње тачке[2] лука Λ не могу с обеју страна тога лука Λ достићи на континуираним путевима који пролазе кроз унутрашњост области D и не дотичу њену међу. Зато ћемо захтевати да не буде дисконтинуираних елемената т. ј. да међе листова буду континуиране.

Према томе, изрецимо следећим речима наш став, чији доказ јесте главна сврха овога рада:

Свака неограничена Riemann-ова површина може се разделити на листове континуираних међа.

---

[1] У конформном пресликавању једноструко повезане области на круг, одговара свакој тачки кружног обода један континуум тачака на међи опште области, који се зове *елеменат међе (Randelement, Primende)*. Ако се елеменат међе састоји из само једне тачке, онда је он *континуиран*, иначе је *дисконтинуиран* (Encykl. der Math. Wiss., II C.)

[2] т. ј. тачке које нису крајеви лука.

У доказу овог става тешкоће долазе са две стране.

1. Морамо изнаћи општу методу за конструкцију појединих листова чије су међе континуиране. Када не би захтевали да међе буду континуиране, могли би очигледно, пошто је површина неограничена, увек конструисати поједине листове. Тек услов континуитета захтева потанки доказ.

2. При конструкцији сваког листа једне раздеобе, морамо водити рачуна и о свима претходно конструисаним листовима: сви листови једне раздеобе морају бити у складу. На пр., ако се ради о површини функције $lg\, z$, па ако први лист буде ограничен правом $\overline{0\,1\,\infty}$, онда и сваки други лист исте раздеобе мора бити ограничен правом $\overline{0\,1\,\infty}$.

Према томе ћемо се прво бавити са конструкцијом једног листа континуираних међа, а затим ћемо конструисати читав низ листова који су међусобом у потребном складу.

4.

Означимо са S уочену, општу, неограничену Riemann-ову површину. Отпочнимо са конструкцијом првога листа.

Та се конструкција састоји у следећем:

Узмимо на S коју било, обичну тачку[1] a. Затим, пошавши од те тачке a, ширимо на S, постепено, једну отворену област Δ, која несме нигде покривати раван више од једанпут. Будући да је површина S неограничена, то по дефиницији, област Δ можемо очигледно, ширити све дотле, док не преостане ниједна област у бројној равни, коју, област Δ не би покрила. Тако би добили први лист.

Да би пак осигурали да међа тога листа буде континуирана, морамо ово ширење области Δ изводити по одређеном плану. Тај се план састоји у томе да у бројној равни нацртамо следећу фигуру (сл. 2):

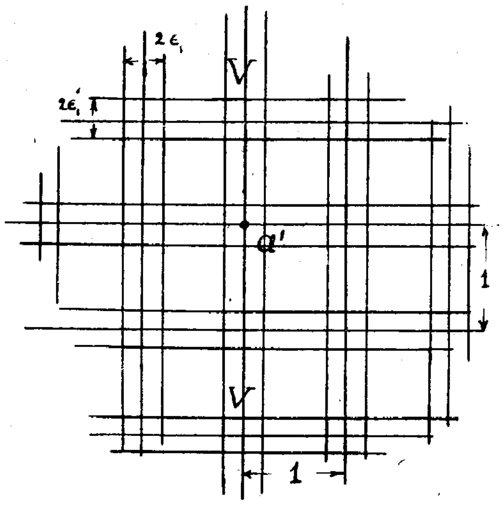
Повуцимо кроз тачку a' бројне равни, у коју пада пројекција тачке a[2], једну хоризонталну и једну вертикалну праву, и преко целе равни, еквидистантне паралеле ка овим правима, у међусобним размацима $= 1$. Тако добијамо једну *квадратну мрежу правих* коју назовимо P_1 и чије стране имају дужину 1.

Затим повуцимо са обеју страна сваке праве мреже P_1,

---

[1] Обична тачка је она, која није тачка гранања.

[2] Пројекције ћемо обележавати увек додавањем запете.



Сл. 2.

по једну паралелну на удаљености $\epsilon_1 < \frac{1}{2}$. Сваки пар оваквих паралела омеђује по једну отворену област, коју ћемо назвати *пругом*. Ширина сваке пруге је $2\epsilon_1$. Све пруге заједно творе опет отворену обпаст коју назовимо, *квадратном мрежом пруга* и обележимо са Q_1.

Мрежу Q_1 смо увели зато, да област $\triangle$ широ тако, да се њена пројекција $\triangle'$ креће у унутрашњости мреже Q_1, све дотле, док не обиђемо целу мрежу Q_1.

Опишимо сада то ширење области $\triangle$ трагом мреже Q_1.

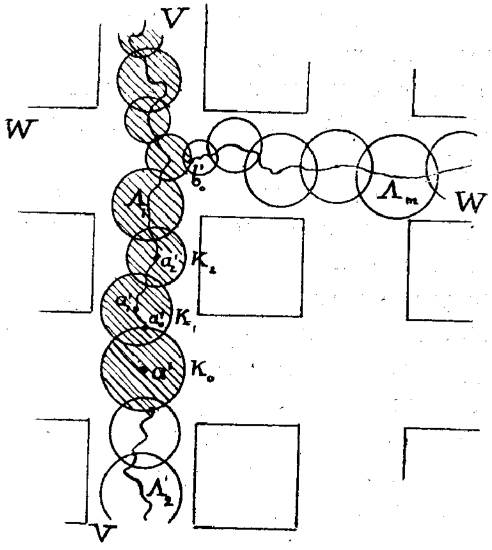
Уочимо прво вертикалну пругу V која садржи тачку a', и ширимо $\triangle'$ прво у тој прузи.

Пошто је тачка a обична тачка, то око ње можемо описати на S круг K_0 полупречника мањег од ϵ_1 и који покрива раван само једанпут[1]. То је почетни облик области $\triangle$. Приметимо да се K'_0 налази у V (сл. 3·)

Повуцимо затим на S, из једне тачке a_0 обода круга K_0 у правцу растућих коефицијената од $\sqrt{-1}$, једну континуирану линију Λ_1 без вишеструких тачака, која не додирује тачке грањања, и чија се пројекција Λ'_1 налази у V, нема такође вишеструких тачака, те спаја a'_0 са тачком у бесконачности. Пошто је S неограничена површина, то можемо по самој дефиницији неограничених површина увек повући линију Λ_1. Можемо очигледно, још претпоставити, да Λ_1 нигде изван a_0 не додирује K_0.

Сада ширимо дуж линије Λ_1 област $\triangle$ (сл. 3.)

Изаберимо зато на Λ_1 једну тачку a_1, довољно блиску тачки a_0, а да би око ње могли описати на S круг K_1 који има заједничку област са K_0, такав да се K'_1 налази у V, и да садржи цео лук $\overset{\frown}{a_0 a_1}$. Спојивши K_0 и K_1 добијемо отворену област $\triangle_1$, нов облик области $\triangle$.



Сл. 3.

Затим изаберимо на Λ_1 једну даљу тачку a_2, изван $\triangle_1$, довољно блиску тачки a_1 а да би око ње могли описати на S круг K_2 који има заједничку област са K_1 и само са K_1, а исто тако и у пројекцији; спојивши $\triangle_1$ и K_2 добијамо отворену боласт $\triangle_2$; нека се још и цео лук $\overset{\frown}{a_1 a_2}$ налази у $\triangle_2$. Област $\triangle_2$ је даљи облик области $\triangle$.

Наставимо у истом смислу овакво додавање кругова K_n $(n = 3, 4, \cdots)$, узимајући тачке a_n $(n = 3, 4, \cdots)$ тако, да се оне не гомилају нигде у коначности (а то је очигледно могуће). Низ области $\triangle_n$ $(n = 3, 4, \cdots)$ које ћемо добити, тежи отвореној области коју назовимо $\triangle_{(1)}$. Пројекција $\triangle'_{(1)}$ се протеже у унутрашњости бразде V, од a' у бесконачност, у правцу растућих коефицијената од $\sqrt{-1}$.

Затим изведимо исто то у правцу опадајућих коефицијената од $\sqrt{-1}$:

Повуцимо на S, из једне тачке $\overline{a_0}$ обода круга K_0, на међи области $\triangle_{(1)}$, у правцу опадајућих коефицијената од $\sqrt{-1}$, једну континуирану линију Λ_2 без вишеструких тачака, која не додирује тачке грањања и чија се пројекција Λ'_2 налази у V, нема такође вишеструких тачака, те спаја $\overline{a'_0}$ са тачком у бесконачности. Затим, наставимо да ширимо $\triangle$, као пре дуж Λ_1, тако сада дуж Λ_2. Први круг који додајемо области $\triangle_{(1)}$ биће описан око једне довољно блиске тачке линије Λ_2, и имаће заједничку област са K_0, једину која је заједничка са $\triangle_{(1)}$, на површини као и у пројекцији. Тиме ће област $\triangle_{(1)}$ нарасти до једне области $\triangle_{(2)}$, чија се пројекција $\triangle'_{(2)}$ протеже у прузи V с једног бесконачног краја на други. Област $\triangle_{(2)}$ је омеђена са две линије које се састоје из самих кружних лукова, *које су дакле континуиране.*

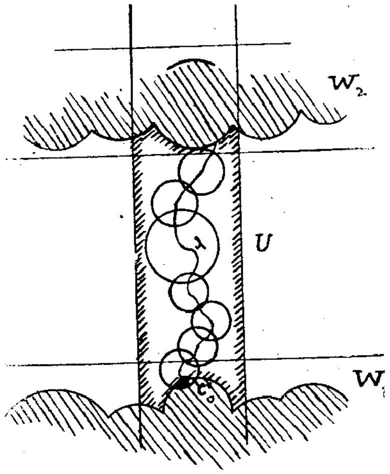
---

[1] Круг је код нас отворена област и покрива раван само једанпут (дакле по себи се разуме да не садржи тачака грањања).

После тога наставимо исто тако, ширење области $\triangle$, дуж хоризонталних пруга мреже Q_1. Можемо на пр. прво обићи све десне половине хоризонталних пруга, а затим све леве половине, Разјаснимо то на десној половини хоризонталне пруге W:

Изаберимо у W, на десној међи области $\triangle_{(2)}$, једну тачку b_0, која припада само једном кругу, K_m, од кругова из којих се састоји $\triangle_{(2)}$, и из b_0 као почетне тачке опишимо на S континуирану линију Λ_m, у свему сличну са Λ_1 и Λ_2. Затим, наставимо дуж Λ_m ширење области $\triangle$, исто као пре. Први круг који додајемо области $\triangle_{(2)}$, узећемо опет, међу осталим тако, да ни на S ни у пројекцији нема заједничких области са $\triangle_{(2)}$, осим једне једине, заједничке само са K_m.

Пошто обиђемо све хоризонталне пруге, добијамо за $\triangle$ извесну отворену област коју назовимо $\triangle_{(3)}$.



Сл. 4.

Сад је ред на вертикалне пруге.

Посматрајмо две суседне хоризонталне пруге. Обележимо доњњу са W_1, горњу са W_2 (сл. 4). Обележимо затим са U комад једне вертикалне пруге, који се налази између W_1 и W_2 а омеђен је са горње и са доње стране горњом одн. доњом међом гранâ области $\triangle_{(3)}$ што се налазе у W_1 одн. W_2.

У U проширимо област $\triangle'$ на следећи начин:

Узмимо једну тачку c_0, која припада једном и само једном кружном луку на горњој међи оне гране области $\triangle_{(3)}$ што се налази у W_1. Из c_0 као почетне тачке опишимо на S континуирану линију λ, у свему слична са Λ_1, у правцу растућих коефицијената од $\sqrt{-1}$, све док *у пројекцији* не сретне ону грану области $\triangle_{(3)}$ што се налази у W_2. Затим широмо, почевши из c_0, дуж λ област $\triangle_{(3)}$, на горњи начин. После коначног броја кругова које тако додајемо области $\triangle_{(3)}$, доспећемо, бар у пројекцији, до горње гране њене. Ту ћемо, ради сигурности, последњи круг изабрати тако, да у пројекцији *само додирује* грану у W_2. Јер, као што је могуће да овим ширењем области $\triangle$, доспемо из гране области $\triangle_{(3)}$ која је у W_1 у грану која је у W_2, тако исто је могуће да доспемо на један други лист површине S.

Обиђимо на тај начин све области U, свију вертикалних пруга. Означимо отворену област до које тако долазимо, са $\triangle_{[1]}$.

Набројмо главне особине области $\triangle_{[1]}$, које непосредно произлазе из горње конструкције:

1^0 Област $\triangle_{[1]}$ не покрива раван нигде више од једанпут.

2^0 Кругови из којих је постала област $\triangle_{[1]}$, гомилају се само у бесконачности.

3^0 Међа једноставно повезане отворене области $\triangle_{[1]}$ је континуирана.

4^0 У свакој прузи мреже Q_1 можемо повући континуирану линију, са једног краја у бесконачности на други, која пролази само тачкама области $\triangle'_{[1]}$ и њене међе.

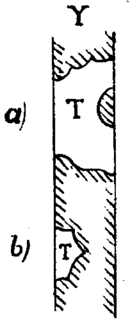
5^0 Свака комплементарна област области $\triangle'_{[1]}$ стаје у један квадрат чије стране имају дужину $1+2\epsilon_1$. Другим речима пречници комплементарних области мањи су од $(1+2\epsilon_1)\sqrt{2}$. Пошто је $\epsilon_1 < \frac{1}{2}$, то су и мањи од $2\sqrt{2}$.

Пошто смо добили $\triangle_{[1]}$, треба утврдити даље путеве по којим треба наставити ширење области $\triangle$. Сврха нам је, као што смо рекли, да међа нашег листа буде континуирана. *Зато је смисао даљих путева тај, да комплементарним областима области* $\triangle'_{[1]}$ *пречници теже нули, т. ј. да се при даљем ширењу све комплементарне области скупљају на тачке.*

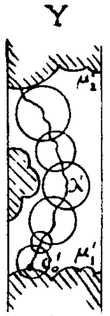
У ту сврху ћемо уводити све ситније мреже пруга и по њима наставити ширење области $\triangle$.

Дакле, прво повуцимо у равни паралеле свима правима мреже P_1, на удаљености $\frac{1}{2}$ од тих правих. Тако добијамо нову квадратну мрежу линија, P_2, чије стране имају дужину $\frac{1}{2}$. Повуцимо са обеју страна сваке праве у мрежи P_2, по једну паралелну на удаљености $\epsilon_2 < \frac{1}{4}$. По две одговарајуће паралеле омеђују једну пругу ширине $2\epsilon_2$. Све те пруге састављају нову квадратну мрежу пруга Q_2.

Посматрајмо једну пругу Y мреже Q_2, било хоризонталну, било вертикалну. Отстранимо ли из Y све делове заједничке са $\triangle_{[1]}$, то преостаје у општем случају бескрајно много отворених области. Означимо једну такву област са T. Разликујемо две врсте области T: a) оне, које пругу Y растављају на два бескрајна дела и b) оне, које не растављају Y. (сл. 5).



Сл. 5.



Сл. 6.

Посматрајмо једну, ма коју област T пруге Y, врсте a) (сл. 6). Она је омеђена између осталог и са две континуиране линије μ_1' и μ_2', које спајају обе паралеле пруге Y. (μ_1' и μ_2' су пројекције извесних лукова μ_1' и μ_2' меће од $\triangle_{[1]}$.)

Сада проширимо област $\triangle_{[1]}$ у тој области T, исто онако, као што смо то описали за област U, пошавши из тачке c_0, рецимо, лука μ_1, док не додирнемо, у пројекцији, лук μ_2.

Поновимо затим исто то у једној другој области T исте пруге Y. Обиђимо тако све области T пруге Y. Као резултат имамо за $\triangle$, једну област $\triangle_{[1],1}$ која има ту особину, да осим у пругама мреже Q_1, и у прузи Y мреже Q_2 можемо описати континуирану линију са једног краја пруге на други, а која пролази само кроз тачке области $\triangle_{[1],1}$ и њене међе.

Затим пређимо на пруге пруге мреже Q_2, и поновимо и тамо исто ово. Обишавши све пруге мреже Q_2, добијамо извесну област $\triangle_{[2]}$.

Из конструкције области $\triangle_{[2]}$ произлази непосредно, да има исте особине 1^0, до 5^0 што $\triangle_{[1]}$, само, штавише, и у односу на гушћу мрежу Q_2. *Дакле, пречници комплементарних области од* $\triangle_{[2]}$ *мањи су од* $\left(\frac{1}{2}+2\epsilon_2\right)\sqrt{2}<\sqrt{2}$.

Овакво смањивање комплементарних области наставимо у овом смислу и даље. Прво морамо поставити још ситнију мрежу. То ћемо опет тако, да преполовимо стране мреже P_2. Затим ћемо у добивеној мрежи Q_3 наставити ширење области $\triangle_{[2]}$, и т. д...

Тако добијамо бескрајан низ отворених области: $\triangle_{[1]}, \triangle_{[2]}, \triangle_{[3]}, \ldots, \triangle_{[n]}, \ldots$ које имају следеће особине:

1^0 Нигде не покривају раван више од једанпут.

2^0 Кругови из којих се оне састоје гомилају се само у бесконачности.

3^0 Једноставно су повезане и њихове међе су континуиране.

4^0 У свакој прузи мреже Q_n (чије странице имају дужину $\frac{1}{2^{n-1}}$), можемо повући континуирану линију са једног краја пруге на други, која пролази само кроз тачке области $\triangle_{[n]}'$ и њене међе.

5^0 Свака комплементарна област области $\triangle_{[n]}'$ стоје у један квадрат чије странице имају дужину $1+2\epsilon_n$. Другим речима, пречници комплементарних области мањи су од $(1+2\epsilon_n)\sqrt{2} < \frac{\sqrt{2}}{2^{n-2}}$.

Будући да свака област $\triangle_{[n]}$ садржи претходну, то тај низ области конвергира једној одређеној отвореној области коју означимо са G_1.

Област G_1 има следеће особине:

I. G_1 нигде не покрива раван више од једанпут.

II. Област G_1 је једноставно повезана.

III. Област G_1' нема комплементарних области.

IV. Међа од G_1 је континуирана.

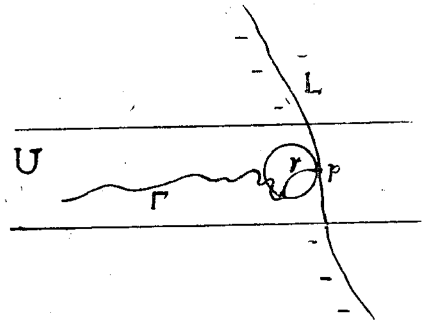
Прве две особине су очигледне. Друге две морамо доказати.

Када би област G_1' имала комплементарних области, тада би могли у равни наћи неки круг C полупречника ρ, у којем нема тачака од G_1'. Међутим, ако узмемо n довољно велико, да буде $\frac{1}{2^{n-1}}<\rho$, онда неминовно једна пруга мреже Q_n сече обим паралелама своје међе, круг C. Дакле, $\triangle_{[n]}$, па и G_1 пролази кроз C, противно претпоставци. Дакле, G_1' нема комплементарних области.

Докажимо сада четврту особину:

Претпоставимо да међе области G_1' (свеједно је посматрали ми G_1 или G_1') није континуирана. Тада уочимо од једног дисконтинуираног елемента међе, један континуиран прост лук L (сл. 7). Означимо знаком „—“ ону страну лука L на којој неможемо достићи, на континуираној стази, унутрашње тачке од L.

У низу мрежа Q_n $(n=1,\cdots)$ можемо увек уочити мрежу Q_m довољно ситну, да бар једна пруга од Q_m буде расечена попреко на више делова линијом L. Уочимо један комад од те пруге, што граничи са негативном страном лука L. Означимо



Сл. 7.

га са U. Затим уочимо област $\triangle_{[m]}$. Према особини 4^0 на стр. 73, можемо одредити у U континуирану линију Г која завршава у некој тачки p од L, и која пролази само кроз тачке од $\triangle_{[m]}$ и њене међе. Посматрајмо кругове из којих се састоји $\triangle_{[m]}$, а кроз које пролази Г. Према особини 2^0 на стр. 73, у коначном делу равни постоји само коначан број тих кругова. Уочимо последњи круг тога низа, т. ј. који додирује лук L, и уочимо један лук γ линије Г, који остајући у том кругу завршава у p. Дуж континуираног лука γ дакле можемо несметано достићи L са негативне стране, противно претпоставци. Дакле G_1 има континуирану међу.

Додајмо сада отвореној области G_1 њену међу. Тада добијамо на S једну затворену област, коју означимо са F_1. Ако затвореној области F_1 одузмемо њену међу, настаје једна отворена област која се, истина, у општем случају разликује од G_1, али ипак испуњава услове I, III и IV. Та отворена област задовољава дакле оба услова у дефиницији листа (ст. 65), дакле:

Област F_1 *је један лист.*

Будући да се не губи особина IV., *то је међа листа* F_1 *континуирана*. Особина II., разуме се, не мора да важи за F_1.

Тако смо завршили конструкцију првог листа континуиране међе, површине S.

5.

Пређимо сада на конструкцију нових листова површине S. Метода остаје иста као код првог листа, са извесним допунама које служе томе, да не дође до несклада између појединих листова.

Отпочнимо са конструкцијом другог листа. Ради једноставности пренећемо већину ознака које смо употребили код F_1, сада на овај други лист.

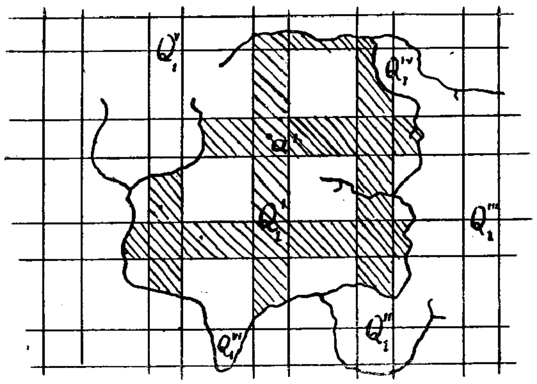
Нека је a ма која тачка на S изван листа F_1, чија пројекција a' на бројну раван није на међи области G'_1. Положимо кроз a' квадратну мрежу правих линија, коју опет назовимо P_1,

чије странице имају дужину $= 1$ и обложимо (као пре) P_1 квадратном мрежом пруга, Q_1. У току конструкције ћемо мрежу Q_1 уситњавати као пре, што ће нам дати низ мрежа, $Q_2, Q_3, \ldots$

Затим ћемо ширити на S, почев од a, опет једну област $\triangle$, исто као пре, *али са тим новим условом, да* $\triangle'$ *нигде не прекорачају међу области* G'_1. Другим речима, $\triangle'$ ћемо ширити у области G'_1, а дуж мрежа $Q_1, Q_2, \ldots$

Услед ове допуне, морамо поближе посматрати ширење нове области $\triangle$.

Ширење области $\triangle$ дуж Q_1 не може увек ићи истим путем као код F_1, јер је у општем случају област Q_1 раздељена међом области G'_1 на више отворених области. Нека је Q'_1 она од тих области, која садржи тачку a'; $Q''_1, Q'''_1, \ldots$, оне друге (сл. 8). Ширење дуж Q_1 може дакле само да се протеже на Q'_1. Можемо ићи овако:



Сл. 8.

Пруге мреже Q_1 раздељене су у општем случају међом области G'_1 на више комада. Посматрајмо оне комаде који растављају својим међама дотичне пруге на два бескрајна (као област a) у сл. 5). Назовимо их областима T. Оне лукове међе, једне области T, који пресецају пругу назовимо μ'_1 и μ'_2. То су лукови међе од G'_1.

Уочимо једну од двеју области T што садрже тачку a'. (Ако a' није ни на једној области T, тада морамо одмах посматрати ситније мреже $Q_2, \ldots$, док не дођемо до једне, где тога нема). У тој области T ширимо, почевши са кругом описаним око a', област $\triangle'$ (т. ј. $\triangle$ на S), — круг по круг, исто као код F_1. Ширење продужимо све док не додирнемо лукове μ'_1 и μ'_1 исте области T. За ово нам је, разуме се, довољан коначан број кругова. Само на путу у бесконачност треба бескрајно много кругова. Тако добивену област назовимо $\triangle_1$.

Додамо ли међи од G'_1, међу од $\triangle'_1$, онда тај скуп линија такође раздељује пруге мреже Q_1 на комаде. Посматрајмо оне комаде који растављају својим међама дотичне пруге на два бескрајна дела. Обележимо те комаде са T'. Уочимо једну од области T' која граничи на $\triangle_1'$, рецимо дуж неког лука λ_1'. У тој области ширимо даље област $\triangle'$, почев на једном месту лука λ_1', све док не додирнемо супротну међу, једну од оних што пресеца попреко дотичну пругу. Тако добијамо за $\triangle$, извесну област $\triangle_2$.

Затим уочимо аналогне области, T'', које добијамо када узмемо у обзир место међа од $\triangle_1'$, међе од $\triangle_2'$. У једној од области T'' која граничи на $\triangle_2'$ ширимо даље област $\triangle'$. и т. д...

Овим је довољно одређен смисао даљег ширења области $\triangle'$ у Q_1'. На крају добијамо за $\triangle$ извесну отворену област $\triangle_{[1]}$.

Забележимо следећу особину области $\triangle_{[1]}$:

У свакој области T која припада делу Q_1' мреже Q_1, можемо описати континуирану линију која спаја оба краја, μ_1' и μ_2' области T, а која се састоји само из тачака области $\triangle_{[1]}$ и њене међе. У случају да се T протеже у оба смисла у бескрај, имали би дакле, особине 4^0 на стр. 71, тамошње области $\triangle_{[1]}$.

Сада уочимо место Q_1 идућу мрежу, Q_2. Уочимо области T, T', ..., које се односе на Q_2, па наставимо на описани начин ширење области $\triangle$. Тако долазимо до нове области $\triangle_{[2]}$.

Затим пређимо на идуће мреже, Q_3, Q_4, ...

Тако добијамо бескрајан низ отворених области: $\triangle_{[1]}$, $\triangle_{[2]}$, $\triangle_{[3]}$, ..., $\triangle_{[n]}$, ..., које имају следеће особине:

1^0 Нигде не покривају раван више од једанпут.

2^0 Кругови из којих се састоје гомилају се само у бесконачности.

3^0 Једноставно су повезане и њихове међе су континуиране.

4^0 У свакој области T мреже Q_n, која припада области Q_n' можемо повући континуирану линију која спаја једну тачку лука μ_1' са једном тачком лука μ_2', а која пролази само тачкама области $\triangle_{[n]}'$ и њене међе.

Будући да свака област $\triangle_{[n]}$ садржи претходну, то тај низ области конвергира једној одређеној отвореној области, коју означимо са G_2.

Област G_2 има следеће особине:

I. G_2 нигде не покрива рава више од једанпут.

II. Област G_2 је једноставно повезана.

III. Међа од G_2' садржи међу од G_1'.

IV. Област G_2' нема комплементарних области.

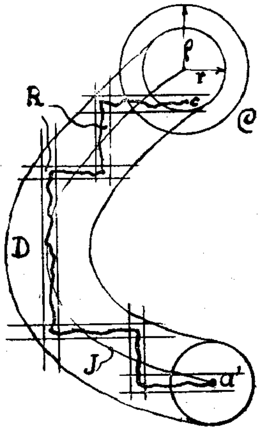
V. Међа од G_2 је континуирана..

Прве три особине су очигледне. Последње две морамо доказати.

Докажимо прво четврту особину:

Када би област G_2' имала комплементарних области, тада би могли у равни наћи неки круг C полупречника ρ, у којем нема тачака од G_2' (сл. 9).

Спојмо у равни тачку a' са средиштем круга C једном континуираном линијом J, без вишеструких тачака и која не додирује међу области G_1'. Означимо са D отворену област што описује један круг, када му средиште опише линију J, а чији је полупречник $= r$, довољно мален, да D не додирује међу области G_1'.



Сл. 9.

Ако узмемо цели број n, довољно велик да буде $\frac{1}{2^{n-1}}$ мање од ρ и од r, онда велим, да постоји у области D једна континуирана линија која полази из a' и свршава у некој тачки c од C, а састоји се из самих тачака области $\triangle_{[n]}$ и њене међе.

Заиста, просто геометријско посматрање показује да код таквог n можемо из мреже Q_n издвојити један низ сегмената разних пруга, које творе јединствену област R, садржану у D, а која садржи a' и c. Међутим из особине 4^0 на стр. 76 следује тада лако, да у области R можемо одредити континуирану линију која се састоји из самих тачака области $\triangle_{[n]}$ и њене међе. Дакле и тачка c у C припада било области $\triangle_{[n]}$, било њеној међи, супротно претпоставци. Дакле област G_2' нема комплементарних области.

Докажимо сада пету особину области G_2.

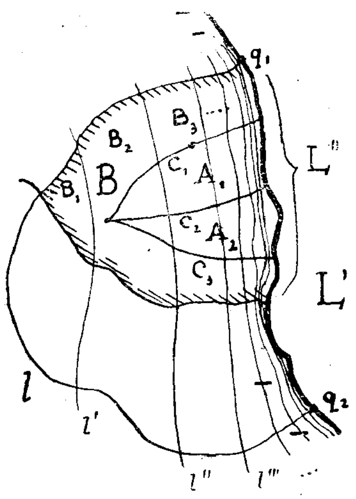
Пратпоставимо да међа области G_2' (свеједно је посматрали ми G_2 или G_2', јер ако је G_2 континуиране међе, онда је и G_2' и обратно) није континуирана. Тада уочимо један прост лук L једног дисконтинуираног елемента међе области G_2' и означимо са „—" ону страну лука L на којој неможемо достићи на континуираним стазама унутрашње тачке од L. Самом доказу мора да претходи једно тачније посматрање дисконтинуираног елемента L.

Према особини III, међа области G_2' се састоји из међе области G_1' и још неких других линија, чији скуп означимо са H. Пошто је међа области G_1' континуирана, то дисконтинуитети долазе од H. Дакле луку L конвергира са негативне стране, бескрајно много лукова скупа H. Дужине тих лукова не могу све тежити нули, јер тада неби са негативне стране било дисконтинуираног елемента. Дакле можемо очигледно међу тим луковима одредити један бескрајан низ, рецимо лукове $l', l'', l''', \ldots, l^{(\nu)}, \ldots$, који сви теже целом једном луку L', лука L (сл. 10).

Узмимо на L' две унутрашње тачке q_1 и q_2, и спојмо их са једном континуираном линијом l, тако да лук $\widehat{q_1 q_2}$ и l ограде једну област која садржи негативну страну лука $\widehat{q_1 q_2}$. У тој области има у општем случају разних линија са међом G_1'. Те линије заједно са $\widehat{q_1 q_2}$ и l, омеђују у тој области једну или више отворених области. Означимо са B једну такву област, чија међа садржи извесан лук L'' лука L'.

Низ лукова $l^{(\nu)}$ раздељује област B на бескрајно много отворених области од којих ни једна не садржи као међу лук L''. Означимо са B_ν област између $l^{(\nu-1)}$ и $l^{(\nu)}$.

Означимо са M_ν скуп тачака на међи области G_1', које се налазе у B_ν.



Сл. 10.

Забележимо да су од тачака које припадају међи области G_1', тачке скупова M_ν, једине у B и на њеној међи, које можда можемо достићи на континуираним путевима у B, који не додирују нигде више међу од G_2'. Остале тачке у B или на међи од B, што припадају међи области G_1' припадају *истом* дисконтинуираном елементу као и лук L''. *Скуп тих тачака укључивши L'', означимо са Λ.*

Докажимо да на L'' има лукова у чијој близини скупови M_ν немају својих тачака.

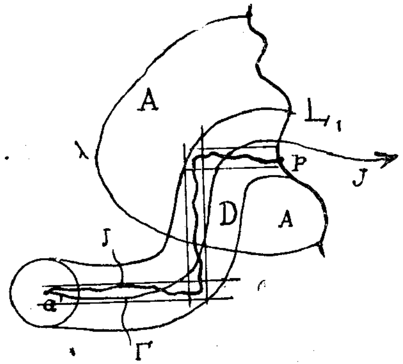
Уочимо област B. Пошто је међа од B континуирана, можемо из неке тачке области B повући три континуиране линије, C_1, C_2, C_3, које се не пресецају нити додирују међу од B, осим што завршују у три разне тачке лука L''. Те три линије омеђују дакле са L'' две отворене области, A_1 и A_2.

Претпоставимо да бескрајно много скупова M_ν има својих тачака у A_1 и A_2. Те тачке формирају извесне линије које не додирују ни C_1 ни C_2 ни C_3. Ако су дакле оне од тих линија што су у A_1, у међусобној вези, дакле и у вези са L'', онда то исто не може да буде и у A_2. Јер онда све те линнје, оне у A_1 са једне стране и оне у A_2 са друге, омеђују са линијама $l^{(\nu)}$ бескрајно много области, што је немогуће, будући да линије $l^{(\nu)}$ и скупови M_ν припадају међи јединствене области G_1'. Дакле се линије скупова M_ν које су у A_2 групирају у бескрајно много одељених делова. Но, и то је немогуће, јер би тада област G_1' била бескрајне повезаности, — а она је једноставно повезана. Дакле је наша претпоставка погрешна: бар у једној од области A_1 и A_2 — рецимо у A_1, само коначан број скупова M_ν има својих тачака. *Део лука L'' што граничи на A_1, нема дакле, у својој близини тачака од скупова M_ν.*

Обележимо са L_1 тај део лука L'' (сл. 11). Ради ове чињенице можемо крајеве лука L_1 спојити континуираном линијом λ која пролази кроз A_1, те затвара са L_1 једну отворену област A, *у којој скупови M_ν, у опште немају својих тачака: од међе области G_1', у A се налазе само тачке скупа Λ, које неможемо достићи на континуираним путевима у G_1', а са негативне стране линије L.*

Пређимо сада на сам доказ особине V.

Повуцимо у равни једну континуирану линију J, без вишеструких тачака, која полази из тачке a', улази у област A, и пресеца лук L_1 негде између његових крајева, а да до пресека не додирује тачке међе области G_1'.



Сл. 11.

Уочимо затим један круг полупречника r, довољно маленог, а да, када његово средиште описује линију J, тај круг нигде не додирује међу области G'_1, пре но што дође до L_1, и да по уласку у A не додирује више линију λ.

Означимо са D, област коју тако описује тај круг и то, почевши од a', па до тачака скупа Λ (и L_1) које на другом крају затварају област D.

Ако узмемо цели број n довољно велик, да буде $\frac{1}{2^{n-1}} < r$, онда следује на сличаи начин као у доказу особини IV, да постоји у D једна континуирана линија Γ, која полази из a' и свршава у некој тачки p скупа Λ, а састоји се из самих тачака области $\triangle_{[n]}$ и њене међе.

Међутим кругови из којих се састоји област $\triangle_{[n]}$ не гомилају се у коначности (особина 2^0 на стр. 76). Дакле постоји један последњи, што додирује тачку p. У том кругу обележимо са γ лук линије Γ, који остајући у њему, завршава у p (као у сл. 7). Дуж континуираног лука γ, можемо дакле, у отвореној области G'_2, несметано достићи унутрашњу тачку p скупа Λ, са негативне стране лука L_1, противно дефиницији скупа Λ.

Дакле, област G_2 има континуирану међу.

Као што је из области G_1 следовао први лист F_1, исто тако сада из области G_2 следује *други лист F_2, чија је међа такође континуирана.*

6.

У истом смислу наставља се конструкција даљих листова, $F_3, F_4, \ldots, F_k, \ldots$ Начин конструкције се ниуколико не разликује од начина конструкције листа F_2.

Прво ћемо изабрати на површини S а изван листова F_1 и F_2, једну тачку a, чија се пројекција у бројној равни не налази на међи области G'_2, па ћемо почевши одатле, ширити као пре, област $\triangle$, са условом да $\triangle'$ *нигде не прекорачи међу области* G'_2. Тако ћемо добити на S нову отворену област G_3, а из ње трећи лист са континуираном међом, F_3.

Затим ћемо изабрати на S а изван листова F_1, F_2 и F_3, опет једну тачку a чија се пројекција у бројној равни не налази на међи области G'_3, па ћемо почевши из ње, опет ширити једну област $\triangle$, са условом да $\triangle'$ нигде не прекорачи међу области G'_3. Тако ћемо добити област G_4 и четврти лист са континуираном међом, F_4, и т. д. . .

Да прецизирамо: Опис конструкције листа F_k $(k = 3, 4, \cdots)$

добија се из описа конструкције листа F_1, ако место G_1, G'_1, F_1, G_2, G'_2, F_2, свуда пишемо G_{k-1}, G'_{k-1}, F_{k-1}, G_k, G'_k, F_k.

Између осталог важе и особине I до V на стр. 76, 77, дакле: G_k нигде не покрива раван више од једанпут, једноставно је повезана, међа од G'_k садржи међу од G'_{k-1} (ова садржи међу од G'_{k-2} и т. д. . .), G'_k нема комплементарних области, међа од G_k је континуирана. Према томе је и међа листа F_k континуирана. Међутим, F_k је у општем случају вишеструко повезана област.

Доклегод буде на S било тачака које се не налазе ни на једном конструираном листу, можемо конструирати један нов лист. Дакле се конструкција може наставити неограничено, док цела површина S не буде раздељена међу саме листове F_k:

Низ листова:

$$F_1, F_2, \ldots, F_k, \ldots$$

чије су међе континуиране, претставља један систем листова, који без остатка раздељује неограничену Riemann-ову површину S.

Тиме је наш став на стр. 66, доказан.

SUR LA DIVISION DES SURFACES DE RIEMANN EN FEUILLETS

PAR MILOCH RADOÏTCHITCH

(Résumé)

L'objet de ce mémoir est la division en feuillets, des surfaces de Riemann générales.

Les surfaces de Riemann peuvent être classées en deux catégories: *les surfaces limitées* et *les surfaces illimitéés*. Les surfaces illimitées sont celles, sur les-quelles on peut se mouvoir librement, en suivant une courbe arbitraire du plan numérique, puisqu'il suffit d'éviter chaque point de ramification, dans son voisinage immédiat, par un petit détour. Les surfaces n'ayant pas cette propriété, sont les surfaces limitées. La catégorie des surfaces illimitées est très étendue (elle contient par ex., comme cas tout-à-fais spécial, les surfaces des fonctions algébriques et de leurs intégrales).

Ceci posé, l'auteur démontre le théorème suivant:

Toute surface de Riemann illimitée, peut être entièrement divisée en feuillets aux frontières continues.

Le mot *feuillet*, y est pris au sens usuel et désigne chaque domaine fermé d'une surface de Riemann, qui recouvre tout le plan, mais rien qu'une seule fois.

Diviser une surface de Riemann en feuillets, signifie exactement, trouver une suite de feuillets de cette surface, qui n'ont pas de domaines communs et qui épuisent toutes les parties de la surface.

Qant à la démonstration de ce théorème, elle a le sens suivant

a) Pour obtenir la continuité des feuillets, nous envisageons certains domaines △ sur la surface considérée, que nous faisons augmenter, en suivant consécutivement les traces d'une suite

de *fillets quadratiques de bandes* (fig. 2), de plus en plus fins, jusqu'à ce que △ couvre tout le plan.

b) Pour trouver une suite de feuillets qui effectuent une divisions, il faut en construisant chaque feuillet, augmenter le domaine △ correspondant de telle manière, qu'en projetant le tout dans le plan numérique, la projection de △ ne traversat aucune frontière des feuillets précédements construits.

Ce qui a mené l'auteur de ce mémoir à s'occuper de ce problème, ce fut l'idée d'une démonstration géométrique du théorème connu de M. Picard sur les valeurs exceptionnelles qu'une fonction analytique présente au voisinage d'une point singulier essentiel. Il paraît que le théorème de M. Picard ne pourra-t-être démontré géométriquement, sans se servir de ce théorème.

О ЈЕДНОЈ ВРСТИ ДЕОБЕ RIEMANN-ОВИХ ПОВРШИНА НА ЛИСТОВЕ.

Од МИЛОША РАДОЈЧИЋА

(Примљено на скупу Академије природних наука, 8-XII-1930).

I.

У раду, «О раздеоби Riemann-ових површина на листове» [1]) бавили смо се питањем раздеобе на листове општих Riemann-ових површина.

Споменимо неке основне појмове:

Riemann-ова површина има карактер отворене области која, поред обичних тачака, може садржати у својој унутрашњости и алгебарских тачака гранања.

Кратки назив *листа* дајемо свакој оној отвореној области неке Riemann-ове површине, која испуњава ова три услова:

1^0 она покрива бројну раван тако, да не остане ни једна област у равни непокривена;

2^0 не покрива бројну раван нигде више него један пут;

3^0 сваки лук њене међе припада међи других, спољашњих области исте површине [2]).

За Riemann-ову површину кажемо да је *неограничена*, ако сваку континуирану линију равни, можемо пратити на тој површини, удаљујући се у пројекцији од ње произвољно мало. У противном случају Riemann-ова површина је ограничена извесним непроходним сингуларним линијама.

---

[1]) CXXXIV. Глас Срп. кр. акад. Тај рад ћемо укратко означивати римским бројем I.

[2]) У раду I. дефинисао сам лист као затворену област, чиме се добила краћа дефиниција, али са неодређеном околношћу у оним тачкама међе, које, као трансцендентне сингуларне тачке, не припадају датој површини. Горња дефиниција је она, коју сам дао у белешци: *Sur les domaines fondamentaux des fonctions méromorphes*, Comptes rendus, 190, 1930, p. 356. Ова промена, очигледно, не утиче на доказе.

На основу ових појмова гласи општи став, који чини предмет рада I., овако:

Став I: *Свака неограничена Riemann-ова површина може се разделити на листове континуираних међа.*

Сада је наша намера да овај став допунимо тако, да добијемо следећи став:

Став II: *Свака неограничена Riemann-ова површина може се разделити на листове континуираних међа тако, да се у близини сваке тачке те површине налази само коначан број листова.*

Близина неке тачке је, разуме се, назив за довољно малену околину њену.

Став II. исказује да само у близини трансцендентних сингуларних тачака могу, на површини, допирати крајеви бескрајно многих листова.

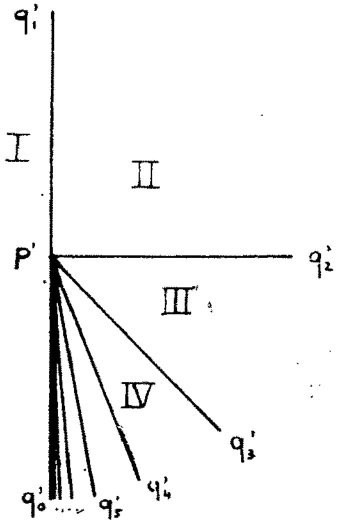
Став II. дакле, изражава једну општу чињеницу која налази потврде у разним специјалним теоријама аналитичких функција. Пошто су Reimann-ове површине функција, инверсних од: једнопериодичних, елиптичких и шта више, општих аутоморфних Poincaré-ових униформних функција, неограничене површине, то нам на пр., став II. унапред доказује могућност да се раван поменутих врста функција раздели на области *континуираних међа* — пруга или паралелограма периода, одн. Poincaré-ових области — *које се нагомилавају само у близини есенцијалних сингуларитета.* Та чињеница је јасна код униформних, једнопериодичних и двопериодичних функција, али код аутоморфних, за њу је потребно нарочито доказивање. Даља посматрања у томе правцу, којима се примењује став II., изнећемо у засебном раду.

Пре него што станемо доказивати став II, питајмо се још, да ли он није садржан већ у ставу I. Негативан одговор даће нам следећи пример:

Нека је S једна неограничена Riemann-ова површина, чије се једине тачке гранања, $q_0, q_1, q_2, \ldots$ пројицирају у бројној равни, у тачке $q'_0, q'_1, q'_2, \ldots$ (сл. 1).

Уочимо на S обичну тачку p, која се пројицира у p'. Пошавши из p на страни обележеној у слици са I, не прекорачујући сегмент праве $q'_0\, q'_1$, нека буду q_0 и q_1, једине тачке гранања на које наилазимо. Обележимо са F_1 лист који тако

описујемо. Са стране II сегмента $q'_0\, q'_1$, замислимо да из F_1 доспевамо на нови лист $F_{1,1}$, а одатле на $F_{1,2}$, па на $F_{1,3}$, и т. д., бескрајно, — све, листови, којима су q_0 и q_1 једине тачке гранања. Пошавши сад из F_1, преко сегмента pq_1, са стране I, а не прелазећи у пројекцији сегмент $p'q'_2$, нека буду q_1 и q_2 једине тачке гранања на које наилазимо. Обележимо са F_2 лист који тако описујемо. Са стране полигоналне линије $q_1\ p\ q_2$, обележене са I и III, замислимо да из F_2 доспевамо на листове $F_{2,1}, F_{2,2}, \ldots$ бескрајно, — којима су q_1 и q_2 једине тачке гранања. Пошавши из F_2, преко pq_2, са стране II, а не прелазећи сегмент pq_2, нека буду q_2 и q_3 једине тачке гранања на које наилазимо. Обележимо са F_3, лист који тако описујемо. И т. д... Тако добијамо површину S, и једну њену раздеобу на листове:
$F_1, F_{1,1}, F_{1,1}, \ldots$ са међама које се пројицирају у $q'_0\, q'_1$;
$F_2, F_{2,1}, F_{2,1}, \ldots$ са међама које се пројицирају у $q'_1\, p'\, q'_2$;
$F_3, F_{3,1}, F_{3,1}, \ldots$ са међама које се пројицирају у $q'_2\, p'\, q'_3$; и т. д....



Сл.1.

Дакле су међе свију листова континуиране. Међутим, у тачки p састају се листови: $F_1, F_2, F_3, \ldots$, дакле, бескрајно многи, противно ставу II.

Да би доказали став II, треба нам у неколико изменити доказ става I. Зато ћемо непосредно наставити на тај доказ, остајући код истих ознака, осим где друго будемо нагласили.

2.

Уочимо једну неограничену Riemann-ову површину и означимо је са S, саобразно ознакама у раду I. (стр. 67).

Нека је $o_1, o_2, \ldots, o_i, \ldots$ низ кругова површине S — т. ј. униформних, отворених области, омеђених са по једним кругом, — и претпоставимо: 1^0 да се ти кругови не нагомилавају на површини S, ни у једној (унутрашњој) тачки те површине;

2_0 да им се и ободи састоје из (унутрашњих) тачака површине S; и 3^0 да садрже целу S, осим, разуме се, алгебарских тачака гранања, јер се ове морају налазити на рубу извесног, коначног броја тих кругова. Постојање таквог низа је позната чињеница, садржана у самом појму Riemann-ове површине. Ми се њима служимо зато, да би S разделили на листове $F_1, F_2, \ldots, F_k, \ldots$ тако, да првих k листова покрива увек првих i кругова o_i, где i и k теже заједно у бесконачност. Јер, тада ће листови F_k, ако само одговарају ставу I, задовољавати и став II.

Почнимо конструкцију првог листа, F_1. Та се конструкција, као у раду I. састоји у томе, да на S широмо, постепено, једну отворену област Δ, која не сме нигде покривати раван више од један пут. Будући да је површина S неограничена, то по дефиницији, област Δ можемо, очигледно, ширити све дотле, док не преостане ни једна област у бројној равни коју област Δ не би покрила. Тако бисмо добили први лист.

Да бисмо пак осигурали да међа тог листа буде континуирана, морамо ово ширење области Δ изводити дуж оних квадратних мрежа пругâ, које смо дефинисали у раду I. (стр. 67, 68).

Међутим, место да пођемо од произвољне тачке a као у раду I, узмимо да област Δ прво буде идентична са облашћу o_1 [3]). Затим положимо мрежу пруга Q_1 тако, да o'_1 има заједничку област са Q_1, па широмо даље Δ, исто као у раду I: Уочимо једну, рецимо, вертикалну пругу Q_1, која има област (разуме се, само једну) заједничку са Δ'_1. Повуцимо затим из једне тачке a_1 обода круга Δ'_1, у правцу растућих коефицијената од $\sqrt{-1}$, једну континуирану линију K_1, која не додирује тачке гранања, и чија се пројекција K'_1 (рад I, сл. 3) налази у истој прузи, а нема вишеструких тачака, те спаја a'_0 са тачком у бескрају. Пошто је S неограничена површина, то можемо по самој дефиницији неограничених површина, увек повући линију K_1. Можемо још и претпоставити да K_1 нигде изван a_0 не додирује Δ'_1.

Сада ширимо дуж K_1 област Δ, круг по круг, као што је описано у раду I (стр. 68, 69).

Затим, уочимо линију, сличну линији K_1, у правцу опадајућих коефицијената од $\sqrt{-1}$, па ту изведимо слично ширење области Δ. После, пређимо на хоризонталне пруге, и т. д.

Из доказа става I, поступак је јасан, зато га нећемо овде у појединостима изнети. Цело ширење области Δ, од Δ_1 до $\Delta_{[1]}$ и затим до $\Delta_{[2]}, \Delta_{[3]}, \ldots$ неограничено, састоји се из елементарних етапа: У почетку, у Q_1, долази у појединим пругама ширење, неограничено у бесконачност, као дуж K'_1. Затим, у Q_1 па у $Q_2, Q_3, \ldots$ ради се увек о ширењу у областима означеним са T, врсте a), као што је описано на стр. 72, рада I.

Пошто тако обиђемо све мреже Q_n, Δ постаје отворена област G_1, која има следеће особине:

I. G_1 нигде не покрива раван више од једанпут.

II. G_1 је једноставно повезана област.

III. G'_1 нема комплементарних области.

IV. Међа од G_1 је континуирана.

Прве две особине су очигледне. Докази других двају налазе се у доказу става I. (рад I. стр. 73, 74). Ми те доказе већ и зато не износимо овде, јер је све што се односи на конструкцију листа F_1 садржано у општијем случају, конструкције листа F_2, коју смо до краја овде описали.

Додајмо области G_1 све оне тачке површине S које су на међи од G_1, па од новодобивене области одузмимо све тачке *њене* међе. То нам даје отворену област којој остају, очигледно, особине I, III и IV. Особине I и III одговарају условима 2^0 одн. 1^0 у поменутој дефиницији листа. Али и услов 3^0 је сада испуњен, јер, као што се одмах види, то постизава последња операција, коју смо извели са G. Дакле, добили смо тражени први лист F_1, који је континуиране међе, а садржи круг o_1.

3.

Пређимо на конструкцију нових листова. Нека је o_{i_1} прва област у низу области o_i, која није сасвим садржала у F_1.

Обележимо са g_1 и g'_1 међе области G_1 и G'_1.

Линије међе g'_1 деле o'_{i_1} на области континуираних међа, од којих свака, бар дуж једног лука граничи са ободом круга o'_{i_1}. Јер у противном случају, међа g'_1 би делила раван на више одељених делова, што у ствари није. Дакле, у случају да ових области има бескрајно много, пошто је међа g'_1 континуирана, оне *конвергирају* појединим тачкама обода. Међутим ми ћемо

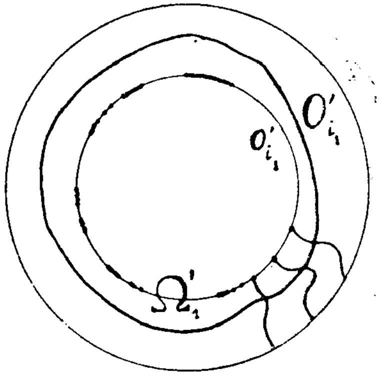
---

[3]) За o_1, као и за све остале области o_i, O_i, или Ω_i, које ћемо посматрати, претпостављамо да се налазе у коначном делу равни, да бисмо тиме упростили излагање. Линеарном трансформацијом то се увек може претходно а привремено учинити.

у том сиучају проширити круг o_{i_1} тако, да добијемо једну, такођер униформу, једноставно повезану, отворену област континуиране међе, коју ћемо означити са Ω_1, а чију ће пројекцију Ω'_1 међа g'_1 делити на *ограничен* број одељених области. Ово се лако постизава следећим путем:

Претпоставимо прво да на ободу круга o_{i_1} нема алгебарских тачака гранања. Уочимо један круг O_{i_1} концентричан кругу o_{i_1}, који садржи круг o_{i_1}, а такођер је униформна, отворена област повшине S.

g'_1 садржи у општем случају и једноставних лукова чији су крајеви, један на ободу круга o_{i_1} а други на ободу круга O'_{i_1}, дочим својим осталим тачкама не додирују те ободе. Ради континуираности међе g'_1, може постојати само ограничен број таквих лукова. Дакле можемо у прстену између o'_{i_1} и O'_{i_1} описати око o'_{i_1} такву континуирану линију, без вишеструких тачака, да она пресеца само у коначном броју тачака поменуте лукове; т. ј., да има само коначан број тачака заједничких са g'_1. Област затворену у тој линији можемо узети за област Ω'_1. Њој одговара на S_1 тражена област Ω_1 која садржи област o_{i_1}.



Сл. 2.

Ако напротив, на ободу круга o_{i_1} има алгебарских тачака гранања, а међа g'_1 распарчава o'_{i_1} на бескрајно много области, спојмо сваку тачку у равни, где се пројицира једна таква тачка гранања, а која не лежи на g'_1 једним простим луком, у O_{i_1}, са неком тачком међе g'_1, и то тако, да ти лукови другде не додирују међу g'_1, нити се додирују међусобно. Затим уочимо, као пре, концентричан круг O_{i_1} који не садржи нових тачака гранања, па одредимо, као и пре, област Ω_1.

Оним областима на које раздељује међа g'_1, и у последњем случају поменути прости лукови, област Ω'_1, одговара на S, раздеоба области Ω_1 на коначан број области континуираних међа. Означимо их са $\omega_{1,v}$ ($v = 1, 2, \ldots, j_1$). Неке од $\omega_{1,v}$ припадају листу F_1, остале су изван F_1.

Намера нам је да саградимо извесан број ($\leqslant j_1$) нових листова тако, да буде при томе заузета и цела област Ω_1.

4.

Почнимо конструкцију листа F_2. Њу ћемо једину у танчине описати јер, као што ће се видети за остале листове: F_3, $F_4, \ldots$, па и за F_1, вреди исти опис, само ако на одговарајући начин заменимо неке ознаке.

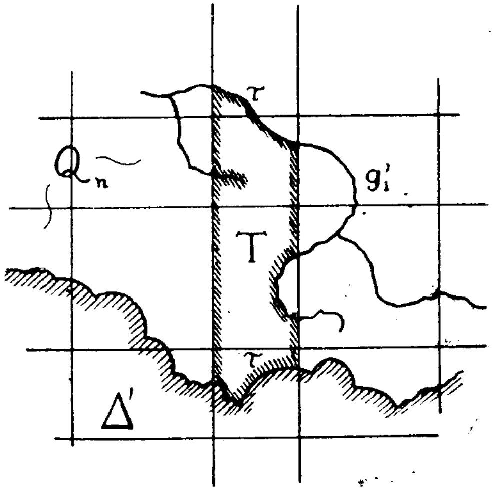
Прво нека област Δ буде идентична са првом у низу области $\omega_{1,v}$, која није садржана у F_1. Назовимо ју опет, Δ_1.

Сада ћемо примењивати мреже пругâ Q_n ($n = 1, 2, \ldots$). Приликом ширења области Δ у Q_n, од важности ће бити извесни комади те мреже, које можемо описати овако.

Поједине пруге мреже Q_n раздељене су међом g'_1 области G'_1 и међом области Δ' (такве, каква је та област у даном часу), на више комада. Посматрајмо оне комаде који су изван области Δ', а допиру до обих паралелних међа дотичне пруге. Међа тих области садржи, очигледно, један или два лука, који спајају обе те паралеле. Назовимо их луковима τ. (Ако постоји само један лук τ, то је бескрајна област; ако постоје два лука τ, то је коначна област). Назовимо областима T оне од ових области, које граниче бар једним луком τ, који међутим не припада међи g'_1, са облашћу Δ' (сл. 3) Тачније, писаћемо:

$$T(G_1, Q_n, \Delta).$$

Положимо, како било, прву пругу Q_1. У општем случају постоје области $T(G_1, Q_1, \Delta_1)$. Уочимо једну такву област. (Она се налази свакако, изван Ω'_1, јер иначе би лук τ којим граничи са Δ_1', припадао међи g_1'). Затим, проширимо Δ_1, круг по круг, у области T, као што је описивано у доказу става I (т. ј. тако да Δ'



Сл. 3.

ширимо у T) док не додирнемо други лук τ, у случају да га уопште има, или, ако га нема, до у бескрај. Обележимо новодобивену област, Δ_2.

Претпоставимо да постоје области $T(G_1, Q_1, \Delta_2)$. Уочимо једну такву област, па проширимо исто тако Δ_2, тако да Δ_2' ширимо у тој области T, док не добијемо слично, Δ_3. Наставимо овако непрекидно.

Засебну пажњу захтева само случај када код ширења области Δ', један од кругова, којим ширење извршујемо, пресече међу области Ω_1'. Можемо, разуме се, претпоставити увек да тај круг отсеца од Ω'_1 само један комад.

Два случаја су тада могућа: Или Δ улазн тиме у једну област $\omega_{1,\nu}$. Онда додајемо области Δ одмах целу ту област $\omega_{1,\nu}$. Или не. Онда Δ' улази у једну област $\omega'_{1,\nu}$, и ми ћемо у тој области даље ширити област Δ', прво у дотичној области T, а затим у новима, али, *да нигде више, за све време конструкције листа F_2, у ширењу области Δ', не пресечемо међу области $\omega'_{1,\nu}$.*

Тако смо описали ширење области Δ, до год буде било даљих области $T(G_1, Q_1, \Delta)$. Крајни облик области Δ код тога ширења, назовимо $\Delta_{[1]}$. (Ако нема ни једне области $T(G_1, Q, \Delta_1)$, онда је, разуме се, $\Delta_{[1]} \equiv \Delta_1$). $\Delta_{[1]}$ се у општем случају не распростире по целој мрежи Q_1, јер g_1' распарчава Q_1 на више области (види рад I. стр. 75), чиме је и $\Delta_{[1]}$ одмах ограничено на једну од њих.

Пређимо сада на идућу мрежу Q_2. У општем случају постоји област $T(G_1, Q_2, \Delta_{[1]})$. Уочимо једну такву област па проширимо $\Delta_{[1]}$ на описани начин, даље, т. ј. тако да $\Delta'_{[1]}$ ширимо у тој области T. Тако добијамо $\Delta_{[1],1}$ На исти начин, имајући у виду и описани случај када улазимо у Ω'_1, добијамо даље, $\Delta_{[1],2}$, $\Delta_{[1]3}$, и т. д.; а када смо исцрпели све области $7(G_1, Q_2, \Delta)$, нову област $\Delta_{[1]}$. После тога прелазимо на мрежу Q_3, те добијамо за Δ, област $\Delta_{[3]}$, па на мрежу Q_4, те добијамо $\Delta_{[4]}$, и т. д.

У целом, добијамо тако бескрајан низ отворених области:

$$\Delta_{[1]}, \Delta_{[2]}, \ldots, \Delta_{[n]}, \ldots,$$

које имају следеће главне особине, видљиве непосредно из горњег излагања:

1^0 $\Delta_{[n]}$ садржи $\Delta_{[n-1]}$.

2^0 $\Delta_{[n]}$ је из ван области F_1.

3^0 $\Delta_{[n]}$ нигде не покрива раван више од један пут.

4^0 $\Delta_{[n]}$ је једноставно повезана област.

5^0 $\Delta'_{[n]}$ не распарчава ни једну област $\omega'_{1,\nu}$,

6^0 Међа области $\Delta_{[n]}$ је континуирана.

Услед особине 1^0, области $\Delta_{[n]}$ конвергирају једној одређеној отвореној области G_2, која их све садржи, а има следеће особине:

I. G_2 је изван F_1.

II. G_2 нигде не покрива раван више од један пут.

III. G_2 је једноставно повезана област.

IV. Међа од G'_2 не распарчава ни једну област $\omega'_{1,\nu}$ ($\nu = 1, 2, \ldots, j_1$).

V. G_2 садржи неке међу областима $\omega_{1,\nu}$, док друге остају ван G_2.

V. Међа области G'_1 садржи међу области G'_1.

VII. G'_2 нема комплементарних области.

VIII. Међа од G_2 (или, што значи исто, од G'_2) је континуирана.

Првих шест особина следују непосредно из првих пет особина области $\Delta_{[n]}$. Последње две морамо доказати.

