mr Nebojša V. Ralević

Analitičke i numeričke metode za rešavanje graničnih problema za eliptičke parcijalne diferencijalne jednačine

doktorska disertacija

ОСНОВНА ОРГАНИЗАЦИЈА УДРУЖЕНОГ РАДА
ЗА МАТЕМАТИКУ, МЕХАНИКУ И АСТРОНОМИЈУ
БИБЛИОТЕКА
Број: Dokt. 201
Датум: 24.02.1987.

Beograd

1986.

Sadržaj

ОСНОВНА ОРГАНИЗАЦИЈА УДРУЖЕНОГ РАДА
ЗА МАТЕМАТИКУ, МЕХАНИКУ И АСТРОНОМИЈУ
БИБЛИОТЕКА

Број: ______

Датум: ______

Predmet proučavanja teorije graničnih problema za parcijalne diferencijalne jednačine je odredjivanje uslova egzistencije, jedinstvenosti i stabilnosti rešenja parcijalnih diferencijalnih jednačina na nekoj oblasti i nalaženje tih rešenja ako su zadati granični uslovi koje ta rešenja moraju da zadovolje na rubu date oblasti.

Iako se analitičke metode rešavanja graničnih problema prvenstveno baziraju na rezultatima teorije funkcija kompleksnih promenljivih, danas se, pri rešavanju graničnih problema raznih vrsta, koriste i rezultati funkcionalne analize, topologije, algebre i drugih matematičkih disciplina.

Teorijski značaj teorije graničnih problema ogleda se, pre svega, u njenom uticaju na razvoj teorije integralnih jednačina i teorije funkcionalnih jednačina.

Teorija graničnih problema za parcijalne diferencijalne jednačine ima brojne primene u mehanici, pre svega u dinamici fluida, teoriji filtracije, teoriji elastičnosti i elastoplastičnosti (prostiranje plastičnih talasa, talasa opterećenja i rasterećenja), teoriji elastičnih ljuski, rotacionih ljuski itd.

U poslednje vreme sve češće se sreću pokušaji da se teorija graničnih problema primeni i u ekonomiji, ekonometriji i medicini.

Ovaj rad sadrži nekoliko novih rezultata vezanih za analitičke i približne metode rešavanja nekih tipova graničnih problema za eliptičke parcijalne diferencijalne jednačine i sisteme jednačina.

U prvoj glavi dat je kratak pregled poznatih rezultata koji su neophodni za razumevanje i dokazivanje onoga što sledi. Naglasak je na klasičnim primenama kompleksne analize u rešavanju graničnih problema za analitičke funkcije.

Druga glava, pored pregleda poznatih rezultata vezanih za granične probleme za eliptičke sisteme parcijalnih diferencijalnih jednačina prvog reda Vekuinog tipa, sadrži i neke priloge tehnikama rešavanja graničnih problema Hilberta, Riemanna i Carlemana za eliptičke sisteme parcijalnih jednačina tipa Fempla, svodjenjem na granične probleme za analitičke funkcije.

Treća glava je posvećena p-analitičkim i (p,q)-analitičkim funkcijama koje je uveo G.N.Položij, i koje predstavljaju posebnu klasu uopštenih analitičkih funkcija. Koristeći neke od rezultata iz monografije [160] G.N.Položija, autor je uveo pojmove p-areolarnih polinoma, p-areolarnih redova i p-areolarnih diferencijalnih jednačina u kojima fugurišu p-areolarni izvodi diferencijabilnih kompleksnih funkcija u odnosu na tzv. spregnute promenljive pridružene karakteristici $p = p(x,y)$.

Autor je pokazao da, i pored toga što p-areolarni izvod nije operator diferenciranja, postoje mnoge sličnosti u rešavanju linearnih p-areolarnih diferencijalnih jednačina n-tog reda sa konstantnim koeficijentima i odgovarajućih običnih diferencijalnih jednačina, i da njihovo opšte rešenje zavisi od n proizvoljnih p-analitičkih funkcija. Pored toga autor daje i rešenja nekoliko graničnih problema tipa Hilberta i Riemanna za linearne p-areolarne diferencijalne jednačine n-tog reda sa konstantnim koeficijentima.

U četvrtoj glavi navedeni su osnovni podaci o klasifikaciji parcijalnih diferencijalnih jednačina višeg reda i graničnih problema za eliptičke parcijalne diferencijalne jednačine višeg reda. Takodje su opisane i primene Fourierovih transformacija u rešavanju takvih graničnih problema, beskonačni sistemi algebarskih linearnih jednačina i jednačine sa periodičnim koeficijentima. Ova glava sadrži i dva autorova priloga. Jedan od njih odnosi se na rešavanje specifičnih graničnih problema za eliptičke parcijalne jednačine drugog reda sa konstantnim koeficijentima, svodjenjem, primenom Fourierovih transformacija, na Riemannove i Carlemanove granične probleme za analitičke funkcije. Drugi prilog odnosi se na rešavanje graničnih problema za parcijalne diferencijalne jednačine sa periodičnim koeficijentima.

Peta glava posvećena je približnim metodama rešavanja graničnih problema za eliptičke parcijalne diferencijalne jednačine. Opisane su: metoda diferencnih shema, metoda pravih, metoda Monte-Carlo, varijacione metode i približno rešavanje graničnih problema pomoću tačnih rešenja probližnih problema. Takodje je dat i detaljan pregled pravaca razvoja numeričkih tehnika za rešavanje graničnih problema za parcijalne jednačine. Pored toga, autor je konstruisao i jedan primer približnog rešavanja jedne klase graničnih problema za (p,q)-analitičke funkcije pomoću diferencnih shema.

Sa osobitim zadovoljstvom koristim priliku da izrazim zahvalnost profesoru dr Milošu Čanku na potstreku da se posvetim izučavanju teorije graničnih problema i na nesebičnoj pomoći koju mi je pružio tokom pisanja disertacije. Brojni razgovori sa profesorom Čankom, njegove ideje, komentari i sugestije znatno su doprineli da disertacija dobije svoj konačni oblik.

Takodje se zahvaljujem profesorima dr Ljubomiru Protiću i dr Mioljubu Nikiću na korisnim primedbama koje su, svakako, doprinele da ovaj rad dobije u kvalitetu i preciznosti.

Svojoj supruzi Olgi dugujem zahvalnost ne samo na požrtvovanosti, strpljenju i neprestanim potstrecima, već i na velikoj pomoći koju mi je pružila tokom mukotrpnog tehničkog posla finalne obrade teksta.

I glava

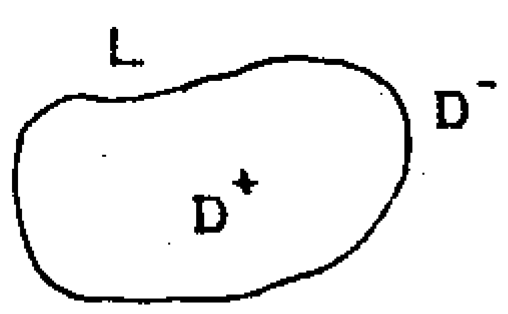
Granični problemi za analitičke funkcije

Teorija graničnih problema za analitičke funkcije sastoji se od metoda za odredjivanje vrednosti analitičkih funkcija ili nekih njihovih osobina na nekoj kompleksnoj oblasti, na osnovu funkcionalnih veza koje su date na rubu te oblasti.

U ovoj glavi su navedeni poznati rezultati teorije graničnih problema Dirichleta, Riemanna, Hasemana, Carlemana i Hilberta za funkcije kompleksne promenljive, kao i razna uopštenja ovih problema, njihova veza sa teorijom singularnih integralnih jednačina i teorijom Fourierovih transformacija.

1.1. Uvodni pojmovi

Neka je L neka zatvorena deo po deo glatka kontura (kriva bez samopreseka) u kompleksnoj ravni. Deo ravni ograničen krivom L koji se, pri kretanju tačke po krivoj L u pozitivnom smeru, nalazi s njene leve strane, označavaćemo sa D^+, a neograničenu oblast koja ostaje s desne strane označavaćemo sa D^- (slika 1.1).



Slika 1.1.

Ako je funkcija $f(z)$ analitička u D^+ i neprekidna na $D^+ + L$ sledi da je:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(\tau)}{\tau - z}\,d\tau = \begin{cases} f(z), & z \in D^+ \\ 0, & z \in D^-, \end{cases} \qquad (1.1.1)$$

a ako je $f(z)$ analitička u D^- i neprekidna na $D^- + L$, važi da je:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(\tau)}{\tau - z}\,d\tau = \begin{cases} f(\infty), & z \in D^+ \\ -f(z) + f(\infty), & z \in D^- . \end{cases} \qquad (1.1.2)$$

Formule (1.1.1) i (1.1.2) nazivaju se Cauchyjevim integralnim formulama . Integral na levim stranama jednakosti je Cauchyjev integral , funkcija $f(\tau)$ je gustina , a $[2\pi i(\tau - z)]^{-1}$ je jezgro Cauchyjevog integrala .

Cauchyjeva integralna formula predstavlja rešenje najjednostavnijeg graničnog problema odredjivanja vrednosti analitičke funkcije u nekoj oblasti ako su poznate vrednosti te funkcije na rubu oblasti.

Ako je L deo po deo glatka ne obavezno zatvorena kontura u konačnom delu ravni i $\varphi(\tau)$ neprekidna funkcija na L, tada se integral

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}\, d\tau \quad , \; z \notin L \tag{1.1.3}$$

naziva <u>integralom Cauchyjevog tipa</u>. Ovaj integral predstavlja analitičku funkciju u celoj ravni izuzev na krivoj L, pa je L singularna linija funkcije $\Phi(z)$.

Od svih uopštenja Cauchyjeve integralne formule [68] pomenućemo, zasada, samo uopštenje koje se odnosi na funkcije više kompleksnih promenljivih.

Neka je $f(z)$ analitička funkcija više kompleksnih promenljivih $z=(z_1,\dots, z_n)$ u zatvorenom polidisku D, $D = \{z \in \mathbb{C}^n: |z_\nu - a_\nu| \leq r_\nu,\ \nu=1,2,\dots,n\}$. Tada se u svakoj tački oblasti D funkcija $f(z)$ može predstaviti višestrukim Cauchyjevim integralom

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_T \frac{f(\tau)}{\tau - z}\, d\tau \tag{1.1.4}$$

gde je $T=\{\tau \in \mathbb{C}^n: |\tau_\nu - a_\nu| = r_\nu,\ \nu=1,2,\dots,n\}$ deo ruba polidiska D, $\tau=(\tau_1,\tau_2,\dots,\tau_n)$, $d\tau = d\tau_1 \dots d\tau_n$, $\tau - z = (\tau_1 - z_1)\dots(\tau_n - z_n)$.

Formula (1.1.4) se za $n = 1$ svodi na formulu (1.1.1), ali za $n>1$ integracija se ne vrši po celom rubu oblasti D već samo po njenoj "kičmi" T.

U teoriji graničnih problema najčešće ćemo se ograničavati na klasu funkcija koje zadovoljavaju Hölderov uslov.

Funkcija $\varphi(t)$ zadovoljava, na glatkoj krivoj L, <u>Hölderov uslov</u> ($\varphi \in H_\mu(L)$) ako je za proizvoljne dve tačke $t_1, t_2 \in L$

$$|\varphi(t_2) - \varphi(t_1)| \leq A \cdot |t_2 - t_1|^\mu , \tag{1.1.5}$$

gde su A i μ pozitivne konstante. Broj A naziva se <u>Hölderovom konstantom</u>, a $\mu \in (0,1]$ <u>Hölderovim eksponentom</u>.

Specijalno, ako je $\lambda = 1$, uslov Höldera poklapa se sa uslovom Lipschitza.

Ako je $\varphi(t)$ definisana na realnoj osi, Hölderov uslov se svodi na egzistenciju konstanti A i μ, $0<\mu\leq 1$, takvih da je za proizvoljne realne brojeve t_1 i t_2 zadovoljen uslov (1.1.5), i za proizvoljne brojeve po modulu veće od jedinice, uslov

$$|\varphi(t_2) - \varphi(t_1)| < A \left|\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2}\right| . \qquad (1.1.6)$$

Ako funkcije $\varphi_1(t)$ i $\varphi_2(t)$ na konturi L zadovoljavaju Hölderov uslov sa eksponentima μ_1 i μ_2 respektivno, tada i funkcije $\varphi_1 + \varphi_2$, $\varphi_1 - \varphi_2$, $\varphi_1 \cdot \varphi_2$ i φ_1/φ_2 $(\varphi_2 \neq 0)$, takodje zadovoljavaju Hölderov uslov sa eksponentom $\mu = \min(\mu_1, \mu_2)$.

Hölderov uslov značajan je, pre svega, zbog toga što obezbedjuje egzistenciju nesvojstvenog integrala Cauchyjevog tipa u smislu njegove glavne vrednosti.

Neka su τ i t kompleksne koordinate tačaka glatke krive L koja nije obavezno zatvorena. Konstruišemo kružnicu radijusa r sa centrom u t, i neka su t_1 i t_2 jedine tačke u kojima ta kružnica seče krivu L (slika 1.2). Označimo sa l luk krive L koji se nalazi unutar konstruisane kružnice. Tada se

$\lim\limits_{r \to 0} \int\limits_{L-l} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau$ naziva <u>glavnom vrednošću</u> nesvojstvenog integrala $\int\limits_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau$ funkcije $\varphi(\tau)$ definisane na L.

<u>Slika 1.2.</u>

<u>Teorema 1.1.1.</u> [71] Ako funkcija $\varphi(\tau)$ zadovoljava na L Hölderov uslov, nesvojstveni integral $\int\limits_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau$ postoji u smislu svoje glavne vredosti i važi da je:

$$\int\limits_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau = \int\limits_L \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau - t} d\tau + \begin{cases} \varphi(t) \cdot \ln \dfrac{b - t}{t - a} & , a \neq b \\ i\pi\varphi(t) & , a = b \end{cases} \qquad (1.1.7)$$

gde su a i b krajnje tačke krive L.

Pritom je funkcija $\psi(z) = \int\limits_L \frac{\varphi(\tau) - \varphi(z)}{\tau - z} d\tau$ neprekidna u $z = t$.||

Cela klasična teorija graničnih problema za analitičke funkcije bazira se na formulama Plemelja-Sohockog.

Neka je L deo po deo glatka zatvorena kriva u komleksnoj ravni i neka su oblasti D^+ i D^- kao na slici 1.1. Označimo sa $\Phi^+(t)$ graničnu vrednost analitičke funkcije $\Phi(z)$ kada tačka z teži $t \in L$ i $z \in D^+$, a sa $\Phi^-(t)$ graničnu vrednost funkcije $\Phi(z)$ kada z teži $t \in L$ i $z \in D^-$.

Ako kontura nije zatvorena, ovo su oznake za granične vrednosti funkcije $\Phi(z)$ sleva i zdesna od L, respektivno.

Vrednost funkcije $\Phi(z)$ u tački $t \in L$ označimo sa $\Phi(t)$, gde je $\Phi(t)$ oznaka za nesvojstveni integral $\frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau$

u smislu glavne vrednosti.

Ako je $\varphi(\tau)$ funkcija na konturi L koja zadovoljava Hölderov uslov, tada integral Cauchyjevog tipa $\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}\,d\tau$ ima granične vrednosti $\Phi^+(t)$ i $\Phi^-(t)$ u svim tačkama konture L, koje nisu njeni krajevi, kada z teži $t \in L$ sleva i zdesna, respektivno, po proizvoljnom putu, i te granične vrednosti se izražavaju preko gustine $\varphi(t)$ i nesvojstvenog integrala $\Phi(t)$, pomoću <u>formula Plemelja-Sohockog</u> [146]:

$$\Phi^+(t) = \frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau$$

$$\Phi^-(t) = -\frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau . \tag{1.1.8}$$

Iz (1.1.8) sledi da je:

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = \varphi(t) \tag{1.1.9}$$

$$\Phi^+(t) + \Phi^-(t) = \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau . \tag{1.1.10}$$

Iako su granične vrednosti $\Phi^+(t)$ i $\Phi^-(t)$ neprekidne na L, u opštem slučaju se one razlikuju i, na osnovu (1.1.9), sledi da funkcija $\Phi(z)$ pri prelazu preko konture L pravi skok jednak vrednosti funkcije $\varphi(t)$.

Pod uslovom da funkcija $\varphi(t)$ na realnoj osi zadovoljava Hölderov uslov u smislu formula (1.1.5) i (1.1.6), sledi da su:

$$\Phi^+(t) = \frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau$$

$$\Phi^-(t) = -\frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau \tag{1.1.11}$$

<u>formule Plemelja-Sohockog za realnu pravu</u>, gde su $\Phi^+(t)$ i $\Phi^-(t)$ granične vrednosti funkcije $\Phi(z)$ kada z teži $t \in Ox$, respektivno, sa gornje, odnosno donje poluravni.

Formule Plemelja-Sohockog daju, izmedju ostalog, rešenje <u>graničnog problema skoka</u> :

Neka je na zatvorenoj konturi L koja deli ravan na oblasti D^+ i D^- (slika 1.1) data funkcija $\varphi(t) \in H_\mu(L)$. Naći deo po deo analitičku funkciju $\Phi(z)$, oblika:

$$\Phi(z) = \begin{cases} \Phi^+(z) , & z \in D^+ \\ \Phi^-(z) , & z \in D^- \end{cases} \tag{1.1.12}$$

takvu da je:

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = \varphi(t)\ ,\ t\in L\ . \tag{1.1.13}$$

Direktno iz (1.1.9) i (1.1.10) sledi da je tražena funkcija

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}\, d\tau\ . \tag{1.1.14}$$

Nije svaka funkcija $\varphi(t)$, definisana na konturi L, granična vrednost neke analitičke funkcije u oblasti D^+ ili D^-. Uslove pod kojima ona to jeste daje nam:

<u>Teorema 1.1.2.</u> Neka je na glatkoj zatvorenoj konturi L data kompleksna funkcija $\varphi(t)$ koja zadovoljava Hölderov uslov. Funkcija $\varphi(t)$ je granična vrednost funkcije analitičke u unutrašnjoj oblasti D^+, ako i samo ako je ispunjen uslov

$$-\frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\, d\tau = 0\ . \tag{1.1.15}$$

Funkcija $\varphi(t)$ je granična vrednost funkcije analitičke u spoljnoj oblasti D^- i $\varphi(\infty)=\Gamma$, ako i samo ako je ispunjen uslov

$$\frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\, d\tau - \Gamma = 0\ .\,!! \tag{1.1.16}$$

Formule Plemelja-Sohockog omogućuju da se dokaže sledeće tvrdjenje.

Neka je $\varphi(t)$ funkcija tačaka zatvorene konture L, čiji m-ti izvod $\varphi^{(m)}(t)$ zadovoljava Hölderov uslov. Tada je:

$$\Phi^{(m)+}(t) = \frac{1}{2}\varphi^{(m)}(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi^{(m)}(\tau)}{\tau - t}\, d\tau, \tag{1.1.17}$$

$$\Phi^{(m)-}(t) = -\frac{1}{2}\varphi^{(m)}(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi^{(m)}(\tau)}{\tau - t}\, d\tau\ . \tag{1.1.18}$$

Pritom važi da je:

$$[\Phi^{\pm}(t)]^{(m)} = [\Phi^{(m)}(t)]^{\pm}\ , \tag{1.1.19}$$

gde je

$$\Phi^{(m)}(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi^{(m)}(\tau)}{\tau - t}\, d\tau\ . \tag{1.1.20}$$

Granične vrednosti $\Phi^+(t)$ i $\Phi^-(t)$ integrala Cauchyjevog tipa nisu samo neprekidne na konturi L, već zadovoljavaju i Hölderov uslov. Takodje važi i sledeća teorema.

<u>Teorema 1.1.3.</u> [68] Ako funkcija $\varphi(t)$ na glatkoj konturi L zadovoljava Hölderov uslov sa eksponentom μ, tada i funkcija

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\, d\tau$$

zadovoljava Hölderov uslov sa istim eksponentom ako je $\mu<1$, i sa eksponentom $1 - \varepsilon$, gde je ε proizvoljno mali pozitivan broj, ako je $\mu = 1$.||

U osnovama svih tehnika rešavanja graničnih problema za analitičke funkcije leži teorema o analitičkom produženju .

Teorema 1.1.4. Neka se oblasti D_1 i D_2 graniče duž neke glatke krive L i neka su u oblastima D_1 i D_2 date analitičke funkcije $f_1(z)$ i $f_2(z)$. Ako su granične vrednosti, kada z teži $t \in L$, tih funkcija jednake na konturi L, onda su funkcije $f_1(z)$ i $f_2(z)$ uzajamna analitička produženja.||

Teorema 1.1.5. (Uopštenje Liouvilleove teoreme)

Neka je $f(z)$ analitička funkcija na celoj kompleksnoj ravni sa izuzetkom tačaka $a_0 = \infty$, a_k $(k = 1, 2, ..., n)$ u kojima ima polove, pri čemu je glavni deo razlaganja funkcije $f(z)$ u Laurentov red u okolinama polova:

$$G_0(z) = C_1 \cdot z + C_2 \cdot z^2 + \cdots + C_m \cdot z^m$$

$$G_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right) = \frac{C_1}{z - a_k} + \frac{C_2}{(z - a_k)^2} + \cdots + \frac{C_m}{(z - a_k)^m} .$$

Tada je funkcija $f(z)$ racionalna i može se predstaviti formulom:

$$f(z) = C + G_0(z) + \sum_{k=1}^{n} G_k\left(\frac{1}{z - a_k}\right) \qquad (1.1.21)$$

gde je $C \in \mathbb{C}$.

Specijalno, ako je jedinstveni singularitet funkcije $f(z)$ pol reda m u $z = \infty$, funkcija $f(z)$ je polinom stepena m:

$$f(z) = C_0 + C_1 z + C_2 z^2 + \ldots + C_n z^m \text{ .||} \qquad (1.1.22)$$

1.2. Fourierove transformacije

Rešavajući granične probleme za sisteme linearnih parcijalnih diferencijalnih jednačina prvog reda i eliptičke parcijalne diferencijalne jednačine višeg reda na neograničenim oblastima, često ćemo koristiti tehnike Fourierovih transformacija.

Neka je $f(t) \in L_2(-\infty, \infty)$, gde je $L_2(-\infty, \infty)$ klasa funkcija čiji je kvadrat integrabilan po Lebesgueu. Integral

$$Vf = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{ixt} dt = F(x) \; , \; -\infty < x < \infty \qquad (1.2.1)$$

naziva se Fourierovom transformacijom (Fourierovim integralom) originala $f(t)$.

Dokazuje se [71] da slika $F(x)$ pripada klasi $L_2(-\infty,\infty)$ i da je operator V linearan.

Integral

$$(V^{-1}F)(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(x)e^{-ixt}dx = f(t) \tag{1.2.2}$$

naziva se <u>inverznom Fourierovom transformacijom</u> .

Pritom je V neprekidan i ograničen operator koji realizuje uzajamno jednoznačnu korespondenciju izmedju originala i slika Fourierove transformacije.

Označimo sa {{O}} klasu funkcija-slika Fourierove transformacije $F(x)$ koje pripadaju $L_2(-\infty, \infty)$ i zadovoljavaju Hölderov uslov, a sa {O} klasu funkcija-originala $f(t)$ čiji Fourierovi integrali pripadaju klasi {{O}}.

Dovoljan uslov da $f(t) \in \{O\}$ je, na primer, da $f(t) \in L_2(-\infty,\infty)$ i $t \cdot f(t) \in L(-\infty,\infty)$.

Integral

$$(f*g)(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t-s)g(s)ds = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(t-u)du \tag{1.2.3}$$

naziva se <u>konvolucijom</u> funkcija $f(t)$ i $g(t)$.

Fourierove transformacije imaju, pored ostalih, i sledeće osobine [71]:

1. <u>Formula konvolucije</u> :

$$V(fg) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(x-s)G(s)ds = F*G , \tag{1.2.4}$$

gde je $F(x) = Vf(t)$ i $G(x) = Vg(t)$.

2. <u>Fouriérov integral konjugovane kompleksne funkcije</u> :

$$(V\overline{f(t)})(x) = \overline{F(-x)} \quad \text{ili} \quad V^{-1}\overline{F(x)} = \overline{f(-t)} . \tag{1.2.5}$$

3. <u>Pomak originala</u> . Ako je $\eta \in \mathbb{R}$, tada je

$$Vf(t-\eta) = e^{i\eta x}F(x) \quad \text{ili} \quad V^{-1}(e^{i\eta x} \cdot F(x)) = f(t-\eta). \tag{1.2.6}$$

4. <u>Pomak slike</u> :

$$V(e^{-i\eta t}f(t)) = F(x-\eta) \quad \text{ili} \quad V^{-1}F(x-\eta) = e^{-i\eta t}f(t). \tag{1.2.7}$$

5. Ako je $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$, tada važi:

$$Vf(\lambda t) = F(x/\lambda)/|\lambda| . \tag{1.2.8}$$

Specijalno, za $\lambda = -1$ je:

$$Vf(-t) = F(-x) . \tag{1.2.9}$$

6. <u>Fourieorov integral slike</u> :

$$VF(t) = f(-x) \quad \text{ili} \quad (V^2f(t))(x) = f(-x) . \tag{1.2.10}$$

7. <u>Transformacija izvoda originala</u> . Ako je original $f(t)$ n puta diferencijabilan i ako svi njegovi izvodi pripadaju klasi {O}, tada je:

$$Vf^{(k)}(t) = (-ix)^kF(x), \ k = 1, 2, \ldots , n . \tag{1.2.11}$$

8. Ako je $t^n f(t)\in\{0\}$, tada:

$$V(t^k f(t)) = (-i)^k F^{(k)}(x), \quad k = 1, 2, \ldots, n . \tag{1.2.12}$$

9. <u>Fourierova transformacija izvoda po parametru</u>. Neka original zavisi od parametra λ, $f = f(t,\lambda)$. Tada je:

$$V \frac{\partial^m}{\partial \lambda^m} f(t,\lambda) = \frac{\partial^m}{\partial \lambda^m} F(x,\lambda) . \tag{1.2.13}$$

<u>Teorema 1.2.1.</u> Funkcija $F(x)\in L_2(-\infty,\infty)$, definisana na realnoj osi, je granična vrednost funkcije $F^+(z)$, $(F^-(z))$, analitičke na gornjoj (donjoj) poluravni, tako da je

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F^{\pm}(x + iy)|^2 dx < M, \tag{1.2.14}$$

gde M ne zavisi od y, ako i samo ako je njen original $f(t)$ jednak nuli na negativnom (pozitivnom) delu x ose.!!

Pritom se integral

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{izt}dt , \tag{1.2.15}$$

gde je $z = x + iy$, takodje naziva Fourierovim integralom.

Ako su ispunjeni uslovi teoreme 1.2.1, dokazano je [71] da je:

$$F^+(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{izt}dt , \tag{1.2.16}$$

i

$$F^-(z) = \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{izt}dt . \tag{1.2.17}$$

Integral (1.2.16) naziva se desnim, a integral (1.2.17) levim Fourierovim integralom funkcije $f(t)$. Pritom kažemo da:

$$F^+(x)\in\{\{0,+\infty\}\} \quad \text{i} \quad F^-(x)\in\{\{-\infty,0\}\}.$$

S obzirom da granične vrednosti $F^+(x)$ i $F^-(x)$ zadovoljavaju Hölderov uslov [136], sledi da je $\{\{0,+\infty\}\} \subset \{\{0\}\}$ i $\{\{-\infty,0\}\} \subset \{\{0\}\}$.

Za $f(t)\in\{0\}$, funkcije

$$f_+(t) = \begin{cases} f(t) & , t>0 \\ 0 & , t<0 \end{cases} \quad \text{i} \quad f_-(t) = \begin{cases} 0 & , t>0 \\ -f(t) & , t<0 \end{cases} \tag{1.2.18}$$

nazivamo <u>desnom</u> i <u>levom jednostranom funkcijom</u> funkcije $f(t)$, respektivno. Klasu desnih jednostranih funkcija označavamo sa $\{0,\infty\}$, a klasu levih sa $\{-\infty,0\}$. Očito je $\{-\infty,0\}$, $\{0,\infty\} \subset \{0\}$.

<u>Teorema 1.2.2.</u> Fourierovi integrali desnih i levih jednostranih funkcija su granične vrednosti funkcija analitičkih u gornjoj i donjoj poluravni respektivno, tj. da bi originali pripadali klasi $\{0,\infty\}$ (ili $\{-\infty,0\}$), neophodno je i dovoljno da njihove slike budu u $\{\{0,\infty\}\}$ (ili $\{\{-\infty,0\}\}$).!!

Tako, i za Fourierove integrale dobijamo formule analogne formulama Plemelja-Sohockog:

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{ixt}dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} f(t)e^{ixt}dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} f(t)e^{ixt}dt =$$

$$= F^{+}(x) - F^{-}(x) \text{ , i} \tag{1.2.19}$$

$$\frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(t)}{t - x} dt = F^{+}(x) + F^{-}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\operatorname{sgn} t \cdot e^{ixt}dt . \tag{1.2.20}$$

Formula (1.2.20) može se napisati i na sledeći način:

$$V(f(t)\cdot\operatorname{sgn} t) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\tau)}{\tau - x} d\tau \quad \text{ili} \quad V^{-1}\left(\frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\tau)}{\tau - t} d\tau\right) =$$

$$= f(t)\cdot\operatorname{sgn} t . \tag{1.2.21}$$

1.3. Dirichletov granični problem

Neka je D prostopovezana konačna oblast u kompleksnoj ravni čiji je rub $L = \partial D$ glatka zatvorena kriva.

Funkcija $u(z)$ definisana i dva puta neprekidno diferencijabilna u oblati D je harmonijska ako zadovoljava jednačinu:

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 . \tag{1.3.1}$$

Poznato je da su realni i imaginarni deo funkcije $f(z) = u(x,y) + i\cdot v(x,y)$, analitičke u oblasti D, harmonijske funkcije koje zadovoljavaju Cauchy-Riemannove uslove:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{i} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{1.3.2}$$

Harmonijske funkcije $u(x,y)$ i $v(x,y)$ koje zadovoljavaju (1.3.2) nazivaju se konjugovanim harmonijskim funkcijama .

Klasični granični problem teorije analitičkih funkcija je:
Schwartzov problem Naći funkciju $f(z) = u(x,y) + i\cdot v(x,y)$, analitičku na oblasti D, čiji realni deo ima na rubu L oblasti D zadatu vrednost $u(s)$.!!

Ovaj granični problem svodi se na:
Dirichletov problem Neka je na rubu L oblasti D data neprekidna funkcija $u(s)$, $s \in L$. Naći funkciju $u(x,y)$ neprekidnu na D+L i harmonijsku u D koja na L ima vrednost jednaku $u(s)$.!!

Kada već imamo rešenje $u(z)$ Dirichletovog problema, korišćenjem relacija (1.3.2), dobija se i konjugovana harmonijska funkcija $v(z)$ sa tačnošću do na kompleksnu konstantu.

Za rešavanje Schwartzovog graničnog problema potrebno je uvesti pojam Schwartzovog operatora.

Ako je na glatkoj konturi L data neka realna funkcija $u(s)$ koja zadovoljava Hölderov uslov, operator koji primenjen na funkciju $u(s)$ daje analitičku funkciju $f(z) = u(x,y)+iv(x,y)$ za koju se granična vrednost njenog realnog dela na konturi L poklapa sa $u(s)$, a imaginarni deo je u datoj tački z_0 jednak nuli, naziva se <u>operatorom Schwartza</u> .

Ako je kontura L jedinična kružnica, Schwartzov operator se poklapa sa <u>integralom Schwartza</u>

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\sigma)\cdot\frac{e^{i\sigma}+z}{e^{i\sigma}-z}\,d\sigma + i\cdot v_0 , \tag{1.3.3}$$

gde je σ dužina luka krive L od tačke preseka kružnice s pozitivnim smerom x ose, funkcija $\frac{e^{i\sigma}+z}{e^{i\sigma}-z}$ je tzv. <u>Scwartzovo jezgro</u> , a $iv_0 = iv(0,0) = \frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(\sigma)d\sigma$ je imaginarna konstanta.

U ovom slučaju, primenom formula Plemelja-Sohockog i elementarnim transformacijama dobijamo, takodje, vezu koja postoji izmedju graničnih vrednosti $u(s)$ i $v(s)$ funkcija $u(x,y)$ i $v(x,y)$ na konturi L:

$$v(s) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\sigma)\cdot\mathrm{ctg}\,\frac{\sigma-s}{2}\,d\sigma + v_0, \qquad v_0 = v(0,0) \tag{1.3.4}$$

i

$$u(s) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(\sigma)\cdot\mathrm{ctg}\,\frac{\sigma-s}{2}\,d\sigma + u_0 , \qquad u_0 = u(0,0). \tag{1.3.5}$$

Formule (1.3.4) i (1.3.5) nazivaju se <u>Hilbertovim formulama transformacije</u> , a izraz $\mathrm{ctg}\,\frac{\sigma-s}{2}$ - <u>Hilbertovim jezgrom</u> .

Ako je kontura L jednaka realnoj osi, Schwartzov operator se svodi na integral Cauchyjevog tipa.

Za proizvoljnu konturu L, Schwartzov operator se u eksplicitnom obliku dobija pomoću <u>Greenove funkcije</u> Laplaceovog operatora u oblasti D^+ :

$$G(x,y;\xi,\eta) = \ln\,(1/r) + g(x,y;\xi,\eta) \tag{1.3.6}$$

gde je $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$, a $g(x,y;\xi,\eta)$ harmonijska funkcija po oba para promenljivih x, y i ξ, η koja ima vrednost $\ln r$ kadgod je jedna od tačaka (x,y) ili (ξ,η) na konturi L.

Kada funkciju $G(x,y;\xi,\eta)$ posmatramo kao funkciju dve kompleksne promenljive $z = x + i\cdot y$ i $\zeta = \xi + i\cdot\eta$ u oblasti D^+, rešenje Dirichletovog problema dobija se pomoću formule

$$u(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\ell} \frac{\partial G(z,\tau)}{\partial n}\cdot u(\sigma)\, d\sigma \qquad (1.3.7)$$

poznate iz teorije harmonijskih funkcija, gde je $\tau = \tau(\sigma)$ kompleksna koordinata tačke konture i n unutrašnja normala.

Pomoću Cauchy-Riemannovih uslova (1.3.2) dobijamo da je

$$H(z,\zeta) = \int_{z_0}^{z} \left(-\frac{\partial G}{\partial y}\, dx + \frac{\partial G}{\partial x}\, dy\right) \qquad (1.3.8)$$

harmonijska funkcija konjugovana funkciji $G(z,\zeta)$ po promenljivoj z, gde je z_0 fiksirana tačka u D^+.

Kako je D^+ prostopovezana oblast, funkcija H je odredjena jednoznačno i $H(z_0,\zeta) = 0$.

Funkcija $M(z,\zeta) = G(z,\zeta) + i\cdot H(z,\zeta)$ naziva se <u>kompleksnom Greenovom funkcijom oblasti D^+</u> . Ona je analitička po z osim u $z = \zeta$ gde ima logaritamski singularitet.

Iz svega navedenog sledi da je Schwartzov operator odredjen formulom:

$$Su = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\ell} \frac{\partial M(z,\tau)}{\partial n}\cdot u(\sigma)\, d\sigma \qquad (1.3.9)$$

i daje traženo rešenje Schwartzovog graničnog problema:

$$F(z) = Su + i\cdot\beta_0 \qquad (1.3.10)$$

gde je β_0 proizvoljna konstanta jednaka $v(z_0)$.

Funkcija $T(z,\tau) = \dfrac{\partial M(z,\tau)}{\partial n}$ naziva se <u>Schwartzovim jezgrom</u> za konturu L.

Pomenimo još dva granična problema koji predstavljaju prirodno uopštenje Schwartzovog graničnog problema [68].

<u>Granični problem A_∞</u> : Data je prosta, zatvorena, glatka kontura L koja predstavlja rub prostopovezane oblasti D^+. Odrediti funkciju $Q(z)$, analitičku svuda u oblasti D^+ izuzev u $z_0 \in D^+$ gde ima pol reda ne višeg od n, i čiji realni deo $u(x,y)$ na konturi L ima vrednost nula, $(u(s) \equiv 0,\ s \in L)$.!!

Ako je oblast D^+ jedinični krug i $z_0 = 0$, tražena funkcija je oblika

$$Q(z) = i\beta_0 + \sum_{k=1}^{n} (c_k z^k - \bar{c}_k z^{-k}) \qquad (1.3.11)$$

gde su β_0 , $c_k = \alpha_k + i\beta_k$, $(k=1,\ldots,n)$ proizvoljne konstante.

Ako umesto unutrašnje oblasti D^+ problem rešavamo na spoljnoj oblasti D^-, i ako zahtevamo da funkcija ima pol u $z_0 =$

$= \infty$, rešenje je, takodje, oblika (1.3.11).

Rešenje problema A_0 za proizvoljnu oblast i za jedinični krug sa polom u tački $z_0 \neq 0$, dobija se iz (1.3.11) pomoću konformnog preslikavanja. Pretpostavimo da funkcija $w = w(z)$ konformno preslikava oblast D^+ ravni z na jedinični krug ravni w tako da je $w(z_0) = 0$ i $w'(z_0)>0$. Tada formula

$$Q(z) = i\beta_0 + \sum_{k=1}^{n} \{ c_k[w(z)]^k - \bar{c}_k[w(z)]^{-k}\} \qquad (1.3.12)$$

daje rešenje problema A_0 za proizvoljnu oblast D^+.

Ako $w(z)$ konformno preslikava oblast D^- na oblast koja u ravni w predstavlja komplement jediničnog kruga i prevodi beskonačno udaljenu tačku u beskonačno udaljenu tačku, pri čemu je $w'(\infty)>0$, formula (1.3.12) predstavlja rešenje problema A_0 za oblast D^-.

Granični problem A : Data je prosta, glatka, zatvorena kriva L koja predstavlja rub unutrašnje prostopovezane oblasti D^+. Odrediti funkciju $F(z)$ analitičku u oblasti D^+ svuda osim u $z_0 \in D^+$ gde ima pol reda ne višeg od n, čiji realni deo $u(x,y)$ na konturi L ima datu vrednost $u(s)$, $s \in L$.!!

Rešenje graničnog problema A je:

$$F(z) = Su + Q(z) \qquad (1.3.13)$$

gde je S Schwartzov operator (1.3.9), a $Q(z)$ rešenje graničnog problema A_0 (1.3.12).

O Dirichletovom problemu i srodnim graničnim problemima biće znatno više reči u narednim glavama.

1.4. Indeks funkcije

U skoro svim postupcima rečavanja graničnih problema za analitičke funkcije ključnu ulogu igra pojam indeksa funkcije poznat iz teorije kompleksnih funkcija.

Pojam indeksa funkcije je od velikog značaja i za druge matematičke discipline, a naročito za algebarsku topologiju.

Neka je L glatka, zatvorena kontura i $G(t)$ neprekidna funkcija definisana na L, različita od nule za svako $t \in L$.

Označimo sa $[G(t)]_L$ promenu vrednosti neke funkcije $G(t)$ definisane na L, kada tačka t obidje konturu L u pozitivnom smeru. Indeks funkcije $G(t)$ na konturi L je priraštaj argumenta funkcije $G(t)$ podeljen sa 2π pri obilasku cele konture L u pozitivnom smeru. Indeks funkcije $G(t)$ na L označimo sa:

$$\kappa = \text{Ind } G(t) = \frac{1}{2\pi} [\arg G(t)]_L \tag{1.4.1}$$

U ovom obliku je dosta teško izračunati indeks funkcije $G(t)$. Kako je Ind $G(t)$ veoma važan podatak pri rešavanju graničnih problema koji slede, pozabavićemo se detaljnije njegovim osobinama i metodama njegovog efektivnog izračunavanja.

Dokazano je u [68] da važe sledeće relacije:

$$\kappa = \frac{1}{2\pi i} [\ln G(t)]_L , \tag{1.4.2}$$

$$\kappa = \frac{1}{2\pi i} \int_L d \ln G(t) , \tag{1.4.3}$$

gde se redi o Stieltjesovom integralu.

Kako ćemo često granične probleme posmatrati na poluravni, potrebna nam je definicija indeksa funkcije definisane na realnoj pravoj $y = 0$.

Označimo simbolom $[\varphi(t)]_{-\infty}^{\infty}$ promenu vrednosti funkcije $\varphi(t)$ kada tačka t obidje realnu osu krećući se u njenom pozitivnom smeru, tj. $[\varphi(t)]_{-\infty}^{\infty} = \varphi(\infty) - \varphi(-\infty)$.

Indeks neprekidne i različite od nule funkcije $G(t)$, $-\infty<t<\infty$, $(G(-\infty) = G(\infty))$, jednak je promeni argumenta funkcije $G(t)$ na celoj realnoj osi, podeljenoj sa 2π, tj.

$$\kappa = \text{Ind } G(t) = \frac{1}{2\pi} [\arg G(t)]_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{2\pi i} [\ln G(t)]_{-\infty}^{\infty} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} d \ln G(t) . \tag{1.4.4}$$

Ako funkcija $G(t)$ nije diferencijabilna ali je ograničene varijacije, integral u (1.4.4) je Stieltjesov integral.

Ovako definisan indeks funkcije, u oba slučaja, ima sledeće osobine:

a) Indeks funkcije, neprekidne na zatvorenoj konturi L ili realnoj pravoj, koja je različita od nule za svaku vrednost argumenta, je ceo broj.

b) Ako su $F(t)$ i $G(t)$ dve funkcije definisane na konturi L (ili realnoj pravoj) različite od nule, važi:

$$\text{Ind } F(t)\cdot G(t) = \text{Ind } F(t) + \text{Ind } G(t) \tag{1.4.5}$$

$$\text{Ind } \frac{F(t)}{G(t)} = \text{Ind } F(t) - \text{Ind } G(t) \tag{1.4.6}$$

$$\text{Ind } [F(t)]^n = n\cdot \text{Ind } F(t) . \tag{1.4.7}$$

c) Ako je $G(t)$ granična vrednost funkcije $G(z)$ analitičke unutar (ili izvan) konture L, njen indeks jednak je broju nula funkcije $G(z)$ u D^+ (ili broju nula $G(z)$ u D^- pomnoženom sa -1).

d) Ako je $G(t)$ granična vrednost na konturi L (ili na pravoj $y=0$) funkcije $G(z)$ analitičke na unutrašnjoj oblasti D^+ (ili na gornjoj poluravni) sa izuzetkom konačnog broja polova u u D^+ (ili na gornjoj poluravni), tada je

$$\kappa = \text{Ind } G(t) = N - P \tag{1.4.8}$$

gde je N ukupni broj nula, a P ukupan broj polova funkcije $G(z)$ unutar D^+ (gornje poluravni), gde i nule i polove zaračunavamo onoliko puta kolikog su reda.

I pored svih navedenih formula i osobina indeksa efektivno ga je, često puta, dosta teško izračunati.

Pokazuje se da je najjednostavnije izračunati indeks funkcije $G(t)$ na zatvorenoj, glatkoj konturi L, približnim metodama. Ovde će biti pomenuta jedna takva metoda.

Neka je $t = t_1(s) + i\cdot t_2(s)$, ($0 \leqslant s \leqslant l$), jednačina konture L, odakle je $G(t) = G[t_1(s) + i\cdot t_2(s)] = \xi(s) + i\cdot\eta(s)$. Tada funkcije $\xi(s)$ i $\eta(s)$ predstavljaju parametarske jednačine neke krive Γ. S obzirom da je $G(t)$ neprekidna funkcija i L zatvorena kriva, sledi da je i Γ takodje zatvorena kriva.

Broj punih obrta radijus-vektora tačaka na krivoj, kada parametar s uzima redom sve vrednosti iz intervala $[0,l]$, je indeks funkcije $G(t)$.

S obzirom da je

$$d \arg G(t) = d \operatorname{arctg} \frac{\eta(s)}{\xi(s)} \tag{1.4.9}$$

iz formule (1.4.3), sledi da je:

$$\kappa = \frac{1}{2\pi i} \int_0^l \frac{\xi(s)\eta'(s) - \eta(s)\xi'(s)}{\xi^2(s) + \eta^2(s)} \, ds \,. \tag{1.4.10}$$

Razbijemo odsečak $[0,l]$, unutar kojeg se nalaze sve vrednosti parametra s, na n jednakih delova tačkama $s_0 = 0$, s_1, $s_2, \ldots, s_n = l$. Time se i krive L i Γ takodje dele na po n lukova. Neka su γ_i $(i = 1,\ldots,n)$ tako dobijeni lukovi krive Γ, čije su krajnje tačke (ξ_{i-1},η_{i-1}) i (ξ_i, η_i), gde je $\xi_i = \xi_i(s_i)$ i $\eta_i = \eta_i(s_i)$. Neka je $\Delta\varphi_i$ ugao izmedju radijus-vektora krajnjih tačaka luka γ_i. Tada je, na osnovu (1.4.1):

$$\kappa = \text{Ind } G(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{n} \Delta\varphi_i \quad .$$

Za dovoljno veliko $n \in \mathbb{N}$ imamo da je:

$$\Delta\varphi_i \approx \sin \Delta\varphi_i = \frac{\xi_i\eta_{i-1} - \xi_{i-1}\eta_i}{\sqrt{\xi_{i-1}^2 + \eta_{i-1}^2}\sqrt{\xi_i^2 + \eta_i^2}} \,. \tag{1.4.11}$$

i, odatle:

$$\varkappa = \frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{n}\frac{\xi_i\eta_{i-1}-\xi_{i-1}\eta_i}{\sqrt{\xi_{i-1}^2+\eta_{i-1}^2}\sqrt{\xi_i^2+\eta_i^2}} + R_n , \qquad (1.4.12)$$

gde je R_n greška aproksimacije.

Ako funkcije $t_1(s)$ i $t_2(s)$ koje grade jednačinu konture L, zadovoljavaju Hölderov uslov sa eksponentom α i ako funkcija G(t) zadovoljava Hölderov uslov sa eksponentom β onda je

$$|R_n| < \frac{C}{n^{3\alpha\beta-1}} , \qquad (1.4.13)$$

gde je C realna konstanta.

Odatle sledi da za $\alpha\beta > 1/3$ i $n \to \infty$ važi da $R_n \to 0$, pa je:

$$\varkappa \approx \frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{n}\frac{\xi_i\eta_{i-1}-\xi_{i-1}\eta_i}{\sqrt{\xi_{i-1}^2+\eta_{i-1}^2}\sqrt{\xi_i^2+\eta_i^2}} . \qquad (1.4.14)$$

Priloženi listing predstavlja program za približno računanje indeksa kompleksne funkcije ako je parametar s ugao $\varphi \in [0,360]$ u stepenima.

```
10 REM program za izračunavanje indeksa kompleksne funkcije
20 PRINT "Uneti u linije 61 i 62 jednačine krive L: X = X(T),
   Y= Y(T): PRINT
30 PRINT "Uneti u liniju 63 realni deo kompleksne
   funkcije U(X,Y)": PRINT
40 PRINT "Uneti u liniju 64 imaginarni deo komleksne funkcije
   V(X,Y)": PRINT : PRINT " Posle toga startuj program sa:
   RUN 60": PRINT : PRINT
50 STOP:CLS
61 DEF FN S1(T) = COS(T)
62 DEF FN S2(T) = SIN(T)
63 DEF FN U(X,Y) = SIN(90*(X+Y))-9/(8*(X*X+Y*Y+X)+1)
64 DEF FN V(X,Y) = X-Y
65 DEG
70 DIM T1(101),E(101),F(101),C(101),T2(101),S1(101),S2(101)
80 INPUT " donja granica parametra t : a= "; A : INPUT
   " gornja granica  parametra t: b= "; B
90 N=30
100 H=(B-A)/N
110 FOR I=1 TO N+1 : C(I) = A + H*(I-1) : D = C(I) :
    T1(I) = FN S1(D) : T2(I) = FN S2(D) : NEXT
120 FOR I=1 TO N+1 : X = T1(I) : Y = T2(I): E(I) =
    FN U(X,Y) : F(I) = FN V(X,Y) : NEXT
130 K=0
```

```
140 FOR I = 2 TO N+1
150 K = K + (E(I)*F(I-1)-E(I-1)*F(I))/(SQR(E(I)*E(I)+
    F(I)*F(I))*SQR(E(I-1)*E(I-1)+F(I-1)*F(I-1)))
160 NEXT
170 INDEX2 = K/360
180 IF N = 30 THEN GO TO 200
190 IF ABS(INDEX2-INDEX1)<0.0001 THEN GOTO 220
200 INDEX1 = INDEX2 : N = N + 1
215 IF N<100 THEN GOTO 100 ELSE GOTO 260
220 INDEX = INT(INDEX2+0.5)
230 PRINT : PRINT " INDEKS FUNKCIJE = ",INDEX
240 PRINT : PRINT " BROJ PODELA N = ", N : STOP
250 PRINT " POSTUPAK NE KONVERGIRA " : STOP
```

Da bi program mogao da se primeni, neophodno je proveriti da li je zadovoljen uslov (1.4.13). Ako jeste, u linije 61 i 62 unose se parametarske jednačine konture L, a u linije 63 i 64 realni i imaginarni delovi funkcije čiji indeks tražimo. Algoritam programa je cikličan. U svakom koraku se broj n podela intervala [0,360] povećava za jedinicu i računanje se završava onda kada se približne procene indeksa poklope do na tri decimale. Dobijeni rezultat se zaokružuje do najbližeg celog broja.

U listingu imamo primer funkcije

$$w = u + iv = \sin \frac{\pi}{2}\,(x + y) - \frac{9}{8(x^2 + y^2 + x) + 1} + i\cdot(x - y)$$

na jediničnoj kružnici L: $x = \sin t$, $y = \cos t$, $t \in [0,2\pi]$.

Posle 6 iteracija, tj. za n=36 dobijamo da je Ind $w = -1$.

Program je radjen u programskom jeziku LOCOMOTIVE BASIC 0.1 i testiran na računaru AMSTRAD "CPC 464".

1.5. Riemannov granični problem

Riemannov granični problem za prostopovezanu oblast :

Data je prosta, glatka, zatvorena kontura L koja deli kompleksnu ravan na unutrašnji deo D^+ i spoljašnji deo D^-, i dve funkcije $G(t)$ i $g(t)$ tačaka $t \in L$ koje zadovoljavaju Hölderov uslov, pri čemu je $G(t) \neq 0$ za svako $t \in L$.

Treba naći funkcije [1] $\varphi^+(z)$ i $\varphi^-(z)$ analitičke u D^+ i D^-

---

[1] Ovde se može govoriti i o jednoj deo po deo analitičkoj funkciji $\varphi(z)$ koja na D^+ uzima vrednost $\varphi^+(z)$, a na D^- vrednost $\varphi^-(z)$, gde je kriva L geometrijsko mesto singulariteta funkcije $\varphi(z)$.

respektivno, koje na konturi L zadovoljavaju linearnu relaciju

$$\Phi^+(t) = G(t)\cdot\Phi^-(t) \qquad \text{(homogeni problem)} \qquad (1.5.1)$$

ili

$$\Phi^+(t) = G(t)\cdot\Phi^-(t) + g(t) \qquad \text{(nehomogeni problem).} \qquad (1.5.2)$$

Funkcija $G(t)$ naziva se koeficijentom Riemannovog problema, a funkcija $g(t)$ njegovim slobodnim članom.

Kada je $G(t) \equiv 1$, Riemannov problem se svodi na granični problem skoka čije rešenje sledi direktno iz formule Plemelja-Sohockog (1.1.9).

Rešenje Riemannovog homogenog problema

Pretpostavimo da je granični problem (1.5.1) rešiv i da su funkcije $\Phi^+(z)$ i $\Phi^-(z)$ njegova rešenja. Neka je N^+ broj nula funkcije $\Phi^+(z)$ u oblasti D^+, a N^- broj nula $\Phi^-(z)$ u D^-. Na osnovu osobine c) indeksa funkcije (strana 13), sledi da je

$$\kappa = \operatorname{Ind} G(t) = N^+ + N^- \qquad (1.5.3)$$

Indeks koeficijenta $G(t)$ Riemannovog problema naziva se indeksom problema.

Iz (1.5.3) sledi da homogeni Riemannov problem nema rešenja ako je $\kappa<0$.

Ako je $\kappa = 0$, funkcije $\Phi^+(z)$ i $\Phi^-(z)$ nemaju nula. U tom slučaju logaritmovanjem uslova (1.5.1) dobijamo granični problem skoka

$$\ln \Phi^+(t) - \ln \Phi^-(t) = \ln G(t), \qquad (1.5.4)$$

gde za $\ln G(t)$ biramo bilo koju granu te funkcije. Dokazuje se da rešenje problema ne zavisi od izbora grane.

Rešenje problema (1.5.4) je, na osnovu (1.1.16):

$$\Gamma(z) = \ln \Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\ln G(\tau)}{\tau - z}\,d\tau + \ln \Phi^-(\infty), \qquad (1.5.5)$$

a rešenje homogenog Riemannovog graničnog problema (1.5.1) je:

$$\Phi^+(z) = A\cdot\exp(\Gamma^+(z)), \quad \Phi^-(z) = A\cdot\exp(\Gamma^-(z)) \qquad (1.5.6)$$

gde je $A = \Phi^-(\infty)$.

Otuda, u slučaju $\varkappa = 0$ i uz uslov $\Phi^-(\infty) \neq 0$, rešenje problema (1.5.1) sadrži jednu proizvoljnu konstantu. Ako je $\Phi^-(\infty) = 0$, problem (1.5.1) ima samo trivijalno rešenje.

Iz (1.5.6) sledi veoma važna teorema:

<u>Teorema 1.5.1.</u> Funkciju $G(t)$ definisanu na konturi L, koja zadovoljava Hölderov uslov i čiji je $\operatorname{Ind} G(t) = 0$, možemo pretstaviti kao količnik funkcija $\Phi^+(t)$ i $\Phi^-(t)$ koje su granične vrednosti funkcija analitičkih u oblastima D^+ i D^- i koje u tim oblastima nemaju nula, a mogu se odrediti sa tačnošću do na proizvoljnu konstantu, na osnovu formule (1.5.6).!!

U slučaju da je $\varkappa>0$, pretpostavimo da koordinatni početak pripada oblasti D^+. (Ova pretpostavka ne umanjuje opštost rezultata jer je poznato da se odgovarajućim konformnim preslikavanjem kontura L i oblast D^+ mogu preslikati, na primer, na jediničnu kružnicu i jedinični krug, respektivno.) U tom slučaju funkcija $t^\varkappa$ ima indeks jednak broju $\varkappa$.

Ako granični uslov (1.5.1) napišemo u obliku

$$\Phi^+(t) = t^\varkappa \cdot [t^{-\varkappa} G(t)] \cdot \Phi^-(t) \tag{1.5.7}$$

funkcija $G_1(t) = t^{-\varkappa} G(t)$ ima indeks jednak nuli, pa je, na osnovu teoreme 1.5.1. možemo predstaviti u obliku količnika $G_1(t) = \dfrac{e^{\Gamma^+(t)}}{e^{\Gamma^-(t)}}$, gde je

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\ln[\tau^{-\varkappa} . G(\tau)]}{\tau - z} \, d\tau \, , \tag{1.5.8}$$

a granični uslov (1.5.7) može se napisati na sledeći način

$$\frac{\Phi^+(t)}{e^{\Gamma^+(t)}} = t^\varkappa . \frac{\Phi^-(t)}{e^{\Gamma^-(t)}} \quad , \; t \in L \, . \tag{1.5.9}$$

Iz jednakosti (1.5.9) se vidi da je funkcija $\dfrac{\Phi^+(z)}{e^{\Gamma^+(z)}}$ analitička u D^+, i da je funkcija $z^\varkappa \dfrac{\Phi^-(z)}{e^{\Gamma^-(z)}}$ analitička u D^- sa izuzetkom bekonačno daleke tačke u kojoj može imati pol reda ne višeg od $\varkappa$, pa iz teoreme o analitičkom produženju (strana 6) sledi, da su ove dve funkcije uzajamna analitička produženja preko konture L, tj. da su grane jedne analitičke funkcije koja u celoj kompleksnoj ravni može da ima samo jedan pol u beskonačno dalekoj tački, reda ne višeg od $\varkappa$. Na osnovu uopštene Liouvilleove teoreme ta analitička funkcija je polinom stepena ne višeg od κ sa proizvoljnim kompleksnim koeficijentima, pa je opšte rešenje homogenog Riemannovog graničnog problema za $\kappa>0$:

$$\Phi^{+}(z) = e^{\Gamma^{+}(z)}\cdot P_{\kappa}(z) \ , \quad \Phi^{-}(z) = e^{\Gamma^{-}(z)}\cdot z^{-\kappa}\cdot P_{\kappa}(z) \ , \qquad (1.5.10)$$

gde je funkcija $\Gamma(z)$ data formulom (1.5.8), a $P_{\kappa}(z)$ je polinom κ -tog stepena.

Očito, opšte rešenje graničnog problema (1.5.1) za $\kappa>0$ sadrži $\kappa + 1$ proizvoljnih kompleksnih konstanti koje su koeficijenti polinoma $P_{\kappa}(z)$. Koeficijent uz z^{κ} u polinomu $P_{\kappa}(z)$ jednak je vrednosti $\Phi^{-}(\infty)$.

Pri rešavanju nehomogenog Riemannovog graničnog problema (1.5.2) koristimo se jednim partikularnim rešenjem homogenog problema (1.5.1) koji se naziva kanonskom funkcijom homogenog Riemannovog problema.

Najniži stepen u razvoju analitičke funkcije $\Phi(z)$ u red po stepenima od $(z-z_0)$ naziva se <u>redom funkcije Φ u tački z_0</u> .

Ako funkcija $\Phi(z)$ u tački z_0 ima nulu reda m, red funkcije $\Phi(z)$ u z_0 biće jednak broju m, a ako u z_0 funkcija $\Phi(z)$ ima pol reda m, red funkcije $\Phi(z)$ u z_0 jednak je $-m$. U slučaju da je $\Phi(z)$ analitička i različita od nule u z_0, onda je njen red u z_0 jednak nuli.

Deo po deo analitička funkcija koja zadovoljava granični uslov (1.5.1) i ima red jednak nuli u svakoj konačnoj tački kompleksne ravni, naziva se <u>kanonskom funkcijom homogenog Riemannovog graničnog problema</u> (1.5.1).

Očito je red takve funkcije u beskonačno dalekoj tački jednak indeksu κ graničnog problema. Specijalno ako je $\kappa>0$, kanonska funkcija nema polova, pa predstavlja rešenje graničnog problema (1.5.1) koje se naziva <u>kanonskim rešenjem</u> . Za $\kappa<0$ kanonska funkcija u $z_0 = \infty$ ima pol, pa ne predstavlja rešenje graničnog problema (1.5.1).

Iz (1.5.6) i (1.5.10) sledi da je, za proizvoljno κ, kanonska funkcija $X(z)$ problema (1.5.1) data jednakostima:

$$X^{+}(z) = e^{\Gamma^{+}(z)} \ , \quad X^{-}(z) = z^{-\kappa}\cdot e^{\Gamma^{-}(z)} \ , \qquad (1.5.11)$$

gde je funkcija $\Gamma(z)$ odredjena formulom (1.5.8), pa se opšte rešenje homogenog graničnog problema (1.5.1) za $\kappa \geq 0$ preko kanonske funkcije može izraziti na sledeći način:

$$\Phi(z) = X(z)\cdot P_{\kappa}(z) \ . \qquad (1.5.12)$$

Rešenje nehomogenog Riemannovog graničnog problema

Zamenimo koeficijent $G(t)$ graničnog uslova (1.5.2) količnikom graničnih vrednosti kanonske funkcije odgovarajućeg homogenog problema, $G(t) = X^{+}(t)/X^{-}(t)$.

Na osnovu teoreme 1.1.3. sledi da funkcija $g(t)/X^{+}(t)$ zadovoljava Hölderov uslov, pa je na osnovu (1.1.12) - (1.1.14)

$$\frac{g(t)}{X^{+}(t)} = \Psi^{+}(t) - \Psi^{-}(t) \ , \tag{1.5.13}$$

gde je

$$\Psi(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L}\frac{g(\tau)}{X^{+}(\tau)}\cdot\frac{d\tau}{\tau - z} \ . \tag{1.5.14}$$

Odatle sledi da se (1.5.2) transformiše u oblik

$$\frac{\Phi^{+}(t)}{X^{+}(t)} - \Psi^{+}(t) = \frac{\Phi^{-}(t)}{X^{-}(t)} - \Psi^{-}(t) \ , \ t\in L \ . \tag{1.5.15}$$

Primenom teorema 1.1.4. i 1.1.5, rezonujući slično kao u slučaju homogenog graničnog problema, dolazimo do sledećeg zaključka:

Teorema 1.5.2. Ako je indeks $\varkappa > 0$, nehomogeni Riemannov granični problem ima rešenje za proizvoljni slobodan član $g(t)$, i njegovo opšte rešenje je

$$\Phi(z) = X(z)\cdot[\ \Psi(z) + P_{\varkappa}(z)] \ , \tag{1.5.16}$$

gde je $X(z)$ kanonska funkcija definisana relacijama (1.5.12), $P_{\varkappa}(z)$ polinom stepena $\varkappa$ sa proizvoljnim kompleksnim koeficijentima, i

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L}\frac{g(\tau)}{X^{+}(\tau)}\cdot\frac{d\tau}{\tau - z} \ . \tag{1.5.17}$$

U slučaju da je $\varkappa = -1$, granični problem ima jedinstveno rešenje.

Ako je $\varkappa < -1$, nehomogeni Riemannov granični problem u opštem slučaju, nema rešenja. Da bi problem imao rešenje, neophodno je i dovoljno da $g(t)$ zadovoljava $-\varkappa - 1$ uslova:

$$\int_{L}\frac{g(\tau)}{X^{+}(\tau)}\,\tau^{k-1}\,d\tau = 0 \ , \ (k=1,2,\ldots, -\varkappa -1) . \tag{1.5.18}$$

Ukoliko su ovi uslovi ispunjeni, granični problem ima jedinstveno rešenje oblika

$$\Phi(z) = X(z)\cdot\Psi(z) \ .!! \tag{1.5.19}$$

Ako zahtevamo da rešenje nehomogenog Riemannovog problema zadovoljava dopunski uslov $\Phi(\infty) = 0$, opšte rešenje graničnog problema (1.5.2) za $\kappa > 0$ je oblika:

$$\Phi(z) = X(z)\cdot[\Psi(z) + P_{\kappa-1}(z)] \qquad (1.5.16')$$

(za $\kappa \equiv 0$ je $P_{\kappa-1}(z) = 0$), a za $\kappa < 0$, $g(t)$ mora da zadovolji $-\kappa$ uslova oblika (1.5.18), gde je $k = 1, 2, \dots, -\kappa$, da bi rešenje graničnog problema bilo oblika (1.5.19).