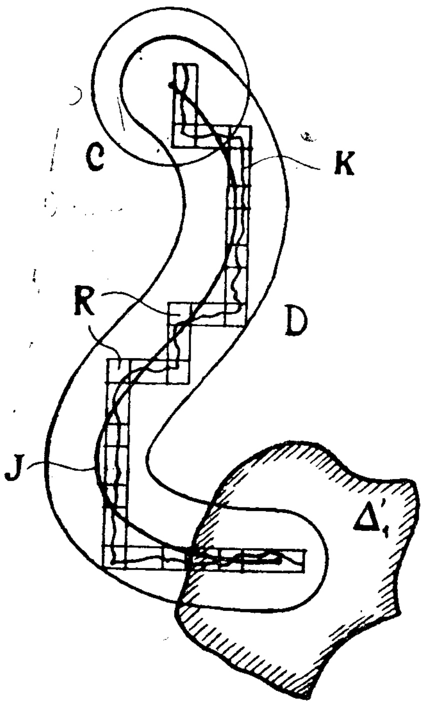
Претходно, изведимо још из области G_2, лист F_2. Додајмо области G_2 све тачке површине S, које су на међи од G_2, па од новодобивене области одузмимо све тачке *њене* међе. То нам даје опет отворену област (која се у општем случају разликује од G_2), којој остају очигледно особине I, II, IV, V, VII, VIII. Особине II и VII одговорају условима 2^0 одн. 1^0 у дефиницији листа. Али и услов 3^0 је сада испуњен, јер то постизава последња операција коју смо извели са G_2. Дакле, добили смо тражени други лист F_2. Он је континуиране међе, према особини VIII.

5.

Докажимо прво седму особину. Нека је C произвољан круг у равни, у коме g'_1 нема својих тачака (сл. 4). Доказ се састоји у томе да покажемо како у току ширења области Δ'_1

ова нужно улази и у C, јер одатле следује да G'_2 нема комплементарних области.

Уочимо на пр. Δ'_1. Ако Δ'_1 залази у C, став је доказан Дакле, нека то није случај. Онда, спојмо неку тачку области Δ'_1 са средиштем круга C, једном континуираном линијом J, без вишеструких тачака, која не додирује и не сече међу g'_1. Означимо са D отворену област, што описује један круг, када му средиште описује линију J, а чији је полупречник довољно мален, да g'_2 остане изван D.



Сл. 4.

Назовимо укратко, *елементом* мреже Q_n, сваки онај комад, које било, пруге мреже Q_n, што га отсецају међе двају суседних пруга окомитих на уочену, и то: доња (лева) међа ниже (леве) пруге и горња (десна) међа вишља (десне) пруге. Сваки елеменат мреже Q_n је дакле, правоугаоник, дужине страница: $2\varepsilon_n$ и $\frac{1}{2^{n-1}} + 2\varepsilon_n$ (види рад I, стр. 73). По четири елемента се састају у једном квадрату страна $2\varepsilon_n$. Називамо *ланцем* тих елемената, један њихов коначан низ, у коме сваки елеменат има на једној страни заједничку област (квадрат стране $2\varepsilon_n$) са претходним елементом, а на другој страни, са идућим елементом, и то само са та два елемента.

Пошто мреже Q_n постају све ситније када n расте, то за довољно велики $n = m$, можемо одредити у D један ланац елемената мрежа Q_n, такав, да се први елеменат цео налази у Δ'_1, а последњи, цео у C. Обележимо тај ланац са R.

Први елеменат ланца R налази се у Δ'_1. Пошто у другом елементу, g'_1 нема тачака, а пошто за $\Delta'_{[m]}$ нема више области T $(G_1, Q_m, \Delta_{[m]})$, то и у том елементу, обе његове краће стране можемо спојити континуираном линијом која ће се састојати само из тачака области $\Delta'_{[m]}$ и коначног броја тачака њене међе (очигледно, када те линије не би било, постојала би још увек једна област T $(G_1, Q_m, \Delta_{[m]})$. У трећем елементу ланца R понављају се опет исте околности; и ту постоји таква линија. Исто вреди за идуће елементе, дакле, и за последњи, који се нази у C. *Дакле,* $\Delta'_{[m]}$ *мора имати тачака и у* C.

Пошто за поменуте континуиране линије у два оближња елемента ланца, можемо, очигледно, претпоставити да се секу, то, елиминишући извесне непотребне крајеве тих линија, добијамо једну континуирану линију K, која полази из Δ'_1 и свршава у C, а састоји се само из тачака области $\Delta'_{[m]}$, и коначног броја тачака њене међе. Ово спомињемо ради посматрања у идућем броју.

6.

Докажимо још осму особину. Доказаћемо је за g'_2, чиме ће бити доказана и за g_2. Претпоставићемо, противно истини, да међа g'_2 није континуирана, него да има т. зв. дисконтинуираних елемената, па ћемо одатле извести противуречност.

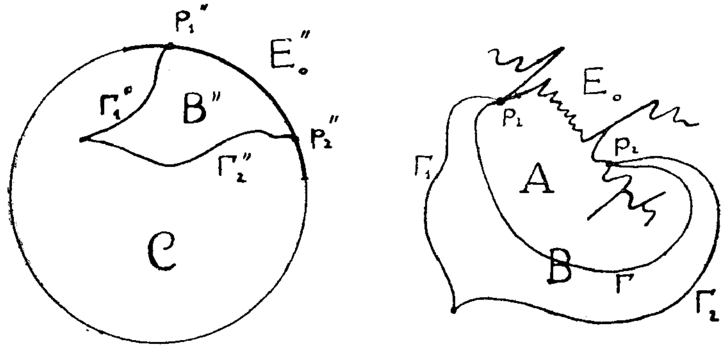
Споменимо претходно, неке основне појмова о међи једне опште, једноставно повезане области, као што је G'.

Пре свега, свака међа је линеаран континуум т. ј. континуум без површински унутрашњих тачака. У континуираном пресликавању унутрашњости једне једноставно повезане области на један круг (а то је могуће увек, кадгод се међа области не састоји из једне тачке), одговарају појединим тачкама обода круга т. зв. *елементи међе.* Један елеменат међе треба разликовати од скупа тачака равни, који га претставља, и који је у општем случају линеаран континуум. Јер, једна иста тачка може припадати разним елементима међа. За т. зв. *континуиране елементе* тај скуп тачака се своди на једну тачку, а за т. зв. *дисконтинуиране елементе* то је континуум од више тачака.

Тачке дисконтинуираних елемента не можемо достићи на континуираним путовима, ако се крећемо у унутрашњости дотичне области и, разуме се, са оне стране, са које те тачке припадају том дисконтинуираном елементу. Изузетак чини, највише, једна тачка, једина *приступачна тачка* што је може имати неки елеменат међе.

Означимо са e један дисконтинуиран елеменат међе g'_2, а са E скуп тачака тог елемента. У општем случају E припада једним делом међи g'_1. Ако постоји ма и једна тачка од E која не припада међи g'_1 онда, пошто је то унутрашња тачка области G'_1, постоји одмах цео делимичан континуум око те тачке, који припада континууму E, а нема заједничких тачака са g'_1. Означимо један овакав континуум са E_0. Претпоставићемо да E_0 не садржи ни приступачну тачку коју можда има елеменат e.

Прво ћемо са E_0 извести једно кратко посматрање. Континуум E_0 сам за себе претставља у равни, међу извесне једноставно повезане области. Пресликајмо ту област конформно на унутрашњост неког круга C (сл. 5). Тим пресликавањем се истодобно пресликава и област G'_2 на једну, једноставно повезану област садржану и C и која произилази из C, када се повуку у C неке међашње линије што одговарају међи g'_2, а које, разуме се, не раскомадују C. Означимо ову област са G''_2, њену међу, којој припада и C, са g''_2.



Сл. 5.

Повуцимо из једне тачке изван E_0, један прост лук Γ_1' који не додирује, нити сече E_0, све до другог краја, који се налази у некој тачки p_1 од E_0; али коју Γ_1 достиже са *неприступачне стране*, т. ј. у њеној близини пресеца бескрајно пута друге тачке од g'_2, — и то мора бити, ма како иначе варирали тај прости лук Γ_1. Повуцимо затим из исте тачке изван E_0, ош један прост лук Γ_2, у свему сличан са Γ_1, само што свршава у некој другој тачки p_2 од E_0, и што нигде не пресеца и не додирује Γ_1.

Луковима Γ_1 и Γ_2 одговарају у C два, такођер проста лука, Γ_1'' и Γ_2'', јер су, ради конформности пресликавања, континуирани и у тачкама обода круга C. Дакле на ободу Γ_1'' свршава у некој тачки p_1'', а Γ_2'', у некој другој тачки p_2''.

Код конформног пресликавања одговара сваком елементу међе, опет један елеменат међе, и обратно. Тако, приликом пресликавања области G_2 на G_2'', елементу e одговара нови елеменат међе g_2'', који назовимо e''. Континууму E одговара неки континуум E'' у C, а континууму E_0, неки континуум E_0'' на ободу круга C. E_0'' је дакле један лук, који се не своди на једну тачку, јер садржи p_1'' и p_2''.

Γ_1'' заједно са Γ_2'', деле C на две области. Једна од њих граничи са ободом круга C искључиво дуж лука E_0''. Назовимо ту област, B''. Њој одговара једна од области које омеђују Γ_1 и Γ_2 са E_0; назовимо ју B.

Није искључено да у B буде тачака са међе g'_1. Дакле ћемо у општем случају спојити, на пр. p_1 и p_2 неким простим луком Γ, који пролази само унутрашњим тачкама B, и који са E_0 омеђује у B, нову област, A_1, *тако да међа* g'_1 *остане изван* A.

Кретајући се у A_1, *ако не додирујемо нигде међу* g'_2, *не можемо на континуираним путовима доћи до тачака континуума* E_0.

———

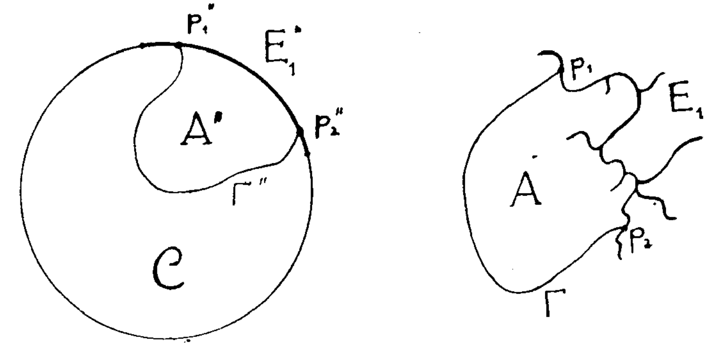
Изведимо сада, аналого посматрање, у случају да цели континуум E припада међи g'_1. Пошто E може садржати једну приступачну тачку од e, то уочимо један делимичан континуум E_1 континуума E, који не садржи ту тачку.

Пресликајмо конформно област G'_1 на унутрашњост неког круга C (сл. 6). Тим се истодобно пресликава и област G'_2 на једну једноставно повезану област, садржану у C, која не распарчава C, и коју означимо са G_2'', а њену међу којој припада и C, са g_2''. Пошто је међа g'_1 континуирана, то је пресликавање и на међама континуирано. Дакле, дисконтинуираном елементу e одговара опет дисконтинуиран елеменат међе g_2'', и то, скупу E_1, један лук E_1'' обода круга C.

Нека су p_1 и p_2 две разне тачке континуума E_1. Њима одговарају на луку E_1'' опет две разне тачке p_1'' и p_2''.

Спојмо p_1'' и p_2'' једним, ма каквим, простим луком Γ'', садржаним у C, који у другим тачкама не додирује обод од C.

Γ' дели C на две области. Једна од њих граничи са ободом од C, искључиво дуж лука E_1'' Означимо ту област са A''. Области A'' одговара у G'_1, једна једноставно повезана област, коју назовимо A. Међа од A је континуирана и састоји се из простог лука Γ, што одговара луку Γ'', а спаја p_1 са p_2, и из тачака континуума E_1.



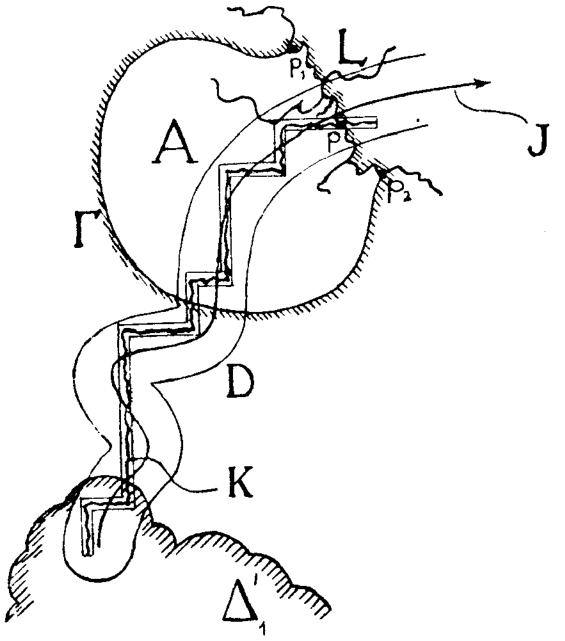
Сл. 6.

У области A нема тачака међе g'_1, а на њеноі међи то су тачке које припадају дисконтинуираном елементу е. Крећући се у A, ако нигде не додирујемо међу g'_2, не можемо на континуираним путовима доћи до тачака континуума E_1.

Пређимо сада на сам доказ осме особине. Уочимо област A, било из првог, било из другог од посматраних случајева. Међа од A се састоји из простог лука Γ и из једног дела континуума E. Назовимо сада тај део, L (сл. 7).

Посматрајмо, како је изведено ширење области Δ. Уочимо на пр. Δ'_1. У општем случају Δ'_1 нема тачака у A. Дакле, повуцимо из неке тачке области Δ'_1 једну континуирану линију J, без вишеструких тачака, која не додирује и не сече међу g'_1, тако да у некој тачки лука Γ, улази у A, затим, без да Γ више додирује, излази из A, додирнувши и пресецајући можда али први пут, међу g'_1 у тачкама од L (ако L припада ка E_1). Означимо са D отворену област што описује један круг, када му средиште описује линију J, а чији је полупречник довољно мален да g'_1 остане изван D — осим у тачкама од L, када J излази из A.

Пошто мреже Q_n постају све ситније када n расте, то за довољно велико $n = m$, можемо одредити у D један ланац елемената мреже Q_n тако, да се први елеменат цео налази у Δ'_1, а последњи, пошто је ланац прошао кроз A, да се налази негде изван A. Обележимо тај ланац са R. У области R добијамо сада исто као на крају одељка 5, једну континуирану линију K, која полази из Δ'_1 и у L пресеца можда, и то први пут, међу g'_1, а састоји се само из тачака области $\Delta'_{[m]}$ и из коначног броја тачака њене међе.



Сл. 7.

Нека је p прва тачка у којој K полазећи из Δ'_1 додирује L. Ако је p унутар области $\Delta'_{[m]}$, онда је p приступачна у A на континуираним путовима, и ако нигде не додирнемо g'_2. То се противи горњим закључцима. Дакле би p требало да буде на међи области $\Delta'_{[m]}$. Али онда испред p, линији K опет припада цео комад који је унутар $\Delta'_{[m]}$. Дакле је и тада p приступачно у A, на исти начин. Противуречје је дакле неизбежно. Наша је претпоставка према томе погрешна дакле: *међа g'_2 нема дисконтинуираних елемената, она је континуирана.*

7.

Пређимо сада на изграђивање даљих листова континуираних међа. Почнимо конструкцију листа F_3. Пошто у општем случају листови F_1 и F_2 још не садрже целу област Ω_1, то прво, нека област Δ буде идентична са првом у низу области $\omega_{1,v}$, која још није садржана у F_1 или F_2. Затим наставимо конструкцију са доказивањем, истим речима као код конструкције листа F_2, са једином разликом, да место: F_1, F_2, G_1, G_2, G_1' и G_2' пишемо: $F_1 + F_2$, F_3, G_2, G_3, G_2' и G_3'. Тиме добијамо конструкцију листа F_3, као што се непосредно види.

У општем случају мораћемо конструисати још извесан број листова, рецима листове: F_4 $F_5 \dots F_k$, док не покријемо целу област Ω_1. Очигледно, биће: $\kappa_1 - 1 \leqslant j_1$. Конструкција листа F_k $(\kappa = 4, 5, \dots, \kappa_1)$ следује, као за лист F_3, из конструкције листа F_1 тако, да место: F_1, F_2, G_1, G_2, G'_1 и G'_2 пишемо: $F_1 + F_2 + \dots + F_{k-1}$, F_k, G_{k-1}, G_k, G'_{k-1} и G'_k.

После конструкције листа F_{k_1} уочимо прву област у низу области o_i, која није цела садржана у областима $F_1, F_2, \dots, F_{k_1}$. Нека је то област o_{i_2}. Као што беше са o'_{i_1} у погледу на међу области G'_1, исто тако међа области G'_{k_1} дели круг o'_{i_2} на више области. Да не би имали бескрајно много тих области проширићемо и o_{i_2} до на једну униформну, једноставно повезану отворену област контитуираних међа, коју означимо са Ω_2, и која има особину, да је област ω'_2 раздељена међом области G'_{k_1} на ограничен број одељених области. Означимо одговарајуће области на које је дакле раздељена област ω_2, са $\omega_{2,v}$ $(v = 1, 2, \dots, j_2)$. Неке од $\omega_{2,v}$ припадају листовима F_k $(\kappa = 1, 2, \dots \dots, \kappa_1)$, остале су изван њих.

Опет ћемо, исто као пре, саградити, извесан број $(\leqslant j_2)$ нових листова континуираних међа, док област ω_2 не буде цела заузета. Нека буду то листови, F_{k_1+1}, $F_{k_1+2}, \dots, F_{k_2}$. Конструкција листа F_k $(k = k_1 + 1, k_1 = 2, \dots, k_2)$ следује из конструкције једног листа F_k $(k = 2, 3, \dots, k_1)$ непосредно, ако место: $\Omega_1, \omega_{1,v}, \Omega'_1, \omega'_{1,v}, j_1$, пишемо: $\Omega_2, \omega_{2,v}, \Omega'_2, \omega'_{2,.v}, j_2$.

Нека је затим, o_{i_1} прва област у низу области o_i која није цела садржана у областима $F_1, F_2, \dots, F_{k_2}$. Из горњих је речи јасно, како се горња посматрања примењују на нова, и како затим, тај процес и даље настављамо, непрекидно...

Бројеви $i_1, i_2, i_3, \dots$ теже у бесконачност (осим, ако са коначним бројем листова нисмо већ покрили целу површину S). То значи, пошто низ кругова o_i садржи целу површину S, да и низ конструисаних листова, континуираних међа: $F_1, F_2, \dots,$ $F_k, \dots$ *садржи целу површину* S.

Низ листова $F_1, F_2, \dots F_k, \dots$ задовољава став II. јер, прво: *њиме је површина S раздељена на листове континуираних међа.* Затим, сваки круг o_k садржан је у заједници листова $F_1, F_2, \dots F_{k_s}$, ако o_{i_s} означава први у низу кругова $o_1, o_{i_1}, o_{i_2}, o_{i_3}, \dots$ који је у низу $o_1, o_2, o_3, \dots$ после уоченог круга o_i, или је овом идентичан. Другим речима, сваки круг o_i раздељен је међу коначним бројем листова. Узмимо дакле, ма коју тачку на S. Ако је то обична тачка, ради особине 3^0 у дефиницији низа o_i, она се налази у, бар једној области O_i. Ако је то алгебарска тачка гранања, она се налази у извесном коначном скупу области o_i ради исте особине 3^0. У оба случаја та је тачка, свакако, садржана у отвореној области коју сачињава заједница од, највише, коначног броја листова F_k. Речима става II: *У близини сваке тачке површине S, налази се само коначан број листова.*

Дакле, став II. је у целини доказан.

Sur une manière de partager les surfaces de Riemann en feuillets.

par

MILOCH RADOÏTCHITCH.

(Résumé).

L'objet du présent travail est la continuation d'un travail antérieur du même auteur, intitulé „*Sur la division des surfaces de Riemann en feuillets*" (Publ. de l'Acad. Roy. Serbe, CXXXIV, 1929), et qui fut consacré à la démonstration du théorème général suivant: „*Toute surface de Riemann illimitée peut être divisée en feuillets, dont les frontières sont continues*"[1].

Dans le travail actuel, ce théorème est précisé sous la forme suivante :

„*Toute surface de Riemann illimitée peut être partagée en feuillets, dont les frontières sont continues, et de telle manière, qu'au voisinage de chaque point de la surface ne se trouve qu'un nombre fini des feuillets*".

Donc, c'est seulement auprès des points singuliers transcendents sur la surface, que peuvent s'accumuler les bouts d'une infinité des feuillets.

Ce théorème exprime un fait général, confirmé dans les diverses théories spéciales des fonctions analytiques. Par ex., l'on en déduit la possibilité de partager le plan des fonctions uniformes à une ou à deux périodes, et même, ceux des fonctions automorphes de Poincaré, en „domaines fondamentaux" aux frontières continues (parallèlogrames des périodes, et c.) et qui s'accumulent seulement, auprès des singularités essentielles. C'est un fait évident pour les fonctions périodiques, mais, quant aux fonctions générales de Poincaré, il exige une démonstration particulière. Cependant, c'est une conséquence du théorème général, énoncé plus haut.

---

[1] Voir aussi la Note du même auteur : „*Sur les domaines fondamentaux des fonctions méromorphes*". (Comptes rendus de l'Acad. des sciences de Paris, t. 190, 1930, p. 356).

СРПСКА КРАЉЕВСКА АКАДЕМИЈА

ГЛАС CLXXIII

ПРВИ РАЗРЕД

А. МАТЕМАТИЧКЕ НАУКЕ

85

1

МИЛОШ РАДОЈЧИЋ

Основне области и изузетне вредности аналитичких функција у близини есенцијалних сингуларитета

БЕОГРАД 1936

Штампарија „СЛОВО“ Немањина 20

ОСНОВНЕ ОБЛАСТИ И ИЗУЗЕТНЕ ВРЕДНОСТИ АНАЛИТИЧКИХ ФУНКЦИЈА У БЛИЗИНИ ЕСЕНЦИЈАЛНИХ СИНГУЛАРИТЕТА

Од

МИЛОША РАДОЈЧИЋА.

Примљено на скупу Академије природних наука 3-II-1936 год.

Предмет овог саопштења уско је везан за предмет мога рада о основним областима аналитичких функција у четвртој књизи часописа Publications mathématiques de l'Université de Belgrade[1]). Односи се на исту општу врсту сингуларитета S (сингуларних тачака или линија), на исту врсту околине D и на исту врсту деобе околине D на основне области D_n $(n = 1, 2, \ldots)$. Зато остајем при истим ознакама и у свему упућујем на тај рад. Нову околност, која одређује предмет овог саопштења, ствара услов да посматрана функција $\zeta = f(z)$ има у околини D бар једну изузетну вредност.

Полазимо од чињенице очигледне за наш геометријски начин посматрања, да *свакој изузетној вредности* ω *функције* $f(z)$ *у* D *одговара у равни* ζ *тачка* ω, *трансцендентна за све гране области* Δ, *сем, највише, за коначан број таквих грана.*

Према томе, ако област Δ поделимо на листове, будући да сваки од тих листова долази до тачке ω а највише коначан број њих наилази у ω на грану која ту нема трансцендентну тачку, може постојати највише коначан број тих листова, који не граниче са ω као са трансцендентном тачком: бесконачан број тих листова граничи са трансцендент-

---

[1]) *Sur les domaines fondamentaux des fonctions analytiques au voisinage d'une singularité essentielle* t. IV, 1935.

ном тачком ω или са трансцендентним тачкама ω, ако их је више. Отуда имамо следећи став:

Свакој трансцендентној сингуларној тачки ω у области Δ инверсне функције $\varphi(\zeta)$ одговара, ако је ω изузетна вредност, трансцендентан сноп у D.

Примећујем да тиме није речено да свакој таквој трансцендентној тачки одговара само један сноп; слично као у поменутом раду може се показати да може одговарати и више снопова — бар у случају кад постоји само једна изузетна вредност.

Заједно са изреченим ставом добијамо и овај став:

Ако је ω изузетна вредност, свака основна област, сем највише коначног броја тих области, има трансцендентан угао у D, са асимптотском вредношћу ω. Према томе:

Ако функција $f(z)$ има изузетних вредности у околини D есенцијалног сингуларитета S, онда је D прве врсте.

И, према томе, S има у D све особине које припадају тој врсти и о којима је било речи у поменутом раду. Из претпоследњег става следује и овај:

Ако је p број изузетних вредности, свака основна област у D има бар p трансцендентних врхова, сем, можда, коначног броја тих области.

Не заборавимо да при нашим условима, кад је D прве врсте, једна основна област може само у појединим врховима, а никада дуж читавих страна, допирати до сингуларитета S.

Нека p и даље означава број изузетних вредности.

Ако је $p>1$, разним трансцендентним сноповима одговарају у Δ разне трансцендентне тачке функције $\varphi(\zeta)$.

Означимо са A_1 и A_2 два угла што припадају двама од посматраних снопова, а са G област између A_1 и A_2, омеђену са по једном страном углова A_1 и A_2, неким простим луком што спаја те две стране а не допире до S и извесним луком, или можда само тачком, сингуларитета S. Ако би у G допирало само коначно много основних области, A_1 и A_2 би припадали очигледно истом трансцендентном снопу. Дакле у G допире бескрајно много основних области, те ће их бескрајно много бити садржано сасвим у G. Како је $p>1$, може се за једну од ових последњих основних области рећи

да има бар два трансцендентна угла у G, која одговарају двема разним изузетним вредностима и, према томе, двема разним трансцендентним тачкама функције φ. То се тим пре може рећи за углове A_1 и A_2, дакле и за посматрана два снопа, т. ј. они одговарају разним трансцендентним тачкама функције φ.

Према ономе што стоји у овом доказу, у области G има трансцендентних углова са разним асимптотским вредностима. То је независно од тога да ли су асимптотске вредности двају посматраних, произвољних трансцендентних снопова једнаке или нису. Дакле:

Ако је $p>1$ и ако је асимптотска вредност двају трансцендентних снопова иста, постоји између та два снопа бар још један трећи сноп са различитом асимптотском вредношћу.

Дакле, *ако је $p>1$, два узастопна трансцендентна снопа имају различите асимптотске вредности. Ако на неком путу који води према S функција $f(z)$ тежи некој одређеној вредности, тај пут не може пролазити кроз више од једног трансцендентног снопа.*

Ако је $p>1$ и ако сви трансцендентни снопови нису обострано бескрајни, има бескрајно много трансцендентних снопова.

Нека је наиме A крајњи угао једног од трансцендентних снопова што нису обострано бескрајни. A граничи дуж једне своје стране са бескрајно много основних области. Међу овима има их бескрајно много, које имају по два трансцендентна угла у којима f тежи двема различитим изузетним вредностима. Између угла A и ма којег од ових углова са једном изузетном вредношћу постоји бар један од тих углова са другом изузетном вредношћу, тако да имамо бескрајно много парова трансцендентних углова са разним асимптотским вредностима и, према томе, бескрајно много разних трансцендентних снопова.

Дакле, *ако је $p>1$ и ако је број трансцендентних снопова коначан, сви снопови су обострано бескрајни.*

Будући да разним трансцендентним сноповима одговарају разне трансцендентне тачке функције $\varphi(\zeta)$ и да се у прошлом доказу радило о паровима трансцендентних углова чије су асимптотске вредности две одређене, произвољно изабране изузетне вредности, можемо рећи:

Ако је $p>1$ *и ако сви трансцендентни снопови нису обострано бескрајни, инверсна функција има бескрајно много трансцендентних тачака у* Δ *Штавише, ако је* ω *ма која изузетна вредност, у тачки* $\zeta=\omega$ *има бескрајно много разних трансцендентних тачака које припадају области* Δ.

Дакле, *ако у* Δ *има само коначно много трансцендентних тачака, сви трансцендентни снопови су обострано бескрајни.*

Затим постоји следећи став:

Ако је $p>1$ *и ако у* D *има бескрајно много алгебарских снопова, тада има у* D *и бескрајно много трансцендентних снопова.*

Изаберимо у D један бескрајан низ алгебарских врхова a_n $(n=1, 2, \ldots)$. Тачка a_n стоји на међи коначног броја основних области. Како је број оних основних области у D, које имају мање од два трансцендентна врха, ограничен, можемо узети да је низ врхова a_n изабран тако, да све поменуте основне области имају бар по два трансцендентна врха. Назовимо D_n једну од тих области. Границу области D_n можемо разделити на лукове чији су крајеви трансцендентни врхови. Један од тих лукова затвара са S коначну област која садржи остале лукове; назовимо га E_n. Остале лукове назовимо заједно I_n. Тачка a_n налази се на E_n или на I_n.

Међу областима D_n може бити истоветних. Ако има бескрајно много истоветних, бескрајно много врхова a_n налази се на међи једне области D_n, дакле постоји један трансцендентан сноп који није обострано бескрајан, те, према једном од претходних ставова, постоји бескрајно много трансцендентних снопова и наш став је доказан.

Ако је број истоветних D_n коначан, може се претпоставити да свакој тачки a_n одговара друга област D_n. Тада можемо разликовати две врсте узајамних положаја области D_n: или једна област „окружава“ другу, т. ј. једна је садржана између сингуларитета S и друге области, или то није случај, него једна област стоји „поред“ друге. Ако се бескрајно много области D_n налазе, једна поред друге, број трансцендентних снопова је бескрајан, као што се лако увиђа на основу тога што свака област D_n има бар два трансцендентна угла која одговарају двема разним изузетним вредностима. Ако се не налази бескрајно много области D_n једна поред друге, има их бескрајно много које се узајамно окружују и, променивши нумерисање, можемо претпоставити да за свако n област D_n окружује идућу, D_{n+1}. И ту можемо разликовати два случаја:

1. Бескрајно много разних тачака a_n налазе се на одговарајућим луковима I_n. Створимо од њих нов низ и означимо га опет са a_n $(n=1, 2, \ldots)$. Нека су F_n и F_n' они трансцендентни снопови, који садрже трансцендентне углове области D_n, чији врхови сачињавају крајеве лука E_n. Сви трансцендентни углови области D_n налазе се између та два, дакле F_n и F_n' су свакако различити. — Уочимо друге две основе области које се састају у a_n. Свака од њих има бар два трансцендентна угла која одговарају двема изузетним вредностима. Дакле ти углови припадају трима разним трансцендентним сноповима. Један од та три снопа је свакако различит од F_n и F_n' и налази се између њих; назовимо га F_n'. — Немогућно је да се F_n, F_n' и F_n'' поклапају са F_{n+1}, F_{n+1}' и F_{n+1}''. Дакле, бар један од друга три различит је од прва три и налази се између F_n и F_n'' или између F_n'' и F_n'. Према томе: F_1'' је између F_1 и F_1'; бар један од снопова $F_2^{(k)}$ је између два узастопна од претходних трију — додајмо га њима; бар један од снопова $F_3^{(k)}$ је између два узастопна од претходних четирију — додајмо га њима; итд. Дакле има бескрајно много различитих трансцендентних снопова.

2. Бескрајно много тачака a_n налазе се на одговарајућим луковима E_n. Створимо од њих нов низ и означимо га опет са a_n $(n=1, 2, \ldots)$. Уочимо сем D_n још две основне области које се састају у a_n. Слично посматрање као у претходном случају, показује нам да те две области имају углове који припадају трима разним трансцендентним сноповима. Назовимо те снопове F_n, F_n' и F_n''. Непосредно се види да се снопови F_n, F_n' и F_n'' не поклапају са сноповима F_{n+1}, F_{n+1}' и F_{n+1}'', а отуда се слично као у претходном случају изводи да има бескрајно много трансцендентних снопова.

Дакле, *ако је* $p>1$ *и ако је број трансцендентних снопова коначан, тада је и број алгебарских снопова коначан.*

Будући да разним трансцендентним сноповима одговарају разне трансцендентне тачке функције φ и да се и у преходном доказу ради о бескрајно много трансцендентних снопова чије су асимптотске вредности две изузетне вредности, може се рећи:

Ако је $p>1$ *и ако у* Δ *има бескрајно много алгебарских тачака гранања реда* >2, *онда има и бескрајно много трансцендентних тачака у* Δ. *Штавише, има их бескрајно много у* Δ *у свакој тачки* $\zeta=\omega$, *која претставља изузетну вредност функције* $f(z)$ *у* D.

Ако је број трансцендентних тачака у Δ *коначан, онда је и број алгебарских тачака гранања реда* >2 *у* Δ *коначан.*

На крају споменућу укратко идуће резултате који спадају у исту групу ставова, а доказаћу их у засебном раду: Ако је $p=2$, а број трансцендентних снопова коначан, онда је тај број паран. Ако је $p=2$, а постоји асимптотска вредност различита од изузетних вредности, онда је број трансцендентних снопова бескрајан. Ако је $p>2$, број трансцендентних снопова је бескрајан.

Зборник радова С.А.Н. XXXV — Математички институт С.А.Н. књ. 3, 1953
Recueil des travaux de l'Acad. Serbe des Sciences XXXV
Institut Mathématique № 3, 1953

МИЛОШ РАДОЈЧИЋ

О ПРОБЛЕМУ РИМАНОВИХ ПОВРШИ

1. *Риманова површ и Риманова област.* — Реч је о конформном пресликавању области које припадају Римановим површима. Занимаће нас питање руба тих области. Ограничићемо се на конформно пресликавање *једноструко повезаних отворених области.* Но пре него што пређемо на предмет овог излагања утврдимо извесне називе, не износећи строгих дефиниција. Разликоваћемо наиме *Риманову* (или *риманску*) *површ** од макакве *вишелисне области.* Та се разлика увек не поставља јасно, али често претпоставља.

Имајући на уму да се листовима називају извесне области које нигде не покривају раван више од једанпут, ми ћемо сваку отворену или затворену област разастрту над једном равни у смислу Риманових површи, — област за коју можемо сматрати и да настаје аналитичким продужавањем неке мултиформне аналитичке функције — називати напросто *Римановом* или *вишелисном облашћу.* Опште посматрано, таква област покрива раван негде више, негде мање пута, а неге ни једанпут. У том смислу *једнолисне области* су посебна врста Риманових области.

Римановом површи називаћемо пак у овом излагању вишелисну област само ако се она не може сматрати „правим“ делом друге (шире) вишелисне облати (ако се дакле, међу осталим, аналитичко продужавање изврши до крајњих могућности).

Према томе, сваку вишелисну област можемо сматрати делом неке Риманове површи.** Обичне тачке и алгебарске завојне тачке су увек унутарње тачке Риманових површи, трансцендентне завојне тачке образују (ако их има) њихове рубове.***

---

* Употребљавамо реч *површ* за геометриски лик који се у нас обично назива површином (surface, Fläche) а реч *површина* за величину или меру површи (aire, Flächeninhalt).

** Под Римановом површи подразумева се често макаква област екситенције неке мултиформне аналитичке функције, у којој је ова униформа, дакле макаква вишелисна област. Оправдана је и таква употреба назива, но тада би оно што сад називамо „Римановом површи“ требало друкчије назвати (нпр. „потпуном Римановом површи“, за разлику од осталих, „непотпуних“).

*** *Завојна тачка* или *тачка гранања* = Windungspunkt (Verzweigungspunkt), point de ramification.

2. *Основни став конформног пресликавања.* — Пођимо од тзв. основног става конформног пресликавања једнолисних, једноструко повезаних отворених области. Њиме се изражава неограничена могућност конформног пресликавања таквих области међу собом, под условом да разликујемо *три врсте* тих области: 1. области чији руб садржи више од једне тачке, 2. области чији се руб састоји само из једне тачке и 3. област која нема руба, која се дакле састоји из целе бројне равни укључивши и бесконачно далеку тачку. Постоји наиме став који потиче још од Римана [*B. Riemann*, **1**, 1851], али је тек доцније потпуно доказан [*D. Hilbert*, **1—3**, 1900—1909; *R. Courant*, **1—4**, 1910—1914; *P. Koebe*, **1**, **2**, 1912—1915; *C. Carathéodory*, **1**, **2**, 1912—1914 и др.] и по коме се *свака једнолисна једноструко повезана отворена област може пресликати обострано једнозначно и конформно на сваку другу такву област исте врсте.*

У ствари доказује се прво став по коме се *свака једнолисна једноструко повезана отворена област равни може пресликати обострано једнозначно и конформно* на једну од три отворене области w-равни:

на кружну област $|w| < R < \infty$

или на целу отворену раван $|w| < \infty$

или на целу затворену раван $|w| \leqslant \infty$

према томе да ли се њен руб састоји из више тачака, или само из једне тачке, или ниједне. Из овог става следује претходни непосредно. Једва је потребно споменути да у другом и трећем случају пресликавања врше линеарне функције. Само у првом случају функције које врше пресликавања су опште природе.

3. *Конформно пресликавање вишелисних једноструко повезаних области.* — За вишелисне једноструко повезане отворене области може се унапред очекивати аналоган став, уопштење претходног. Заиста постоји [*Koebe*, **3**, **4**, 1909; *Courant*, **1—4**, 1910—1914] следећи општи став:

Свака вишелисна једноструко повезана отворена област може се пресликати обострано једнозначно и конформно на једнолисну једноструко повезану отворену област.

Али питање: којој ће од три поменуте врсте припадати та једнолисна област, није потпуно решено ни до данас. Свакако, постоје извесни лаки случајеви кад се одговор на ово питање може одмах дати. Можемо их скупити у следећа два става. Први се односи на области које можемо сматрати деловима затворених, тј. алгебарских једноструко повезаних риманских површи; тада је лако разликовати којој ће од три врсте припадати уочена вишелисна област. Други се односи на извесне области које не можемо сматрати деловима затворених риманских површи, него само отворених.

I. Свака вишелисна једноструко повезана отворена област која припада једној затвореној Римановој површи може се пресликати обострано једнозначно и конформно на унутрашњост круга, или на целу отворену бројну раван, или на целу затворену бројну раван, ~~или на целу затворену бројну раван~~, према томе да ли се њен руб састоји из више тачака, или из само једне тачке, или ни из једне.

II. Свака вишелисна једноструко повезана отворена област која се може сматрати делом само једне отворене једноструко повезане Риманове површи, али која има рубних тачака међу унутарњим тачкама те површи, може се пресликати обострано једнозначно и конформно на унутрашњост једног круга.

Како је садржај првог става једноставна последица споменутога Риманова става, докажимо само други став. Претпоставимо да унутрашња тачка α дотичне Риманове површи припада рубу уочене вишелисне области Δ. Како се та површ може конформно пресликати на неку равну област B у z-равни, а површ је отворена, област B има известан руб b (који се састоји из једне или више тачака). Но α је унутарња тачка површи, дакле одговара јој унутарња тачка a области B. Област Δ је једноструко повезана, дакле одговара јој у z-равни једноструко повезана област D, садржана у B и чији руб d садржи како тачку a тако руб b. Дакле руб d садржи најмање две тачке и према томе D, дакле и Δ, може се конформно пресликати на унутрашњост једног круга.

4. *Проблем типа Риманових површи.* — Према претходном, тешкоће чине само области отворених риманских површи које немају рубних тачака површи, тј. *„целе“ отворене Риманове површи.* Питање конформног пресликавања вишелисних једноструко повезаних области, које још чека на своје потпуно решење гласи дакле: *када ће се једноструко повезана отворена Риманова површ пресликати на круг а када на целу отворену раван?* Другим речима: *када ће се отворена Риманова површ моћи сматрати као површ функције инверсне функцији мероморфној у целој отвореној равни, а када као површ функције инверсне функцији мероморфној у неком кругу и којој је тај круг есенцијална линија?*

Кад се Римамова површ пресликава (обострано једнозначно и конформно) на унутрашњост круга кажемо да је та површ *хиперболна* или *хиперболног типа;* кад се пресликава на целу отворену раван кажемо да је *параболна* или *параболног типа;* а кад је Риманова површ затворена, кад се дакле пресликава на целу затворену раван, кажемо да је *елипсна* или *елипсног типа.* Ови називи стоје у вези с теоријом линеарно аутоморфних одн. полиморфних функција, које су у неку руку карактерисане истоименим линеарним супституцијама [*F. Klein*, **1**, 1878; **2**, 1882]. С тим називима питање гласи: *кад ће једноструко повезана отворена Риманова површ бити хиперболног а када параболног типа?*

Отуд се овај проблем назива и *проблемом типа Риманове површи*. На њему се у новије време доста радило и налазили су се разни *услови (критеријуми) за параболни или хиперболни тип*. То је уствари *проблем руба у конформном пресликавању једноструко повезаних вишелисних области* или, тачније, основно питање које би се у том проблему имало решити пре свих других. То је дакле један од битних састојака општег и средишњег задатка теорије аналитичких функција: испитивања конформног пресликавања општих области.

Овде ћемо изнети известан преглед тих услова, који се не може сматрати потпуним, али би могао послужити ради првог сналажења у проучавању тог предмета.

5. *Пикаров став о изузетним вредностима као критеријум типа.* — На првоме месту може се навести познати Пикаров став [**1**, **2**, 1879] о изузетним вредностима у близини есенцијалних сингуларности као став који даје довољан услов да Риманова површ буде хиперболног типа. Општи Пикаров став казује да *функција узима у близини усамљене есенцијалне тачке* (тј. есенцијалне тачке у чијој је околини функција регуларна сем у половима) *сваку вредност бескрајно много пута, изузев, највише, две вредности*. Но како се у овом излагању ограничавамо на једноструко повезане области, довољно је узети у обзир Пикаров став за функције мероморфне у целој отвореној равни, који тада казује да таква функција узима *сваку вредност бескрајно много пута, изузев, највише две*. Дакле, ако постоје више од две изузетне вредности, функција не може бити мероморфна у целој отвореној равни. Према томе може се изрећи следећи довољни услов за хиперболни тип:

Ако изнад три или више тачака бројне равни једноструко повезана отворена Риманова површ нема унутарњих тачака ни на једном листу, или само на коначно много њих, та површ је хиперболног типа.

6. *Иверсенова два става.* — Изнесимо још неке довољне услове за хиперболни тип Риманове површи, замишљајући да је површ распрострта изнад комплексне *w*-равни. Постоји следећи став [*F. Iversen*, **1**, 1914, стр. 18]:

Уочимо ма коју (унутарњу) *тачку једне параболне Риманове површи, којој одговара у w-равни тачка w_0, и нека је w_1 ма која друга тачка w-равни ($w_0 \neq w_1$), обе у коначном делу равни. Тада постоји на тој површи непрекидан лук* (састојећи се из самих њених унутарњих тачака) *који полази из уочене тачке w_0 те површи а у равни спаја w_0 са w_1 не излазећи изван круга $|w - w_1| < |w_0 - w_1|$.*

Обртањем Иверсенова става добијамо следећи услов за хиперболни тип риманске површи:

Ако на једноструко повезаној Римановој површи постоји тачка w_0 и у w-равни још једна тачка w_1 ($w_0 \neq w_1$) па ако не постоји непрекидан лук на површи, који полази из w_0 на површи а у w-равни спаја w_0 са w_1 остајући у кругу $|w - w_1| < |w_0 - w_1|$, тада је та Риманава површ хиперболног типа.

Очигледно, лук поменут у овом ставу не мора постојати у случају кад на површи има извесних сингуларних линија. Дакле по Иверсенову ставу ако на површи има сингуларних линија, она је хиперболна. Тиме је обухваћен став II у бр. 3.

Из Иверсенова исказаног става произлази лако следећи, на изглед општији став [*Iversen*, **1**, 1914, стр. 24]:

Уочимо у некој тачки w_0 елемент функције инверсне мероморфној функцији и непрекидну криву g (у w-равни) која спаја w_0 са неком другом тачком w'. Тада постоји пут (на Римановој површи) *који из w_0 води ка w', садржан у произвољно узаној траци што садржи криву g, а дуж кога се уочени елемент може аналитички продужити до w'.*

Сад се обрнути став може изрећи овако:

Ако на једноструко повезаној Римановој површи, полазећи од извесне њене тачке изнад w_0 не можемо описати непрекидну криву која се у равни удаљује произвољно мало ма од кога датог непрекидног лука који спаја w_0 са којом било тачком w_1 у w-равни, тада је та Риманова површ хиперболног типа.

7. *Гросов став.* — Иверсенов став утврђује могућност аналитичког продужавања дуж ма које, у равни изабране континуиране криве, с произвољно малим удаљавањем од ње, али не казује ништа у погледу на униформност продужавања, тј. не тврди да пут којим се на површи крећемо нема у равни вишеструких тачака. Одређенији у том смислу је следећи Гросов став [*W. Gross*, **1**, 1918] који се односи на аналитичко продужавање дуж правих у разним правцима. Њиме се такође добија један критеријум за хиперболне површи. Став гласи:

Из сваке обичне тачке једне параболне Риманове површи могу се повући на тој површи у правцима који са извесним почетним правцем заклапају ма који угао $\varphi \, (0 \leqslant \varphi < 2\pi)$ полуправе на тој површи, које се састоје из самих обичних тачака површи — *сем можда у извесним правцима за које мноштво вредности φ има меру једнаку нули.*

Вреди напоменути следећи став, садржан у суштини у Гросову ставу, мањег домета, али елементарније природе, јер не употребљава појам мере неког мноштва:

Уочимо на параболној Римановој површи коју било тачку и у w-равни који било круг са средиштем у тој тачки. Тада у сваком исечку тога круга постоји на површи исечак истога круга, са средиштем у реченој тачки и који се састоји из самих њених обичних тачака.

Обртањем Гросова става и претходнога добијамо опет довољне услове за хиперболне Риманове површи. Тако настаје из Гросова става следећи:

Ако се из неке обичне тачке једноструко повезане Риманове површи не могу повући на тој површи полуправе у правцима за које поменути угао φ, *који их одређује, образује мноштво вредности коме је мера позитивна, тада је та Риманова површ хиперболна.*

8. *Ставови из теорије линеарно аутоморфних функција.* — Међу ставове који имају карактер критеријума за тип Риманових површи можемо унети и следеће ставове, који садрже елементарне чињенице из теорије линеарно аутоморфних функција [*F. Klein*, **1**, 1878; **2**, 1882 и *H. Poincaré*, **1**, 1882; итд.]:

Ако на једноструко повезаној риманској површи постоји (на њој униформна *линеарно полиморфна функција и ако њена група линеарних супституција садржи макар само једну хиперболну супституцију, та површ је хиперболног типа; ако не садржи хиперболних супституција, али садржи макар само једну параболну супституцију, површ је параболног типа; ако садржи само елипсне супституције, површ је елипсног типа.*

Напоменимо да је тај став прилично опште природе, јер су, по дефиницији, линеарно аутоморфне функције у појединим „основним областима“ општег мероморфног карактера.

9. *О типу правилно разгранатих Риманових површи.* — Теорија линеарно аутоморфних функција даје и тачније податке о разгранатости Риманових површи сва три типа. Реч је о *правилно разгранатим* површима чије су завојне тачке изнад коначно много тачака w-равни, рецимо, изнад $a_1, a_2, ..., a_q$ $(q \geqslant 2)$. Ред завојне тачке изнад a_ν нека буде за сваки лист m_ν $(\nu = 1, 2, ..., q)$. То значи да се око a_ν пермутује увек по m_ν листова.

Ако је $q=2$ то су, очигледно, Риманове површи функција

$$z = \left(\frac{w - a_1}{w - a_2}\right)^{\frac{1}{n}} \qquad \text{или} \qquad z = \lg\left(\frac{w - a_1}{w - a_1}\right).$$

У првом, алгебарском случају површ је елипсног типа, у другом случају је парабалног типа.

Ако је $q=3$ имамо Шварцове „функције троугла“ [види нпр. *Klein*, **3**, 1890]. Опишемо ли затворену линију, рецимо круг, кроз тачке a_1, a_2, a_3, цела риманска површ је подељена на области тако да две суседне области увек сачињавају цео један њен лист. Тим областима одговарају у z-равни кружни троугли чији углови, као што се лако увиђа, имају величине $\frac{\pi_1}{m_1}, \frac{\pi_2}{m_2}, \frac{\pi_3}{m_3}$. Као што је познато из теорије аутоморфних функција, тип Риманове површи зависи од величине тих углова: ако је он већи од π површ је елипсна, ако је једнак π параболна је, ако мањи од π хиперболна. Према томе:

Ако је правилно разграната Риманова површ разграната изнад три тачке a_1, a_2, a_3 *бројне равни а ред тих завојних тачака је* m_1, m_2, m_3, *тада је та површ елипсна, параболна или хиперболна према томе да ли је*

$$\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} > 1 \quad \textit{или} \quad \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} = 1 \quad \textit{или} \quad \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} < 1.$$

Једноставним рачуном налазимо да постоје свега четири случаја елипсног типа, као што показује схема I (у схеми n значи 2, 3, 4, . . .). Исто тако постоје свега четири случаја кад је површ параболног типа, као што показује схема II.

У свим осталим случајевима (кад је $q=3$) којих има бескрајно много, тип је хиперболан.

Ако је $q=4$ постоји само један случај у коме је површ параболна, наиме кад је $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = 2$. У сваком другом случају, а исто тако и кад год је $q > 4$ површ је хиперболног типа.

I

m_1	m_2	m_3
2	2	n
2	3	3
2	3	4
2	3	5

II

m_1	m_2	m_3
2	2	∞
2	3	6
2	4	4
3	3	3

Све случајеве регуларно разгранатих површи можемо дакле сажети у следећи став (види нпр. *R. Nevanlinna*, **2**, 1936, стр. 278 и след.):

Ако је правилно разграната Риманова површ разграната изнад q *тачака равни* $(q \geqslant 2)$ *а ред тих тачака грања је* $m_1, m_2, . . . , m_q$, *тада је та површ елипсна, параболна или хиперболна према томе да ли је збир*

$$s = \sum_{1}^{q} \frac{1}{m_\nu}$$

већи, једнак или мањи од $q - 2$.

10. *Неванлинин критеријум за Риманове површи потпуно разгранате изнад коначно много тачака.* — Као што произлази из општих ставова о мероморфним функцијама, које је доказао *R. Nevanlinna* [**1**, 1932] претходни став о риманским површима линеарно полиморфних функција допушта значајно уопштење у случају хиперболног типа. Реч је ма о каквим једноструко повезаним риманским површима потпуно разгранатим изнад коначно много тачака.

Каже се да је Риманова површ *потпуно разграната* изнад неке тачке бројне равни ако је то завојна тачка за сваки њен лист. Али Неванлинин став допушта да тај појам схватимо шире:

да површ сматрамо потпуно разгранатом изнад неке тачке и ако је то завојна тачка за сваки њен лист сем највише за коначно много листова. Тада се став може једноставно изрећи овако:

Ако је једноструко повезана Риманова површ, потпуно разграната изнад коначно много тачака $a_1, a_2, \ldots, a_q$ $(q \geqslant 2)$ *тако да ред завојних тачака изнад* a_ν *није мањи од* m_ν (а може бити и бескрајан) *па ако је*

$$\sum_{1}^{q} \frac{1}{m_\nu} < q-2,$$

та површ је хиперболног типа.

Из претходних разматрања (бр. 9) следује одмах да постоје свега *пет* разних случајева кад је по Неванлинину ставу површ хиперболна, према приложеној схеми.

q	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5
3	2	3	7	—	—
3	2	4	5	—	—
3	3	3	4	—	—
4	2	2	2	3	—
5	2	2	2	2	2

Разуме се, сваки од тих случајева подразумева бескрајно много разних, различито разгранатих риманских површи, јер услов је само да ред завојних тачака не буде мањи од m_ν.

Кад је $q=3$ може се нпр. узети да су све завојне тачке изнад a_1, a_2, a_3 логаритамске (∞, ∞, ∞). Но тада добијамо Пикаров став (бр. 5). Дакле *Пикаров став је посебан случај тога Неванлинина става.*

11. *Алфорсово уопштење Неванлинина става.* — Могло се унапред очекивати да ће Неванлинин став остати тачан и кад се уочена Риманова површ непрекидно деформише у извесним границама, ако се дакле и завојне тачке, које се налазе изнад извесне тачке равни и сачињавају једно место потпуне разгранатости, помере из те тачке, али не предалеко. Алфорс је успео да у том погледу докаже став [*L. Ahlfors*, **2**, 1932] који можемо изрећи следећим речима:

Уочимо q *једноструко повезаних области бројне равни,* G_1, $G_2, \ldots, G_q$, *које су једна изван друге, и претпоставимо да продужујући аналитички ма коју грану аналитичке функције којој та површ припада, а остајући у* G_ν *наилазимо на завојну тачку чији ред није мањи од* m_ν. *Ако је тада*

$$\sum_{1}^{q} \frac{1}{m_\nu} < q-2,$$

та површ је хиперболног типа.

12. *Неки критеријуми за параболни тип.* — Пре свега, Р. Неванлина је год. 1932 објавио доказ да су *све Риманове површи с коначно много трансцендентних и алгебарских завојних тачака параболног типа* [*R. Nevanlinna*, **1**, 1932].

Од разних ставова који дају критеријуме за параболне Риманове површи с изолованим завојним тачкама споменимо затим Алфорсов став за једноструко повезане Риманове површи које у коначноме имају само алгебарских завојних тачака, а у бескрајно далекој тачки могу имати и трансцендентних завојних тачака [*Ahlfors*, **1**, 1931]:

Нека је $n(\rho)$ број завојних тачака, рачунајући сваку онолико пута колики је њен ред (или тзв. степен грањања, тј. ред смањен за јединицу) до којих се по тој Римановој површи може доспети на путовима краћим од ρ. *Ако интеграл*

$$\int^{\infty} \frac{d\rho}{\rho\, n(\rho)}$$

дивергује, Риманова површ је параболна.

Ако површ нема ни у бескрајно далекој тачки трансцендентних завојних тачака, критеријум се може пооштрити:

Ако су све завојне тачке алгебарске и ако се налазе у ограниченом делу бројне равни $|w| < \mu$, *довољно је диверговање интеграла*

$$\int^{\infty} \frac{d\rho}{n(\rho) - n(\rho - \mu)}$$

да би површ била параболна (*Радојчић*, **4**, 1937).

Ако замислимо да је Риманова површ разастрта над Римановом сфером (ако дакле удаљеност ρ меримо сферном мером) сличан интеграл вреди кад год су све завојне тачке алгебарске, тј. *из дивергенције интеграла*

$$\int^{\infty} \frac{d\rho}{n(\rho) - n(\rho - \pi)}$$

следује да је таква Риманова површ параболна.

Наместо претходна два интеграла може се узети и

$$\int^{\infty} \frac{\rho\, d\rho}{n(\rho)},$$

тј. *ако тај интеграл дивергује површ је параболног типа* [*Ahlfors*, **3**, 1936; *Радојчић*, **4**, 1937].

13. *Критеријум за параболни тип у облику збира.* — Из претходнога следује непосредно још један критеријум за Риманове површи које имају само алгебарских завојних тачака:

Ако је v_k број завојних тачака, рачунајући сваку онолико пута колики је њен ред, а до којих се по површи може доћи на путовима краћим од $(k+1)\pi$ а не краћим од $(k-1)\pi$ и ако је бескрајни збир

$$\sum^{\infty}\frac{1}{v_k}$$

дивергентан, површ је параболног типа [*Ahlfors*, **3**, 1936].

За одређивање типа можемо се ослонити и на начин како се испреплићу листови Риманове површи. Нека је површ подељена на известан начин (који овде изближе не описујемо) на листове континуираних рубова. Пошавши од извесног листа назовимо укупност листова који имају заједничких рубова с полазним листом *првом генерацијом* листова; укупност даљих листова који имају заједничких рубова с првом генерацијом назовимо *другом генерацијом*, итд. Нека је $\delta(\nu)$ број листова у ν-тој генерацији [*A. Speiser*, **1**, 1930].

Ако су, задржавајући претходне услове, сферна растојања завојних тачака, мерена на површи, изнад извесне позитивне величина ε и ако њихов ред није већи од целог броја p, може се поставити следећи критеријум:

Кад бескрајни збир

$$\sum^{\infty}\frac{\nu}{\delta(0)+\ldots+\delta(m_\nu)},$$

где је

$$m_\nu = \nu\left[\frac{p}{2}\right]+(\nu+1)\frac{(6p)^c-1}{6p-1}, \qquad c=\left[\frac{10\pi}{\varepsilon}\right],$$

дивергује, Риманова површ је параболног типа [*Радојчић*, **7**, 1950].

Забележимо следећу последицу, која постоји под условом да је низ бројева $\delta(\nu)$ монотоно несилазан: *Ако бескрајан збир*

$$\sum^{\infty}\frac{1}{\delta(\nu)}$$

дивергује, површ је параболна.

Ово посматрање се може проширити и на случајеве кад нема ограничења за ред завојних тачака и за њихова растојања. Нека је p_ν највиши ред свих завојних тачака на рубовима листова првих ν генерација, а ε_ν најмање растојање за све те тачке.

Лако је показати да тада *из дивергенције бескрајног збира*

$$\sum^{\infty}\frac{{\varepsilon_\nu}^2}{(6p)^{c_\nu}\,\delta(\nu)}, \qquad c_\nu=\left[\frac{5\pi}{\varepsilon_\nu}\right],$$

следује да је Риманова површ параболног типа [*Радојчић*, **7**, 1950, стр. 52].

14. *Кобајашијев критеријум за параболни тип.* — *Z. Kobayashi* [**1**, 1935] дао је став који обухвата све врсте Риманових површи с усамљеним завојним тачкама. При томе се ослања о мрежу која на површи настаје на следећи начин: Одредимо на површи око сваке завојне тачке њену околину која се састоји из свих тачака површи ближих тој завојној тачки него другим завојним тачкама. Рубови свих тих околина састоје се, очигледно, из тачака површи, које су једнако удаљене од, најмање, две завојне тачке; они образују тзв. *Кобајашијеву мрежу*. Ова се може претставити тополошким дрветом [*Speiser*, **1**, 1931] којим се тополошки приказује на прост начин узајамна повезаност листова Риманових површи. Као и тополошко дрво, Кобајашијева мрежа се састоји из „дужи" које су међу собом спојене у својим крајњим тачкама, „чворовима" мреже. Дуж сваке „дужи" састају се околине двеју завојних тачака. Из обих тих тачака види се та „дуж" (или неки њен део) под извесним углом. Овај угао називамо угаоном мером те дужи (или њеног дела). Тада можемо дефинисати *угаону раздаљину* ма којих двеју тачака на мрежи као збир угаоних мера оних дужи преко којих су те две тачке мрежом повезане; при томе бирамо онај пут повезаности на коме је тај збир најмањи. Нека је θ угаона удаљеност које било тачке на мрежи од извесне полазне тачке. Означимо са $n(\theta)$ број тачака Кобајашијеве мреже, чија је угаона удаљеност од полазне тачке једнака θ. Тада Кобајашијев став гласи:

Једноструко повезана Риманова површ са самим изолованим завојним тачкама (алгебарским или трансцендентним) је параболног типа ако дивергује интеграл

$$\int\frac{d\rho}{\int\limits_0^{\rho} n(\theta)\,d\theta}.$$

15. *Још један критеријум за Риманове површи с бескрајно много трансцендентних завојних тачака.* — До засебне врсте критеријума за тип једноструко повезаних Риманових површи долазимо кад претпоставимо да ја Риманова површ подељена на листове. Под листовима подразумевамо при томе области површи, које покривају бројну раван свугде само једанпут (једнолисне области) тако да не преостане ниједна област равни непокривена. Из начина како су листови узајамно повезани може се под извесним условима закључити коме типу припада површ. Да бисмо избегли непотребне заплете претпостављамо да је руб сваког листа континуиран и да околина сваке тачке на површи припада само коначном броју листова. За врло општу врсту *„неограничених“* Риманових површи може се *доказати могућност поделе на такве листове и описати општи начин њихове конструкције.* [*М. Радојчић*, **1**, 1929; **3**, 1931; **2**, 1930 и *T. Shimizu*, **1**, 1931].

Посматрајући Риманову површ на којој је аналитичка функција $z(w)$ мероморфног карактера, уочимо какав било прост лук (ab) који полази из тачке $w=a$, где је извесна грана функције $z(w)$ регуларна, а завршава у $w=b$. Нека је Q_ε област која се састоји из свих тачака равни чија је удаљеност од тачака лука (ab) мања од произвољно малог броја ε. Ако у Q_ε постоји *прост* лук (ab') који спаја тачку a с тачком b', удаљеном од b за мање од ε, а дуж кога се функција $z(w)$ може аналитички продужити, кажемо да је та Риманова површ *неограничена.** По Гросову ставу (бр. 7) *Риманове површи свих функција инверсних мероморфним функцијама су неограничене* [*Shimizu*, **1**, 1931; *Радојчић*, **2**, 1930].

Према томе критеријум за тип о коме је сада реч односи се на неограничене једноструко повезане Риманове површи. Постоји тада овај општи став:

Ако у z-равни листовима одговарају области с непрекидним рубовима, ако затим на рубу сваког листа, сем можда коначно много листова, има трансцендентних завојних тачака и ако је мноштво тих завојних тачака коначно, или ако је бесконачно али у цикличном распореду редуктибилно, тада је Риманова површ параболног типа. [*Радојчић*, **5**, 1938].

Циклични распоред трансцендентних завојних тачака може се пак једноставно дефинисати овако: Нека је A која била унутарња тачка дате Риманове површи. Опишимо на површи континуирану просту линију $l_\nu (\nu=1, 2, \ldots)$ од A до сваке трансцендентне завојне тачке W_ν тако да сем A те линије немају заједничких тачака. Тада, очигледно, можемо на површи описати око тачке A у њеној једнолисној околини, затворену континуирану линију c, која сваку линију l_ν пресеца у само једној тачки L_ν. Под *цикличним распоредом завојних тачака* W_ν подразумевамо циклични распоред тачака L_ν на линији c [*Радојчић*, **5**, 1938; онда се даје еквивалентна дефиниција цикличног распореда одговарајућих „трансцендентних праменова“ у z-равни].