Riemannov granični problem za poluravni

Pretpostavimo da je kontura L realna osa. U tom slučaju treba naći funkcije $\Phi^+(z)$ i $\Phi^-(z)$ analitičke u gornjoj i donjoj poluravni respektivno, čije granične vrednosti na konturi L zadovoljavaju uslov

$$\Phi^+(t) = G(t)\cdot\Phi^-(t) + g(t)\ , \quad (-\infty<t<\infty)\ , \qquad (1.5.2')$$

ako funkcije $G(t)$ i $g(t)$ na L zadovoljavaju Hölderov uslov i $G(t) \neq 0$ za $t \in R$.

Jedina razlika u odnosu na Riemannov problem za zatvorenu konačnu konturu je u tome što tačke $z = 0$ i $z = \infty$ pripadaju realnoj osi, pa se ne mogu uzeti za tačke u kojima kanonska funkcija ima red različit od nule. Zbog toga, umesto pomoćne funkcije t koja na zatvorenoj glatkoj konačnoj konturi L ima indeks jednak jedinici, u slučaju kada je L realna osa, uzimamo funkciju $\dfrac{t - i}{t + i}$ čiji je indeks takodje jednak jedinici.

Sličnim tehnikama kao u prethodna dva slučaja dolazi se do sledećeg rezultata:

Teorema 1.5.3. Za $\kappa>0$ i homogeni i nehomogeni problemi (1.5.2') za poluravni su uvek rešivi. Opšte rešenje homogenog problema

$$\Phi(z) = X(z)\cdot\frac{P_\kappa(z)}{(z + i)^\kappa} \qquad (1.5.20)$$

i opšte rešenje nehomogenog problema

$$\Phi(z) = X(z)[\ \Psi(z) + \frac{P_\kappa(z)}{(z - i)^\kappa}\ ]\ , \qquad (1.5.21)$$

gde je

$$X^+(z) = e^{\Gamma^+(z)}\ , \quad X^-(z) = \left(\frac{z - i}{z + i}\right)^{-\kappa} e^{\Gamma^-(z)}\ , \qquad (1.5.22)$$

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \ln\left[\left(\frac{\tau - i}{\tau + i}\right)^{-\varkappa} G(\tau)\right]\frac{d\tau}{\tau - z}, \qquad (1.5.23)$$

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)}\cdot\frac{d\tau}{\tau - z}, \qquad (1.5.14')$$

linearno zavise od $\varkappa + 1$ proizvoljnih konstanti (koeficijenti polinoma $P_\varkappa(z)$).

Kada je $\varkappa < 0$ homogeni problem nema rešenja.

Nehomogeni problem, za $\varkappa = -1$, ima jedinstveno bezuslovno rešenje, a za $\varkappa < -1$ ima rešenje

$$\Phi(z) = X(z)\cdot[\ \Psi(z) + C\ ], \qquad (1.5.24)$$

gde je C proizvoljna konstanta, samo ako je ispunjeno $-\varkappa - 1$ uslova

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)}\cdot\frac{d\tau}{(\tau + i)^k} = 0, \quad (k=2,3,\dots,-\varkappa)\ .!! \qquad (1.5.25)$$

U pomenutim slučajevima rešenje $\Phi(z)$ je ograničeno u beskonačnosti. Ako zahtevamo da bude $\Phi^+(\infty) = \Phi^-(\infty) = 0$, dobijamo da je tada i $g(\infty) = 0$. Otuda je opšte rešenje problema:

$$\Phi(z) = X(z)\cdot\left[\ \Psi(z) + \frac{P_{\varkappa-1}(z)}{(z + i)^\varkappa}\ \right], \text{ za } \varkappa > 0, \qquad (1.5.21')$$

i

$$\Phi(z) = X(z)\cdot\Psi(z), \text{ za } \varkappa < 0 \qquad (1.5.24')$$

ako je ispunjeno $-\varkappa$ uslova oblika:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)}\cdot\frac{d\tau}{(\tau + i)^\varkappa} = 0, \quad (k=1,2,\dots,-\varkappa). \qquad (1.5.25')$$

U narednim glavama često ćemo se sretati sa graničnim problemima za eliptičke parcijalne diferencijalne jednačine, koji se Fourierovim transformacijama svode na Riemannov granični problem za poluravni, u kojem su zadati još neki dopunski uslovi koje date funkcije zadovoljavaju na realnoj osi.

<u>Riemannov granični problem za poluravni (F)</u> Naći funkcije $\Phi^+(z)$ i $\Phi^-(z)$ analitičke, respektivno, na gornjoj i donjoj poluravni, takve da $\Phi^+(t)\in\{\{0,\infty\}\}$ i $\Phi^-(t)\in\{\{-\infty,0\}\}$ za $t\in(-\infty,\infty)$ i

$$\Phi^+(t) = G(t)\cdot\Phi^-(t) + g(t), \quad -\infty < t < \infty, \qquad (1.5.2')$$

gde je $g(t)\in\{0\}$, $G(t)-1\in\{0\}$ i $G(t) \neq 0$ za svako t.!!

Prema rezultatima (1.2.17), (1.2.18), (1.2.20) i pomoću tehnika kojima je dokazana teorema 1.5.3, dokazuje se da važi :

Teorema 1.5.3'. Ako je $\kappa > 0$, homogeni problem (F), pod pretpostavkom da je $\varphi^+(\infty) = \varphi^-(\infty) = 0$, ima bezuslovno rešenje $\varphi(z) = X(z)\cdot\frac{P_{\kappa-1}(z)}{(z+i)^{\kappa}}$, a nehomogeni granični problem ima opšte rešenje oblika

$$\varphi(z) = X(z)\cdot\left[\, \Psi(z) + \frac{P_{\kappa-1}(z)}{(z+i)^{\kappa}} \,\right],$$

gde je

$$X^+(z) = e^{\Gamma^+(z)} \quad , \quad X^-(z) = \left(\frac{z-i}{z+i}\right)^{-\kappa}\cdot e^{\Gamma^-(z)}$$

$$\Gamma^+(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}\Upsilon(t)e^{izt}\,dt \ , \ \Gamma^-(z) = \frac{-1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0}\Upsilon(t)e^{izt}\,dt, \qquad (1.5.26)$$

$$\Upsilon(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\ln\left[\left(\frac{\tau-i}{\tau+i}\right)^{-\kappa} G(\tau)\right]\cdot e^{-i\tau t}\,d\tau \ , \qquad (1.5.27)$$

$$\Psi^+(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}\psi(t)e^{izt}\,dt \ , \ \Psi^-(z) = \frac{-1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0}\psi(t).e^{izt}\,dt, \qquad (1.5.28)$$

$$\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(\tau)}{X^+(\tau)}\,e^{-i\tau t}\,d\tau \ . \qquad (1.5.29)$$

Za $\kappa < 0$ homogeni problem (F) nema rešenja, a nehomogeni problem ima jedinstveno rešenje

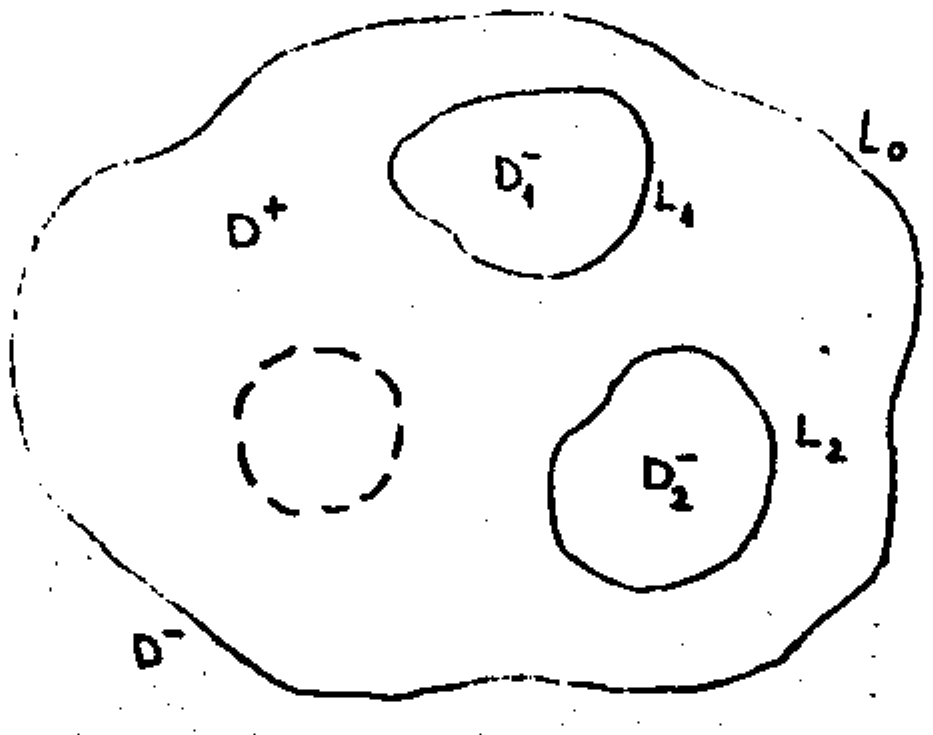
$$\varphi(z) = X(z)\cdot\Psi(z)$$

samo ako je ispunjeno $-\kappa$ uslova oblika

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(\tau)}{X^+(\tau)}\cdot\frac{d\tau}{(\tau+i)^{k}} = 0 \ , \ k=1,2,\ldots,-\kappa. \,!!$$

Riemannov granični problem za višestruko povezanu oblast

Neka je $L = L_0 + L_1 + \ldots + L_m$ disjunktna unija $m+1$ konture takve da kontura L_0 u svojoj unutrašnjosti sadrži sve ostale (slika 1.3).



Slika 1.3.

Označimo sa D^+ $(m+1)$-struko povezanu oblast koja leži unutar krive L_0, a izvan kontura $L_1, \ldots, L_m$, i sa D^- oblast koja je komplementarna $D^+ + L$ u odnosu na zatvorenu kompleksnu ravan. Pretpostavimo da koordinatni početak leži u oblasti D^+. Pod pozitivnim smerom obilaska konture L podrazumevamo onaj pri kojem oblast D^+ ostaje s leve strane.

Riemannov problem za ovako definisane oblasti D^+ i D^- se formuliše potpuno isto kao i za prostopovezanu oblast.

Označimo sa $\varkappa_k = \frac{1}{2\pi}\cdot[\arg G(t)]_{L_k}$, (obilazeći konturu L_k u pozitivnom smeru).

Veličinu $\varkappa = \sum_{k=0}^{m} \varkappa_k$ nazivamo indeksom Riemannovog problema.

S obzirom da je $0 \in D^+$, sledi da je $[\arg t]_{L_k} = 0$, $(k = 1, 2, \ldots, m)$, $[\arg t]_{L_0} = 2\pi$ i

$$\{\arg [t^{-\varkappa}\cdot\prod_{k=1}^{m} (t - z_k)^{\varkappa_k} G(t)]\}_L = 0 \qquad (1.5.30)$$

ako su tačke z_k proizvoljno odabrane tačke unutar kontura L_k $(k = 1,2,\ldots,m)$.

Homogeni problem rešavamo tako što granični uslov (1.5.1) napišemo u obliku

$$\Phi^+(t) = \frac{t^{\varkappa}}{\prod_{k=1}^{m} (t - z_k)^{\varkappa_k}} [t^{-\varkappa}\cdot\prod_{k=1}^{m} (t - z_k)^{\varkappa_k} G(t)]\, \Phi^-(t), \qquad (1.5.31)$$

a zatim primenjujemo potpuno isti postupak kao i u prethodnim slučajevima.

U slučaju da je $\varkappa \geqslant 0$, opšte rešenje homogenog problema za višestruko povezanu oblast je:

$$\begin{aligned}\Phi^+(z) &= \prod_{k=1}^{m} (z - z_k)^{-\varkappa_k}\cdot e^{\Gamma^+(z)}\cdot P_{\varkappa}(z)\\ \Phi^-(z) &= z^{-\varkappa}\cdot e^{\Gamma^-(z)}\cdot P_{\varkappa}(z),\end{aligned} \qquad (1.5.32)$$

gde je

$$\Gamma(z) = \int_L \frac{\ln [\tau^{-\varkappa}\cdot\prod_{k=1}^{m} (\tau - z_k)^{\varkappa_k}\cdot G(\tau)]}{\tau - z}\, d\tau . \qquad (1.5.33)$$

Uz dopunski uslov $\Phi^-(\infty) = 0$, u formule (1.5.32) umesto $P_{\varkappa}(z)$ stavljamo polinom $P_{\varkappa-1}(z)$. Za $\varkappa < 0$, homogeni problem nema netrivijalnih rešenja.

Kanonska funkcija ovog graničnog problema je

$$X^+(z) = \prod_{k=1}^{m} (z - z_k)^{-\varkappa_k}\cdot e^{\Gamma^+(z)}, \quad X^-(z) = z^{-\varkappa}\cdot e^{\Gamma^-(z)}, \qquad (1.5.34)$$

a kada $z \to t \in L$

$$X^+(t) = \sqrt{\frac{G(t)}{t^{\varkappa} \prod_{k=1}^{m} (t-z_k)^{\varkappa}}}\cdot e^{\Gamma^+(t)}, \quad X^-(t) = \frac{e^{\Gamma^-(t)}}{\sqrt{t^{\varkappa}\cdot\prod_{k=1}^{m}(t-z_k)^{\varkappa_k}\cdot G(t)}}. \qquad (1.5.35)$$

Analogno se pokazuje da je za $\varkappa \geqslant 0$ opšte rešenje nehomogenog Riemannovog graničnog problema za višestruko povezane oblasti oblika

$$\Phi(z) = X(z)\cdot[\,\Psi(z) + P_{\kappa}(z)\,] \tag{1.5.16}$$

ili

$$\Phi(z) = X(z)\cdot[\,\Psi(z) + P_{\kappa-1}(z)\,], \tag{1.5.16'}$$

ako je zadat dopunski uslov $\Phi^{-}(\infty) = 0$, gde je funkcija $\Psi(z)$ data formulom (1.5.17).

Za $\kappa < 0$ nehomogeni problem ima rešenje

$$\Phi(z) = X(z)\cdot\Psi(z) \tag{1.5.19'}$$

ako su ispunjeni

$$\int_L \frac{g(t)}{X^{+}(t)}\, t^{k-1}\, dt = 0, \tag{1.5.18'}$$

gde je $k = 1, 2, \ldots, -\kappa-1$ ako tražimo rešenje ograničeno u beskonačnosti, a $k = 1,2, \ldots,-\kappa$ ako zahtevamo da bude ispunjen dodatni uslov $\Phi(\infty) = 0$.

Zaključak

Pored navedenih formulacija Riemannovog graničnog problema u literaturi se sreću mnogobrojna uopštenja ovog problema u odnosu na: prirodu koeficijenata graničnog uslova, prirodu oblasti u kojima se traže rešenja, prirodu funkcionalnih prostora u kojima se nalaze koeficijenti i rešenja problema itd.

U [68] nalazi se rešenje Riemannovog graničnog problema (1.5.1) i (1.5.2) na prostopovezanim oblastima kada je koeficijent $G(t)$ oblika

$$G(t) = \frac{\prod_{k=1}^{\mu} (t-\alpha_k)^{m_k}}{\prod_{j=1}^{\nu} (t-\beta_j)^{p_j}}\, G_1(t) \quad , \ t\in L \tag{1.5.36}$$

gde su tačke α_k $(k=1,2,\ldots,\mu)$ i β_j $(j=1,2,\ldots,\nu)$ na konturi L, m_k i p_j nenegativni celi brojevi, funkcija G_1 zadovoljava Hölderov uslov na L i $G(t) \neq 0$ za $t\in L$.

Hvedelidze je u [90] posmatrao Riemannov problem u slučaju da $G(t)$ zadovoljava Hölderov uslov i $g(t)\in L_p$ (skup funkcija čiji je p-ti stepen integrabilan po Lebesgueu). Dobijeni rezultati se po formi poklapaju sa onim koji se dobijaju kada $g(t)\in H(L)$. Razlika je jedino u tome što se u ovom slučaju uvek radi o Lebesgueovim integralima, pa odgovarajuće granične vrednosti na konturi postoje samo skoro svuda (izuzev na skupu mere nula).

I.B.Simonenko [187] posmatra slučaj kada je $G(t)$ samo neprekidna funkcija, a $g(t) \in L_p$. Rešenje ovog problema poklapa se sa rezultatima Hvedelidzea za slučaj kada je $G(t) \in H(L)$. Time je pokazano da proširenje klase koeficijenata G do neprekidnih funkcija ne sužava klasu rešenja.

J.I. Čerski [36] je dao kompletno rešenje graničnog Riemannovog problema u apstraktnom prostoru pretpostavljajući da je granični uslov

$$\varphi^+ = A\varphi^- + g, \tag{1.5.37}$$

gde je A linearni operator, a φ^+, φ^- i g elementi Banachovog prostora.

U [37] Čerski je dao rešenje Riemannovog graničnog problema za uopštene funkcije.

J.L. Rodin [175] je posmatrao Riemannov granični problem za oblasti na Riemannovim površima. Za površi reda $p=0$ rezultat se poklapa sa opisanim. Za površi reda $p > 0$ broj rešenja i uslovi rešivosti zavise ne samo od indeksa problema, već i od p. Za $\kappa < 0$ problem nema rešenja.

L.A. Čikin [44] se bavio pitanjima stabilnosti rešenja Riemannovog graničnog problema pri malim deformacijama konture koje zadovoljavaju neka ograničenja i ustanovio je da su, za $G(t)$, $g(t) \in H(L)$ i $G(t) \neq 0$, za $t \in L$, rešenja homogenog i nehomogenog problema stabilna.

Pored navedenih uopštenja Riemannovog problema mogu se vršiti uopštenja u odnosu na granične uslove. J.M. Krikunov [113], uz uslove Riemannovog graničnog problema za prostopovezane oblasti, umesto graničnog uslova (1.5.2) uzima uslov

$$\sum_{k=0}^{n}\left[a_k(t)\cdot\frac{d^k\varphi^+(t)}{dt^k} + \int_L A_k(t,\tau)\cdot\frac{d^k\varphi^+(\tau)}{d\tau^k}\,d\tau \right] - \sum_{k=0}^{n}\left[b_k(t)\cdot\frac{d^k\varphi^-(t)}{dt^k} + \int_L B_k(t,\tau)\cdot\frac{d^k\varphi^-(\tau)}{d\tau^k}\,d\tau \right] = f(t),$$

gde su $a_k(t)$ i $b_k(t)$ date neprekidne funkcije, a $A_k(t,\tau)$ i $B_k(t,\tau)$ Fredholmova jezgra. Krikunov je ovaj problem sveo na rešavanje singularnih integralnih jednačina.

A. Susea [198] postavio je nelinearni homogeni konturni problem tipa Riemanna za $(m+1)$ - povezanu oblast D^+ i oblast D^- (strana 23). Treba odrediti funkcije $\varphi^+(z)$ i $\varphi^-(z)$ analitičke u D^+ i D^- koje na konturi L zadovoljavaju uslov

$$[\varphi^+(t)]^{\alpha(t)} = G(t)\cdot[\varphi^-(t)]^{\beta(t)} \tag{1.5.38}$$

gde je $G(t) \in H(L)$, a $\alpha(t)$ i $\beta(t)$ su granične vrednosti nekih funkcija analitičkih u D^+ i D^-.

Problem (1.5.39) rešili su G.P.Cerepanov [44'] za $\alpha = 1$, $\beta = -1$, G.V. Aržanov [4] za $\alpha \in \mathbb{N}$, $\beta = 1$ i F.D. Gahov [70] za α, $\beta \in \mathbb{N}$.

U [107] J.J. Komjak je posmatrao problem (1.5.38) kada je bar jedan od eksponenata α i β iracionalan. U svojoj doktorskoj disertaciji [30] M.Čanak, svodjenjem problema na običnu diferencijalnu jednačinu, nalazi široku klasu rešenja problema:

Odrediti funkcije $\varphi^+(z)$ i $\varphi^-(z)$ analitičke u poluravnima D^+ i D^- (osim, možda, u prebrojivom skupu tačaka ravnomerno rasporedjenih duž neke prave paralelne imaginarnoj osi) koje na x osi zadovoljavaju uslov $[\varphi^+(x)]^{\alpha} = G(x)\cdot[\varphi^-(x)]^{\beta}$, gde je $G(x) = C_1e^{px} + C_2e^{qx}$ i $\alpha = p/(p - q)$, $\beta = q/(p - q)$.!!

Pored pomenutih uopštenja, razvijena je i teorija rešavanja Riemannovog problema (1.5.1) i (1.5.2) u slučaju da funkcije $G(t), g(t)$ na zatvorenoj konturi L imaju po konačno mnogo tačaka prekida [68], i teorija rešavanja Riemannovog graničnog problema na konturi L koja se sastoji od disjunktne unije prostih glatkih nezatvorenih krivih, $G(t)$, $g(t) \in H(L)$ i $G(t) \neq 0$.

1.6. Hasemanov granični problem

Pomak

Neka je L prosta zatvorena glatka kriva i $\alpha(t)$ homeomorfizam (uzajamno jednoznačno i neprekidno preslikavanje) krive L na samu sebe. Homeomorfizam $\alpha(t): L \to L$ nazivaćemo pomakom krive L. Dokazuje se da pomak krive L ili čuva ili menja orijentaciju krive L. Homeomorfizam $\alpha(t)$ koji čuva orijentaciju na L naziva se direktnim pomakom, (oznaka $\alpha_+(t)$), a homeomorfizam koji menja orijentaciju na L - obratnim pomakom (oznaka $\alpha_-(t)$).

Tačka $\tau \in L$ je nepokretna tačka pomaka $\alpha(t)$ reda $k > 1$ ako je $\alpha_k(\tau) = \tau$ $(k > 1)$ i $\alpha_i(\tau) \neq \tau$ za $i = 1, 2, \ldots, k-1$, gde je $\alpha_i(t) = \alpha[\alpha_{i-1}(t)]$, $\alpha_0(t) \equiv t$.

U [111] dokazana je sledeća teorema:

Teorema 1.6.1. Skup $\mathcal{M}^+$ homeomorfizama krive L na samu sebe, koji čuvaju orijentaciju, deli se u tri disjunktne klase:

1) Postoji ceo broj n, najmanji takav da je $\alpha_n(t) = t$ za sve $t \in L$, tj. sve tačke konture L su nepokretne tačke $\alpha_+(t)$ reda n, (klasa $\mathcal{M}_1^+$).

2) Skup nepokretnih tačaka $\alpha_+(t)$ je neprazan i ne poklapa se sa L. Sve nepokretne tačke pomaka $\alpha_+(t)$ imaju isti red $n \geqslant 1$ (klasa $\mathcal{M}_2^+$).

3) Skup nepokretnih tačaka $\alpha_+(t)$ je prazan, (klasa $\mathcal{M}_3^+$). ||

Pomak $\alpha(t)$ koji za neko celo $n \geqslant 2$ zadovoljava uslove:

$$\alpha_n(t)=t \text{ za svako } t\in L, \text{ i } \alpha_k(t)\neq t \text{ za svako } k=1,2,\ldots,n-1 \quad (1.6.1)$$

naziva se <u>Carlemanovim pomakom</u> .

Carlemanov pomak koji čuva orijentaciju nema nepokretnih tačaka prvog reda.

<u>Teorema 1.6.2.</u> [111] Skup $^-$ homeomorfizama konture L na samu sebe, koji menjaju orijentaciju, je disjunktna unija dve klase:

1) $\alpha_2(t) = t$ (Carlemanov pomak), (klasa $\mathcal{M}_1^-$), ili

2) $\alpha_2(t)\in \mathcal{M}_2^+$ i red svih nepokretnih tačaka preslikavanja $\alpha_1(t)$ jednak je jedinici (klasa $\mathcal{M}_2^-$). ||

Odatle sledi da ne postoji homeomorfizam $\alpha_-(t)$ konture L na samu sebe koji menja orijentaciju i zadovoljava Carlemanov uslov sa najmanjim $n > 2$.

Pretpostavimo da pomak $\alpha(t)$ konture L ima prvi izvod $\alpha'(t) \neq 0$, za svako $t\in L$, koji zadovoljava Hölderov uslov, tj. $\alpha'(t)\in H_\mu(L)$.

U tom slučaju važe sledeće relacije [117]:

$$\text{Ind } \alpha_+'(t) = \frac{1}{2\pi} [\arg \alpha_+'(t)]_L = 0 \quad (1.6.2)$$

$$\text{Ind } \alpha_-'(t) = \frac{1}{2\pi} [\arg \alpha_-'(t)]_L = -2 \,. \quad (1.6.3)$$

Ako je $\alpha(t)$ obratni pomak konture L koji zadovoljava Carlemanov uslov, u nepokretnim tačkama t_1 i t_2 pomaka važi:

$$\alpha'(t_i) = -1 \,, \; i = 1,\, 2 \quad (1.6.4)$$

<u>Fredholmove integralne jednačine</u>

Neka je L prosta kontura u ravni i neka su funkcije $K(t,\tau)$ i $f(t)$ date neprekidne funkcije. Integralna jednačina

$$\varphi(t) + \lambda\cdot\int_L K(t,\tau)\cdot\varphi(\tau)\, d\tau = f(t), \; (\, f(t) \not\equiv 0 \,) \quad (1.6.5)$$

naziva se <u>nehomogenom</u> , a jednačina oblika

$$\varphi(t) + \lambda \cdot \int_L K(t,\tau)\cdot\varphi(\tau)\, d\tau = 0 \qquad (1.6.6)$$

homogenom Fredholmovom integralnom jednačinom (FIJ) sa jezgrom $K(t,\tau)$.

Ako je, u linearnoj integralnoj jednačini (1.6.5), jezgro oblika

$$K(t,\tau) = \frac{\mu(t,\tau)}{(\tau - t)^{\alpha}}, \quad (0 \leqslant \alpha \leqslant 1), \qquad (1.6.7)$$

gde je $\mu(t,\tau)$ neprekidna funkcija, takva integralna jednačina ima sva svojstva kao i FIJ i naziva se kvazifredholmovom ili, jednostavno, Fredholmovom integralnom jednačinom.

Ako za neku vrednost $\lambda = \lambda_0$ homogena FIJ ima netrivijalna rešenja, λ_0 se naziva karakterističnom vrednošću , a odgovarajuća rešenja $\varphi_1(t),\ldots, \varphi_n(t)$ (koja su linearno nezavisna)- karakterističnim funkcijama jezgra $K(t,\tau)$.

Skup svih karakterističnih vrednosti parametra λ homogene FIJ naziva se njenim spektrom . Svakoj karakterističnoj vrednosti odgovara konačan broj karakterističnih funkcija FIJ.

Teorema 1.6.3. Ako $\lambda = \lambda_0$ nije karakteristična vrednost jezgra, tj. ako homogena FIJ (1.6.6) nema netrivijalna rešenja, nehomogena FIJ (1.6.5) ime rešenje za svako $f(t)$.||

Opšte rešenje (1.6.5) je oblika

$$\varphi(t) = f(t) - \int_L R(t,\tau)\cdot f(\tau)\, d\tau , \qquad (1.6.8)$$

gde je funkcija $R(t,\tau)$ rezolventa FIJ (1.6.5) koja se dobija iz sledećih relacija:

$$K_1(t,\tau) = K(t,\tau)$$

$$K_n(t,\tau) = \int_L K(t,s)K_{n-1}(s,\tau)\, ds , \quad (n=2,3,\ldots), \qquad (1.6.9)$$

$$R(t,\tau) = R(t,\tau,\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} K_n(t,\tau) .$$

Koeficijenti $K_n(t,\tau),(n=1,2,\ldots)$, se nazivaju integralnim jezgrima .

Teorema 1.6.4. Ako je $\lambda = \lambda_0$ karakteristična vrednost homogene jednačine (1.6.6),tada je λ_0, takodje, karakteristična vrednost pridružene jednačine

$$\psi(t) + \lambda\cdot\int_L K(\tau,t)\psi(\tau)\, d\tau = 0 \qquad (1.6.10)$$

pri čemu obe jednačine (1.6.10) i (1.6.6) imaju podjednak broj linearno nezavisnih rešenja (karakterističnih funkcija koje odgovaraju karakterističnoj vrednosti λ_0).!!

Opšte rešenje homogene FIJ je oblika $\varphi(t) = \sum_{k=1}^{n} C_k \cdot \varphi_k(t)$, gde je $\{\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)\}$ kompletan sistem linearno nezavisnih karakterističnih funkcija koje odgovaraju λ_0, a C_k su proizvoljne konstante.

<u>Teorema 1.6.5.</u> Ako homogena FIJ ima netrivijalna rešenja, nehomogena FIJ, u opštem slučaju, nema rešenja. Jednačina (1.6.5) ima rešenja ako i samo ako su ispunjeni uslovi:

$$\int_L f(t)\psi_k(t)\,dt = 0\,, \tag{1.6.11}$$

gde je $\{\psi_k(t) \mid k = 1,2,3,\dots,n\}$ kompletni sistem karakterističnih funkcija pridružene IJ (1.6.10), koji odgovara karakterističnoj vrednosti λ_0.!!

Ako su ispunjeni uslovi (1.6.11), opšte rešenje nehomogene FIJ (1.6.5) je oblika:

$$\varphi(t) = f(t) - \int_L H(t,\tau)f(\tau)\,d\tau + \sum_{k=1}^{n} C_k\varphi_k(t)\,, \tag{1.6.12}$$

gde je $H(t,\tau)$ <u>generalisana rezolventa</u> , a $\sum_{k=1}^{n} C_k \cdot \varphi_k(t)$ opšte rešenje odgovarajuće homogene integralne jednačine.

<u>Hasemanov granični problem</u>

Prosta glatka naziva se <u>krivom Ljapunova</u> ako zadovoljava sledeći uslov: tangenta na krivu zaklapa sa fiksnim pravcem ugao koji zadovoljava Hölderov uslov u odnosu na dužinu luka s krive.

Neka je L kriva Ljapunova koja razlaže kompleksnu ravan na komponente povezanosti D^+ $(0 \in D^+)$ i D^- $(\infty \in D^-)$.

<u>Hasemanov granični problem</u> . Neka su, na krivoj Ljapunova L, date funkcije $G(t)$, $g(t) \in H_\mu(L)$, $G(t) \neq 0$, i direktni pomak krive L, $\alpha(t)$ takav da je $\alpha'(t) \in H_\mu(L)$ i $\alpha'(t) \neq 0$ na L. Naći deo po deo analitičku funkciju $\{\Phi^+(z), \Phi^-(z)\}$ koja na krivoj L zadovoljava granični uslov:

$$\Phi^+[\alpha(t)] = G(t) \cdot \Phi^-(t) + g(t) \ .!! \tag{1.6.13}$$

Rešavajući problem Hasemana sa nultim indeksom

$$\Phi^{+}[\alpha(t)] - \Phi^{-}(t) = 0 \tag{1.6.14}$$

uz dopunski uslov $\Phi^{-}(\infty) = 0$, iz formule Plemelja-Sohockog (1.1.9), (1.1.10) i uslova (1.1.15) i (1.1.16), sledi da je $\Phi^{-}(t)$ rešenje integralne jednačine:

$$\Phi^{-}(t) - \frac{1}{2\pi i}\int_L \left[\frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau) - \alpha(t)} - \frac{1}{\tau - t}\right]\cdot\Phi^{-}(\tau)\, d\tau = 0 \tag{1.6.15}$$

za koju se, na osnovu uslova $\alpha'(t) \in H_\mu(L)$, dokazuje da je FIJ.

Kako FIJ (1.6.15) nema netrivijalnih rešenja, na osnovu teoreme 1.6.2. važi:

<u>Teorema 1.6.6.</u> Neka je $\alpha(t)$ direktni pomak krive L, pri čemu je $\alpha'(t) \in H_\mu(L)$, $\alpha'(t) \neq 0$ i $\alpha_{-1}(t)$ preslikavanje inverzno pomaku $\alpha(t)$. Jedinstveno rešenje graničnog problema

$$\Phi^{+}[\alpha(t)] - \Phi^{-}(t) = g(t) \tag{1.6.16}$$

takvo da je $\Phi^{-}(\infty) = 0$, dato je formulom:

$$\Phi^{+}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi[\alpha_{-1}(\tau)]}{\tau - z}\, d\tau\ ,\quad \Phi^{-}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)\, d\tau}{\tau - z} \tag{1.6.17}$$

gde je $\varphi(t)$ bezuslovno jedinstveno rešenje FIJ

$$\varphi(t) - \frac{1}{2\pi i}\int_L \left[\frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau) - \alpha(t)} - \frac{1}{\tau - t}\right]\cdot\varphi(\tau)\, d\tau = g(t)\ .\,!! \tag{1.6.18}$$

<u>Homogeni Hasemanov granični problem</u>

Neka je

$$\Phi^{+}[\alpha(t)] = G(t)\cdot\Phi^{-}(t)\ ,\quad (\ G(t) \neq 0\ )\ . \tag{1.6.19}$$

Kako je $\alpha(t)$ homeomorfizam koji čuva smer, važi da je $\operatorname{Ind}\Phi^{+}[\alpha(t)] = \operatorname{Ind}\Phi^{+}(t) = N^{+}$, pa je $\varkappa = \operatorname{Ind} G(t) = N^{+} + N^{-}$, i za (1.6.19) važi isti zaključak kao i za Riemannov homogeni granični problem: za $\varkappa < 0$ homogeni problem nema rešenja, a za $\varkappa = 0$ rešenje homogenog graničnog problema nema nula.

Logaritmovanjem uslova (1.6.19) postupkom sličnim kao u slučaju Riemannovog problema, iz (1.6.17) i (1.6.18) dobijamo jedinstveno rešenje graničnog problema (1.6.19):

$$\Phi(z) = e^{\Gamma(z)}, \quad \Gamma^*(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\Gamma^*(\tau)}{\tau - z}\, d\tau, \qquad (1.6.20)$$

$$\Gamma^-(t) = g_1(t) + \int_L R(t,\tau)\cdot g_1(\tau)\, d\tau,$$

$$\Gamma^+(t) = \Gamma^-[\alpha_{-1}(t)] + \ln G[\alpha_{-1}(t)], \qquad (1.6.21)$$

gde je

$$g_1(t) = -\frac{1}{2}\cdot g(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{g(\tau)\cdot\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau) - \alpha(t)}\, d\tau \qquad (1.6.22)$$

i $R(t,\tau)$ rezolventa integralne jednačine (1.6.18).

Svodjenje Hasemanovog graničnog problema na Riemannov

Hasemanov granični problem se može svesti na Riemannov problem. Dovoljno je konstruisati konformno uzajamno jednoznačno preslikavanje oblasti D^* na oblasti D_1 koje imaju iste osobine kao i D^*, tako da se parovi tačaka t i $\alpha(t)$ polazne konture L preslikavaju u po jednu tačku nove konture L_1 za svako $t\in L$.

Nalaženje takvog konformnog preslikavanja w svodi se na rešavanje pomoćnog graničnog problema na L:

$$w^+[\alpha(t)] - w^-(t) = 0 \qquad (1.6.23)$$

pod uslovom da $w^-(t)$ u beskonačnosti ima pol prvog reda, tj. razlaganje oblika ([68]):

$$w^-(z) = z + \frac{C_1}{z} + \dots \qquad (1.6.24)$$

Iz (1.6.18) sledi da je $w^-(t)$ bezuslovno jedinstveno rešenje integralne jednačine:

$$w^-(t) - \frac{1}{2\pi i}\int_L \left[\frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau) - \alpha(t)} - \frac{1}{\tau - t}\right] w^-(\tau)\, d\tau = t. \qquad (1.6.25)$$

Pomoću rešenja jednačine (1.6.25), iz uslova (1.6.19) sledi da je $w^+(t) = w^-[\alpha_{-1}(t)]$, pa na osnovu Cauchyjeve formule dobijamo tražene funkcije $w^*(z)$.

Ako je $\sigma(t)$ funkcija inverzna $w^-(t)$, $(w^-[\sigma(t)] \equiv t)$, sledi

$$w^+\{\alpha[\sigma(t)]\} \equiv t. \qquad (1.6.26)$$

Definišemo deo po deo analitičku funkciju $\Phi_1(z)$ relacijama

$$\Phi^+(z) = \Phi_1^+[w^+(z)], \quad \Phi^-(z) = \Phi_1^-[w^-(z)]. \qquad (1.6.27)$$

Tada Hasemanov granični uslov (1.6.13) postaje:

$$\varphi_1^+\{w^+[\alpha(t)]\} = G(t)\cdot\varphi_1^-[w^-(t)] + g(t),$$

i za $t = \sigma(t_1)$

$$\varphi_1^+\{w^+[\alpha(\sigma(t_1))]\} = G[\sigma(t_1)]\cdot\varphi_1^-(t_1) + g[\sigma(t_1)].$$

Na osnovu (1.6.26) i ako uvedemo oznake $G_1 = G$ i $g_1 = g$ dobijamo Riemannov granični problem:

$$\varphi_1^+(t) = G_1(t)\cdot\varphi_1^-(t) + g_1(t) \tag{1.6.28}$$

ekvivalentan Hasemanovom graničnom problemu (1.6.13).

Ovo omogućuje formulisanje teoreme o rešavanju Hasemanovog graničnog problema.

<u>Teorema 1.6.7.</u> Homogeni Hasemanov granični problem (1.6.19) za $\kappa \geqslant 0$ ima $\kappa + 1$ linearno nezavisnih rešenja. Nehomogeni problem je bezuslovno rešiv i njegovo rešenje zavisi od $\kappa + 1$ proizvoljnih konstanti. Za $\kappa \leqslant -1$ homogeni problem nema rešenja, a nehomogeni ima rešenja samo ako je ispunjeno $-\kappa - 1$ uslova tipa (1.5.18).!!

Uopštenja Hasemanovog graničnog problema su brojna i mogu se razvrstati na sličan način kao i kod Riemannovog problema.

Granični problemi koji se svode na Hasemanov problem su, na primer, sledeći, [124]:

<u>Problem 1.</u> Ako je $G(t) \neq 0$, $G(t)$, $g(t) \in H_\mu(L)$, $\alpha_-(t)$ obratni pomak krive L takav da je $\alpha_-'(t) \neq 0$, $\alpha_-'(t) \in H_\mu(L)$, naći deo po deo analitičku funkciju koja na krivoj Ljapunova L zadovoljava granični uslov:

$$\varphi^+[\alpha_-(t)] = G(t)\cdot\overline{\varphi^-(t)} + g(t)\ .!! \tag{1.6.29}$$

<u>Problem 2.</u> Naći dve funkcije $\varphi^+(z)$ i $\psi^+(z)$ analitičke u oblasti D^+ ograničenoj krivom Ljapunova L, koje zadovoljavaju ili granični uslov

$$\varphi^+[\alpha_-(t)] = G(t)\cdot\psi^+(t) + g(t) \tag{1.6.30}$$

gde je $\alpha_-(t)$ obratni pomak na L, ili granični uslov

$$\varphi^+[\alpha_+(t)] = G(t)\cdot\overline{\psi^+(t)} + g(t)\ . \tag{1.6.31}$$

gde je $\alpha_+(t)$ direktni pomak.

U oba slučaja pretpostavimo da je $G(t) \neq 0$, $\alpha'(t) \neq 0$, $G(t)$, $g(t)$, $\alpha'(t) \in H_\mu(L)$.!!

Oba problema se pomoću odgovarajućih konformnih preslikavanja svode na Hasemanov granični problem.

U radovima [215] i [216], N.P. Vekua rešavao je Hasemanov problem za n parova funkcija sa n pomaka. L.I.Čibrikova [42] je posmatrala granični problem (1.6.13),(1.6.30) i (1.6.31) u slučaju otvorene konture, i u slučaju da date funkcije $G(t)$ i $g(t)$ imaju konačno mnogo prekida prve vrste na zatvorenoj konturi L.

I.B. Simonenko [188] rešio je Hasemanov problem u slučaju kada kontura L predstavlja rub višestruko povezane oblasti, $G(t)$ je neprekidna funkcija i $g(t) \in L_p(L)$, $1 < p < \infty$. On je dobio rešenja problema (1.6.13) u obliku integrala Cauchyjevog tipa sa graničnim vrednostima $\Phi^+(t)$, $\Phi^-(t) \in L_p(L)$ koje zadovoljavaju granični uslov (1.6.13) skoro svuda na L.

V.S. Rogožin [178] rešio je Hasemanov problem u klasi uopštenih funkcija uz pretpostavku da je $g(t)$ uopštena funkcija, a $G(t)$ i $\alpha(t)$ pripadaju prostoru beskonačno diferencijabilnih funkcija i $\alpha'(t) \neq 0$.

T.Z. Čočiev [45] posmatrao je problem Hasemana u slučaju da $\alpha'(t)$ ima na L konačno mnogo nula ili tačaka u kojima je beskonačno. Fan Tang Da [54] rešio je u kvadraturama Hasemanov granični problem na poluravni sa pomakom

$$\alpha(x) = \begin{cases} x & , x > 0, \\ \lambda x & , x < 0, \ \lambda > 0. \end{cases}$$

1.7. Carlemanov granični problem

Carlemanov (unutrašnji) granični problem. Neka je oblast D^+ ograničena prostom zatvorenom krivom Ljapunova L, $\alpha(t)$ obratni pomak krive L koji zadovoljava Carlemanov uslov

$$\alpha[\alpha(t)] = t \quad , \tag{1.7.1}$$

i $G(t)$, $g(t)$, $\alpha'(t) \in H_\mu(L)$, $G(t) \neq 0$, $\alpha'(t) \neq 0$.

Naći funkciju $\Phi^+(z)$ analitičku u oblasti D^+ koja zadovoljava Hölderov uslov u $D^+ + L$ i granični uslov

$$\Phi^+[\alpha(t)] = G(t)\cdot\Phi^+(t) + g(t) \tag{1.7.2}$$

na krivoj L.!!

Ako u (1.7.2) zamenimo t i $\alpha(t)$ dobijamo

$$\Phi^+(t) = G[\alpha(t)]\cdot\Phi^+[\alpha(t)] + g[\alpha(t)] \ , \qquad (1.7.3)$$

i ako iz (1.7.2) i (1.7.3) eliminišemo $\Phi^+[\alpha(t)]$, dobijamo

$$\Phi^+(t) = G[\alpha(t)]G(t)\cdot\Phi^+(t) + G[\alpha(t)]g(t) + g[\alpha(t)]. \qquad (1.7.4)$$

U slučaju da je

$$G[\alpha(t)]\cdot G(t) \neq 1 \ , \qquad (1.7.5)$$

homogeni problem $\Phi^+[\alpha(t)] = G(t)\cdot\Phi^+(t)$ nema netrivijalnih rešenja, a nehomogeni problem (1.7.2) transformiše se u oblik

$$\Phi^+(t) = \frac{G[\alpha(t)]\cdot g(t) + g[\alpha(t)]}{1 - G[\alpha(t)]\cdot G(t)} = \nu(t).$$

S obzirom da je $1 - G[\alpha(t)]\cdot G(t) \neq 0$ na L, sledi da je $\nu(t)\in H_\mu(L)$, pa je, na osnovu formule (1.1.8) Plemelja-Sohockog, $\nu(t) = \nu^+(t) - \nu^-(t)$, gde su $\nu^+(t)$ i $\nu^-(t)$ granične vrednosti funkcija analitičkih u D^+ i D^- respektivno.

Razlikovaćemo dva slučaja:

a) $\nu^-(t) \equiv 0$, tj. $\nu(t)$ je granična vrednost funkcije analitičke u D^+. U tom slučaju je (1.7.2) problem analitičkog produženja. Taj problem ima jedinstveno rešenje:

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\nu(\tau)}{\tau - z}\,d\tau \ .$$

b) $\nu^-(t) \neq 0$. U tom slučaju problem (1.7.2) nema rešenja.

Kada je

$$G[\alpha(t)]\cdot G(t) \equiv 1 \quad \text{na } L \qquad (1.7.6)$$

moguća su dva slučaja:

a) $G[\alpha(t)]\cdot g(t) + g[\alpha(t)] \neq 0$ na podskupu krive L čija je mera veća od nule. U tom slučaju problem (1.7.2) je nerešiv, s obzirom da na L postoji skup mere veće od nula na kojem ne postoji granična vrednost funkcije $\Phi^+(z)$.

b) $G[\alpha(t)]\cdot g(t) + g[\alpha(t)] \equiv 0$ na L . (1.7.7)

Iz svega navedenog sledi da je netrivijalan jedino slučaj, kada su ispunjena oba uslova (1.7.6) i (1.7.7). Svi zaključci koji slede odnose se na taj slučaj.

U [124] dokazana je sledeća teorema:

<u>Teorema 1.7.1.</u> Opšte rešenje Carlemanovog problema

$$\Phi^+[\alpha(t)] - \lambda\cdot\Phi^+(t) = g(t) \ , \ \lambda = \pm 1$$

čiji slobodni član zadovoljava jedan od uslova

$$g[\alpha(t)] + \lambda\cdot g(t) = 0 \ , \quad \lambda = \pm 1 \ ,$$

dato je formulama

$$\Phi^+(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi[\alpha(\tau)]}{\tau - z}\,d\tau + C \quad za\ \lambda = 1 \tag{1.7.8}$$

i

$$\Phi^+(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi[\alpha(\tau)]}{\tau - z}\,d\tau \quad za\ \lambda = -1, \tag{1.7.9}$$

gde je C proizvoljna kompleksna konstanta, a $\varphi(t)$ rešenje integralne jednačine

$$\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \left[\frac{1}{\tau - t} - \frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau) - \alpha(t)}\right]\cdot\varphi(\tau)\,d\tau = g(t)\ .\Vert \tag{1.7.10}$$

Time je dato rešenje Carlemanovog problema za dva specijalna slučaja neophodna da se konstruiše konformno preslikavanje kojim se Carlemanov granični problem (1.7.2), (uz uslove (1.7.6) i (1.7.7)), svodi na Riemannov granični problem na otvorenoj krivoj.

Teorema 1.7.2. Neka je $\alpha(t)$ obratni pomak Carlemana. Postoji funkcija $w^+(z)$,analitička svuda u oblasti D^+ osim u nekoj tački $z = z_0 \in D^+$, gde $w^+(z)$ ima prosti pol,koja na krivoj Ljapunova L koja je rub oblasti D^+, zadovoljava uslov lepljenja

$$w^+[\alpha(t)] = w^+(t)\ . \tag{1.7.11}$$

Funkcija $w^+(z)$ jednoznačno preslikava oblast D^+ na oblast Δ koja je ravan sa rezom duž proste nezatvorene krive Ljapunova L_1.$\Vert$

Rešenje unutrašnjeg Carlemanovog graničnog problema

Pod pozitivnim smerom na krivoj L_1 podrazumevaćemo smer od kraja w = a ka kraju w = b krive.

Tada su granične vrednosti funkcije z(w) inverzne funkciji $w^+(z)$, (kada se krivoj L_1 približavamo sleva i zdesna)

$$z^+(w) = t \quad , \ z^-(w) = \alpha(t)\ ,\ w \in L_1,\ t \in L_+ \tag{1.7.12}$$

ili, s obzirom na Carlemanov uslov $\alpha[\alpha(t)] = t$:

$$z^+(w) = \alpha(t),\ z^-(w) = t,\ w \in L_1,\ t \in L_-\ . \tag{1.7.13}$$

Uvedimo novu nepoznatu funkciju

$$\Phi_1^+(w) = \Phi^+[z(w)], \tag{1.7.14}$$

odakle je

$$\Phi^+[z^+(w)] = \Phi_1^+(w),\quad \Phi^+[z^-(w)] = \Phi_1^-(w),$$

i Carlemanov uslov prelazi na krivoj L_1 u granični uslov Riemannovog problema

$$\Phi_1^-(w) = G[z^+(w)]\cdot\Phi_1^+(w) + g[z^+(w)]\ . \tag{1.7.15}$$

Slično, ako podjemo od relacija (1.7.13),($t \in L_-$), dobijamo na L_1 Riemannov granični problem

$$\Phi^+(w) = G[z^-(w)]\cdot\Phi^-(w) + g[z^-(w)] \qquad (1.7.16)$$

S obzirom da, na osnovu (1.7.12) i (1.7.13), uslovi (1.7.6) i (1.7.7) prelaze u uslove

$$G[z^-(w)]\cdot G[z^-(w)] \equiv 1 \ , \ i$$

$$G[z^-(w)]\cdot g[z^+(w)] + g[z^-(w)] = 0,$$

odatle sledi da se problemi (1.7.15) i (1.7.16) poklapaju.

Rešenje Riemannovog problema (1.7.16) tražimo u klasi funkcija ograničenih u okolini krajeva $w = a$ i $w = b$ krive L_1 i u beskonačno udaljenoj tački. Zahtev da rešenje $\Phi_1(w) = \Phi^+[z(w)]$ bude ograničeno u okolini tačaka $w = a$ i $w = b$, sledi iz ograničenosti funkcije $\Phi^+(z)$ u okolini tačaka $z = A$ i $z = B$. Rešenje $\Phi_1(w)$ mora da bude ograničeno u beskonačnosti jer je $\Phi_1(\infty) = \Phi^+(z_0)$ konačan broj, u opštem slučaju različit od nule.

Način rešavanja Riemannovog graničnog problema za nezatvorenu konturu podrobno je opisan u monografiji Gahova [68] (strane 478-487). Ovde će biti naveden samo rezultat koji se odnosi na pitanje egzistencije i broja rešenja problema (1.7.16).

Označimo sa m^- broj nepokretnih tačaka pomaka $\alpha(t)$ u kojima koeficijent graničnog problema ima vrednost -1. Broj m^- može imati samo jedno od vrednosti: 0, 1, 2. Dokazuje se da je za $\kappa = \mathrm{Ind}\, G(t) = \frac{1}{2\pi}\cdot\{\arg G(t)\}_L$ parno, $m^- = 0$ ili $m^- = 2$, a za κ neparno, $m^- = 1$.

Teorema 1.7.3. Ako je $\kappa + m^- \leq 0$, broj rešenja unutrašnjeg homogenog Carlemanovog graničnog problema jednak je

$$1 - \frac{\kappa + m^-}{2} ,$$

a odgovarajući nehomogeni problem je bezuslovno rešiv.

Ako je $\kappa + m^- > 0$, homogeni problem nema netrivijalnih rešenja, a nehomogeni problem ima rešenje ako i samo ako je zadovoljeno

$$\frac{\kappa + m^-}{2} - 1$$

dodatnih uslova.!!

Opšte rešenje Carlemanovog graničnog problema dobija se iz opšteg rešenja odgovarajućeg Riemannovog problema pomoću formule $\Phi^+(z) = \Phi_1^+[w^+(z)]$.

Kako rešenje Riemannovog problema (1.7.16) svakako zadovoljava uslove $\Phi_1^+(a+0) = \Phi_1^-(a-0) = \Phi_1(a)$ i $\Phi_1^+(b-0) = \Phi_1^-(b+0) = \Phi_1(b)$, rešenje $\Phi^+(z)$ se neprekidno proširuje na nepokretne tačke $z = A$ i $z = B$.

Slično kao i u slučaju Hasemanovog graničnog problema, i za Carlemanov problem važi da se rešenja mogu dobiti u zatvorenoj formi ako je poznato konformno preslikavanje $w^+: D^+ \to \Delta$. U izvesnom smislu, odredjivanje preslikavanja w^+ ekvivalentno je nalaženju rešenja Fredholmove integralne jednačine oblika (1.7.10) za $g(t) \equiv t$. Problem Carlemana moguće je rešiti u kvadraturama ako takvo rešenje dopušta integralna jednačina

$$\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \left[\frac{1}{\tau - t} - \frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau) - \alpha(t)}\right]\cdot\varphi(\tau)\, d\tau = t\,. \qquad (1.7.17)$$

<u>Rešenje spoljašnjeg Carlemanovog graničnog problema</u>

Spoljašnji Carlemanov granični problem svodi se na traženje funkcije analitičke u spoljašnjoj oblasti D^- krive Ljapunova L, koja, uz sve uslove za $\alpha(t)$, $G(t)$ i $g(t)$ kao i kod unutrašnjeg Carlemanovog problema, zadovoljava granični uslov

$$\Phi^-[\alpha(t)] = G(t)\cdot\Phi^-(t) + g(t), \qquad (1.7.18)$$

gde funkcije $G(t)$ i $g(t)$ zadovoljavaju uslove (1.7.6) i (1.7.7).

<u>Teorema 1.7.4.</u> [124] Granični problem

$$\Phi^-[\alpha(t)] - \Phi^-(t) = g(t), \qquad (1.7.19)$$

gde je $g(t) + g[\alpha(t)] = 0$, je rešiv i njegovo opšte rešenje u klasi funkcija ograničenih u beskonačnosti je oblika

$$\Phi^-(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi[\alpha(\tau)]}{\tau - z}\, d\tau + C\,, \qquad (1.7.20)$$

gde je $\varphi(t)$ jedinstveno rešenje FIJ

$$-\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \left[\frac{1}{\tau - t} - \frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau) - \alpha(t)}\right]\cdot\varphi(\tau)\, d\tau = g(t), \qquad (1.7.21)$$

a C proizvoljna konstanta.!!

<u>Teorema 1.7.5.</u> [124] Carlemanov granični problem

$$\Phi^-[\alpha(t)] + \Phi^-(t) = g(t) \qquad (1.7.22)$$

gde je $g(t) - g[\alpha(t)] = 0$, rešiv je u klasi funkcija ograničenih u beskonačnosti i njegovo rešenje je oblika

$$\Phi^-(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi[\alpha(\tau)]}{\tau - z}\,d\tau + \mu,$$

gde je $\varphi(t)$ rešenje integralne jednačine (1.7.21), $\mu = \Phi^-(\infty)$ i

$$\mu = \frac{\int_L g(t)\psi(t)\,dt}{2\cdot\int_L \psi(t)\,dt},$$

gde je $\psi(t)$ rešenje integralne jednačine

$$\psi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_L [\frac{1}{\tau - t} - \frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau) - \alpha(t)}]\cdot\psi(\tau)\,d\tau = 0 \ .|| \qquad (1.7.23)$$

<u>Teorema 1.7.6.</u> Neka je $\alpha(t)$ Carlemanov obratni pomak. Postoji funkcija $w^-(z)$ analitička u oblasti D^-, sa izuzetkom beskonačno udaljene tačke u kojoj ima pol, koja na krivoj Ljapunova L koja je rub oblasti D^- zadovoljava uslov

$$w^-[\alpha(t)] = w^-(t).$$

Funkcija $w^-(z)$ jednolisno preslikava oblast D^- na ravan Δ sa razrezom duž proste nezatvorene krive Ljapunova L_1.||

Uz oznake iste kao u slučaju unutrašnjeg Carlemanovog graničnog problema, važi:

<u>Teorema 1.7.7.</u> Broj rešenja spoljašnjeg homogenog Carlemanovog problema jednak je

$$q = \max.(\,0,\ -1 + \frac{\kappa - m^-}{2}\,),$$

a broj uslova rešivosti odgovarajućeg nehomogenog problema jednak je

$$p = \max\,(\,0,\ -1 - \frac{\kappa - m^-}{2}\,).$$

U klasi funkcija koje iščezavaju u beskonačnosti je:

$$q = \max\,(\,0,\ \frac{\kappa - m^-}{2}\,)\ ,\ p = \max\,(\,0\ ,\ - \frac{\kappa - m^-}{2}\,). \quad ||$$

Pored Carlemanovog problema, u literaturi se pojavljuje i takozvani:

<u>Granični problem Carlemanovog tipa</u>. Naći funkciju $\Phi^+(z)$ analitičku na oblasti D^+ ograničenoj prostom zatvorenom krivom Ljapunova, koja zadovoljava Hölderov uslov na $D^+ + L$ i na

krivoj L zadovoljava granični uslov

$$\Phi^{+}[\alpha(t)] = G(t)\cdot\overline{\Phi^{+}(t)} + g(t) , \qquad (1.7.24)$$

gde je $\alpha(t)$ obratni pomak Carlemana koji zadovoljava uslov $\alpha[\alpha(t)] = t$ i $G(t)$, $g(t)$, $\alpha'(t) \in H_{\mu}(L)$, $G(t) \neq 0$ i $\alpha'(t) \not\equiv 0$.¦¦

Ostala uopštenja Carlemanovog problema slična su, po tipu, već pomenutim uopštenjima problema Riemanna i Hasemana.

1.8. Hilbertov granični problem

Hilbertov granični problem je u tesnoj vezi sa Dirichletovim i Riemannovim problemima za analitičke funkcije. Formulacija ovog problema za prostopovezane oblasti glasi:

Hilbertov granični problem Data su prosta, glatka, zatvorena kontura L i realne funkcije $a(s), b(s), c(s) \in H_{\mu}(L)$. Naći funkciju $f(z) = u(x,y) + i\cdot v(x,y)$ analitičku u oblasti D^{+} i neprekidnu na konturi L, čije granične vrednosti realnog i imaginarnog dela na L zadovoljavaju uslov

$$a(s)\cdot u(s) + b(s)\cdot v(s) = c(s) .¦¦ \qquad (1.8.1.)$$

Ako je $c(s) \equiv 0$ imamo homogeni problem ,a ako je $c(s) \neq 0$ na L – nehomogeni Hilbertov problem .

Već je ranije napomenuto da nije svaka funkcija $G(t) = G[t(s)] = a(s) + ib(s)$, zadata na konturi L,granična vrednost funkcije analitičke u oblasti D^{+}. Ako taj uslov za funkciju $G(t)$ nije ispunjen, postavlja se pitanje da li postoji funkcija $p(t)$ tačaka konture L koja zadovoljava Hölderov uslov, takva da je $G(t)\cdot p(t) = \Phi^{+}(t)$, tj. granična vrednost neke funkcije $\Phi^{+}(z)$ analitičke u oblasti D^{+}. Ako takva funkcija postoji, ona, očito, nije jednoznačno data.

Regularizacioni faktor kompleksne funkcije $a(s) + i\cdot b(s)$ date na konturi L, je realna pozitivna funkcija $p(s)$ definisana na L,takva da je $p(s)[a(s) + i\cdot b(s)]$ granična vrednost funkcije $X^{+}(z)$ analitičke u oblasti D^{+} , koja ima red nula svuda u D^{+} osim u koordinatnom početku, gde joj je red jednak indeksu κ funkcije $a(s) + i\cdot b(s)$.¦¦

Ako je

$$\kappa = \mathrm{Ind}\,[a(s) + i\cdot b(s)], \tag{1.8.2}$$

proizvoljna funkcija $F(s) = a(s) + i\cdot b(s)$ tačaka konture L, $F \in H_\mu(L)$, $F(s) \neq 0$ za svako $s\in L$, ima realni regularizacioni faktor $p(s)$.

Za $\kappa = 0$ i

$$\Upsilon(z) = w(x,y) + i\cdot w_1(x,y) = S\,\mathrm{arctg}(b/a), \tag{1.8.3}$$

gde je S Schwartzov operator, regularizacioni faktor funkcije $F(s)$ je

$$p(s) = \frac{e^{-w_1(s)}}{\sqrt{a^2(s) + b^2(s)}}\,. \tag{1.8.4}$$

Za $\kappa \neq 0$ i

$$\Upsilon(z) = S[\mathrm{arctg}(b/a) - \kappa\cdot\arg t]\,, \tag{1.8.5}$$

je

$$p(s) = \frac{|t|^{\kappa}\, e^{-w_1(s)}}{\sqrt{a^2(s) + b^2(s)}}\,. \tag{1.8.6}$$

Uz dodatni uslov

$$\mathrm{Im}\,\Upsilon(z_0) = w_1(z_0) = 0\,,\ z_0\in D^+\,, \tag{1.8.7}$$

realni regularizacioni faktor $p(s)$, dat je jednoznačno.

Homogeni Hilbertov granični problem

Pretpostavimo da u graničnom uslovu

$$a(s)\cdot u(s) + b(s)\cdot v(s) = 0 \tag{1.8.8}$$

funkcije $a(s)$ i $b(s)$ nisu istovremeno jednake nuli. U tom slučaju, deljenjem sa $\sqrt{a^2(s) + b^2(s)}$, uslov (1.8.8) se svodi na slučaj kada je $a^2(s) + b^2(s) = 1$ i može se napisati u obliku

$$\mathrm{Re}\{\frac{F(t)}{a + i\cdot b}\} = 0\,, \tag{1.8.9}$$

gde je

$$F(z) = u(x,y) + i\cdot v(x,y)\,. \tag{1.8.10}$$

Deljenjem uslova (1.8.9) regularizacionim faktorom funkcije $a + i\cdot b$, granični uslov dobija oblik:

$$\mathrm{Re}[\frac{F(t)}{t^{\kappa}\cdot e^{i\Upsilon(t)}}] = 0\,. \tag{1.8.11}$$

Za $\kappa = 0$ uslov (1.8.11) postaje Dirichletov granični problem čije je rešenje:

$$F(z) = i\cdot\beta_0\cdot e^{i\Upsilon(z)} \tag{1.8.12}$$

gde je β_0 proizvoljna konstanta.

Za $\kappa > 0$ granični uslov (1.8.11) je uslov graničnog problema A_0, pa, na osnovu rezultata na strani 12, sledi da je njegovo rešenje oblika

$$F(z) = z^{\kappa} \cdot e^{iT(z)} \cdot Q(z) \quad , \tag{1.8.13}$$

gde je

$$Q(z) = i \cdot \beta_o + \sum_{k=1}^{\kappa} \{C_k[\alpha(z)]^k - \bar{C}_k[\alpha(z)]^{-k}\} \tag{1.8.14}$$

i $\alpha = \alpha(z)$ funkcija koja konformno preslikava oblast D^+ ravni z na jedinični krug ravni w tako da neka tačka z_o prelazi u koordinatni početak ($w(z_o) = 0$) i $w'(z_o) > 0$. U tom slučaju problem ima $2\kappa + 1$ linearno nezavisnih rešenja.