---

* *Радојчић*, **1**, 1929; **3**, 1931. У тим чланцима дефиниција је дата мање прецизно. У вези с тим, доказ да је површ функције инверсне мероморфној неограничена је недовољно прецизан. Онде сам се служио Иверсеновим ставом, но само применом Гросова става може се доћи до циља, као што је показао *Шимизу* [**1**, 1931]. У том смислу треба исправити и моју напомену у чланку **6**, стр. 12.

Кад је мноштво трансцендентних завојних тачака коначно, претходни став је садржан у Неванлинину ставу поменутом на почетку бр. 12.

НАВОДИ

L. Ahlfors: **1.** Comment. Math. Helv. 3, 1931. — **2.** Bull. Soc. Math. France, 60, 1932. — **3.** Soc. Sc. Fenn., Comm. Phys.-Math. 6, 1936.

C. Carathéodory: **1.** Math. Ann. 72, 1912, p. 107. — **2.** Schwarz — Festschrift, Berlin 1914, p. 19.

R. Courant: **1.** Gött. Nachr., 1910, p. 154. — **2.** Math. Ann. 71, 1912, p. 145. — **3.** Math. Ann. 72, 1912, p. 517. — **4.** J. f. Math. 144, 1914, p. 190.

W. Gross: **1.** Mh. Math. u. Phys. 29, 1918.

D. Hilbert: **1.** Math.-Ver. 8, 1900, p. 184. — **2.** Math. Ann. 59, 1904, p. 161. — **3.** Gött. Nachr., 1909, p. 314

F. Iversen: **1.** Recherches sur les Fonctions Inverses des Fonctions Méromorphes (теза), Helsingsfors, 1914.

F Klein: **1.** Math. Ann. 14, 1878. — **2.** Math. Ann. 21, 1882. — **3.** Vorlesungen über die elliptischen Modulfunktionen I, II, Leipzig, 1890—92

Z. Kobayashi: **1.** Sc. Reports, Tokyo Bunr. Daig. 1935.

P. Koebe: **1.** Gött. Nachr., 1912, p. 844. — **2.** J. f. Math. 145, 1915, p. 177. — **3.** Atti del IV congr. math., Roma 1908, Vol. 2, 1909, p. 25. — **4.** Gött. Nachr., 1908, p. 337; 1909, p. 324.

R. Nevanlinna: **1.** Acta Math. 58, 1932. — **2.** Eindeutige analytische Funktionen, Berlin 1936.

E. Picard: **1.** C. R. Acad. Sc., Paris, 88, 1879, p. 1024. — **2.** C. R. Acad. Sc., Paris, 89, 1879, p. 745.

H. Poincaré: **1.** Acta Math. 1, 1882.

M. Radojčić: **1.** Глас Срп. Кр. Ак. 134, 1929. — **2.** C. R. Acad. Sc., Paris, 190, 1930. — **3.** Глас Срп. Кр. Ак. 146, 1931. — **4.** Publ. Math. de l'Univ. Belgrade, 6, 1937. — **5.** Глас Срп. Кр. Ак. 175, 1937. — **6.** Publ. Inst. Math., Belgrade, 2, 1948. — **7.** Publ. Inst. Math., Belgrade, 3, 1950.

B. Riemann: **1.** Dissertation, 1851, Werke, 2. Aufl., p. 3.

T. Shimizu: **1.** Jap. Jorn. Math. 8, 1931.

A. Speiser: **1.** Comm. Math. Helv. 2, 1930

SUR LE PROBLÈME DES TYPES DES SURFACES DER RIEMANN

par

M. Radojčić

L'auteur donne un aperçu élémentaire des critères concernant les types des surfaces de Riemann, sans prétendre à une liste complète.

Sous-titres: Surface de Riemann et domaine de Riemann. — Théorème fondamental sur la représentation conforme. — Représentation conforme des domaines simplement connexes des surfaces de Riemann. — Le problème des types. — Le théorème de Picard sur les valeurs exceptionnelles, comme critère des types. — Deux théorèmes d'Iversen. — Un théorème de Gross. — Quelques propositions de la théorie des fonctions linéairement automorphes. — Le critère de R. Nevanlinna pour les surfaces complètement ramifiées au-dessus d'un nombre fini de points. — La généralisation d'Ahlfors du théorème de Nevanlinna. — Quelques critères pour le type parabolique. Certains critères pour le type parabolique, en forme de somme. — Le critère de Kobayashi pour le type parabolique. — Encore un critère pour les surfaces ayant une infinité de points de ramification transcendants.

SUR UN PROBLÈME TOPOLOGIQUE DE LA THÉORIE DES SURFACES DE RIEMANN

Par

M. RADOJČIĆ

1. Il ne sera question ici que des surfaces de Riemann simplement connexes, illimitées (v. [3], p. 64) et qui s'étendent sur le plan de ζ. Soit Δ une telle surface. D'après un théorème général de *Poincaré-Koebe* il existe une fonction analytique $z(\zeta)$, qui fait la transformation conforme bi-univoque de Δ sur un domaine simplement connexe du plan de z. Ce domaine comprend tout le plan de z, ou bien il possède une frontière et c'est alors un domaine ouvert, soit par ex. l'intérieur d'un cercle au rayon fini ou infini. Désignons par D ce domaine.

Comme nous l' avons démontré (v. [3] et [4]), les surfaces de Riemann illimitées peuvent être divisées en feuillets aux frontières continues, feuillets dont chacun recouvre entièrement le plan, et qui ne s'accumulent en aucun point de la surface. À cette division correspond la division de D en domaines fondamentaux dont les frontières sont, elles aussi, continues à l'intérieur de D et ne s'accumulent en aucun point à l'intérieur de D (v. [5]).

2. À cette occasion remarquons que *M. T. Shimizu* a démontré le même fait, à peu près en même temps, mais concernant le cas plus restreint des fonctions méromorphes et de leurs inverses (v. [6], p. 175—200). Il applique la méthode identique à la nôtre, dont il a pu prendre connaissance de notre communication [3], mais sans avoir connu notre communication [4], où le problème proposé de la division des surfaces de

Riemann en feuillets, traité dans [3], fut conduit au bout. M. Shimizu fait remarquer qu'il avait énoncé son théorème, pour la première fois, à la réunion de la Société physico-mathématique du Japon en juin 1928 (c. à d. à l'époque même où parut notre travail [3]). Quant à sa démonstration, elle est, en partie, identique à la notre. (Ajoutons que notre second travail [4] fut présenté à la séance de l'Académie Serbe des Sciences le 8 déc. 1930, c. à d. également avant le travail de M. Shimizu, qui fut présenté le 9 juillet 1931).

Or M. Shimizu remarque bien que la division en feuillets, proposée par nous dans [3], ne donne pas nécessairement tous les feuillets de la surface. Nous rappelons ici que nous avons construit les feuillets par une suite de prolongements analytiques: le premier feuillet à partir d'un point quelconque a_1 de la surface, le second à partir d'un autre point a_2 de la surface, extérieur au premier feuillet, le troisième à partir d'un point a_3 extérieur aux deux feuillets déjà construits etc. Évidemment, on doit tenir compte de la manière par laquelle on choisit les a_n: le fait bien connu, que toute surface de Riemann peut être recouverte par un ensemble dénombrable d'éléments de la fonction correspondante, trouve ici encore son application, sans quoi on ne pourrait pas affirmer que les feuillets obtenus recouvrent la surface entièrement. Or, c'est ce que nous avons dans [3] omis de mentionner. Donc M. Shimizu a bien raison. Néanmoins, il nous semble exagéré lorsqu'il dit que notre méthode est insuffisante et il a tort en disant qu'il est nécessaire d'appliquer dans ce problème un théorème de *W. Gross* et un autre de *M. Terasaka* (v. [6], p. 180, remarque (2)). Au contraire, comme nous avons montré dans [4], il n'existe aucune difficulté à compléter la démonstration, sans appliquer des théorèmes auxiliaires.

3. Dans l'étude des surfaces de Riemann on est souvent obligé à chercher une représentation aussi claire que possible des propriétés topologiques de la surface considérée. Une telle espèce de représentation fait l'objet des considérations suivantes.

Dans ce but on divise ordinairement la surface en feuillets ou en demi-feuillets (v. par ex. [7] et [8]). L'entrelacement des feuillets (ou demi-feuillets) caractérise alors les propriétés topologiques de la surface de Riemann considérée. Dans la présente note il s'agira de la division en feuillets entiers. La surface de Riemann apparaît alors comme un ensemble de feuillets qu'on peut nommer un système de feuillets.

De même, l'ensemble des domaines fondamentaux qui constituent le domaine *D* dans le plan de *z* peut être appelé un système de domaines fondamentaux.

4. Les obstacles auxquels se heurte la représentation directe, d'un système de feuillets dans l'espace, dès que celui-là est un peu plus compliqué, nous poussent à la recherche d'un modèle simplifié d'un tel système, qu'on obtiendrait plus facilement et qui conserverait au moins ses propriétés topologiques.

Quand il s'agit des surfaces du genre zéro, le système des domaines fondamentaux, étalé dans le plan, présente déjà un tel modèle. Mais la connaissance exacte de ce système dépend des problèmes de la métrique conforme, entre autres du „problème des types". Comme on sait, les surfaces de Riemann algébriques et simplement connexes, et elles seules, sont du type elliptique, donc, à ce point de vue, c'est un problème résolu. Par contre, la distinction du type hyperbolique et parabolique est un problème difficile et non résolu.

Or, parmi les modèles utilisables, c. à. d. qui ne dependeraient pas du problème des types et d'autres questions de la métrique conforme, on peut distinguer: 1° l'arbre ou le réseau topologique (v. [2], [7] et [8]) et 2° l'image topologique du système de feuillets, dont nous nous sommes déjà servi implicitement dans certains travaux antérieurs et que nous allons considérer ici.

5. Pour ne pas compliquer l'exposition, désignons les éléments d'une image topologique par les mêmes noms et les mêmes signes que les éléments correspondants de l'image conforme. Donc, soit - dans l'image topologique - *D* le domaine correspondant à la surface Δ; appelons également „domaines fondamentaux" les domaines en lesquels *D* est divisé et qui correspondent aux feuillets, etc.

Par l'image topologique d'un système de feuillets d'une surface de Riemann Δ *nous entenderons toute image plane de* *ce système de feuillets, par laquelle* Δ *est transformée en un domaine plan D d'une manière bi-univoque et bi-continue à l'intérieur de* Δ, *continue même aux frontières de chaque feuillet considéré à part, et telle qu'aux points de ramification transcendants, différents entre-eux correspondent des points de la frontière de D différents entre-eux.*

Remarquons que la continuité de la transformation aux frontières de chaque feuillet est une condition non contenue dans la précédente, parce qu'elle se rapporte aussi aux points de ramification transcendants situés à la frontière d'un feuillet. En vertu de la dite condition, nous pourrons parler dans l'image topologique d'angles transcendants comme des figures formées par deux courbes continues partant du sommet de l'angle. (Notons que cette continuité n'est pas un fait nécessaire dans l'image conforme; v. [5]).

En ce qui concerne la dernière condition de la définition précédente, il conviendra mieux de considérer les faisceaux transcendants qui donnent une idée plus complète des points de ramification transcendants de Δ.

Lorsque Δ est du type elliptique, cette image topologique recouvre tout le plan, y compris le point à l'infini. La transformation est alors bi-univoque et bi-continue partout. Lorsque Δ est du type hyperbolique ou parabolique, l'image topologique comprend la partie finie du plan ou bien (ce qui a nécessairement lieu dès qu'on a deux faisceaux transcendants) l'intérieur d'un cercle topologique. Dans le dernier cas la distinction des faisceaux transcendants sera plus facile, donc:

Le type étant parabolique ou hyperbolique, supposons que l'image topologique du système des feuillets recouvre l'intérieur d'un cercle.

Appelons d'après Riemann un point extraordinaire chaque point du plan de z, qui correspond à un point de ramification de la fonction inverse, et par point extraordinaire d'ordre n celui qui correspond à un point de ramification algébrique d'ordre n (c. à d. où s'interchangent n feuillets). Les points extraordinaires sont des sommets des domaines fondamentaux, excepté quand l'ordre est égal à deux, car alors ils peuvent être aussi bien des points intérieurs des côtés (intérieurs au sens linéaire). Pour mettre en évidence tous les points extraordinaires dans l'image topologique d'un système de feuillets, *supposons que nous y ayons marqué tous les points extraordinaires, qu'ils soient des sommets des domaines fondamentaux ou qu'ils ne le soient pas.*

6. Montrons par un exemple élémentaire comment l'image topologique du système de feuillets peut donner l'idée de l'entrelacement des feuillets ou, si l'on veut, un tableau des propriétés topologiques de la surface de Riemann, lorsque celle-ci est connue.

Envisageons la surface de Riemann donnée par la description suivante des liaisons entre ses feuillets L_n $(n=1,2,3,4,5)$ (v. fig. 1, *a*): les feuillets L_1 et L_2 sont reliés suivant un certain arc $\alpha\beta$, les feuillets L_2 et L_3 sont reliés suivant le même arc $\alpha\beta$, les feuillets L_1 et L_4 sont reliés suivant un certain arc $\beta\gamma$, les feuillets L_4 et L_5 sont reliés suivant un certain arc $\gamma\delta$.

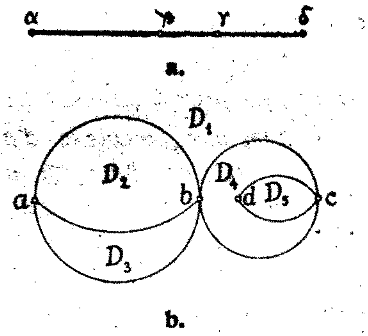


Fig. 1

Considérons les feuillets L_1 et L_2 et les points critiques α et β; décrivons dans le plan de l'image topologique un cercle topologique. Si D_1 et D_2 sont les domaines fondamentaux correspondants, soit D_1 l'extérieur et D_2 l'intérieur du cercle (v. fig. 1 *b*). Prenons sur le bord du cercle deux points quelconques *a* et *b*, qui corresponderaient aux points α et β.

Puisque ce ne sont pas les seuls feuillets, considérons L_2 et L_3 et relions donc *a* et *b* par une seconde ligne (le diamètre du cercle). Soit maintenant D_2 le demi-cercle supérieur et D_3 le demi-cercle inférieur.

Quant à L_1 et L_4, nous devons décrire un second cercle contenu dans D_1 et qui passe par *b*. Ce cercle divise le domaine D_1 en une partie extérieure à ce cercle et en une partie intérieure. La première est maintenant D_1, la seconde D_4. Par une considération analogue, nous trouvons qu'il faut décrire un nouveau cercle dans D_4 par un certain point *c*, pour obtenir le domaine

D_8. L'image obtenue nous montre entre autres que les feuillets L_1 et L_8 sont, eux aussi, reliés suivant l'arc $\alpha\beta$.

7. Soit maintenant une surface de Riemann du type elliptique; alors l'image topologique représente du point de vue topologique un réseau ou un complexe d'arêtes. Ce complexe n'est pas nécessairement connexe, mais chaque arête appartient au moins à un cycle d'arêtes.

Or, cette notion de complexe ne comprend pas les cas de l'image topologique du système de feuillets quand ces feuillets sont en nombre infini. Donc, nous devons généraliser les notions du cercle et du complexe d'arêtes. Ici nous nous contenterons des définitions suivantes:

Appelons cycle d'arêtes tout ensemble connexe d'arêtes, fini ou infini, qui est du point de vue topologique équivalent au cercle.

Appelons complexe d'arêtes ou réseau tout ensemble fini d'arêtes situées dans un plan, tel que chaque point intérieur d'une arête appartient uniquement à cette arête et que chaque arête appartient au moins à un cycle d'arêtes du même complexe.

Le point où se rencontrent n arêtes s'appelle noeud d'ordre n. Il résulte de la définition précédente qu'on a toujours $n \geqslant 2$.

Chaque domaine du plan du réseau, limité par des arêtes et qui ne contient à son intérieur aucune arête sera appelé domaine élémentaire du même réseau.

Nous dirons encore qu'un réseau est fini ou infini suivant qu'il contient un nombre fini ou infini d'arêtes.

8. Avec ces définitions nous pouvons démontrer les propositions suivantes:

I. *L'image topologique d'un système de feuillets constitue un réseau.*

Démonstration. Si dans l'image topologique un certain côté de la frontière d'un domaine fondamental ne contient parmi ses points intérieurs aucun point extraordinaire, ce côté est une arête topologique; dans le cas contraire ce côté est divisé par les points extraordinaires en parties qui sont des arêtes, car elles n'ont plus parmi leurs points intérieurs des points extraordinaires.

Par conséquent, l'image topologique d'un système de feuillets est un ensemble d'arêtes. Évidemment, tout point intérieur d'une telle arête n'appartient à aucune autre. Prenons une arête. Elle appartient à un côté de la frontière d'un domaine fondamental. Ce côté appartient à la courbe fermée qui constitue une partie connexe de la frontière de ce domaine. Ce cercle se compose de côtés, donc d'arêtes; donc c'est un cycle d'arêtes. Par conséquent, l'arête considérée appartient à un cycle d'arêtes, c.q.f.d.

Remarquons que les domaines fondamentaux de l'image topologique sont identiques aux domaines élémentaires du réseau. Les points extraordinaires sont des noeuds, mais comme il y a des sommets qui ne sont pas des points extraordinaires, chaque noeud n'est pas nécessairement un point extraordinaire.

II. *Si la surface de Riemann Δ est du type elliptique, l'image topologique de son système de feuillets constitue un réseau fini.*

Démonstration. Lorsque le type est elliptique la surface est algébrique, donc l'image topologique a un nombre fini de points extraordinaires et de sommets de domaines fondamentaux; par conséquent elle représente un réseau au nombre fini de noeuds et d'arêtes: c'est un réseau fini.

III. *Si la surface de Riemann est du type hyperbolique ou parabolique, l'image topologique du système de feuillets constitue un réseau infini, contenu à l'intérieur d'un cercle* (topologique). *Ce réseau contient une suite infinie de cycles aux propriétés suivantes:*

1. *chaque cycle contient et délimite un domaine qui ne contient qu'un nombre fini de domaines élémentaires;*
2. *chaque cycle contient tous les domaines élémentaires contenus par le cycle précédent;*
3. *chaque domaine élémentaire est contenu à l'intérieur d'un cycle au moins.*

Démonstration. Soit D_1, $D_2, \dots$ la suite de tous les domaines fondamentaux de l'image considérée du système de feuillets. D'après le n° 4 cette image est contenue dans le cercle D. Il reste à démontrer l'existence d'une suite de cycles possédant les propriétés énoncées.

Considérons n'importe quel domaine fondamental, soit par ex. D_1; sa frontière est un cycle K_1; si D_1 n'est pas un domaine simplement connexe, K_1 contient plusieurs domaines fondamentaux, mais en tout cas un nombre fini, car dans le cas contraire l'une des frontières intérieures du domaine D_1 renfermerait une infinité de domaines fondamentaux, donc il y aurait, hormi la frontière de D, d'autres singularités essentielles de $\zeta(z)$ dans D, contrairement aux hypothèses. Soit D' le domaine limité du côté extérieur par K_1. Ajoutons à D' le domaine fondamental D_{n_1} qui a au moins un côté de sa frontière commun avec D' et possède le moindre index parmi tous les domaines $D_2, D_3, \ldots$ Soit D'' le domaine limité du côté extérieur par la frontière extérieure du domaine $D' + D_{n_1}$. Le domaine D'' contient un nombre fini de domaines fondamentaux, puisque dans le cas contraire il y aurait dans D_{n_2} une infinité de domaines fondamentaux, donc une singularité essentielle, ce qui s'oppose aux hypothèses. Puis ajoutons à D'' le domaine fondamental D_{n_3} qui a au moins un côté commun avec D'' et possède le moindre index parmi tous les domaines fondamentaux dans D''. Soit D''' le domaine limité du côté extérieur par la frontière extérieure du domaine $D'' + D_{n_3}$.

En répétant ainsi ce procédé, nous obtenons une suite de domaines $D^{(\nu)}$, $\nu = 1, 2, \ldots$, ayant les propriétés suivantes: la frontière de chacun est un cycle K_ν; chaque domaine $D^{(\nu)}$ contient un nombre fini de domaines fondamentaux; chaque K_ν contient tous les domaines élémentaires contenus par $K_{\nu+1}$; chaque domaine élémentaire du réseau est contenu à l'intérieur des cycles K_ν dès que ν est assez grand, puisque nous épuisons par le choix d'indices $n_1, n_2, \ldots$ (et le reste des opérations) la suite $D_1, D_2, \ldots$

9. L'image topologique du système de feuillets est, de même que l'image conforme du système de domaines fondamentaux dans le plan de z, un domaine simplement connexe, ouvert, ou bien sans limites, situé dans un plan. Il est clair qu'on peut l'obtenir aussi bien de l'image conforme par une déformation continue à l'intérieur de D et sur la frontière de chaque domaine fondamental considéré à part. Or, sur la frontière de D la déformation n'est pas nécessairement continue et c'est justement là que réside l'indépendance dans la construction de l'image topologique à l'égard du problème des types des surfaces de Riemann.

En d'autres termes: *l'image topologique du système de feuillets de la fonction* z(ζ) *est en même temps l'image topologique du système correspondant des domaines fondamentaux de la fonction* ζ(z). Donc nous pouvons dire:

Par l'image topologique d'un système de domaines fondamentaux nous entenderons toute image plane de ce système, par laquelle le domaine D du plan de z est transformé en un domaine plan d'une manière bi-univoque et bi-continue à l'intérieur de D, continue même aux frontières de chaque domaine fondamental considéré à part, et telle qu'aux faisceaux transcendants différents entre-eux correspondent des faisceaux transcendants de l'image topologique dont les sommets sont différents entre-eux.

En ce qui concerne notre condition, que dans l'image topologique d'un système de feuillets tous les points intérieurs du second ordre soient inscrits, nous devons la supprimer dans l'image du système de domaines fondamentaux, puisqu'un système de domaines fondamentaux n'est qu'une agglomération de domaines. Donc, *supposons que les points extraordinaires du second ordre, qui ne sont pas des sommets des domaines fondamentaux, ne soient pas inscrits dans l'image topologique d'un système de domaines fondamentaux.*

10. Tenant compte de cette remarque, tous les énoncés du n⁰ 7 sont applicables aux images topologiques des domaines fondamentaux. Ainsi nous pouvons dire:

IV. *La figure topologique d'un système de domaines fondamentaux constitue un réseau qui ne contient aucun noeud du second ordre.*

11. L'une des premières questions qu'on peut poser par rapport au système de domaines fondamentaux est la suivante: À un point situé dans *D* correspond-il un point ordinaire de la surface Δ ou un point de ramification, et de quel ordre? La réponse est donnée par la proposition suivante, contenant des faits élémentaires:

V. *Les points intérieurs des domaines fondamentaux sont des points ordinaires* (non extraordinaires); *sur la frontière des domaines fondamentaux chaque point intérieur d'un côté est un point ordinaire ou extraordinaire du second ordre; le sommet* *d'un faisceau d'angles, contenant p angles, est un point ordinaire ou extraordinaire d'ordre $\leqslant p$; aux sommets transcendants correspondent des points de ramification transcendants.*

Démonstration. La première et la dernière partie de la proposition sont évidentes. En ce qui concerne la seconde, à chaque point intérieur a d'un côté s correspond sur la frontière σ des feuillets un point α, où se limitent deux feuillets seulement, Δ_m et Δ_n. Supposons que α soit un point intérieur de la ligne σ considérée dans le plan de ζ (fig 2).

Décrivons dans le plan de z autour de a une courbe fermée suffisamment petite et telle que le côté s soit franchi deux fois; à cela correspond une courbe qui entoure α au moins une fois (parce qu'on doit retourner au point de départ). Or, pour que σ soit franchi deux fois il faut entourer α une seule fois, donc α est un point ordinaire de Δ. Considérons un autre point intérieur b de s et supposons qu'il lui correspond une extrémité β de σ. Décrivons autour de b une courbe fermée, telle que s soit franchi deux fois; à ceci correspond une courbe qui entoure β deux fois, car c'est la seule manière de franchir σ deux fois. Donc, β est un point de ramification du second ordre. C. q. f. d.

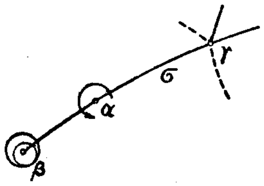


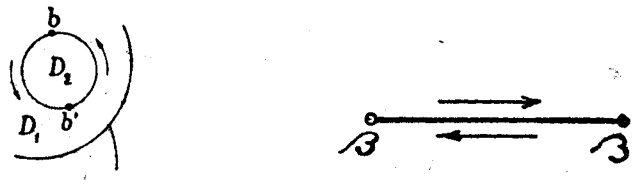
Fig. 2

En ce qui concerne la troisième partie de la proposition V, la démonstration en est semblable. Décrivons autour d'un sommet c commun à p angles une courbe fermée. Généralement à cette courbe correspond sur Δ un chemin qui tourne plusieures fois autour du point correspondant γ de la surface Δ. Au passage par l'un des p angles correspond le passage par un feuillet; comme chaque feuillet recouvre le plan une fois, on entoure γ une fois au plus par ce passage. Or, il y a p angles, qui ne doivent pas nécessairement appartenir tous aux différents domaines fondamentaux; donc dans γ se rencontrent p feuillets au plus, c. à. d. il faut entourer $\leqslant p$ fois le point γ avant que le chemin soit fermé. Donc, γ est un point de ramification d'ordre $\leqslant p$, c. q. f. d.

12. On démontre aussi facilement le fait élémentaire suivant:

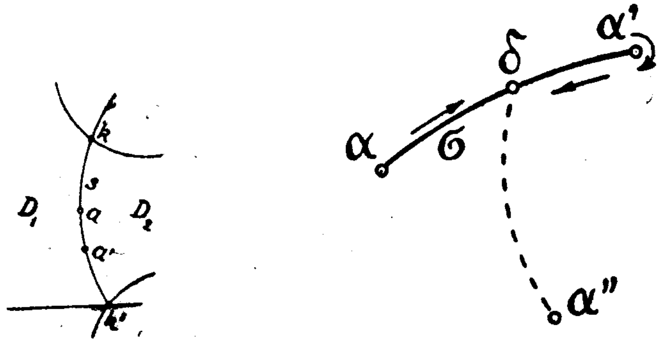
VI. *Parmi les points intérieurs d'un côté de la frontière d'un domaine fondamental il y a au plus deux points extraordinaires.*

Démonstration. D'après la proposition V, ce sont des points extraordinaires du second ordre. Soient D_1 et D_2 les domaines fondamentaux qui se limitent en s et Δ_1 et Δ_2 les feuillets correspondants. À l'exception du cas où s est une courbe fermée (fig. 3,*a*), à quoi corresponderait un arc simple $\beta\beta'$ (fig. 3, *b*) comme frontière complète de Δ_1 et Δ_2, le côté s a deux extrémités, soient k et k' (fig. 3, *c*). Partons alors de k et allons le long de s, en nous tenant du côté de D_1. Soit a le premier et a' le second point extraordinaire rencontré ainsi, α et α' les points de ramification correspondants, situés sur la frontière σ correspondante (fig. 3, *d*). Les points α et α' sont deux extrémités de σ, comme nous l'avons vu au n° 10. Au chemin de a à a' correspond le chemin de α à α' sur le



a. b.

Fig. 3.



c. d.

Fig 3.

bord du feuillet Δ_1; au chemin allant plus loin correspond le retour de α' à α suivant le côté opposé de l'arc $\alpha\alpha'$. Supposons qu'il y ait parmi les points intérieurs de s un troisième point extraordinaire a''. À ce point corresponderait encore un point extrême α'', donc un point qui n'est pas situé sur $\alpha\alpha'$, le long duquel nous avons commencé le retour vers α. Donc nous devrions quitter l'arc $\alpha\alpha'$ en l'un de ses points δ et suivre un nouvel arc $\delta\alpha''$; au moins trois arcs $\delta\alpha$, $\delta\alpha'$, $\delta\alpha''$ se rencontreraient en δ. Or, au point δ devrait correspondre un point ordinaire d situé sur s entre a' et k', ce qui est impossible d'après les considérations du n° 10. Par conséquent il est exclu qu'il y ait un troisième point extraordinaire.

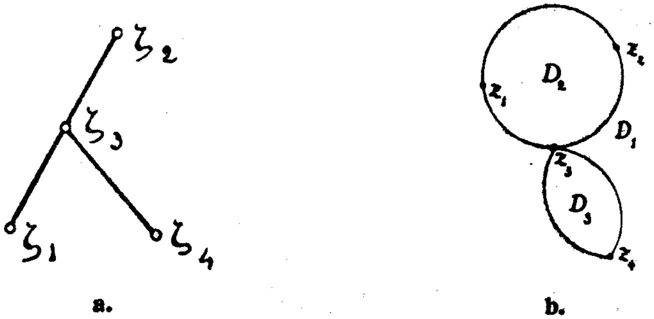


Fig. 4.

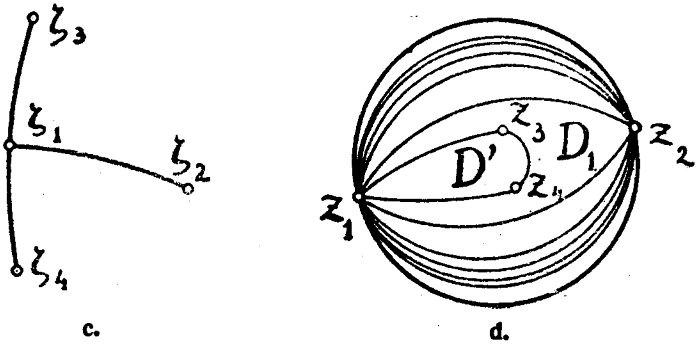


Fig. 4.

Comme conséquence de VI on a:

VII. *L'image topologique d'un système de feuillets constitue un réseau qui ne contient nulle part plus de deux noeuds consécutifs du second ordre.*

13. L'exemple suivant va nous rappeler la possibilité que deux points extraordinaires se trouvent parmi les points intérieurs d'un côté de la frontière d'un domaine fondamental.

Imaginons une surface de Riemann à deux feuillets Δ_1 et Δ_2, les points de ramification étant ζ_1 et ζ_2 et la frontière des feuillets $\zeta_1 \zeta_2$. Coupons Δ_1 le long de l'arc $\zeta_3 \zeta_4$, ζ_3 étant un point intérieur de l'arc $\zeta_1 \zeta_2$ et relions le long de cette coupure Δ avec un feuillet nouveau Δ' (fig. 4, *a*). Cela signifie dans l'image topologique de ce système de feuillets qu'on délimite dans D_1 un nouveau domaine D' (fig. 4, *b*) dont la frontière passe par un point z_3 de l'un des arcs $z_1 z_2$. Sur le côté $z_3 z_1 z_3$ de la frontière de D_1 et D_2 se trouvent deux points extraordinaires z_1 et z_2, et c'est l'existence de ces points qu'il fallait démontrer. (Les fig. 4, *c* et *d* représentent un exemple analogue, où le nombre des feuillets est infini).

Communiqué le 16-XII-1940.

О ЈЕДНОМ ТОПОЛОШКОМ ПРОБЛЕМУ ТЕОРИЈЕ РИМАНОВИХ ПОВРШИНА

Од

М. РАДОЈЧИЋА

У испитивању мултиформних функција $z(\zeta)$ или униформних $\zeta(z)$ могу се увек разликовати два питања: једно је тополошке природе, друго припада конформној метрици. Што се првог питања тиче, јавља се пре свега потреба да се посматрана Риманова површина Δ у погледу на своја тополошка својства што прегледније карактерише. У ту сврху писац уводи појам *тополошке слике* система листова на које је Δ подељена, или основних области инверсне функције, и доказује ове ставове:

I. *Тополошка слика система листова претставља „мрежу“* (тј. комплекс „дужи“ у тополошком смислу).

II. *Ако је Δ елиптичног типа, тополошка слика система листова претставља коначну мрежу.*

III. *Ако је Δ хиперболичног или параболичног типа, тополошка слика система листова претставља бесконачну мрежу, садржану у унутрашњости једног тополошког круга. Та мрежа садржи бескрајан низ кола* (циклуса), *који има ове особине: 1. свако коло тог низа омеђује област коју споља омеђује само коначан број елементарних области; 2. свако коло садржи све елементарне области које садржи претходно коло; 3. свака елементарна област мреже садржана је у унутрашњости бар једног кола.*

IV. *Тополошка слика система основних области претставља мрежу у којој нема чворова другог реда.*

V. *Унутрашње тачке основних области јесу обичне тачке; на међи тих области унутрашња тачка неке стране јесте обична или нарочита тачка другог реда; теме неког снопа углова у коме се састоје* **p** *углова јесте обична или нарочита тачка реда* $\leqslant$ **p**; *трансцендентном темену одговара трансцендентна тачка гранања.*

VI. *На једној страни међе неке основне области, између њених крајњих тачака, не могу постојати више од две нарочите тачке.*

VII. *Тополошка слика система листова претставља мрежу која не садржи нигде више од два узастопна чвора другог реда.*

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Errera Du coloriage des cartes et de quelques questions d'analysis situs (Thèse, Bruxelles, 1920).

[2] R Nevanlinna–Über die Riemannsche Fläche einer analytischen Funktion (Verh. des Int. Math. Kongresses, Zürich, 1932).

[3] M. Radoitchitch–Sur la division des surfaces de Riemann en feuillets (Glas de l'Acad. Roy. Serbe, t. 134 Beograd, 1929).

[4] M. Radoitchitch–Sur une manière de partager les surfaces de Riemann en feuillets (Glas de l'Acad. Roy. Serbe, t. 146, Beograd, 1931).

[5] M Radojčić–Sur une classe de fonctions analytiques (Publ. math. de l'Univ. de Belgrade, t. 1, 1932).

[6] T. Shimizu–On the fundamental domains and the groups for meromorphic functions, I (Jap. J. of Math., vol. 8, 1931).

[7] A. Speiser Probleme aus dem Gebiet der ganzen transzendenten Funktionen (Comment. math. helv., 1, 1929).

[8] A. Speiser–Über Riemannsche Flächen (Comment. math. helv 2, 1930).

SUR L'ALLURE DES FONCTIONS ANALYTIQUES AU VOISINAGE DES SINGULARITÉS ESSENTIELLES ;

Par M. Radojčić.

1. Dans certains de mes travaux précédents (¹) je m'étais proposé l'étude générale des fonctions analytiques au voisinage de leurs singularités essentielles, basée sur la division en feuillets, complète ou partielle, des surfaces de Riemann appartenant aux fonctions inverses. A cette division correspond une division du domaine d'existence de la fonction considérée, ou seulement d'un voisinage de la singularité envisagée, en domaines, que nous avons nommés domaines fondamentaux. Comme ces travaux le montrent déjà, tout un groupe de faits ayant une signification simple et se démontrant facilement, repose uniquement sur les propriétés topologiques du réseau des domaines fondamentaux. Celui-ci nous représente l'entrelacement des feuillets et par conséquent la nature de la surface de Riemann correspondante.

2. Dans la présente communication nous avons l'intention de continuer dans la même voie, en démontrant quelques propositions nouvelles qui se rattachent directement à certaines autres démontrées antérieurement (²). Donc, nous reprendrons les mêmes conditions générales, ce qui nous dispense de les répéter complètement. Pourtant, quelques mots ne seront pas, peut-être, inutiles.

(¹) *Sur la division des surfaces de Riemann en feuillets* (*Glas de l'Acad. Roy. Serbe*, t. 134, 1929). *Sur une manière de partager les surfaces de Riemann en feuillets* (*Glas*, t. 146, 1931). *Sur les domaines fondamentaux des fonctions méromorphes* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 190). *Sur une classe de fonctions analytiques* (*Publ. math. de l'Univ. de Belgrade*, t. 1, 1932). *Sur les domaines fondamentaux des fonctions analytiques auprès d'une singularité essentielle* (*Publ.*, t. 4, 1935). *Domaines fondamentaux et valeurs exceptionnelles des fonctions analytiques aux environs des singularités essentielles* (*Bulletin de l'Acad. Roy. Serbe*, 1936.

(²) Voir les deux derniers des travaux cités.

Il s'agit d'un certain voisinage D d'une singularité essentielle S, la fonction considérée $\zeta = f(z)$ y étant uniforme, méromorphe. D est représenté par un domaine ouvert, simplement ou doublement connexe, suivant que S est un arc de cercle ou un point unique (appartenant à un ensemble quelconque de points singuliers) et qu'il se trouve sur la frontière unique de D, ou bien que S est un cercle entier ou un point essentiel isolé et qu'il constitue la frontière intérieure de D. Puisque, grâce à la représentation conforme, tout continu linéaire peut être transformé en un cercle ou en un arc de cercle, S est en réalité quelconque; la restriction ne concerne que D.

Nous supposons que D soit divisé en domaines fondamentaux de manière que : 1° la frontière de chacun d'eux soit continue; 2° que de toute suite infinie de ces domaines on puisse extraire une suite qui converge vers un point de S (qui peut être le point unique de S) et 3° que tous les points de S soient de tels points limites (³).

Un point situé sur la frontière d'un domaine fondamental est appelé par nous un *sommet* de ce domaine, si tout voisinage de ce point appartient à plus de deux domaines fondamentaux différents. Les sommets d'un domaine fondamental divisent la frontière en *côtés*. Deux côtés consécutifs renferment un *angle*. Chaque ensemble d'angles, qui ont un sommet commun et dont les éléments forment une suite ininterrompue d'angles adjacents, est nommé un *faisceau*, pourvu que cet ensemble ne soit pas une partie d'un ensemble plus grand de la même espèce. Les sommets, les angles et les faisceaux sont appelés *algébriques* ou *transcendants*, suivant que le sommet correspondant soit un point algébrique ou transcendant de $f(z)$.

En outre, nous dirons pour un domaine fondamental qu'il entoure un autre, si l'autre est contenu dans l'un des domaines finis du plan, limités par S et le premier domaine. Si, entre deux domaines fondamentaux ce rapport n'existe pas, nous dirons simplement qu'ils se trouvent l'un à côté de l'autre.

3. Notons d'abord les deux propositions suivantes, concernant les voisinages D de la *première espèce*, c'est-à-dire dans lesquels

---

(³) On reconnait ici les conditions A, B, C de l'avant-dernier des travaux cités.

tous les domaines fondamentaux, excepté peut-être un nombre fini, ont des sommets transcendants situés sur S :

Lorsque, D *étant de la première espèce, deux angles transcendants d'un domaine fondamental situé dans* D *appartiennent au même faisceau transcendant, le nombre des domaines fondamentaux situés entre ces deux angles est fini.*

En effet, le nombre des angles transcendants situés entre ces deux angles est fini (⁴); puisque D est de la première espèce, le nombre des domaines fondamentaux situés entre ces deux angles est également fini.

Lorsque, D *étant de la première espèce, deux angles transcendants d'un domaine fondamental situé dans* D *appartiennent au même faisceau transcendant, ce domaine entoure au moins un domaine fondamental qui n'a qu'un seul angle transcendant.*

En effet, le nombre des domaines fondamentaux situés entre les deux angles étant fini, si l'un de ces domaines a plus d'un angle transcendant, le nombre des domaines fondamentaux situés entre deux de ces angles-ci est fini, différent de zéro et plus petit que le premier. S'il y a parmi ces derniers domaines de nouveau un, qui a plus d'un angle transcendant, la même conclusion a lieu, etc. Comme le nombre des domaines envisagés diminue ainsi et comme il ne devient jamais nul, on arrive à un certain nombre de domaines dont aucun n'a plus qu'un seul angle transcendant. Parmi ceux-ci il y en a au moins un qui possède un angle transcendant, puisqu'ils remplissent un domaine du plan qui a S sur sa frontière.

4. Sur ces faits s'appuient d'abord les deux propositions suivantes :

I. *Si chaque domaine fondamental situé dans* D, *excepté peut-être un nombre fini, a au moins deux sommets transcendants et s'il y a une infinité de ces domaines l'un à côté de*

(⁴) *Ibid* n° 6.

l'autre, alors, il y a dans D *une infinité de faisceaux transcendants.*

En effet, puisque le nombre des domaines fondamentaux qui n'ont qu'un seul angle transcendant est fini, le nombre des domaines fondamentaux dont deux angles transcendants appartiennent au même faisceau est, d'après ce qu'on a vu, également fini. Par conséquent, chaque domaine fondamental dans D, sauf peut-être un nombre fini, a au moins deux angles transcendants appartenant à deux faisceaux transcendants. Prenons parmi ces derniers deux qui sont situés l'un à côté de l'autre; ils ont au moins quatre angles transcendants, appartenant à plus de deux faisceaux transcendants. Donc le nombre des domaines situés l'un à côté de l'autre étant infini, il y a une infinité de faisceaux transcendants.

II. *Si chaque domaine fondamental situé dans* D, *excepté peut-être un nombre fini, a au moins deux sommets transcendants et s'il y a une infinité de ces domaines dont chacun a au moins trois sommets trancendants, alors, il y a dans* D *une infinité de faisceaux transcendants.*

S'il y a, parmi ceux qui ont au moins trois sommets transcendants, une infinité de domaines se trouvant l'un à côté de l'autre, la proposition se réduit à la précédente. Supposons que cela n'a pas lieu. Alors une infinité de ces domaines, formant une suite $D_n (n = 1, 2, \ldots)$, est disposée de sorte que D_n entoure $D_{n+1} (n = 1, 2, \ldots)$. Puisque le nombre des domaines qui ont moins de deux sommets transcendants est fini, les faits du n° 3 nous autorisent à supposer que chaque D_n ait au moins trois angles appartenant à trois faisceaux transcendants. Désignons ces faisceaux par F_n, F'_n, F''_n de façon que F''_n se trouve entre F_n et F'_n. Puisque D_n entoure D_{n+1}, les faisceaux F_{n+1}, F'_{n+1}, F''_{n+1} se trouvent «*entre*» F_n et F''_n ou «*entre*» F'_n et F''_n (5). Il en résulte que l'un au moins des $F^{(i)}_{n+1}$ est différent des $F^{(i)}_n$. D'autant plus, l'un au moins des $F^{(i)}_{n+2}$ est différent des $F^{(i)}_n$, etc., donc il y a une infinité de faisceaux transcendants situés dans D.

---

(5) «*Entre*» F_n et F''_n doit signifier : entre F_n et F''_n ou égal à F_n ou à F''_n.

La proposition II est équivalente à la proposition suivante, concernant la fonction inverse $z = \varphi(\zeta)$ et le domaine Δ de sa surface de Riemann, correspondant à D :

Si dans Δ *chaque feuillet, excepté peut-être un nombre fini, a sur sa frontière au moins deux points de ramification transcendants et si, pour une infinité de ces feuillets, le nombre deux est dépassé, l'ensemble des points de ramification transcendants situés sur la frontière de* Δ *est infini.*

5. Démontrons maintenant la proposition suivante :

III. *Si chaque domaine fondamental situé dans* D, *excepté peut-être un nombre fini, a au moins deux sommets transcendants et s'il y a dans* D *une infinité de sommets algébriques, alors, il y a dans* D *une infinité de faisceaux transcendants.*

En effet, désignons par $s_n (n = 1, 2, \ldots)$ une suite infinie de ces sommets algébriques. En chaque point s_n se rencontrent plus de deux domaines fondamentaux. Soient D_n, D'_n, D''_n trois parmi ces domaines. Parmi les $D_n (n = 1, 2, \ldots)$ il peut y en avoir d'identiques. Mais le nombre des domaines fondamentaux se rencontrant dans l'ensemble des s_n étant infini, on peut supposer qu'il y ait une infinité des D_n différents entre eux et, dès lors, que tous les D_n soient différents entre eux.

Le nombre des domaines fondamentaux, qui ont moins de deux sommets transcendants, étant fini, les propositions du n° 3 nous autorisent à supposer que chaque D_n, D'_n, $D''_n (n = 1, 2, \ldots)$ ait au moins deux sommets transcendants, appartenant à deux faisceaux transcendants, et une frontière unique.

Divisons la frontière de D_n en arcs dont les bouts sont les sommets transcendants de D_n. L'un de ces arcs, soit E_n, renferme avec S un domaine fini, qui contient les autres arcs; désignons l'ensemble de ces derniers par I_n. Le point S_n se trouve sur E_n ou sur I_n.

S'il y a une infinité des D_n qui sont situés l'un à côté de l'autre, notre proposition se ramène à I. Supposons donc que cela n'a pas lieu. Alors, on peut admettre que D_n entoure $D_{n+1} (n = 1, 2, \ldots)$. Deux cas se présentent :

1° Il y a une infinité de sommets s_n se trouvant sur les I_n; désignons cette infinité de nouveau par $s_n (n = 1, 2, \ldots)$. Soient F_n, F'_n les faisceaux transcendants qui contiennent les deux angles transcendants de D_n dont les sommets présentent les bouts de E_n. Puisque les autres angles transcendants de D_n, s'il y en a, sont situés entre ces deux, F_n et F'_n sont différents entre eux. Comme s_n se trouve sur I_n, D_n entoure D'_n et D''_n; donc ceux-ci sont situés l'un à côté de l'autre et par conséquent les angles transcendants de D'_n et D''_n appartiennent au moins à trois faisceaux transcendants dont l'un, soit F''_n, est sûrement différent de F_n et F'_n, étant situé entre ceux-ci. Puisque D_n entoure D_{n+1}, les faisceaux F_{n+1}, F'_{n+1}, F''_{n+1} se trouvent «*entre*» F_n et F''_n ou «*entre*» F'_n et F''_n, de sorte que l'un au moins des $F^{(i)}_{n+1}$ est différent des $F^{(i)}_n$. D'autant plus, l'un au moins des $F^{(i)}_{n+2}$ est différent des $F^{(i)}_n$, etc. Donc, il y a dans D une infinité de faisceaux transcendants.

2° Il y a une infinité de sommets s_n se trouvant sur les E_n; désignons cette infinité de nouveau par $s_n (n = 1, 2, \ldots)$. Soient F'_n et F''_n les faisceaux transcendants qui contiennent deux des angles de D_n et qui sont différents entre eux. D_n et D'_n sont l'un à côté de l'autre, donc leurs angles transcendants appartiennent à au moins trois faisceaux transcendants dont l'un, soit F_n, est sûrement différent de F'_n et F''_n. Cette fois-ci F'_n est situé entre F_n et F''_n ou bien, F''_n est situé entre F_n et F'_n. Supposons que les faisceaux qui sont désignés par F'_n et F''_n, le soient de telle sorte, que pour tout n F_n soit situé entre F'_n et F''_n. Puisque D_n entoure D_{n+1} et D'_{n+1} (6), les faisceaux F_{n+1}, F'_{n+1}, F''_{n+1} se trouvent « *entre* » F'_n et F''_n. Par conséquent, l'un au moins des $F^{(i)}_{n+1}$ est différent des $F^{(i)}_n$; donc il y a dans D une infinité de faisceaux transcendants.

Cette démonstration nous rappelle une autre qui avait pour but la proposition suivante :

Si le nombre p des valeurs exceptionnelles dans D *est plus grand que un et s'il y a dans* D *une infinité de faisceaux algébriques, alors, il y a dans* D *aussi une infinité de faisceaux transcendants* (7).

---

(6) Il est possible aussi que D'_{n+1} soit identique à D_n. Alors D''_{n+1} est sûrement différent de D_n et l'on peut remplacer D'_{n+1} par D''_{n+1}.

(7) Voir le dernier des travaux cités.

Or, c'est une conséquence immédiate de la proposition III. En effet, comme $p > 1$, chaque domaine fondamental, excepté peut-être un nombre fini, a au moins deux sommets transcendants, de sorte que les conditions de la proposition III soient remplies.

Dans le domaine Δ de la fonction inverse la proposition III conduit à la proposition suivante :

Si dans Δ *chaque feuillet, excepté peut-être un nombre fini, a sur sa frontière au moins deux points de ramification transcendants et s'il y a dans* Δ *une infinité des points de ramification algébriques d'ordre* > 2, *alors, le nombre des points de ramification transcendants situés sur la frontière de* Δ *est infini.*

Les propositions II et III peuvent être réunies en une seule, à savoir :

IV. *Si chaque domaine fondamental situé dans* D, *excepté peut-être un nombre fini, a au moins deux sommets transcendants et si une infinité de ces domaines a un troisième sommet, transcendant ou algébrique, alors, il y a dans* D *une infinité de faisceaux transcendants.*

6. Supposons maintenant que, outre les conditions contenues dans les propositions I, II, III, il y ait dans D une valeur exceptionnelle ω (c'est-à-dire que $f(z)$ accepte ω dans D un nombre fini de fois au plus). Nous allons montrer qu'il y a alors dans D une infinité de faisceaux transcendants dont la valeur asymptotique est ω.

Considérons d'abord la proposition I. Évidemment, il y a une infinité de domaines fondamentaux situés l'un à côté de l'autre et possédant, chacun, un angle transcendant dont la valeur asymptotique est ω. Parmi ces domaines formant un ensemble E prenons un ensemble infini E' tel, qu'entre chaque paire d'éléments de E' se trouve au moins un élément de E; alors deux angles appartenant à deux éléments de E' ne peuvent jamais appartenir à un seul faisceau transcendant. Par conséquent chaque domaine de E' a un angle appartenant à un faisceau transcendant dont la valeur asymptotique est ω et qui est différent de tous les autres. Donc le nombre de ces faisceaux est infini.

Voyons maintenant la proposition II. Nous pouvons supposer que l'un des faisceaux F_n, F'_n, F''_n qui entrent dans sa démonstration — nous le désignerons par $F_n^{(\omega)}$ — ait la valeur asymptotique ω. S'il y a une infinité des $F_n^{(\omega)}$ différents, notre proposition est démontrée. Si le contraire a lieu, tous les $F_n^{(\omega)}$ sont pour n assez grand identiques entre eux. Alors, puisque les $F_{n+1}^{(i)}$ se trouvent « *entre* » F_n et F''_n ou « *entre* » F'_n et F''_n, $F_n^{(\omega)}$ est pour n assez grand différent de F''_n ; pour simplifier la description, supposons que pour n assez grand $F_n^{(\omega)}$ soit identique à F_n et que par conséquent les $F_{n+1}^{(i)}$ se trouvent « *entre* » F_n et F''_n. Puisqu'une infinité de domaines fondamentaux se trouve entre deux angles de D_n appartenant à F'_n et F''_n, il y a sûrement un faisceau transcendant G_n dont la valeur asymptotique est ω et qui est situé « *entre* » F'_n et F''_n. Or, il y en a une infinité parmi les G_n qui sont différents entre eux.

Quant à la proposition III, reprenons sa démonstration et ajoutons les remarques suivantes, valables pour chacun des deux cas désignés par 1 et 2. Puisque ω est une valeur exceptionnelle, on peut supposer que parmi les faisceaux contenant les angles transcendants de D'_n il y ait un, soit $F_n^{(\omega)}$, dont la valeur asymptotique est ω. Ce faisceau peut coïncider avec F_n ou F'_n. Sinon, choisissons $F_n^{(\omega)}$ pour F''_n. Ainsi l'un des faisceaux F_n, F'_n, F''_n sera égal à $F_n^{(\omega)}$. D'ici on peut continuer exactement comme dans la considération précédente, qui se rapporte à la proposition II.

Nous avons donc la proposition suivante :

V. *S'il y a dans* D *une valeur exceptionnelle* ω, *si chaque domaine fondamental situé dans* D, *excepté peut-être un nombre fini, a au moins deux sommets transcendants et si une infinité de ces domaines a un troisième sommet, transcendant ou algébrique, alors, il y a dans* D *une infinité de faisceaux transcendants dont la valeur asymptotique est* ω ; *dans* Δ *il y a une infinité de points de ramification transcendants dont l'affixe est* ω.

Pour illustrer la proposition V citons quelques conséquences :

VI. *Si, hormis les points de ramification trancendants qui correspondent à deux valeurs exceptionnelles* ω_1 *et* ω_2 *de* $f(z)$ *dans* D, *il y a dans* Δ *ou sur sa frontière une infinité de points de ramification, soit transcendants soit algébriques d'ordre* > 2, *alors, le nombre des points de ramification transcendants situés sur la frontière de* Δ *et correspondant à* ω_1 *(ou à* ω_2*) est infini.*

VII. *S'il y a dans* D *au moins deux valeurs exceptionnelles et une valeur asymptotique différente de ces deux valeurs, alors il y a sur la frontière de* Δ *une infinité de points transcendants situés en chacun des points* $\zeta = \omega$ *désignant les valeurs exceptionnelles.*

En effet, la valeur asymptotique mentionnée correspond à un faisceau transcendant. Celui-ci est composé d'un nombre fini ou infini d'angles. Si ce nombre est fini, il y a, d'après la définition du faisceau (⁸), une infinité de sommets algébriques dans D ; s'il est infini, une infinité de domaines fondamentaux situés dans D a plus de deux sommets transcendants. Or, dans l'un et l'autre cas s'applique la proposition V.

VIII. *S'il y a dans* D *plus de deux valeurs exceptionnelles, alors il y a dans* D *une infinité de faisceaux transcendants ; il y a même une infinité pour chacune de ces valeurs et, par conséquent, une infinité de points de ramification transcendants se trouve sur la frontière de* Δ *en chaque point du plan de* ζ, *qui correspond à l'une des valeurs exceptionnelles.*

7. Démontrons encore la proposition suivante, *valable dans le cas où* D *représente le voisinage tout entier d'un point essentiel isolé ou d'une ligne essentielle fermée* (⁹) :

Si le nombre des valeurs exceptionnelles dans D *est égal à deux, le nombre des faisceaux transcendants situés dans* D *peut être infini ou bien un nombre pair quelconque ; jamais le nombre de ces faisceaux ne peut être impair.*

En effet, selon la proposition VII, s'il y a dans D hormis les

---

(⁸) *Voir* le n° 5 dans l'avant-dernier des travaux cités.

(⁹) C'est-à-dire dans le second des deux cas qui se trouvent dans le n° 1.

deux valeurs exceptionnelles mentionnées et que nous désignerons par ω_1, ω_2, une autre valeur asymptotique, le nombre des faisceaux transcendants est infini. Donc, si ce nombre est fini, ω_1 et ω_2 sont les seules valeurs asymptotiques dans D. Or, nous avons démontré ailleurs (10) que si le nombre des valeurs exceptionnelles est plus grand que un, deux faisceaux transcendants consécutifs ont des valeurs asymptotiques différentes. Donc, en suivant les faisceaux trancendants dans l'ordre qu'ils occupent autour de S, nous rencontrons sans cesse alternativement les deux valeurs ω_1 et ω_2, ce qui exige que le nombre de ces faisceaux soit pair.

D'autre part la fonction $e^{z^{-n}}$ nous donne l'exemple d'une fonction qui a $z = 0$ comme point essentiel, deux valeurs exceptionnelles 0 et ∞ et $2n$ faisceaux transcendants.

Ces remarques montrent qu'on peut s'exprimer aussi par les mots suivants :

Si ω_1 *et* ω_2 *sont les seules valeurs exceptionnelles et si le nombre des points de ramification transcendants situés sur la frontière de* Δ *est fini, alors ce nombre est pair, sa moitié se trouve en* $\zeta = \omega_1$ *et l'autre moitié en* $\zeta = \omega_2$.

---

(10) *Voir* le dernier des travaux cités.

THÉORIE DES FONCTIONS. — *Sur les domaines fondamentaux des fonctions méromorphes.* Note de M. **Miloch Radoïtchitch.**

Dans la présente Note nous appellerons un domaine ouvert de la surface de Riemann d'une fonction analytique $z = \varphi(\zeta)$, un *feuillet*, s'il satisfait aux trois conditions suivantes : 1° il recouvre tout le plan de ζ sans laisser de domaines complémentaires; 2° il ne le recouvre dans aucune partie plus d'une seule fois; 3° chaque partie de sa frontière est commune à certains domaines de la surface, extérieurs au domaine considéré.

A chaque feuillet ainsi défini, de $\varphi(\zeta)$, correspond sur la surface de Riemann de la fonction inverse $\zeta = f(z)$, un domaine ouvert que nous appellerons un *domaine fondamental* de $f(z)$ (1). Dans un domaine fondamental d'une fonction analytique, celle-ci est par conséquent univalente et elle y prend toute valeur, soit dans l'intérieur, soit sur la frontière comme une valeur limite.

Nous dirons enfin qu'une surface de Riemann est *divisible* en feuillets (ou en domaines fondamentaux), s'il existe sur cette surface une suite de feuillets (resp. de domaines fondamentaux) sans domaines communs, et qui ne laisse subsister sur la surface aucun domaine qui soit extérieur à cette suite.

Ceci étant posé, nous allons signaler quelques conséquences immédiates des deux propositions suivantes :

I. La surface de Riemann de la fonction inverse d'une fonction méromorphe est illimitée (2).

---

(1) Le *domaine fondamental* est une expression qu'on trouve chez F. Klein, employée dans un sens un peu différent, pour les fonctions de H. Poincaré.

(2) M. F. Iversen, *Recherches sur les fonctions inverses des fonctions méromorphes* (*Thèse*, 1914, p. 18), M. G. Valiron en a simplifié la démonstration : *Démonstration de l'existence pour les fonctions entières des chemins de détermination infinie* (*Comptes rendus*, 166, 1918, p. 382). J'ai donné à cette proposition la forme actuelle dans ma Note *Sur les fonctions inverses des fonctions méromorphes* (*Comptes rendus*, 189, 1929, p. 1240), où je l'ai démontré d'une autre manière, ignorant les résultats des travaux cités de M. Iversen et M. Valiron.

II. Toute surface de Riemann illimitée est divisible en feuillets dont les frontières sont continues (¹).

Si nous considérons la fonction inverse, nous obtenons de la proposition II, immédiatement la suivante :

III. La surface de Riemann d'une fonction analytique dont l'inverse a une surface illimitée, est divisible en domaines fondamentaux, dont les frontières sont continues dans tous les points au moins, où la fonction n'a que des singularités algébriques.

Passons aux fonctions méromorphes. En appliquant I à II et III nous obtenons respectivement les deux propositions suivantes :

IV. *La surface de Riemann de la fonction inverse d'une fonction méromorphe est divisible en feuillets dont les frontières sont continues.*

V. *Le plan des z d'une fonction méromorphe $f(z)$ est divisible en domaines fondamentaux de cette fonction, dont les frontières sont continues.*

On voit facilement comment la dernière affirmation dans V résulte de III. Le point $z = \infty$ étant la seule singularité transcendante, les discontinuités de la frontière d'un domaine fondamental devraient se limiter à ce point seul. Puisque c'est impossible, il faut bien que la frontière de ce domaine soit continue.

(¹) La démonstration de cette proposition se trouve dans mon travail, *Sur la division des surfaces de Riemann en feuillets* (*Publ. de l'Acad. Roy. Serbe*, 134, 1929.)

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*,
t. **190**, p. 356, séance du 10 février 1930.)

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE DES COMPTES RENDUS DES SEANCES DE L'ACADEMIE DES SCIENCES
88711-30 Paris. — Quai des Grands-Augustins, 55.

THÉORIE DES FONCTIONS. — *Sur les fonctions inverses des fonctions méromorphes*. Note (¹) de M. **Miloch Radoïtchitch**.

Soit $\varphi(\zeta)$ une fonction analytique. Nous dirons qu'un cercle Θ du plan de z est un *cercle de limitation* pour $\varphi(\zeta)$ si, en prolongeant analytiquement un certain élément de $\varphi(\zeta)$ situé dans Θ, et de toutes les manières possibles sans sortir de Θ, il existe un domaine dans Θ où l'on ne peut pas pénétrer.

Nous baserons sur cette notion une classification des surfaces de Riemann en deux catégories : *Nous dirons que la surface de Riemann d'une fonction analytique est limitée ou illimitée, suivant que cette fonction a des cercles de limitation ou n'en a pas.* Pour une fonction uniforme ceci revient à dire qu'elle a ou non des lignes singulières, mais en général la présence des lignes singulières n'est pas une condition suffisante pour qu'une surface de Riemann soit limitée. Remarquons en passant que cette propriété pourrait s'énoncer également de la manière suivante : Soit dans le plan une courbe continue quelconque; si nous pouvons prolonger la fonction le long de toute cette courbe, en ne nous écartant d'elle qu'à une distance inférieure à un nombre arbitrairement petit, alors la surface de Riemann est illimitée; dans le cas contraire elle est limitée.

Cela étant posé, nous démontrons le théorème suivant :

La surface de Riemann de la fonction inverse d'une fonction méromorphe est illimitée (²).

Pour plus de clarté, ramenons par une transformation linéaire l'infini à l'origine du plan et désignons par $\zeta = f(z)$ la fonction uniforme, au point essentiel $z = 0$ et qui n'a dans le reste du plan comme singularités que des pôles. Soit $z = \varphi(\zeta)$ la fonction multiforme, inverse.