Ako je $\kappa < 0$, homogeni Hilbertov problem nema rešenja.

Nehomogeni Hilbertov granični problem

Granični uslov (1.8.1) može se napisati u obliku

$$\mathrm{Re}\left[\frac{F(t)}{t^{\kappa} \cdot e^{iT(t)}}\right] = |t|^{-\kappa} \cdot e^{wT(\ )} \cdot c(s) \ . \tag{1.8.15}$$

U slučaju $\kappa = 0$, uslov (1.8.15) je Dirichletov granični uslov, a opšte rešenje Hilbertovog problema je

$$F(z) = e^{iT(z)}[S(|t|^{-\kappa} \cdot e^{w_1(s)} \cdot c(s)) + i \cdot \beta_o] \ . \tag{1.8.16}$$

Kada je $\kappa > 0$, uslov (1.8.15) je granični uslov problema A (na strani 12), a rešenje tog problema je

$$F(z) = z^{\kappa}e^{iT(z)}[S(|t|^{-\kappa} \cdot e^{w_1(s)}c(s)) + Q(z)] \ . \tag{1.8.17}$$

Ako je $\kappa < 0$, rešenje nehomogenog Hilbertovog problema je oblika

$$F(z) = z^{\kappa}e^{iT(z)}[S(|t|^{-\kappa} \cdot e^{w_1(s)}c(s)) + i \cdot C)] \ . \tag{1.8.18}$$

Zbog faktora z^{κ} , ova funkcija može imati u nuli pol reda $-\kappa$. Da bi (1.8.18) bila analitička funkcija, moramo pretpostaviti da je $C = 0$ i da funkcija $S(|t|^{-\kappa} \cdot e^{w_1(s)}c(s))$ ima nulu reda $-\kappa$ u koordinatnom početku. Taj zahtev povlači za sobom $-2\kappa - 1$ uslova koje slobodni član $c(s)$ mora da zadovolji, da bi postojalo rešenje Hilbertovog problema.

Slično kao i u slučaju Carlemanovog graničnog problema, i za Hilbertov problem je moguće formulisati spoljašnji slučaj. U formulaciji Hilbertovog graničnog problema sve ostaje isto osim što tražimo rešenje koje je analitičko u beskonačnoj oblasti D^- čiji je rub kontura L.

narednim glavama.

Ovde će biti podrobnije opisan samo jedan slučaj uopštenja koji se pojavljuje u narednim poglavljima.

Hilbertov granični problem za višestruko povezane oblasti

Osobenost funkcija analitičkih u višestruko povezanoj oblasti je da njihovo razlaganje u Taylorov red može da bude nejednoznačno. U slučaju Riemannovog problema, gde je granični uslov dat u kompleksnom obliku,ta osobenost ne utiče na rešenje.

U slučaju Hilbertovog graničnog problema na višestruko povezanoj oblasti,rešenje je nejednoznačna analitička funkcija. Ako uslovi zadatka zahtevaju da rešenje bude jednoznačno, nastupaju često ozbiljne teškoće koje nije uvek moguće savladati.

Da bi bili u stanju da rešimo Hilbertov granični problem za višestruko povezanu oblast, neophodno je prvo uopštiti Dirichletov granični problem kao i granične probleme A_0 i A (strana 12) na slučaj višestruko povezane oblasti.

Neka je D^+ $(m + 1)$ -povezana oblast ograničena prostim disjunktnim glatkim krivama Ljapunova L_0, L_1, ..., L_m takvim da L_0 obuhvata sve ostale.

Da bi Dirichletov granični problem na D^+ bio uvek rešiv, neophodno ga je preformulisati na sledeći način:

Izmenjeni Dirichletov granični problem Naći funkciju $u(x,y)$ koja je realni deo neke funkcije $\Phi(z)$ analitičke i jednoznačne u oblasti D^+, neprekidne na rubu oblasti D^+, koja zadovoljava granični uslov

$$u = f(s) + h(s) \quad , \tag{1.8.24}$$

gde je $h(s)$ funkcija koja na konturama L_j,$(j=0,1,2,...,m)$, ima proizvoljne konstantne vrednosti h_j koje nisu unapred zadate.!!

Rešenje ovako formulisanog problema dao je N.Mushelišvili [136]. On je definisao Greenovu funkciju $T(z,\tau)$ i Schwartzov operator

$$Su \equiv \frac{1}{2\pi} \int_L T(z,\tau)u(\sigma)\, d\sigma \tag{1.8.25}$$

koji odgovaraju ovom graničnom problemu, a u čiju se strukturu ovde nećemo upuštati zbog nedostatka prostora.

Granični problemi A_0 i A se, za višestruko povezane oblasti, formulišu na potpuno isti način, kao što je to u 1.3. uradjeno u slučaju da je oblast prostopovezana. Za tražene analitičke funkcije koje imaju pol u jednoj tački $z_0 \in D^+$ ne postavljaju se nikakvi dodatni uslovi, što znači da se dopuštaju višeznačna rešenja ovih graničnih problema. Da bi rešili ove probleme, potrebno nam je konformno preslikavanje koje preslikava oblast D^+ na jedinični krug. Očito je da se takvo preslikavanje ne može realizovati jednoznačnom funkcijom.

Teorema 1.8.1 [78] Svaka oblast D^+ ravni z koja ima više od dve granične tačke može se na jedinstven način konformno preslikati na krug $|\xi| < 1$ tako da datoj tački $z_0 \in D^+$ i datom smeru na njoj, odgovaraju tačka $\xi = 0$ i pozitivan smer realne ose.||

Ako je $\xi = w(z)$ takvo konformno preslikavanje, na osnovu svega pomenutog, dokazano je da granični problem A_0 za višestruko povezanu oblast D^+ ima rešenje oblika

$$F(z) = Su + Q(z) , \tag{1.8.26}$$

gde je

$$Q(z) = i\beta_0 + \sum_{k=1}^{n} \{C_k[w(z)]^k - \bar{C}_k[w(z)]^{-k}\} \tag{1.8.27}$$

i n red pola funkcije $F(z)$ u tački $z_0 \in D^+$.

Kao i kod prostopovezanog slučaja tako i ovde opšte rešenje sadrži $2n + 1$ proizvoljnih realnih konstanti.

Tek sada je moguće naći rešenje homogenog Hilbertovog graničnog problema u klasi višeznačnih funkcija na oblasti D^+.

Pretpostavimo da je

$$\kappa = \mathrm{Ind}\,[a(s) + i\cdot b(s)]_L = \sum_{j=0}^{m} \kappa_j , \tag{1.8.28}$$

gde je

$$\frac{1}{2\pi}\,[\arg(a + i\cdot b)]_{L_j} = \kappa_j . \tag{1.8.29}$$

Teorema 1.8.2. Ako je $\kappa \geqslant 0$, homogeni Hilbertov granični problem za višestruko povezanu oblast D^+ u klasi nejednoznačnih analitičkih funkcija, ima $2\kappa + 1$ linearno nezavisnih rešenja datih formulom

$$F(z) = z^{\kappa}\cdot e^{iT(z)}\cdot Q(z) , \tag{1.8.30}$$

gde je

$$\Upsilon(z) = S[\arg(\frac{a + i\cdot b}{t^{\kappa}})] \tag{1.8.31}$$

i $Q(z)$ je dato relacijom (1.8.27).

Ako je $\kappa < 0$, homogeni Hilbertov problem nema rešenja u klasi analitičkih funkcija.!!

U slučaju nehomogenog Hilbertovog problema regularizacioni faktor nije jednoznačno dat, što zadaje teškoće pri izračunavanju Schwartzovog operatora za višeznačne funkcije.

Pretpostavimo da se traži rešenje nehomogenog Hilbertovog problema

$$\mathrm{Re}\,\{[a(s) - i\cdot b(s)]\cdot F(t)\} = C(s) \tag{1.8.32}$$

na D^{+} u klasi jednoznačnih analitičkih funkcija.

Pretpostavimo da je rešenje oblika

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L}\frac{\mu(\tau)}{\tau - z}\,d\tau + i\cdot\int_{L}\mu(\sigma)\,d\sigma, \tag{1.8.33}$$

pri čemu je gustina μ potpuno definisana na konturi L_m, a na ostalim konturama je odredjena sa tačnošću do na sabirak oblika

$$C_1\cdot\mu_1 + C_2\cdot\mu_2 + \cdots + C_{m-1}\cdot\mu_{m-1},$$

gde su C_j proizvoljne realne konstante, a $\mu_1, \ldots, \mu_{m-1}$ konstante odredjene formulom

$$\mu_j = \begin{cases} 1 & ,\ t\in L_j,\ (j=1,2,\ldots,m-1) \\ 0 & ,\ \text{na ostalim konturama.} \end{cases} \tag{1.8.34}$$

Na osnovu formula Plemelja-Sohockog, kada graničnu vrednost na L funkcije (1.8.33) uvrstimo u (1.8.32), dobijamo da $\mu(s)$ zadovoljava integralnu jednačinu

$$a(s)\mu(s)+\mathrm{Re}[\frac{a(s)-ib(s)}{\pi i}\int_{L}\frac{\mu(\sigma)}{\tau - t}\,d\tau]+2b(s)\int_{L_m}\mu(\sigma)\,d\sigma=2c(s). \tag{1.8.35}$$

Kada rešimo jednačinu (1.8.35), na osnovu (1.8.34), dobijamo sva rešenja problema (1.8.32).

<u>Teorema 1.8.3.</u> Ako je indeks Hilbertovog problema negativan, homogeni problem nema rešenja, a nehomogeni je rešiv ako i samo ako je ispunjeno $-2\kappa + m - 1$ dopunskih uslova ortogonalnosti funkcije $c(s)$ i svih rešenja integralne jednačine

$$a(s)\nu(s)-\mathrm{Re}\{\frac{t'(s)}{\pi i}\int_{L}\frac{a(\sigma)-ib(\sigma)}{\tau - t}\nu(\sigma)\,d\sigma = \begin{cases} -2\int_{L}b(\sigma)\nu(\sigma)\,d\sigma & ,\ \text{na } L_m \\ 0 & ,\ \text{na ostalim konturama.} \end{cases}$$

Ako je $\kappa > m - 1$, nehomogeni problem ima bezuslovno rešenje, a homogeni, $2\kappa - (m - 1)$ rešenja.||

O graničnim slučajevima $\kappa = 0$ i $\kappa = m - 1$ biće kasnije reči u glavi II.

1.9. Veza Riemannovog i Hilbertovog graničnog problema i veza graničnih problema sa teorijom integralnih jednačina

Na osnovu svega do sada izloženog vidi se da se Hasemanov i Carlemanov problem pogodno izabranim konformnim preslikavanjima svode na Riemannov problem.

U slučaju jednostavnijih kontura (prave i kružnice), Hilbertov problem se može neposredno svesti na Riemannov. Za složene konture se ta vrsta veze izmedju ova dva granična problema uspostavlja konformnim preslikavanjem odgovarajućih oblasti na krug ili poluravan.

Gahov je 1941. uspostavio sledeću vezu izmedju ova dva granična problema.

Teorema 1.9.1 Neka je L jedinična kružnica. "Unutrašnja" funkcija $\Phi^+(z)$ Riemannovog graničnog problema

$$\Phi^+(t) = G(t)\cdot\Phi^-(t) + g(t)$$

sa koeficijentima

$$G(t) = \frac{a(s) + i\cdot b(s)}{a(s) - i\cdot b(s)}\ , \quad g(t) = \frac{2c(s)}{a(s) - i\cdot b(s)}\ ,$$

uz pogodan izbor proizvoljnih konstanti koje figurišu u njegovom opštem rešenju, predstavlja rešenje Hilbertovog problema sa graničnim uslovom

$$a(s)u(s) + b(s)v(s) = c(s).||$$

Osnovna razlika u postavkama Riemannovog i Hilbertovog graničnog problema ogleda se u tome što se u prvom traži deo po deo analitička funkcija definisana u celoj ravni, dok se u drugom traži funkcija definisana samo u oblasti D^+, a oblast D^- nas uopšte ne interesuje. Da bismo ustanovili vezu koja postoji u samim postavkama ovih problema, moramo, pre svega, da dodefinišemo rešenje $\Phi^+(z)$ Hilbertovog problema i na oblast D^-. U slučaju kada je kontura L prava, proširenje vršimo simetrično, a kada je L kružnica, pomoću inverzije.

U opštem slučaju može se dogoditi da dobijeno produženje nije analitičko,ali nama to i nije potrebno. Jedino je važno da produženje $\Phi^-(z)$ bude sa $\Phi^+(z)$ povezano preko Riemannovog graničnog uslova.

Otuda je Riemannov granični problem, u neku ruku, najopštiji.

Pomenimo da je teorija graničnih problema za analitičke funkcije usko vezana za teoriju singularnih integralnih jednačina, pa se ove dve teorije paralelno razvijaju.

Riemannovi granični problemi su u tesnoj vezi sa teorijom singularnih integralnih jednačina sa Cauchyjevim jezgrom oblika:

$$a(t)\varphi(t) + \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\mu(t,\tau)}{\tau - t}\,\varphi(\tau)\,d\tau = f(t), \qquad (1.9.1)$$

gde su $a(t)$, $f(t)$, $\mu(t,\tau) \in H_\mu(L)$, pri čemu ova poslednja po obe promenljive, na konturi $L = L_0 + L_1 + \ldots + L_m$ koja je disjunktna unija zatvorenih glatkih krivih (slika 1.3).

Ako transformišemo jezgro pomoću $\dfrac{\mu(t,\tau)}{\tau - t} = \dfrac{\mu(t,\tau) - \mu(t,t)}{\tau - t} +$ $+ \dfrac{\mu(t,t)}{\tau - t}$ i uvedemo oznake $\mu(t,t) = b(t)$, $\dfrac{1}{\pi i}\cdot\dfrac{\mu(t,\tau) - \mu(t,t)}{\tau - t} =$ $= k(t,\tau)$, jednačina (1.9.1) ima oblik:

$$K\varphi \equiv a(t)\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau + \int_L k(t,\tau)\varphi(\tau)\,d\tau = f(t). \quad (1.9.2)$$

Dokazano je da je $b(t) \in H_\mu(L)$ i da je

$$|k(t,\tau)| \leqslant \frac{A}{|\tau - t|^{1-\lambda}}, \quad (0 < \lambda \leqslant 1,\ \tau \neq t).$$

Jednačina (1.9.2) naziva se <u>kompletnom singularnom integralnom jednačinom</u> .

Jednačina

$$K^0\varphi \equiv a(t)\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau = f(t) \qquad (1.9.3)$$

naziva se <u>karakterističnom jednačinom</u> .

Ako uvedemo deo po deo analitičku funkciju

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau$$

pokazuje se da je jednačina (1.9.3) ekvivalentna Riemannovom graničnom problemu

$$\Phi^+(t) = G(t)\cdot\Phi^-(t) + g(t),$$

gde je $G(t) = \dfrac{a(t) - b(t)}{a(t) + b(t)}$, $g(t) = \dfrac{f(t)}{a(t) + b(t)}$, uz uslov $\Phi^-(\infty) = 0$.

Indeks koeficijenta $\frac{a(t) - b(t)}{a(t) + b(t)}$ Riemannovog problema naziva se <u>indeksom integralne jednačine</u> (1.9.3).

Slična relacija postoji izmedju teorije Hasemanovog graničnog problema i teorije singularnih integralnih jednačina sa pomakom oblika

$$a(t)\varphi(t) + b(t)\varphi[\alpha(t)] + \frac{c(t)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau + \frac{d(t)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - \alpha(t)}\,d + \int_L k(t,\tau)\varphi(\tau)\,d\tau = g(t)\,, \qquad (1.9.4)$$

gde je $\alpha[\alpha(t)] = t$.

Hilbertov granični problem je u tesnoj vezi sa teorijom karakterističnih singularnih integralnih jednačina sa Hilbertovim jezgrom, oblika

$$a(s)u(s) - \frac{b(s)}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\sigma)\,\mathrm{ctg}\,\frac{\sigma - s}{2}\,d\sigma = c(s)\,, \qquad (1.9.5)$$

gde je $a(s)$, $b(s)$, $c(s) \in H_\mu(L)$.

Karakteristična singularna IJ sa Hilbertovim jezgrom (1.9.5) ekvivalentna je Hilbertovom graničnom problemu

$$a(s)u(s) + b(s)v(s) = c(s) \qquad (1.9.6)$$

za krug, sa dopunskim uslovom

$$\int_0^{2\pi} v(\sigma)\,d\sigma = 0\,, \qquad (1.9.7)$$

u tom smislu da ako je $F(z)$ rešenje graničnog problema (1.9.6) koje zadovoljava uslov (1.9.7), granična vrednost njegovog realnog dela je rešenje integralne jednačine (1.9.5), i obratno, ako je $u(s)$ rešenje integralne jednačine (1.9.5), primenom Schwartzovog operatora i uslova (1.9.7), dobijamo rešenje Hilbertovog problema (1.9.6).

1.10. <u>Osvrt na istorijski razvoj teorije graničnih problema</u>

Riemannov granični problem je formulisao Riemann u radu o diferencijalnim jednačinama sa algebarskim koeficijentima, ali ga nije rešio. Prvo rešenje homogenog Riemannovog problema dao je Hilbert, a prvo efektivno rešenje za zatvorenu prostu glatku konturu i $G(t)$, $g(t) \in H_\mu(L)$, $G(t) \neq 0$ dao je F.D. Gahov 1937.

Pošto je Plemelj 1908. objavio radove o ponašanju integrala Cauchyjevog tipa na granici, omogućen je dalji razvoj teorije graničnih problema.

B. V. Hvedelidze [90] rešio je Riemannov problem za višestruko povezanu oblast. F.D.Gahov je 1941.[70] rešio slučaj kada G(t) ima u konačnom skupu tačaka prekide prve vrste.

L.G.Magnaradze je u radovima [125] i [126] razmotrio slučaj kada funkcije G(t) i g(t) umesto Hölderovog uslova zadovoljavaju uslov

$$\int_0^a \frac{w(\tau)}{\tau} \cdot |\ln \tau|^p \, d\tau < \infty ,$$

gde je w, tzv. modul neprekidnosti.

Hasemanov problem formulisao je 1907.godine Haseman [85]. Kompletno rešenje ovog problema dao je D.A. Kveselava 1946.

Godine 1958. G.F. Mandžavidze i B.V. Hvedelidze [127] ustanovili su konformnu ekvivalenciju problema Hasemana i Riemanna.

Carleman je 1931.formulisao homogeni Carlemanov problem i [20] ukazao na njega kao na primer primene teorije Fredholmovih integralnih jednačina.

Kompletno rešenje Carlemanovog problema na ograničenoj prostopovezanoj oblasti dao je D.A.Kveselava [118].Litvinčuk je [124], primenjujući metod integralnih jednačina, rešio Carlemanov problem za neograničenu prostopovezanu oblast, a za višestruko povezane oblasti rešila ga je V.A.Černecka [34]. L.I. Čibrikova [42] posmatrala je razna uopštenja Carlemanovog problema u odnosu na granični uslov, a takodje i slučaj kada G(t) ima na konturi L nule i prekide prve vrste. A.V. Ajzenštat [1] primenom konformnih preslikavanja dao je kompletnu analizu rešivosti graničnih problema Carlemana sa prekidnim koeficijentima u slučaju višestruko povezane oblasti.

Graničnom problemu Hilberta posvećeno je nešto manje radova nego prethodno pomenutim problemima. Formulisao ga je Riemann [173] 1851. Kompletno rešenje ovog problema dao je Hilbert u radu [88] 1905. godine.

Rešenje Hilbertovog problema pomoću regularizacionih faktora prvi put je objavio F. Gahov 1941. u svojoj doktorskoj disertaciji. On je, takodje, sveo ovaj problem na sistem singularnih integralnih jednačina. N.I. Musheliśvili je izučio granični problem Hilberta u slučaju kada funkcije a(s) i b(s) imaju prekide prvog reda. D.A. Kveseleva 1945. [116] objavio je prve rezultate vezane za Hilbertov problem za višestruko povezane oblasti.

II glava

Granični problemi za eliptičke sisteme parcijalnih jednačina prvog reda

U ovoj glavi izložena je kompletna teorija graničnih problema za sisteme linearnih eliptičkih parcijalnih diferencijalnih jednačina prvog reda i opisana veza koja postoji izmedju ove teorije i graničnih problema za analitičke funkcije.

Osnove ove teorije dao je I.N.Vekua [216], [217], ali su rezultati njegovih radova pre od teorijskog nego od praktičnog značaja. Svi Vekuini rezultati u sebi sadrže dvostruke integrale sa Cauchyjevim jezgrom koji se, u opštem slučaju, ne mogu rešiti elementarnom integracijom. Zbog toga se nužno javlja potreba da se za rešavanje graničnih problema za eliptičke sisteme formiraju nove metode kojima bi se ono pojednostavilo. Doprinose te vrste dali su, medju ostalima, i naši autori, pre svega M.Čanak [29], [30], [28], S.Fempl [56], [57], [58], [59], [60] i J.Kečkić [100].

Ovaj rad takodje sadrži nekoliko priloga vezanih za rešavanje graničnih problema za sist,eme eliptičkih parcijalnih diferencijalnih jednačina prvog reda.

2.1. Uvodni pojmovi

U teoriji graničnih problema za sisteme eliptičkih jednačina koriste se razna uopštenja diferencijalnih i integralnih operatora na skupu kompleksnih funkcija, kao i razna uopštenja pojma analitičke funkcije.

σ - sistemi

Neka je F skup diferencijabilnih funkcija jedne promenljive, i neka je F_1 skup funkcija takav da je $\{0,1\} \subset F \cap F_1$, gde pod 0 i 1 podrazumevamo konstantne funkcije $x \to 0$ i $x \to 1$. Neka je A preslikavanje skupa F u skup F_1 takvo da je za f_1, $f_2 \in F$:

$$A(f_1 + f_2) = Af_1 + Af_2, \tag{2.1.1}$$
$$A(f_1 \cdot f_2) = f_1 \cdot Af_2 + f_2 \cdot Af_1 \tag{2.1.2}$$
$$Af_1(f_2) = f_1 \cdot Af_2. \tag{2.1.3}$$

Definišemo podskup Φ skupa F relacijom:

$$\varphi \in \Phi \text{ ako i samo ako } A\varphi = 0, \tag{2.1.4}$$

i pretpostavimo da postoji bar jedna funkcija $X \in F$ takva da je $AX = 1$.

Uredjena četvorka (F, A, X, Φ) koja zadovoljava uslove (2.1.1)-(2.1.4) je σ- sistem [100]. Operator A naziva se σ-operatorom .

Operator A_n definisan je rekurzivno: $A_1 f = Af$, $A_{n+1}f = A(A_n f)$, $(n = 1, 2, \ldots)$.

Primenom relacija (2.1.1)-(2.1.3) lako se dokazuje da važi sledeća formula:

$$Af(f_1, \ldots, f_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial f_i} \cdot Af_i \, . \tag{2.1.5}$$

Relacija oblika $J(X,u,Au,\ldots,A_n u) = 0$ naziva se operatorskom jednačinom n-tog reda σ-sistema (F,A,X,Φ) u odnosu na nepoznatu funkciju u.

Teorema 2.1.1. [100] Neka je

$$J(X, u, Au, \ldots, A_n u) = 0 \tag{2.1.6}$$

operatorska jednačina u sistemu (F,A,X,Φ), i

$$J(Y, u, Bu, \ldots, B_n u) = 0 \tag{2.1.7}$$

operatorska jednačina u sistemu (G,B,Y,Ψ).

Ako je $u = f(X,\varphi_1,\ldots,\varphi_n)$ rešenje jednačine (2.1.6), tada je $u = f(Y,\psi_1,\ldots,\psi_n)$ rešenje jednačine (2.1.7). Pritom su $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ proizvoljni elementi iz Φ, a $\psi_1,\ldots,\psi_n$ iz Ψ.!!

Kao što će se kasnije videti, ovo je izuzetno dalekosežan rezultat koji omogućuje da se rezultati teorije običnih diferencijalnih jednačina iskoriste za rešavanje problema formulisanih u različitim klasama funkcija i u kojima figurišu uopšteni diferencijalni operatori (σ-operatori) različitih vrsta.

Areolarni izvod i integral

Jedan od σ-operatora koji ćemo najčešće koristiti je operator koji je uveo G.V.Kolosov ([104], [105], [106]).

Na skupu kompleksnih funkcija

$$\omega(z,\bar{z}) = u(x,y) + i\cdot v(x,y), \quad z = x + i\cdot y,$$

gde su $u(x,y)$ i $v(x,y)$ realne diferencijabilne funkcije, operator

$$D\omega = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} + i\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \tag{2.1.8}$$

naziva se <u>operatorom Kolosova</u> .

D.Pompeiu [162], koji se takodje bavio ovim operatorom, nazvao ga je <u>areolarnim izvodom</u> .

Kolosov je ovaj operator koristio pri rešavanju sistema parcijalnih diferencijalnih jednačina koje se pojavljuju u matematičkoj fizici, posebno u teoriji elastičnosti. On je takodje na istom skupu definisao i operator

$$\bar{D}\omega = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + i\cdot\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right). \tag{2.1.9}$$

Funkcija $\omega = \omega(x,y)$ se smenom $x = (z+\bar{z})/2$, $y = (z-\bar{z})/2i$, svodi na funkciju $\omega = f(z,\bar{z})$ koja zavisi od konjugovanih kompleksnih promenljivih $z = x + iy$ i $\bar{z} = x - iy$. Dokazuje se [30] da su ove dve promenljive nezavisne i da važe relacije:

$$D\omega = 2\cdot\frac{\partial\omega}{\partial\bar{z}} \tag{2.1.10}$$

i

$$\bar{D}\omega = 2\cdot\frac{\partial\omega}{\partial z} . \tag{2.1.11}$$

Ako sa K označimo skup svih kompleksnih funkcija za koje postoje operatori D i D, sledi da su $(K,D,\bar{z}/2,\{f(z)\})$ i $(K,\bar{D},z/2,\{\overline{f(z)}\})$ σ-sistemi, gde su $f(z)$ proizvoljne analitičke funkcije. Pritom se operator $\bar{D}$, u klasi analitičkih funkcija, svodi na izvod po promenljivoj $z = x + iy$.

U [100] dato je i jedno uopštenje Kolosovljevog operatora definisano na skupu K formulom:

$$\mathcal{K}\omega = A\,\frac{\partial u}{\partial x} - B\,\frac{\partial v}{\partial y} + i\left(A\,\frac{\partial v}{\partial x} + B\,\frac{\partial u}{\partial y}\right), \tag{2.1.12}$$

gde su A i B funkcije od x i y, i dokazano da je i $\mathcal{K}$ takodje σ-operator.

Dati uslovi egzistencije operatora Kolosova su jači nego što je neophodno. Ako je $\omega(z,\bar{z}) = u + i\cdot v$ neprekidna funkcija u nekoj oblasti T_0, i ako ima neprekidne parcijalne izvode prvog reda po x i y, tada za svaku oblast $T\subset T_0$ ograničenu prostom, zatvorenom, rektificibilnom krivom α važi formula Ostrogradskog

$$2 \iint_T D\omega dT = \frac{1}{i} \int_{\alpha} \omega(t,\bar{t})dt, \tag{2.1.13}$$

gde je $D = \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} = 2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$, a dT površinski element oblasti T. Odatle sledi da je:

$$D\omega = \lim_{\alpha \to z} \frac{1}{i\,|T|} \int_{\alpha} \omega(t,\bar{t})\, dt, \tag{2.1.14}$$

pri čemu je $|T|$ merni broj površine oblasti T, a oznaka $\alpha \to z$ kazuje da se kriva α sažima u tačku z.

Mada je relacija (2.1.14) dobijena pod pretpostavkom da su parcijalni izvodi funkcije $\omega = \omega(z,z)$ neprekidni po x i y, moguće je da desna strana te relacije postoji i onda kada neprekidna funkcija ω ne zadovoljava taj uslov.

Definisaćemo, od sada, $D\omega$ u tački $z \in T_o$ preko relacije (2.1.14) ukoliko izraz na desnoj strani postoji i nezavisan je od načina na koji $\alpha \to z$, a to je često moguće čak i onda kada parcijalni izvodi funkcije $\omega = \omega(z,\bar{z})$ u $z \in T_o$ uopšte ne postoje.

Ako $D\omega$ egzistira i neprekidno je u nekoj oblasti T_o, kažemo da je ω funkcija klase $C_{\bar{z}}(T_o)$. Očigledno je

$$C^1(T) \subset C_{\bar{z}}(T) \subset C(T), \tag{2.1.15}$$

gde je $C^k(T)$ skup svih neprekidnih funkcija koje imaju u oblasti T neprekidne parcijalne izvode zaključno do k-tog reda, a $C^0(T) = C(T)$ je skup svih funkcija neprekidnih u T.

Slično, ako $\bar{D}\omega$ egzistira i neprekidno je u svakoj tački T_o, kažemo da je funkcija ω u klasi $C_z(T_o)$.

Svaka analitička funkcija $f(z)$ u oblasti T je funkcija klase $C_{\bar{z}}(T)$ i za nju važi relacija

$$Df = 0 \text{ za svako } z \in T. \tag{2.1.16}$$

Važi i obratno [217], tj. ako je funkcija $f(z) \in C_{\bar{z}}(T)$ i ako zadovoljava uslov (2.1.16), sledi da je $f(z)$ analitička.

Važan podskup skupa $C_{\bar{z}}(T)$ predtavjaju funkcije oblika

$$U(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_T \frac{f(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta}{t - z}, \quad (t = \xi + i\cdot\eta), \tag{2.1.17}$$

gde je funkcija $f(x,y)$ neprekidna u T.

Vekua je u [216] dokazao da je funkcija $U(z)$, definisana relacijom (2.1.17), neprekidna u celoj ravni, analitička izvan $T \cup \alpha$, da u beskonačnosti teži nuli, da $U(z) \in C_{\bar{z}}(T)$ i :

$$DU = 2f. \tag{2.1.18}$$

Funkcija U data relacijom (2.1.17) naziva se <u>osnovnim rešenjem</u> jednačine (2.1.18).

U istom radu dokazana je i sledeća važna teorema:

Teorema 2.1.2. Ako je:

1. T oblast čiji se rub L sastoji od konačnog broja disjunktnih zatvorenih glatkih kontura,

2. funkcija $U \in C_{\bar{z}}(T)$ i neprekidna je u T+L, i

3. $\frac{\partial U}{\partial \bar{z}}$ integrabilna u T, tada je

$$U(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{U(t)\,dt}{t-z} - \frac{1}{\pi}\iint_T \frac{\partial U}{\partial \bar{t}}\cdot\frac{d\xi\cdot d\eta}{t-z}, \qquad (2.1.19)$$

$z \in T$, $t = \xi + i\cdot\eta$, pri čemu je dvojni integral na desnoj strani, u opštem slučaju, nesvojstven.||

Funkcija U(z) data formulom (21.19) predstavlja integralnu reprezentaciju funkcije klase $C_{\bar{z}}(T)$.

Analogno, ako je $U(z) \in C_z(T)$ i $\partial U/\partial z$ integrabilna u T, tada je

$$U(z) = \frac{-1}{2\pi i}\int_L \frac{U(t)\,dt}{t-z} - \frac{1}{\pi}\iint_T \frac{\partial U}{\partial t}\cdot\frac{d\xi\cdot d\eta}{\bar{t}-\bar{z}}, \qquad (2.1.19')$$

za $z = x + iy \in T$ i $t = \xi + i\eta$. Pritom funkcija U(z) data formulom (2.1.19') predstavlja, integralnu reprezentaciju funkcija iz $C_z(T)$.

Teorema 2.1.3. [216] Ako je $U(z) \in C_{\bar{z}}(T)$, u proizvoljnoj zatvorenoj oblasti $D \subset T$, važi da je

$$|U(z_1) - U(z_2)| < M\cdot|z_1-z_2|\cdot|\log\alpha|z_1-z_2||, \qquad (2.1.20)$$

gde su z_1 i z_2 priozvoljne tačke iz D, a M i α pozitivne konstante koje ne zavise od z_1 i z_2.||

Na osnovu ove teoreme se vidi da je $C_{\bar{z}}(T)$ pravi podskup od C(T).

Funkcije oblika (2.1.17) nemaju uvek parcijalne izvode po x i y. U [216] dat je primer funkcije

$$f(x,y) = \frac{e^{2i\varphi}}{\log 1/r}, \quad re^{i\varphi} = z \qquad (2.1.21)$$

u oblasti T: $|z|<R<1$. Integral (2.1.17) za funkciju (2.1.21) je

$$\begin{aligned} U(x,y) &= -\frac{1}{\pi}\iint_T \frac{e^{2i\varphi}\rho\,d\rho\,d\varphi}{(\rho e^{i\varphi} - z)\cdot\log(1/\rho)} = \\ &= -2z\cdot\log\log(1/r) + 2z\cdot\log\log(1/R), \end{aligned} \qquad (2.1.22)$$

i otuda

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -2\cdot\log\log(1/r) - 2\,\frac{e^{i\varphi}\cos\varphi}{\log r} + 2\cdot\log\log(1/R)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -2i\cdot\log\log(1/r) - 2\,\frac{e^{i\varphi}\cos\varphi}{\log r} + 2i\cdot\log\log(1/R), \tag{2.1.23}$$

odakle se vidi da parcijalni izvodi funkcije $U(x,y)$ ne postoje u koordinatnom početku. Medjutim, lako se vidi da je

$$DU = -2\,\frac{e^{2i\varphi}}{\log r}$$

i (2.1.24)

$$\overline{D}U = -4\cdot\log\log(1/r) - \frac{2}{\log r} + 4\cdot\log\log(1/R),$$

tj. da areolarni izvod DU funkcije U postoji i neprekidan je u oblasti T, a da je DU beskonačno u nuli.

Ovaj primer pokazuje da je klasa $C_{\bar{z}}$ bitno šira od klase C^1 i da se ne poklapa sa C_z.

Veza izmedju operatora D i $\overline{D}$ data je formulom

$$\overline{\overline{D}f(z)} = D\overline{f(z)}\ , \text{ tj.}$$

$$\overline{\frac{\partial f(z)}{\partial z}} = \frac{\partial \overline{f(z)}}{\partial \bar{z}}\ . \tag{2.1.25}$$

Areolarni izvod i klasa $C_{\bar{z}}$ imaju i sledeće osobine:

a) Ako su U i V funkcije iz $C_{\bar{z}}$, tada je i $U\cdot V \in C_{\bar{z}}$, i

$$D\,U\cdot V = V\cdot DU + U\cdot DV. \tag{2.1.26}$$

b) Ako su $U, V \in C'_{\bar{z}}(T)$ i $V \neq 0$ u T, tada $U/V \in C_{\bar{z}}(T)$ i

$$V^2\cdot D(U/V) = V\cdot DU - U\cdot DV. \tag{2.1.27}$$

c) Ako je $f(t)$ analitička funkcija na G i $U(z)\in C_{\bar{z}}(T)$, pri čemu je tačka $t = U(z)$ u oblasti G kada je $z\in T$, tada je $f(U(z))\in C_{\bar{z}}(T)$ i

$$D\,f(U) = f'(U)\cdot DU. \tag{2.1.28}$$

d) Ako $U(t)\in C_{\bar{z}}(T)$ i funkcija $t = \omega(z)$ konformno preslikava oblast T na oblast G, $t\in T$, $z\in G$, tada $U(\omega(z))\in C_{\bar{z}}(G)$ i

$$\frac{1}{\overline{\omega'(z)}}\cdot\frac{\partial U(\omega(z))}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial U(t)}{\partial \bar{t}}\ . \tag{2.1.29}$$

Na osnovu teoreme 2.1.1. sledi da funkcija $U(z)$, data integralom (2.1.17), definiše operator inverzan areolarnom izvodu. Osobine ovog operatora izučavali su pripadnici rumunske škole D.Pompieua, naročito G.Calugareano [18],[19], M.Nicolesco [141] i N.Theodorescu [201], [202], [203], [204].

Nezavisno od njih S.Fempl je u [57] uveo integralni operator $⨏$ takav da

$$\omega = ⨏ f(x,y) \qquad (2.1.29')$$

označava funkciju za koju je $D\omega = f(x,y)$. U istom radu dokazane su i mnoge osobine operatora $⨏$.

Isti taj operator detaljno je opisao i G.N.Položij [160] čiju oznaku $\hat{\int}$ za taj operator ćemo koristiti u ovom radu.

Kompleksnu funkciju $f(z,\bar{z}) = u(x,y) + i\cdot(x,y)$ nazivamo <u>areolarno integrabilnom</u> (a-integrabilnom) u oblasti T, ako u toj oblasti postoji kompleksna funkcija $F(z,\bar{z}) = U(x,y)+iV(x,y)$ neprekidna u T, osim možda u najviše konačno mnogo izolovanih tačaka u T, takva da postoji $\partial F(z,\bar{z})/\partial z$ i važi jednakost $\partial F(z,\bar{z})/\partial\bar{z} = f(z,\bar{z})$.

Svaku takvu funkciju $F(z,\bar{z})$ nazivaćemo <u>a-primitivnom funkcijom</u> funkcije $f(z,\bar{z})$, a sve takve funkcije zajedno, <u>neodredjenim a-integralom</u> funkcije $f(z,\bar{z})$ u oblasti T. Neodredjeni a-integral funkcije $f(z,\bar{z})$ označavaćemo sa $\hat{\int} f(z,\bar{z})\, d\bar{z}$.

Slično se definiše i neodredjeni a-integral $\hat{\int} f(z,\bar{z})\, dz$ kao operator inverzan operatoru $\partial/\partial z$.

Na osnovu osobina analitičkih funkcija sledi da je

$$\hat{\int} f(z,\bar{z})\, d\bar{z} = F(z,\bar{z}) + C(z) \qquad (2.1.30)$$

gde je $F(z,\bar{z}) = U(x,y) + iV(x,y)$ jedna od a-primitivnih funkcija funkcije $f(z,\bar{z})$ u oblasti T, a $C(z)$ je konstanta areolarne integracije, tj. proizvoljna funkcija analitička u oblasti T sa izuzetkom najviše konačno mnogo izolovanih singulariteta.

Slično je

$$\hat{\int} f(z,\bar{z})\, dz = F(z,\bar{z}) + \tilde{C}(z) \qquad (2.1.30')$$

gde je $F(z,\bar{z}) = U(x,y) + iV(x,y)$ jedna od a-primitivnih funkcija u T, u odnosu na operator $\partial/\partial z$, a $\tilde{C}(z)$ proizvoljna funkcija takva da je $\bar{\tilde{C}}(z)$ analitička u T sa izuzetkom najviše konačno mnogo singulariteta.

Otuda neodredjeni a-integral zadovoljava relacije:

$$\frac{\partial}{\partial\bar{z}} \hat{\int} f(z,\bar{z})\, d\bar{z} = f(z,\bar{z}), \quad \hat{\int} \frac{\partial F(z,\bar{z})}{\partial\bar{z}}\, d\bar{z} = F(z,\bar{z}) + C(z) \qquad (2.1.31)$$

$$\hat{\int} C(z)\cdot f(z,\bar{z})\, d\bar{z} = C(z)\cdot \hat{\int} f(z,\bar{z})\, d\bar{z} \tag{2.1.32}$$

$$\hat{\int} [f(z,\bar{z}) \pm g(z,\bar{z})] d\bar{z} = \hat{\int} f(z,\bar{z}) d\bar{z} \pm \hat{\int} g(z,\bar{z}) d\bar{z}\ , \tag{2.1.33}$$

gde je $C(z)$ proizvoljna analitička funkcija kao u (2.1.30).

Slično je

$$\frac{\partial}{\partial z} \hat{\int} f(z,\bar{z}) dz = f(z,\bar{z}),\quad \hat{\int} \frac{\partial F(z,\bar{z})}{\partial z}\, dz = F(z,\bar{z}) + \tilde{C}(z) \tag{2.1.31'}$$

$$\hat{\int} \tilde{C}(z)\cdot f(z,\bar{z})\, dz = \tilde{C}(z)\cdot \hat{\int} f(z,\bar{z})\, dz \tag{2.1.32'}$$

$$\hat{\int} [f(z,\bar{z}) \pm g(z,\bar{z})] dz = \hat{\int} f(z,\bar{z}) dz \pm \hat{\int} g(z,\bar{z}) dz\ , \tag{2.1.33'}$$

gde funkcija $\tilde{C}(z)$ ima iste osobine kao i u (2.1.30').

Označimo sa $C(z)$ proizvoljnu analitičku funkciju. Pored navedenih, areolarni integral ima i sledeće osobine:

1. Ako je $f = f(z)$ analitička funkcija, važi da je:

$$\hat{\int} f(z) d\bar{z} = \bar{z}\cdot f(z) + C(z)\ ,\quad \hat{\int} \overline{f(z)} dz = z\cdot \overline{f(z)} + \overline{C(z)}. \tag{2.1.34}$$

2. Ako je $f(z) = \varphi(x) + i\cdot\psi(x)$, gde su funkcije $\varphi(x)$ i $\psi(x)$ integrabilne realne funkcije, važi da je:

$$\hat{\int} f(z) d\bar{z} = 2\cdot\int \varphi(x) dx + 2i\cdot\int \psi(x) dx + C(z), \tag{2.1.35}$$

$$\hat{\int} f(z) dz = 2\cdot\int \varphi(x) dx + 2i\cdot\int \psi(x) dx + \overline{C(z)}. \tag{2.1.35'}$$

3. Ako je $f(z) = \varphi_1(y) + i\cdot\psi_1(y)$, gde su funkcije $\varphi_1(y)$ i $\psi_1(y)$ integrabilne realne funkcije, važi da je:

$$\hat{\int} f(z) d\bar{z} = -2\cdot\int \psi_1(y) dy + 2i\cdot\int \varphi_1(y) dy + C(z), \tag{2.1.36}$$

$$\hat{\int} f(z) dz = -2\cdot\int \psi_1(y) dy + 2i\cdot\int \varphi_1(y) dy + \overline{C(z)}. \tag{2.1.36'}$$

4. Ako je $f(z)$ analitička funkcija i $\varphi(\bar{z})$ proizvoljna integrabilna funkcija, važi da je:

$$\hat{\int} \varphi(\bar{z}) f(z) d\bar{z} = f(z)\cdot \int \varphi(\bar{z}) d\bar{z} + C(z). \tag{2.1.37}$$

Slično, ako je $\overline{f(z)}$ analitička funkcija i $\psi(z)$ proizvoljna integrabilna funkcija, važi:

$$\hat{\int} \psi(z) f(z) dz = f(z)\cdot \int \psi(z) dz + \overline{C(z)}. \tag{2.1.37'}$$

5. Ako su funkcije $f(z,\bar{z}) = u + i\cdot v$ i $\zeta = \xi + i\cdot\eta$ iz $C_{\bar{z}}$, tada je:

$$\hat{\int} f(z,\bar{z})\cdot \frac{\partial \zeta}{\partial \bar{z}}\, d\bar{z} = f\cdot\zeta - \hat{\int} \zeta\cdot\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\, d\bar{z} \tag{2.1.38}$$

Ako su $f,\ \zeta \in C_{\infty}$, sledi:

$$\hat{\int} f(z,\bar{z})\cdot\frac{\partial\zeta}{\partial z}\,dz = f\cdot\zeta - \hat{\int}\zeta\cdot\frac{\partial f}{\partial z}\,dz \qquad (2.1.38')$$

Ovo su formule za parcijalnu areolarnu integraciju.

6. Ako je ζ proizvoljna funkcija iz $C_{\bar{z}}$ i $f(\zeta)$ analitička funkcija od ζ, sledi da je:

$$\hat{\int} f(\zeta)\cdot\frac{\partial\zeta}{\partial\bar{z}}\,d\bar{z} = \hat{\int} f(\zeta)\,d\bar{\zeta} \qquad (2.1.39)$$

i

$$\hat{\int} f(\zeta)\cdot\frac{\partial\zeta}{\partial z}\,dz = \hat{\int} f(\zeta)\,d\zeta\ . \qquad (2.1.39')$$

7. Ako je $\zeta = \zeta(z,\bar{z}) = \xi + i\cdot\eta$ funkcija iz $C_{\bar{z}}$ i $f(\zeta) = u + iv$ analitička funkcija od ζ, sledi da je:

$$\hat{\int} f(\zeta)\cdot\frac{\partial\zeta}{\partial\bar{z}}\,d\bar{z} = \int f(\zeta)\,d\zeta + C(z). \qquad (2.1.40)$$

Ako je $\zeta = \zeta(z,z) = \xi + i\cdot\eta \in C_{*}$ i $f(\zeta) = u + iv$ analitička funkcija od ζ, sledi da je:

$$\hat{\int} f(\zeta)\cdot\frac{\partial\zeta}{\partial z}\,dz = \int f(\zeta)\,d\zeta + \overline{C(z)}. \qquad (2.1.40')$$

Areolarni izvodi i integrali se koriste pri rešavanju areolarnih diferencijalnih jednačina. Pod <u>areolarnim diferencijalnim jednačinama n-tog reda</u>, $n\in\mathbb{N}$, podrazumevamo jednačine oblika

$$F(z,\bar{z},\omega,\bar{\omega},D\omega,D\bar{\omega},\bar{D}\omega,\bar{D}\bar{\omega},D^2\omega,\dots,D^n\omega,\bar{D}^n\omega,\bar{D}^n\bar{\omega}) = 0, \qquad (2.1.41)$$

tj. takve u kojima se javljaju areolarni izvodi nepoznate funkcije $\omega = \omega(z,\bar{z})$ zaključno do n-tog reda.

Za areolarne diferencijalne jednačine oblika

$$F(z,\omega,D\omega,D^2\omega,\dots,D^n\omega) = 0 \qquad (2.1.42)$$

još je G.Kolosov utvrdio da se rešavaju po analogiji sa odgovarajućim diferencijalnim jednačinama oblika

$$F(x,y,y',y'',\dots,y^{(n)}) = 0, \qquad (2.1.43)$$

što je posledica teoreme 2.1.1 i činjenice da $(K,D,\bar{z}/2,\{f(z)\})$ predstavlja σ-sistem (strana 52).

Rezultate vezane za metode rešavanja areolarnih jednačina objavljivali su, u novije vreme, S.Fempl [60], M.Čanak [25], [30],[32], [29], [31] i drugi autori. U svojoj disertaciji [51] D.Dimitrovski je razmatrao areolarne jednačine oblika

$$D^n\omega = f(z,\bar{z}) \qquad (2.1.44)$$

i našao rešenje jednačine (2.1.44) za razne oblike slobodnog člana $f(z,\bar{z})$.

Areolarni redovi

Jedno od prirodnih proširenja klase analitičkih funkcija predstavlja klasa tzv. areolarnih polinoma, tj. funkcija oblika

$$\omega(z,\bar{z}) = \sum_{\nu=0}^{n} \bar{z}^{\nu}\varphi_{\nu}(z), \tag{2.1.45}$$

gde su $\varphi_{\nu}(z)$ proizvoljne analitičke funkcije. U svom radu [202] N.Theodorescu je definisao areolarne polinome n-tog stepena kao rešenja areolarne diferencijalne jednačine

$$D^{n+1}\omega = 0, \tag{2.1.46}$$

a zatim pokazao da se ovo rešenje javlja u obliku (2.1.45).

Areolarni polinomi predstavljaju prirodno proširenje klase Goursatovih ili bianalitičkih funkcija oblika $\omega = \varphi_0(z) + \bar{z}\cdot\varphi(z)$, koje se javljaju u teoriji elastičnosti.

Izuzetno značajan prilog proučavanju areolarnih polinoma i teoriji uopštenih analitičkih funkcija dao je M.Čanak u svojoj doktorskoj disertaciji [30] i mnogim svojim radovima. U svojoj tezi M.Čanak uvodi pojam areolarnog reda i razmatra uslove njegove konvergencije kao i tehnike razvijanja proizvoljne kompleksne funkcije u areolarni red.

Kompleksni red oblika

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \bar{z}^{\nu}\varphi_{\nu}(z), \tag{2.1.47}$$

gde su $\varphi_{\nu}(z)$ analitičke funkcije, naziva se areolarnim redom.

Neka je $W = \{w|w = w(z,\bar{z})\}$ skup svih kompleksnih funkcija koje su diferencijabilne proizvoljan broj puta po promenljivoj $\bar{z}$ u nekoj konačnoj zatvorenoj oblasti T koja sadrži koordinatni početak ($\omega \in C^{\infty}_{\bar{z}}(T)$), i neka je $\Omega = \{\omega|\omega = \omega(z)\}$ skup svih analitičkih funkcija u oblasti T. Pod $\alpha_k w = \omega$ podrazumevaćemo funkciju koja se dobija iz funkcije $w = w(z,\bar{z})$ ako se vrednost $\bar{z}$ zameni konstantom $k \in \mathbb{C}$, a promenljiva z ostavi neizmenjena.

Funkcija α_k preslikava skup W na skup Ω za svako $k \in \mathbb{C}$. Pritom svaki original w ima samo jednu sliku ω, dok obratno ne važi. Restrikcija preslikavanja α_0 za k=0, na podskup skupa W, koji se sastoji od analitičkih funkcija je identično preslikavanje.

Teorema 2.1.4. [30] Neka je $w = w(z,\bar{z})$ neprekidna funkcija u oblasti T koja sadrži koordinatni početak i neka ima neprekidne areolarne izvode reda n, ($n \in \mathbb{N}$), u T. Tada se ona može razviti u areolarni red oblika (2.1.45) u nekoj okolini T_1 koordinatnog početka (T_1 je oblast konvergencije reda (2.1.45) i $T_1 \subset T$).

Koeficijenti reda dobijaju se po formuli

$$\varphi_k(z) = \frac{\alpha_0 D^k w}{2^k k!} \quad .!! \tag{2.1.48}$$

U [30] definisan je odredjeni areolarni integral. Ako je

$$2\cdot\int w(x,y)d\bar{z} = F(x,y) = W(z,\bar{z}), \tag{2.1.49}$$

odredjeni areolarni integral definiše se [30] formulom:

$$\int_a^b w(z,\bar{z}) \stackrel{df}{=} \alpha_b W - \alpha_a W. \tag{2.1.50}$$

Teorema 2.1.5. [30] Areolarna diferencijalna jednačina

$$Dw = F(z,w) \tag{2.1.51}$$

sa početnim uslovom

$$\alpha_0 w(z,\bar{z}) = w_0(z), \tag{2.1.52}$$

gde je $w_0(z)$ data analitička funkcija, ekvivalentna je areolarnoj integralnoj jednačini

$$w = w_0 + \int_0^{\bar{z}} F(z,w) \quad .!! \tag{2.1.53}$$

U [30] je takodje dokazana i teorema o egzistenciji i jedinstvenosti rešenja jednačine (2.1.51) sa početnim uslovom (2.1.52).

2.2. Eliptički sistemi parcijalnih jednačina

Sistem parcijalnih diferencijalnih jednačina

$$\begin{aligned} a_{11}(x,y)\cdot u'_x + a_{12}(x,y)\cdot v'_y &= F_1(x,y;u,v) \\ a_{21}(x,y)\cdot u'_y + a_{22}(x,y)\cdot v'_x &= F_2(x,y;u,v) \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

naziva se eliptičkim na nekoj oblasti ako je determinanta

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

funkcija konstantnog znaka na datoj oblasti.

Ovde ćemo se baviti eliptičkim sistemom Vekuinog tipa [216]:

$$\begin{aligned} u'_x - v'_y &= a(x,y)\cdot u + b(x,y)\cdot v + f(x,y) \\ u'_y + v'_x &= c(x,y)\cdot u + d(x,y)\cdot v + g(x,y), \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

gde su a,b,c,d,f,g date funkcije promenljivih x i y, a $u(x,y)$ i $v(x,y)$ nepoznate funkcije. Funkcije a,b,c i d nazivamo koeficijentima sistema (2.2.2), a f i g slobodnim članovima .

Ako drugu jednačinu sistema (2.2.2) pomnožimo imaginarnom jedinicom i, pa to dodamo prvoj jednačini, dobijamo areolarnu diferencijalnu jednačinu

$$\partial U/\partial \bar{z} = A \cdot U + B \cdot \bar{U} + F \;, \tag{2.2.3}$$

gde je

$$U = u + iv \;, \quad A = (a + d + ic - ib)/4, \quad B = (a - d + ic + ib)/4, \quad F = (f + ig)/2. \tag{2.2.4}$$

Očito je da su jednačine (2.2.2) uopštene Cauchy-Riemann-ove relacije (1.3.2) i da, za $A = B = F = 0$ dobijamo jednačinu

$$\partial U/\partial \bar{z} = 0 \tag{2.2.5}$$

čije je rešenje proizvoljna analitička funkcija $U = U(z)$.

U netrivijalnom slučaju, tj. kada A, B i F nisu istovremeno jednaki nuli, jednačina (2.2.3) definiše klasu kompleksnih funkcija koja je šira od klase analitičkih funkcija.

Par funkcija u i v je <u>regularno rešenje</u> sistema (2.2.2) u oblasti T, ako kompleksna funkcija $U(z) = u + iv$ pripada klasi $C_{\bar{z}}(T)$ i zadovoljava jednačinu (2.2.3).

Regularno rešenje sistema (2.2.2) koje ima neprekidne parcijalne izvode prvog reda po x i y, naziva se <u>kompletno regularnim</u>.

Jasno je da ne mora svako regularno rešenje da bude istovremeno i kompletno regularno. Specijalno, ako, na primer, koeficijenti i slobodni članovi sistema (2.2.2) zadovoljavaju Hölderov uslov, regularna rešenja su istovremeno i kompletno regularna.

<u>Normalna jednačina</u>

Specijalan slučaj sistema (2.2.2)

$$u'_x - v'_y = a \cdot u + b \cdot v, \quad u'_y + v'_x = -b \cdot u + a \cdot v \tag{2.2.6}$$

u kompleksnoj formi ima oblik

$$\partial U/\partial \bar{z} = A \cdot U \;, \; A = (a - ib)/2, \; U = u + iv \;. \tag{2.2.7}$$

Na osnovu relacija (2.1.7) i (2.1.8) sledi da je opšte rešenje jednačine (2.2.7) oblika

$$U(z,\bar{z}) = \varphi(z) \cdot e^{w(z)} \;, \tag{2.2.8}$$

gde je

$$w(z) = \frac{-1}{\pi} \iint_T \frac{A(\xi,\eta)}{\zeta - z} \, d\xi d\eta \;, \; \zeta = \xi + i \cdot \eta, \tag{2.2.9}$$

a $\varphi(z)$ proizvoljna analitička funkcija.

Predstavimo rešenje jednačine (2.2.3.) u obliku

$$U = V \cdot e^{\Omega(z)}, \quad \Omega(z) = \frac{-1}{\pi} \iint_T \frac{A(t)\,dT}{t - z}, \qquad (2.2.10)$$

gde je V nova nepoznata funkcija. Ovom smenom jednačina (2.2.3) prelazi u jednačinu po nepoznatoj V:

$$\partial V/\partial \bar{z} = C(z) \cdot \bar{V} + H(z), \qquad (2.2.11)$$

gde je

$$C(z) = B(z) \cdot \exp[\bar{\Omega}(z) - \Omega(z)], \quad H = F \cdot \exp[-\Omega(z)]. \qquad (2.2.12)$$

Ako je U regularno rešenje jednačine (2.2.3) u oblasti T, tada je V rešenje jednačine (2.2.11) regularno u T, i obratno.

Dobijena kompleksna jednačina (2.2.11) ekvivalentna je sistemu parcijalnih diferencijalnih jednačina

$$\begin{aligned} u'_x - v'_y &= a \cdot u + b \cdot v + f \\ u'_y + v'_x &= b \cdot u - a \cdot v + g \end{aligned} \qquad (2.2.13)$$

koji predstavlja poseban slučaj sistema (2.2.2), koji se naziva njegovom <u>normalnom formom</u> . Tako se rešavanje sistema (2.2.2) svodi na rešavanje normalnog sistema (2.2.13).

Smena (2.2.10) pomoću koje smo prešli u normalnu formu važi i u slučaju beskonačne oblasti, ako integral u (2.2.10) ravnomerno konvergira u odnosu na z unutar oblasti T. Taj uslov je ispunjen ako je, na primer, $A(z)$ ograničena, neprekidna funkcija u T koja u okolini beskonačno daleke tačke zadovoljava nejednakost

$$|A(z)| < M \cdot |z|^{-(1+\varepsilon)}, \quad (M>0, \ \varepsilon>0). \qquad (2.2.14)$$

Lako se dokazuje da u tom slučaju funkcija $\Omega(z)$ pripada klasi $C_{\bar{z}}(T)$, da je neprekidna na celoj ravni i analitička izvan $T+L$.

Specijalno je <u>homogena normalna jednačina</u> oblika

$$\partial U/\partial \bar{z} = A \cdot \bar{U} \qquad (2.2.15)$$

ekvivalentna sistemu

$$u'_x - v'_y = a \cdot u + b \cdot v, \quad u'_y + v'_x = b \cdot u - a \cdot v. \qquad (2.2.16)$$

Smenom

$$A \cdot \bar{U}/U = A_0, \qquad (2.2.17)$$

jednačina (2.2.15) prelazi u jednačinu oblika:

$$\partial U/\partial \bar{z} = A_0 \cdot U. \qquad (2.2.18)$$

Slično kao i u slučaju jednačine (2.2.7) dokazuje se da je opšte rešenje jednačine (2.2.17) oblika

$$U(z) = \varphi(z) \cdot e^{w(z)}, \qquad (2.2.8')$$

gde je $\varphi(z)$ proizvoljna analitička funkcija u oblasti T, a $w(z)$ funkcija iz klase $C_{\bar{z}}$ oblika

$$w(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_T \frac{A_0(\xi,\eta)}{\xi - z}\, d\xi d\eta \,. \qquad (2.2.9')$$

Formula (2.2.8') predstavlja reprezentaciju rešenja jednačine (2.2.15), ali ne predstavlja i njeno rešenje jer se nepoznata funkcija U pojavljuje sa obe strane jednakosti (2.2.8'). Korist od te formule ogleda se u tome što se pomoću nje dokazuje niz teorema vezanih za klasu $C_{\bar{z}}$, koje predstavljaju uopštenja nekih navedenih teorema iz teorije analitičkih funkcija.

Teorema 2.2.1. Neka je U rešenje jednačine (2.2.15) regularno u oblasti T svuda izuzev u najviše konačno mnogo tačaka u kojima ima polove. Ako je U neprekidna funkcija, različita od nule na $L = \partial T$, važi da je

$$N - P = [\arg U(t)]_L / 2\pi \,, \qquad (2.2.19)$$

gde je N broj nula, a P broj polova funkcije U u T, gde i nule i polove zaračunavamo onoliko puta kolikog su reda.!!

Ova teorema je uopštenje principa argumenta za analitičke funkcije.

Teorema 2.2.2. Neka je U(z) rešenje jednačine (2.2.15), regularno u celoj ravni sa izuzetkom konačnog broja disjunktnih Jordanovih krivih i konačnog broja izolovanih tačaka. Ako je U(z) neprekidna i ograničena na celoj ravni i jednaka nuli u jednoj njenoj tački, tada je ona identički jednaka nuli na celoj kompleksnoj ravni.!!

Ova teorema analogna je Liouvilleovoj teoremi za analitičke funkcije (teorema 1.1.5, strana 6).

Isto kao i za analitičke funkcije i za funkcije klase $C_{\bar{z}}$ važi princip jedinstvenosti .

Teorema 2.2.3. Ako se dva rešenja jednačine (2.2.15) u oblasti T poklapaju na beskonačnom skupu tačaka koji ima tačku nagomilavanja u T, ta rešenja se poklapaju.!!

Ako pomoću relacije (2.1.19) predstavimo, u integralnoj formi, rešenje jednačine (2.2.11) regularno u T i neprekidno u T+L, vidimo da svako takvo rešenje zadovoljava integralnu jednačinu

$$U(z) + \frac{1}{\pi} \iint\limits_T \frac{A(t)\overline{U(t)}}{t - z} dT = G(z), \qquad (2.2.20)$$

gde je

$$G(z) = \Phi(z) - \frac{1}{\pi} \iint\limits_T \frac{F(t)dT}{t - z}, \qquad (2.2.21)$$

pri čemu je $\Phi(z)$ funkcija analitička u T i neprekidna u T+L, koja se jednoznačno odredjuje pomoću integrala tipa Cauchyja

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \iint\limits_T \frac{U(t)dT}{t - z} \qquad (2.2.22)$$

Pokazuje se [216] da jednačina (2.2.20) ima rešenje za proizvoljnu funkciju G(t), pri čemu se to rešenje može dobiti metodom sukcesivnih aproksimacija. Rezultat koji dobijamo na taj način je oblika:

$$\begin{aligned} U(z) &= \Phi(z) + \iint\limits_T \Gamma_1(z,t)\cdot\Phi(t)dT + \iint\limits_T \Gamma_2(z,t)\cdot\overline{\Phi(t)}dT - \\ &-(1/\pi)\iint\limits_T \Omega_1(z,t)\cdot H(t)dT - (1/\pi)\iint\limits_T \Omega_2(z,t)\cdot\overline{H(t)}dT, \end{aligned} \qquad (2.2.23)$$

gde je

$$\Gamma_1(z,t) = \sum_{j=1}^{\infty} K_{2j}(z,t), \quad \Gamma_2(z,t) = \sum_{j=1}^{\infty} K_{2j+1}(z,t) \qquad (2.2.24)$$

pri čemu je

$$\begin{aligned} K_1(z,t) &= - A(t)/[\pi(t - z)], \\ K_n(z,t) &= \iint\limits_T K_1(z,\sigma)\overline{K_{n-1}(\sigma,t)}dT_\sigma, \quad (n=2,3,\dots) \end{aligned} \qquad (2.2.25)$$

i

$$\begin{aligned} \Omega_1(z,t) &= \frac{1}{t - z} + \iint\limits_T \frac{\Gamma_1(z,\sigma)}{t - \sigma} dT_\sigma, \\ \Omega_2(z,t) &= \iint\limits_T \frac{\Gamma_2(z,\sigma)}{\overline{t} - \overline{\sigma}} dT_\sigma. \end{aligned} \qquad (2.2.26)$$

Funkcije Γ_1 i Γ_2 nazivaju se <u>rezolventama integralne jednačine</u> (2.2.20), a funkcije Ω_1 i Ω_2 nazivaju se <u>jezgrima diferencijalne jednačine (2.2.11) koja odgovaraju oblasti T</u>.