Admettons par impossible que la surface de $\varphi(\zeta)$ est limitée. Soit alors Θ un cercle de limitation. Supposons que Θ se trouve dans la partie finie du plan. Prolongeons dans Θ un élément donné de $\varphi(\zeta)$, de toutes les manières possibles. Soit Δ le domaine ouvert obtenu ainsi sur la surface de Riemann et soit Δ' le domaine ouvert du plan, que nous avons couvert silmul-

---

(¹) Séance du 23 décembre 1929.

(²) Les fonctions entières n'en font qu'un cas particulier.

tanément. Δ' ne contient qu'une partie de Θ : soit donc Ω l'un de ses domaines complémentaires dans Θ. Nous pouvons évidemment supposer que Ω limite à un certain arc ω de la circonférence de Θ.

$z = \varphi(\zeta)$ transmet la représentation conforme de Δ sur un domaine ouvert D du plan de z et que nous pouvons supposer borné. D est simplement connexe car, s'il ne l'était pas, il y aurait sur la frontière de D un contour qui ne passe pas par $z = 0$; à celui-ci correspondrait un tour complet sur la circonférence de Θ, donc ω n'existerait pas. Par conséquent la frontière de D est une seule ligne qui passe en général une infinité de fois par $z = 0$. Par ce point cette frontière se décompose alors en une infinité de lignes simples, fermées $l_n (n = 0, 1, \ldots)$. Soit l_0 celle qui enveloppe toutes les autres, ces dernières étant extérieures l'une à l'autre.

La frontière de D est continue car, dans le cas contraire, il y aurait un bout discontinu qui contiendrait nécessairement un point $z = a \neq 0$, où $f(z)$ serait holomorphe et $f'(z) \neq 0$. Alors $f(z)$ ferait la représentation conforme d'un petit domaine δ contenant a sur un petit cercle du plan de ζ. Par ce cercle ne pourrait passer qu'un seul arc de Θ, donc de toutes les lignes l_n il n'y aurait dans δ qu'un seul arc, analytique : il y a donc contradiction.

Faisons la représentation conforme du domaine D sur un cercle C du plan d'une variable nouvelle u. Soit $z = \psi(u)$ la fonction qui transmet cette représentation. $\psi(u)$ est holomorphe dans C et, puisque la frontière de D est continue, $\psi(u)$ est continue sur le bord de C. Comme la frontière de D passe généralement une infinité de fois par $z = 0$, il lui correspond sur le bord de C un ensemble infini de points, E où $\psi(u) = 0$. Donc, d'après un théorème de MM. Riesz (*IVe Congrès des mathématiciens à Stockholm*, 1916), la mesure de E doit être nulle.

Faisons encore la représentation conforme du cercle Θ sur un demi-plan limité par l'axe réel du plan d'une variable v, et de sorte que $v = \infty$ corresponde au point ζ_1, situé sur le milieu de ω. Désignons cette correspondance par $v = \chi(\zeta)$, ce qui équivaut à

$$\zeta - \zeta_0 = (\zeta_1 - \zeta_0) \frac{v - a}{v - \bar{a}},$$

où ζ_0 est le centre de Θ, a une constante et $\bar{a}$ sa conjuguée. A Δ' correspond alors un domaine borné du plan de v.

Considérons la fonction composée

$$v - \chi\{f[\psi(u)]\} \equiv \Psi(u).$$

Elle est holomorphe et bornée dans C. En outre, elle est réelle sur le bord de C, excepté, au plus, aux points de E. Soit Q la partie imaginaire de $\Phi(u)$. C'est une fonction harmonique dans C et nulle sur le bord de C, sauf, au plus, aux points de E. Donc nous obtenons toute valeur de Q située à l'intérieur d'un contour Γ contenu dans C, au moyen des valeurs Q_Γ sur Γ, par la formule connue

$$Q = \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma Q_\Gamma \frac{\partial g}{\partial n} ds,$$

où g est la fonction de Green dans Γ, $\frac{\partial g}{\partial n}$ sa dérivée dans le sens normal à Γ et ds l'élément d'arc de Γ. Si nous nous approchons du bord de C, Q tend vers zéro, sauf sur l'ensemble de mesure nulle, E, où Q reste pourtant borné. Donc nous pouvons remplacer Γ par le bord de C. Mais alors l'intégrale est nulle et $\Psi(u)$ donc une constante réelle. Or ceci est faux, par conséquent la supposition que la surface de Riemann de $\varphi(\zeta)$ est limitée est inexacte.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences*,
t. 189, p. 1240, séance du 30 décembre 1929.)

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE DES COMPTES RENDUS DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.
88336-30 Paris — Quai des Grands-Augustins, 55.

Sur les domaines fondamentaux des fonctions analytiques au voisinage d'une singularité essentielle.

Par

MILOŠ RADOJČIĆ

1. Les considérations suivantes supposent une division, partielle ou totale, du domaine d'existence d'une fonction analytique en „domaines fondamentaux", de la manière exposée dans mon travail intitulé: „Sur une classe de fonctions analytiques"[1]). On trouve à la fin de ce travail un théorème désigné par 8* et qui comprend l'affirmation suivante:

A. *Le voisinage d'un point singulier essentiel isolé d'une fonction analytique quelconque, autour duquel celle-ci est méromorphe, peut être divisé en domaines fondamentaux de manière que la frontière de chacun d'eux soit continue et qu'ils convergent ensemble vers le point essentiel considéré.*

Supposons pour simplifier les descriptions, que ce point essentiel, et de même toute autre singularité essentielle dont nous aurons à parler, se trouve dans la partie finie du plan.

Rappelons que le voisinage d'un point essentiel isolé, autour duquel la fonction est uniforme, est un domaine ouvert du plan,

---

[1]) *Publications mathématiques de l'Université de Belgrade*, t. I, 1932. Ce travail est strictement lié à deux de mes travaux antérieurs, parus dans le *Glas de l'Acad. Roy. Serbe* t. 134 (1929) et t. 146 (1931),

dont la frontière est composée de ce point lui-même et d'une ligne fermée simple qui entoure ce point, mais qui ne contient, ni sur elle-même, ni à l'intérieur, aucune autre singularité transcendante ou critique algébrique de la même branche de cette fonction.

Le domaine fondamental représente un domaine dans lequel la fonction est univalente et prend toutes les valeurs du plan imaginaire. Plus exactement, un domaine ouvert est appelé fondamental, s'il a les trois propriétés suivantes:

1. la fonction considérée y prend chaque valeur une fois seulement;

2. elle prend toutes les valeurs du plan imaginaire, soit à l'intérieur, soit sur la frontière de ce domaine, comme une valeur limite;

3. chaque partie de cette frontière est commune à certains domaines extérieurs au domaine considéré.

Quant à la division du voisinage envisagé en domaines fondamentaux, il faut remarquer tout d'abord que le nombre de ces domaines est infini. En effet, s'il était fini, la fonction prendrait autour du point considéré chaque valeur un nombre fini de fois seulement, donc se ne serait pas un point essentiel. Comme j'ai montré, *chaque point essentiel isolé est un point limite isolé de domaines fondamentaux*[2]).

Il peut y avoir, évidemment, un certain nombre de ces domaines, qui n'entrent pas entièrement au voisinage envisagé; mais il résulte de la façon dont cette division fut effectuée, que ce nombre est *fini*. Dans beaucoup de cas nous pourions, en ajoutant à ce voisinage les parties des domaines mentionnés, qui restèrent à l'extérieur, rendre la division, pour ainsi dire, complète. Or, ce n'est pas toujours possible, car il peut arriver que les parties qu'il faudrait ajouter ne soient pas des domaines du plan, ou bien, que les domaines fondamentaux dont il est question ne soient pas en réalité fondamentaux, la condition 2. ne pouvant être satisfaite à cause de certaines autres singularités transcendantes. Nous tiendrons compte de toutes ces circonstances possibles, sans nous laisser déranger par une répé-

---

[2]) Ibid. théorème 3'.

tition inutile des mots et qui compliquerait les énoncés. Ces circonstances exigent seulement, que dans certains cas quelques-uns des „domaines fondamentaux" incomplets soient traités comme s'ils étaient complets. Ainsi, la généralité de nos affirmations ne subira de ce côté aucune restriction.

2. Cependant, nos considérations ne se rapporteront pas seulement aux points essentiels isolés; il s'agira aussi de certaines lignes singulières autour desquelles la fonction est uniforme et méromorphe.

D'après le sens général du mot ligne, c'est un continu linéaire de points, qui est donc, par définition, d'une seule pièce. Pour simplifier nos considérations supposons, qu'après avoir appliqué une représentation conforme, ces lignes singulières soient devenues des lignes continues, par exemple un cercle ou un arc de cercle, suivant le cas.

Puisque la fonction est méromorphe autour de la ligne singulière considérée, il n'existe à son voisinage aucune autre singularité transcendante ou critique algébrique. — Ici le *voisinage* signifie, en premier lieu, un domaine ouvert du plan, dont la frontière est composée de cette ligne elle-même et d'une ligne fermée simple, qui entoure la première de manière qu'aucune autre singularité transcendante ou critique algébrique de la même branche ne se trouve, ni à l'intérieur ni sur la frontière de ce domaine. A supposer, bien entendu, que cette branche soit située à l'extérieur et non à l'intérieur de la ligne singulière considérée. La dernière hypothèse ne présente aucune restriction, puisqu'on peut la satisfaire toujours par une transformation homographique du plan.

Or, nous envisagerons encore une seconde espèce de voisinages. Nous donnerons le même nom à un domaine ouvert du plan, dont la frontière est composée de la ligne singulière considérée, qui relie deux points a et b, et d'une autre ligne simple, qui relie également a et b et qui détermine ainsi un domaine simplement connexe dans lequel n'existe, pas même sur sa frontière, aucune autre singularité transcendante ou critique algébrique de la ~~même~~ branche.

Généralement $a \neq b$; la ligne singulière est alors une ligne ouverte — un arc de cercle. En particulier $a = b$; c'est alors une ligne fermée — un cercle, ou bien, nous voulons permettre cette possibilité, la ligne se réduit à un point et nous avons un point singulier unique, isolé ou non.

Cette seconde espèce de voisinages s'impose par ex. dans la considération des arcs partiels d'une ligne singulière ou d'un seul point singulier qui appartient à une ligne singulière ou à un ensemble quelconque de points singuliers. Comme nous avons dit, un tel voisinage est un domaine ouvert simplement connexe. Les voisinages considérés auparavant, y compris le cas d'un point essentiel isolé, représentent, au contraire, des domaines doublement connexes, dont les frontières intérieures sont des cercles ou des points.

On peut comprendre facilement que nous devons choisir parmis toutes les lignes singulières que nous envisagions, celles qui ont des propriétés semblables à celles d'un point essentiel isolé. Celà veut dire, avant tout, qu'elles soient des *lignes essentielles*. Mais il faut exiger davantage: que le théorème cité au début, valable pour les points essentiels, retient d'une certaine façon sa valeur, pour nos lignes singulières, à savoir:

B. *Le voisinage de chaque ligne singulière que nous allons considérer (et dans lequel la fonction est méromorphe) doit être divisible en domaines fondamentaux de manière que la frontière de chacun d'eux soit continue, que de toute suite infinie de ces domaines on puisse extraire une suite parcielle qui converge vers un point de la ligne singulière considérée et qu'enfin, tous les points de cette ligne soient des tels points limites.*

Evidemment, une telle ligne est essentielle.

L'hypothèse précédente est bien nécessaire. Non seulement parce que la ligne singulière pourrait être ordinaire, mais aussi, d'abord, parce qu'une division en domaines fondamentaux pourrait être impossible; ensuite, parce que les frontières de ces domaines ne sont pas nécessairement continues; enfin, parce que certaines suites de ces domaines pourraient converger vers une ligne, au lieu de converger vers un seul point. La restriction aux fonctions qu'il faudrait nommer d'après le travail cité [3]) *absolument automorphes* suffirait peut-être, mais, jusqu'à

---

[3]) Ibid. n⁰ 4 et p. 118.

présent, il n'est démontré à ce sujet que ceci: la fonction dont on considère une ligne singulière étant absolument automorphe au voisinage de cette ligne, ce voisinage peut être divisé en domaines fondamentaux de manière, que la frontière de chacun d'eux soit continue, sauf peut-être sur la ligne elle-même; que toute suite infinie de ces domaines s'approche de cette ligne et qu'ainsi une infinité de domaines fondamentaux arrive près de chaque point de cette ligne[4].

Puisque nous envisageons aussi le cas où la ligne singulière se réduit à un point, qui n'est pas nécessairement une singularité isolée, un énoncé analogue à **B** doit compléter notre base, à savoir:

C. *Le voisinage de chaque point singulier non isolé que nous allons considérer (et dans lequel la fonction est méromorphe) doit être divisible en domaines fondamentaux de manière que la frontière de chacun d'eux soit continue et qu'ils convergent ensemble vers le point considéré.*

Enfin, des remarques analogues à celle qui se trouve à la fin du n⁰ 1 au sujet du point essentiel isolé et qu'on devine facilement, se rattachent aux énoncés **B** et **C**.

3. Soit donc $\zeta = f(z)$ une fonction analytique et soit S n'importe laquelle parmis les singularités que nous venons d'envisager; supposons que $f(z)$ possède une telle singularité S et qu'un certain voisinage D de S soit divisé de la manière voulue en domaines fondamentaux. Soient D_n $(n=1, 2, ..)$ ces domaines, rangés en une suite. Celle-ci est infinie selon nos hypothèses. Il y a quatre cas à distinguer suivant la nature de S et de D. (fig. 1).

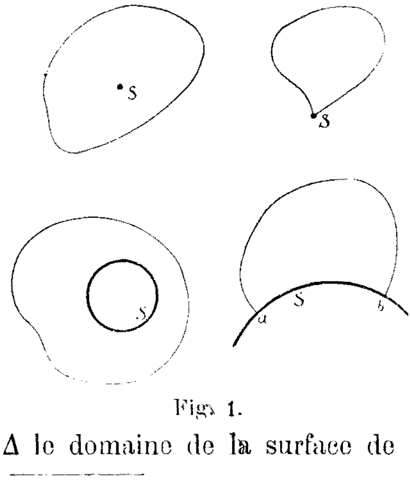


Fig. 1.

Désignons par $z = \varphi(\zeta)$ la fonction inverse de $\zeta = f(z)$, par Δ le domaine de la surface de Riemann de $\varphi(\zeta)$ et qui corres-

---

[4] Ibid. voir les théorèmes 3—7 du point de vue de la généralisation à la fin du même travail.

pond à D, enfin par Δ_n le feuillet de cette surface, qui correspond à D_n.

4. Dans les propositions qui vont suivre interviennent quelques notions introduites dans le travail cité, mais qui exigent qu'on les définisse un peu plus largement avant de les appliquer à ce que nous entendons maintenant sous S et D.

Dans la disposition des domaines D_n dans D trois cas peuvent se présenter: Ou bien, tous les domaines fondamentaux dans D, sauf au plus un nombre limité d'eux, ont des sommets situés sur S (exemples appartenant aux fonctions „fuchsiennes"; e^z); ou bien, au contraire, ces domaines, sauf au plus un nombre limité d'eux, ne possèdent aucun sommet situé sur S (exemples appartenant aux fonctions „kleiniennes"; $sn\ z$) ou bien encore, une infinité de domaines fondamentaux a de tels sommets et une autre infinité n'en a pas. La *disposition* des domaines D_n dans D sera appelée dans ces trois cas respectivement: de la *première*, de la *seconde* et de la *troisième espèce*. Lorsqu'il n'y aura pas d'équivoque, nous dirons aussi que la *singularité* S est de la première, de la seconde ou de la troisième espèce.

Dans la description de la frontière d'un domaine fondamental interviennent en premier lieu les points du plan dans lesquels se rencontrent plus que deux domaines fondamentaux et, plus généralement, les points qui contienent à leurs voisinages certaines parties d'au moins trois domaines fondamentaux différents. Par analogie aux polygones ordinaires et aux résaux polygonaux, ces points peuvent être appelés les *sommets* du domaine fondamental considéré ou, plus exactement, les sommets du contour envisagé de se domaine. Ce contour devient ainsi un *polygone fondamental*, qui est en général curviligne. Chaque partie d'un tel polygone, limitée par deux sommets consécutifs, devient l'un de ces *côtés* ou, si l'on veut, un côté du domaine fondamental considéré. Chaque paire de côtés consécutifs détermine un *angle* du même polygone ou du domaine fondamental considéré.

Ces notions s'appliquent dans les cas les plus généraux. Le nombre des polygones d'un domaine fondamental ainsi que le nombre des côtés d'un polygone, peuvent varier de un à l'infini. S'il n'y a qu'un seul polygone, le domaine fondamental envisagé remplit son intérieur; s'il y en a plusieurs, ils sont évidemment extérieurs l'un à l'autre, sauf un seul, qui contient tous les autres; si un polygone n'a qu'un côté, il s'agit d'un contour sur lequel il y a au plus un sommet.

Un *sommet* sera nommé *algébrique*, s'il représente un point régulier ou singulier algébrique (un pôle) de $f(z)$; il sera nommé *transcendant*, s'il représente un point singulier transcendant de $f(z)$.

Notons ici que, d'après **B**, un domaine fondamental ne peut avoir tout un côté commun avec une partie de la ligne S que si une infinité de domaines fondamentaux, enfermés dans le premier, s'approche vers tout point de ce côté (fig. 2,2). Ce cas excepté, les sommets transcendants sont les points uniques de la frontière d'un domaine fondamental, situés sur S (fig. 2, 1).

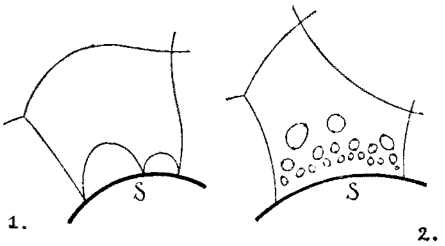


Fig. 2.

Un *angle* sera dit *vide*, si l'on peut relier ses deux côtés (c. à d. les côtés du domaine fondamental, qui renferment cet angle) par un arc simple, qui passe par l'intérieur de ce domaine et qui détermine ainsi, dans cet angle, un domaine qui ne contient pas d'autres contours du domaine fondamental considéré. — Celà a surement lieu quand le nombre des contours contenus dans un angle est nul ou fini; quand ce nombre est infini, le contraire, qui se rapporte à la définition suivante, peut avoir lieu.

Un *angle* sera dit *plein* si, quelque soit l'arc simple qui relie ses deux côtés en passant par l'intérieur du domaine fondamental envisagé, le domaine déterminé ainsi renferme d'autres domaines fondamentaux. — Une infinité de ces domaines renfermés tend alors vers le sommet de l'angle. On voit immédiatement que le sommet d'un angle plein est transcendant; le sommet d'un angle vide peut être transcendant autant qu'algébrique.

Deux angles seront appelés des angles *adjacents*, s'ils ont un côté commun, ou bien, s'ils ont une suite infinie d'arcs communs, qui convergent forcément vers le sommet commun à ces deux angles. Nous dirons que ces angles sont adjacents de la *première* ou de la *seconde façon*, suivant que la première ou la seconde circonstance a lieu (fig. 3). Si deux angles sont adjacents de la seconde façon, il y a évidemment une infinité de domaines fondamentaux enfermés entre les deux et convergeant vers leur sommet, qui appartient alors à S.

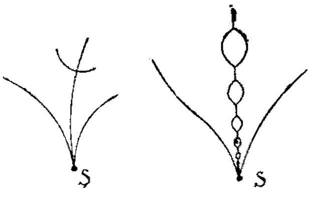


Fig. 3.

5. Nous appellerons un *faisceau d'angles adjacents* ou simplement un *faisceau* chaque ensemble d'angles à un sommet commun et dont les éléments forment une suite ininterrompue d'angles adjacents, pourvu que cet ensemble ne soit pas une partie d'un ensemble plus grand de la même espèce. Si l'on range ces angles dans l'ordre qu'ils occupent autour de leur sommet, le faisceau consiste en une suite simple, finie ou infinie, et nous l'appellerons respectivement un *faisceau fini* ou *infini*. La suite peut avoir un premier et un dernier élément; nous nommerons ces éléments les *angles extrèmes* du faisceau. Evidemment, un faisceau fini a deux angles extrèmes, ou bien, quand ces éléments font un cycle fermé autour du sommet commun, il n'y a aucun angle extrème. Un faisceau infini a un angle extrème ou n'en a aucun et nous dirons suivant ces deux cas qu'il est *unilatéral* ou *bilatéral*.

Un faisceau sera dit *vide*, si ses angles sont vides et s'ils sont adjacents entre eux de la première façon. Dans le cas contraire le faisceau sera dit *plein*.

Si un faisceau est infini ou s'il est plein, son sommet est transcendant; un sommet algébrique appartient à un faisceau vide, fini et sans angles extrèmes. Lorsqu'un faisceau est vide, il est pourtant possible qu'une infinité de domaines fondamentaux, enfermés dans ses différents angles ou entre ceux-ci, converge vers le sommet de ce faisceau. Lorsqu'un faisceau est vide, on voit facilement que l'on peut tracer une courbe simple fermée, qui passe par le sommet du faisceau et traverse chacun de ces angles de la même manière que l'arc mentionné dans la définition de l'angle vide; cette courbe n'enferme entiérement aucun domaine fondamental.

Enfin, les notions de *valeur exceptionnelle, de valeur asymptotique* et *du chemin de détermination*, définies ordinairement pour les points essentiels isolés, s'appliquent aussi bien à S et D quelconques.

6. Après avoir fixé toutes ces notions, voici quelques faits résultant plus ou moins immédiatement. En général il s'agira d'angles et de faisceaux dont les sommets appartienent à S.

Si deux angles A_1 et A_2 appartienent au même faisceau, le nombre des angles (du même faisceau) situés entre A_1 et A_2 est fini.

Si le nombre des domaines fondamentaux situés entre deux angles A_1 et A_2 est fini, A_1 et A_2 appartienent au même faisceau. En effet, le côté de A_1 tourné vers A_2 ne peut être commun qu'à un nombre fini d'autres domaines fondamentaux; donc l'un d'eux présente à A_1 un angle adjacent de la première façon; nommons le A'. En répétant le même raisonnement avec A' et A_2 etc., on obtient une suite d'angles $A_1, A', \ldots, A^{(p)}, \ldots$ qui doit être finie, mais qui ne peut finir que si un $A^{(p)}$ est identique à A_2. Or celà signifie que A_1 et A_2 appartienent au même faisceau.

Par conséquent, *si deux angles A_1 et A_2 appartienent à deux faisceaux différents, le nombre des angles situés entre A_1 et A_2 est infini.*

Puisque les frontières des feuillets Δ_n correspondant aux domaines fondamentaux D_n sont continues[5], *si l'on s'approche sur divers chemins situés à l'intérieur d'un D_n, vers un point de sa frontière, $f(z)$ tend sur ces chemins uniformément vers une valeur déterminée.* Par conséquent, *sur les chemins passant par un seul domaine fondamental ou par un nombre limité d'eux et s'approchant de S la fonction $f(z)$ tend uniformément vers une valeur déterminée. Il en résulte que chaque chemin passant par un nombre limité de domaines fondamentaux est un chemin de détermination.*

Si la fonction $f(z)$ tend vers une même valeur asymptotique ω dans deux angles A_1 et A_2, alors, elle tend uniformément vers ω

---

[5] Ibid. théorème I.

lorsque z tend vers S dans la partie du plan située entre A_1 et A_2, ou bien, elle s'approche là de toute valeur donnée arbitrairement. En effet, A_1 et A_2 peuvent appartenir à un ou à deux faisceaux. D'après ce que nous venons de dire, dans le premier cas $f(z)$ tend sur les chemins passant par les angles situés entre A_1 et A_2 et dont le nombre est fini, uniformément vers ω; si ces angles sont vides et si, y compris A_1 et A_2, ils sont adjacents de la première façon, les chemins passant par ces angles sont des chemins quelconques situés entre A_1 et A_2: si le contraire a lieu, une infinité des D_n se trouve entre A_1 et A_2, donc f s'approche là de toute valeur. — Dans le second cas également, une infinité des D_n se trouve entre A_1 et A_2 et la même chose a lieu6).

Si la fonction $f(z)$ tend vers deuxs valeurs asymptotiques différentes, dans deux angles A_1 et A_2, alors elle s'approche de toute valeur donnée arbitrairement lorsque z tend vers S dans la partie du plan située entre A_1 et A_2. En effet, les valeurs vers lesquelles f tend dans A_1 et A_2 étant différentes, A_1 et A_2 ne peuvent pas appartenir à un seul faisceau, donc nous avons la circonstance qui vient d'être mentionnée et qui conduit à la présente proposition.

7. Comme on voit du premier coup, il y a une correspondance étroite entre les angles ou faisceaux de $f(z)$ et les points de ramification de la fonction inverse $\varphi(\zeta)$. *A un sommet algébrique correspond un point de ramification algébrique d'ordre $\geqslant 3$* (c. à d. où se permutent au moins trois feuillets): *à un sommet transcendant d'un certain angle correspond un point de ramification transcendant. Aux points de la frontière d'un domaine fondamental, autres que les sommets, correspondent des points réguliers de la surface de φ ou des points de ramification algébriques du second ordre*, excepté dans le cas où un côté d'un certain polygone fondamental s'étend sur S (figure 2). Mais alors *une ligne singulière dont les points sont des points de*

---

6) Ibid. p. 113. Voir aussi ma note: *Sur une propriété des fonctions analytiques dans la proximité des singularités essentielles* (Bulletin de l'Acad. Roy. Serbe. 1936) où je démontre une proposition plus générale.

ramification transcendants, entourés d'une infinité de points de ramification algébriques, correspond à ce côté[7]).

Considérons d'un peu plus près les faisceaux transcendants. *A tous les angles d'un faisceau transcendant correspond le même point transcendant de* $\varphi(\zeta)$. Nous l'appellerons le *point transcendant correspondant au faisceau* considéré.

Remarquons que, d'après les conditions imposées à la division de D en domaines fondamentaux[8]), à tout point transcendant de φ ne correspond pas nécessairement un faisceau transcendant de f. (Ex.: fig. 4; les feuillets de la surface de φ sont liés ensemble de la manière suivante: Δ_1 et Δ_2 le long du ségment α_1 β_1, Δ_2 et Δ_3 le long de α_2 β_2 etc. L'ensemble des D_n consiste alors en une suite d'anneaux renfermant S. Il n'y a donc aucun angle transcendant). Inversement, à un point transcendant de φ peuvent correspondre plusieurs faisceaux transcendants de f. (Ex.: fig. 5, qui montre la disposition des domaines fondamentaux donnant naissance à deux faisceaux transcendants F_1 et F_2. Aux sommets algébriques, qu'on y voit, correspondent des points de ramification du troisième ordre, qui peuvent converger vers un seul point transcendant, commun aux deux faisceaux). Par conséquent, *il peut y avoir des chemins de détermination allant vers S et repassant sans cesse par les angles de deux faisceaux différents.*

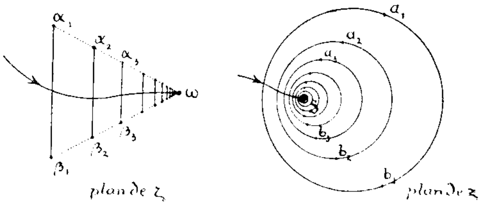


Fig. 4.

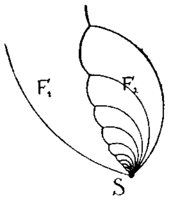


Fig. 5,

Soit F un faisceau transcendant vide, ω la valeur asymptotique correspondant à F; quelque soit un nombre positif ε, il existe

---

[7]) Ces points algébriques sont disposés de façon que cette ligne ne s'oppose pas à la définition des fonctions illimitées (ibid. nº 3).

[8]) Voir [1]).

toujours un domaine dans Δ, *correspondant à un domaine contenu dans le cercle* $|\zeta - \omega| < \varepsilon$ *et qui est limité par une courbe fermée simple, passant par le sommet de* F *et couppant chaque côté de chacun des angles de* F *juste une fois.*

En effet, soient A_1 et A_2 deux angles de F. D'après ce que nous avons dit dans le nº 6, f tend entre A_1 et A_2 uniformément vers ω et celà signifie en termes géométriques qu'un domaine de l'espèce décrite existe en ce qui concerne la région entre A_1 et A_2. Prenons encore deux angles A'_1 et A'_2 tels que les angles précédents soient situés entre ces deux. Puisque ε reste le même, il est possible que le domaine correspondant de l'espèce considérée aie dans les angles situés entre A_1 et A_2 frontière commune avec le domaine précédent. Prenons de nouveau deux angles etc. De cette façon tout angle de F sera contenu entre les paires d'angles que nous choisissons ainsi. — Il en résulte un domaine dans D, satisfaisant à notre proposition.

8. Voici quelques remarques concernant la nature du point transcendant de Δ, correspondant à un faisceau transcendant.

Le point transcendant de $\varphi(\zeta)$, *correspondant à un angle transcendant plein, est limite de points de ramification algébriques.* En effet, $f(z)$ étant continue sur la frontière d'un domaine fondamental D_p, elle tend vers l'affixe du point transcendant envisagé, lorsque z tend vers le sommet de cet angle sur une suite de contours de D_p contenus dans cet angle. A cette suite de contours correspond une suite de lignes de ramification, qui relient certains points de ramification algébriques (puisque ces contours ne passent pas par S) convergeant vers le point transcendant envisagé. Donc, ce point a la propriété énoncée.

Le point transcendant de $\varphi(\zeta)$, *correspondant à deux angles adjacents de la seconde façon, est limite de points de ramification algébriques dont une infinité a un ordre plus grand que deux.* En effet, nous avons de nouveau une suite infinie de contours, cette fois située entre les deux angles, convergeant vers leurs sommet et sur laquelle $f(z)$ tend (pour la même raison que précédemment) vers ω. A cette suite correspond également une suite de lignes et de points de ramification algébriques d'affixe ω, s'approchant vers le point transcendant envisagé. Or, on voit immédiatement, qu'une infinité de ces points de ramification a un ordre >2 (on peut se rappeller la fig. 3).

Ces deux propositions contienent la suivante:

Le point transcendant de $\varphi(\zeta)$, *correspondant à un faisceau plein, est limite de points de ramification algébriques.*

La réciproque n'est pas vraie. On peut s'imaginer par exemple un faisceau vide, composé d'angles vides, dont les côtés forment une suite infinie d'arcs reliant certains sommets algébriques à S et pourtant à ces sommets peuvent correspondre des points de ramification qui convergent vers le point transcendant ω. Donc, *si un faisceau est vide, le point transcendant peut être pourtant limite de points de ramification algébriques.*

Si un faisceau transcendant n'est pas infini bilatéral, il lui correspond un point transcendant limite de points de ramification algébriques d'ordre supérieur à deux ou limite de points transcendants. En effet, il y a un ou deux angles extrèmes; soit A l'un d'eux. Du côté où A n'a pas d'angle adjacent il est limité par une infinité de domaines fondamentaux différents; par conséquent, sur ce côté de A se trouve une infinité de sommets qui peuvent appartenir à S ou non. Selon ces deux possibilités le point transcendant correspondant au faisceau envisagé est limite de points de ramification transcendants ou algébriques d'ordre $\geqslant 3$. On en conclut:

Si à un point transcendant de $\varphi(\zeta)$, *qui n'est pas limite de points de ramification, correspond un faisceau, celui-ci est infini bilatéral.*

9. Voici enfin quelques affirmations dans lesquelles joue un certain rôle la notion de *l'espèce* du voisinage D (ou de S).

Si D *est de la première espèce, il y a dans* D *une infinité d'angles transcendants.* En effet, puisqu'il y a une infinité de domaines fondamentaux tendant vers S et que le nombre des ceux qui n'atteignent pas jusqu'à S est fini, une infinité atteint à S et celle-ci présente une infinité d'angles transcendants. — *Il y a par conséquent au moins un faisceau transcendant et* Δ *a au moins un point transcendant.* En outre, *si le nombre des faisceaux est fini, il y a au moins un faisceau infini, et si tous les faisceaux sont finis, il y en a une infinité.*

Le nombre des faisceaux transcendants peut être un nombre quelconque. Pour e^z il est égal à deux (les faisceaux y sont représentés par l'ensemble des bandes de périodicité, envisagées séparément des deux côtés de l'axe imaginaire); pour e^{z^n} (n entier) il y a $2n$ faisceaux et pour e^{e^z} il y a une infinité qui, rangée dans l'ordre qu'elle occuppe autour de S (c. à d. $z=\infty$), montre le type de la suite: ..., -2, -1, 0, 1, 2, ... répétée deux fois. Si l'on se contente de la construction d'un mosaïque de domaines fondamentaux ou, ce qui revient presqu' au même, du modèle topologique d'une surface de Riemann (consacrée à φ), on peut inventer des exemples tels qu'on voudra. Ainsi, on peut s'imaginer des fonctions uniformes pour lesquelles on peut affirmer qu'elles ont un point essentiel unique et n faisceaux transcendants, n étant quelconque, mais >1. — La fig. 6 se rapporte à $n=3$. Alors la surface de φ est divisée en feuillets le long des segments reliant ζ_0 à ζ_1, ζ_2, ζ_3. Si l'on traverse ζ_1, ζ_0, ζ_2 du

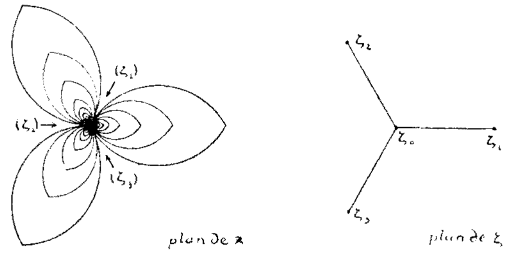


Fig. 6.

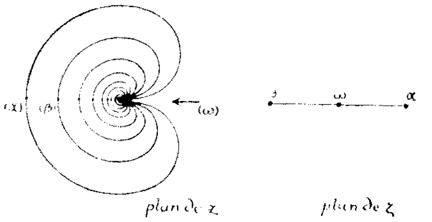


Fig. 7.

côté opposé à ζ_3, on entre dans une suite infinie de feuillets tournant autour de ζ_1 et ζ_2; une autre suite se trouve en dépassant ζ_2 ζ_0 ζ_3 et une autre en dépassant ζ_3 ζ_0 ζ_1.

La fig. 7 représente un cas où $n=1$. L'enchainement des feuillets Δ_n ($n=1,2,\ldots$) a lieu le long de $\alpha\beta$ de la manière suivante: Δ_1 et Δ_2 sont liés le long de $\alpha\omega$, Δ_2 et Δ_3 le long de $\beta\omega$, Δ_3 et Δ_4 le long de $\alpha\omega$ etc., alternativement. Dans tous ces exemples les faisceaux sont infinis bilatéraux. Or, on peut voir facilement qu'il est possible que tous les faisceaux transcendants d'une singularité S de première espèce soient infinis unilatéraux. Il semble encore plus étrange, que les faisceaux d'une singularité S de première espèce (qui, cette fois ci, n'est probablement jamais un point unique) peuvent être tous finis. Cependant, fig. 8 nous éclaire un tel cas: chaque domaine fondamental y présente un seul angle transcendant, qui n'est adjacent à aucun angle.

Ajoutons les remarques suivantes, dont on s'apperçoit immédiatement: d'abord, étant D de la première espèce, *il peut y avoir dans Δ une infinité de points de ramification algébriques et autant de points transcendants*; ensuite, D étant de la première espèce, *tous les angles transcendants et tous les faisceaux transcendants sont vides.*

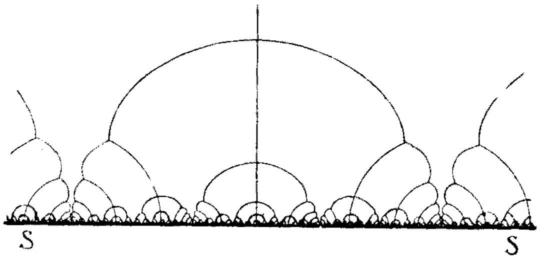


Fig. 8.

Si D est de la seconde espèce, il y a dans D une infinité de sommets algébriques, — conséquence immédiate de la présence d'un nombre infini de domaines fondamentaux qui n'atteignent pas jusqu'à S. Donc, il y a dans Δ une infinité de points de ramification algébriques.

Il est intéressant de remarquer que, D étant le voisinage entourant un point ou un cercle essentiel de la seconde espèce, il est possible que tous les points de ramification dans Δ soient algébriques d'un même ordre n, ce nombre étant quelconque. En effet, en supposant que S soit le point à l'infini (si c'était un cercle, les descriptions subiraient une petite altération) pour avoir un exemple où $n=2$, il suffit de tracer une suite infinie de contours, divisant le plan en une suite d'anneaux (fig. 4); sur chaque contour se trouvent deux points de ramification du second ordre. Un exemple où $n=3$ nous est représenté, au moins du point de vue topologique, par le réseau d'héxagones réguliers, recouvrant tout le plan; celui où $n=4$, par un réseau quadratique. Pour établir un équivalent topologique du cas où $n=5$, il suffit d'envisager encore le réseau quadratique et, pour faciliter la description, imaginer qu'il soit tracé dans un plan uOv et qu'il soit composé des droites $u =$ *nombre entier* et $v =$ *nombre entier*; nous joignons ses sommets, deux à deux, par des arcs simples, qui ont seulement leurs bouts situés sur ce réseau, à savoir: le sommet $x=i$, $y=2k$ au sommet $x=i$, $y=2k+1$ $(i, k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. En multipliant cette espèce d'arcs supplémentaires on peut obtenir la figure topologique pour $n=6, 7$ etc.

Le nombre des sommets transcendants est fini ou infini. Il est réparti toujours parmis un nombre fini de domaines fondamentaux; donc, D étant de la seconde espèce, *si le nombre des sommets transcendants est infini, il y a au moins un domaine fondamental à une infinité de sommets transcendants.*

S'il n'y a dans D qu'un nombre fini de sommets algébriques ou, ce qui est le même, *s'il n'y a dans Δ q'un nombre fini de points de ramification algébriques, D est de la première espèce; s'il n'y a dans D aucun sommet transcendant ou, s'il n'y a dans Δ aucun point transcendant, D est de la seconde espèce.* Par conséquent, *si D est de la troisième espèce, il y a dans D au moins un sommet transcendant et une infinité de sommets algébriques ou,* ce qui signifie la même chose, *il y a dans Δ au moins un point transcendant et une infinité de points de ramification algébriques.*

Über einen Satz von Herrn Ahlfors

Von

M. RADOJČIĆ

1. Herr L. Ahlfors hat den folgenden Satz bewiesen:

Es sei F eine einfach zusammenhängende Riemannsche Fläche, die im endlichen keine anderen Singularitäten als algebraische Verzweigungspunkte besitzt. $n(\varrho)$ sei die Anzahl der mit der Multiplizität ihrer Verzweigungsgrade gezählten Windungspunkte von F, die von einem gewissen Punkte der Fläche aus durch einen auf der Fläche gelegenen Weg von der Höchstlänge ϱ erreicht werden können. Wenn dann das Integral

$$\int^{\infty} \frac{d\varrho}{\varrho\, n(\varrho)} \tag{1}$$

divergiert, so ist die Fläche vom parabolischen Typus[1]).

Nun kann gefragt werden, ob und wann der Ausdruck (1) durch andere, öfter divergierende Ausdrücke, worunter etwa

$$\int^{\infty} \frac{\varrho^s\, d\varrho}{n(\varrho)} \qquad s=0,\, 1,\, 2,\cdots, \tag{2}$$

vorkommen möge, ersetzt werden darf.

---

[1]) Zur Bestimmung des Typus einer Riemannschen Fläche (Comment. Math. Helv. Vol. 3, 1931)

Als Beispiel sei die Riemannsche Fläche des elliptischen Normalintegrals erster Gattung, mit $k=1/3$, erwähnt. Man findet leicht, dass dann (mit $[a]$ das grösste Ganze von a bezeichnend)

$$n(\varrho)=2\left[\frac{\varrho+1}{2}\right]^2$$

ist, also ist nicht nur das Integral (1), sondern auch (2) für $s=0$ konvergent und erst für $s=1$ divergent.

Herr Z. Kobayashi hat durch sein Verfahren jüngst in dieser Richtung gewisse allgemeineren Resultate gewonnen.[2]) Wier möchten hier in derselben Richtung, jedoch im Rahmen des obigen Satzes, bloss einige an der Hand liegende Tatsachen erwähnen.

2. *Unter der Voraussetzung, dass sich alle Windungspunkte der Fläche über einem beschränkten Gebiet der Zahlenebene befinden, welches in einen Kreis mit dem Durchmesser δ fallen mag, kann im obigen Ahlforschen Satz statt des Integrals* (1) *das Integral*

$$\int^{\infty}\frac{d\varrho}{n(\varrho)-n(\varrho-\delta)} \tag{3}$$

gesetzt werden.

Die Punkte dieser Ebene seien mit w bezeichnet. Die Verzweigungspunkte seien w_ν $(\nu=1,2,\cdots)$, $z=z(w)$ sei eine Funktion, die F auf einen Kreis $|z|<R\leqslant\infty$ konform abbildet, G_ϱ jener Teilbereich von F, dessen Punkte vom Punkt w_0 von F, der dem Punkt $z=0$ entspricht, eine auf F gemessene Entfernung besitzen, die kleiner als ϱ ist. Der Rand Γ_ϱ von G_ϱ besteht aus lauter Kreisen, die sich innerlich berühren und in w_0 und den Verzweigungspunkten ihre Mittelpunkte haben. Dabei sei ϱ_ν die Entfernung des Verzweigungspunktes w_ν und k_ν der entsprechende Verzweigungsgrad. Nach Voraussetzung besteht ein Kreis $|w-p|<\delta/2<\infty$ (Kreis K), der alle Verzweigungspunkte und, was stets noch vorausgesetzt werden kann, den Punkt w_0 enthält. Die Länge von Γ_ϱ nach Ahlfors ist gleich

---

[2]) A Remark on the Type of Riemann Surface (Sci. Rep. Tokyo Bun. Dai. A, Nr. 62, 1937).

$$L(\varrho) = 2\pi\left[(k_0+1)\varrho + \sum_{0<\varrho_\nu<\varrho} k_\nu(\varrho-\varrho_\nu)\right].$$

Wird aber $\varrho \geqq \delta$ oder $\varrho - \varrho_\nu \geqq \delta$, so enthält der Kreis $|w-w_0|=\varrho$ bzw. der Kreis $|w-w_\nu|=\varrho-\varrho_\nu$ den Kreis K ganz im inneren, also begrenzt er von aussen ein schlichtes Gebiet von F. Dieses Gebiet sei nun dem Bereich G_ϱ hinzugefügt und dadurch Γ_ϱ verkürzt. Verfährt man so in bezug auf alle Kreise von Γ_ϱ, nennt den erweiterten Bereich $G_{\delta,\varrho}$ und seinen Rand $\Gamma_{\delta,\varrho}$, so wird, vorausgesetzt dass $\varrho \geqq \delta$ ist, die Länge von $\Gamma_{\delta,\varrho}$ gleich

$$L_\delta(\varrho) = 2\pi\sum k_\nu(\varrho-\varrho_\nu),$$

wobei die Summe über diejenigen ν zu erstrecken ist, für die $0 < \varrho - \varrho_\nu < \delta$, d. h. $\varrho - \delta < \varrho_\nu < \varrho$ gilt. Folglich ist

$$(4)\qquad L_\delta(\varrho) = 2\pi\int_{\varrho-\delta}^{\varrho}(\varrho-t)\,dn(t) = 2\pi\left[\int_{\varrho-\delta}^{\varrho} n(t)\,dt - \delta n(\varrho-\delta)\right]$$

oder auch

$$L_\delta(\varrho) = L(\varrho) - L(\varrho-\delta) - 2\pi\delta[n(\varrho-\delta)+1].$$

Die Funktion $z(w)$ bildet den Bereich $G_{\delta,\varrho}$ auf einen Teilbereich des Kreises $|z|<R$ ab, und dieser Teilbereich nimmt mit wachsendem ϱ zu und stellt für $\varrho \geqq \delta$ einen Bereich dar, der schon einen ganzen Kreis $|z|<a$ enthält. Also ist die Länge des Randes des letztgenannten Bereichs

$$\int_{\Gamma_{\delta,\varrho}} |z'(w)|\cdot|dw| > 2a\pi.$$

Durch Anwendung der Schwarzschen Ungleichung folgt

$$4a^2\pi^2 < L_\delta(\varrho)\int_{\Gamma_{\delta,\varrho}} |z'(w)|^2\cdot|dw|$$

und hieraus

$$4a^2\pi^2\int_\delta^\infty \frac{d\varrho}{L_\delta(\varrho)} = \int_\delta^\infty\int_{\Gamma_{\delta,\varrho}} |z'(w)|^2\,d\varrho\,|dw|.$$

Das rechtsstehende Doppelintegral stellt den Flächeninhalt des in der z-Ebene gelegenen Bildbereich von $G_{\delta,\varrho}$ dar, welcher jedenfalls kleiner als πR^2 ist, so dass

$$\int_{\delta}^{\infty} \frac{d\varrho}{L_{\delta}(\varrho)} < \frac{R^2}{4a^2\pi^2} \tag{5}$$

gilt.

Da $n(\varrho)$ eine monoton nichtabnehmende Funktion ist, folgt aus (4)

$$L_{\delta}(\varrho) < 2\delta\pi\left[n(\varrho) - n(\varrho - \delta)\right] \tag{6}$$

und aus (5) und (6)

$$\int_{\delta}^{\infty} \frac{d\varrho}{n(\varrho) - n(\varrho - \delta)} < \frac{\delta R^2}{2\pi a^2}\,.$$

Divergiert das linksstehende Integral, so ist $R = \infty$, also liegt der parabolische Fall vor und damit ist unsere Behauptung bewiesen.

Dasselbe gilt offenbar auch dann, wenn ausserhalb des Kreises K endlich viele und zwar algebraische Windungspunkte vorkommen.

3. Wird die Riemannsche Fläche F über einer Zahlenkugel, deren Durchmesser 1 sei, statt über einer Zahlenebene ausgebreitet gedacht und die Ahlforsche Betrachtungsweise angewendet, so ergibt sich der folgende Satz:

Es sei F eine einfach zusammenhängende, über der Zahlenkugel verzweigte Riemannsche Fläche, die keine anderen Singularitäten als algebraische Windungspunkte besitzt. $n(\varrho)$ sei die Anzahl der mit der Multiplizität ihrer Verzweigungsgrade gezählten Windungspunkte von F, die von einem gewissen Punkt von F aus durch einen auf F gelegenen Weg von der Höchstlänge ϱ erreicht werden können. Wenn das Integral

$$\int^{\infty} \frac{d\varrho}{n(\varrho) - n(\varrho - \pi)} \tag{7}$$

divergiert, so ist die Fläche vom parabolischen Typus.

In der Tat, alle vorigen Begriffe lassen sich in gleicher Weise auf der Zahlenkugel erklären, also kann auch dieselbe Bezeichnung angewendet werden. Man betrachte am Rand Γ_ϱ des gegenwärtigen Bereichs G_ϱ einen seiner Kreise, dessen Halbmesser gleich $\varrho - \varrho_\nu$ und dessen Peripherie gleich $2\pi \sin(\varrho - \varrho_\nu)$ ist. Also besteht der Kreis nur für $0 < \varrho - \varrho_\nu < \pi$. Infolgedessen wird, vorausgesetzt dass $\varrho > \pi$ ist,

$$L(\varrho) = 2\pi \sum k_\nu \sin(\varrho - \varrho_\nu) \;, \qquad 0 < \varrho - \varrho_\nu < \pi \;,$$

d. h.

$$(8) \qquad L(\varrho) = 2\pi \int_{\varrho-\pi}^{\varrho} \sin(\varrho - t)\, d\, n(t) = 2\pi \int_{\varrho-\pi}^{\varrho} n(t) \cos(\varrho - t)\, dt \,.$$

Im planimetrischen Zusammenhang mit der w-Ebene sei die Zahlenkugel durch die Gleichung

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta(\zeta - 2) = 0$$

gegeben, wobei $\zeta = 0$ die Gleichung der w-Ebene selbst ist. Dann besteht zwischen den Bogenelementen in der w-Ebene und auf der Kugel ($d\sigma$) die Beziehung

$$|dw| = \frac{2\, d\sigma}{|2 - \zeta|} \,,$$

also wird durch Anwendung der Schwarzschen Ungleichung

$$4a^2\pi^2 < L(\varrho) \int_{\Gamma_\varrho} \left| \frac{2z'(w)}{2-\zeta} \right|^2 d\sigma \qquad \left(L(\varrho) = \int_{\Gamma_\varrho} d\sigma \right)$$

folglich

$$(9) \qquad 4a^2\pi^2 \int_{\pi}^{\infty} \frac{d\varrho}{L(\varrho)} < \int_{\pi}^{\infty} \int_{\Gamma_\varrho} \left| \frac{2z'(w)}{2-\zeta} \right|^2 d\varrho\, d\sigma < \pi R^2 \,,$$

da das Doppelintegral den Flächeninhalt des Bildbereichs von G_ϱ in der z-Ebene darstellt.

Anderseits folgt aus (8) und der Bemerkung, dass

$$\int_{\varrho-\pi}^{\varrho-\frac{\pi}{2}} |\cos(\varrho - t)|\, dt - \int_{\varrho-\frac{\pi}{2}}^{\varrho} |\cos(\varrho - t)|\, dt = 0$$

ist,

$$L(\varrho)=\int\limits_{\varrho-\pi}^{\varrho-\frac{\pi}{2}}\left[n\left(\varrho-\frac{\pi}{2}\right)-n(t)\right]\cdot|\cos(\varrho-t)|\,dt+$$

$$+\int\limits_{\varrho-\frac{\pi}{2}}^{\varrho}\left[n(t)-n\left(\varrho-\frac{\pi}{2}\right)\right]\cdot|\cos(\varrho-t)|\,dt\ ,$$

also

$$L(\varrho)\leqslant\left[n\left(\varrho-\frac{\pi}{2}\right)-n(\varrho-\pi)\right]\int\limits_{\varrho-\pi}^{\varrho-\frac{\pi}{2}}|\cos(\varrho-t)|\,dt+$$

$$+\left[n(\varrho)-n\left(\varrho-\frac{\pi}{2}\right)\right]\int\limits_{\varrho-\frac{\pi}{2}}^{\varrho}|\cos(\varrho-t)|\,dt$$

und, da die beiden letzten Integrale kleiner als $\pi/2$ sind, ist

$$L(\varrho)<\frac{\pi}{2}\left[n(\varrho)-n(\varrho-\pi)\right]. \tag{10}$$

Nun folgt unmittelbar aus (9) und (10) der zu beweisende Satz.

4. Die Divergenz der Integrale (3) und (7) kann indessen stets aus der Divergenz des Integrals (2), worin $s=1$ gesetzt wird, abgeleitet werden, so dass *an Stelle der Integrale* (3) *und* (7) *auch das Integral* (2) *mit* $s=1$ *stehen darf.*

Wird nämlich $\varrho=a\,x$, $n(a\,x)=\varphi(x)$, $\varphi(x)-\varphi(x-1)=$ $=1/f(x)$ gesetzt, wobei a die Zahlen δ bzw. π bedeutet, so bekommen die Integrale (3) und (7) die Form

$$a\int\limits_{x_0}^{x}f(x)\,dx\ . \tag{11}$$

Nach einem Satz von Herrn K. Knopp folgt aus der Konvergenz des Integrals (11), worin nur $f(x)$ eine nichtnegative

Funktion bedeuten soll, was hier der Fall ist, dass auch das Integral

$$\int_{x_0}^{\infty} \frac{x\,dx}{\int\limits_{x_0}^{x} \frac{dy}{f(y)}} = \int_{x_0}^{\infty} \frac{x\,dx}{\int\limits_{x-1}^{x} \varphi(y)\,dy - \int\limits_{x_0-1}^{x_0} \varphi(y)\,dy}$$

konvergiert.^{3}) Da das rechtsstehende Integral nicht kleiner als

$$\int_{x_0}^{\infty} \frac{x\,dx}{\varphi(x)} = \frac{1}{\pi^2} \int_{\rho_0}^{\infty} \frac{\varrho\,d\varrho}{n(\varrho)}$$

ist, so ist auch das letzte Integral konvergent. Also, umgekehrt, aus der Divergenz von (2) mit $s = 1$ folgt die Divergenz von (3) und (7).

---

3) Ueber Reihen mit positiven Gliedern (J. London Math. Soc. Vol. 3, Part 3), s. Satz V.

REMARQUE SUR LE PROBLÈME DES TYPES DES SURFACES DE RIEMANN

Par
M. RADOJČIĆ

Dans la théorie des fonctions linéairement automorphes la division du domaine d'existence de la fonction en domaines qui expriment le groupe automorphe des transformations approfondit la connaissance des singularités essentielles que ces fonctions possèdent. La question se pose: comment et dans quelle mesure cette méthode pourrait-elle être généralisée de sorte qu'elle nous serve à l'étude des singularités essentielles des fonctions analytiques aussi générales que possible? ¹)

Dans certains travaux antérieurs nous avons défini une division semblable du domaine d'existence—ou seulement du voisinage d'une singularité essentielle — d'une fonction analytique quelconque en domaines d'univalence et que nous avons appelé „domaines fondamentaux". Ceux-ci constituent un réseau de polygones curvilignes, ayant pour „sommets" les points de rencontre d'au moins trois arcs simples de ce réseau et pour „côtés" ces arcs mêmes, limités par deux „sommets" voisins. (On reconnaît les notions analogues dans les fonctions linéairement automorphes). Ceux parmi les sommets, qui sont des points essentiels, furent nommés par nous des „sommets transcendants"; les autres furent nommés des „sommets algébriques".

---

¹) Nous avons traité cette question à plusieures reprises. Voir par ex.: *Sur l'allure des fonctions analytiques au voisinage des singularités essentielles* (Bull. Soc. Math. de France, t. 64, 1936) et *Sur l'ensemble des faisceaux transcendants au voisinage d'une singularité essentielle d'une fonction analytique* (Bull. Acad. Roy. Serbe, t. 4, 1938).

Les angles des polygones dont les sommets sont transcendants furent appelés des „angles transcendants". Tous les angles peuvent être groupés en des ensembles d'angles adjacents, de sorte que chaque ensemble contient une suite finie ou infinie dans laquelle chaque angle est adjacent au suivant; nous avons nommé un tel ensemble un „faisceau" d'angles. Le faisceau fut appelé „transcendant" lorsque son sommet est transcendant.

Alors, sous certaines conditions, nous avons démontré le théorème suivant:

Lorsque le voisinage d'une singularité essentielle isolée (un point ou une ligne) peut être divisé en domaines fondamentaux qui possèdent, excepté peut-être un nombre fini d'entre eux, des sommets transcendants, et que l'ensemble des faisceaux ordonnés cycliquement autour de cette singularité est réductible, *alors cette singularité est un point unique.*²)

Ce théorème peut servir de critère à discerner les surfaces de Riemann hyperboliques et paraboliques, car tout ce qui concerne nos domaines fondamentaux regarde aussi les feuillets des surfaces des fonctions inverses, et réciproquement. Donc, sous les conditions indiquées, le type est parabolique.

On peut se demander si le théorème mentionné ne pourrait être généralisé et complété de sorte qu'on aurait comme proposition: *La singularité est un point ou une ligne suivant que l'ensemble des faisceaux transcendants, ordonnés circulairement autour de la singularité, est réductible ou non.*³)

Nous allons montrer que cette proposition ne peut pas avoir lieu. *Nous indiquerons l'existence des fonctions méromorphes* (qui ont donc comme singularité essentielle *un seul point* à l'infini) *dont les faisceaux transcendants constituent un ensemble ordonné dense.*

Ce fait résulte d'une remarque de M. E. Ullrich concernant un théorème de M. R. Nevanlinna.⁴) M. Ullrich a

---

²) Voir le deuxième des travaux cités.

³) Cette question fut posée à la fin du second travail cité (voir l'édition serbe).

⁴) E. Ullrich: *Ueber ein Problem von Herrn Speiser* (Comment. math. helv. 7, 1934). R. Nevanlinna: *Ein Satz über die konforme Abbildung Riemannscher Flächen* (Comment. math. helv. 5, 1933).

montré comment, en ajoutant à l'arbre topologique d'une surface hyperbolique des noeuds du second ordre, il peut être transformé en l'arbre d'une surface parabolique. On montre facilement que par cette opération l'espèce de l'ensemble des faisceaux transcendants peut rester la même.

En effet, considérons la configuration des triangles curvilignes qui remplissent le domaine d'existence (un cercle) de la fonction modulaire bien connue par son application aux fonctions entières. Nous obtiendrons un système de domaines fondamentaux (au sens du mot que nous lui donnons) de cette fonction en joignant ces triangles deux à deux, car à chaque triangle correspond un demi-plan de la fonction inverse. Tous les sommets de ces domaines sont transcendants.

M. Ullrich a envisagé l'arbre *A* inscrit dans cette configuration de triangles. (Donc, *A* ne correspond pas aux domaines fondamentaux, mais aux triangles. Tous les noeuds de *A* sont du troisième ordre et chaque triangle contient un noeud.

Divisons maintenant l'un de ces triangles en deux parties reliant par un arc simple deux sommets du même triangle. Il en résulte un triangle plus petit et un bi-angle. Divisons ce dernier triangle de façon analogue et répétons ceci un certain nombre de fois, de sorte que le triangle envisagé soit divisé en un nombre fini de bi-angles et un triangle. Répétons ensuite cette opération avec chaque triangle du réseau modulaire considéré.

La figure que nous obtiendrons ainsi peut être considérée toujours comme l'image topologique (qui n'est plus exacte du point de vue de la conformité) correspondant à une fonction déterminée *F*, de même que le système de triangles dont nous sommes parti correspond à la fonction modulaire considérée. En joignant deux à deux les domaines voisins (deux bi-angles ou un bi-angle et un triangle) nous obtiendrons l'image topologique d'une division du domaine d'existence de la fonction *F* en domaines fondamentaux. Remarquons que l'ensemble des faisceaux transcendants est cependant resté le même.

D'autre part l'arbre de la nouvelle configuration de bi-angles et triangles s'obtient en inscrivant des noeuds nouveaux du second ordre dans l'arbre A. Dans chaque triangle de la configuration primitive le nombre de ces noeuds est égal au nombre des bi-angles contenus dans ce triangle.

Or, c'est la manière dont s'est servi M. Ullrich pour transformer un arbre du type hyperbolique en un arbre du type parabolique. Donc, nous pouvons supposer que les changements dans la configuration des triangles furent effectués de telle sorte que le type de la surface de la fonction inverse à F soit parabolique, c. à. d. que le domaine d'existence de F soit tout le plan: que ce soit une fonction méromorphe.

Autrement dit, on peut construire une surface de Riemann du type parabolique et à laquelle correspond dans le plan de la fonction inverse un ensemble ordonné dense des faisceaux transcendants; ou bien: *il est possible que dans un seul point essentiel isolé l'ensemble ordonné des faisceaux transcendants soit dense.*

Beograd, le 11 mars 1940.

CERTAINS CRITÈRES CONCERNANT LE TYPE DES SURFACES DE RIEMANN À POINTS DE RAMIFICATION ALGÉBRIQUES

Par

M. RADOJČIĆ

1. — Parmi les critères servant à discerner le type parabolique du type hyperbolique des surfaces de Riemann simplement connexes on peut distinguer deux espèces de critères: dans les uns on considère la distribution des points de ramification en se rapportant à une métrique spéciale, introduite sur la surface, dans les autres on suppose la surface divisée d'une certaine manière en feuillets et l'on s'occuppe principalement de l'image topologique de la configuration de ces feuillets. Ainsi, dans la première espèce de propositions on peut avoir comme condition déterminant le type parabolique, la divergeance d'une intégrale,¹) tandis que dans la seconde espèce ce peut être une série qui doit diverger et dont les termes expriment une propriété topologique.²)

---

¹) *L. Ahlfors*, Zur Bestimmung des Typus einer Riemannschen Fläche (Comm. Math. Helv. 3, 1931); Sur le type d'une surface de Riemann (C. R. Acad. Paris, 201, 1935); Ueber eine Klasse von Riemannschen Flächen (Soc. Sci. Fenn. 9, 1936); *M. Radojčić*, Über einen Satz von Herrn Ahlfors (Publ. Math. Univ. Belgrade, 1937); *Z. Kobayashi*, Theorems on the conformal representation of Riemann surfaces (Sci. Rep. Tokyo Bunr. Dai. 2, 1935) etc.

²) *R. Nevanlinna*, Ein Satz über die konforme Abbildung Riemannscher Flächen (Comm. Helv. 5, 1933); *Z. Kobayashi*, On the type of Riemann surfaces (Sci. Rep. Tokyo Bunr. Dai. 2, 1935); A remark on the type of Riemann surfaces (ibid. 3, 1937) etc.

Dans le présent travail[3]) il s'agira d'un critère de la seconde espèce, s'appliquant aux surfaces de Riemann dont tous les points de ramification sont algébriques.

2. — Considérons la classe suivante de surfaces de Riemann S:

1. S est une surface ouverte et simplement connexe;

2. tous les points de ramification de S sont algébriques et leur ordre ne surpasse pas un nombre entier fixe p;

3. la distance sphérique (sphère de Riemann) entre ces points, mesurée sur S, surpasse une borne positive ε.

Supposons d'abord que la surface considérée S recouvre un plan numérique, soit le plan de w, et que le domaine qui lui correspond par une représentation conforme biunivoque de S sur un certain plan de z soit le cercle $|z| < R \leqslant \infty$, c.à d. un cercle borné (cas hyperbolique) ou toute la partie finie du plan (cas parabolique). Soient A_i, $i = 1, 2, \ldots$ les points de ramification de S. D'après la condition 1. leur nombre est illimité, mais dénombrable. Soit $w = a_i$ la trace de A_i dans le plan de w.[4])

Nous appellerons *feuillet*[5]) un domaine ouvert d'une surface de Riemann, qui recouvre le plan de telle sorte que:

1. aucune partie du plan ne soit recouverte plus d'une fois;

2. il ne reste aucun domaine complémentaire;

3. chaque partie de sa frontière soit commune à certains domaines de la surface, extérieurs au feuillet considéré.

Supposons que S soit divisée en de tels feuillets F_k, $k = 1, 2, \ldots$ le long des demi-droites L_i, $i = 1, 2, \ldots$ ayant leurs

---

[3]) Nous y refaisons et continuons nos considérations qui devaient paraître comme article dans les „Publications Mathématiques de l'Université de Belgrade“ en 1941, mais le tome des „Publications“, en question, périt complètement à l'imprimerie pendant la guerre.

[4]) Comme il est souvent usage, nous distinguerons les points sur S de leurs traces dans le plan de w en désignant les premiers par les lettres majuscules correspondantes.

[5]) Voir ma Note: Sur les domaines fondamentaux des fonctions méromorphes (C. R. Acad. Paris, 190, 1929).

bouts en A_i, données par les relations suivantes:

$$\text{arc } w = \text{arc } a_i, \qquad |w| \geqslant |a_i|, \qquad \text{si} \quad a_i \neq 0,$$
$$\text{arc } w = 0, \qquad \text{si} \qquad a_i = 0;$$

celà est toujours possible.

Le nombre des points de ramification A_i situés sur la frontière d'un feuillet F_k est fini. En effet, s'il ne l'était pas, il y aurait une infinité de ces points, situés sur la frontière d'un certain F_k et qui appartiendraient à un nombre limité de lignes L_i ou bien à une infinité de ces lignes. Supposons d'abord que ces points appartiennent à un nombre limité des L_i. Alors une infinité de ces points se trouveraient sur une seule ligne L_i et les distances entre ces points, mesurées sur S, seraient représentées directement par les distances des traces a_i correspondantes, entre-elles. Ces distances (sphériques) auraient nécessairement pour limite inférieure zéro, ce qui est contraire à la condition 3. du numéro précédent.

Supposons secondement que les points A_i considérés appartiennent à une infinité de lignes L_i de la frontière d'un certain feuillet F_k. Alors, d'après une considération élémentaire des ensembles de telles lignes, il y aurait sur ce feuillet un ensemble-limite d'une suite infinie de ces lignes L_i; cet ensemble-limite consisterait en une demi-droite L^*, partant d'un certain point A^* et satisfaisant aux relations:

$$\text{arc } w = \text{arc } a^*, \quad |w| \geqslant |a^*|, \quad \text{si } a^* \neq 0,$$
$$\text{arc } w = \text{ const. } \quad \text{si } a^* = 0;$$

ou bien il se réduirait au seul point $w = \infty$, que nous désignons alors par A^*. Une infinité des L_i de la suite considérée aurait comme bouts des points convergeant vers A^*, soit $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_m}, \ldots$ Décrivons un cercle de rayon ε du point A^* comme centre. Ce cercle contiendrait une infinité de segments $A^* A_{i_m}$ qui ne traverseraient aucune ligne L_i de la frontière du feuillet envisagé. Or, la distance entre deux de ces points A_{i_m} mesurée sur S aurait pour limite inférieure, évidemment, zéro, contrairement à la condition 3.

Par conséquent, le nombre des points A_i situés sur la frontière d'un feuillet étant fini, le nombre des lignes L_i dont est construite la frontière d'un feuillet, l'est également. Puisque sur une ligne L_i peuvent se trouver plusieurs points de ramification, cela veut dire que, généralement, la frontière d'un feuillet consiste en un nombre fini de fragments de ces lignes (fig. 1).

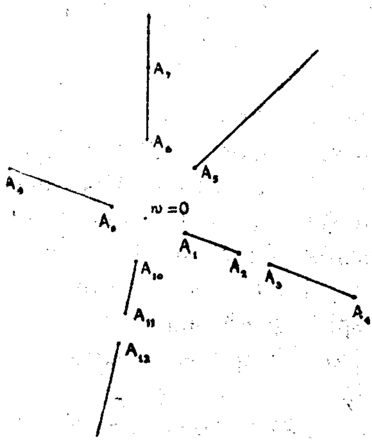


Fig. 1

Divisons l'ensemble des F_k en *générations*[6]) que nous définirons de la manière suivante.

Prenons un F_k quelconque pour génération d'ordre nul G_0; l'ensemble des F_k qui ont au moins une frontière commune avec G_0 s'appelle première génération, G_1; l'ensemble des F_k, n'y comptant pas G_0, qui ont au moins une frontière commune avec G_1 s'appelle seconde génération, G_2, etc. En général: l'ensemble des F_k qui ont au moins une frontière commune avec $G_{\nu-1}$, mais qui n'appartiennent pas aux générations précédentes, s'appelle génération d'ordre $\nu\,(\nu=1,2,\ldots)$, G_ν. Ainsi, l'ensemble des F_k se trouve groupé en générations $G_\nu\,(\nu=0,1,2,\ldots)$.

Désignons par $\delta(\nu)$ le nombre des feuillets F_k contenus dans G_ν.

3. — Ceci étant, voici le théorème que nous allons démontrer d'abord:

Proposition I. *Lorsque la série*

$$\sum_\nu^\infty \frac{\nu}{\delta(0)+\delta(1)+\cdots+\delta(m_\nu)},$$

où

$$m_\nu = \nu\left[\frac{p}{2}\right]+(\nu+1)\frac{(6p)^{\left[\frac{10\pi}{\varepsilon}\right]}-1}{6p-1},$$

diverge, la surface de Riemann S est du type parabolique.

---

[6]) Notion introduite dans l'étude des fonctions analytiques par *M. Speiser* (Comm. Math. Helv. 1. 1929: 2. 1930).

4. — Désignons par O_ρ le domaine de S composé des points dont la distance sphérique d'un point fixe de S, par ex. d'un certain point A_0 situé dans G_0 (cette distance étant mesurée sur S) est plus petite que ρ. Considérons de plus près la forme de O_ρ.

O_ρ contient toujours le domaine C_o suivant: lorsque $\rho < \pi$ (π est la distance entre deux points opposés de la sphère de Riemann) C_o se compose de tous les „rayons" de longueur sphérique $\leqslant \rho$, qu'on peut tracer sur S du point A_o dans toutes les directions sans traverser un point de ramification (ce sont des rayons lorsqu'on les considère dans le plan de w; sur la sphère ce sont des circonférences). Chaque rayon a donc la longueur sphérique ρ, excepté dans les directions (qui sont en nombre fini) où l'on rencontre un point de ramification éloigné de A_o de moins que ρ; C_o est par conséquent l'intérieur d'un cercle dont on a extrait certains segments radiaux (fig. 2). Lorsque $\rho = \pi$ le cercle devient infini; alors, et de même si $\rho > \pi$, la forme de C_o reste constante et sa frontière est formée de certaines demi-droites.

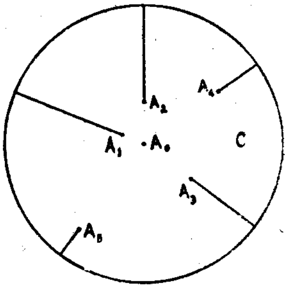


Fig. 2

$$\operatorname{arc}(w - a_o) = \operatorname{arc}(a_i - a_o), \ |w - a_o| \geqslant |a_i - a_o|.$$

Si le point a_o était, lui aussi, un point de ramification, C_o recouvrirait le plan plusieurs fois.

Les points de ramification, qui sont situés sur la frontière de C_o sont les centres d'autres domaines appartenant à O_ρ, semblables à C_o. Soit A_i l'un de ces points; on a $|a_i - a_o| \leqslant \rho$. Lorsque $\rho < |a_i - a_o| + \pi$, O_ρ contient le domaine formé par tous les rayons de longueur sphérique $\leqslant \rho - |a_i - a_0|$, qu'on peut tracer sur S du point A_i dans toutes les directions sans rencontrer un point de ramification. Ce domaine existe seulement pour $\rho > |a_i - a_o|$ et il a une partie commune avec C_o; en outre, c'est (comme C_o) l'intérieur d'un „cercle" dont on a extrait certains segments radiaux, mais qui recouvre le plan plusieurs fois, de sorte qu'on peut le considérer comme une partie de la surface de Riemann de la fonction

$$(w-a_i)^{\frac{1}{q}} \qquad (q<p).$$

Lorsque $\rho \geqslant |a_i - a_0| + \pi$, la forme de ce domaine reste constante, la partie circulaire de sa frontière étant disparue (de même qu'il a été dit pour C_0). Maintenant, envisageons tous les domaines de l'espèce considérée, c. à d. qui ont pour centres les points de ramification situés sur la frontière de C_0, et désignons leur ensemble par C_1.

Les points de ramification situés sur la frontière de C_1 et non sur celle de C_0 sont les centres d'autres domaines de la même forme que les domaines considérés précédemment. Soit par ex. A_j un tel point de ramification, situé sur la frontière d'un domaine constitutif de C_1, celui-ci ayant pour centre A_i. Le point A_j est, lui-aussi, le centre d'un domaine semblable à C_0 et son rayon a pour valeur

$$\rho - |a_i - c| - |a_j - a_i|.$$

Sa frontière a une partie circulaire lorsque ce rayon est $<\pi$; lorsqu'il est $\geqslant\pi$, la partie circulaire disparaît come précédemment. Désignons l'ensemble de tous ces domaines par C_2.

En continuant ainsi, on obtient une suite infinie C_1, C_2, $C_3, \ldots$ et l'on trouve que le domaine O_ρ est la somme finie de ces ensembles de domaines, de sorte que l'on a

$$O_\rho = C_0 + C_1 + \cdots + C_k,$$

où k est un nombre augmentant avec ρ. Remarquons que les domaines constituant un certain C_s peuvent empiéter les uns sur les autres, de même que les divers C_s entre-eux.

5. — Considérons certains domaines sur S de la même espèce que O_ρ, mais pour lesquels $\rho = \varepsilon/2$ et dont les centres $(\rho = 0)$ sont différents; désignons ces domaines par E.

Dans un domaine E peut se trouver au plus un point de ramification; car s'il y en avait deux, leurs distances au centre de ce domaine étant ρ' et ρ'', la distance de ces points entre eux serait $\leqslant \rho' + \rho'' < \varepsilon$ (puisque ρ', $\rho'' < \varepsilon/2$) ce qui contredit l'hypotèse 3 du n^0 1.

Lorsqu'aucun point de ramification n'existe dans un E, c'est un cercle, donc sa frontière est $< \varepsilon\pi$ (on aurait $= \varepsilon\pi$ s'il ne s'agissait pas des mesures sphériques). Lorsque le centre d'un domaine E est un point de ramification, sa frontière est $< p\varepsilon\pi$ en vertu de l'hypotèse 2 du n⁰ 1. Quand un point de ramification se trouve autre part dans E, la frontière de E se projette, en deux cercles tangents, l'un de rayon $\varepsilon/2$, l'autre plus petit, donc la frontière est plus petite que dans le cas précédent. Par conséquent, la frontière d'un E est toujours $< p\varepsilon\pi$.

Désignons par D_0 le domaine E dont le centre est A_0. Divisons dans la projection de D_0 sur le plan de w chaque circonférence de la frontière de D_0 en six parties égales et envisageons tous les points correspondants sur S; soient $B_1', B_2'', \ldots$ ces points. Lorsque la frontière de D_0 se projette en une seule circonférence, cela veut dire tout simplement que nous la divisons en six arcs égaux; lorsque la frontiére de D_0 se projette en deux circonférences (fig. 3) nous supposerons, pour préciser, que la division de chaque circonférence en six arcs égaux commence par le point de contact des deux cercles.

Soient maintenant $E_1', E_1'', \ldots$ les domaines E ayant les points $B_1', B_1'', \ldots$ pour centres; leur nombre est $\leqslant 6p$; désignons l'ensemble de D_0 et de ces domaines par D_1. Les frontières des deux domaines D_0 et D_1 n'ont pas de points communs. En effet, $B_1^{(\nu)}$ et $B_1^{(\nu+1)}$ étant deux points voisins sur la frontière de D_0, les domaines correspondants $E_1^{(\nu)}$ et $E_1^{(\nu+1)}$ contiennent, tous les deux, l'arc que nous désignerons par $B_1^{(\nu)} B_1^{(\nu+1)}$; or toute la frontière de D_0 est contenue ainsi dans les $E_1^{(\nu)}$ et par conséquent elle est contenue à l'intérieur de D_1.

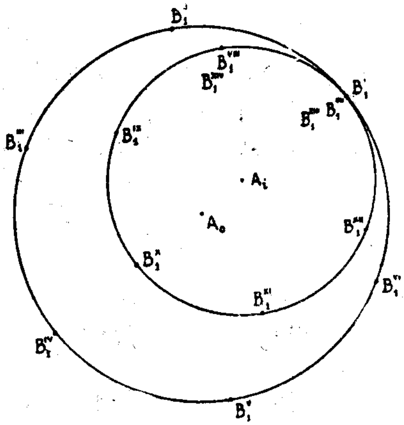


Fig. 3

Divisons maintenant dans la projection chaque circonférence des domaines $E_1', E_1'', \ldots$ en six parties égales, comme nous l'avons fait précédemment avec D_0, et envisageons tous les points correspondants sur S. Soient B_2', B_2'',... ces points et E_2', E_2'',... les domaines E ayant ces points-ci comme centres. Puisque le nombre de chaque groupe de ces domaines, construits autour de l'un des domaines E_1', E_1'',... est $\leqslant 6p$, leur nombre total est $\leqslant (6p)^2$. Désignons l'ensemble de D_1 et de ces domaines par D_2. Les frontières de D_1 et D_2 n'ont pas, non plus, de points communs, ce qu'on voit immédiatement, comme dans le cas précédent.

Continuons ainsi indéfiniment. Il en résulte une suite de domaines de S dont chacun contient le précédent: $D_0, D_1, D_2,\ldots$

Or, comme le nombre des domaines E_1', E_1'';... fut $\leqslant 6p$ et celui des domaines E_2', E_2'';... fut $\leqslant (6p)^2$, ainsi le nombre des domaines E_3', E_3'',... est $\leqslant (6p)^3$ etc. Donc le nombre des domaines E dont se composent D_0, D_1, $D_2,\ldots, D_k,\ldots$ est au plus égal a

$$\begin{array}{l} 1, \\ 1+6p, \\ 1+6p+(6p)^2, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ 1+6p+(6p)^2+\cdots+(6p)^k, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \end{array}$$

respectivement. Par conséquent nous pouvons énoncer le

Lemme 1. *Le nombre des domaines E dont se compose de la manière décrite le domaine D_k est au plus égal à*

$$N^{(k)} = \frac{(6p)^{k+1}-1}{6p-1}.$$

6. — Les frontières de D_k et D_{k+1} n'ayant pas de points communs, cherchons une borne inférieure pour la distance de ces frontières.

Prenons d'abord $k=0$, c. à d. D_0 et D_1. Considérons la circonférence où se projette la frontière de D_0, ou, s'il y a deux circonférences, la plus petite des deux, et désignons-la par K (fig. 4; nous imaginons dans cette figure qu'il y a deux circonférences et que le rayon de K est donc $< \varepsilon/2$). Envisageons sur K deux centres voisins, soit b_1' et b_1'', se rapportant aux domaines E_1' et E_1''; soient K' et K'' les circonférences de centres b_1' et b_1'' et de rayon $\varepsilon/2$ de ces deux domaines. Elles se coupent en deux points dont un seul peut se rapporter à la frontière de D_1, à savoir celui qui est plus éloigné de a_0; nous le désignerons par b.

Le point B est le plus proche de l'arc $B_1'B_1''$ parmi tous les points de la frontière de D_1. En effet, décrivons la circonférence de centre a_0 et de rayon $|b-a_0|$; elle passe par tous les points analogues à b, tandis que les traces de tous les autres points de la frontière de D_1 se trouvent, évidemment, à l'extérieur de ce cercle. Donc, si nous envisageons sur K tous les couples de centres voisins, tels que b_1' et b_1'', nous voyons que parmi tous les points de la frontière de D_1 les points tels que B sont les plus proches de K, c. à d. de la frontière de D_0.

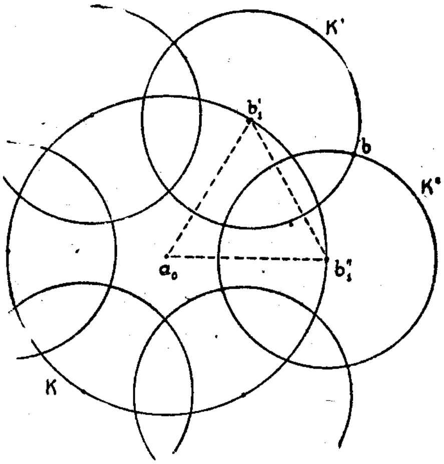


Fig. 4

Or, on calcule facilement une borne inférieure de la distance de b à K. Cette distance étant τ et le rayon de K étant ρ, on a $\tau = |b-c| - \rho$. En appliquant le théorème de Pythagore, qui s'exprime sur la sphère par une inégalité, on obtient immédiatement

$$|b - c| > \frac{\sqrt{3}}{2}\rho + \frac{\sqrt{\varepsilon^2 - \rho^2}}{2}$$

et d'ici

$$\tau > \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon^2 - \rho^2} - \frac{2 - \sqrt{3}}{2}\rho.$$

Le second membre de cette inégalité a dans l'intervalle $(0, \varepsilon/2)$, où varie ρ, sa plus petite valeur pour $\rho = \varepsilon/2$, à savoir $(\sqrt{3} - 1)\varepsilon/2$.

Donc

$$\tau > (\sqrt{3}-1)\frac{\varepsilon}{3} > \frac{\varepsilon}{5},$$

c. à d. $\varepsilon/5$ est une borne infèrieure de la distance de b à K.

Cependant, nous n'avons pas encore tenu compte de ce que E_1' et E_1'' peuvent contenir des points de ramification et qu'alors leurs frontières peuvent être plus compliquées, comme nous l'avons déjà vu. Soit par ex. dans E_1' un point de ramification A_i à la distance $\eta(<\varepsilon/2)$ de B_1'. Le domaine E est alors plus compliqué, sa frontière se projette en deux circonférences, K' et une autre, plus petite, tangente à la première et de centre a_i, soit K_1' (fig. 5 et 6).

Si le point de la frontière de D_1, le plus rapproché de la frontière de D_0 était un certain point de la frontière de E_1', se rapportant à K', la considération précédente resterait valable. Supposons donc que le point le plus rapproché soit un certain point se rapportant à la circonférence K_1'. Si nous désignons par d et d' les distances de a_i à K et a K_1', la distance, considérée sur S, de K_1' à K sera $d+d'$.

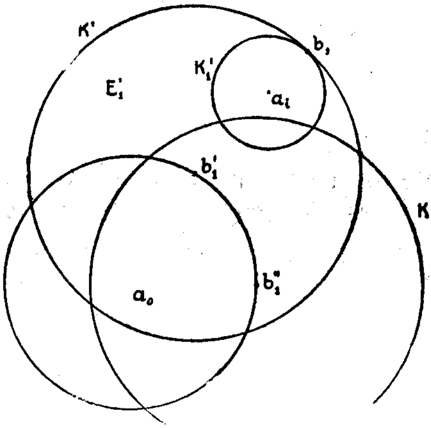


Fig. 5

Nous distinguons deux cas, selon que A_i se trouve dans un seul des domaines $E_1', E_1'', \ldots$ ou bien dans les parties communes aux deux ou à plusieurs de ces domaines. Si A_i se trouve dans un seul de ces domaines, donc dans E_1' (fig. 5), la circonférence K_1' est tangente à K' en un point tel que b_1. Celui-ci est plus éloigné de K que le point b. Donc on a $d+d' > \tau > \varepsilon/5$.

Si A_i se trouve dans deux domaines $E_1^{(\nu)}$ au moins, supposons par ex. que ce soit la partie commune à E_1' et E_1'' — désignons-la par F — alors il y a deux ou plusieurs circonférences concentriques, telles que K_1', soit K_1', K_1'',.., de centre a_i et tangentes aux circonférences K' et K'', et peut-être à d'autres encore. Evidemment, c'est toujours la plus grande de ces circonférences qui compte, car elle seule appartient à la frontière de D_1. Or, c'est, plus précisément, la circonférence qui appartient à celui des domaines $E_1^{(\nu)}$, dont le centre $B_1^{(\nu)}$ est le plus près de A_i. Par conséquent, si c'est par ex. la circonférence K_1' qui compte, il faut supposer que A_i se trouve dans le triangle curviligne $AA'B$ — et a_i dans le triangle correspondant du plan (fig. 6), limité par les arcs aa' et ab de K et K'' et par un segment de droite. Car, si le point A_i se trouvait dans l'autre moitié du domaine F, il serait plus rapproché de B_1'' que de B_1'.

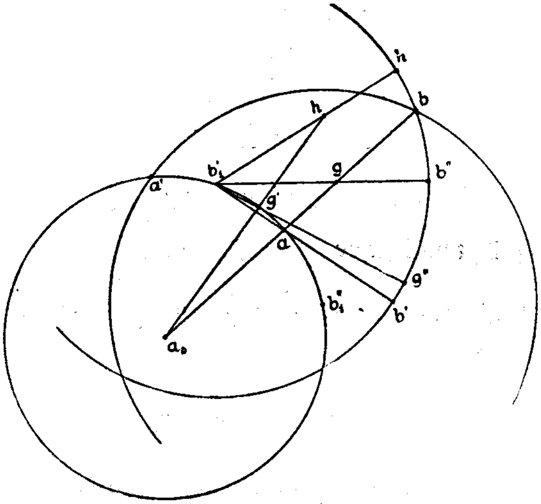


Fig. 6

Alors, si $a_i \equiv a$, on a $d=0$ et $d+d'=|a-b'$, où b' est le point commun de K' et K_1'. Si $a_i \equiv g$, où g est la trace d'un point intérieur du segment AB, on a

$$d+d'=|a-g|+|g-b''|>|a-b''|>|a-b'|,$$

b'' étant dans ce cas le point commun de K' et K_1'. Donc $d+d'>|a-b'|$.

Supposons que a_i soit un point g' de l'arc AA'. Alors on a $d=0$ et

$$d+d'=|g'-g''|>|a-b'|,$$

où g'' est maintenant le point commun de K' et K_1'. Cette inégalité a lieu, puisque g' est plus près du centre b_1' que a. Donc on a de nouveau $d+d'>|a-b'|$.

Supposons enfin que a_i soit un point h se rapportant à l'intérieur du triangle $AA'B$. Soit g' le point d'intersection de K et de la trace de la droite A_0H. On a

$$d+d'=|g'-h|+|h-h'|,$$

où h' est maintenant le point commun de K' et K_1'. Donc on a

$$d+d'>|g'-h'|>|g'-g''|$$

et par conséquent $d+d'>|a-b'|$.

Donc, nous avons toujours $d+d'>|a-b'|$.

Or

$$|a-b'|=|b_1'-b'|-|b_1'-a|$$

et $|b_1'-b'|=\varepsilon/2$, tandis que

$$|b_1'-a|=2\rho\cdot\sin\frac{\pi}{12}\leqslant\varepsilon\sin\frac{\pi}{12}<\varepsilon\cdot 0{,}3;$$

donc

$$d+d'>\frac{\varepsilon}{2}-\varepsilon\cdot 0{,}3=\frac{\varepsilon}{5},$$

c. à d. la distance entre les points des frontières de D_0 et D_1 a encore comme borne inférieure $\varepsilon/5$. C'est donc une borne valable toujours.

Puisque D_2 s'obtient en ajoutant à chaque domaine E de l'ensemble $E_1', E_1'', \ldots$ des domaines E de la même manière qu'on a fait précédemment en ajoutant des domaines E à D_0, la même borne vaut pour la distance des frontières de D_1 et D_2, et ainsi de suite. Donc $\varepsilon/5$ est une borne inférieure valable pour chaque couple de domaines D_k et D_{k+1}.

Par conséquent nous pouvons énoncer le

Lemme 2. *La distance sphérique sur S des points de la frontière du domaine D_k aux points de la frontière du domaine D_{k+1} est supérieure à $\varepsilon/5$, quelque-soit k.*

7. — Comme conséquence immédiate du lemme 2 nous pouvons dire que tous les points de S, dont la distance au point A_0, mesurée sur S, est inférieure à $\varepsilon/2$, $3\varepsilon/5$, $4\varepsilon/5, \ldots$, $(k+2)\varepsilon/5, \ldots$ appartiennent sûrement à D_0, D_1, $D_2, \ldots$, $D_k, \ldots$ respectivement.

Or, d'après le lemme 1, le nombre des domaines E dont se compose D_k est $\leqslant N^{(k)}$. Puisque chaque E peut contenir au plus un point de ramification A_i, il en résulte que le nombre des points de ramification contenus dans D_k ne surpasse pas $N^{(k)}$.

Si nous choisissons k assez grand pour qu'on ait

$$(k+2)\frac{\varepsilon}{5} > \sigma \quad \text{c. à d.} \quad k > \frac{5\sigma}{\varepsilon} - 2,$$

le domaine formé de tous les points de S dont la distance sphérique mesurée sur S, au point A_0 est inférieure à un certain nombre σ, est contenu à l'intérieur du domaine D_k. Donc le nombre des points de ramification contenus dans ce domaine ne peut pas surpasser $N^{(k)}$. Enfin, puisque

$$\frac{5\sigma}{\varepsilon} - 2 < \left[\frac{5\sigma}{\varepsilon}\right] - 1,$$

on peut choisir

$$k \geqslant \left[\frac{5\sigma}{\varepsilon}\right] - 1$$

et par conséquent le nombre des A_i dont la distance à un certain point de S est inférieure à σ ne surpasse pas

$$N^{\left[\frac{5\sigma}{\varepsilon}\right]-1} = \frac{(6p)^{\left[\frac{5\sigma}{\varepsilon}\right]} - 1}{6p-1}.$$

Donc nous avons le

Lemme 3. *Le nombre des points de ramification de S, dont la distance à un certain point de S est inférieure à un nombre σ ne surpasse pas*

$$N_\sigma = \frac{(6p)^{\left[\frac{5\sigma}{\varepsilon}\right]} - 1}{6p-1}.$$

8. — Nous demandons maintenant: combien de générations G_ν sont-elles nécessaires pour recouvrir l'un des ensembles C_k de domaines?

Considérons d'abord C_0. Lorsque ρ augmente à partir de zéro, C_0 croît à partir du point A_0, qui appartient au feuillet constituant la génération G_0. Donc, C_0 est d'abord contenu dans ce feuillet. Lorsque ρ atteint une certaine valeur, C_0 atteint au moins une ligne L_i de la frontière de ce feuillet en un endroit d'où l'on passe de ce feuillet à d'autres feuillets. Puisque C_0 croît radialement de A_0 et que ρ continue à augmenter, C_0 rentrera dans ces feuillets, qui se trouvent au-delà de L_i. Ceci ayant lieu en un certain point T de L_i, on a, plus exactement, plusieurs cas à distinguer.

1. Le bout de la demi-droite L_i étant A_i, l'angle formé par L_i et la demi-droite partant de A_i et passant par A_0 désignons par α et supposons d'abord que $\alpha = \pi$. Alors A_0 se trouvant sur le prolongement de L_i, on a $T \equiv A_i$ et C_0 reste, en embrassant T, dans G_0 (fig. 7, le cas de L_1 et A_1).

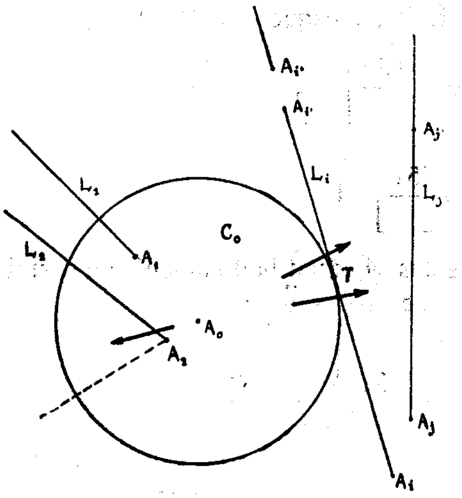


Fig. 7

2. Lorsque $\pi > \alpha \geqslant \pi/2$, on a encore $T \equiv A_i$ et de cet endroit on passe dans un seul feuillet nouveau, ceci ayant lieu de l'un ou de l'autre côté de A_i (fig. 7, le cas de L_2 et A_2; la flèche désignant l'endroit du passage).

3. Lorsque $\alpha < \pi/2$, le point T est différent de A_i. Puisque L_i comprend en général plusieurs segments isolés, soit $A_i A_{i'}$, $A_{i''} A_{i'''}$ etc. (fig. 7), qui constituent la frontière du feuillet envisagé, c. à d. de G_0, il se peut que T soit l'un des points $A_{i'}$, $A_{i''}$, $A_{i'''}$ etc. Alors on a de nouveau les deux cas précédents, c. à d. T est l'endroit d'où l'on passe dans un seul feuillet nouveau.

4. Si $\alpha < \pi/2$, lorsque T est un point intérieur de l'un des arcs $A_i A_{i'}$, $A_{i''} A_{i'''}, \ldots$ on sort de G_0 des deux côtés de T à la fois, mais puisque C_0 croît radialement, on rentre de chaque côté dans un seul feuillet nouveau. Cependant T peut-être un point ordinaire de S ou bien un point de ramification. Dans ce dernier cas on rentre des deux côtés de T dans deux feuillets différents (marqué dans la fig. par deux flèches).

Ainsi, dans tous les cas le domaine C_0 pénètre, après avoir traversé le point T, au plus dans un ou dans deux feuillets nouveaux et qui se limitent avec G_0. Par conséquent, C_0 pénètre là dans une seule génération nouvelle, c. à d. dans la suivante, G_1.

Lorsque ρ croît d'avantage, C_0 peut rentrer en d'autres endroits (fig. 7, ligne L_j) dans des feuillets toujours nouveaux, appartenant aux générations de plus en plus avancées: chaque fois l'ordre maximum des générations prises en considération augmente d'une unité au plus.

Pour obtenir une borne supérieure du nombre des générations auxquelles C_0 arrive ainsi, essayons de trouver le nombre possible des traversements considérés des L_i par C_0 lorsque ce domaine augmente.

En tout cas ce nombre ne surpasse pas le nombre de ces lignes, ou plutôt le nombre des segments de ces lignes, découpés par les points A_i; ou, si l'on veut: le nombre des A_i situés sur les lignes L_i considérées. Puisque le rayon ρ de C_0 croît jusqu'à π, il s'agit là des L_i dont la distance à A_0 n'atteint pas π. Or, la longueur des L_i ne surpasse jamais π, de sorte qu'il s'agit seulement des points A_i dont la distance à C_0 ne surpasse nullement π. Par conséquent tous ces A_i sont éloignés de A_0 moins que 2π. D'après le lemme 3 le nombre de ces points ne surpasse pas

$$N_{2\pi} = \frac{(6p)^{\left[\frac{10\pi}{\varepsilon}\right]} - 1}{6p - 1}.$$

Donc, ceci est une borne supérieure pour le nombre des générations de plus en plus élevées, dans lesquelles pénètre C_0 lorsque ρ augmente. Par conséquent, en ajoutant G_0 on peut dire que C_0 pénètre au plus dans $1 + N_{2\pi}$ premières générations $G_0, G_1, G_2, \ldots$

Considérons maintenant un domaine de l'ensemble C_1. Son centre est un point A_i, situé sur la frontière de C_0; donc, dès son origine le domaine considéré appartient à plusieurs feuillets qui s'interchangent autour de A_i, leur nombre étant p au plus. Sauf cette différence, toutes les circonstances sont les mêmes que pour C_0. Donc, nous pouvons immédiatement dire: lorsque ρ augmente à partir d'une certaine valeur ρ jusqu'à $\rho+\pi$, ce domaine croît à partir de A_i et pénètre dans un certain nombre de feuillets et de générations nouvelles; mais le nombre de ces générations est plus petit que le nombre des traversements des lignes L_k, c. à d. il est plus petit que le nombre des points A_k dont la distance au-centre A_i est inférieure à 2π. Par conséquent, le domaine considéré pénètre, lui aussi, en croissant au plus dans $N_{2\pi}$ générations nouvelles.

Or, C_1 s'étale dès le début dans $\leqslant p$ feuillets, c. à d. dans $\leqslant [p/2]+1$ générations. Car c' est le nombre maximum des générations autour d'un point de ramification. En effet, soient $F', F'', \ldots, F^{(s)}$ $(s \leqslant p)$ ces feuillets dans leur ordre cyclique; si par ex. $F^{(s)}$ appartient à la génération du plus petit ordre, l'ordre augmenté de l'unité correspond à la fois à F' et à $F^{(s-1)}$, le suivant à F'' et $F^{(s-2)}$ etc. jusqu á $F^{(k)}$ où $k=[s/2]$, d'où résulte l'affirmation précédente. Par conséquent, un domaine quelconque de l'ensemble C_1 pénètre dans moins que

$$1+\left[\frac{p}{2}\right]+N_{2\pi}$$

générations. La même chose a lieu pour chaque domaine de C_k, $k=2, 3, \ldots$

Donc on peut dire: lorsque O_ρ augmente avec ρ, aussi longtemps que O_ρ contient uniquement C_0, il pénètre dans moins que $1+N_{2\pi}$ premières générations; tant que O_ρ se compose seulement de C_0 et des domaines C_1, il pénètre dans moins que $[p/2]+N_{2\pi}$ générations nouvelles, c. à d. en tout dans moins que

$$1+\left[\frac{p}{2}\right]+2N_{2\pi}$$

premières générations; tant que O_ρ se compose de C_0, C_1 et C_2, il pénètre lui-aussi dans moins que $[p/2]+N_{2\pi}$ générations nouvelles, c. à d. en tout dans moins que

$$1+2\left[\frac{p}{2}\right]+3N_{2\pi}$$

premières générations, etc. En général: tant que O_ρ se compose seulement de $C_0, C_1, \ldots, C_k$, il pénètre dans moins que

$$1+k\left[\frac{p}{2}\right]+(k+1)N_{2\pi}$$

premières générations. Ainsi donc, nous avons obtenu le

Lemme 4. *Pour recouvrir O_ρ, composé de $C_0, C_1, \ldots, C_\nu$, les générations $G_0, G_1, \ldots, G_{m_\nu}$, où*

$$m_\nu = \nu\left[\frac{p}{2}\right]+(\nu+1)N_{2\pi},$$

suffisent.

9. — Lorsque ρ augmente, O_ρ se complique de plus en plus; il se compose des parties que nous avons désignées par C_0, $C_1, \ldots, C_k$; k augmente à l'infini avec ρ. Soit ρ_k la limite inférieure des ρ pour lesquels O_ρ possède C_k; alors C_k existe pour chaque $\rho > \rho_k$.

L' ensemble de domaines C_{k+1} prend origine dans un certain point de ramification A_i lorsque O_ρ arrive en croissant jusqu'à cet A_i ou, plus exactement, lorsque l'un des domaines de l' ensemble C_k arrive avec sa frontière circulaire jusqu' à A_i. Or, ce dernier domaine a pris naissance dans un certain point A_j lorsque ρ avait une valeur moindre, que nous désignerons par ρ_k'. Puisque ce domaine n'est pas nécessairement le premier de l' ensemble C_k, on a $\rho_k \leqslant \rho_k'$. D'autre part la distance entre A_i et A_j est supérieure à ε, de sorte qu'on a

$$\rho_{k+1} - \rho_k' > \varepsilon$$

et à plus forte raison

$$\rho_{k+1} - \rho_k > \varepsilon, \qquad k = 1, 2, \ldots \tag{1}$$

donc

$$\rho_{k+h} - \rho_k > h\varepsilon, \qquad h, k = 1, 2, \ldots$$

En posant $k=1$, $h=\nu-1$ et puisque $\rho_1>0$, on obtient

$$\rho_\nu>(\nu-1)\varepsilon, \qquad \nu=1,\ 2,\ldots$$

et à plus forte raison

$$\rho_\nu>\nu\frac{\varepsilon}{2}, \qquad \nu=1,\ 2,\ldots \tag{2}$$

10. — Désignons par $f(\rho)$ le nombre des feuillets F_i ayant des points communs avec le domaine O_ρ et par $g(\rho)$ l'ordre le plus élevé des générations qui ont des points communs avec O_ρ. D'après la définition des nombres $\delta(\nu)$ (voir le nº 2) on a

$$f(\rho)\leqslant\sum_0^{g(\rho)}\mu\ \delta(\mu). \tag{3}$$

Soit $N(\rho)$ le nombre des points de ramification contenus dans O_ρ, c. à d. dont la distance sphérique au pont A_0 situé dans G_0 est plus petite que ρ. Puisque la distance sphérique entre les points de la frontière d'un feuillet et le point $w=a_0$ considéré sur le même feuillet est au plus égale à π, le nombre des points de ramification situés sur la frontière d'un F_k est, d'après le lemme 3, au plus égal à N_π. Donc on a

$$N(\rho)\leqslant N_\pi f(\rho). \tag{4}$$

Enfin, désignons par $n(\rho)$ le nombre des points de ramification contenus dans O_ρ, mais chacun pris autant de fois que son degré de ramification (c. à d. l'ordre diminué d'un) contient d'unités. On a évidemment

$$n(\rho)<pN(\rho). \tag{5}$$

De (3), (4), et (5) résulte

$$n(\rho)<pN_\pi\sum_0^{g(\rho)}\mu\ \delta(\mu). \tag{6}$$

11. — Il a été prouvé ailleurs[7]) que la surface de Riemann dont les points de ramification sont tous algébriques est du

---

[7]) *L. Ahlfors*, Ueber eine Klasse von Riemannschen Flächen (Comm. Soc. Sc. Fenn., 1936); *M. Radojčić*, Uber einen Satz von Herrn Ahlfors (Publ. Math. Univ. Belgrade, 1937).

type parabolique, lorsque l'intégrale

$$\int^{\infty} \frac{\rho\, d\rho}{n(\rho)}$$

diverge. Puisque la suite des ρ_k, $k = 1, 2, \ldots$, est croissante vers l'infini, c'est équivalent à la divergence de la suite des intégrales

$$J_i = \int_{\rho_1}^{\rho_{i+1}} \frac{\rho\, d\rho}{n(\rho)}, \qquad i = 1, 2, \ldots$$

D'après (6) on a

$$J_i > \frac{1}{p N_\pi} \int_{\rho_i}^{\rho_{i+1}} \frac{\rho\, d\rho}{\overset{g(\rho)}{\underset{0}{\Sigma}}{}^{\mu}\, \delta(\mu)},$$

ce qui peut s'écrire sous la forme

$$J_i > \frac{1}{p N_\pi} \sum_{1}^{i}{}^{\nu} \int_{\rho_\nu}^{\rho_{\nu+1}} \frac{\rho\, d\rho}{\overset{g(\rho)}{\underset{0}{\Sigma}}{}^{\mu}\, \delta(\mu)}. \tag{7}$$

Considérons l'une quelconque de ces intégrales. Nous y avons $\rho \leqslant \rho_{\nu+1}$. Mais alors (voir le n^0 9) O_ρ se compose des C_k pour lesquels $k \leqslant \nu$. Donc, selon le lemme 4 O_ρ ne pénètre alors que dans les générations G_m où $m < m_\nu$. D'après la définition de $g(\rho)$ il en résulte que $g(\rho) < m_\nu$, donc on a pour chaque intégrale dans (7)

$$\int_{\rho_\nu}^{\rho_{\nu+1}} \frac{\rho\, d\rho}{\overset{g(\rho)}{\underset{0}{\Sigma}}{}^{\mu}\, \delta(\mu)} > \frac{\rho_\nu(\rho_{\nu+1} - \rho_\nu)}{\overset{g(\rho)}{\underset{0}{\Sigma}}{}^{\mu}\, \delta(\mu)},$$

d'où, en appliquant (1) et (2) on obtient

$$J_i > \frac{1}{p N_\pi} \sum_{1}^{i}{}^{\nu} \frac{\rho_\nu(\rho_{\nu+1} - \rho_\nu)}{\overset{m_\nu}{\underset{0}{\Sigma}}{}^{\mu}\, \delta(\mu)} > \frac{\varepsilon^2}{2 p N_\pi} \sum_{1}^{i}{}^{\nu} \frac{\nu}{\overset{m_\nu}{\underset{0}{\Sigma}}{}^{\mu}\, \delta(\mu)}.$$

Par conséquent, *lorsque la série*

$$\sum_{0}^{\infty}{}^{\nu} \frac{\nu}{\sum_{0}^{m_\nu}{}^{\mu} \delta(\mu)},$$

où

$$m_\nu = \nu\left[\frac{p}{2}\right] + (\nu+1)\, N_{2\pi},$$

diverge, la suite des intégrales J_i diverge d'autant plus et d'après le théorème mentionné *le type de S est parabolique*. C'est ce qu'il fallait démontrer.

12. — Ajoutons quelques conséquences immédiates de la proposition I. A la place des m_ν on peut choisir n' importe quelle suite de nombres supérieurs à m_ν. Ainsi, en posant

$$m = \left[\frac{p}{2}\right] + \frac{(6p)^{\left[\frac{10\pi}{\varepsilon}\right]} - 1}{6p-1}$$

on a

$$m_\nu < (\nu+1)\, m,$$

et par conséquent

$$\sum_{1}^{\lambda}{}^{\nu} \frac{\nu}{\delta(0)+\delta(1)+\cdots+\delta(m_\nu)} >$$

$$> \sum_{1}^{\lambda}{}^{\nu} \frac{\nu}{\delta(0)+\delta(1)+\cdots+\delta[(\nu+1)m]} =$$

$$= \sum_{2}^{\lambda+1}{}^{\nu} \frac{\nu-1}{\delta(0)+\delta(1)+\cdots+\delta(\nu m)} >$$

$$> \frac{1}{2} \sum_{2}^{\lambda+1}{}^{\nu} \frac{\nu}{\delta(0)+\delta(1)+\cdots+\delta(m\nu)},$$

donc la

Proposition II. *Si la série*

$$\sum^{\infty}{}^{\nu} \frac{\nu}{\delta(0)+\delta(1)+\cdots+\delta(m\nu)}, \tag{10}$$

où m a la valeur (9) *diverge, la surface de Riemann S est du type parabolique.*

Les termes des séries (8) ou (10) sont, à des facteurs bornés près, les valeurs réciproques des moyennes arithmétiques

$$M_h^k[\delta(\mu)] = \frac{\delta(h)+\delta(h+1)+\cdots+\delta(k)}{k-h+1}.$$

En effet,

$$\frac{\delta(0)+\delta(1)+\cdots+\delta(m_\nu)}{\nu} = \frac{m_\nu+1}{\nu} M_0^{m_\nu}[\delta(\mu)],$$

et

$$\frac{m_\nu+1}{\nu} < \frac{(\nu+1)\,m+1}{\nu} < 2m+1.$$

Donc on peut écrire, au lieu de (8) et (10), les expressions

$$\sum^{\infty}{}_{\nu} \frac{1}{M_0^{m_\nu}[\delta(\mu)]} \quad \text{et} \quad \sum^{\infty}{}_{\nu} \frac{1}{M_0^{m\nu}[\delta(\mu)]}.$$

La dernière nous conduit à l'énoncé de la

Proposition III. *Lorsque la série des valeurs réciproques de chaque m-ième moyenne arithmétique des nombres* $\delta(\mu)$ *diverge, la surface de Riemann S est du type parabolique.*

Remarquons qu'au lieu de $h=0$ on peut prendre h quelconque, mais constant.

Le critère contenu dans la proposition III se simplifie lorsqu'on peut supposer que la suite des $\delta(\mu)$ est monotone non-décroissante, car alors

$$M_h^k[\delta(\mu)] \leqslant \delta(k)$$

et par suite

$$\sum_{1}^{\lambda}{}_{\nu} \frac{1}{M_h^{m_\nu}[\delta(\mu)]} \geqslant \sum_{1}^{\lambda}{}_{\nu} \frac{1}{\delta(m_\nu)},$$

donc on a la

Proposition IV. *La suite des nombres* $\delta(\mu)$ *des feuillets contenus dans la* μ*-ième génération étant monotone* *non-décroissante, lorsque la série*

$$\sum^{\infty}{}^{\nu} \frac{1}{\delta(m_\nu)}$$

diverge, la surface de Riemann S est du type parabolique.

Evidemment, au lieu de m_ν on peut écrire $m\nu$. Puisqu'alors

$$\frac{1}{\delta(m\nu)} > \frac{1}{m}\left(\frac{1}{\delta(m\nu)} + \frac{1}{\delta(m\nu+1)} + \cdots + \frac{1}{\delta[(m+1)\nu-1]}\right), \quad \nu = 2, 3, \ldots$$

on a

$$\sum_{1}^{\lambda}{}^{\nu} \frac{1}{\delta(m\nu)} > \frac{1}{m} \sum_{m}^{\lambda'}{}^{\nu} \frac{1}{\delta(\nu)},$$

où $\lambda' = (m+1)\lambda - 1$; donc on a la

Proposition V. *Lorsque, la suite des $\delta(\nu)$ étant non-décroissante, la série des valeurs réciproques des $\delta(\nu)$ diverge, la surface de Riemann est du type parabolique.*

13. — Il faut pourtant remarquer qu'en général ces critères topologiques n'auront pas la même portée, que le critère sous forme d'intégrale, sur lequel ils sont basés. Ainsi, considérons les fonctions elliptiques. Si la division d'un parallélogramme de périodicité en domaines d'univalence (qui correspondent aux feuillets) est connue, les nombres $\delta(k)$ se déterminent immédiatement. Mais il suffit de trouver au lieu des valeurs exactes une majoration convenable des sommes

$$\sum_{0}^{m\nu}{}^{\mu} \delta(\mu).$$

Une telle somme, valable pour toutes les fonctions elliptiques, résulte de ce que chaque parallélogramme de périodicité correspond à un nombre fixe q de feuillets: la fonction y est q-valente.

Considérons, ce qui est plus commode, au lieu des générations de feuillets de la fonction inverse d'une fonction elliptique, les ensembles correspondants des domaines d'univalence et désignons maintenant ces ensembles par G_ν; les nombres $\delta(\nu)$ restent, évidemment, les mêmes. Envisageons les groupements analogues des parallélogrammes de périodicité et désignons-les par $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$ (fig. 8). Supposons que Γ_0 soit le parallélogramme qui contient G_0. On a

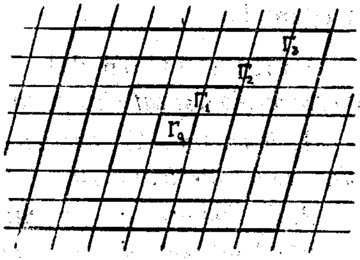


Fig. 8

$$G_0 + G_2 + \ldots + G_q \supset \Gamma_0,$$

$$G_0 + G_1 + \ldots + G_{2q} \supset \Gamma_0 + \Gamma_1,$$

et c., en général

$$\sum_{0}^{(\nu+1)q} G_k \supset \sum_{0}^{\nu} \Gamma_k, \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots,$$

conséquence immédiate de la définition de G_k et Γ_k.

Or, les nombres des feuillets contenus dans les deux membres de la relation précédente sont respectivement

$$\sum_{0}^{(\nu+1)q} \delta(k) \quad \text{et} \quad q(2\nu+1)^2,$$

car $(2\nu+1)^2$ est le nombre des parallélogrammes de périodicité contenus dans le parallélogramme $\Gamma_0 + \Gamma_1 + \cdots + \Gamma_\nu$. Donc

$$\sum_{0}^{(\nu+1)q} \delta(k) > q(2\nu+1)^2.$$

Par conséquent la série

$$\sum_{\nu}^{\infty} \frac{2}{q(2m\nu+1)^2} \qquad (11)$$

est ici une majorante de la série (10). Or la série (11) est convergente, donc la série (10) l'est également, par conséquent la proposition II ne s'applique pas.

14. — Les considérations incluses dans la démonstration de la proposition I se simplifient notablement lorsqu'on modifie la condition 3 dans la définition des surfaces S, en exigeant que le nombre des points de ramification dont la distance d'un point quelconque de la surface de Riemann, mesurée sur celle-ci, reste au-dessous d'une limite fixe, soit borné. Démontrons à cet égard la.

Proposition VI. *Soit T une surface de Riemann ouverte et jouissant des propriétés suivantes:*

1. *les points de ramification de T sont tous algébriques d'ordre non supérieur à p;*

2. *le nombre des points de ramification dont la distance d'un point quelconque de T, mesurée sur T en mesures sphériques (sphère de Riemann), est au plus égale à 2π, ne surpasse pas le nombre entier N.*

Lorsque la série

$$\sum^{\infty}_{\nu} \frac{\nu}{\sum\limits_{0}^{\nu m} \mu\,\delta(\mu)} \tag{12}$$

où

$$m = N + N\left[\frac{p}{2}\right]$$

diverge, la surface T est du type parabolique.

Retenons les notations. L'ordre le plus élevé des générations nécessaires pour recouvrir le domaine O_ρ étant $g(\rho)$, cherchons une borne supérieure de $g(\rho)$ quand $\rho = \nu\pi$, $\nu = 1, 2\dots$

Supposons d'abord que ρ augmente de 0 a π. Alors $\nu = 1$ et il s'agira de O_π, c. à d. du domaine de T dont les points sont à une distance à A_0, inférieure à π. Les feuillets F_k dans lesquels rentre le domaine O_π s'interchangent autour des points de ramification qui sont: ou bien contenus dans O_π, ou bien situés à une distance à O_π, ne depassant pas la longueur possible d'une partie rectiligne de la frontière d'un feuillet c. a d. π. Il s'agit donc des points de ramification dont la distance à A_0 est sûrement inférieure à 2π. D'après la condition 2 de notre proposition leur nombre ne surpasse pas N.

Or, autour de chaque point de ramification s'interchangent p feuillets au plus. Ceux-ci appartiennent, comme nous l'avons vu (n^0 8), au plus à $1 + [p/2]$ générations successives. Donc, le nombre des générations successives qui, à partir de G_0, rentrent en jeu en ce qui concerne O_π, ne surpasse absolument pas $N+N[p/2]$, c. à d. on a

$$g(\pi)\leqslant N\left(1+\left[\frac{p}{2}\right]\right).$$

Gontinuons à étendre O_ρ en laissant ρ augmenter de π à 2π. Le domaine $O_{2\pi}-O_\pi$ est contenu dans l'ensemble des domaines de la même espèce que O_π, mais dont les points de départ sont les différents points de la frontière de O_π. Comme nous venons de voir, dans chacun de ces domaines l'ordre des générations ne peut augmenter de plus que de $N+N[p/2]$, par conséquent l'ordre des générations auxquelles appartienent les points de $O_{2\pi}$ ne surpasse pas le double de ce nombre, c. à d. on a

$$g(2\pi)\leqslant 2N\left(1+\left[\frac{p}{2}\right]\right).$$

En continuant ainsi, nous obtenons la relation générale suivante:

$$g(\nu\pi)\leqslant \nu m \qquad \text{où} \qquad m=N\left(1+\left[\frac{p}{2}\right]\right). \tag{13}$$

Ceci étant, reprenons les considérations des n^0 9—11. Le nombre des points de ramification situés sur la frontière d'un feuillet est, en vertu de la condition 2, au plus égal à N; donc on peut poser dans (4) et dans les relations suivantes N à la place de N_π. Choisissons comme limites des intégrales considérées $\nu\pi$ au lieu de ρ_ν. Nous avons alors

$$J_i>\frac{1}{pN}\sum_1^i \nu\int_{\nu\pi}^{(\nu+1)\pi}\frac{\rho\,d\rho}{\sum\limits_0^{g(\rho)}\mu\,\delta(\mu)}.$$

D'après (13) on a $g(\rho)\leqslant(\nu+1)m$ dans l'intervalle $[\nu\pi, (\nu+1)\pi]$ et par conséquent

$$J_i>\frac{\pi^2}{pN}\sum_1^i \nu\,\frac{2\nu+1}{\sum\limits_0^{(\nu+1)n}\mu\,\delta(\mu)}>\frac{\pi^2}{pN}\sum_2^{i+1}\frac{\nu}{\sum\limits_0^{m\nu}\mu\,\delta(\mu)}.$$

Donc, la série (12) étant divergente, la suite des intégrales J_i l'est aussi, d'où resulte la proposition VI.

15. — Il ne serait pas, peut-être, sans intérêt à étendre nos considérations aux surfaces de Riemann plus générales. Faisons donc quelques ramarques à ce propos. Des extensions sont possibles sans difficultés. Nous montrerons comment on peut supprimer la condition, que l'ordre des points de ramification soit borné, tout en gardant les deux autres. Donc il s'agira simplement des surfaces U de Riemann dont tous les points de ramification sont algébriques, la distance sphérique entre ces points, mesurée sur U, étant au-dessus d'une borne positive ε.

Sauf les cas que l'on signalera explicitement, nous retiendrons les mêmes notions et notations.

Soit donc G_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ la suite des générations de feuillets. Désignons par p_μ l'ordre maximum des points de ramification situés sur les frontières des feuillets dont se composent les générations $G_0, G_1, \ldots, G_\mu$. La suite des p_μ, $\mu = 0, 1, 2, \ldots$ est non-décroissante; lorsqu'elle est bornée on a les surfaces S.

Puisque $g(\rho)$ est l'ordre maximum des générations qui ont des points communs avec O_ρ, l'ordre des points de ramification dans O_ρ a comme borne supérieure $p_{g(\rho)}$. Donc

$$n(\rho) < p_{g(\rho)} N(\rho).$$

On a de même dans O_ρ au lieu de N_π le nombre $N_\pi(\rho)$ où

$$N_\lambda(\rho) = \frac{(6p_{g(\rho)})^{\left[\frac{5\lambda}{\varepsilon}\right]} - 1}{6p_{g(\rho)} - 1}$$

et d'autre part

$$N(\rho) \leqslant N_\pi(\rho) \cdot f(\rho),$$

d'où

$$n(\rho) < p_{g(\rho)} N_\pi(\rho) \sum_{0}^{g(\rho)} \mu\, \delta(\mu). \tag{14}$$

Passons aux intégrales.

$$J_i = \int_{\rho_1}^{\rho_{i+1}} \frac{\rho\, d\rho}{n(\rho)} > \sum_{1}^{i}{}_{\nu} \frac{1}{n\rho_{\nu+1}} \int_{\rho_\nu}^{\rho_{\nu+1}} \rho\, d\rho > \frac{\varepsilon^2}{2} \sum_{1}^{i}{}_{\nu} \frac{\nu}{n(\rho_{\nu+1})}. \tag{15}$$

Mais lorsque $\rho \leqslant \rho_{\nu+1}$, les C_k existent pour $k \leqslant \nu$ et pénètrent seulement dans les générations G_μ où $\mu < m_\nu$, c. à d. on a $g(\rho) < m_\nu$, donc

$$p_{g(\rho_{\nu+1})} \leqslant p_{m_\nu}, \tag{16}$$

d' où

$$N_\lambda(\rho_{\nu+1}) \leqslant \frac{(6\,p_{m_\nu})^{\left[\frac{5\lambda}{\varepsilon}\right]} - 1}{6\,p_{m_\nu} - 1}. \tag{17}$$

Donc on a de (14), (16) et (17)

$$n(\rho_{\nu+1}) < p_{m_\nu} \frac{(6\,p_{m_\nu})^{\left[\frac{5\pi}{\varepsilon}\right]} - 1}{6\,p_{m_\nu} - 1} \sum_{0}^{m_\nu}{}_{\mu}\, \delta(\mu) \tag{18}$$

et d' après (15)

$$J_i > \frac{\varepsilon^2}{2} \sum_{1}^{i}{}_{\nu} \frac{\nu(6\,p_{m_\nu} - 1)}{p_{m_\nu}\left\{(6p_{m_\nu})^{\left[\frac{5\pi}{\varepsilon}\right]} - 1\right\} \sum_{0}^{m_\nu}{}_{\mu}\, \delta(\mu)} \tag{19}$$

Par conséquent on peut énoncer la

Proposition VII. *Lorsque la série*

$$\sum^{\infty}{}_{\nu} \frac{\nu(6\,p_{m_\nu} - 1)}{p_{m_\nu}\left\{(6p_{m_\nu})^{\left[\frac{5\pi}{\varepsilon}\right]} - 1\right\} \sum_{0}^{m_\nu}{}_{\mu}\, \delta(\mu)} \tag{20}$$

où

$$m_\nu = \nu\left[\frac{p_{m_\nu}}{2}\right] + (\nu+1)\,\frac{(6\,p_{m_\nu})^{\left[\frac{10\,\pi}{\varepsilon}\right]} - 1}{6\,p_{m_\nu} - 1} \tag{21}$$

diverge, la surface U est du type parabolique.

Puisque

$$p\frac{p^s - 1}{p - 1} < s\,p^{s-1},$$

on peut substituer à la place de (20) la série

$$\sum_{\nu}^{\infty} \frac{\nu}{p_{m_\nu}^{\left[\frac{5\pi}{\varepsilon}\right]} \sum_{0}^{m_\nu} \mu\, \delta(\mu)}.$$

Mais l'intérêt qu'on pourrait avoir à considérer la proposition VII nous semble être d'autant moindre que l'équation fonctionnelle (19), d'où il faudrait calculer la suite des nombres m_ν, ne se prête pas à un calcul direct.

Des considérations semblables nous donneraient un critère analogue en ce qui concerne les surfaces de Riemann pour lesquelles une borne ε imposée à la distance entre les points de ramification n'existerait pas, mais pour lesquelles subsisterait la borne p. Au lieu de (18) il serait question alors de la divergence de

$$\sum_{\nu}^{\infty} \frac{\nu\, \varepsilon_{m_\nu}^{2}}{(6p)^{d_\nu} \sum_{0}^{m_\nu} \mu\, \delta(\mu)}$$

où une suite de nobres ε_ν tendant vers zéro, viendrait à la place de ε et où

$$d_\nu = \left[\frac{5\pi}{\varepsilon_{m_\nu}}\right].$$

On pourrait de même supposer à la fois $p_\nu \to \infty$ et $\varepsilon_\nu \to 0$, mais ces considérations ne nous semblent pas avoir un intérêt suffisant pour être traitées ici.

UNE PROPOSITION SUR LES SINGULARITÉS ESSENTIELLES DES FONCTIONS ANALYTIQUES

Par

M. RADOJČIĆ

1. — Lorsqu'on considère la division en „domaines fondamentaux" des domaines d'existence des fonctions analytiques uniformes appartenant à certaines classes bien connues (fonctions périodiques, fonctions linéairement automorphes) on est amené à constater le fait général que *toute suite infinie de domaines fondamentaux ayant un point limite converge vers ce point* (et jamais vers une ligne).

Ce point est évidemment un point essentiel. Quant à la notion du domaine fondamental, on peut la prendre aussi bien au sens employé dans les fonctions linéairement automorphes que selon notre définition (comme domaine d'univalence; v. [1], p. 85).

Rappelons qu'un point est dit *point limite* d'une suite infinie de domaines situés dans un plan, lorsqu'on peut choisir dans chacun de ces domaines un point de telle sorte, que ces points convergent vers le point considéré (v. [1], p. 100); une suite infinie de domaines situés dans un plan *converge* vers un point, lorsque ce choix peut se faire arbitrairement.

2. — Or, ce fait n'appartient pas seulement aux fonctions linéairement automorphes; certainement, il doit avoir lieu pour les fonctions analytiques d'une classe beaucoup plus large. D'autre part, il peut jouer un rôle décisif dans l'étude des singularités essentielles de ces fonctions. L'une de ses conséquences immédiates serait la circonstance que dans la proximité de chaque point essentiel la fonction se rapproche de toute valeur.

Par conséquent, il serait intéressant de rechercher sous quelles conditions, valables pour les fonctions analytiques les plus générales possibles, pourrait-on conclure que toute suite de domaines fondamentaux ayant un point limite, converge vers ce point. „L'automorphie" pouvant être considérée comme une propriété générale des fonctions analytiques (v. [1], p. 84), c'est bien aux fonctions analytiques générales que cette recherche s'appliquerait.

Considérons donc les fonctions analytiques que nous avons dénommées „fonctions absolument automorphes" (v. [1]).