U slučaju da je H = 0, tj. u slučaju homogene normalne jednačine (2.2.15), opšte rešenje je oblika

$$U(z) = \Phi(z) + \iint\limits_T \Gamma_1(z,t)\cdot\Phi(t)dT + \iint\limits_T \Gamma_2(z,t)\cdot\overline{\Phi(t)}dT. \qquad (2.2.27)$$

Ova formula, svakoj analitičkoj u T i neprekidnoj u T+L funkciji $\Phi(z)$ pridružuje po jedno regularno u T i neprekidno u T+L rešenje jednačine (2.2.11), pri čemu svakom takvom rešenju odgovara jedinstvena analitička funkcija $\Phi(z)$, definisana pomoću integrala Cauchyjevog tipa (2.2.22).

Formula (2.2.23) predstavlja opšte rešenje nehomogene normalne jednačine (2.2.11), pri čemu je

$$U_0(z) = -(1/\pi)\iint_T \Omega_1(z,t)H(t)dT - (1/\pi)\iint_T \Omega_2(z,t)\overline{H(t)}dT \qquad (2.2.28)$$

regularno u T, partikularno rešenje nehomogene jednačine (2.2.11). Na osnovu formule (2.2.24) sledi da je svako regularno rešenje jednačine (2.2.11) kompletno regularno, ako funkcije $A(z)$ i $H(z)$ zadovoljavaju Hölderov uslov.

Osobine jezgara i rezolventi

U cilju rešavanja graničnih problema za jednačinu (2.2.11) navedimo osnovne osobine jezgara i rezolventi iz rešenja (2.2.24). Iz (2.2.25) sledi da je

$$\begin{aligned} K_{2n-1}(z,t) &= -A(t)\cdot\mathring{K}_{2n-1}(z,t)/\pi, \\ K_{2n}(z,t) &= -\overline{A(t)}\cdot\mathring{K}_{2n}(z,t)/\pi, \quad n\in\mathbb{N}, \end{aligned} \qquad (2.2.29)$$

gde je

$$\mathring{K}_1(z,t) = \frac{1}{t-z}, \quad \mathring{K}_n(z,t) = -\frac{1}{\pi}\iint_T \frac{A(\sigma)\overline{K_{n-1}(\sigma,t)}}{\sigma - z}\, dT_\sigma \qquad (2.2.30)$$

$$,(n = 2, 3, \ldots)$$

odakle je

$$\begin{aligned} \mathring{K}_{2n}(z,t) &= \frac{1}{\pi}\iint_T \frac{A(\sigma)\mathring{K}_{2n-1}(z,\sigma)}{\sigma - z}\, dT_\sigma, \\ \mathring{K}_{2n-1}(z,t) &= \frac{1}{\pi}\iint_T \frac{\overline{A(\sigma)}\mathring{K}_{2n}(z,\sigma)}{\sigma - z}\, dT_\sigma, \quad n\in\mathbb{N} \end{aligned} \qquad (2.2.31)$$

S obzirom da je, na osnovu (2.2.24) i (2.2.29):

$$\Gamma_1(z,t) = -\overline{A(t)}\Omega_2(z,t)/\pi, \quad \Gamma_2(z,t) = -A(t)\Omega_1(z,t)/\pi \qquad (2.2.32)$$

gde je

$$\Omega_1(z,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\mathring{K}_{2n-1}(z,t), \quad \Omega_2(z,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\mathring{K}_{2n}(z,t), \qquad (2.2.33)$$

sledi da jezgra jednačine (2.2.11) Ω_1 i Ω_2 zadovoljavaju sledeće relacije:

$$\Omega_1(z,t) + \frac{1}{\pi}\iint_T \frac{\overline{A(\sigma)}\Omega_2(z,\sigma)}{t-\sigma}\, dT_\sigma = \frac{1}{t-z}, \qquad (2.2.34a)$$

$$\Omega_2(z,t) + \frac{1}{\pi} \iint_T \frac{A(\sigma)\Omega_1(z,\sigma)}{\bar{t} - \bar{\sigma}} dT_\sigma = 0 \ , \qquad (2.2.34b)$$

$$\begin{aligned} \Omega_1(z,t) &+ \frac{1}{\pi} \iint_T \frac{A(\sigma)\overline{\Omega_2(\sigma,t)}}{\sigma - z} dT_\sigma = \frac{1}{t - z} \ , \\ \Omega_2(z,t) &+ \frac{1}{\pi} \iint_T \frac{A(\sigma)\overline{\Omega_1(\sigma,t)}}{\sigma - z} dT_\sigma = 0 \ . \end{aligned} \qquad (2.2.35)$$

Pokazuje se [216] da funkcije $\Omega_1(z,t)$ i $\Omega_2(z,t)$ pripadaju klasi $C_2(T)$ u odnosu na z, osim u $z = t$. Za $z = t$, Ω_1 i $\partial\Omega_2/\partial\bar{z}$ imaju singularitete reda $|t - z|^{-1}$, a Ω_2 i $\partial\Omega_1/\partial\bar{z}$ singularitete oblika $\ln|t - z|$.

Pomoću relacija (2.2.34) i (2.2.35) jednostavno se dobijaju singularne jednačine za Ω_1 i Ω_2:

$$\begin{aligned} \Omega_1(z,t) &- \iint_T \overline{A(\sigma)}K(z,\sigma)\Omega_1(\sigma,t)dT_\sigma = 1/(t - z), \\ \Omega_2(z,t) &- \iint_T \overline{A(\sigma)}K(z,\sigma)\Omega_2(\sigma,t)dT_\sigma = -\pi\cdot K(z,t), \\ \Omega_1(z,t) &- \iint_T A(\sigma)\overline{K(\sigma,t)}\Omega_1(z,\sigma)dT_\sigma = 1/(t - z), \\ \Omega_2(z,t) &- \iint_T A(\sigma)K(\sigma,t)\Omega_2(z,\sigma)dT_\sigma = -\pi\cdot K(z,t), \end{aligned} \qquad (2.2.36)$$

gde je

$$K(z,t) = \frac{1}{\pi^2} \iint_T \frac{A(\sigma)dT_\sigma}{(\sigma - z)(\bar{t} - \bar{\sigma})} \ . \qquad (2.2.37)$$

Za nalaženje jezgara Ω_1 i Ω_2 dovoljno je rešiti jednu od jednačina (2.2.36), pa se drugo jezgro dobija iz relacija (2.2.34) ili (2.2.35).

Jezgra $\Omega_1(z,t)$ i $\Omega_2(z,t)$ jednačine (2.2.11) su funkcije analitičke po promenljivoj z izvan T+L i jednake nuli u beskonačnosti ($t\in T$), a $\Omega_1(z,t)$ i $\overline{\Omega_2(z,t)}$ su analitičke izvan T+L u odnosu na promenljivu t i jednake nuli u beskonačnosti, ($z\in T$).

Ako pretpostavimo da je funkcija $A(z)$ definisana i neprekidna na celoj ravni, T_0 neka oblast koja u svojoj unutrašnjosti sadrži datu oblast T, Ω_1^0 i Ω_2^0 jezgra jednačine (2.2.11) u oblasti T_0, važi da je:

$$\begin{aligned} &\int_L [W(t)\Omega_1(z,t)dt - \overline{W(t)}\Omega_2(z,t)dt] = \\ &= \int_L [W(t)\Omega_1^0(z,t)dt - \overline{W(t)}\Omega_2^0(z,t)dt], \end{aligned} \qquad (2.2.38)$$

gde je W proizvoljno, regularno u T i neprekidno u T+L rešenje jednačine

$$\partial W/\partial\bar{z} - A(z)\overline{W} = 0. \qquad (2.2.39)$$

Uopštena Cauchyjeva formula

Ako u formulu (2.2.27) umesto funkcije $\Phi(z)$ uvrstimo integral Cauchyjevog tipa (2.2.22), dobijamo uopštenu Cauchyjevu formulu

$$U(z) = (1/2\pi i)\int_L \Omega_1(z,t)U(t)dt - (1/2\pi i)\int_L \Omega_2(z,t)\overline{U(t)}d\bar{t}. \quad (2.2.40)$$

Ovom se formulom izračunava vrednost u $z\in T$ regularnog rešenja u T jednačine (2.2.39) posredstvom vrednosti tog rešenja na rubu L oblasti T. Funkcije Ω_1 i Ω_2 nazivaju se jezgrima formule (2.2.40).

Na osnovu (2.2.38), formulu (2.2.40) možemo da napišemo i u obliku

$$U(z) = (1/2\pi i)\int_L \Omega_1^0(z,t)U(t)dt - (1/2\pi i)\int_L \Omega_2^0(z,t)\overline{U(t)}d\bar{t}. \quad (2.2.41)$$

To znači da za jezgra Cauchyjeve formule (2.2.40) možemo da uzmemo jezgra jednačine (2.2.39) koja odgovaraju proizvoljnoj oblasti T_0 koja u sebi sadrži datu oblast T, $(\partial T = L)$.

Ako je $A(z) = 0$, jednačina (2.2.39) prelazi u jednačine Cauchy-Riemanna, a formula (2.2.40) u običnu Cauchyjevu formulu za analitičke funkcije (1.1.1).

Slično kao i u slučaju analitičkih funkcija (strana 5) i u klasi $C_{\bar{z}}$ možemo da ustanovimo koji su uslovi neophodni i dovoljni da neka funkcija bude rešenje graničnog problema za jednačinu (2.2.39).

Teorema 2.2.4. Da bi neprekidna na rubu L oblasti T funkcija U(t) bila granična vrednost regularnog u T i neprekidnog u T+L rešenja U(z) homogene normalne jednačine (2.2.39), neophodno je i dovoljno, da funkcija U(z) zadovoljava relaciju

$$(1/2\pi i)\cdot\int_L \Omega_1^0(z,t)U(t)dt-(1/2\pi i)\cdot\int_L \Omega_2^0(z,t)\overline{U(t)}d\bar{t} = 0.!! \quad (2.2.42)$$

Neka je $\varphi(t)$ integrabilna funkcija tačaka $t\in L$. Tada je funkcija

$$U(z)= (1/2\pi i)\cdot\int_L \Omega_1^0(z,t)\varphi(t)dt-(1/2\pi i)\cdot\int_L \Omega_2^0(z,t)\overline{\varphi(t)}d\bar{t}, \quad (2.2.43)$$

unutar T i T_0-T-L, realno rešenje jednačine (2.2.39). Izvan T_0+

$$c_{2n} = \mathrm{Re}[\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{U(t)dt}{t^{n+1}}], \quad c_{2n+1} = \mathrm{Im}[\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{U(t)dt}{t^{n+1}}], \tag{2.2.48}$$

$$(n=0,1,2,\ldots).||$$

Teorema 2.2.6. Neka je T prsten $r_1<|z|<r_2$. Proizvoljno regularno u T i neprekidno u T+L rešenje jednačine (2.2.39) može se razložiti unutar oblasti T u ravnomerno konvergentan red

$$U(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n U_n(z), \tag{2.2.49}$$

gde je

$$U_n = U_{n,0}, \quad U_{-2n} = \mathcal{A}_T(z^{-n}), \quad U_{-2n+1} = \mathcal{A}_T(iz^{-n}), \quad n\in \mathbb{N}, \tag{2.2.50}$$

$$c_{2n} = \mathrm{Re}[\frac{1}{2\pi i}\int_{L_2} \frac{U(t)dt}{t^{n+1}}], \quad c_{2n+1} = \mathrm{Im}[\frac{1}{2\pi i}\int_{L_2} \frac{U(t)dt}{t^{n+1}}],$$

$$(n=0,1,2,\ldots),$$

$$\begin{aligned} c_{-2n} &= -\mathrm{Re}[(1/2\pi i)\cdot\int_{L_1} U(t)t^n dt], \\ c_{-2n+1} &= -\mathrm{Im}[(1/2\pi i)\cdot\int_{L_1} U(t)t^n dt], \end{aligned} \tag{2.2.51}$$

$$(n\in\mathbb{N}\ ;\ L_1:\ |z| = r_1\ ;\ L_2:\ |z| = r_2).||$$

Stabilnost rečenja u odnosu na koeficijente

U [216] dokazano je i sledeće tvrdjenje.

Ako niz U_1, U_2, ... regularnih u T i neprekidnih u T + L rešenja jednačine (2.2.39), ravnomerno konvergira na rubu L oblasti T, tada on ravnomerno konvergira i unutar oblasti T i njegova granična vrednost je regularno u T rešenje jednačine (2.2.39).||

Pretpostavimo da su A(z) i B(z) neprekidne funkcije u T+L i da su $\{A_n\}$ i $\{B_n\}$ nizovi funkcija neprekidnih u T+L koji ravnomerno konvergiraju u T+L ka funkcijama A i B respektivno.

Posmatrajmo jednačine

$$\partial U/\partial \bar{z} = AU + B\bar{U} \tag{2.2.52}$$

$$\partial U_n/\partial \bar{z} = A_n U_n + B_n \bar{U}_n, (n\in\mathbb{N}) \tag{2.2.53}$$

i označimo sa Γ_1, Γ_2, $\Gamma_1^{(n)}$, $\Gamma_2^{(n)}$, $(n\in\mathbb{N})$ rezolvente tih jednačina u odnosu na oblast T.

Na osnovu (2.2.27), sva rešenja regularna u T i neprekidna u T+L jednačine (2.2.52) i (2.2.53), date su formulama:

$$U = \mathcal{A}[\varphi] = \varphi(z) + \iint_T \Gamma_1(z,t)\varphi(t)dT + \iint_T \Gamma_2(z,t)\overline{\varphi(t)}dT, \tag{2.2.27}$$

$$U_n = \mathcal{A}_n[\varphi] = \varphi(z) + \iint_T \Gamma_1^{(n)}(z,t)\varphi(t)dT + \iint_T \Gamma_2^{(n)}(z,t)\overline{\varphi(t)}dT, \tag{2.2.54}$$

$$(n=1,2,\ldots).||$$

2.3. Hilbertov granični problem

Pretpostavimo da je T višestruko povezana oblast čija se kontura L sastoji od konačnog broja prostih, disjunktnih, glatkih kontura $L_0, L_1, \ldots, L_n$, pri čemu L_0 sadrži unutar sebe sve ostale konture.

Hilbertov granični problem Naći regularno u T i neprekidno u $T+L$ rešenje $U = u + i \cdot v$ jednačine

$$\partial U/\partial \bar{z} = AU + B\bar{U} + F \tag{2.2.3}$$

koje zadovoljava granični uslov

$$\mathrm{Re}[(\alpha - i \cdot \beta)U] \equiv \alpha \cdot u + \beta \cdot v = \gamma , \tag{2.3.1}$$

gde su α, β, γ date realne funkcije definisane na L, koje zadovoljavaju Hölderov uslov i uslov $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$.!!

Ako je $F = 0$ i $\gamma = 0$ problem nazivamo homogenim . Funkcije α i β su koeficijenti Hilbertovog graničnog problema , a funkcija γ je njegov slobodni član .

Nećemo umanjiti opštost zaključka ako pretpostavimo da je

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1 \tag{2.3.2}$$

na L. Na osnovu relacija (2.2.10)-(2.2.11) sledi da se opšti slučaj jednostavno svodi na slučaj kada je $A = 0$.

U slučaju jednačine

$$\partial U/\partial \bar{z} = A\bar{U} \tag{2.2.15}$$

koristićemo reprezentaciju regularnog u T i neprekidnog u $T+L$ rešenja datog formulom (2.2.27). Slično kao i u slučaju Hilbertovog problema za analitičke funkcije na višestruko povezanoj oblasti, koristićemo se integralnom reprezentacijom (1.8.33) analitičke funkcije $\Phi(z)$, tj.

$$\Phi(z) = \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\mu(t)dt}{t - z} - iC, \tag{2.3.3}$$

gde je $\mu(t)$ realna funkcija tačke $t \in L$ i C realna konstanta.

U slučaju prostopovezane oblasti $(m = 0)$ $\mu(t)$ i C su jednoznačno odredjeni preko $\Phi(z)$. U slučaju višestruko povezane oblasti $(m > 0)$ konstanta C je odredjena jednoznačno, a $\mu(t)$ sa tačnošću do na sabirak $c_1\mu_1 + \cdots + c_m\mu_m$, gde su $c_1, \ldots, c_m$ proizvoljne realne konstante, a $\mu_1, \ldots, \mu_m$ funkcije tačke $t \in L$ zadate relacijama:

$$\mu_j(t) = \begin{cases} 1 & , t \in L_j \\ 0 & , t \in L, \ t \notin L_j, \end{cases} \tag{2.3.4}$$

$(j=1,2,\ldots,m)$, (videti (1.8.34) na strani 46).

Ako relaciju (2.3.3) uvrstimo u formulu (2.2.27), dobijamo opšte rešenje jednačine (2.2.15) u obliku

$$U(z) = \int_L M(z,t)\mu(t)ds + C\cdot U_1(z), \qquad (2.3.5)$$

gde je

$$M(z,t) = (1/\pi i)[t'(s)\Omega_1(z,t) - \overline{t'(s)}\Omega_2(z,t)] \qquad (2.3.6)$$

$$U_1(z) = \mathcal{A}_T(i) = i + i\iint_T \Gamma_1(z,t)dT - i\iint_T \Gamma_2(z,t)dT \qquad (2.3.6')$$

pri čemu je

$$\Omega_1(z,t) = \frac{1}{t-z} + \iint_T \frac{\Gamma_1(z,\sigma)}{t-\sigma}dT_\sigma, \quad \Omega_2(z,t) = \iint_T \frac{\Gamma_2(z,\sigma)}{t-\sigma}dT_\sigma. \qquad (2.2.26)$$

Funkcija U_1 je partikularno rešenje jednačine (2.2.15) regularno u T i neprekidno u T+L, $U_1 \neq 0$, $t'(s)$ predstavlja izvod od t po luku, $t'(1) = \exp(i\cdot\theta(s))$, gde je $\theta(s)$ ugao tangente u tački t u odnosu na pozitivan smer x ose.

Prvi sabirak u (2.3.5) je uopšteni integral Cauchyjevog tipa sa gustinom $2\mu(t)$. Otuda je granična vrednost funkcije $U(z)$, kada tačka $z\in T$ teži ka $t_0\in L$, na osnovu uopštenih formula Plemelja-Sohockog (2.2.44), jednaka:

$$U(t_0) = \mu(t_0) + \int_L M(t_0,t)\mu(t)ds + C\cdot U_1(t_0). \qquad (2.3.7)$$

Ako ovu graničnu vrednost rešenja jednačine (2.2.15) uvrstimo u Hilbertov granični uslov (2.3.1), dobijamo sledeću singularnu integralnu jednačinu:

$$A\mu \equiv \alpha(t_0)\mu(t_0) + \int_L K(t_0,t)\mu(t)ds = C\cdot h(t_0) + \Upsilon(t_0), \qquad (2.3.8)$$

gde je

$$K(t_0,t) = \mathrm{Re}\{[\alpha(t_0) - i\beta(t_0)]\cdot M(t_0,t)\} \qquad (2.3.9)$$

i

$$h(t_0) = -\mathrm{Re}\{[\alpha(t_0) - i\beta(t_0)]\cdot U_1(t_0)\}. \qquad (2.3.10)$$

Jednačina (2.3.8) može se napisati i u obliku:

$$A\mu \equiv \alpha(t_0)\mu(t_0) - \frac{\beta(t_0)}{\pi}\int_L \frac{\mu(t)dt}{t-t_0} + \int_L K_*(t_0,t)\mu(t)ds =$$

$$= C\cdot h(t_0) + \Upsilon(t_0), \qquad (2.3.11)$$

gde je $K_*(t_0,t)$ funkcija koja ima u $t = t_0$ singularitet reda manjeg od 1. Kako je $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ na L, operator $A\mu$ je normalnog tipa, pa se na jednačinu (2.3.8) može primeniti teorija singularnih integralnih jednačina (videti (1.9.2) na strani 48).

Rešenje nehomogenog Hilbertovog graničnog problema (2.3.1) ekvivalentno je rešenju jednačine (2.3.8) u sledećem smislu. Ako nehomogeni Hilbertov problem ima rešenje, tada postoje realna neprekidna funkcija $\mu(t)$ tačke $t\in L$ i realna konstanta C, koje zadovoljavaju jednačinu (2.3.8). Ako $\mu(t)$ i C zadovoljavaju jednačinu (2.3.8), onda njihovim uvrštavanjem u (2.3.5) dobijamo rešenje Hilbertovog problema. To rešenje je trivijalno samo u slučaju kada je $\Upsilon = 0$, $C = 0$ i $\mu = \mu_j$ $(j=1,2,\dots,m)$.

Rešenje homogenog Hilbertovog graničnog problema dobija se, na sličan način, pomoću rešenja integralne jednačine

$$A\mu \equiv \alpha(t_0)\mu(t_0) + \int_L K(t_0,t)\mu(t)ds = C\cdot h(t_0). \qquad (2.3.12)$$

Kada je T višestruko povezana oblast $(m > 1)$, na osnovu (1.8.33), konstanta C se može predstaviti pomoću integrala $C = \int_L \mu(t)ds$, pa jednačina (2.3.8) tada ima oblik

$$A_0\mu \equiv \alpha(t_0)\mu(t_0) + \int_L K_0(t_0,t)\mu(t)ds = \Upsilon(t_0), \qquad (2.3.13)$$

gde je

$$K_0(t_0,t) = \begin{cases} K(t_0,t) - h(t_0) & , t\in L_1,\ t_0\in L \\ K(t_0,t) & , t\notin L_1,\ t\in L,\ t_0\in L. \end{cases} \qquad (2.3.14)$$

U tom slučaju se homogeni Hilbertov problem svodi na homogenu singularnu integralnu jednačinu

$$A_0\mu \equiv \alpha(t_0)\mu(t_0) + \int_L K_0(t_0,t)\cdot\mu(t)ds = 0. \qquad (2.3.15)$$

U slučaju $h(t) \equiv 0$, jednačine (2.3.15) i (2.3.8) se poklapaju, i tada je funkcija $U_1(z)$, data relacijom (2.3.7), rešenje homogenog Hilbertovog problema.

Na osnovu navedenih transformacija sledi da se rešavanje Hilbertovog problema za eliptički sistem parcijalnih jednačina prvog reda može svesti na rešavanje singularne integralne jednačine. Iako su time stvorene mogućnosti primene približnih metoda za rešavanje integralnih jednačina,ovaj rezultat i dalje ima više teorijski nego praktičan značaj, ne samo zbog složenosti postupaka za dobijanje rezolventi Γ_1 i Γ_2, već i zbog toga što imamo posla sa singularnim integralnim jednačinama u kojima figurišu višestruki integrali.

Otuda prelaz sa Hilbertovog graničnog problema na ekvivalentnu singularnu integralnu jednačinu služi ne toliko za rešavanje samog problema, koliko za odredjivanje broja nezavisnih rešenja u zavisnosti od indeksa problema.

Indeks $\varkappa$ Hilbertovog problema za višestruko povezane oblasti definisan je relacijama (1.8.28) i (1.8.29).

Ceo broj

$$n = \frac{1}{2\pi}[\arg \frac{\alpha + i\beta}{\alpha - i\beta}]_L = 2\varkappa \qquad (2.3.16)$$

naziva se <u>indeksom integralnog operatora</u> $A\mu$ <u>ili jednačine</u> $A\mu = f$. Jasno je da se indeksi operatora $A\mu$ i $A_0\mu$ poklapaju.

Ako u granični uslov (2.3.1) uvrstimo reprezentaciju rešenja jednačine (2.2.15) u obliku (2.2.8) i uvedemo oznaku $e^{\omega}(\alpha - i\beta) = h(t)$, dobijamo Hilbertov granični problem

$$Re[h(t)\varphi(t)] = \gamma \qquad (2.3.17)$$

za analitičku funkciju $\varphi(t)$.

Jednostavno se dokazuje da izmedju rešenja polaznog problema (2.3.1) i Hilbertovog problema (2.3.17) postoji uzajamno jednoznačna korespondencija. Na osnovu te činjenice sledi da se na polazni granični problem (2.3.1) mogu primeniti svi teorijski rezultati koji se odnose na rešenja Hilbertovog graničnog problema za analitičke funkcije na višestruko povezanoj oblasti, a koje se odnose na zavisnost broja rešenja problema od njegovog indeksa u slučajevima kada je $\varkappa<0$ i $\varkappa>m-1$.

Kada je indeks Hilbertovog problema (2.3.1) $\varkappa<0$, lako se dokazuje da homogeni Hilbertov problem ima samo trivijalno rešenje. Dokazuje se da u tom slučaju, <u>integralna jednačina pridružena jednačini</u> $A\mu = 0$:

$$A'\chi \equiv \alpha(t_0)\chi_0 + \int_L K(t,t_0)\chi(t)ds = 0, \qquad (2.3.18)$$

ima tačno $-2\varkappa + m$ linearno nezavisnih rešenja $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_{m-2\varkappa}$, gde je $m + 1$ broj kontura koje čine rub oblasti T.

U [216] Vekua je dokazao sledeće teoreme.

<u>Teorema 2.3.1.</u> Ako je indeks $\varkappa$ Hilbertovog graničnog problema (2.3.1) negativan broj, homogeni granični problem nema rešenja, a nehomogeni problem je rešiv na jedinstven način ako je zadovoljeno $-2\varkappa + m$ uslova oblika:

$$\int_L \gamma(t)\cdot\chi_j(t)ds = 0, \qquad (2.3.19)$$

pri čemu su

$$\chi_j^* = \chi_{j+1} - \chi_1(t) \int_L h(t)\chi_{j+1}(t)ds, \quad (j=1,2,\dots,-2\varkappa+m-1) \qquad (2.3.20)$$

gde su $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_{m-2\varkappa}$ linearno nezavisna rešenja integralne jednačine (2.3.18).!!

<u>Teorema 2.3.2.</u> Ako je $\varkappa+1 > m$, tada je nehomogeni Hilbertov problem (2.3.1) bezuslovno rešiv, a odgovarajući homogeni problem ima tačno $2\varkappa-m+1$ linearno nezavisnih rešenja.

Specijalno, ako je oblast T prostopovezana ($m=0$), u slučaju $\varkappa>0$, nehomogeni Hilbertov problem (2.3.1) je bezuslovno rešiv, a odgovarajući homogeni problem ima tačno $2\varkappa+1$ linearno nezavisno rešenje.!!

Vekua je u [216] takodje pokazao da se, u slučaju kada je oblast T jedinični krug $|z|<1$ i kontura L jedinična kružnica $|z| = 1$, a $\varkappa>0$, nehomogeni Hilbertov problem (2.3.1) može neposredno svesti na singularnu integralnu jednačinu, a da pritom izbegnemo reprezentaciju opšteg regularnog rešenja jednačine (2.2.15).

Ovaj postupak je u mnogo čemu sličan onom kojim se rešava Hilbertov problem za analitičke funkcije.

Ako uvedemo smenu

$$g(t) = \alpha - i\cdot\beta = t^{-\varkappa}\cdot e^{iw(t)}, \quad t\in L, \qquad (2.3.21)$$

gde je $w(t) = \arg[g(t)\cdot t^{\varkappa}]$ jednoznačna funkcija na L, pomoću Schwatzovog integrala, dobijamo funkciju

$$p(z) = w(x,y) + i\cdot w_*(x,y) = \frac{1}{2\pi i}\int_L w(t)\cdot\frac{t+z}{t-z}\cdot\frac{dt}{t} \qquad (2.3.22)$$

analitičku u T, čiji realni deo $w(x,y)$ na konturi L uzima vrednost $w(t)$.

Iz (2.3.21) i (2.3.22) sledi da se granični uslov (2.3.1) može transformisati u oblik

$$\mathrm{Re}[U(t)g(t)] = \mathrm{Re}[t^{-\varkappa}\cdot e^{ip(t)}e^{w_*(t)}U] = e^{w_*}\mathrm{Re}[t^{-\varkappa}V(t)], \qquad (2.3.23)$$

gde je $w_*(t)$ granična vrednost imaginarnog dela funkcije $p(z)$ na L, a $V(z) = e^{ip(z)}\cdot U(z)$ regularno u T i neprekidno u T+L rešenje jednačine

$$\partial V/\partial\bar{z} - \hat{A}_0\bar{V} = 0, \quad \hat{A}_0 = A\cdot e^{2iw}. \qquad (2.3.24)$$

Ako je U rešenje nehomogenog Hilbertovog graničnog problema (2.3.1) na oblasti T, tada funkcija V zadovoljava granični uslov

$$\mathrm{Re}[t^{-\kappa}V(t)] = \gamma_0, \quad \gamma_0 = e^{-w_*(t)}\gamma. \tag{2.3.25}$$

Kada iz (2.3.24) i (2.3.25) nadjemo rešenje V, onda pomoću relacije

$$U(z) = e^{-ip(z)}\cdot V(z) \tag{2.3.26}$$

dobijamo traženo rešenje U posmatranog Hilbertovog problema.

Time je polazni problem sveden na granični problem (2.3.24)-(2.3.25).

Svako regularno u T rešenje jednačine (2.3.24) je, u isto vreme, rešenje integralne jednačine

$$V(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_T \frac{A_0(t)\overline{V(t)}}{t-z}\,dT + \Phi_0(z), \tag{2.3.27}$$

gde je $\Phi_0(z)$ proizvoljna funkcija analitička u T i neprekidna u T+L.

Ako pretpostavimo da je

$$\Phi_0(z) = -\frac{z^{2\kappa+1}}{\pi}\iint_T \frac{\overline{A_0(t)}V(t)}{1-z\bar{t}}\,dT + \Phi(z), \tag{2.3.28}$$

gde je $\Phi(z)$ funkcija analitička u T i neprekidna u T+L, jednačina (2.3.27) transformiše se u jednačinu oblika

$$V(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_T\left[\frac{A_0(t)\overline{V(t)}}{t-z} + \frac{z^{2\kappa+1}\overline{A_0(t)}V(t)}{1-z\bar{t}}\right]dT + \Phi(z). \tag{2.3.29}$$

Svako rešenje ove jednačine je istovremeno i regularno u T i neprekidno u T+L rešenje jednačine (2.3.24).

Slično kao i u prvoj glavi, dokazano je da, ako funkciju $\Phi(z)$, u (2.3.29), predstavimo u obliku

$$\Phi(z)=\frac{z^{\kappa}}{2\pi i}\int_L \gamma_0(t)\,\frac{t+z}{t-z}\cdot\frac{dt}{t} + iCz^{\kappa} + \sum_{k=0}^{\kappa-1}\{\alpha_k(z^k-z^{2\kappa-k}+i\cdot\beta_k(z^k+z^{2\kappa-k})\}, \tag{2.3.30}$$

gde su C, α_0, β_0, ..., $\alpha_{\kappa-1}$, $\beta_{\kappa-1}$ proizvoljne realne konstante, dobijamo integralnu jednačinu čije je svako rešenje istovremeno i rešenje graničnog problema (2.3.25).

Na ovaj način je Hilbertov granični problem neposredno sveden na integralnu jednačinu bez posredstava integralne reprezentacije (2.2.27) opšteg rešenja jednačine (2.2.15).