Envisageons une singularité essentielle S d'une telle fonction ou bien seulement une partie d'une telle singularité, soit S, et supposons la fonction uniforme et méromorphe au voisinage de S. La singularité S pourrait être un continu linéaire quelconque. Lorsque c'est une ligne et non un seul point, nous pouvons, grâce à la transformation conforme, supposer toujours que c'est une circonférence ou un arc de circonférence. Soit D un voisinage quelconque de S, limité par S et par une courbe qui se termine en S ou qui ne se termine pas, de sorte que D soit simplement ou doublement connexe et que la fonction soit uniforme dans D (v. [2]). Le domaine D peut être partagé en domaines fondamentaux, (en y comprenant les domaines qui ne sont pas entièrement contenus dans D) ces domaines ne s'accumulent qu'à la proximité de S, et celà en chaque point de S. On peut toujours supposer que les frontières de ces domaines sont continues, excepté peut-être aux points de S (v. [1], n^0 6 et les remarques finales). Or, pour plus de simplicité nous supposerons que la frontière de chaque domaine fondamental est continue partout.

Ceci étant, nous pouvons démontrer la proposition suivante:

Si la partie de la surface de Riemann de la fonction inverse, qui correspond au voisinage D, a au plus un nombre limité de points de ramification algébriques, alors les sommets de chaque paire de faisceaux transcendants voisins se confondent.

Donc, chaque suite infinie de domaines fondamentaux, qui est situé entre une telle paire de faisceaux, converge vers un point.

3. — Démontrons cette proposition. Soit $\zeta = f(z)$ la fonction considérée et $z = \varphi(\zeta)$ la fonction inverse; soient F et F' les deux faisceaux voisins mentionnés, $\zeta = \omega$ et $\zeta = \omega'$ leurs valeurs asymptotiques. Puisque F et F' sont deux faisceaux différents, il y a une infinité de domaines fondamentaux entre un angle quelconque A de F et un angle quelconque A' de F'. En effet, comme nous avons déjà montré ailleurs (v. [2]), si deux angles A et A' appartiennent aux deux faisceaux, les angles situés entre A et A' sont en nombre infini. Soient donc D_n ces domaines fondamentaux ($n = 1, 2, \ldots$).

Évidemment, chaque feuillet d'une surface de Riemann possède sur sa frontière au moins deux points de ramification. Donc, dans la partie de la surface de $\varphi(\zeta)$, qui correspond au voisinage D, d'après les conditions de notre proposition, tout feuillet, excepté un nombre fini, possède à sa frontière uniquement des points de ramification transcendants et en possède au moins deux.

Donc, chaque domaine fondamental situé dans D entre A et A', excepté peut-être un nombre fini de ces domaines, a seulement des sommets transcendants et en a au moins deux. Par conséquent ceci est valable pour les domaines D_n dès que n est assez grand; c. à d., chacun de ces domaines D_n n'a que des angles transcendants et il en a au moins deux. Comme ces angles se trouvent entre A et A' et comme F et F' sont des faisceaux voisins, A et A' appartiennent à F et F'. La seule question qui se pose encore, est de savoir comment ces angles sont-ils distribués parmi les faisceaux F et F'?

4. — Antérieurement nous avons démontré (v. [3], la seconde proposition du n^0 3) un lemme, valable dans le cas où D est de „première espèce“, c. à d. où chaque domaine fondamental situé dans D, excepté au plus un nombre fini, a au moins un sommet transcendant. Or, cette circonstance a lieu dans notre proposition et nous pouvons la formuler en disant:

Lorsque deux angles transcendants d'un domaine fondamental appartiennent au même faisceau transcendant, ce domaine entoure au moins un domaine fondamental qui n'a qu'un seul angle transcendant.

Remarquons que la démonstration de ce lemme fut indépendante de l'hypothèse que les domaines fondamentaux tendent vers des points, hypothèse non admise dans les considérations présentes.

5. — Revenons à la démonstration de notre proposition. Comme pour n assez grand tout domaine D_n n'a que des angles transcendants et en a au moins deux, on a d'après le lemme précédent que:

1° tout domaine fondamental D_n, excepté peut-être un nombre fini, a au moins un angle dans chacun des deux faisceaux F et F'; car dans le cas contraire il y aurait une infinité de domaines D_n chacun ayant au moins deux angles dans l'un de ces faisceaux; mais alors, d'après le dit lemme, chacun de ces domaines entourerait au moins un domaine à un seul angle transcendant, contrairement à ce que nous disions;

2° tout domaine D_n, excepté peut-être un nombre fini, n'a que deux angles, donc un seul dans chaque faisceau, puisque dans le cas contraire il y aurait une infinité de domaines D_n à deux angles au moins dans l'un des deux faisceaux.

Par conséquent pour n assez grand, chaque domaine D_n a juste deux angles, l'un dans F, l'autre dans F'. Soit D_m l'un de ces domaines. Il s'étend du sommet de F au sommet de F'. Or, ces deux sommets pourraient se confondre ou non. S'ils se confondent, D_m entoure et délimite un certain domaine qui fait partie de D. Si ces sommets sont différents, D_m entoure et délimite à l'aide d'un arc de S (puisque S est alors une ligne) un domaine pareil. Quoiqu'il en soit, désignons par P le domaine entouré. Il se trouve entre A et A' (v. fig. 1).

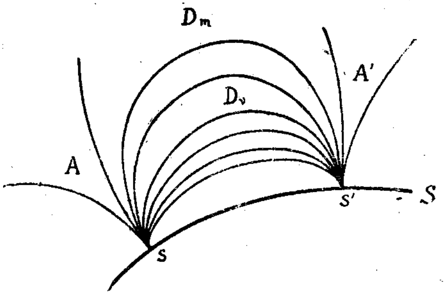


Fig. 1

Les domaines D_n dont se compose P forment une suite infinie, soit D_ν ($\nu=1, 2,\ldots$), telle que D_ν et $D_{\nu+1}$ ont une frontière commune, qui est d'après les considérations précédentes une courbe continue, soit C_ν, reliant le sommet s de F au sommet s' de F' et passant par ces deux faisceaux. Les courbes C_ν convergent vers l'arc (ou le point) ss' et ce qu'il faut démontrer, c'est que cet arc se réduit toujours à un point.

Soit C_0 la courbe faisant la frontière commune entre D_m et P, de sorte que P est limité par C_0 et, peut-être, par un arc de S.

6. — Comme chaque domaine D_ν a deux sommets et transcendants, les feuillets correspondants de la surface de Riemann de la fonction inverse ont sur leur frontières deux points de ramification transcendants, et, comme dans cette partie de la surface le nombre des points de ramification algébriques est au plus fini, nous pouvons supposer que ces deux points transcendants sont les points de ramification uniques situés sur la frontière de chaque feuillet. Il en résulte directement que les coordonnées de ces points, $\zeta=\omega$ et $\zeta=\omega'$ sont différentes, c. à d. $\omega \neq \omega'$.

Soit Π le domaine de la surface de Riemann, qui correspond au domaine P, soient Δ_ν ($\nu=1, 2, \ldots$) les feuillets mentionnés, correspondant aux domaines D_ν et soient Γ_ν les lignes qui correspondent aux courbes C_ν ($\nu=0, 1, 2, \ldots$). Chaque Γ_ν est un arc simple qui relie dans le plan de ζ les points ω et ω'; ce sont bien les seuls points de ramification situés sur Γ_ν. Le domaine Π est limité uniquement par l'arc Γ_0 et il ne contient à son intérieur aucun point de ramification (puisque ce seraient des points algébriques). Donc ω et ω' sont les seuls points de ramification situés sur la frontière de Π.

7. — Il est facile à faire la transformation biunivoque et conforme de Π en un domaine plan. Une telle transformation est accomplie par la fonction

$$u=\log\frac{\zeta-\omega'}{\zeta-\omega}.$$

Les points ω et ω' sont transformés en $u=\infty$, l'arc Γ_0 en une courbe simple „fermée“ qui passe par $u=\infty$. Ainsi, à Π correspond un domaine ouvert et simplement connexe, soit U, Il en résulte que la fonction $u[f(z)]$ transmet l'image biunivoque et conforme du domaine P sur le domaine U, et qu'un seul point $u=\infty$ de la frontière de U correspond à l'arc ss' de la frontière de P. Comme ces deux frontières sont continues, la transformation est continue même sur ces frontières. Donc, l'arc ss' se réduit nécessairement à un seul point.

Ainsi la première partie de notre proposition est démontrée. Quant à la seconde, elle est une conséquence immédiate de la première. En effet, il suffit de remarquer que les courbes C_ν doivent converger vers le point $s\equiv s'$ de S. Car il ne peut y avoir un second point dans P ou sur sa frontière, au voisinage duquel pourraient atteindre des points appartenant à une infinité des C_ν (puisque se serait alors un point essentiel et que $s\equiv s'$ est le seul point essentiel dans P ou sur sa frontière).

RÉFÉRENCES

[1] M. Radojčić — Sur une classe de fonctions analytiques (Publ. math. de l'Univ. de Belgrade, 1, 1932).

[2] M. Radojčić — Sur les domaines fondamentaux des fonctions analytiques au voisinage d'une singularité essentielle (Publ. math., Belgrade 4, 1935).

[3] M. Radojčić — Sur l'allure des fonctions analytiques au voisinage des singularités essentielles (Bulletin de la Soc. math. de France, 64, 1936)

REMARQUE au sujet de l'article (v. p. 25)

CERTAINS CRITÈRES CONCERNANT LE TYPE DES SURFACES DE RIEMANN À POINTS DE RAMIFICATION ALGÉBRIQUES

Par

M. RADOJČIĆ

L'exemple traité dans le № 13 de cet article fut, par erreur, présenté comme exemple où le critère contenu dans la proposition II est en défaut. Or, c'est le contraire qui est vrai. En effet, on a

$$G_0 \subset \Gamma_0,$$

$$G_0 + G_1 \subset \Gamma_0 + \Gamma_1$$

etc., en général

$$\sum_0^\nu G_k \subset \sum_0^\nu \Gamma_k,$$

donc, les nombres des feuillets contenus dans les deux membres de cette relation étant respectivement

$$\sum_0^\nu \delta(k) \quad \text{et} \quad q(2\nu+1)^2,$$

on a

$$\sum_0^\nu \delta(k) < q(2\nu+1)^2.$$

Comme il s'agit d'appliquer la proposition II, nous comparons les séries

$$\sum^{\infty}{}_{\nu}\frac{\nu}{\sum\limits_{0}^{\nu}{}_{\mu}\,\delta(m\mu)} \quad \text{et} \quad \sum^{\infty}{}_{\nu}\frac{\nu}{q(2m\nu+1)^2}$$

et constatons que la première est une majorante de la seconde. Donc, celle-ci étant divergente, la première l'est aussi et, par conséquent, les surfaces de Riemann des fonctions inverses aux fonctions elliptiques sont du type parabolique — ce qu'il fallait démontrer.

SUR LES SINGULARITÉS ESSENTIELLES DE CERTAINES FONCTIONS AUTOMORPHES DANS UN DOMAINE

par

M. RADOJČIĆ

1. — Pour faciliter la lecture de la présente Note, nous allons d'abord rappeler quelques notions que nous avons introduites dans nos travaux antérieurs sur les fonctions analytiques.

L'automorphie étant une propriété très générale des fonctions analytiques, la classe des fonctions que nous avons nommées *absolument automorphes* (v. [2], p. 84) embrasse, pour ainsi dire, toutes les fonctions automorphes qui méritent ce nom; les fonctions linéairement automorphes et les fonctions méromorphes n'en sont que des espèces particulières. Cependant, nous ne demanderons pas que la fonction considérée soit absolument automorphe dans tout son domaine d'existence; il nous suffira qu'elle le soit dans un certain domaine représentant le voisinage d'une singularité essentielle (v. [2], p. 118).

Le domaine d'existence d'une fonction absolument automorphe, ou une certaine partie de ce domaine, peut être divisé en domaines d'univalence que nous avons appelés *domaines fondamentaux* (v. [1] et [2[, p. 85).

Un point situé sur la frontière d'un domaine fondamental est appelé par nous un *sommet* de ce domaine, si tout voisinage de ce point appartient à plus de deux domaines fondamentaux différents. Les sommets d'un domaine fondamental divisent sa frontière en *côtés*. Deux côtés consecutifs renferment un *angle*. Chaque ensemble d'angles, qui ont un sommet commun et dont les éléments forment une suite ininterrompue d'angles adjacents, est nommé un *faisceau,* pourvu que cet ensemble ne soit pas une partie d'un ensemble plus grand de la même espèce. Les sommets, les angles et les faisceaux sont appelés *algébriques* ou *transcendants,* suivant que le sommet correspondant est un point algébrique ou transcendant (v. [2], n° 9).

Un point est dit un *point limite* d'une suite infinie de domaines situés dans un plan, lorsqu'on peut choisir dans chacun de ces domaines un point de telle sorte que ces points convergent vers le point considéré (v. [2], p. 100). Une suite infinie de domaines situés dans un plan converge vers ce point lorsque ce choix peut se faire arbitrairement.

2. — Ceci étant posé, le problème général suivant se présente à l'étude (v. [7]): sous quelles conditions, valables pour les fonctions analytiques les plus générales possibles, peut-on conclure que toute suite infinie de domaines fondamentaux, ayant un point limite, converge vers ce point?

Envisageons une singularité essentielle S d'une fonction analytique uniforme et méromorphe au voisinage de S. La singularité S peut être un continu linéaire quelconque. Lorsque c'est une ligne et non un seul point, nous pouvons supposer toujours que c'est une circonférence ou un arc de circonférence. Soit D un tel voisinage, doublement ou simplement connexe suivant que S est un arc de cercle ou un point unique (appartenant à un ensemble quelconque de points singuliers transcendants) et qu'il se trouve sur la frontière unique de D, ou bien que S est un cercle essentiel entier ou un point essentiel isolé et qu'il constitue la frontière intérieure (ou extérieure) de D.

Comme nous avons montré, le domaine D peut être partagé en domaines fondamentaux, qui ne s'accumulent qu'à la proximité de S, et celà en chaque point de S, et dont les frontières sont continues, excepté peut-être aux points de S même (v. [2], n° 6 et les remarques finales). Or, supposons que la frontière de chaque domaine fondamental est continue partout.

Dans ces circonstances nous avons démontré (v. [4]) la proposition suivante:

I. — *Si la partie de la surface de Riemann de la fonction inverse, qui correspond au voisinage de D, contient au plus un nombre limité de points de ramification algébriques, alors les sommets de chaque paire de faisceaux transcendants voisins se confondent.*

Donc, chaque suite infinie de domaines fondamentaux, qui est située entre une telle paire de faisceaux, converge vers un point.

Ici nous allons considérer quelques faits qui résultent de cette proposition et de certains faits démontrés antérieurement. Donc, il s'agira toujours de fonctions analytiques dont les fonctions inverses ne possèdent dans la partie considérée de leurs surfaces de Riemann qu'un nombre fini, au plus, de points de ramification algébriques.

3. — Nous commençons par [2]. Grâce à la proposition I, le théorème 4 (p. 100) peut être complété de telle manière qu'on obtient le théorème suivant:

II. — *Le domaine d'existence d'une fonction absolument automorphe uniforme, dont la fonction inverse possède au plus un nombre fini de points de ramification algébriques, peut être divisé en domaines fondamentaux de manière que chaque suite infinie de domaines fondamentaux, possédant un point limite, converge vers ce point, qui est un point singulier transcendant, et que chaque point singulier transcendant soit un tel point limite. Donc, chaque point singulier transcendant d'une telle fonction est essentiel, d'indétermination complète.*

En effet, considérons un voisinage tel que D d'une singularité essentielle quelconque d'une fonction absolument automorphe uniforme; d'après I le théorème II a lieu pour les domaines fondamentaux appartenant à D. Donc, II a lieu dans tous les domaines d'existence de cette fonction.

Lorsqu'on généralise II dans le sens mentionné dans [2], p. 118, on obtient le théorème suivant:

III. — *Considérons un domaine d'une fonction analytique quelconque où celle-ci est uniforme et absolument automorphe; si la fonction inverse possède dans la partie correspondante de sa surface de Riemann au plus un nombre fini de points de ramification algébriques, ce voisinage peut être divisé en domaines fondamentaux de manière que chaque suite infinie de domaines fondamentaux possédant un point limite, converge vers ce point, qui est un point singulier transcendant, et que chaque point singulier transcendant situé à la frontière de ce domaine soit un tel point limite. Donc, chaque point singulier transcendant situé à la frontière de ce domaine est essentiel, d'indétermination complète.*

4. — Puisqu'un feuillet d'une surface de Riemann ([1], p. 37) possède à sa frontière au moins deux points de ramification, tout domaine fondamental qui n'a aucun sommet transcendant, doit avoir à sa frontière au moins deux sommets algébriques. Donc, s'il y avait une infinité de tels domaines dans D, il y aurait une infinité de points de ramification algébriques dans D. Par conséquent, tout domaine fondamental situé dans D, excepté au plus un nombre fini, possède des sommets transcendants.

Or, nous avons démontré dans [3], n⁰ 4, les propositions VI et VII en tenant compte de la condition qu'on peut extraire de toute suite infinie de domaines fondamentaux appartenant à D une suite partielle qui converge vers un point de S. Dès que le nombre des points de ramification algébriques, correspondant au voisinage d'une singularité essentielle S est au plus fini, cette condition peut être supprimée et l'on a indépendemment;

IV. — *Si la partie de la surface de Riemann de la fonction inverse, qui correspond au voisinage D, contient au plus un nombre limité de points de ramification algébriques, alors l'ensemble des sommets transcendants est dense sur S.*

V. — *Si la partie de la surface de Riemann de la fonction inverse, qui correspond au voisinage D contient au plus un nombre limité de points de ramification algébriques et si l'ensemble ordonné des faisceaux transcendants situés dans D est réductible, S est un point unique.*¹⁾

RÉFÉRENCES

[1] M. Radojčić, Sur une manière de partager les surfaces de Riemann en feuillets, Glas de l'Acad. des Sciences, Belgrade, 1931.

[2] „ Sur une classe de fonctions analytiques, Publications mathématiques, Belgrade, 1932.

[3] „ Über einen Satz von Herrn Ahlfors, Publications mathématiques, tome VI, Belgrade, 1937.

[4] „ Une proposition sur les singularités essentielles des fonctions analytiques, Publications de l'Institut Math., Belgrade, 1950.

---

(1) Cet article a dû paraître dans la Revue Mathématique de l'Union Interbalkanique (Athènes) en 1941, mais l'apparition du volume en question fut empêchée par la guerre.

SUR LES SÉRIES DE FONCTIONS ALGEBRIQUES ET LES PRODUITS INFINIS ANALOGUES, DÉFINISSANT DES FONCTIONS ANALYTIQUES MULTIFORMES DANS LEURS DOMAINES D'EXISTENCE QUELCONQUES

par

M. RADOJČIĆ

SOMMAIRE — L'auteur étend les théorèmes de Mittag-Leffler et de Weierstrass, concernant le développement des fonctions uniformes en séries ou en produits infinis, aux surfaces de Riemann ouvertes et démontre en même temps l'existence des fonctions analytiques ayant un domaine d'existence quelconque. Les développements de l'auteur ont comme termes des fonctions algébriques (correspondant aux fonctions rationnelles de la série de Mittag-Leffler) ou bien certaines fonctions transcendantes (correspondant aux facteurs de Weierstrass) dont les surfaces de Riemann sont fermées.

1. En 1909 Koebe [3] démontra l'existence des fonctions analytiques dont le domaine d'existence est une surface de Riemann ouverte quelconque, ces fonctions étant *méromorphes* dans ce domaine.

Ce n'est qu'en 1948 que Mlle. H. Florack [2] démontra, grâce à certains travaux des MM. H. Behnke et K. Stein [1] l'existence des fonctions *régulières* dont le domaine d'existence est une surface de Riemann ouverte quelconque. Ainsi le théorème de Runge, sur l'existence des fonctions uniformes dont le domaine d'existence est un domaine ouvert quelconque du plan, a obtenu sa généralisation naturelle et en quelque sorte définitive.

En même temps Mlle. Florack généralisa les théorèmes bien connus de Mittag-Leffler et de Weierstrass en construisant pour une surface de Riemann ouverte R quelconque:

1⁰ une fonction analytique uniforme et *méromorphe* sur R, ayant ses pôles dans une suite de points, donnée à l'avance et possédant pour ces pôles des parties principales données, et

2^0 une fonction analytique uniforme et *régulière* sur R, ayant ses zéros dans une suite de points, donnée à l'avance, l'ordre de chaque zéro étant donné.

Les expressions pour ces fonctions sont semblables respectivement à celles de Mittag-Leffler et de Weierstrass. C'est une somme, ou bien un produit, finis ou infinis, de certaines fonctions dont chacune possède un seul pôle ou un seul zéro et dont la surface de Riemann *contient* la surface donnée R.

2. Ici nous allons exposer une autre manière d'aborder ces problèmes. — Dans les théorèmes cités de Runge et de Mittag-Leffler figurent des séries de fonctions rationnelles et dans ceux de Weierstrass figurent des produits de fonctions de la forme

$$\left(1-\frac{z}{a_n}\right)^{\mu_n} e^{g_n(z)},$$

donc chacune possède un seul zéro et un seul point singulier essentiel $z=\infty$. Or, on peut se demander s'il est possible de généraliser ces théorèmes pour les surfaces de Riemann de telle sorte que les fonctions rationnelles soient remplacées par des fonctions *algébriques*, généralement multiformes et les facteurs de Weierstrass par des fonctions analogues *dont les surfaces de Riemann sont algébriques.*

En général nous n'aurons pas alors des suites de fonctions dont les surfaces de Riemann *contiennent* la surface donnée R. Ce qui aura lieu peut illustrer l'exemple suivant, qui représente une formule élémentaire bien connue:

$$\log z = \lim_{n\to\infty} n\,(z^{1/n} - 1).$$

D'ailleurs, on peut généraliser facilement cette formule pour qu'elle représente une fonction quelconque, uniforme et régulière dans une région annulaire d'une surface logarithmique (M. Radojčić [5]). On aura toujours une suite de fonctions algébriques dont les surfaces de Riemann sont des surfaces fermées S_n à n feuillets et qui tendent pour ainsi dire vers la surface logarithmique.

3. Nous avons donné ailleurs ([4] et [6]) un certain nombre de propositions générales sur l'approximation des fonctions analytiques multiformes quelconques, dans des domaines quelconques de leurs surfaces de Riemann, par les fonctions algébriques. Pour obtenir ces propositions il fallait partir d'une généralisation de l'intégrale de Cauchy, permettant d'exprimer les valeurs d'une fonction régulière dans un domaine complètement intérieur à une surface de Riemann, par les valeurs qu'elle possède à la frontière de ce domaine.[1]) En outre la définition suivante d'une notion que nous exprimons par „contenir à la limite“ fut nécessaire:

Soit R une surface de Riemann quelconque. Nous dirons qu'une suite $\{S_n\}$ de surfaces de Riemann fermées *contient à la limite* la surface R, si n'importe quel domaine D de R, complètement intérieur à R (en symboles $D \subset\subset R$) est contenu dans toutes les surfaces S_n pour lesquelles n est assez grand.[2])

Lorsque R est une surface de Riemann fermée, on peut prendre $S_n = R$ et cette notion se réduit alors au simple „contenir“.

Maintenant, continuant ces considérations générales, nous allons construire d'abord des suites de foctions algébriques, convergeant uniformément à l'intérieur d'une surface de Riemann ouverte R quelconque et définissant par conséquent une fonction analytique $F(z)$ uniforme et régulière sur R, possédant R comme domaine d'existence. Nous pouvons même demander que la fonction $F(z)$ ait des zéros donnés à l'avance ou bien qu'elle soit méromorphe sur R et qu'elle ait des pôles donnés, avec des parties principales données.

4. Dans ces buts nous partons de la proposition suivante, que nous avons démontrée ailleurs ([6] théorème I'):

„Soit $f(z)$ une fonction analytique, D un domaine ouvert de sa surface de Riemann, où $f(z)$ est holomorphe, sauf aux points de ramification algébriques, situés dans D et où elle est supposée continue; soit D' un domaine ouvert (d'une surface de Riemann) qui contient D; désignons par S_n, $n = 1, 2, \ldots$, des surfaces de Riemann contenant à la limite le domaine D'; soient enfin Δ_n, $n = 1, 2, \ldots$, des domaines fermés contenus dans D, épuisant D et tels que Δ_n puisse-t-être considéré comme domaine de S_n. — Il existe toujours une suite de fonctions algébriques $\varphi_n(z)$, $n = 1, 2, \ldots$, dont les surfaces sont S_n, qui convergent uniformément à l'intérieur de D vers $f(z)$, chaque $\varphi_n(z)$ n'ayant comme pôles qu'un pôle unique dans chaque domaine complémentaire au domaine Δ_n."

---

[1]) Comme nous avons appris plus tard, une telle généralisation, mais limitée au cas où le domaine considéré est simplement connexe (correspondant à un paramètre d'uniformisation locale) fut mentionnée d'abord par R. König et M. Krafft dans l'article „Über Reihenentwicklung analytischer Funktionen“, *Journ. f. reine u. angew. Math.* **154** (1925). Ce n'est que dans leur livre „Elliptische Funktionen“, Berlin et Leipzig 1928, que les mêmes auteurs expriment clairement l'idée de l'extension de l'intégrale de Cauchy aux domaines des surfaces de Riemann. Mais ils n'effectuent pas l'analyse correspondante, se bornant à l'objet de leur livre. Or, indépendamment paru en novembre 1927 notre note [4], contenant cette généralisation.

[2]) On trouve dans [6], p. 21, aussi une définition plus large, valable lorsque, au lieu de R, on a un ensemble fini ou infini dénombrable de surfaces de Riemann.

Notons que les pôles sont placés n'importe où dans ces domaines complémetaires. Les domaines D et D' furent supposés connexes, mais les démonstrations ne sont pas liées, à cette restriction.

Cette proposition ne nous intéresse ici qu'au cas où D' fait partie d'une surface de Riemann fermée, soit S. Supposons en outre que D soit complètement intérieur à D' et que les domaines Δ_n soient siplement connexes relativement à D, et de même D relativement à D'. Alors, les Δ_n étant simplement connexes relativement à D', les pôles des $\varphi_n(z)$ peuvent être déplacés n'importe où dans les continus complémentaires de D', de sorte que les $\varphi_n(z)$ deviennent régulières dans D' et que la proposition précédente prend la forme suivante:

LEMME 1. *Soient D et D' deux domaines ouverts d'une surface de Riemann fermée S, le domaine D étant complètement intérieur à D', celui-ci non identique à S, et D étant simplement connexe relativement à D'.*

Alors toute fonction $f(z)$ uniforme et régulière dans D peut être représentée dans D par une suite de fonctions algébriques $\varphi_n(z)$ dont la surface de Riemann est S, qui convergent uniformément à l'intérieur de D et sont régulières dans le domaine plus large D'.

On peut même demander que chaque fonction $\varphi_n(z)$, ayant pour pôles des points quelconques dans les continus complémentaires de D', n'ait qu'un seul pôle dans chacun de ces continus.[3)]

MM. Behnke et Stein ont démontré au fond la même proposition par le même procédé (c'est celui de Runge). En effet, ils démontrent ([1] p. 439, proposition 5):

Soient B_1 et B_2 des domaines polygonaux sur une surface de Riemann R non fermée et soit $B_1 \subset\subset B_2 \subset\subset R$, chaque point de la frontière de B_1 pouvant être relié avec la frontière de B_2 par des lignes contenues dans B_2 et dont les points sont des points de la frontière de B_1 ou à l'extérieur de ce domaine.

Alors chaque fonction $f(z)$, régulière et uniforme dans B_1 peut être représentée par des fonctions régulières et uniformes dans B_2, qui tendent à l'intérieur de B_1 uniformément vers $f(z)$.

Puisque B_1 et B_2 (chez nous D et D') sont des domaines polygonaux (définition à la p. 433) ils font partie d'une surface de Riemann fermée (chez nous S). La possibilité de relier les points de la frontière de B_1 à celle de B_2 revient à dire que B_1 est simplement connexe relativement à B_2. Quant aux fonctions qui tendent uniformément vers $f(z)$, elles sont

---

[3)] Notons que la démonstration de notre théorème 2 dans [6] (p. 15) représente déjà une démonstration de la proposition citée, puisque la condition, suivant laquelle la fonction donnée doit être algébrique, peut être supprimée.

d'après la démonstration de cette proposition (pp. 440—442) des fonctions algébriques.

5. Notons encore certains faits dont nous ferons usage.

Étant donnée une surface de Riemann ouverte R, la détermination d'une suite de surfaces fermées, contenant à la limite R, consiste à concevoir: 1° une suite de domaines D_n, $n = 1, 2, \ldots$, faisant partie de R et épuisant R, et 2° une suite de surfaces de Riemann fermées S_n, telles que $D_n \subset S_n$, $n = 1, 2, \ldots$.

Or, la possibilité d'obtenir une telle suite $\{S_n\}$, bien qu'évidente, implique une démonstration et résulte de la proposition suivante, démontrée par MM. Behnke et Stein ([1], p. 435, Einbettungssatz):

Pour chaque domaine D, complètement intérieur à une surface de Riemann ouverte existe une surface de Riemann fermée A, qui contient D de telle sorte qu'un domaine au moins de A soit extérieur à D.

Notons que, dans le cas où D n'est pas connexe, ceci est vrai même lorsque D est complètement intérieur à *plusieurs surfaces de Riemann*, à condition que leur nombre soit fini (p. 436, proposition 2).

Lorsqu'une suite $\{D_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, de domaines qui épuisent un domaine ouvert d'une surface de Riemann a la propriété que pour tous les n chaque point de la frontière de D_n peut être relié à la frontière de D_{n+1} par un chemin contenu dans $D_{n+1} - D_n$ (c. à. d. lorsque D_n est simplement connexe relativement à D_{n+1}) la suite $\{D_n\}$ est dite *normale.*

Ayant introduit cette notion, MM. Behnke et Stein ([1], p. 443) démontrent le fait suivant:

Tout domaine ouvert d'une surface de Riemann est normalement épuisable par des domaines connexes.

6. Pour distinguer les points d'une surface de Riemann de leurs affixes dans le plan, nous acceptons une désignation pratique de Koebe: $\bar{z}$ doit désigner un point de la surface, dont l'affixe est z.

Puisque nous aurons à nous occuper des suites de fonctions algébriques dont les surfaces de Riemann sont données, nos considérations supposent la possibilité de construire certaines fonctions algébriques sur des surfaces de Riemann fermées, données à l'avance. Weierstrass a fait une analyse détaillée d'une telle construction dans ses „Cours sur les Transcendantes d'Abel". Ici nous pouvons nous contenter de certaines conditions générales que ces fonctions algébriques doivent remplir et qui sont contenues dans le théorème dit fondamental de la théorie des fonctions algébriques et dans le théorème connu de Riemann-Roch. Nous reproduisons donc ces faits, en les exprimant en termes suivants:

THÉORÈME FONDAMENTAL. *Soit S une surface de Riemann fermée, de genre p et soient $\tilde{z}_\nu$, $\nu=1,2,\ldots,n$, n points sur S et r_ν, $\nu=1,2,\ldots,n$, des entiers positifs, tels que $r_1+r_2+\ \ldots\ +r_n=m>p$.*

Il existe alors une fonction algébrique dont la surface de Riemann est S et qui possède en chaque point $\tilde{z}_\nu$ un pôle d'ordre r_ν, et aucun pôle de plus.

La fonction algébrique la plus générale dont la surface est S et qui possède ses pôles en ces m pointes, d'ordres au plus égaux aux nombres r_ν correspondants, contient $m-p+t+1$ constantes arbitraires, où t désigne le nombre de certaines fonctions „adjointes".

Retenons qu'en tout cas le nombre des constantes arbitraires est *supérieur* à $m-p$ et remarquons qu'on peut les déterminer en exigeant que la fonction ait, de plus, autant de zéros simples, choisis à l'avance, et de coefficients dans les parties principales des pôles donnés.

7. Après ces remarques préliminaires nous démontrons d'abord la proposition suivante, qui généralise l'un des théorèmes bien connus de Mittag-Leffler en l'appliquant aux surfaces de Riemann fermées:

PROPOSITION I. *Soit D un domaine ouvert quelconque (connexe ou non) d'une surface de Riemann fermée S, non identique à S, et soit $\{\tilde{a}_n\}$ une suite quelconque de points de D, s'accumulant en chaque point de la frontière de D et là seulement.*

Il existe alors une fonction analytique $F(z)$ uniforme sur S, possédant D comme domaine d'existence et méromorphe dans D, où elle a les points $\tilde{a}_n$ et ces points seulement, comme pôles avec des parties principales données à l'avance.

Cette fonction peut s'écrire sous la forme

$$F(z)=\sum_{n=1}^{\infty}[\varphi_n(z)-\psi_n(z)] \tag{1}$$

où φ_n désigne pour tout n une fonction algébrique de la surface S, régulière dans D, excepté au point $\tilde{a}_n$, qu'elle possède comme pôle avec la partie principale donnée correspondante, et ψ_n désigne une fonction algébrique de S, régulière dans D.

Les fonctions φ_n et ψ_n peuvent être choisies telles que chaque fonction φ_n ait un seul et même pôle à l'extérieur de D et que chaque fonction ψ_n ait à l'extérieur de D, dans chacun des continus complémentaires à D un seul et même pôle.

Démonstration. Soit

$$g_n\left(\frac{1}{t}\right)=\frac{C_1^{(n)}}{t}+\frac{C_2^{(n)}}{t^2}+\ldots+\frac{C_{m_n}^{(n)}}{t^{m_n}}, \quad C_{m_n}^{(n)}\neq 0,$$

la partie principale donnée à l'avance, relative au pôle $\tilde{a}_n \neq \infty$, en désignant par t l'expression $z-a_n$ ou $(z-a_n)^{1/s}$ suivant que $\tilde{a}_n$ est un point ordinaire de S ou bien un point de ramification d'ordre $s-1$. Pour $a_n=\infty$ la partie principale est

$$g_n(t)=C_1^{(n)}t+C_2^{(n)}t^2+\ldots+C_{m_n}^{(n)}t^{m_n},$$

où t désigne z ou $z^{1/s}$ suivant les deux dites possibilités.

D'après le théorème fondamental du n⁰ 6 on peut former pour tout n une fonction algébrique de la surface S, soit $\varphi_n(z)$, qui a deux pôles seulement: le pôle $\tilde{a}_n$ où la partie principale est g_n et un pôle quelconque à l'extérieur de D, soit $\tilde{b}_n$, l'ordre de celui-ci étant un certain nombre r_n. En effet, si nous envisageons la fonction la plus générale qui remplit ces conditions, le nombre des constantes arbitraires est en tout cas supérieur à $m-p$ $(m>p)$ où $m=m_n+r_n$. Donc, m_n étant en même temps le nombre des constantes C dans g_n, qu'il faut déterminer, il suffit qu'on ait $m_n<m_n+ +r_n-p$, c. à d. $r_n>p$. Cette condition, qu'on peut préciser, si l'on veut, à $r_n=p+1$, suffit à ce que la fonction φ_n existe sûrement.

Ceci étant, soit $\{D_n\}$, $n=0,1,2,\ldots,$ une suite de domaines ouverts de S, qui épuisent normalement le domaine D et cela de telle sorte que $\tilde{a}_n \in D_{n+1}-D_n$, $n=1,2,\ldots$ (La démonstration de ce fait évident ne présente aucune difficulté).

D'après le lemme 1 on peut former pour chaque n une fonction algébrique $\psi_n(z)$ de la surface S, régulière dans D et telle qu'on a pour une suite de nombres positifs ε_n décroissant vers zéro:

$$|\varphi_n-\psi_n|<\varepsilon_n-\varepsilon_{n+1}$$

pour tous les $z\in D_{n-1}$, puisque $D_{n-1}\Subset D_n$.

La fonction $\varphi_n-\psi_n$ est uniforme et régulière dans D, à l'exception des pôles $\tilde{a}_n$. À l'extérieur de D cette fonction possède comme pôles le point $\tilde{b}_n$ et les pôles de ψ_n. Remarquons qu'on peut placer les pôles des ψ_n dans un ensemble de points, tel que chaque continu complémentaire de D' contienne l'un de ces points seulement. Les points $\tilde{b}_n$ peuvent être placés dans le même ensemble, par ex. en un seul et même point.

---

[4]) Comparer à la proposition 3 dans [2].

Alors la série (1) remplit les conditions cherchées. En effet, soit Δ n'importe quel domaine complètement intérieur à D. En désignant par ε un nombre positif arbitrairement petit, il existe toujours un n_0 tel qu'on a pour $n \geqslant n_0$ à la fois $\Delta \subseteq D_{n-1}$ et $\varepsilon_n < \varepsilon$, par conséquent

$$\left|\sum_{\nu=n}^{n+r}(\varphi_\nu - \psi_\nu)\right| \leqslant \sum_{\nu=n}^{n+r}|\varphi_\nu - \psi_\nu| < \varepsilon_n - \varepsilon_{n+r+1} < \varepsilon_n$$

et d'autant plus

$$\left|\sum_{\nu=n}^{n+r}(\varphi_\nu - \psi_\nu)\right| < \varepsilon$$

pour $z \in \Delta$. Donc la série (1) est uniformément convergente à l'intérieur de D, à l'exception des pôles $\tilde{a}_n$, pour chacun desquels l'une des fonctions ψ_n devient infinie. Par conséquent $F(z)$ est une fonction analytique telle que la proposition I l'exige.

Pour assurer à la surface de $F(z)$ d'être vraiment S et non pas une surface plus simple dont S serait une surface recouvrante, il suffit de supposer que l'un des points $\tilde{a}_\nu$ est le seul dont l'affixe a une certaine valeur a_n.

Comme l'on voit immédiatement, lorsque la surface de Riemann S se réduit au plan, la proposition I se réduit par un choix convenable des fonctions φ_n et ψ_n au théorème général de Mittag-Leffler.

Remarquons enfin que si D n'est pas connexe, la fonction $F(z)$ peut représenter plusieurs fonctions monogènes sur une même surface de Riemann fermée.

8. Démontrons les quatre lemmes suivants, analogues au lemme 1.

LEMME 2. *Soient D et D' deux domaines ouverts d'une surface de Riemann fermée S, le domaine D étant complètement intérieur à D', celui-ci non identique à S, et D étant simplement connexe relativement à D'. Soient $\tilde{b}_\nu, \nu = 1, 2, \dots, k$, des points contenus dans $D' - D$.*

Alors toute fonction $f(z)$ uniforme et régulière dans D peut être représentée dans D par une suite de fonctions algébriques $f_n(z)$, $n = 1, 2, \dots$, dont la surface de Riemann est S, qui convergent uniformément à l'intérieur de D et sont régulières dans D' à l'exception des points $\tilde{b}_\nu$, qui sont tous, pour chaque fonction f_n des pôles avec des parties principales données, ne dépendant que de ν.

Démonstration. Soit $\alpha(z)$ une fonction algébrique de S, ayant les points $\tilde{b}_\nu$, $\nu = 1, 2, \dots, k$, comme pôles avec les parties principales données à l'avance. En général, d'après le théorème fondamental, $\alpha(z)$ doit avoir encore quelques pôles simples ou, par ex. un pôle multiple, que nous supposons placé à l'extérieur de D'.

Soit $f(z)$ une fonction quelconque uniforme et régulière dans D. La fonction $f-\alpha$ étant régulière dans D, il existe d'après le lemme 1 une suite de fonctions algébriques, soit $\{\varphi_n(z)\}$, dont la surface de Riemann est S, régulières dans D' et convergeant à l'intérieur de D uniformément vers $f-\alpha$, c. à d.

$$|f(z)-\alpha(z)-\varphi_n(z)|<\varepsilon, \quad n>n_0, \quad \tilde{z}\in\Delta\subset\subset D.$$

Par conséquent les fonctions algébriques $f_n=\varphi_n+\alpha$ convergent uniformément à l'intérieur de D vers $f(z)$, c. à d.

$$|f(z)-f_n(z)|<\varepsilon$$

en possédant en même temps les pôles $\tilde{b}_\nu$, $\nu=1,2,\ldots,k$.

LEMME 3. *Soient D et D' deux domaines ouverts d'une surface de Riemann fermée S, le domaine D étant complètement intérieur à D', celui-ci non identique à S, et D étant simplement connexe relativement à D'. Soient $\tilde{a}_\mu$, $\mu=1,2,\ldots,h$, des points contenus dans D.*

Alors toute fonction $f(z)$ uniforme et méromorphe dans D, où ses pôles sont $\tilde{a}_\mu$, $\mu=1,2,\ldots,h$, peut être représentée dans D par une suite de fonctions algébriques $f_n(z)$, $n=1,2,\ldots$, dont la surface de Riemann est S, qui convergent uniformément à l'intérieur de $D-\{\tilde{a}_\mu\}$ vers $f(z)$ et qui sont régulières dans D' à l'exception des points $\tilde{a}_\mu$, ceux-ci étant pour chaque fonction f_n des pôles dont les parties principales sont les mêmes que pour la fonction $f(z)$.

Démonstration. Soit $\beta(z)$ une fonction algébrique de S, ayant les points $\tilde{a}_\mu$, $\mu=1,2,\ldots,h$, comme pôles avec les mêmes parties principales que pour $f(z)$, et régulière dans $D'-D$. Nous supposons de nouveau que les autres pôles de $\beta(z)$, s'il y en a, sont à l'extérieur de D'.

La fonction $f-\beta$ étant régulière dans D, il existe d'après le lemme 1 une suite de fonctions algébriques $\{\varphi_n(z)\}$ dont la surface de Riemann est S, régulières dans D' et convergeant à l'intérieur de D uniformément vers $f-\beta$.

Par conséquent les fonctions algébriques $f_n=\varphi_n+\beta$ convergent uniformément à l'intérieur de $D-\{\tilde{a}_\mu\}$ vers $f(z)$, à savoir

$$|f(z)-f_n(z)|<\varepsilon, \quad n>n_0, \quad \tilde{z}\in\Delta\subset\subset D.$$

LEMME 4. *Soient D et D' deux domaines ouverts d'une surface de Riemann fermée S, le domaine D étant complètement intérieur à D', celui-ci non identique à S, et D étant simplement connexe relativement à D'. Soient $\tilde{a}_\mu$, $\mu=1,2,\ldots,h$, et $\tilde{b}_\nu$, $\nu=1,2,\ldots,k$, des points contenus, les premiers dans D et les seconds dans $D'-D$.*

Alors chaque fonction $f(z)$ uniforme et méromorphe dans D, où ses pôles sont a_μ, $\mu=1,2,\ldots,h$, peut être représentée dans D par une suite *de fonctions algébriques* $f_n(z)$, $n=1,2,\ldots$, *dont la surface de Riemann est* S, *qui convergent uniformément à l'intérieur de* $D-\{\tilde{a}_\mu\}$ *vers* $f(z)$ *et qui sont régulières dans* D' *à l'exception des points* $\tilde{a}_\mu$ *et* $\tilde{b}_\nu$, *qui sont pour chaque fonction* f_n *des pôles. Les parties principales des pôles* $\tilde{a}_\mu$ *y sont les mêmes que pour la fonction* $f(z)$ *et les parties principales des pôles* $\tilde{b}_\nu$ *sont également données à l'avance et ne dépendent que de* ν.

Démonstration. Soit encore $\beta(z)$ une fonction algébrique aux mêmes propriétés que dans la démonstration précédente. La fonction $f-\beta$ étant régulière dans D, il existe d'après le lemme 2 une suite de fonctions algébriques $\{\varphi_n(z)\}$ dont la surface de Riemann est S, régulières dans D', à l'exception des points $\tilde{b}_\nu$ qu'elles ont comme pôles avec des parties principales données, et convergeant à l'intérieur de D uniformément vers $f-\beta$.

Par conséquent, les fonctions algébriques $f_n=\varphi_n+\beta$ convergent uniformément dans l'intérieur de $D-\{\tilde{a}_\mu\}$ vers $f(z)$, à savoir

$$|f(z)-f_n(z)|<\varepsilon, \quad n>n_0, \quad \tilde{z}\in\Delta\Subset D$$

en possédant en même temps les pôles $\tilde{b}_\nu$.

LEMME 5. *Soient* D *et* D' *deux domaines ouverts d'une surface de Riemann fermée* S, *le domaine* D *étant complètement intérieur à* D', *celui-ci non identique à* S, *et* D *étant simplement connexe relativement à* D'. *Soient* $\tilde{a}_\mu$, $\mu=1,\ldots,h$, *et* $\tilde{b}_\nu$, $\nu=1,2,\ldots,k$, *des points de* S, *contenus, les premiers dans* D *et les seconds dans* $D'-D$.

Alors toute fonction $f(z)$ *uniforme et régulière dans* D, *ayant les points* $\tilde{a}_\mu$, $\mu=1,2,\ldots,h$, *pour zéros d'ordres donnés, et non pas d'autres zéros dans* D, *peut être représentée dans* D *par une suite de fonctions algébriques* $f_n(z)$, $n=1,2,\ldots$, *dont la surface de Riemann est* S, *qui sont régulières dans* D', *convergent uniformément à l'intérieur de* D *vers* $f(z)$ *et qui ont, chacune, les points* $\tilde{a}_\mu$ *et* $\tilde{b}_\nu$ *comme zéros, l'ordre de chaque zéro* $\tilde{a}_\mu$ *étant le même que pour* $f(z)$ *et l'ordre de chaque zéro* $\tilde{b}_\nu$ *étant, lui aussi, donné et ne dépendant que de* ν.

Démonstration. D'après le théorème fondamental du n⁰ 6 on peut former une fonction algébrique de la surface de Riemann S, soit $\alpha(z)$, qui possède: 1⁰ les points $\tilde{a}_\mu$ comme zéros, de mêmes ordres que pour $f(z)$, 2⁰ les points $\tilde{b}_\nu$ comme zéros d'ordres donnés et 3⁰ certains pôles à l'extérieur de D'. En effet, désignons par M le nombre de tous ces zéros, comptés avec leurs degrés de multiplicité, et par m le nombre analogue, relatif aux pôles. Puisque le nombre des constantes arbitraires est supérieur à $m-p$ et que M de ces constantes doivent être déterminées, ceci est toujours possible si $M < m-p$, c. à d. $m > M+p$. Par ex. avec $m=M+p+1$ la fonction $\alpha(z)$ existe sûrement.

Cette fonction a m zéros, donc il est possible que les zéros donnés ne soient pas les seuls dans D'. Soient $\tilde{c}_\lambda$, $\lambda=1,2,\ldots,l$, les zéros de α situés dans D, différents des $\tilde{a}_\mu$ et i_λ leurs ordres. Soient de même c'_λ, $\lambda=1,2,\ldots,l'$, les zéros de α situés dans $D'-D$, différents des $\tilde{b}_\nu$ et i'_λ leurs ordres. La fonction f/α est différente de zéro et régulière dans D, à l'exception des points $\tilde{c}_\lambda$ où elle a des pôles dont les ordres sont i_λ.

D'après le lemme 4 il existe une suite de fonctions algébriques $\varphi_n(z)$, $n=1,2,\ldots$, de la surface S, convergeant vers f/α uniformément à l'intérieur de $D-\{\tilde{c}_\lambda\}$ et régulières dans D', à l'exception des points $\tilde{c}_\lambda$ et $\tilde{c}'_\lambda$, qui sont des pôles pour toutes les fonctions, d'ordres donnés, i_λ et i'_λ.

Alors les fonctions $f_n=\alpha\varphi_n$ sont régulières dans D', différentes de zéro aux points $\tilde{c}_\lambda$ et $\tilde{c}'_\lambda$, mais elles possèdent dans D les mêmes zéros que $f(z)$ et ceux-là seulement, c. à d. les points $\tilde{a}_\mu$, l'ordre de chacun d'eux étant le même que pour $f(z)$. En effet, pour n assez grand les fonctions φ_n, convergeant vers f/α, n'ont pas des zéros dans D; donc il suffit de supprimer dans la suite $\{f_n\}$ ceux des termes où le contraire aurait lieu.

Puisque les φ_n sont régulières dans $D'-D$, on peut dire seulement que les f_n ont les points $\tilde{b}_\nu$ comme zéros d'ordres non inférieurs à ceux de α et qu'il peuvent y avoir encore des zéros (pour tout n assez grand). Or, on peut facilement préciser les ordres des zéros $\tilde{b}_\nu$ en demandant par ex. que ces ordres soient pour α d'une unité plus grands et que les φ_n aient des pôles simples aussi en $\tilde{b}_\nu$, $\nu=1,\ldots,k$, car les f_n auront alors en $\tilde{b}_\nu$ des zéros d'ordres donnés.

Ainsi les fonctions algébriques f_n ont les points $\tilde{a}_\mu$ et $\tilde{b}_\nu$ comme zéros d'ordres donnés à l'avance, l'ordre de chaque zéro $\tilde{a}_\mu$ étant le même que pour $f(z)$. Mais il n'est pas exclu que ces fonctions aient dans $D'-D$ d'autre zéros encore.

9. Passons à l'extension du théorème de Mittag-Leffler aux surfaces de Riemann ouvertes quelconques, et où les fonctions rationnelles dans l'expression de Mittag-Leffler seront remplacées par des fonctions algébriques.

En appliquant le lemme 4 nous démontrons d'abord la proposition suivante:

PROPOSITION II. *Soit R une surface de Riemann ouverte quelconque et $\{\tilde{a}_\nu\}$, $\nu = 1, 2, \ldots$, une suite de points de R, ne s'accumulant nulle part à l'intérieur de R, mais s'accumulant en chaque point de la frontière de R, en tant que R possède une frontière.*

Il existe alors une suite de fonctions algébriques $\{f_n(z)\}$ dont les surfaces de Riemann contiennent à la limite la surface R, qui convergent à l'intérieur de $R - \{\tilde{a}_\nu\}$ uniformément et qui définissent ainsi une fonction analytique $F(z)$ uniforme et méromorphe sur R, possédant R comme domaine d'existence et les points $\tilde{a}_\nu$, et ceux-ci seulement, comme pôles avec des parties principales données à l'avance. La fonction $f_n(z)$ a les points $\tilde{a}_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$, comme pôles avec les parties principales données correspondantes.

Démonstration. Soit $\{D_n\}$, $n = 0, 1, \ldots$, une suite de domaines ouverts de la surface R, qui l'épuisent normalement et cela de telle sorte que $\tilde{a}_n \in D_{n+1} - D_n$, $n = 1, 2, \ldots$ Soit $\{S_n\}$ une suite de surfaces de Riemann fermées, telles que $D_{n+1} \subset S_n$ et que, par conséquent, ces surfaces contiennent à la limite la surface donnée R. Désignons par g_n la partie principale donnée, relative au pôle $\tilde{a}_n$ et par $\{\varepsilon_n\}$ une suite de nombres positifs décroissant vers zéro.

D'après le théorème fondamental (n^0 6) on peut former une fonction algébrique $f_1(x)$ dont la surface de Riemann est S_1, qui a comme pôle dans D_1 le seul point $\tilde{a}_1$, avec la partie principale g_1 et, s'il le faut, un pôle à l'extérieur de D_1, soit $\tilde{b}_1$, l'ordre de celui-ci étant un certain nombre r_1.

D'après le lemme 4 on peut former une fonctions algébrique $f_2(z)$ dont la surface de Riemann est S_2, qui a pour pôles dans D_2 les seuls points $\tilde{a}_1$ et $\tilde{a}_2$ avec les parties principales g_1 et g_2, et un pôle quelconque à l'extérieur de D_2, soit $\tilde{b}_2$, l'ordre de celui-ci étant r_2, cette fonction étant en outre telle que

$$|f_2(z) - f_1(z)| < \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \quad \tilde{z} \in D_1 \subset\subset D_2.$$

Généralement, d'après le même lemme, il existe une fonction algébrique $f_n(z)$, $n = 2, 3, \ldots$, dont la surface est S_n, qui a pour pôles dans D_n les points $\tilde{a}_\nu, \nu = 1, \ldots, n$ et ces points seulement, avec les parties principales g_ν correspodantes et un pôle quelconque à l'extérieur de D_n, soit $\tilde{b}_n$, l'ordre de celui-ci étant r_n, cette fonction f_n étant en outre telle que

$$|f_{n+2}(z) - f_n(z)| < \varepsilon_n - \varepsilon_{n+1}, \quad \tilde{z} \in D_{n-1} \subset\subset D_n.$$

La suite $\{f_n\}$ obtenue ainsi converge uniformément dans tout domaine Δ complètement intérieur à R, exception faite des pôles $\tilde{a}_\nu$. En effet, ε

étant un nombre positif arbitrairement petit, il existe un nombre naturel n_0 tel qu'on a pour $n > n_0$ à la fois $\Delta \subseteq D_n$ et $\varepsilon_n < \varepsilon$. Mais alors, pour $\tilde{z} \in \Delta$

$$|f_{n+r} - f_n| \leqslant \sum_{\nu=n}^{n+r-1} |f_{\nu+1} - f_\nu| < \varepsilon_n - \varepsilon_{n+r} < \varepsilon_n ,$$

donc

$$|f_{n+r} - f_n| < \varepsilon, \quad z \in \Delta.$$

Convergeant ainsi dans R, excepté aux points $\tilde{a}_\nu$, la suite $\{f_n\}$ définit une fonction analytique méromorphe dans son domaine d'existence, qui est la surface de Riemann ouverte R. Bien que l'inégalité précédente est vraie aussi pour $\tilde{a}_\nu \in \Delta$, la convergence n'a lieu que dans $\Delta - (\{\tilde{a}_\nu\} \cap \Delta)$, les f_n devenant infinies dans $\{\tilde{a}_\nu\}$. Comme $\tilde{b}_n$ est à l'extérieur de D_n, les fonctions f_n sont régulières dans D_n, à l'exception des f_ν, $\nu = 1, 2, \ldots, n-1$, au plus.

10. Démontrons aussi la proposition suivante, qui a une forme plus rapprochée de celle du théorème de Mittag-Leffler. On pourrait l'obtenir en transformant dans la proposition II la suite en série, mais nous la démontrons directement, au seul moyen du lemme 1.

PROPOSITION III. *Soit R une surface de Riemann ouverte quelconque et $\{\tilde{a}_\nu\}$, $\nu = 1, 2, \ldots$, une suite de points de R, ne s'accumulant nulle part à l'intérieur de R, mais s'accumulant en chaque point de la frontière de R, en tant que R possède une frontière. Soit en outre $\{S_n\}$ une suite de surfaces de Riemann fermées, contenant à la limite la surface R.*

Il existe alors une fonction analytique $F(z)$ uniforme et méromorphe sur la surface de Riemann R, possédant R comme domaine d'existence et les points $\tilde{a}_\nu$, et ceux-ci seulement, comme pôles avec des parties principales données à l'avance.

Cette fonction peut s'écrire sous la forme

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} [\varphi_n(z, a_n) - \psi_n(z)] \tag{2}$$

où φ_n et ψ_n désignent pour tout n deux fonctions algébriques dont la surface est S_n. Chaque fonction φ_n possède comme pôle l'un des points $\tilde{a}_\nu$, à savoir $\tilde{a}_n$, avec la partie principale donnée correspondante. Outre ces pôles, les fonctions φ_n et ψ_n possèdent d'autres pôles, qui s'annulent mutuehllement deux à deux, dans les termes consécutifs de la série.

Démonstration. Désignons par $\{D_n\}$ la même suite qu'au début de la démonstration précédente. Soit $\{S_n\}$ une suite de surfaces de Riemann fermées, telles que $D_{n+3} \subset S_n$, ces surfaces contenant à la limite la surface R. D'après le théorème fondamental on peut former pour tout n une fonction algébrique de la surface S_n, soit $\varphi_n(z)$, qui a les trois pôles suivants: le point $\tilde{a}_n$, où la partie principale est g_n, et les deux points $\tilde{b}_n$ et $\tilde{b}_{n+1}$ dans $D_{n+3}-D_{n+1}$, l'ordre de ceux-ci étant certains nombres r_n et r_{n+1} qu'on peut, d'après les remarques faites à la page 101, soumettre à la condition $r_n + r_{n+1} > p_n$, où p_n est le genre de S_n.

Nous supposons en outre que, u_{n+1} étant la partie principale de φ_n au pôle $\tilde{b}_{n+1}$, la partie principale de φ_{n+1}, soit au même pôle $-u_{n+1}$, $n=1, 2, \ldots$ La fonction φ_1 doit avoir exceptionnellement un seul pôle, $\tilde{b}_2$. Conformément au théorème fondamental cela est toujours possible.

D'après le lemme 1 on peut former pour tout n une fonction algébrique $\psi_n(z)$ de la surface S_n, régulière dans D_{n+1} et telle qu'on a pour une suite de nombres positifs ε_n, décroissant vers zéro,

$$|\varphi_n(z)-\psi_n(z)| < \varepsilon_n - \varepsilon_{n+1}, \quad \tilde{z} \in D_{n-1} \Subset D_n.$$

On peut exiger que les fonctions ψ_n aient leurs pôles dans une suite double de points, $\{\tilde{c}_{i,n}\}$, $i=1,\ldots,i_n$, $n=2,3,\ldots$, telle que les points $\tilde{c}_{i,n}$, $i=1,2,\ldots,i_n$, soient dans $D_{n+2}-D_{n+1}$, à savoir un seul dans chacun des domaines connexes séparés dont est composé $D_{n+2}-D_{n+1}$. Plus précisément, la fonction ψ_n doit avoir les pôles $\tilde{c}_{i,n}$, $i=1,2,\ldots,i_n$ et $c_{i,n+1}$, $i= =1,2,\ldots,i_{n+1}$. La partie principale de ψ_n au pôle $\tilde{c}_{i,n+1}$ étant $v_{i,n+1}$, celle de ψ_{n+1} au même pôle doit être $-v_{i,n+1}$, $i=1,2,\ldots,i_{n+1}$. Seule la fonction ψ_1 ne doit avoir que les pôles $\tilde{c}_{i,2}$, $i=1,2,\ldots,i_2$.

La fonction $\varphi_n-\psi_n$ est uniforme et régulière dans D_{n+1}, à l'exception du pôle $\tilde{a}_n$. A l'extérieur de D_{n+1}, à savoir dans $D_{n+3}-D_{n+1}$ cette fonction possède comme pôles $\tilde{b}_n$ et $\tilde{b}_{n+1}$ et les pôles $\tilde{c}_{i,n}$, $i=1,2,\ldots,i_n$ et $\tilde{c}_{i,n+1}$, $i=1,2,\ldots,i_{n+1}$, de ψ_n.

Cela étant, la série

$$F(z)=\sum_{\nu=1}^{\infty}[\varphi_\nu(z)-\psi_\nu(z)]$$

remplit les conditions de la proposition II. En effet, si Δ est un domaine complètement intérieur à R, et ε arbitrairement petit, positif, il existe un n_0 tel qu'on a pour $n > n_0$ à la fois $\Delta \subseteq D_{n-1}$ et $\varepsilon_n < \varepsilon$, par conséquent

$$\left|\sum_{\nu=n}^{n+r}(\varphi_\nu-\psi_\nu)\right| \leqslant \sum_{\nu=n}^{n+r}|\varphi_\nu-\psi_\nu| < \varepsilon_n - \varepsilon_{n+r+1} < \varepsilon_n$$

et d'autant plus

$$\left|\sum_{\nu=n}^{n+r}(\varphi_\nu-\psi_\nu)\right|<\varepsilon, \quad \tilde{z}\in\Delta.$$

Donc la série

$$\sum_{\nu=n}^{n+r}(\varphi_\nu-\psi_\nu)$$

est uniformément convergente dans l'intérieur de Δ. Quant à la somme finie

$$\sum_{\nu=1}^{n-1}(\varphi_\nu-\psi_\nu),$$

les pôles $\tilde{b}_\nu$ des fonctions φ et de même les pôles $\tilde{c}_{i,\nu}$ des ψ_ν s'anéantissent mutuellement deux à deux, puisque par ex. les parties principales de φ_ν et $\varphi_{\nu+1}$ en $\tilde{b}_{\nu+1}$ sont $u_{\nu+1}$ et $-u_{\nu+1}$. Subsistent seulement les pôles $\tilde{a}_\nu$, $\nu=1, 2, \ldots, n-1$ dans D_n et les pôles $\tilde{b}_n$ et $\tilde{c}_{i,n}$, $i=1, 2, \ldots, i_n$ dans $D_{n+2}-D_{n+1}$, donc à l'extérieur de $D_{n+1}\supset\Delta$. Par conséquent la série (2) est uniformément convergente à l'intérieur de Δ, à l'exception des pôles $\tilde{a}_\nu$, pour chacun desquels l'une des fonctions φ_n devient infinie. Par conséquent $F(z)$ est une fonction analytique telle que la proposition III l'exige.

Ajoutons que les remarques faites à la fin de la démonstration de la proposition I peuvent s'appliquer aussi à la proposition III. D'ailleurs, si, d'une part, le domaine ouvert D de la proposition I est connexe et si, d'autre part, R est contenu dans une surface de Riemann fermée[5]), les propositions I et III ne diffèrent que par le nombre des pôles de φ_n et ψ_n, extérieurs à D. Du reste, la proposition III est vraie même si l'on remplace la surface de Riemann R par un nombre quelconque, fini ou infini dénombrable, de surfaces de Riemann ouvertes et sans points communs.[6])

11. Une extension du théorème de Weierstrass à une surface de Riemann ouverte quelconque, dans le sens des considérations précédentes, est bien possible. Les facteurs de la forme

$$\left(1-\frac{z}{a}\right)^{\mu}e^{g(z)}, \tag{3}$$

qui figurent dans les produits de Weierstrass seront remplacés par des fonctions transcendentes dont les surfaces de Riemann seront des surfaces fermées. Or, une fonction dont le domaine d'existence est une surface de

---

[5]) Voir la remarque à la fin du n⁰ 6.

[6]) Voir à ce propos nos théorèmes généraux dans [6], pp. 21—23.

Riemann ouverte R quelconque et qui, étant régulière dans R, possède des zéros donnés, peut s'obtenir également comme limite d'une suite uniformément convergente de fonctions *algébriques*. Considérons d'abord l'existence d'une telle suite.

PROPOSITION IV. *Soit R une surface de Riemann ouverte quelconque et $\{\tilde{a}_\nu\}$ une suite de points de R ne s'accumulant nulle part à l'intérieur de R, mais s'accumutant en chaque point de la frontière de R, en tant que R possède une frontière.*

Il existe alors une suite de fonctions algébriques $f_n(z)$ dont les surfaces de Riemann contiennent à la limite la surface R et qui convergent uniformément à l'intérieur de R et définissent ainsi une fonction analytique $F(z)$ uniforme et régulière dans R, possédant R comme domaine d'existence et les points $\tilde{a}_\nu$ comme zéros d'ordres donnés à l'avance.

Démonstration. Soit $\{D_n\}$, $n=0, 1, \ldots$, une suite de domaines ouverts de la surface donnée R, qui l'épuisent normalement et cela de telle sorte que $\tilde{a}_n \in D_{n+1}-D_n$, $n=1, 2, \ldots$ Soit $\{S_n\}$ une suite de surfaces de Riemann fermées, telle que $D_{n+1} \subset S_n$ et que ces surfaces contiennent donc à la limite la surface donnée R, et soit $\{m_n\}$ une suite quelconque d'entiers positifs.

D'après le théorème fondamental on peut former une fonction algébrique $f_1(z)$ dont la surface de Riemann est S_1, régulière dans D_1, où elle a le point $\tilde{a}_1$ comme zéro d'ordre m_1 et qui n'a à l'extérieur de D_1 qu'un seul pôle en un point quelconque, soit $\tilde{b}_1$.

D'après le lemme 5 on peut former une fonction algébrique $f_2(z)$ dont la surface de Riemann est S_2, régulière dans D_2 où elle a les points $\tilde{a}_1$ et $\tilde{a}_2$ comme zéros d'ordres m_1 et m_2, qui n'a à l'extérieur de D_2 qu'un seul pôle, soit $\tilde{b}_2$, et qui est en outre telle que

$$|f_2(z)-f_1(z)|<\varepsilon_1-\varepsilon_2, \quad \tilde{z} \in D_1 \Subset D_2.$$

Généralement, d'après le lemme 5, il existe une fonction algébrique $f_n(z)$, $n=2, 3, \ldots$, dont la surface est S_n, régulière dans D_n, où elle a les points $\tilde{a}_\nu$, $\nu=1, 2, \ldots, n$, comme zéros d'ordres respectifs m_ν, $\nu=1, 2, \ldots, n$, qui n'a à l'extérieur de D_n qu'un seul pôle, soit $\tilde{b}_n$ (sur S_n) et qui est en outre telle que

$$|f_{n+1}(z)-f_n(z)|<\varepsilon_n-\varepsilon_{n+1}, \quad \tilde{z} \in D_{n-1} \Subset D_n.$$

Nous obtenons ainsi une suite $\{f_n\}$ uniformément convergente dans tout domaine Δ complètement intérieur à R. En effet, en désignant par ε un nombre positif arbitrairement petit, il existe un entier positif n_0 tel qu'on a pour $n > n_0$ à la fois $\Delta \subseteq D_n$ et $\varepsilon_n < \varepsilon$ et par conséquent (comme à la page 107):

$$|f_{n+r} - f_n| < \varepsilon, \quad \tilde{z} \in \Delta.$$

La suite des fonctions algébriques $\{f_n\}$ définit ainsi une fonction $F(z)$ régulière dans tout son domaine d'existence, celui-ci étant identique à la surface de Riemann ouverte R. La fonction $F(z)$ a évidemment chaque point $\tilde{a}_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots$, comme zéro d'ordre m_ν. Or, il n'est pas exclu que $F(z)$ ait d'autres zéros encore.

Lorsque R est un domaine ouvert *d'une surface de Riemann fermée* S, c. à d. si $R \subset S$, la proposition IV donne une suite uniformément convergente de fonctions algébriques $F(z)$ de la même surface, régulières dans R et possédant R comme domaine d'existence. La frontière de R est l'ensemble dérivé de $\{\tilde{a}_\nu\}$.

Dans le cas où R se réduit au *plan*, la proposition IV donne une suite uniformément convergente de fonctions *rationnelles*, qui définit dans un domaine ouvert quelconque du plan une fonction régulière dans ce domaine, possédant ce domaine comme domaine d'existence. Cette fonction a des *zéros d'ordres donnés* dans une suite de points *donnés*, qui s'accumulent en tout point de la frontière de ce domaine et là seulement.

12. Avant de passer à l'extension proprement dite du théorème de Weierstrass aux surfaces de Riemann ouvertes, donnons d'abord une démonstration indépendante du lemme suivant, lequel établit l'existence de certaines fonctions qui généralisent les facteurs (3) de Weierstrass.

LEMME 6. *Étant donnés des points quelconques* $\tilde{a}_\lambda$, $\lambda = 1, 2, \ldots, l$, *et* $\tilde{c}_\mu$, $\mu = 1, 2, \ldots, m$, *d'une surface de Riemann fermée* S, *il existe une fonction analytique dont la surface de Riemann est* S, *qui a pour seuls zéros les points* $\tilde{a}_\lambda$, $\lambda = 1, 2, \ldots, l$, *l'ordre de chacun étant donné à l'avance, et qui est régulière sur toute la surface* S, *à l'exception des point* $\tilde{c}_\mu$, $\mu = 1, 2, \ldots, m$, *ceux-ci étant singuliers essentiels.*

Démonstration. Soient m_λ les entiers positifs donnés à l'avance. Nous construisons une fonction algébrique $\alpha(z)$ dont la surface est S et qui possède aux points $\tilde{a}_\lambda$, $\lambda = 1, 2, \ldots, l$, et $\tilde{c}_\mu$, $\mu = 1, 2, \ldots, m$, et de même aux points $z = \infty$ une valeur infinie ou nulle, à savoir:

1° Si $a_\lambda \neq \infty$ et si c'est un point de ramification d'ordre $s - 1$, supposons que ce soit un pôle[7]) dont l'ordre est s, et que le premier

---

[7]) Au sens élargi du mot, adopté dans la théorie des fonctons algébriques.

coefficient dans sa partie principale soit m_λ/s, c. à d. qu'on ait autour de $\tilde{a}_\lambda$

$$\alpha(z) = \frac{m_\lambda/s}{z-a_\lambda} + \frac{A_{n-1}}{(z-a)^{\frac{s-1}{s}}} + \ldots + \frac{A_1}{(z-a_\lambda)^{\frac{1}{s}}} + P[(a-z_\lambda)^{\frac{1}{s}}],$$

où $A_1, \ldots, A_{n-1}$ sont des coefficients quelconques et $P(t)$ désigne une fonction régulière en $t=0$. Si $\tilde{a}_\lambda$ n'est pas un point de ramification, posons dans ce qui précède $s=1$, c. à d. supposons qu'on ait autour de $\tilde{a}_\lambda$

$$\alpha(z) = \frac{m_\lambda}{z-a_\lambda} + P(z-a_\lambda).$$

Si $a_\lambda = \infty$ et si c'est un point de ramification d'ordre $s-1$, supposons que ce soit un zéro d'ordre s et qu'on ait autour de $\tilde{a}_\lambda$

$$\alpha(z) = -\frac{m_\lambda/s}{z} + \frac{A_{n-1}}{z^{1+\frac{1}{s}}} + \ldots + \frac{A_1}{z^{2-\frac{1}{s}}} + \frac{1}{z^2} P(z^{-\frac{1}{s}}).$$

Si ce n'est pas un point de ramification, posons dans le voisinage de $\tilde{a}_\lambda$

$$\alpha(z) = -\frac{m_\lambda}{z} + \frac{1}{z^2} P(z^{-1}).$$

2⁰ En tout point $z=\infty$ différent des $\tilde{a}_\lambda$ et $\tilde{c}_\mu$ et qui est un point de ramification d'ordre $s-1$, la fonction $\alpha(z)$ doit avoir un zéro d'ordre $2s$. Si ce n'est pas un point da ramification, posons $s=1$, c. à. d. le zéro doit être du second ordre.

3⁰ Si $c_\mu \neq \infty$ supposons que ce soit un pôle dont l'ordre h, variant avec μ, est plus grand que s $(s \geqslant 1)$, et en outre suffisamment grand pour que la condition imposée par le genre de la surface S soit remplie. Donc on doit avoir

$$\alpha(z) = \frac{A_h}{(z-c_\mu)^{\frac{h}{s}}} + \frac{A_{h-1}}{(z-c_\mu)^{\frac{h-1}{s}}} + \ldots + \frac{A_1}{(z-c_\mu)^{\frac{1}{s}}} + P(z).$$

Si $c_\mu = \infty$ supposons que $\alpha(z)$ ait en $\tilde{c}_\mu$ un pôle d'ordre h quelconque, suffisamment grand pour qu'une telle fonction existe, et qu'on ait autour de $\tilde{c}_\lambda$

$$\alpha(z) = A_h z^{\frac{h}{s}} + A_{h-1} z^{\frac{h-1}{s}} + \ldots + A_1 z^{\frac{1}{s}} + P(z^{-\frac{1}{s}}).$$

Considérons la fonction

$$J(z) = \int_{z_0}^{z} \alpha(z)\, dz,$$

où $\tilde{z}_0$ est un point différent des $\tilde{a}_\lambda$ et $\tilde{c}_\mu$ et la courbe d'intégration ne passe pas par ces points. Grâce aux zéros de $\alpha(z)$ en $z=\infty$ la fonction $J(z)$ est finie pour tout $\tilde{z} \neq \tilde{a}_\lambda$, $\tilde{c}_\mu$, même si $z=\infty$. Donc elle est régulière sur S, excepté aux points $\tilde{a}_\lambda$ et $\tilde{c}_\mu$, mais elle n'est pas uniforme sur S.

En effet, on a pour $s \geqslant 1$, dans le voisinage de $\tilde{a}_\lambda$, si $a_\lambda \neq \infty$

$$J(z) = \frac{m_\lambda}{s} \log (z - a_\lambda) + Q\left[(z - a_\lambda)^{\frac{1}{s}}\right],$$

et si $a_\lambda = \infty$

$$J(z) = -\frac{m_\lambda}{s} \log z + Q\left(z^{-\frac{1}{s}}\right),$$

où $Q(t)$ désigne une fonction régulière en $t=0$.

Dans le voisinage de c_μ on a, si $c_\mu \neq \infty$

$$J(z) = \frac{A_h}{1-\frac{h}{s}} \cdot \frac{1}{(z-c_\mu)^{\frac{h}{s}-1}} + \frac{A_{h-1}}{1-\frac{h-1}{s}} \cdot \frac{1}{(z-c_\mu)^{\frac{h-1}{s}-1}} + \ldots,$$

et si $c_\mu = \infty$

$$J(z) = \frac{A_h}{1+\frac{h}{s}} z^{\frac{h}{s}+1} + \frac{A_{h-1}}{1+\frac{h-1}{s}} z^{\frac{h-1}{s}+1} + \ldots$$

Considérons la fonction $\varphi(z) = e^{J(z)}$. On a dans le voisinage de $\tilde{a}_\lambda$, si $a_\lambda \neq \infty$

$$\varphi(z) = (z - a_\lambda)^{\frac{m_\lambda}{s}} \cdot e^Q,$$

et si $a_\lambda = \infty$

$$\varphi(z) = z^{-\frac{m_\lambda}{s}} \cdot e^Q$$

où Q est régulière en $\tilde{a}_\lambda$ et où $s=1$ ou $s>1$ suivant que c'est un point simple ou un point de ramification d'ordre $s-1$. Donc la fonction $\varphi(z)$ a le point a_λ comme zéro d'ordre m_λ.

Dans le voisinage de $\tilde{c}_\mu$ on a, si $c_\mu \neq \infty$

$$\varphi(z) = e^{\frac{B}{(z-c_\mu)^\beta}} \times \ldots$$

et si $c_\mu = \infty$

$$\varphi(z) = e^{B' z^{\beta'}} \times \ldots$$

où $\beta > 0$ et $\beta' > 0$, donc ces deux fonctions exponentielles, qui figurent comme facteurs, ont le point $\tilde{c}_\mu$ comme singularité essentielle et, par conséquent, la fonction $\varphi(z)$ l'a aussi, pour tout μ. À tout point de S, différent des $\tilde{c}_\mu, \mu = 1, 2, \ldots, m$, la fonction φ est régulière et différente de zéro.

En élevant la fonction $J(z)$ à l'exposant, elle cesse d'avoir des points logarithmiques, mais elle reste multiforme, car en entourant les rétrosections de S, paraissent certains modules de périodicité de $J(z)$. Or, en soustrayant de $J(z)$ une intégrale abélienne de la première espèce, soit $K(z)$, qui possède les mêmes modules de périodicité, cette multiformité disparaît. Donc la fonction

$$f(z) = e^{J(z) - K(z)}$$

est uniforme sur S, en restant régulière partout, sauf aux points essentiels $\tilde{c}_\mu, \mu = 1, 2, \ldots, m$, et différente de zéro, à l'exception des points $\tilde{c}_\lambda$, où elle a des zéros d'ordres respectifs m_λ, $\lambda = 1, 2, \ldots, l$.[8])

13. Démontrons maintenant une proposition analogue à la proposition I et qui généralise le théorème envisagé de Weierstrass, en l'appliquant aux surfaces de Riemann fermées:

PROPOSITION V. *Soit D un domaine ouvert quelconque d'une surface de Riemann fermée S, non identique à S, et soit $\{\tilde{a}_\nu\}$, $\nu = 1, 2, \ldots$, une suite de points quelconques de D, s'accumulant en chaque point de la frontière de D et là seulement.*

Il existe alors une fonction analytique $F(z)$, uniforme sur S, possédant D comme domaine d'existence et régulière dans D, où elle a les points $\tilde{a}_\nu$ et ceux-ci seulement, comme zéros, leurs ordres étant donnés à l'avance.

Cette fonction peut s'écrire sous la forme

$$F(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \varphi_n(z)\, e^{-\psi_n(z)}, \tag{4}$$

où φ_n désigne pour tout n une fonction analytique de la surface S, possédant $\tilde{a}_n$ comme zéro unique d'ordre donné et qui est régulière sur toute la surface S, à l'exception d'un point essentiel, situé à l'extérieur de D; ψ_n désigne une fonction algébrique de S, régulière dans D et possédant dans chacun des continus complémentaires de D un seul pôle.

---

[8]) Dans [2] Mlle. Florack a démontré d'une manière semblable l'existence des fonctions „élémentaires" d'une surface de Riemann ouverte.

Démonstration. D'après le lemme 6 on peut former pour tout n une fonction de la surface S, soit $\varphi_n(z)$, qui possède le point $\tilde{a}_n$ comme zéro unique dont l'ordre est donné et qui est règulière sur toute la surface, à l'exception d'un point quelconque extérieur à D, soit $\tilde{c}_n$, qui est un point essentiel.

Soit $\{D_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, une suite de domaines ouverts de S, qui épuisent normalement le domaine D et cela de telle sorte que $\tilde{a}_n \in D_{n+1} - D_n$, $n = 1, 2, \ldots$ Puisque φ_n n'a pas de zéro dans D_n, la fonction $\log \varphi_n$ est, elle aussi, régulière et uniforme dans D_n. Donc, d'après le lemme 1, on peut former pour tout n une fonction algébrique $\psi_n(z)$ de S, régulière dans D_n et telle qu'on ait pour une suite de nombres positifs ε_n décroissant vers zéro:

$$|\log \varphi_n - \psi_n| < \varepsilon_n - \varepsilon_{n+1},$$

pour tous les $\tilde{z} \in D_{n-1} \subset\subset D_n$.

La fonction $\varphi_n \, e^{-\psi_n}$ est également régulière et uniforme sur S, à l'exception du point essentiel $\tilde{c}_n$, et son seul zéro est $\tilde{a}_n$, l'ordre de celui-ci étant donné à l'avance.

Ceci étant, soit Δ n'importe quel domaine complètement intérieur à D. En désignant par ε un nombre positif arbitrairement petit, il existe un n_0 tel qu'on a pour $n > n_0$ à la fois $\Delta \subseteq D_{n-1}$ et $\varepsilon_n < \varepsilon$, par conséquent

$$\left|\sum_{\nu=n}^{n+r} (\log \varphi_\nu - \psi_\nu)\right| \leqslant \sum_{\nu=n}^{n+r} |\log \varphi_\nu - \psi_\nu| < \varepsilon_n - \varepsilon_{n+r+1}$$

et d'autant plus

$$\left|\sum_{\nu=n}^{n+r} (\log \varphi_\nu - \psi_\nu)\right| < \varepsilon.$$

Donc, d'après le critère bien connu de convergence des produits infinis, le produit (4) est uniformément convergent à l'intérieur de D. Par conséquent $F(z)$ est une fonction telle que la proposition V l'exige.

Évidemment, si la surface S était une surface recouvrante, il suffirait de supposer que l'un des points $\tilde{a}_\nu$ soit le seul dont l'affixe a une certaine valeur a_ν.

14. Voici enfin la généralisation correspondante du théorème de Weierstrass pour une surface de Riemann ouverte quelconque.

PROPOSITION VI. *Soit R une surface de Riemann ouverte quelconque et $\{\tilde{a}_\nu\}$, $\nu = 1, 2, \ldots$, une suite de points de R, ne s'accumulant nulle part à* *l'intérieur de R, mais s'accumulant en chaque point de la frontière de R, en tant que R possède une frontière. Soit en outre $\{S_n\}$ une suite de surfaces de Riemann fermées, contenant à la limite la surface R.*

Il existe alors une fonction analytique $F(z)$, uniforme et régulière sur la surface de Riemann R, possédant R comme domaine d'existence et les points $\tilde{a}_\nu$ et ceux seulement, comme zéros d'ordres donnés à l'avance.

Cette fonction peut s'écrire sous la forme

$$F(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \varphi_n(z) e^{-\psi_n(z)}, \tag{5}$$

où φ_n et ψ_n désignent pour tout n deux fonctions analytiques de la surface S_n, la fonction φ_n possédant le point $\tilde{a}_n$ comme zéro unique et d'ordre donné et ψ_n étant une fonction algébrique. Les singularités des φ_n, qui sont des points essentiels, s'annulent mutuellement deux à deux dans les termes consécutifs du produit infini, et de même les pôles des ψ_n.

Démonstration. Soit $\{D_n\}$ une suite de domaines ouverts, épuisant normalement la surface R et cela de telle sorte que $\tilde{a}_n \in D_{n+1} - D_n$, et soit $\{S_n\}$ une suite de surfaces de Riemann fermées, telles que $D_{n+3} \subset S_n$, ces surfaces contenant à la limite la surface R. D'après le lemme 6 on peut former pour tout n une fonction de la surface S_n, soit $\varphi_n(z)$, possédant $\tilde{a}_n$ comme zéro unique, d'ordre donné, et qui est régulière sur toute cette surface, à l'exception de deux points $\tilde{c}_n$ et $\tilde{c}_{n+1}$, situés dans $D_{n+3} - D_{n+1}$ et qui sont des points essentiels. La fonction φ_1 doit avoir exceptionnellement un seul point essentiel, à savoir $\tilde{c}_2$.

Puisque φ_n n'a pas de zéros dans D_n, la fonction $\log \varphi_n$ est, elle aussi, régulière et uniforme dans D_n. Donc, d'après le lemme 1, on peut former pour tout n une fonction algébrique $\psi_n(z)$ de la surface S_n, régulière dans D_{n+1} et telle qu'on ait pour une suite de nombres positifs ε_n décroissant vers zéro

$$|\log \varphi_n(z) - \psi_n(z)| < \varepsilon_n - \varepsilon_{n+1}, \quad \tilde{z} \in D_{n-1} \Subset D_n.$$

Supposons en outre que les fonctions ψ_n ont leur pôles dans une suite double de points $\{\tilde{d}_{i,n}\}, i = 1, 2, \ldots, i_n,\ n = 2, 3, \ldots$, telle que les points $\tilde{d}_{i,n},\ i = 1, 2, \ldots, i_n$ soient dans $D_{n+2} - D_{n+1}$, un seul dans chacun des domaines connexes séparés dont est composé $D_{n+2} - D_{n+1}$. Plus exactement, la fonction ψ_n doit avoir les pôles $\tilde{d}_{i,n}, i = 1, 2, \ldots, i_n$ et $\tilde{d}_{i,n+1}, i = 1, 2, \ldots, i_{n+1}$. En désignant la partie principale de ψ_n au pôle $\tilde{d}_{i,n+1}$ par $\nu_{i,n+1}$, celle de ψ_{n+1} au même pôle doit être $-\nu_{i,n+1}$, $i = 1, 2, \ldots, i_{n+1}$. Seule la fonction ψ_1 ne doit avoir que les pôles $\tilde{d}_{i,2},\ i = 1, 2, \ldots, i_2$.

La fonction $\psi_n e^{-\psi_n}$ est pour tout n régulière et uniforme dans D_{n+1}, son seul zéro étant $\tilde{a}_n$. À l'extérieur de D_{n+1} elle possède les points essentiels $\tilde{c}_n$ et $\tilde{c}_{n+1}$ de φ_n et les points essentiels $\tilde{d}_{i,n}$, $i=1,2,\dots,i_n$, et $\tilde{d}_{i,n+1}$, $i=1,2,\dots,i_{n+1}$ de $e^{-\psi_n}$.

Or, en désignant par n_0, Δ et ε toujours les mêmes entités, nous avons

$$\left|\sum_{\nu=n}^{n+r}(\log\varphi_\nu-\psi_\nu)\right|\leqslant\sum_{\nu=n}^{n+r}|\log\varphi_\nu-\psi_\nu|<\varepsilon_n-\varepsilon_{n+r+1},$$

donc

$$\left|\sum_{\nu=n}^{\nu+r}(\log\varphi_\nu-\psi_\nu)\right|<\varepsilon,\quad z\in\Delta.$$

Donc le produit infini (5) est uniformément convergent à l'intérieur de R, par conséquent il représente une fonction dans R, analytique et qui satisfait aux conditions de la proposition VI.

Pour être sûr que la surface de Riemann de $F(z)$ n'est pas une surface plus simple que R et dont R serait une surface recouvrante, il suffit que l'un des points $\tilde{a}_n$ soit le seul dont l'affixe a une certaine valeur $\tilde{a}_\nu$. Notons que la surface R peut être remplacée par un ensemble fini ou infini dénombrable de surfaces de Riemann ouvertes, sans grandes altérations dans la démonstration.

15. Jusqu'ici nous avons construit sur des surfaces de Riemann ouvertes, des fonctions analytiques qui possèdent une infinité de pôles ou de zéros. Or, on pourrait construire aussi bien des fonctions qui possèderaient un nombre limité de zéros ou des pôles. Si nous désirons qu'en même temps la surface de Riemann envisagée soit tout le domaine d'existence de la fonction construite, il faut supposer que cette surface soit inextensible, entendant par là qu'il n'existe pas de surface de Riemann plus large, dont elle ferait partie. Ceci étant supposé, considérons par ex. la proposition II, en envisageant une surface de Riemann ouverte R et une suite finie de ses points, $\{\tilde{a}_\nu\}$, $\nu=1,2,\dots,N$. Nous démontrons la proposition suivante:

PROPOSITION VII. *Soit R une surface de Riemann ouverte, inextensible et $\{\tilde{a}_\nu\}$, $\nu=1,2,\dots,N$, une suite finie de points de R.*

Il existe une suite de fonctions algébriques $\{f_n(z)\}$ dont les surfaces de Riemann contiennent à la limite la surface R, qui convergent à l'intérieur de $\{R-\tilde{a}_\nu\}$ uniformément et qui définissent ainsi une fonction analytique $F(z)$ uniforme et méromorphe sur R, possédant R comme domaine d'existence et *les points* $\tilde{a}_\nu$, *et ceux-ci seulement, comme pôles avec des parties principales données à l'avance. La fonction* $f_n(z)$ *a pour* $n<N$ *les points* $\tilde{a}_\nu, \nu = 1, 2, \dots, n$, *et pour* $n \geqslant N$ *les points* $\tilde{a}_\nu$, $\nu = 1, 2, \dots, N$, *comme pôles uniques, avec les parties principales données correspondantes.*

Démonstration. Soit $\{D_n\}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, une suite de domaines ouverts de R, qui l'épuisent normalement et cela de telle sorte que $\tilde{a}_n \in D_{n+1} - D_n, n = 1, 2, \dots, N$, et soit $\{S_n\}$ une suite de surfaces de Riemann fermées, telles que $D_{n+1} \subset S_n$.

En continuant comme dans la démonstration de la propositon II, formons d'abord les premiers N termes de la suite $\{f_n\}$, c. à d. certaines fonctions algébriques telles que f_n possède la surface S_n, qu'elle ait pour pôles dans D_n les points $\tilde{a}_\nu$, $\nu = 1, 2, \dots, n$ et ces points seulement, avec les parties principales données, puis un pôle unique à l'extérieur de D_n, soit $\tilde{b}_n$, et qu'on ait:

$$(6) \qquad |f_{n+1} - f_n| < \varepsilon_n - \varepsilon_{n+1}, \quad z \in D_{n-1} \Subset D_n, \quad n = 1, 2, \dots, N-1.$$

Pour $n \geqslant N$ désignons par f_n une fonction algébrique de S_n qui n'a que les points $\tilde{a}_\nu$, $\nu = 1, 2, \dots, N$, pour pôles dans D_n et un pôle unique à l'extérieur de D_n, en $\tilde{b}_n$, les relations (6) restant en vigueur. L'existence de ces fonctions-ci est assurée par le lemme 3.

Par des altérations analogues on obtiendrait les propositions qui correspondraient aux propositions III, IV et VI. Les propositions III et VI, altérées ainsi, contiennent par ex. le cas d'une fonction analytique dont le domaine d'existence est une surface ouverte inextensible quelconque et qui possède un pôle unique, ou bien un zéro unique et aucun pôle.

(Reçu le 12 mai 1954)

RÉFÉRENCES

[1] H. Behnke und K. Stein — Entwicklung analytischer Funktionen auf Riemannschen Flächen. *Math. Ann.* **120** (1948).

[2] H. Florack — Reguläre und meromorphe Funktionen auf nicht geschlossenen Riemannschen Flächen. *Schriftenreihe des Math. Inst.*, Münster (1948).

[3] P. Koebe — Fonctions potentielles et fonctions analytiques ayant un domaine d'existence donné à un nombre quelconque (fini ou infini) de feuillets. *C. R. de l'Acad.* Paris (1909).

[4] M. Radojčić — Sur l'approximation des fonctions analytiques multiformes par les fonctions algébriques, *C. R. de l'Acad.*, Paris, t. **185** (1927).

[5] ———— Un mode de représentation analytique des fonctions multiformes *Glas Srp. Akad. Nauka*, t. **130** (1928) (en serbe).

[6] ———— Les fonctions analytiques représentées par les suites convergentes de fonctions algébriques, Thèse, Beograd 1928 (en serbe).

ENTWICKLUNG ANALYTISCHER FUNKTIONEN AUF RIEMANNSCHEN FLÄCHEN NACH ALGEBRAISCHEN ODER GEWISSEN ENDLICH VIELDEUTIGEN TRANSZENDENTEN FUNKTIONEN

von

M. RADOJČIĆ (Beograd)

ZUSAMMENFASSUNG — Es, wird die Entwicklung gegebener analytischer Funktionen auf beliebigen Riemannschen Flächen nach algebraischen Funktionen betrachtet und sodann die Erweiterung der Entwicklungssätze von Mittag-Leffler und Weierstrass auf Riemannsche Flächen, so dass die rationalen Funktionen von Mittag-Leffler durch algebraische und die Faktoren von Weierstrass durch gewisse, auf geschlossenen Riemannschen Flächen transzendente Funktionen ersetzt werden. Nach kurzer Wiedergabe seiner früheren Resultate ergänzt der Verfasser dieselben, insbesondere durch eine entsprechende Übertragung der Entwicklungssätze von Mittag-Leffler und Weierstrass auf nichtgeschlossene Riemannsche Flächen, welche Überlagerungsfolgen von geschlossenen Riemannschen Flächen, die sie grenzweise enthalten, zulassen.

1. *PROBLEMSTELLUNG.* — Auf zwei Wegen kann man die allgemeinen Entwicklungssätze für eindeutige analytische Funktionen, an erster Stelle die von Runge, Mittag-Leffler und Weierstrass, auf nichtgeschlossene Riemannsche Flächen zu übertragen suchen. Welcher Weg eingeschlagen wird hängt davon ab, welche Eigenschaften man bei den approximierenden Funktionen aufrecht zu erhalten wünscht. In den Sätzen von Mittag-Leffler und Runge hat man es nähmlich mit rationalen Funktionen zu tun, die also, einerseits, in der ganzen Ebene existieren, während die Entwicklung nur in einem Teile der Ebene gelten mag, und die, anderseits, zur allgemeinen Klasse der algebraischen Funktionen gehören. Dementsprechend kann man bei der Übertragung dieser Sätze auf Riemannsche Flächen wünschen, entweder dass auch jetzt die approximierenden Funktionen auf einer im Allgemeinen umfassenderen, die gegebene Fläche enthaltenden Riemanchen Fläche definiert seien, oder aber dass die approximierenden Funktionen, statt rational zu sein, mehrdeutige algebraische Funktionen seien.

Auf dem ersten Wege erhält man die bekannte Übertragung von H. Behnke und K. Stein, der Sätze von Runge auf nichtgeschlossene Riemannsche Flächen ([2], Satz 6, erster Approximationssatz genannt). Auch die Sätze von Mittag-Leffler und Weierstrass sind auf diesem Wege durch H. Florack [3] erweitert worden, indem für irgendeine nichtgeschlossene Riemannsche Fläche R 1) eine analytische Funktion, die eindeutig und meromorph auf R ist und Pole in vorgeschriebenen Punkten mit gegebenen Hauptteilen besitzt und 2) eine analytische Funktion, die eindeutig und regulär auf R ist und Nullstellen gegebener Ordnung in vorgeschriebenen Punkten besitzt, konstruiert wurden.

Was den zweiten Weg anbelangt, so besagt schon die wohlbekannte elementare Formel

$$\log z = \lim_{n \to \infty} n \left(z^{1/n} - 1 \right), \tag{1}$$

die auf der ganzen logarithmischen Fläche gilt, dass auch auf unendlich vielblättrigen Riemannschen Flächen durch algebraische Funktionen approximiert werden kann. Auch in dieser Richtung erhält man Verallgemeinerungen der für eindeutige Funktionen gültigen Entwicklungssätze (M. Radojčić, [6] bis [9]). Dabei treten an Stelle der rationalen Funktionen algebraische auf und an Stelle der Weierstrassschen Faktoren gewisse, auf geschlossenen Riemannschen Flächen eindeutige transzendente Funktionen. Da es sich zum Teil um Resultate handelt, die vor Jahren, in serbischer Sprache erschienen sind und wenig bekannt wurden, sei uns erlaubt dieselben, samt den nötigen Begriffsbestimmungen im Laufe der gegenwärtigen Betrachtungen kurz wiederzugeben.[1])

2. *DARSTELLUNG VON IN GEWISSEN GEBIETEN DER LOGARITHMISCHEN RIEMANNSCHEN FLÄCHE EINDEUTIGEN UND REGULÄREN FUNKTIONEN DURCH FOLGEN ALGEBRAISCHER FUNKTIONEN.* — Sehr einfache Betrachtungen führen zunächst zu einer Verallgemeinerung der Formel (1). Sei D ein (nicht kompaktes) offenes Gebiet einer logarithmischen Fläche, begrenzt durch zwei Linien C und C', die im einen und anderen Umlaufssinn unendlich vielmal den Windungspunkt $z = 0$ umgeben. Sei ferner $f(z)$ eine Funktion, die eindeutig und regulär in $D \cup C \cup C'$ ist. Wir bilden D durch die Funktion

$$\zeta = \frac{\log z + 1}{\log z - 1} \tag{2}$$

---

[1] Hauptsächlich in §§ 2, 4.

schlicht ab und es sei Δ das entsprechende Gebiet der ζ-Ebene, das durch zwei entsprechende Linien Γ und Γ', die durch den Punkt $\zeta = 1$ gehen, begrenzt ist. Wir setzen noch voraus, dass jeder zusammenhängende und kompakte Teil von I und Γ' rektifizierbar und dass $f(z) \cdot \log z$ in G beschränkt ist. Dann bleibt $f[z(\zeta)]/(\zeta - 1)$ endlich in $\Delta \cup \Gamma \cup \Gamma'$ und wir haben auf Grunde des Cauchyschen Integrals, mittels konformer Abbildung durch (2) die Integraldarstellung in G:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C} \frac{f(t)}{\log t/z} \cdot \frac{dt}{t} - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C'} \frac{f(t)}{\log t/z} \cdot \frac{dt}{t}$$

und hieraus durch Anwendung von (1) und Vertauschung der Grenzprozesse

$$f(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n\pi i}\left[\int\limits_{C} \frac{f(t)}{(t/z)^{1/n} - 1} \cdot \frac{dt}{t} - \int\limits_{C'} \frac{f(t)}{(t/z)^{1/n} - 1} \cdot \frac{dt}{t}\right],$$

woraus durch Anwendung der geometrischen Reihe und nochmaliges Vertauschen der Grenzen

$$f(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n\pi i}\left[\sum_{\nu=1}^{\infty} z^{\nu/n} \int\limits_{C} \frac{f(t)\,dt}{t^{\nu/n+1}} + \sum_{\nu=0}^{\infty} z^{-\nu/n} \int\limits_{C'} \frac{f(t)\,dt}{t^{-\nu/n+1}}\right]$$

folgt. Also, wenn mit m_n und M_n geeignete ganze Zahlen bezeichnet werden und

$$\varkappa\left(\frac{\nu}{n}\right) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C^*} \frac{f(t)\,dt}{t^{\nu/n+1}}, \quad \begin{array}{l} \nu = m_n,\ m_n + 1, \dots, M_n, \\ n = 0,\ 1,\ 2,\ \dots, \end{array}$$

gesetzt wird, wobei C^* in D verläuft, so hat man

$$f(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=m_n}^{M_n} \varkappa\left(\frac{\nu}{n}\right) z^{\nu/n}. \tag{3}$$

Die Folge algebraischer Funktionen in (3) konvergiert für $\rho' < |z| < \rho$, wobei

$$\rho' = \limsup_{\lambda\to-\infty} |\varkappa(\lambda)|^{-1/\lambda} \quad \text{und} \quad \rho = \liminf_{\lambda\to\infty} |\varkappa(\lambda)|^{-1/\lambda}$$

ist. Die Konvergenz ist in jedem Gebiete, das ganz im Inneren des letztgenannten liegt, gleichmässig ([6], S. 13 bis 23).

3. *DAS GRENZWEISE ENTHALTEN.* — Zur allgemeinen Betrachtung übergehend, bedienen wir uns einer einfachen Bezeichnungsweise von Koebe,

um die Punkte einer Riemannschen Fläche von den entsprechenden Punkten der komplexen Ebene zu unterscheiden: $\bar{z}$ bedeute irgendeinen Punkt der Riemannschen Fläche, dessen Spurpunkt in der Zahlenebene z ist.

Da zu den algebraischen Funktionen geschlossene Riemmansche Flächen gehören und wir analytische Funktionen in beliebigen Gebieten (geschlossener sowie nichtgeschlossener) Riemmannscher Flächen durch algebraische Funktionen zu approximieren suchen, müssen sich im Allgemeinen in der approximierenden Funktionenfolge die Flächen allmählich komplizieren, um sich gleichsam der gegebenen Fläche immer mehr anzunäheren. Das traf schon in der vorangehenden Betrachtung zu, da die Flächen der Funktionen $z^{1/n}$ mit wachsendem n die logarithmische Fläche sozusagen immer vollständiger enthalten. Also ist uns der folgende Begriff des „grenzweisen Enthaltens" nötig (M. Radojčić, [6]; auch [8], S. 3):

ERKLÄRUNG 1. — Ist R irgendeine Riemannsche Fläche und $\{A_n\}$ eine unendliche Folge geschlossener Riemannscher Flächen derart, dass jedes ganz in R enthaltene Gebiet auch in allen Flächen A_n, für die n genügend gross, enthalten ist, so werden wir sagen, dass die Riemannschen Flächen A_n (oder deren Folge) die Riemannsche Fläche R grenzweise enthalten[2].

Kann insbesondere R als Gebiet einer geschlossenen Riemannschen Fläche A angesehen werden, so darf man $A_n = A$ setzen und das grenzweise Enthalten geht in das gewöhnliche Enthalten über.

Wir heben den folgenden Satz hervor:

Für jede Riemannsche Fläche gibt es Folgen von geschlossenen Riemannschen Flächen, die die gegebene Fläche grenzweise enthalten.

Beweis: Es genügt, offenbar, den Fall einer nichtgeschlossenen Riemannschen Fläche R zu betrachten. Für jede Fläche R besteht eine unendliche Folge $\{G_n\}$ von Gebieten, die R (von Innen) ausschöpfen. Nach dem „Einbettungssatze" von Behnke und Stein ([2], S. 435) besteht für jedes ganz im Inneren der Fläche R enthaltenes Gebiet eine geschlossene Riemannsche Fläche, die das Gebiet enthält und dabei wenigstens ein Gebiet von R frei lässt. Ist also A_n eine geschlossene Riemannsche Fläche,

---

[2] Wir fassen den Begriff der Riemannschen Fläche, wie üblich, so auf, dass auch jedes offene Gebiet einer solchen als Riemannsche Fläche angesehen werden kann. Demgemäss unterscheiden wir erweiterbare und unerweiterbare Riemannsche Flächen. (Die Fläche R ist erweiterbar, falls eine andere, R_0 besteht, so dass $R \subset R_0$ ist.)

die G_n enthält, so ist, offenbar, jedes ganz in R enthaltenes Gebiet für n genügend gross in jeder Fläche A_n enthalten, d. h. die Folge $\{A_n\}$ enthält R grenzweise.

Im grenzweisen Enthalten findet eine Art gegenseitiger Zuordnung Riemannscher Flächen statt. Seien, allgemein betrachtet, R_1, R_2 zwei Flächen und G_1, G_2 zwei Gebiete derselben, $G_1 \subseteq R_1$ und $G_2 \subseteq R_2$; wir betrachten eine ein-eindeutige, punktweise und gebietstreue Abbildung der Gebiete G_1 und G_2 aufeinander. Sind nun R_1 und R_2 zwei Riemannsche Flächen, die über derselben Zahlenebene liegen, welche mit E bezeichnet werde, so soll diese Abbildung diejenige sein, in der die einander entsprechenden Punkte denselben Spurpunkt haben. Dann ist die Abbildung von G_1 auf G_2, da sie ein-eindeutig ist, eine (im Sinne der Riemannschen Flächen gemeinte) Kongruenz, und man kann insbesondere auch $G_1 \equiv G_2$ setzen. Jedem Wege in E, der von einem Punkte p ausgeht und die darüber gelegenen Windungspunkte von R_1 und R_2 meidet, entspricht dabei je ein bestimmter Weg auf R_1 und R_2, der aus einen Punkte $\tilde{p}_1$ in G_1, bzw. $\tilde{p}_2$ in G_2 ausgeht und zu einem Punkte $\tilde{q}_1$ auf R_1, bzw. $\tilde{q}_2$ auf R_2 gelangt. Die Zuordnung zwischen $\tilde{q}_1$ und $\tilde{q}_2$ ist aber nur solange ein-eindeutig, als $\tilde{q}_1$ in G_1 (und $\tilde{q}_2$ in G_2) enthalten ist. Ausserhalb G_1 (und G_2) werden aber im Allgemeinen einem Punkte $\tilde{q}_1$ von R_1 mehrere übereinander liegende Punkte $\tilde{q}_2$ von R_2 entsprechen, und umgekehrt.

Bei einer Folge von Flächen $\{A_n\}$, die eine Riemannsche Fläche R grenzweise enthalten, besteht nun eine solche, nur teilweise ein-eindeutige Zuordnung zwischen R und jeder einzelnen Fläche A_n. In jedem Gebiete G_n, das zugleich in A_n und in R enthalten ist, ist diese Zuordnung ein-eindeutig und kann auch als eine Identität angesehen werden. Dabei werden Gebiete G_n gewählt, die R ausschöpfen.

Der Begriff des grenzweisen Enthaltens kann auch allgemeiner gefasst werden, so dass auch die simultane Konvergenz algebraischer Funktionen gegen mehrere vieldeutige analytische Funktionen in Betracht genommen werden. Dazu dient der folgende Begriff ([8], S. 21):

ERKLÄRUNG 2. — Seien m (bzw. abzählbar unendlich viele) nichtgeschlossene Riemannsche Flächen über der Zahlenebene ausgebreitet, die untereinander punktfremd sind: $R^{(\mu)}$, $\mu = 1, 2, \ldots, m$ (bzw. $\mu = 1, 2, \ldots$). Sei $G^{(\mu)}$ irgendein Gebiet, ganz in $R^{(\mu)}$ enthalten. Ist dann $\{A_n\}$ eine unendliche Folge geschlossener Riemannscher Flächen, derart dass die Gebiete $G^{(\mu)}$, $\mu = 1, 2, \ldots, m$ (bzw. $\mu = 1, 2, \ldots, m_n$; $m_n \to \infty$) auch in allen Flächen A_n, wenn nur n genügend gross ist, enthalten sind, so werden wir sagen dass die Riemannschen Flächen A_n die Riemannschen Flächen $R^{(\mu)}$ insgesamt grenzweise enthalten.

4. *ENTWICKLUNG VIELDEUTIGER ANALYTISCHER FUNKTIONEN NACH ALGEBRAISCHEN FUNKTIONEN (VERALLGEMEINERUNG DES RUNGESCHEN SATZES).* — Es besteht der folgende, den Rungeschen umfassende Satz (M. Radojčić, [6], sowie [8], S. 11):

SATZ I. — *Sei $f(z)$ irgendeine analytische Funktion, R ihre Riemannsche Fläche, G ein offenes Gebiet von R, worin $f(z)$ regulär ist. Sei G' ein Gebiet von R, das G enthält $(G \subseteq G')$.*

Wie auch immer eine Folge von geschlossenen Riemannschen Flächen A_n, $n = 1, 2, \ldots$, die G' grenzweise enthalten, gegeben sei, es besteht eine Folge algebraischer Funktionen $f_n(z)$, $n = 1, 2, \ldots$, deren Flächen A_n sind und die im Inneren von G gleichmässig gegen die Funktion $f(z)$ konvergieren.

Der Beweis ist dem von Runge ähnlich und beruht auf der Übertragung der Cauchyschen Integralformel auf Riemannsche Flächen[3]). Sei $\{G_n\}$ eine Folge ganz in G enthaltener, G ausschöpfender Gebiete, so dass $G_n \subset A_n$ ist. Der Rand von G_n sei C_n. Er sei aus endlich vielen rektifizierbaren Kurven gebildet. Durch Anwendung der erweiterten Cauchyschen Integralformel erhält man

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} f(t) \cdot \alpha_n(t, z)\, dt, \quad \tilde{z} \in G_n, \; n = 1, 2, \ldots, \tag{4}$$

wo α_n eine Elementarfunktion der Fläche A_n ist, die im Punkte $\tilde{z}$ von G_n einen Pol erster Ordnung mit dem Residuum 1 besitzt und nur noch ausserhalb von G und dessen Rand Pole besitzen mag. Gibt es Punkte von G_n, wo $z = \infty$, so sei jeder solche Punkt eine Nullstelle zweiter Ordnung der Funktion α_n.

Durch Umwandlung der Integrale (4) in Summen erhalten wir hieraus eine im Inneren von G gleichmässig gegen $f(z)$ konvergierende Folge algebraischer Funktionen $f_n(z)$.

---

[3] Sie befindet sich bei M. Radojčić [6] und [8], S. 8 bis 10. Kurze Zeit nach diesen Aufsätzen erschien das Buch „Elliptische Funktionen" [5] von R. König und M. Krafft, worin die Idee der Erweiterung des Cauchyschen Integrals in ihrer Allgemeinheit ausgesprochen war, aber die Autoren enthielten sich darin von der Begründung derselben, da dies nicht in den Rahmen des Buches fiel. Im Aufsatz [4] derselben Autoren befindet sich schon eine Erweiterung des Causchyschen Integrals, jedoch auf den Fall einfach zusammenhängender Gebiete beschränkt. H. Behnke und K. Stein gaben einen unabhängigen Beweis in [2], S. 436 bis 439.

Die gegebene Riemannsche Fläche R kann auch eine geschlossene sein, nur darf dann nicht $G \equiv R$ gesetzt werden.

Da jede Funktion $f_n(z)$ Pole auf C_n aufweist, die um so häufiger sind, als n grösser ist, verlegen wir sie in Punkte, die, falls möglich, ausserhalb von G und dessen Rand fallen (Rungesche Polverlagerung). Dabei ist uns der folgende Hilfssatz nötig, dessen Beweis dem entsprechenden von Runge nachgebildet wurde[4]):

HILFSSATZ. — *Sei G ein offenes (und echtes) Teilgebiet einer geschlossenen Riemannschen Fläche A, das von endlich hohem Zusammenhang ist. Sei ferner $\{\tilde{c}_k\}$, $k = 1, 2, \ldots, q$, eine Punktmenge von A, derart dass auf jedem Kontinuum der Komplementärmenge $A - G$ genau ein Punkt $\tilde{c}_k$ liegt. Dann lässt sich jede algebraische Funktion, die eindeutig und regulär in G ist, durch algebraische Funktionen der Fläche A im Inneren von H gleichmässig approximieren, die eindeutig und regulär in G sind und ausser der Punkte $\tilde{c}_k$, $k = 1, 2, \ldots, q$, keine weiteren Pole besitzen.*

Nun beweist man leicht den folgenden Satz ([8], S. 18):

SATZ II. — *Sei $f(z)$ irgendeine analytische Funktion, R ihre Riemannsche Fläche, G ein offenes Gebiet von R, worin $f(z)$ regulär ist, und sei G' ein Gebiet von R (oder sogar von einer anderen Riemannschen Fläche) welches G enthält.*

Seien ausserdem G_n, $n = 1, 2, \ldots$, Gebiete von G, die G ausschöpfen und A_n, $n = 1, 2, \ldots$, geschlossene Riemannsche Flächen, die G' grenzweise enthalten, so dass G_n auch als Gebiet von A_n angesehen werden kann.

Dann besteht eine Folge algebraischer Funktionen $\varphi_n(z)$, $n = 1, 2, \ldots$, deren Flächen der Reihe nach A_n sind, die im Inneren von G gleichmässig gegen $f(z)$ konvergieren und so beschaffen sind, dass für ein jedes n die Funktion $\varphi_n(z)$ als einzige Pole vorausgegebene Punkte ausserhalb von G_n (auf A_n) besitzt, und zwar (zum Beispiel) in jedem Komplementär-Kontinuum von G_n höchstens einen Pol.

Vereinfachungen des Satzes II entstehen z. B. wenn $G \equiv G'$ oder $G' \equiv R$ gesetzt wird. Man kann auch voraussetzen, dass G dass ganze Existenzgebiet von $f(z)$ ist, oder auch dass R eine geschlossene Riemannsche Fläche ist; dann kann $A_n \equiv R$ gewählt werden ([8], Satz V', S. 19). Ist insbe-

---

[4] M. Radojčić, [8], S. 15. Bei Behnke und Stein, [2], findet man den nahe verwandten, allgemeineren Satz 5, S. 439.

sondere R die schlichte Ebene, so wird der Satz II zum Satz von Runge. Nimmt man an, dass G den Punkt $z = \infty$ nicht enthält und einfach zusammenhängend ist, so kann mann für φ_n sogenannte ganze algebraische Funktionen wählen ([8], Satz VII). Ist dann R die schlichte Ebene, so erhält man den Satz von Weierstrass über die Entwicklung nach Polynomen.

Alle Sätze können ausserdem, wie leicht einzusehen, für die simultane Konvergenz in nichtzusammenhängenden Bereichen, auf endlich oder abzählbar unendlich vielen nichtgeschlossenen Riemannschen Flächen $R^{(\mu)}$ gegen irgendwelche monogene analytische Funktionen $F_\mu(z)$, $\mu = 1, 2, \ldots, m$ (bzw. $\mu = 1, 2, \ldots$) erweitert werden. Im Beweise geht man von den Ausdrücken

$$\sum_\mu \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_n^{(\mu)}} F_\mu(t) \cdot \alpha_n(t, z)\, dt, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

aus, worin für jedes μ $C_n^{(\mu)}$, $n = 1, 2, \ldots$, die Ränder von Gebieten sind, die $R^{(\mu)}$ ausschöpfen ([8], Satz VIII).

5. *ÜBER DEN FUNDAMENTALSATZ DER RIEMANNSCHEN THEORIE DER ALGEBRAISCHEN FUNKTIONEN.* — In den folgenden, sowie in den vorangehenden Betrachtungen kommt eine grundlegende Bedeutung dem Fundamentalsatz der Riemannschen Theorie der algebraischen Funktionen zu, demzufolge für jede geschlossene Riemannsche Fläche A eine ihr gehörende algebraische Funktion besteht, deren Pole gegebene Punkte von A sind und gegebene Ordnungszahlen besitzen, vorausgesetzt, dass die Gesamtordnung s dieser Pole grösser als das Geschlecht p von A ist. Aus dem Riemann-Rochschen Satze folgt dann, dass die allgemeinste derartige algebraische Funktion mehr als $s - p$ willkürliche Konstanten hat. Diese können so gewählt werden, dass man gewisse Nullstellen und Koeffizienten in den Hauptteilen der Pole vorschreibt. (Siehe etwa [1], § 173).

Seien $\tilde{a}_\mu$, $\mu = 1, 2, \ldots, h$, die vorgeschriebenen Nullstellen und $\tilde{b}_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots, k$, die Unendlichkeitsstellen; sei r_μ die Ordnung der Nullstelle $\tilde{a}_\mu$, s_ν die der Unendlichkeitsstelle $\tilde{b}_\nu$ und σ_ν $(0 \leqslant \sigma_\nu \leqslant s_\nu)$ die Anzahl der im Hauptteile von $\tilde{b}_\nu$ vorgeschriebenen Koeffizienten. Wir schreiben

$$r_1 + r_2 + \ldots + r_h = r, \qquad s_1 + s_2 + \ldots + s_k = s,$$
$$\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_k = \sigma.$$

Da $r + \sigma$ Grössen vorgeschrieben sind und bei der Gesamtordnung s der Pole wenigstens $s - p + 1$ willkürliche Konstanten zur Verfügung stehen, ist $r+\sigma \leqslant s-p+1$, d. h. $s-\sigma-r \geqslant p-1$. Wir sprechen das in der Form des folgenden Existenzsatzes aus:

SATZ 1. — *Sei A eine geschlossene Riemannsche Fläche vom Geschlech. p, seien $\tilde{a}_\mu$, $\mu = 1, 2, \ldots, h$, und $\tilde{b}_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots, k$, Punkte derselben una seien r_μ, $\mu = 1, 2, \ldots, h$, und s_ν, σ_ν $(0 \leqslant \sigma_\nu \leqslant s_\nu)$, $\nu = 1, 2, \ldots, k$, natürliche Zahlen, so dass*

$$r_1 + r_2 + \ldots + r_h = r, \qquad s_1 + s_2 + \ldots + s_k = s,$$

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_k = \sigma$$

und

$$s - \sigma - r \geqslant p - 1 \tag{5}$$

ist. Dann besteht eine algebraische Funktion mit der Riemannschen Fläche A, die die Punkte $\tilde{a}_\mu$, $\mu = 1, 2, \ldots, k$, als einzige Pole besitzt und zwar so, dass r_μ die Ordnung der Nullstelle $\tilde{a}_\mu$ und s_ν die des Poles $\tilde{b}_\nu$ ist und dass σ_ν Koeffizienten im Hauptteil des Poles b_ν vorgeschrieben sind.

Man kann auch $r = 0$ setzen und keine Nullstellen vorschreiben.

Eine hinreichende Bedingung für die Existenz einer solchen algebraischen Funktion ist also die, dass der Unterschied zwischen der Anzahl $s - \sigma$ der nicht vorgeschriebenen Koeffizienten in den Hauptteilen der Pole und der Anzahl r der vorgeschriebenen Nullstellen nicht kleiner als $p - 1$ ist.

Wird $k + 1$ statt k gesetzt und angenommen, dass die ganzen Hauptteile in den Polen $\tilde{b}_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots, k$, vorgeschrieben sind, so ist $s - \sigma = s_{k+1}$ und aus (5) folgt $s_{k+1} \geqslant p + r - 1$.

Man kann also die Nullstellen $\tilde{a}_\mu$, $\mu = 1, 2, \ldots, h$, (oder gar keine) und alle Pole $\tilde{b}_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots, k$, mit den Hauptteilen vorschreiben, *wenn in noch einem Punkte $\tilde{b}_{k+1}$ ein Pol genügend hoher Ordnung $s_{k+1} \geqslant p + r - 1$ angenommen wird.*

6. *EIN SATZ ÜBER FUNKTIONEN MIT WESENTLICH SINGULÄREN STELLEN, DIE AUF GESCHLOSSENEN RIEMANNSCHEN FLÄCHEN EINDEUTIG SIND.* — Mit Hilfe des Satzes 1 beweisen wir den folgenden Satz:

SATZ 2. — *Sind $\tilde{a}_\lambda$, $\lambda = 1, 2, \ldots, h$, $\tilde{b}_\mu$, $\mu = 1, 2, \ldots, k$, $\tilde{c}_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots, l$, Punkte einer geschlossenen Riemannschen Fläche A, so besteht eine eindeutige analytische Funktion mit der Fläche A, die die Punkte $\tilde{a}_\lambda$ als einzige Nullstellen, mit vorgeschriebenen Ordnungszahlen, die Punkte $\tilde{b}_\mu$ als* *einzige Pole, mit vorgeschriebenen Ordnungszahlen, die Punkte* $\tilde{c}_\nu$ *als wesentlich singuläre Punkte besitzt und die ausser* $\tilde{b}_\mu$ *und* $\tilde{c}_\nu$ *überall auf* R *regulär ist. — Es können aber auch keine Nullstellen oder keine Pole vorkommen.*[5])

Beweis. — Sollte unter den Punkten a_λ, b_μ, c_ν der z-Ebene der unendlich ferne Punkt vorkommen, so sei $z = \delta$ irgendein endlicher, von allen a_λ, b_μ, c_ν verschiedener Wert und man betrachte, statt der z-Ebene, eine neue, durch $z' = 1/(z-\delta)$ definierte z'-Ebene und die über derselben verbreitete, der Riemannschen Fläche A entsprechende Fläche A'. Wir wollen aber die Bezeichnungen vereinfachen und statt z' und A' wieder z und A schreiben.

Sei also r_λ die Ordnung der Nullstelle $\tilde{a}_\lambda$ und s_μ die des Poles $\tilde{b}_\mu$. Wir konstruieren zunächst eine algebraische Funktion $\alpha(z)$, deren Riemannsche Fläche A ist und die die Punkte $\tilde{a}_\lambda$, $\tilde{b}_\mu$, $\tilde{c}_\nu$ und $z = \infty$ als Null- oder Unendlichkeitsstellen besitzt und zwar:

1) Ist $\tilde{a}_\lambda$ ein Windungspunkt von der Ordnung $\varkappa_\lambda - 1$, so sei er ein Pol von der Ordnung $\varkappa_\lambda$ und der erste Koeffizient im Hauptteile dieses Poles sei $r_\lambda/\varkappa_\lambda$, d. h. es sei in der Umgebung von $\tilde{a}_\lambda$

$$\alpha(z) = \frac{r_\lambda/\varkappa_\lambda}{z - a_\lambda} + \frac{A^{(\lambda)}_{\varkappa_\lambda - 1}}{(z - a_\lambda)^{\frac{\varkappa_\lambda - 1}{\varkappa_\lambda}}} + \dots + \frac{A^{(\lambda)}_1}{(z - a_\lambda)^{\frac{1}{\varkappa_\lambda}}} + P\left[(z - a_\lambda)^{\frac{1}{\varkappa_\lambda}}\right],$$

wobei $P(t)$ eine in $t = 0$ reguläre Funktion ist. Ist $\tilde{a}_\lambda$ kein Windungspunkt, so setzen wir $\varkappa_\lambda = 1$, d. h. dann sei

$$\alpha(z) = \frac{r_\lambda}{z - a_\lambda} + P(z - a_\lambda).$$

2) Ist $\tilde{b}_\mu$ ein Windungspunkt von der Ordnung $\varkappa'_\mu - 1$, so sei er ein Pol von der Ordnung $\varkappa'_\mu$ und der erste Koeffizient im Hauptteile sei $- s_\mu/\varkappa'_\mu$, d. h. es sei

$$\alpha(z) = -\frac{s_\mu/\varkappa'_\mu}{z - b_\mu} + \frac{B^{(\mu)}_{\varkappa_\mu - 1}}{(z - b_\mu)^{\frac{\varkappa'_\mu - 1}{\varkappa'_\mu}}} + \dots + \frac{B^{(\mu)}_1}{(z - b_\mu)^{\frac{1}{\varkappa'_\mu}}} + P\left[(z - b_\mu)^{\frac{1}{\varkappa'_\mu}}\right].$$

Ist $\tilde{b}_\mu$ kein Windungspunkt, so setzen wir $\varkappa'_\mu = 1$, d. h.

$$\alpha(z) = -\frac{s_\mu}{z - b_\mu} + P(z - b_\mu).$$

---

[5] In [9], Lemma 6, wurde der Fall, dass keine Pole vorkommen, betrachtet.

3) Ist $\tilde{c}_\nu$ ein Windungspunkt von der Ordnung $\varkappa''_\nu - 1$, so sei er ein Pol, dessen Ordnung eine von $\varkappa''_\nu$ grössere Zahl ρ_ν ist und der $(\rho_\nu - \varkappa''_\nu)$ - te Koeffizient im Hauptteile sei $u_\nu / \varkappa''_\nu$, wobei u_ν eine ganze Zahl ist. Es sei also in der Umgebung von $\tilde{c}_\nu$

$$\alpha(z) = \frac{C^{(\nu)}_{\rho_\nu}}{(z - c_\nu)^{\frac{\rho_\nu}{\varkappa''_\nu}}} + \frac{C^{(\nu)}_{\rho_\nu - 1}}{(z - c_\nu)^{\frac{\rho_\nu - 1}{\varkappa''_\nu}}} + \ldots + \frac{u_\nu/\varkappa''_\nu}{z - c_\nu} + \ldots + \frac{C^{(\nu)}_1}{(z - c_\nu)^{\frac{1}{\varkappa''_\nu}}} + \\ + P\left[(z - c_\nu)^{\frac{1}{\varkappa''_\nu}}\right],$$

$$\alpha(z) = \frac{C^{(\nu)}_{\rho_\nu}}{(z - c_\nu)^{\rho_\nu}} + \frac{C^{(\nu)}_{\rho_\nu - 1}}{(z - c_\nu)^{\rho_\nu - 1}} + \ldots + \frac{u_\nu}{z - c_\nu} + P(z - c_\nu).$$

4) In jedem Punkte $z = \infty$, der ein Windungspunkt von der Ordnung $\varkappa - 1$ ist, soll $\alpha(z)$ eine Nullstelle von der Ordnung $2\varkappa$ haben. Ist es kein Windungspunkt, so setze man $\varkappa = 1$, also soll es eine Nullstelle zweiter Ordnung sein. Ist A (und A') n-blättrig, so ist die Gesamtordnung aller dieser Nullstellen $2n$.

Die mit $A^{(\lambda)}$, $B^{(\mu)}$, $C^{(\nu)}$ bezeichneten Koeffizienten können beliebig gewählt werden.

Sollte die gesuchte Funktion auf A keine Nullstellen oder keine Pole haben, so lasse man die Bedingung 1 bzw. 2 aus und handle dementsprechend auch im Folgenden.

Die Gesamtordnung der Pole von $\alpha(z)$ ist

$$\sum_{\lambda=1}^{h} \varkappa_\lambda + \sum_{\mu=1}^{k} \varkappa'_\mu + \sum_{\nu=1}^{l} \rho_\nu$$

und die Anzahl der vorgeschriebenen (bzw. durch die Bedingung der Ganzzahligkeit eingeschränkten) Koeffizienten in den Hauptteilen der Pole ist $h + k + l$. Nach (5) soll

$$(6) \qquad \sum_{\lambda=1}^{h} (\varkappa_\lambda - 1) + \sum_{\mu=1}^{k} (\varkappa'_\mu - 1) + \sum_{\nu=1}^{l} (\rho_\nu - 1) - 2n \geqslant p - 1$$

sein. Die Zahlen $\varkappa_\lambda$, $\varkappa'_\mu$, n und p sind zwar mit der Riemannschen Fläche A gegeben, aber die Zahlen ρ_ν können immer gross genug gewählt werden, damit (6) gelte. Also existiert nach dem Satze 1 immer eine Funktion $\alpha(z)$ mit den genannten Eigenschaften.

Wir betrachten nun die Funktion

$$J(z) = \int_{z_0}^{z} \alpha(z)\, dz,$$

wo $\tilde{z}_0 \neq \tilde{a}_\lambda, \tilde{b}_\mu, \tilde{c}_\nu$ und der Integrationsweg nicht durch diese Punkte geht. Da $\alpha(z)$ für $z = \infty$ eine Null genügend hoher Ordnung hat, bleibt $J(z)$ für $\tilde{z} \neq \tilde{a}_\lambda, \tilde{b}_\mu, \tilde{c}_\nu$ endlich auch wenn $z = \infty$. Also ist $J(z)$ ausserhalb $\tilde{a}_\lambda, \tilde{b}_\mu, \tilde{c}_\nu$ regulär, aber nicht eindeutig auf A

Tatsächlich, in der Umgebung von $\tilde{a}_\lambda$ ist, mit $\varkappa_\lambda \geqslant 1$,

$$J(z) = \frac{r_\lambda}{\varkappa_\lambda} \log(z - a_\lambda) + Q\ [(z - a_\lambda)^{\frac{1}{\varkappa_\lambda}}],$$

wobei $Q(t)$ eine in $t = 0$ reguläre Funktion bezeichnet. In der Umgebung von $\tilde{b}_\mu$ ist, mit $\varkappa'_\mu \geqslant 1$,

$$J(z) = -\frac{s_\mu}{\varkappa'_\mu} \log(z - b_\mu) + Q\ [(z - b_\mu)^{\frac{1}{\varkappa'_\mu}}]$$

und in der Umgebung von $\tilde{c}_\nu$ hat man, mit $\varkappa''_\nu \geqslant 1$,

$$J(z) = -\frac{C^{(\nu)}_{\rho_\nu}}{\frac{\rho_\nu}{\varkappa''_\nu} - 1} \cdot \frac{1}{(z - c_\nu)^{\frac{\rho_\nu}{\varkappa''_\nu} - 1}} + \dots +$$

$$+ \frac{u_\nu}{\varkappa''_\nu} \log(z - c_\nu) + Q\ [(z - c_\nu)^{\frac{1}{\varkappa''_\nu}}].$$

Wir betrachten nun die Funktion $\varphi(z) = e^{J(z)}$. In der Umgebung von $\tilde{a}_\lambda$ ist

$$\varphi(z) = (z - a_\lambda)^{\frac{r_\lambda}{\varkappa_\lambda}} \cdot e^Q,$$

also hat $\varphi(z)$ den Punkt $\tilde{a}_\lambda$ als Nullstelle von der Ordnung r_λ. In der Umgebung von $\tilde{b}_\mu$ ist

$$\varphi(z) = (z - b_\mu)^{-\frac{s_\mu}{\varkappa''_\lambda}} \cdot e^Q,$$

also hat $\varphi(z)$ den Punkt $\tilde{b}_\mu$ als Pol von der Ordung s_μ. In der Umgebung von $\tilde{c}_\nu$ hat $\varphi(z)$ die Gestalt

$$\varphi(z) = e^{\frac{D_\nu}{(z-c_\nu)^{\beta_\nu}}} \dots (z - c_\nu)^{\frac{u_\nu}{\varkappa''_\nu}} \cdot e^Q,$$

wobei $\beta_\nu = \frac{\rho_\nu}{\varkappa''_\nu} - 1 > 0$, also hat $\varphi(z)$ den Punkt $\tilde{c}_\nu$ als wesentliche Singularität; da u_ν eine ganze Zahl ist, ist $\varphi(z)$ in der Umgebung von $\tilde{c}_\nu$ eindeutig auf A. In allen übrigen Punkten ist $\varphi(z)$ regulär und von Null verschieden.

Als $J(z)$ in den Exponent erhoben wurde, verschwanden die logarithmischen Singularitäten, aber die zyklischnen Periodizitätsmodulen von $J(z)$ blieben und machen $\varphi(z)$ noch immer mehrdeutig auf A. Deshalb ziehen wir von $J(z)$ ein Abelsches Integral erster Gattung, $K(z)$, mit denselben Periodizitätsmodulen wie $J(z)$ ab. Dann ist

$$f(z) = e^{J(z) - K(z)}$$

eine auf A eindeutige Funktion mit den gesuchten Eigenschaften. Um im Falle, dass die Transformation $z' = 1/(z - \delta)$ vollzogen wurde, zur ursprünglichen Bezeichnung zurückzukehren, müssen wir noch z durch z' ersetzen, so dass erst $f\left(\frac{1}{z-\delta}\right)$ die gesuchte Funktion darstellt.

7. FUNKTIONEN, DIE AUF RIEMANNSCHEN FLÄCHEN REGULÄR ODER MEROMORPH SIND UND VORGESCHRIEBENE NULL- BZW. UNENDLICHKEITSSTELLEN BESITZEN. — Um zu den allgemeinen Entwicklungen auf Riemannschen Flächen zu gelangen, mussten gewisse Hilfssätze bewiesen werden (Radojčić, [9], S. 98, 102—104), die wir nun in den folgenden Satz zusammenfassen:

SATZ 3. — *Seien B und B' offene Bereiche einer geschlossenen Riemannschen Fläche A, so dass $B \subset\subset B' \subset A$ und dass B einfach zusammenhängend relativ zu B' ist. Seien ferner $\tilde{a}_\mu$, $\mu = 1, 2, \dots, h$, Punkte in B und $\tilde{b}_\nu$, $\nu = 1, 2, \dots, k$, Punkte in $B' - B$.*

Jede in B eindeutige und entweder reguläre oder aber meromorphe Funktion $f(z)$, deren Pole in B die Punkte $\tilde{a}_\mu$, $\mu = 1, 2, \dots, h$, sind, kann in B durch eine Folge algebraischer Funktionen $f_n(z)$, $n = 1, 2, \dots$, approximiert werden, deren Riemannsche Fläche A ist, die im Inneren von B, bzw. von $B - \{\tilde{a}_\mu\}$ gleichmässig gegen $f(z)$ konvergieren und in B regulär, bzw. meromorph sind, wobei jede Funktion $f_n(z)$ die Punkte $\tilde{a}_\mu$ als Pole mit denselben Hauptteilen wie $f(z)$ besitzt.

Die Funktionen $f_n(z)$ *können ausserdem in beiden Fällen so gewählt werden, dass sie in* $B'-B$ *entweder regulär oder meromorph sind und dabei die Punkte* $\bar{b}_\nu$ *und nur diese als Pole, mit vorgeschriebenen, von n unabhängigen Hauptteilen besitzen. Im Allgemeinen müssen dann die Funktionen* $f_n(z)$ *auch ausserhalb* B' *Pole aufweisen und wir können fordern, dass sich für jede Funktion* $f_n(z)$ *je ein Pol in jedem zu* B' *komplementären Kontinuum, und zwar in einem dort beliebig gewählten Punkte befindet.*[6])

Ist B nicht zusammenhängend, so kann $f(z)$, selbstverständlich, in jedem zusammenhängenden Stücke von B eine andere monogene analytische Funktion darstellen.

Durch Anwendung der Sätze 1 und 3 können die folgenden zwei allgemeinen Sätze bewiesen werden. Die Beweise sind auch erbracht worden, durch Anwendung der erwähnten, in den Sätzen 1 und 3 enthaltenen Tatsachen ([9], Sätze II und IV, S. 106 und 110. Wir bringen sie hier wegen Vollständigkeit wieder).

SATZ III. — *Sei R irgendeine nichtgeschlossene Riemannsche Fläche una* $\{\bar{b}_\nu\}$, $\nu=1,2,\ldots$, *eine Punktfolge auf R, die keinen Punkt von R als Häufungspunkt, aber, falls R eigentlicheR andpunkte aufweist, einen jeden solchen*[7]) *als Häufungspunkt besitzt.*

Es besteht dann eine Folge algebraischer Funktionen

$$f_n(z;\ b_1,\ b_2,\ldots,b_n),\quad n=1,2,\ldots,$$

deren Riemannsche Flächen die Fläche R grenzweise enthalten und die im Inneren von $R-\{\bar{b}_\nu\}$ *gleichmässig konvergieren und somit eine analytische Funktion* $F(z)$ *mit dem Existenzgebiet R definieren, welche meromorph auf R ist und die Punkte* $\bar{b}_\nu$, $\nu=1,2,\ldots$, *und nur diese, als Pole, mit vorgeschriebenen Hauptteilen besitzt. Dabei hat* f_n *die Punkte* $\bar{b}_\nu$, $\nu=1,2,\ldots,n$, *als (im Allgemeinen nicht einzige) Pole und zwar mit den gehörigen, gegebenen Hauptteilen.*

---

[6] Der letzte Teil des Satzes 3 wurde in [9] nur für den dortigen Hilfssatz 1 ausgesprochen, er gilt aber, offensichtlich, auch für die übrigen dortigen Hilfssätze (2 bis 5).

[7] Besteht eine Riemannsche Fläche R_0, so dass $R\subset R_0$ und ist $\bar{p}$ ein Punkt von R_0, der Häufungspunkt von Punkten von R ist, aber nicht selber zu R gehört, so ist $\bar{p}$ ein eigentlicher Randpunkt von R.

SATZ IV. — *Sei R irgendeine nichtgeschlossene Riemannsche Fläche und* $\{\tilde{a}_\nu\}$, $\nu = 1, 2, \ldots$, *eine Punktfolge auf R, die keinen Punkt von R als Häufungspunkt, aber, falls R eigentliche Randpunkte aufweist, einen jeden solchen als Häufungspunkt besitzt.*

Es besteht dann eine Folge algebraischer Funktionen

$$g_n(z;\; a_1,\, a_2, \ldots, a_n), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

deren Riemannsche Flächen die Fläche R grenzweise enthalten und die im Inneren von R gleichmässig konvergieren und somit eine analytische Funktion $F(z)$ mit dem Existenzgebiet R definieren, welche regulär auf R ist und die Punkte $\tilde{a}_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots$, *als (im Allgemeinen nicht einzige) Nullstellen, vorgeschriebener Ordnung besitzt. Dabei hat g_n die Punkte* $\tilde{a}_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$, *als Nullstellen und zwar mit der gegebenen Ordnung.*

Ist die betrachtete nichtgeschlossene Riemannsche Fläche in einer geschlossenen Fläche A enhalten, so können die algebraischen Funktionen f_n bzw. g_n auf der Riemannschen Fläche A gewählt werden, wodurch das grenzweise Enthalten in die Identität übergeht. Aber durch Anwendung der Sätze 1 und 3, bzw. 2 und 3 können dann leicht auch die folgenden zwei Sätze, die Erweiterungen der Entwicklungssätze von Mittag-Leffler und von Weierstrass darstellen, bewiesen werden ([9], die Sätze I und V, S. 100 und 114. Hier werden sie in etwas geänderter Gestalt ausgesprochen, um die Rolle von α_n und φ_n besser hervorzuheben.)

SATZ V. — *Sei G ein offenes Gebiet einer geschlossenen Riemannschen Fläche A, welches nicht mit A identisch ist, und sei* $\{\tilde{b}_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, *eine Punktfolge in G, die jeden Randpunkt von G und nur einen solchen als Häufungspunkt besitzt. Sei ferner, dem Punkte $\{\tilde{b}_n\}$ entsprechend, $\alpha_n(z, b_n)$ irgendeine algebraische Funktion, deren Riemannsche Fläche A ist und die $\tilde{b}_n$ als einzigen Pol in G, mit einem vorgeschriebenen Hauptteile besitzt.*

Es besteht dann eine analytische Funktion $F(z)$ mit dem Existenzgebiete G, meromorph in G, worin sie die Punkte $\tilde{b}_n$ und nur diese als Pole, und zwar mit den vorgeschriebenen Hauptteilen besitzt. Diese Funktion kann in der Gestalt

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} [\alpha_n(z, b_n) - \beta_n(z)] \tag{7}$$

geschrieben werden, wobei β_n eine geeignete algebraische Funktion bezeichnet, deren Riemannsche Fläche A ist und die in G regulär ist.

Die Funktionen α_n *und* β_n *können ausserdem so gewählt werden, dass* α_n *ausser* $\tilde{a}_n$ *nur noch einen und zwar für alle* n *denselben, ausserhalb* G *liegenden Punkt als Pol aufweist und dass* β_n *als einzige Pole, in jedem zu* G *komplementären Kontinuum einen von* n *unabhängigen Pol besitzt.*

SATZ VI. — *Sei* G *ein offenes Gebiet einer geschlossenen Riemanschen Fläche* A, *welches nicht mit* A *identisch ist und sei* $\{\tilde{a}_n\}$, $n = 1, 2, \ldots,$ *eine Punktfolge in* G, *die jeden Randpunkt von* G *und nur einen solchen als Häufungspunkt besitzt. Sei ferner, dem Punkte* $\tilde{a}_n$ *entsprechend,* $\varphi_n(z, a_n)$ *irgendeine analytische Funktion, deren Riemannsche Fläche* A *ist und die* $\tilde{a}_n$ *als einzige Nullstelle, vorgeschriebener Ordnung besitzt und regulär auf* A *ist, mit Ausnahme eines einzigen wesentlich singulären Punktes ausserhalb* G.

Es besteht dann eine analytische Funktion $F(z)$ *mit dem Existenzgebiet* G, *regulär in* G, *worin sie die Punkte* $\tilde{a}_n$ *und nur diese als Nullstellen, mit den vorgeschriebenen Ordnungszahlen besitzt. Diese Funktion kann in der Gestalt*

$$F(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \varphi_n(z, a_n) \cdot e^{-\psi_n(z)} \tag{8}$$

geschrieben werden, wobei ψ_n *eine in* G *reguläre algebraische Funktion bezeichnet, deren Riemannsche Fläche ebenfalls* A *ist.*

Die Funktionen φ_n *und* ψ_n *können ausserdem so gewählt werden, dass der wesentlich singuläre Punkt von* φ_n *in einem von* n *unabhängigen Punkte liegt und dass* ψ_n, *als einzige Pole, in jedem zu* G *komplementären Kontinuum einen von* n *unabhängigen Pol besitzt.*

Jede Funktion, welche die im Satze V oder VI genannten Eigenschaften besitzt, kann offenbar in der Gestalt

$$\Phi(z) = g(z) + \sum_{n=1}^{\infty} [\alpha_n(z, b_n) - \beta_n(z)],$$

bzw.

$$\Psi(z) = \gamma(z) \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \varphi_n(z, a_n) \cdot e^{-\psi_n(z)}$$

geschrieben werden, wobei $g(z)$ eine in G eindeutige und reguläre Funktion und $\gamma(z)$ eine in G eindeutige, reguläre und von Null verschiedene Funktion darstellen.

Die Sätze V und VI gelten auch dann, wenn statt eines (zusammenhängenden) Gebietes G irgendein offener Bereich der geschlossenen Riemannschen Fläche A betrachtet wird. Ebenso kann man in den Sätzen III und IV statt einer nichtgeschlossenen Riemannschen Fläche R eine endliche oder abzählbar unendliche Menge nichtgeschlossener Riemannscher Flächen betrachten. Dann tritt jedoch an Stelle des einfachen grenzweisen Enthaltens das grenzweise Enthalten mehrerer Riemannscher Flächen (Erklärung 2) auf.

8. *EIN TOPOLOGISCHER SATZ.* — Im Beweise der Sätze III und IV wurde der folgende, übrigens einleuchtende topologische Satz stillschweigend angewendet, dessen Beweis nun angegeben werde.

SATZ 4. — *Sei* $\{\tilde{a}_\nu\}$, $\nu = 1, 2, \ldots$, *eine Punktfolge auf einer nichtgeschlossenen Riemannschen Fläche* R, *die falls* R *eigentliche Randpunkte aufweist, jeden solchen und nur einen solchen als Häufungspunkt, sonst aber keine Häufungspunkte besitzt. Dann besteht auf* R *eine, sie normal*[8]) *ausschöpfende Folge* $\{G_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, *von Gebieten, so dass* $\tilde{a}_n \in G_{n+1} - G_n$ *ist.*

Beweis. — Sei L_1 ein Jordanscher Kurvenbogen, der $\tilde{a}_1$ mit $\tilde{a}_2$ auf R verbindet (aus lauter inneren Punkten von R bestehend), L_2 ein zweiter, ebensolcher, der $\tilde{a}_2$ mit $\tilde{a}_3$ verbindet und ausser $\tilde{a}_2$ keinen gemeinsamen Punkt mit L_1 hat, usw. Allgemein, sei L_ν ein Jordanscher Kurvenbogen auf L, der $\tilde{a}_\nu$ mit $\tilde{a}_{\nu+1}$ verbindet und ausser $\tilde{a}_\nu$ keinen gemeinsamen Punkt mit $L_1, \ldots, L_{\nu-1}$ hat. Die aus allen L_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$, bestehende Kurve sei mit L bezeichnet. Da eine Einteilung von R in Elementardreiecke (Triangulierung) definitonsgemäss vorliegt, sei noch dafür besorgt, dass jedes L_ν die Seiten der Elementardreiecke in höchstens endlich vielen Punkten trifft.

Nun verfeinere man, falls nötig, die Einteilung in Elementardreiecke, so dass der ins Innere oder auf den Rand eines jeden Dreieckes fallende Teil von L aus höchstens einem zusammenhängenden Stücke besteht und höchstens einen Punkt $\tilde{a}_\nu$ enthält, und dass L auch die Seiten der neuen Elementardreiecke in höchstens endlich vielen Punkten trifft.

Sei F_1 jenes Elementardreieck, welches $\tilde{a}_1$ im Inneren enthält oder, falls $\bar{a}_1$ auf den Rand eines Dreieckes fällt, sei F_1 das Gebiet, welches aus allen Dreiecken besteht, die $\tilde{a}_1$ am Rande haben. Man erweitere das Gebiet F_1 durch alle längs Seiten angrenzende Elementardreiecke, die keine weiteren Punkte von L im Inneren oder am Rande enthalten und wiederhole dies solange, bis alle solche Dreiecke umfasst sind. Sei G_1 das so gewon-

---

[8] Behnke und Stein, [2] S. 442—443.

nene Gebiet. Es enthält einen und nur einen von $\tilde{a}_1$ ausgehenden Bogen λ_1 von L und weist keine Randkontinua auf, die innerhalb $R - G_1$ beranden. In der Tat, das von einem solchen Randkontinuum in $R - G_1$ berandete Gebiet würde aus Elementardreiecken bestehen, welche keine Punkte von L enthalten, diese sind aber dem Gebiete G_1 schon einverleibt.

Nun konstruiere man G_2 in folgender Weise. Man füge dem Gebiete G_1 alle weiteren Elementardreiecke hinzu, die den Endpunkt von λ_1 auf ihrem Rande enthalten. Eines dieser Dreiecke (falls deren mehrere sind) enthält offenbar einen weiteren, an λ_1 sich anschliessenden Bogen λ_2 von L. Dem so entstandenen Gebiete füge man alle diejenigen Elementardreiecke hinzu, die auf ihrem Rande den Endpunkt von $\lambda_1 \cup \lambda_2$ enthalten, wodurch ein weiterer Bogen λ_3 umfasst wird, usw. Das wiederhole man so lange, bis ein gewisser Bogen λ_{ν_2} von L umfasst wird, der den Punkt $\tilde{a}_2$, und zwar nicht als Endpunkt, enthält. Das so gewonnene Gebiet erweitere man durch alle längs Seiten angrenzende Elementardreiecke, die keinen weiteren Punkte von L im Inneren oder am Rand enthalten und wiederhole das so lange, als solche Dreiecke noch vorhanden sind. Dadurch ist ein Gebiet F_2 entstanden, welches G_1 enthält. Falls gewisse Randpunkte von G_1 nicht ins Innere von F_2 fallen, füge man nach Verfeinerung der betreffenden, an G_1 angrenzenden Elementardreiecke, weitere Dreiecke hinzu, bis ein Gebiet mit denselben Eigenschaften wie F_2 entsteht, welches aber G_1 ganz im Inneren enthält. Das gewonnene Gebiet sei G_2. Es enthält $\tilde{a}_1$ und $\tilde{a}_2$ und weist keine Randkontinua auf, die innerhalb $R - G_2$ beranden, was in derselben Weise wie für G_1 bewiesen wird.

Durch Fortsetzung des beschriebenen Verfahrens entsteht, offensichtlich, eine Folge $\{G_n\}$ von der gesuchten Art, denn G_n besitzt keine Randkontinua, die in $R - G_n$ beranden, also schöpft $\{G_n\}$ die Riemannsche Fläche R normal aus und es ist zugleich $\tilde{a}_n \in G_{n+1} - G_n$.

9. *ÜBERLAGERUNGSFOLGEN RIEMANNSCHER FLÄCHEN.* — Die durch die Sätze V und VI geforderte Konstruktion der Funktionen α_n, β_n, φ_n und ψ_n kann auf nichtgeschlossene Riemannsche Flächen, die keinen Beschränkungen unterliegen, nicht ohne weiteres übertragen werden, weil es sich um unendliche Summen oder Produkte handeln müsste, deren Glieder auf der gegebenen nichtgeschlossenen Fläche R eindeutige Funktionen sein sollten. Die Sätze III und VI in [9], die wir leider glaubten bewiesen zu haben, sind also unmöglich. Die Sätze V und VI (in der gegenwärtigen Arbeit) können dennoch wesentlich erweitert werden, was

im Folgenden geschehen soll. Dem müssen aber Betrachtungen über Riemannsche Flächen vorangehen.

Besteht zwischen zwei, über einer Ebene gelegenen Riemannschen Flächen F und $\tilde{F}$ eine gebietstreue punktweise Zuordnung, derart dass jedem Punkte von $\tilde{F}$ ein einziger Punkt auf F entspricht, der in der Ebene denselben Spurpunkt hat, so nennt man bekanntlich F eine Grundfläche von $\tilde{F}$ und $\tilde{F}$ eine Überlagerungsfläche von F. Ist dann $\tilde{W}$ ein Weg auf $\tilde{F}$, der zu seinem Ausgangspunkte zurückläuft und W der entsprechende Weg auf F, so läuft auch W zu seinem Ausgangspunkte zurück. Es gilt, offenbar, auch das Folgende: Sind F uud $\tilde{F}$ zwei Riemannsche Flächen und entspricht jedem geschlossenen Wege $\tilde{W}$ von $\tilde{F}$ ein geschlossener Weg W auf F, so ist $\tilde{F}$ eine Überlagerungsfläche von F. — Zur Vereinfachung der Ausdrucksweise führen wir noch die folgenden Begriffe ein:

ERKLÄRUNG 3. — Ist F eine Grundfläche von $\tilde{F}$ und p ein Punkt auf F, so wollen wir jeden Punkt $\tilde{p}$ von $\tilde{F}$, der in der zugrunde gelegenen Ebene dieselbe Spur wie p hat, einen Überlagerungspunkt von p nennen und p den Grundpunkt von $\tilde{p}$. (Ist F die Ebene, so wird der Grundpunkt zum Spurpunkt im gewöhnlichen Sinne).

ERKLÄRUNG 4. — Ist in einer Folge Riemannscher Flächen jede Fläche eine Grundfläche der ihr folgenden, so wollen wir diese Folge eine Überlagerungsfolge nennen.

Wir heben diesbezüglich zwei Sätze hervor.

i. *Ist F_1 eine Grundfläche von F_2 und F_2 eine Grundfläche von F_3, so ist auch F_1 eine Grundfläche von F_3.*

ii. *Ist $\{A_n\}$ eine unendliche Überlagerungsfolge geschlossener Riemann scher Flächen, die eine Riemannsche Fläche R grenzweise enthalten, so ist R eine Überlagerungsfläche jeder Fläche A_n.*

Der erste Satz ist einleuchtend; der zweite soll nun bewiesen werden.

Beweis. — Sei W irgendein geschlossener Weg auf R. Er ist in endlich vielen Elementardreiecken einer Triangulierung von R enthalten. Diese Dreiecke bilden ein ganz in R enthaltenes Gebiet und dieses ist nach der Erklärung 1 , da $\{A_n\}$ die Fläche R grenzweise enthaltet, in allen Flächen A_n, $n \geqslant n_0$, enthalten, wo n_0 eine genügend grosse natürliche Zahl bezeichnet. Also ist W, auch als Weg auf einer jeden solchen Fläche A_n betrachtet, ein geschlossener Weg, und folglich ist R eine Überlagerungsfläche jeder Fläche A_n, $n \geqslant n_0$. Da aber $\{A_n\}$ eine Überlagerungsfolge ist, ist nach dem Satze i A_{n_0} eine Überlagerungsfläche aller Flächen A_n, $n < n_0$, also ist der auf A_{n_0} geschlossene Weg W auch auf allen diesen Flächen $(n < n_0)$ geschlossen, d. h. R ist Überlagerungsfläche auch für jede Fläche A_n, $n < n_0$; sie ist es also für alle n, womit der Satz ii bewiesen ist.

Als Beispiel einer Überlagerungsfolge sei die Folge derjenigen geschlossenen Riemannschen Flächen angeführt, die den Funktionen $z^{1/2}$, $z^{1/4}, \ldots, z^{1/2^n}, \ldots$, zugeordnet sind. Jede dieser Funktionen ist nähmlich nicht nur auf ihrer Fläche, sondern auch auf der Fläche jeder weiteren Funktion derselben Folge eindeutig.

10. *EINE ERWEITERUNG DES MITTAG-LEFFLERSCHEN ENTWICKLUNGSSATZES FÜR RIEMANNSCHE FLÄCHEN, WELCHE EINE SIE GRENZWEISE ENTHALTENDE ÜBERLAGERUNGSFOLGE GESCHLOSSENER RIEMANNSCHER FLÄCHEN ZULASSEN.* — Wir beweisen nun den folgenden Satz:

SATZ VII. — *Sei R eine nichtgeschlossene Riemannsche Fläche, die eine sie grenzweise enthaltende Überlagerungsfolge $\{A_m\}$, $m = 1, 2, \ldots$, geschlossener Riemannscher Flächen zulässt und sei $\{\tilde{b}_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, eine Punktfolge auf R, die, falls R eigentliche Randpunkte aufweist, jeden solchen und nur einen solchen als Häufungspunkt, sonst aber keine Häufungspunkte besitzt. Sei ferner, dem Punkte $\tilde{b}_n$ entsprechend, $\alpha_n(z, b_n)$ irgendeine algebraische Funktion, deren Riemannsche Fläche A_{m_n} ist, unter $\{m_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, eine geeignete monoton nichtabnehmende Folge natürlicher Zahlen verstanden, und die $\tilde{b}_n$ als Pol mit einem vorgeschriebenen Hauptteile besitzt.*

Es besteht dann eine analytische Funktion $F(z)$ mit dem Existenzgebiete R, meromorph auf R, wo sie die Punkte $\tilde{b}_n$ und nur diese als Pole, und zwar mit den vorgeschriebenen Hauptteilen besitzt und die in der Gestalt

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} [\alpha_n(z, b_n) - \beta_n(z)] \tag{9}$$

geschrieben werden kann, wobei β_n eine geeignete algebraische Funktion bezeichnet, deren Riemannsche Fläche A_{m_n} ist und die in $\tilde{b}_n$ regulär ist. Die übrigen Pole von α_n und die Pole von β_n heben sich in den aufeinanderfolgenden Gliedern der Reihe (9) gegenseitig auf.

Beweis. — Sei $\{G_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, eine Folge offener Gebiete der Fläche R, die dieselbe normal ausschöpfen, und zwar so dass $\tilde{b}_n \in G_{n+1} - G_n$ ist (Satz 4). Wir bilden die Zahlenfolge $\{m_n\}$, so dass $A_{m_n} \supset G_{n+1}$. Sei A_{m_1} die erste Fläche in der Folge $A_1, A_2, \ldots$, welche G_2 mit $\tilde{b}_1$ enthält, A_{m_2} die erste Fläche in $A_{m_1}, A_{m_1+1}, \ldots$, welche G_3 mit $\tilde{b}_2$ enthält. Allgemein, sei A_{m_n} die erste Fläche in $A_{m_{n-1}}, A_{m_{n-1}+1}, \ldots$, welche G_{n+1} mit $\tilde{b}_n$ enthält. Da $\{A_m\}$ die Fläche R grenzweise enthält, so ist G_{n+1} für jedes n in allen A_m bei genügend grossem m enthalten; also besteht A_{m_n} für jedes n.

Die so gewonnene Folge $\{m_n\}$ ist monoton nichtabnehmend, denn $A_{m_{n-1}}$ ist identisch entweder mit A_{m_n} oder mit A_{m_n+1}, oder mit A_{m_n+k}, $k > 1$; also ist A_{m_n+1} Überlagerungsfläche von A_{m_n}, d. h. auch $\{A_{m_n}\}$ is eine Überlagerungsfolge. Besteht $\{A_m\}$ aus unendlich vielen verschiedenen Flächen, kann also R nicht als Teil einer geschlossenen Riemannschen Fläche angesehen werden, so gilt dasselbe auch von $\{A_{m_n}\}$.

Sei nun $\{\varepsilon_n\}$ eine gegen Null monoton abnehmende Folge positiver Zahlen und es seien noch die folgenden Bezeichnungen allgemein benutzt: $H(f, \tilde{z})$ bezeichne den Hauptteil einer Funktion f im Pole $\tilde{z}$. Ist $\tilde{F}$ Überlagerungsfläche von F und $\tilde{z}$ ein Punkt auf F, so bezeichne $\tilde{\tilde{z}}$ irgendeinen seiner Überlagerungspunkte auf $\tilde{F}$. Da wir Überlagerungsfolgen mit gemeinsamen Gebieten (nähmlich den G_n) betrachten, ist stets einer und nur einer der Punkte $\tilde{\tilde{z}}$ mit $\tilde{z}$ identisch.

Nun werde die Folge der algebraischen Funktionen α_n und β_n gebildet. — Sei $\alpha_n(z, b_n)$ für jedes n eine algebraische Funktion mit der Riemannschen Fläche A_{m_n}, die in $G_{n+1} - G_n$ den Punkt $\tilde{b}_n$ als Pol mit dem vorgeschriebenen Hauptteile, der mit $H(\alpha_n, \tilde{b}_n)$ bezeichnet werde, besitzt, und falls nötig noch einen einzigen Pol $\tilde{c}_n$ genügend hoher Ordnung, ausserhalb G_{n+1} aufweist. Nach Satz 1 können solche Funktionen immer gebildet werden.

Die Funktionenfolge $\{\beta_n\}$ bilden wir folgenderweise: Erstens sei z. B. $\beta_1 \equiv 0$, dann β_2 eine algebraische Funktion mit der Fläche A_{m_2} und welche die folgenden Eigenschaften besitzt:

1) Es sei für $\tilde{z} \in G_1 (\subset\subset G_2)$

$$|\alpha_2 - \beta_2| < \varepsilon_2 - \varepsilon_3.$$

2) Jeder Punkt $\tilde{\tilde{b}}_1$ auf A_{m_2}, dessen Grudpunkt $\tilde{b}_1$ (auf A_{m_1}) ist, mit Ausnahme des Punktes $\tilde{b}_1$ selbst, sei Pol von β_2 mit dem Hauptteile $H(\beta_2, \tilde{\tilde{b}}_1) = H(\alpha_1, \tilde{b}_1)$.

3) Jeder Punkt $\tilde{\tilde{c}}_1$, dessen Grundpunkt $\tilde{c}_1$ ist, sei Pol mit dem Hauptteile $H(\beta_2, \tilde{\tilde{c}}_1) = H(\alpha_1, \tilde{c}_1)$.

4) Da β_2 (nach Satz 3) im Allgemeinen noch weitere Pole aufweisen muss, seien dieselben ausserhalb G_3 gewählt und mit $\tilde{d}_{2,\lambda}$, $\lambda = 1, 2, \ldots, l_2$, bezeichnet; in jedem Komplementär-Kontinuum von G_3 mag sich ein Pol befinden. — Nach dem Satze 3 besteht β_2 immer.

Allgemein, β_n sei eine algebraische Funktion mit der Fläche A_{m_n}, welche die folgenden Eigenschaften besitzt:

1) Es sei für $\tilde{z} \in G_{n-1} (\subset\subset G_n)$

$$|\alpha_n - \beta_n| < \varepsilon_n - \varepsilon_{n+1}. \tag{10}$$

2) Jeder Punkt $\tilde{\tilde{b}}_\nu$ auf A_{m_n}, dessen Grundpunkt $\tilde{b}_\nu$ auf $A_{m_{n-1}}$ ist ($\tilde{b}_\nu \in G_n \subset A_{m_{n-1}}$), ausser $\tilde{b}_\nu$ selbst, jetzt als Punkt von A_{m_n} betrachtet, sei für $\nu = 1, 2, \ldots, n-1$ Pol von β_n mit dem Hauptteile $H(\beta_n, \tilde{\tilde{b}}_\nu) = H(\alpha_\nu, \tilde{b}_\nu)$.

3) Jeder Punkt $\tilde{\tilde{c}}_{n-1}$ sei Pol mit dem Hauptteile $H(\beta_n, \tilde{\tilde{c}}_{n-1}) = H(\alpha_{n-1}, \tilde{c}_{n-1})$.

4) Jeder Punkt $\tilde{\tilde{d}}_{n-1,\lambda}$, $\lambda = 1, 2, \ldots, l_{n-1}$, sei Pol mit dem Hauptteile $H(\beta_n, \tilde{\tilde{d}}_{n-1,\lambda}) = -H(\beta_{n-1}, \tilde{d}_{n-1,\lambda})$.

5) Die übrigen Pole von β_n seien ausserhalb G_{n+1} gewählt und mit $d_{n,\lambda}$, $\lambda = 1, 2, \ldots, l_n$, bezeichnet. — Nach dem Satze 3 besteht β_n immer.

Die Funktion $\alpha_1 - \beta_1$ ist eindeutig auf A_{m_1} und hat die Pole $\tilde{b}_1$ und c_1. Da A_{m_2}, Überlagerungsfläche von A_{m_1} ist, so ist $\alpha_1 - \beta_1$ eindeutig auch auf A_{m_2}, also ist auch die algebraische Funktion

$$(\alpha_1 - \beta_1) + (\alpha_2 - \beta_2) \tag{11}$$

eindeutig auf A_{m_2}. Da die Funktion $\alpha_1 - \beta_1$ die Pole $\tilde{b}_1$ und $\tilde{c}_1$ auf A_{m_1} hat, so hat sie, auf A_{m_2} betrachtet, Pole mit denselben Hauptteilen in allen Punkten $\tilde{\tilde{b}}_1$ und $\tilde{\tilde{c}}_1$, also hat (11), da sich die Hauptteile in allen diesen Punkten, ausser in b_1 aufheben, nur die Pole $\tilde{b}_1$, $\tilde{b}_2$, $\tilde{c}_2$ und $\tilde{d}_{2,\lambda}$, $\lambda = 1, 2, \ldots, l_2$.

Unter der Voraussetzung, dass

$$\sum_{\nu=1}^{n-1} (\alpha_\nu - \beta_\nu) \tag{12}$$

auf der Fläche $A_{m_{n-1}}$ eindeutig ist und die Pole $\tilde{b}_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots, n-1$, sowie $\tilde{c}_{n-1}$ und $\tilde{d}_{n-1, \lambda}$, $\lambda = 1, 2, \ldots, l_{n-1}$, besitzt, wollen wir das entsprechende auch für

$$\sum_{\nu=1}^{n} (\alpha_\nu - \beta_\nu) \tag{13}$$

beweisen. — In der Tat, (12) hat, als Funktion auf A_{m_n} betrachtet, Pole in den Punkten $\tilde{\tilde{b}}_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots, n-1$, $\tilde{\tilde{c}}_{n-1}$ und $\tilde{\tilde{d}}_{n-1, \lambda}$. Also hat (13), da sich die Hauptteile von (12) und von $\alpha_n - \beta_n$ in allen diesen Punkten, ausser in den Punkten $\tilde{b}_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots, n-1$, selber, (die wir jetzt auf A_{m_n} betrachten und die mit den ebenso bezeichneten Punkten von $A_{m_{n-1}}$ identisch sind) aufheben, nur die Pole $\tilde{b}_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$, $\tilde{c}_n$ und $\tilde{d}_{n, \lambda}$, $\lambda = 1, 2, \ldots, l_n$, die letzteren ausserhalb G_{n+1}.

Das bewiesene gilt aber, wie gesehen, tatsächlich für $n = 1, 2$, also gilt es für jedes n.

Sei nun Δ irgendein ganz in R enthaltenes Gebiet. Ist ε eine beliebig kleine positive Zahl, so besteht ein n_0, so dass für $n > n_0$ zugleich $\Delta \subseteq G_{n-1}$ und $\varepsilon_n < \varepsilon$ ist. Also ist für $\tilde{z} \in \Delta$, infolge der vorangehenden Bedingung 4, $\alpha_n - \beta_n$ eine in Δ eindeutige und reguläre Funktion und es ist

$$|\alpha_n - \beta_n| < \varepsilon_n - \varepsilon_{n+1},$$

folglich, für $n > n_0$, $r > 0$ und $\tilde{z} \in \Delta$

$$\left| \sum_{\nu=n}^{n+r} (\alpha_\nu - \beta_\nu) \right| \leqslant \sum_{\nu=n}^{n+r} |\alpha_\nu - \beta_\nu| < \varepsilon_n - \varepsilon_{n+r+1} < \varepsilon_n$$

und um so eher

$$\left| \sum_{\nu=n}^{n+r} (\alpha_\nu - \beta_\nu) \right| < \varepsilon,$$

wobei die Summe eine in Δ eindeutige und reguläre Funktion darstellt. Also ist die unendliche Reihe

$$\sum_{\nu=n}^{\infty} (\alpha_\nu - \beta_\nu)$$

in Δ gleichmässig konvergent und definiert daselbst eine eindeutige und reguläre Funktion.

Anderseits, da die algebraische Funktion (13) auf A_{m_n} eindeutig ist und R nach Satz ii Überlagerungsfläche von A_{m_n} ist, so ist (12) auch auf R eindeutig und besitzt in Δ eine endliche Anzahl von Polen, und zwar höchstens $\tilde{b}_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots, n-2$, da $\tilde{b}_{n-1}$, $\tilde{c}_{n-1}$ und $\tilde{d}_{n-1,\lambda}$ ausserhalb G_{n-1} fallen. Folglich ist

$$F(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} (\alpha_\nu - \beta_\nu)$$

eine in Δ eindeutige analytische Funktion, welche daselbst genau diejenigen Pole $\tilde{b}_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots$, aufweist, die innerhalb Δ liegen, und welche in denselben die gegebenen Hauptteile besitzt. In allen übrigen Punkten von Δ ist $F(z)$ regulär. Da Δ ein beliebiges, ganz in R enthaltenes Gebiet ist, ist damit der Satz VII bewiesen.

11. *EINE ERWEITERUNG DER WEIERSTRASSSCHEN PRODUKTENTWICKLUNG FÜR RIEMANNSCHE FLÄCHEN, WELCHE EINE SIE GRENZWEISE ENTHALTENDE ÜBERLAGERUNGSFOLGE GESCHLOSSENER, RIEMANNSCHER FLÄCHEN ZULASSEN.* — Bei der Übertragung der Weierstrassschen Produktentwicklung auf nichtgeschlossene Riemannsche Flächen, wobei die einzelnen Faktoren Funktionen auf geschlossenen Riemannschen Flächen darstellen sollen, entstehen Schwierigkeiten, die teilweise davon herrühren, dass auf nichtschlichtartigen Flächen keine algebraischen Funktionen mit nur einer einfachen Nullstelle bestehen können (so wie $(1 - z/a_n)$ in der Ebene). Wenn aber auch mehrere Nullstellen zugelassen werden, so kann man doch, wie es der Satz 1 zeigt, falls die Fläche keine schlichtartige ist, nicht alle Null- und Unendlichkeitsstellen einer algebraischen Funktion in vorgegebene Punkte setzen, was zur Bildung des unendlichen Produktes nötig wäre. Deswegen griffen wir schon im Satze VI zur Anwendung des Satzes 2 und tun es wiederum, indem wir an Stelle von $(1 - z/a_n)$ transzendente Funktionen setzen. Bei diesen können nähmlich alle Nullstellen und Singularitäten in vorgeschriebene Punkte gesetzt werden. Obwohl sich dadurch die Produktentwicklung erheblich kompliziert, beweisen wir dennoch den folgenden Satz, der dem Satze VII zur Seite gestellt werden kann:

SATZ VIII. — *Sei R eine nichtgeschlossene Riemannsche Fläche, die eine, sie grenzweise enthaltende Uberlagerungsfolge* $\{A_m\}$, $m = 1, 2, \ldots$, *geschlos-*

sener Riemannscher Flächen zulässt und sei $\{a_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, *eine Punktfolge auf* R, *die, falls* R *eigentliche Randpunkte aufweist, jeden solchen und nur einen solchen als Häufungspunkt, sonst aber keine Häufungspunkte besitzt. Sei ferner, dem Punkte* $\tilde{a}_n$ *entsprechend,* $\varphi_n(z, a_n)$ *irgendeine analytische Funktion, deren Riemannsche Fläche* A_{m_n} *ist, unter* m_n, $n = 1, 2, \ldots$, *eine geeignete monoton nichtabnehmende Folge natürlicher Zahlen verstanden, und die* $\tilde{a}_n$ *als einzige Nullstelle, vorgeschriebener Ordnung besitzt und ausser einer wesentlich singulären Stelle, auf* A_{m_n} *regulär ist.*

Es besteht dann eine analytische Funktion $F(z)$ *mit dem Existenzgebiete* R, *regulär auf* R, *wo sie die Punkte* $\tilde{a}_n$ *und nur diese als Nullstellen, una zwar mit den vorgeschriebenen Ordnungszahlen besitzt, und die in der Gestalt*

$$F(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \varphi_n(z, a_n) \cdot \chi_n(z) \cdot e^{-\psi_n(z)} \tag{14}$$

geschrieben werden kann, wobei χ_n *und* ψ_n *analytische Funktionen, deren Fläche* A_{m_n} *ist, bezeichnen, die erstere mit Polen und wesentlich singulären Stellen, aber keinen Nullstellen, die letztere, eine algebraische Funktion. Die wesentlichen Singularitäten von* φ_n *und* χ_n, *sowie die Pole von* χ_n *und* ψ_n *heben sich in den aufeinanderfolgenden Gliedern des Produktes* (14) *gegenseitig auf.*

Beweis. — Wiederum sei $\{G_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, eine durch den Satz 4 begründete Folge offener Gebiete von R, die R normal so ausschöpfen, dass $\tilde{a}_n \in G_{n+1} - G_n$ ist, und sei $\{A_{m_n}\}$, $n = 1, 2, \ldots$, $m_n \leqslant m_{n+1}$, aus $\{A_m\}$ so gebildet, dass $G_{n+1} \subset A_{m_n}$. Wir bilden gemäss dem Satze 2 die Funktionen φ_n und ψ_n mit folgenden Eigenschaften:

φ_n sei für jedes n eine auf A_{m_n} eindeutige Funktion, die $\tilde{a}_n$ als einzige Nullstelle, mit der gegebenen Ordnungszahl, und nur eine wesentlich singuläre Stelle $\tilde{c}_n$ besitzt, und zwar in jenem Komplementärgebiet von G_{n+1} (falls es deren mehrere gibt) welches $\tilde{a}_n$ enthält. Dann ist in G_n nicht nur φ_n regulär und von Null verschieden, sondern auch log φ_n ist eindeutig und regulär in G_n.

Ferner sei $\chi_1 \equiv 1$ und sei χ_2 eine auf A_{m_2} eindeutige Funktion mit den folgenden Eigenschaften:

1) Jeder Überlagerungspunkt $\tilde{\tilde{a}}_1$ auf A_{m_2}, des auf A_{m_1} gelegenen Punktes $\tilde{a}_1$, mit Ausnahme des auf A_{m_2} betrachteten Punktes $\tilde{a}_1$ selbst, sei Pol von χ_2, dessen Ordnungszahl gleich derjenigen ist, die der Nullstelle $\tilde{a}_1$ von φ_1 zukommt.

2) Jeder Überlagerungspunkt $\tilde{\tilde{c}}_1$ (auf A_{m_2}) des auf A_{m_1} gelegenen Punktes $\tilde{c}_1$ sei wesentlich singuläre Stelle von χ_2, und zwar so dass $\varphi_1 \chi_2$ auf A_{m_2} regulär in allen Punkten $\tilde{\tilde{c}}_1$ ist. Die Möglichkeit dieser Forderung sei weiter unten begründet.

3) χ_2 habe zusätzliche Pole $\tilde{h}_{2,\lambda}$, $\lambda = 1, 2, \ldots, l_2$, und zwar in jedem zu G_2 komplementären Kontinuum höchstens einen Pol. Diese Pole sollen, falls die Pole $\tilde{\tilde{a}}_1$ nicht genügen, χ_2 ermöglichen und, da die Singularitäten von χ_2 ausserhalb G_2 fallen, die Eindeutigkeit von log χ_2 in G_2, wie für χ_n gezeigt werden soll, herstellen.

Allgemein, für $n = 3, 4, \ldots$ sei χ_n eine auf A_{m_n} eindeutige Funktion mit den folgenden Eigenschaften:

1) Jeder Überlagerungspunkt $\tilde{\tilde{a}}_\nu$ auf A_{m_n}, der als Punkte von $A_{m_{n-1}}$ betrachteten Punkte $\tilde{a}_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots, n-1$, $(\tilde{a}_\nu \in G_{n-1} \subset A_{m_{n-1}})$ mit Ausnahme der als Punkte von A_{m_n} betrachteten Punkte $\tilde{a}_\nu$ selbst, sei Pol von χ_n, dessen Ordnungszahl gleich derjenigen ist, die der Nullstelle $\tilde{a}_\nu$ von φ_ν zukommt. Da $A_{m_{n-1}}$ und A_{m_n} das Gebiet G_n gemeinsam haben, befinden sich alle diese Pole $\tilde{\tilde{a}}_\nu$ auf A_{m_n} ausserhalb G_n.

2) Jeder Überlagerungspunkt $\tilde{\tilde{c}}_{n-1}$ des auf $A_{m_{n-1}}$ gelegenen Punktes $\tilde{c}_{n-1}$ sei eine wesentlich singuläre Stelle von χ_n und zwar so dass $\varphi_{n-1} \chi_n$ auf A_{m_n} regulär in allen $\tilde{\tilde{c}}_{n-1}$ ist.

Dass dies immer erreicht werden kann, folgt aus dem Beweise des Satzes 2, wo die jetzt mit φ_n und ψ_n bezeichnete Funktion φ in der Gestalt

$$\varphi = e^{J+K}$$

gewonnen worden ist und dabei

$$J = \int_{z_0}^{z} \alpha \, dz$$

ist. Setzt man nähmlich

$$\varphi_n = e^{J_n + K_n}, \quad \chi_n = e^{\overline{J}_n + \overline{K}_n}$$

und

$$J_n = \int_{z_0}^{z} \alpha_n \, dz, \quad \overline{J}_n = \int_{z_0}^{z} \overline{\alpha}_n \, dz,$$

wobei α_n, $\overline{\alpha}_n$ algebraische Funktionen und K_n, $\overline{K}_n$ Abelsche Integrale erster Gattung bedeuten, so ist

$$\varphi_{n-1} \, \chi_n = e^{\int (\alpha_{n-1} + \overline{\alpha}_n) \, dz + K_{n-1} + \overline{K}_n}$$

als eine auf A_{m_n} betrachtete und dort eindeutige Funktion, regulär in allen Punkten $\tilde{\tilde{c}}_{n-1}$, unter der Bedingung, dass sich daselbst die Pole von α_{n-1} und $\overline{\alpha}_n$ gegenseitig aufheben, d. h. dass

$$H(\overline{\alpha}_n, \tilde{\tilde{c}}_{n-1}) = - H(\alpha_{n-1}, \tilde{c}_{n-1})$$

ist. Da die Hauptteile von $\overline{\alpha}_n$ in ihren Polen frei gewählt werden können, kann die betrachtete Eigenschaft von χ_n immer gefordert werden.

3) χ_n habe zusätzliche Pole $\tilde{h}_{n,\lambda}$, $\lambda = 1, 2, \ldots, l_n$, und zwar in jedem zu G_{n+1} komplementären Kontinuum höchstens einen Pol. Diese Pole sollen, wie gezeigt werde, χ_n ermöglichen und die Eindeutigkeit von log χ_n in G_n herstellen.

4) χ_n habe die Punkte $\tilde{\tilde{h}}_{n-1,\lambda}, \lambda = 1, 2, \ldots, l_{n-1}$, als Nullstellen, deren Ordnungszahlen gleich denjenigen sind, die den Polen $\tilde{h}_{n-1,\lambda}$ zukommt. Durch diese Nullstellen sollen die Pole $\tilde{h}_{n-1,\lambda}$ von χ_{n-1} im Produkt $\chi_{n-1}\ \chi_n$ aufgehoben werden, was durch das Vorschreiben der Hauptteile von $\overline{\alpha}_n$, so dass

$$H(\overline{\alpha}_n, \tilde{\tilde{h}}_{n-1,\lambda}) = - H(\overline{\alpha}_{n-1}, \tilde{h}_{n-1,\lambda})$$

sei, immer erreicht werden kann.

Da die Hauptteile in den Polen $\tilde{\tilde{a}}_\nu$, $\tilde{\tilde{c}}_{n-1}$, $\tilde{\tilde{h}}_{n-1,\lambda}$ von $\overline{\alpha}_n$ vorgegeben sind, sind im Allgemeinen die Pole $\tilde{h}_{n,\nu}$ notwendig, aber auch hinreichend um $\overline{\alpha}_n$ und damit χ_n zu ermöglichen. Da die Punkte $\tilde{a}_\nu$, $\tilde{\tilde{c}}_{n-1}$, $\tilde{\tilde{h}}_{n-1,\lambda}$ und $\tilde{h}_{n,\lambda}$ auf A_{m_n} ausserhalb G_n liegen, ist log χ_n regulär in G_n. Damit

$$\log \chi_n = \int_{z_0}^{z} \overline{\alpha}_n \, dz + \overline{K}_n$$

in G_n auch eindeutig sei, soll die Summe der Residuen von $\overline{\alpha}_n$ in jedem auf A_{m_n} zu G_n komplementären Kontinuum $C_{n,\varkappa}$, $\varkappa = 1, 2, \ldots, k_n$, verschwinden, wobei die Singularitäten $\tilde{\tilde{a}}_\nu$ $(\neq \tilde{a}_\nu)$, $\tilde{\tilde{c}}_{n-1}$, $\tilde{\tilde{h}}_{n-1,\lambda}$ und $\tilde{h}_{n,\lambda}$ von $\overline{\alpha}_n$, die in $C_{n,\varkappa}$ fallen, in Betracht kommen. Dies ist aber immer möglich, da zu diesem Zwecke in jeder zu bestimmenden Funktion $\overline{\alpha}_n$ bloss eine genügend grosse Anzahl von willkürlichen Konstanten zur Verfügung stehen soll und gemäss dem Satze 1 die Ordnungszahlen der Pole $\tilde{h}_{n,\lambda}$ immer hoch genug gewählt werden können, damit die nötige Anzahl vorliege.

Nun bilden wir die Funktionen ψ_n. Erstens sei $\psi_1 \equiv 0$, dann ψ_2 eine algebraische Funktion mit der Riemannschen Fläche A_m und die die folgenden Eigenschaften hat:

1) Es sei für $\tilde{z} \in G_1$

$$|\log(\varphi_2 \chi_2) - \psi_2| < \varepsilon_2 - \varepsilon_3.$$

Dies ist gemäss dem Satze 3 immer möglich, da $\log \varphi_2$ und $\log \chi_2$ in G_1 regulär und eindeutig sind.

2) Die nötigen Pole von ψ_2 seien $\tilde{d}_{2,\mu}$, $\mu = 1, 2, \ldots, m_2$, ausserhalb G_2, in jedem komplementären Kontinuum von G_2 höchstens ein Pol.

Allgemein, für $n = 3, 4, \ldots$, sei ψ_n eine algebraische Funktion mit der Riemannschen Fläche A_{m_n} und die die folgenden Eigenschaften hat:

1) Es sei für $\tilde{z} \in G_{n-1}$

$$|\log(\varphi_n \chi_n) - \psi_n| < \varepsilon_n - \varepsilon_{n+1},$$

was gemäss dem Satze 3 immer möglich ist, da $\log \varphi_n$ und $\log \chi_n$ in G_{n-1} regulär und eindeutig sind.

2) Jeder Punkt $\tilde{\tilde{d}}_{n-1,\mu}$ sei Pol mit dem Hauptteile

$$H(\psi_n, \tilde{\tilde{d}}_{n-1,\mu}) = -H(\psi_{n-1}, \tilde{d}_{n-1,\mu}).$$

3) Die übrigen Pole von ψ_n seien ausserhalb G_n (sagen wir, in $G_{n+1} - G_n$) gewählt und mit $\tilde{d}_{n,\mu}$, $\mu = 1, 2, \ldots, m_n$, bezeichnet. Nach dem Satze 3 besteht ψ_n immer.

Die Funktion $\varphi_1 \chi_1 e^{-\psi_1}$ ist eindeutig auf A_{m_1}, hat die Nullstelle $\tilde{a}_1$ und die wesentlich singuläre Stelle $\tilde{c}_1$.

Da A_{m_2} Überlagerungsfläche von A_{m_1} ist, so ist $\varphi_1 \chi_1 e^{-\psi_1}$ eindeutig auch auf A_{m_2}, also ist auch

$$\varphi_1 \chi_1 e^{-\psi_1} \cdot \varphi_2 \chi_2 e^{-\psi_2} \tag{15}$$

eindeutig auf A_{m_2}. Da sich nach den Bedingungen 1 und 2, die χ_2 betreffen, alle von $\tilde{a}_1$ verschiedenen Nullstellen $\tilde{\tilde{a}}_1$ und alle singulären Stellen $\tilde{\tilde{c}}_1$ im Produkte $\varphi_1 \chi_2$ aufheben, hat die Funktion (15) bloss die Nullstellen $\tilde{a}_1$ und $\tilde{a}_2$, vorgeschriebener Ordnung und die Singularitäten $\tilde{c}_2$, $\tilde{h}_{2,\lambda}$ und $\tilde{d}_{2,\mu}$, die sich ausserhalb G_2 befinden.

Unter der Voraussetzung, dass

$$\prod_{\nu=1}^{n-1} \varphi_\nu \chi_\nu e^{-\psi_\nu} \tag{16}$$

auf der Riemannschen Fläche $A_{m_{n-1}}$ eindeutig ist und nur die Nullstellen $\tilde{a}_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots, n-1$, und die singulären Stellen $\tilde{c}_{n-1}$, $\tilde{h}_{n-1,\lambda}$, $\tilde{d}_{n-1,\mu}$ ($\lambda = 1, 2, \ldots, l_{n-1}$; $\mu = 1, 2, \ldots, m_{n-1}$) besitzt, beweisen wir das entsprechende auch für

$$\prod_{\nu=1}^{n} \varphi_\nu \chi_\nu e^{-\psi_\nu}. \tag{17}$$

Tatsächlich, (16) hat, als Funktion auf A_{m_n} betrachtet, Nullstellen in den Punkten $\tilde{\tilde{a}}_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots, n-1$, und ist singulär in den Punkten $\tilde{\tilde{c}}_{n-1}$, $\tilde{\tilde{h}}_{n-1,\lambda}$ $\tilde{\tilde{d}}_{n-1,\mu}$ also, da nach der Bedingung 1, die χ_n betrifft, alle Nullstellen, ausser $\tilde{a}_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots, n-1$, selbst, aufgehoben werden und nach den Bedingungen 2 und 3 für χ_n, und 2 für ψ_n, auch alle die genannten Singularitäten verschwinden, hat die Funktion (17) nur die wesentlich singulären Punkte $\tilde{c}_n$, $\tilde{d}_{n,\mu}$ und die Pole $\tilde{h}_{n,\lambda}$, alle ausserhalb G_n.

Da nun dasselbe, wie gesehen, tatsächlich für $n = 1, 2$, gilt, so gilt es für jedes n.

Sei nun Δ irgendein ganz in R enthaltenes Gebiet und ε eine beliebig kleine positive Zahl. Es besteht eine natürliche Zahl n_0, so dass für $n > n_0$ zugleich $\Delta \subseteq G_{n-1}$ und $\varepsilon_n < \varepsilon$ ist. Also ist $\varphi_n \chi_n e^{-\psi_n}$ für $n > n_0$ und $\tilde{z} \in \Delta$, da ihre Nullstellen und Singularitäten $\tilde{\tilde{a}}_\nu, \bar{a}_n, \tilde{\tilde{c}}_{n-1}, \tilde{c}_n$, $\tilde{\tilde{d}}_{n-1,\mu}$, $\tilde{d}_{n,\mu}$, $\tilde{\tilde{h}}_{n-1,\lambda}$, $\tilde{h}_{n,\lambda}$ ausserhalb G_{n-1} fallen und $G_{n-1} \subset A_{m_n}$, eine in Δ eindeutige und reguläre Funktion, und es ist in Δ

$$|\log(\varphi_n \chi_n) - \psi_n| < \varepsilon_n - \varepsilon_{n+1}.$$

Also, für $n > n_0$, $r > 0$ und $\tilde{z} \in \Delta$ ist

$$\left| \sum_{\nu=n}^{n+r} \left[\log(\varphi_\nu \chi_\nu) - \psi_\nu \right] \right| \leqslant \sum_{\nu=n}^{n+r} \left| \log(\varphi_\nu \chi_\nu) - \psi_\nu \right| < \varepsilon_n - \varepsilon_{n+r+1} < \varepsilon_n$$

und um so eher

$$\left| \sum_{\nu=n}^{n+r} [\log(\varphi_\nu \chi_\nu) - \psi_\nu] \right| < \varepsilon,$$

wobei die Summe eine in Δ eindeutige und reguläre Funktion darstellt. Also ist das unendliche Produkt

$$\prod_{\nu=n}^{\infty} \varphi_\nu \chi_\nu e^{-\psi_\nu}$$

in Δ gleichmässig konvergent und definiert daselbst eine eindeutige und reguläre Funktion. Da auch die Funktion (17) auf A_{m_n} eindeutig und regulär in Δ ist, so gilt dasselbe auch von

$$\prod_{\nu=1}^{\infty} \varphi_\nu \chi_\nu e^{-\psi_\nu}.$$

Da nun Δ ein beliebiges, ganz in R enthaltenes Gebiet ist, ist damit der Satz VIII bewiesen.

Die Sätze VII und VIII können, ebenso wie III und IV, auch auf eine endliche oder abzählbar unendliche Menge nichtgeschlossener Riemannscher Flächen erweitert werden. Auch liesse sich eine jede Funktion, welche die im Satze VII oder VIII genannten Eigenschaften besitzt, mittels einer Funktion derselben Art (wie bezüglich der Sätze V und VI bemerkt wurde) darstellen.

Schliesslich sei bemerkt, dass in allen unseren Sätzen (etwa mit Ausnahme von VIII) die behandelten Probleme mit in gewisser Hinsicht einfachsten Mitteln, mit Hilfe von verhältnismässig einfachen Funktionen, wie es die algebraischen sind, gelöst wurden.

(Eingegangen am 26. Oktober 1955)

LITERATURVERZEICHNIS

[1] P. Appell et E. Goursat — Théorie des Fonctions algébriques et de leurs intégrales. Paris 1929.

[2] H. Behnke und K. Stein — Entwicklung analytischer Funktionen auf Riemannschen Flächen. *Math Ann.*, **120** (1948).

[3] H. Florack — Reguläre und meromorphe Funktionen auf nichtgeschlossenen Riemannschen Flächen. *Schriftenreihe des Math. Inst. Münster* (1948).

[4] R. König und M. Krafft — Über Reihenentwicklung analytischer Funktionen. *Journ. für reine u. angew. Math.*, **154** (1925).

[5] ———————— Elliptische Funktionen, 1928.

[6] M. Radojčić — Sur l'approximation des fonctions analytiques multiformes par les fonctions algébriques. *C. R. de l'Acad. Paris* (1927).

[7] ———————— Un mode de représentation analytique des fonctions multiformes. *Glas Srp. Kr. Akad. Nauka*, **130**, Belgrade (1928) (serbisch mit französichem Auszug).

[8] ———————— Les fonctions analytiques représentées par les suites convergentes de fonctions algébriques, Thèse, Belgrade 1928 (serbisch mit französischem Auszug).

[9] ———————— Sur les séries de fonctions algébriques et les produits infinis analogues définissant des fonctions analytiques multiformes dans leurs domaines d'existence quelconques. *Publ. Inst. Math. Acad. Serbe Sci.* **VII** (1954).