Ovi rezultati mogu se uopštiti na slučaj proizvoljne prostopovezane oblasti koja se,odgovarajućim konformnim preslikavanjem, svodi na jedinični krug (videti stranu 42). Problem je jedino u tome što je za efektivno odredjivanje takvog konformnog preslikavanja neophodno ili rešiti neku Fredholmovu integralnu jednačinu ili primeniti neki drugi postupak sličnog stepena složenosti.

Pokazuje se da je integralnu jednačinu (2.3.29) moguće rešiti metodom sukcesivnih aproksimacija.

U slučaju prostopovezane oblasti i nenegativnog indeksa, nehomogeni Hilbertov problem može se svesti na Fredholmovu integralnu jednačinu koja sadrži samo realni deo traženog rešenja:

$$u(z) + \frac{2}{\pi}\iint_T \mathrm{Re}\left\{\frac{A_0(t)e^{w(t)}}{(t-z)e^{w(z)}} + \frac{z^{2\kappa+1}\overline{A_0(t)}\,\overline{e^{w(t)}}}{(1-zt)e^{w(z)}}\right\}u(t)\,dT =$$

$$= \mathrm{Re}[e^{-w(z)}\cdot\Phi(z)], \tag{2.3.31}$$

gde je

$$\Phi(z) = \frac{z^\kappa}{2\pi i}\int_L \gamma_0(t)e^{w(t)}\cdot\frac{t+z}{t-z}\cdot\frac{dt}{t} + i\cdot C\cdot z^\kappa +$$

$$+ \sum_{k=0}^{\kappa-1}\{\alpha_k(z^k - z^{2\kappa-k}) + i\cdot\beta_k(z^k + z^{2\kappa-k})\}. \tag{2.3.32}$$

Tako se integralna jednačina (2.3.29) svodi na oblik koji je moguće rešavati metodom sukcesivnih aproksimacija.

Napomenimo da je pri formiranju integralne jednačine (2.3.31) jedini problem naći konformno preslikavanje koje datu prostopovezanu oblast preslikava na jedinični krug. Svi ostali elementi jednačine dobijaju se pomoću kvadratura.

Granični problem (2.3.1) za slučaj $\alpha = 1$ i $\beta = 0$ na prostopovezanoj oblasti prvi je razmatrao D.Hilbert [87] koji je problem sveo na ekvivalentnu Fredholmovu jednačinu koristeći se Greenovom funkcijom Dirichletovog graničnog problema. U Hilbertovom radu nije dat dokaz egzistencije rešenja za proizvoljne uslove date na konturi. Pomenutom problemu posvećen je i rad W. Haacka i G.Hellwiga [80] koji se takodje nisu bavili pitanjem egzistencije rešenja problema. Hilbertov problem oblika (2.3.1) prvi je formulisao N.K.Usmanov [209]. Pitanje egzistencije rešenja Hilbertovog graničnog problema za višestruko povezane oblasti rešio je N.P.Vekua u [216]. On je, pored toga, predložio još neka od mogućih uopštenja graničnih uslova, dao obiman prikaz primena navedenih rezultata u teoriji elastičnih ljuski i detaljno obradio slučaj sistema oblika (2.2.2) kod kojih su koeficijenti a, b, c, d, f, g analitičke funkcije promenljivih x i y. Vekua je takodje ukazao i na vezu koja postoji izmedju sistema linearnih parcijalnih jednačina eliptičkog tipa i eliptičkih parcijalnih jednačina drugog reda.

Slučajeve $\kappa = 0$ i $\kappa = m-1$ razmatrao je E.T.Hasabov [84].

Sistemima jednačina eliptičkog tipa bavili su se mnogi autori. Od sovjetskih, pored Vekue, značajne rezultate dali su M.A.Lavrentijev, B.V.Šabat, G.N.Položij, L.G.Mihajlov i drugi.

Od naših autora, graničnim problemima za eliptičke sisteme parcijalnih jednačina bavili su se S.Fempl [56], [58], [59], M.Čanak [28], [29], [30], [31], i drugi.

2.4. Riemannov i Carlemanov granični problem

Posmatraćemo homogenu jednačinu

$$\partial U/\partial \bar{z} = A\bar{U} \qquad (2.2.15)$$

u kojoj je koeficijent $A(z)$ neprekidan na celoj ravni sa izuzetkom konture L na kojoj može da ima prekide prvog reda, a u okolini beskonačno daleke tačke zadovoljava uslov $|A(z)| < M/|z|^{\alpha}$, $\alpha>1$. Konturu L i oblasti D^{+} i D^{-} biramo kao na slici 1.3 (strana 23).

Riemannov problem

Naći rešenja jednačine (2.2.15) $U^{+}(z)$ i $U^{-}(z)$, regularna, respektivno, u oblastima D^{+} i D^{-}, neprekidna do konture L, takva da njihove granične vrednosti na L zadovoljavaju linearnu relaciju

$$U^{+}(t) = G(t)\cdot U^{-}(t) + g(t), \qquad (2.4.1)$$

gde su $G(t)$ i $g(t)$ date funkcije tačaka konture koje zadovoljavaju Hölderov uslov, pri čemu je $G(t) \neq 0$.!!

Traženi par funkcija nazivamo <u>deo po deo regularnim rešenjem</u> .

Rešavanje ovog graničnog problema je u mnogo čemu slično rešavanju odgovarajućeg problema za analitičke funkcije.

Prvo se rešava <u>problem skoka</u> . Treba odrediti deo po deo regularno rešenje jednačine (2.2.15) koje na L zadovoljava uslov

$$U^{+}(t) - U^{-}(t) = g(t), \qquad (2.4.2)$$

gde je $g(t)$ data funkcija koja zadovoljava Hölderov uslov.

Neka su

$$U_{2k}(z) = z^k[1 + \iint_E \Gamma_{1,m}(z,\zeta)d\xi d\eta + \iint_E \Gamma_{2,k}(z,\zeta)d\xi d\eta],$$

$$U_{2k+1}(z) = iz^k[1 + \iint_E \Gamma^i_{1,m}(z,\zeta)d\xi d\eta + \iint_E \Gamma^i_{2,k}(z,\zeta)d\xi d\eta], \tag{2.4.3}$$

gde su $\Gamma_{1,k}$, $\Gamma_{2,k}$ rezolvente jednačine $\partial U/\partial\bar{z} = AU\cdot\bar{z}^k/z^k$, a $\Gamma^i_{1,k}$, $\Gamma^i_{2,k}$ rezolvente jednačine $\partial U/\partial\bar{z} = -AU\cdot\bar{z}^k/z^k$, a integracija se vrši po celoj ravni E.

Na osnovu (2.2.46) vidimo da su funkcije U_k linearno nezavisne u smislu kombinacija sa realnim koeficijentima.

Kako izmedju stepena z^k, iz^k i funkcija U_{2k}, U_{2k+1} postoji uzajamno jednoznačna korespondencija, za funkcije U_k kažemo da su analogne stepenima.

Formule (2.4.3) predstavljaju linearno nezavisna rešenja jednačine (2.2.15) neprekidna u celoj ravni sa izuzetkom beskonačno daleke tačke u kojoj imaju red jednak $-k$.

Na osnovu uopštenih formula Plemelja-Sohockog (2.2.44) i uopštene Liouvilleove teoreme (teorema 2.2.2), rešenje problema se može predstaviti u obliku zbira uopštenog integrala Cauchy-jevog tipa (2.2.40) sa gustinom g(t) i funkcije $U_p(z) = -\sum_{k=0}^{2K+1} A_k U_k(z)$.

To znači da je rešenje problema skoka funkcija:

$$U(z)=(1/2\pi i)[\int_L \Omega_1(z,\tau)g(\tau)d\tau-\int_L \Omega_2(z,\tau)\overline{g(\tau)}d\tau]+U_p(z). \tag{2.4.4}$$

Homogeni Riemannov problem

$$U^+(t) = G(t)\cdot U^-(t) \tag{2.4.5}$$

rešavamo na sledeći način.

Saglasno formuli (2.2.8'), s obzirom da je $\omega(z)$ neprekidna funkcija na celoj ravni, imamo da je:

$$U^+(t) = \varphi^+(t)\cdot e^{w(t)},\quad U^-(t) = \varphi^-(t)\cdot e^{w(t)}. \tag{2.4.6}$$

Kada relacije (2.4.6) uvrstimo u granični uslov (2.4.5), dobijamo Riemannov granični problem za deo po deo analitičku funkciju $\varphi(z)$:

$$\varphi^+(t) = G(t)\cdot\varphi^-(t), \tag{2.4.7}$$

što znači da problem (2.4.5) ima onoliko rešenja koliko ih ima i granični problem (2.4.7).

Neka je X(z) kanonska funkcija graničnog problema (2.4.7). Indeks K koeficijenta G(t) nazivamo indeksom problema (2.4.6), a X(z) njegovom kanonskom funkcijom .

Postupkom sličnim kao kod problema skoka, pokazuje se da granični problem (2.4.5), za $\kappa > 0$, ima $2\kappa+2$ linearno nezavisnih rešenja oblika:

$$U_{2k}(z) = z^k X(z)[1+\iint_E \Gamma_{1,k,x}(z,\zeta)d\xi d\eta+\iint_E \Gamma_{2,k,x}(z,\zeta)d\xi d\eta],$$
$$(2.4.8)$$
$$U_{2k+1}(z) = iz^k X(z)[1+\iint_E \Gamma^i_{1,k,x}(z,\zeta)d\xi d\eta+\iint_E \Gamma^i_{2,k,x}(z,\zeta)d\xi d\eta],$$

gde su $\Gamma_{1,k,x}$, $\Gamma_{2,k,x}$ rezolvente jednačine $\partial U/\partial\bar{z} = A(z)U\cdot\overline{z^k X(z)}/[z^k X(z)]$, a $\Gamma^i_{1,k,x}$, $\Gamma^i_{2,k,x}$ rezolvente jednačine $\partial U/\partial z = -A(z)\bar{U}\cdot\overline{z^k X(z)}/[z^k X(z)]$.

Nehomogeni Riemannov granični problem

Zamenom koeficijenta $G(t)$ količnikom kanonskih funkcija, granični uslov (2.4.1) svodimo na problem skoka:

$$\frac{U^+(t)}{X^+(t)} - \frac{U^-(t)}{X^-(t)} = \frac{g(t)}{X^+(t)}. \qquad (2.4.9)$$

Rešenje problema (2.4.1) se, zbog toga, dobija iz formule (2.4.4) kada u njoj g zamenimo sa g/X^+, a U sa U/X. Otuda je opšte rešenje (2.4.1), za $\kappa > 0$, oblika:

$$U(z) = X(z)[W(z) + V_p(z)], \qquad (2.4.10)$$

gde je

$$W(z)= \frac{1}{2\pi i}\int_L w_1(z,\tau)\cdot\frac{g(\tau)}{X^+(\tau)}\,d\tau - \frac{1}{2\pi i}\int_L w_2(z,\tau)\cdot\overline{\frac{g(\tau)}{X^+(\tau)}}\,d\bar{\tau}, \qquad (2.4.11)$$

$$V_p(z) = \sum_{k=0}^{2\kappa+1} A_k V_k(z), \qquad (2.4.12)$$

gde su $V_{2k}(z)$ i $V_{2k+1}(z)$ istog oblika kao u $U_{2k}(z)$, $U_{2k+1}(z)$ u (2.4.8), s tom razlikom što su, u ovom slučaju, Γ_1 i Γ_2 rezolvente jednačina $\partial V/\partial\bar{z} = \pm VA(z)\overline{z^k X(z)}/[z^k X(z)]$. Funkcije $w_1(z,\tau)$ i $w_2(z,\tau)$ su potpuno odredjena jezgra jednačine $\partial V/\partial\bar{z} = V\cdot A(z)\cdot[\overline{X(z)}/X(z)]$.

Ako zahtevamo da bude ispunjen dodatni uslov $U(\infty) = 0$, u (2.4.12), umesto κ stavljamo $\kappa - 1$.

U slučaju da je $\kappa \leq 0$, u formuli (2.4.10) je $V_p(z) = 0$. Da bi granični problem (2.4.1), za $\kappa<0$, imao rešenje koje zadovoljava uslov $U(\infty) = 0$, neophodno je da budu zadovoljeni uslovi rešivosti:

$$\int_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} e^{-w(\tau)}\cdot\tau^k d\tau = 0, \quad (k=0,1,\ldots,-\kappa-1), \qquad (2.4.13)$$

gde je
$$w(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_E A(\zeta)\cdot\frac{\overline{X(\zeta)}}{X(\zeta)}\cdot\frac{\overline{W(\zeta)}}{W(\zeta)}\cdot\frac{d\xi d\eta}{\zeta - z}\,. \qquad (2.4.14)$$

Kako u rešenjima Riemannovog problema figurišu jezgra i rezolvente koje se dobijaju iz Fredholmovih integralnih jednačina, problem se svodi na konačno mnogo integralnih jednačina koje se mogu rešavati približnim metodama.

Slučaj nehomogene jednačine $\partial U/\partial\bar{z} = A\bar{U} + F$ lako se svodi na slučaj homogene jednačine smenom $U = U_0 + V$, gde je

$$U_0 = (-1/\pi)[\iint_E \Omega_1(z,\zeta)F(\zeta)d\xi d\eta + \iint_E \Omega_2(z,\zeta)\overline{F(\zeta)}d\xi d\eta]\,.$$

Granični uslov za funkciju U prelazi u granični uslov za funkciju V koja zadovoljava odgovarajuću homogenu diferencijalnu jednačinu. Pritom, ako je polazni granični uslov za funkciju U bio homogen, u odnosu na V on postaje nehomogen.

Kao i u slučaju Riemannovog problema, granični problemi Hasemana i Carlemana se, takodje, formulišu i u klasi uopštenih analitičkih funkcija.

<u>Hasemanov granični problem</u> Naći deo po deo regularno rešenje $U(z)$ jednačine $\partial U/\partial\bar{z} = A(z)\overline{U(z)} + F(z)$ koje na krivoj Ljapunova L zadovoljava granični uslov

$$U^+[\alpha(t)] = G(t)U^-(t) + g(t), \qquad (1.6.13')$$

gde je $\alpha(t)$ direktni pomak krive L, $G(t)$, $g(t)$, $\alpha'(t)\in H_\mu(L)$, $G(t)\neq 0$, $\alpha'(t)\neq 0$ na L.!!

<u>Carlemanov unutrašnji granični problem</u> Neka je oblast D^+ ograničena prostom zatvorenom krivom Ljapunova L, $\alpha(t)$ obratni pomak krive L koji zadovoljava Carlemanov uslov $\alpha[\alpha(t)] = t$ i $G(t)$, $g(t)$, $\alpha'(t)\in H_\mu(L)$, $G(t)\neq 0$, $\alpha'(t)\neq 0$.

Naći regularno rešenje $U^+(z)$ u oblasti D^+ jednačine $\partial U/\partial\bar{z} = A\bar{U} + F$ koje na krivoj L zadovoljava granični uslov

$$U^+[\alpha(t)] = G(t)\cdot U^+(t) + g(t).!! \qquad (1.7.2')$$

Oba problema se rešavaju potpuno analogno kao i odgovarajući problemi u klasi analitičkih funkcija.

Kompletno rešenje Riemannovog problema dao je L.G.Mihajlov [129]. On je takodje rešio i Hasemanov problem za uopštene analitičke funkcije. Koristeći Vekuin rezultat [218] predstavljanja regularnog rešenja jednačine (2.2.15) pomoću analitičkih funkcija, Mihajlov je problem sveo na poznati problem za analitičke funkcije.

Problem tipa Hasemana u $\Gamma_{\bar z}$ rešio je E.G.Hasabov [84], a u klasi uopštenih analitičkih funkcija, G.N.Aleksandrija [2].

2.5. Neki prilozi teoriji graničnih problema za eliptičke sisteme jednačina

Granični problemi za eliptičke sisteme parcijalnih jednačina tipa Fempla

Eliptički sistem parcijalnih jednačina

$$\begin{aligned} u'_x - v'_y &= a\cdot u - b\cdot v + c, \\ u'_y + v'_x &= b\cdot u + a\cdot v + d, \end{aligned} \tag{2.5.1}$$

gde su $a(x,y)$, $b(x,y)$, $c(x,y)$ i $d(x,y)$ date neprekidne realne funkcije, a $w(z,\bar z) = u(x,y) + i\cdot v(x,y)$ tražena neprekidna funkcije, naziva se <u>sistemom tipa Fempla</u> .

Isto kao i u opštem slučaju, ako drugu od jednačina (2.5.1) pomnožimo sa i i to dodamo prvoj jednačini, dobijamo kompleksnu diferencijalnu jednačinu:

$$\partial w/\partial \bar z + A(z,\bar z)\cdot w + B(z,\bar z) = 0, \tag{2.5.2}$$

gde je $A(z,\bar z) = -(a+ib)/2$, a $B(z,\bar z) = -(c+id)/2$.

S.Fempl [57] je dokazao da je opšte rešenje jednačine (2.5.2) oblika

$$w = \exp(-\hat{\int} A(z,\bar z)d\bar z)[Q(z) - \hat{\int} B(z,\bar z)\exp(\hat{\int} A(z,\bar z)d\bar z)d\bar z], \tag{2.5.3}$$

gde je $Q(z)$ proizvoljna analitička funkcija i $\hat{\int}$ areolarni integralni operator inverzan areolarnom izvodu po $\bar z$ (strana 57).

Formula (2.5.3) se dobija i neposredno na osnovu teoreme 2.1.1,po analogiji sa rešavanjem diferencijalnih jednačina u različitim σ-sistemima.

Uopštićemo poznate granične probleme za slučaj sistema (2.5.1).

Uopštenje Hilbertovog problema za prostopovezane oblasti predstavlja:

<u>Problem 2.5.1.</u> Dati su: prosta, glatka, zatvorena kontura L i funkcije luka s krive L, $a(s)$, $b(s)$, $c(s)\in H_\mu$. Naći rešenje

$w(z,\bar{z}) = u(x,y) + i\cdot v(x,y)$ eliptičkog sistema parcijalnih diferencijalnih jednačina (2.5.1), koje zadovoljava granični uslov

$$a(s)\cdot u(s) + b(s)\cdot v(s) = c(s) \qquad (1.8.1')$$

na konturi L.!!

Problem se svodi na odredjivanje regularnog na D^+ rešenja areolarne jednačine (2.5.2).

Uvedimo oznake

$$A = \exp(-\hat{\int} A(z,\bar{z})d\bar{z}) = A_1 + i\cdot A_2,\ Q = Q_1 + i\cdot Q_2,$$
$$B = -\hat{\int} B(z,\bar{z})\cdot\exp(\hat{\int} A(z,\bar{z})d\bar{z})d\bar{z} = B_1 + iB_2, \qquad (2.5.4)$$

gde su A_1, A_2, Q_1, Q_2, B_1 i B_2 realne funkcije promenljivih x i y.

Ako relacije (2.5.4) uvrstimo u (2.5.3), dobijamo opšte rešenje jednačine (2.5.2) u obliku:

$$w = (A_1+iA_2)(Q_1+iQ_2+B_1+iB_2) = (A_1Q_1+A_1B_1-A_2Q_2-A_2B_2) +$$
$$+ i\cdot(A_1Q_2+A_1B_2+A_2Q_1+A_2B_1). \qquad (2.5.5)$$

Kada realni i imaginarni deo jednakosti (2.5.5) uvrstimo u granični uslov (1.8.1'),dobijamo: $a(s)[A_1(s)Q_1(s)+A_1(s)B_1(s)-A_2(s)Q_2(s)-A_2(s)B_2(s)]+ b(s)[A_1(s)Q_2(s)+A_1(s)B_2(s)+A_2(s)Q_1(s)+A_2(s)B_1(s)] = c(s)$, i posle sredjivanja:

$$[aA_1 + bA_2]\cdot Q_1 + [bA_1 - aA_2]\cdot Q_2 =$$
$$= c - a[A_1B_1 - A_2B_2] - b[A_1B_2 + A_2B_1]. \qquad (2.5.6)$$

Relacija (2.5.6) predstavlja Hilbertov granični uslov za odredjivanje analitičke funkcije $Q(z) = Q_1(x,y) + i\cdot Q_2(x,y)$. Na osnovu osobina funkcija koje zadovoljavaju Hölderov uslov i definicije areolarnog integrala, sledi da i koeficijenti u (2.5.6) zadovoljavaju Hölderov uslov, pa se granični problem (2.5.6) rešava pomoću rezultata izloženih u paragrafu 1.8.

I u slučaju Hilbertovog problema za regularna rešenja jednačine (2.5.2) na višestruko povezanoj oblasti, dobijamo granični uslov (2.5.6) za odredjivanje analitičke funkcije Q, koji rešavamo na način opisan, takodje,u poglavlju 1.8.

<u>Problem 2.5.2.</u> Prosta, zatvorena kriva Ljapunova L, deli ravan na unutrašnju oblast D^+ ($0\in D^+$), i spoljašnju D^-. Neka su date funkcije $g(t)$, $G(t)$ tačaka na L, takve da je $G(t)$, $g(t) \in H_\mu(L)$ i $G(t) \neq 0$.

Naći deo po deo regularno rešenje $w(z,\bar{z}) = u(x,y)+iv(x,y)$ eliptičkog sistema (2.5.1) koje na krivoj L zadovoljava uslov

$$w^+[\alpha(t)] = G(t)\cdot w^-(t) + g(t), \qquad (1.6.13')$$

gde je $\alpha(t)$ direktan pomak krive L takav da je $\alpha'(t)\in H_\mu(L)$ i $\alpha'(t)\neq 0$.!!

Ovaj problem je jedno od uopštenja Hasemanovog problema.

Kada uvrstimo (2.5.3) i (2.5.4) u granični uslov (1.6.137), dobijamo relaciju

$$A^+[\alpha(t)]\cdot\{Q^+[\alpha(t)] + B^+[\alpha(t)]\}= G(t)A^-(t)[Q^-(t) + B^-(t)] + g(t)$$

koja, posle sredjivanja, prelazi u:

$$Q^+[\alpha(t)]= \frac{G(t)A^-(t)}{A^+[\alpha(t)]} Q^-(t) + \frac{G(t)B^-(t)+g(t)-A^+[\alpha(t)]B^+[\alpha(t)]}{A^+[\alpha(t)]}. \qquad (2.5.8)$$

Relacija (2.5.8) je granični uslov Hasemanovog graničnog problema za odredjivanje analitičke funkcije $Q(z) = Q_1(x,y) + i\cdot Q_2(x,y)$, koji se rešava na način opisan u poglavlju 1.6.

Sledeći problem predstavlja uopštenje unutrašnjeg Carlemanovog graničnog problema za Femplov sistem jednačina.

Problem 2.5.3. Neka je oblast D^+ ograničena prostom, zatvorenom krivom Ljapunova L, $\alpha(t)$ obratni pomak krive L koji zadovoljava Carlemanov uslov $\alpha[\alpha(t)] = t$ i $G(t)$, $g(t)\in H_\mu$, $G(t)\neq 0$ i $\alpha'(t)\neq 0$.

Naći regularno u oblasti D^+ rešenje $w^+(z,\bar{z})$ eliptičkog sistema jednačina (2.5.1) koje na krivoj L zadovoljava uslov

$$w^+[\alpha(t)] = G(t)\cdot w^+(t) + g(t).!! \qquad (1.7.1')$$

Istim postupkom kao u prethodna dva slučaja, problem (1.7.1') se svodi na Carlemanov granični problem za odredjivanje funkcije $Q^+(z)$ analitičke u oblasti D^+ koja na L zadovoljava uslov:

$$Q^+[\alpha]= \frac{G\cdot A^+}{A^+[\alpha]} Q^+ + \frac{G\cdot B^+ + g - A^+[\alpha]B[\alpha]}{A^+[\alpha]}. \qquad (2.5.9)$$

Problem (2.5.9) rešava se na način opisan u 1.7.

Kada nadjemo rešenja problema (2.5.6),(2.5.8) i (2.5.9) i uvrstimo ih u (2.5.3), dobijamo, respektivno, rešenja problema 2.5.1, 2.5.2 i 2.5.3.

Ove rezultate autor je objavio u koautorstvu sa dr Milošem Čankom [169]. U pomenutom radu dat je i primer primene ovih rezultata u teoriji elastičnosti.

Jedan granični problem za eliptički sistem parcijalnih jednačina sa nepoznatim funkcijama u slobodnim članovima

Od posebnog interesa, za razne primene u matematičkoj fizici, je rešavanje graničnih problema nehomogenih eliptičkih parcijalnih jednačina u slučaju kada njihovi slobodni članovi sadrže nepoznate funkcije.

Prirodno, kod takvih graničnih problema broj graničnih uslova mora biti veći nego što je to slučaj kod graničnih problema sa potpuno definisanim koeficijentima.

Ako je $g(t)\in\{0\}$, funkcije

$$g_{+}(t)=\begin{cases} g(t), & t\geq 0 \\ 0, & t<0 \end{cases}, \quad g_{-}(t)=\begin{cases} 0, & t\geq 0 \\ -g(t), & t<0 \end{cases} \tag{2.5.9}$$

nazivaju se <u>jednostranim funkcijama</u> (leva i desna, respektivno) funkcije $g(t)$.

Pretpostavimo da je

$$\begin{aligned} u'_x - v'_y &= au + bv + [f_{+}(x)+w_{-}(x)]\cdot\varphi(y) \\ u'_y + v'_x &= cu + dv + [f_{-}(x)+w_{+}(x)]\cdot\psi(y) \end{aligned} \tag{2.5.10}$$

nehomogeni sistem Vekuinog tipa, gde su a, b, c, d realne konstante, $\varphi(y)$ i $\psi(y)$ realne funkcije, $w(x)\in\{0\}$ i $f_{-}(x)$, $f_{+}(x)$ nepoznate jednostrane funkcije.

<u>Problem 2.5.4.</u> Naći rešenje sistema (2.5.10), regularno na gornjoj poluravni i ograničeno kada $y\to\infty$, koje na realnoj osi zadovoljava granične uslove

$$u(x,0)=0,\ v(x,0)=0,\ -\infty<x<\infty\ . \tag{2.5.11}$$

Ovaj granični problem rešavaćemo pomoću Fourierovih transformacija (poglavlje 1.2).

Kada primenimo Fourierov transformaciju (1.2.1) po promenljivoj x na sistem (2.5.10) i uslove (2.5.11), na osnovu relacija (1.2.12), (1.2.14), (1.2.17) i (1.2.18), dobijamo problem

$$-ixU - V'_y = aU + bV + [F^{+}(x) + \Omega^{-}(x)]\varphi(y), \tag{2.5.12}$$

$$U'_y - ixV = cU + dV + [F^{-}(x) + \Omega^{+}(x)]\psi(y), \tag{2.5.13}$$

$$U(x,0)=0\ ,\ V(x,0)=0\ ,\ -\infty<x<\infty\ , \tag{2.5.14}$$

Podjimo od jednačine (2.5.13) koja je obična linearna diferencijalna jednačina

$$U'_y - cU = (ix+d)V + [F^-(x)+\Omega^+(x)]\cdot\Psi(y) \qquad (2.5.13')$$

; U(x,y), ako promenljivu x tretiramo kao parametar.

Opšte rešenje jednačine (2.5.13') je oblika

$$\ldots,y) = \exp(c\int dy)[C+\int \{(d+ix)V(x,\xi)+[F^-(x)+\Omega^+(x)]\Psi(\xi)\}e^{-c\xi}d\xi]. \qquad (2.5.16)$$

Na osnovu prvog graničnog uslova u (2.5.14) sledi da je ...nstanta C = 0, pa je:

$$\ldots(x,y)=e^{cy}(d+ix)\int_0^y \frac{V(x,\xi)}{\exp(c\xi)}d\xi+e^{cy}[F^-+\Omega^+]\int_0^y \frac{\Psi(\xi)}{\exp(c\xi)}d\xi. \qquad (2.5.16')$$

Ako uvedemo smenu

$$W(x,y) = \int_0^y V(x,\xi)\cdot\exp(-c\xi)d\xi, \qquad (2.5.17)$$

...edi da je

$$V(x,y) = e^{cy}\cdot W'_y. \qquad (2.5.18)$$

Otuda je:

$$V'_y = c\cdot e^{cy}\cdot W'_y + e^{cy}\cdot W''_{yy}. \qquad (2.5.18')$$

Ako u jednačinu (2.5.12) uvrstimo (2.5.16) i (2.5.18'), ...bijamo diferencijalnu jednačinu po nepoznatoj W(x,y):

$$W''_{yy} + (b+c)W'_y + [ad - x^2 + i(a+d)x]\,W = -(ix+a)[F^- + \Omega^+]\cdot$$
$$\cdot\int_0^y \Psi(\xi)e^{-c\xi}d\xi - [F^+ + \Omega^-]e^{-cy}\cdot\Psi(y). \qquad (2.5.19)$$

Razmotrićemo dva moguća slučaja.

Pretpostavimo da je a + d =0. Tada jednačina (2.5.19) ima ...lik

$$W''_{yy} + (b+c)W'_y - (a^2+x^2)W = -(ix+a)[F^-(x) + \Omega^+(x)]\cdot$$
$$\cdot\int_0^y \Psi(\xi)\cdot e^{-c\xi}d\xi - [f^+(x) + \Omega^-(x)]e^{-cy}\cdot\Psi(y), \qquad (2.5.19')$$

...su rešenja karakteristične jednačine odgovarajuće homogene ...ferencijalne jednačine, oblika:

$$K_{1/2}(x) = [-(b+c) \pm \sqrt{(b+c)^2 + 4(a^2 + x^2)}]/2 \qquad (2.5.20)$$

...e je promenljiva $x\in\mathbb{R}$, parametar.

Jednostavno se proverava da je $K_1(x)<0$ i $K_2(x)>0$ za svako ...$\mathbb{R}$ i svako $b+c\in\mathbb{R}$, pa, s obzirom da su funkcije

$$W_1(x,y) = \exp[K_1(x)\cdot y], \quad W_2(x,y) = \exp[K_2(x)\cdot y]$$

...arno nezavisna rešenja jednačine $W''_{yy}+(b+c)W'_y-(a^2+x^2)W = 0$, rešenje jednačine (2.5.19') koje je ograničeno u nuli i beskonačnosti, tražimo uz pomoć Greenove funkcije oblika

$$G(y,s) = \begin{cases} C_1(x)[\exp(K_1(x)y) - \exp(K_2(x)y)], & 0 \leqslant y \leqslant s \\ C_2(x)\cdot\exp(K_1(x)y), & s \leqslant y < \infty, \end{cases} \tag{2.5.21}$$

gde su $C_1(x)$ i $C_2(x)$ funkcje koje tek treba odrediti.

Kako Greenova funkcija $G(y,s)$, izmedju ostalog, mora da zadovolji i uslove:

$$G(s,s+0) - G(s,s-0) = 0\ , \tag{2.5.22}$$

$$G'_s(s,s+0) - G'_s(s,s-0) = -1\ , \tag{2.5.23}$$

dobijamo sistem jednačina

$$C_1\cdot[\exp(K_1\cdot s) - \exp(K_2\cdot s)] - C_2\cdot\exp(K_1\cdot s) = 0 \tag{2.5.22'}$$

$$C_1\cdot[K_1\exp(K_1\cdot s) - K_2\exp(K_2\cdot s)] - C_2\cdot K_1\exp(K_1\cdot s) = -1 \tag{2.5.23'}$$

čija su rešenja

$$C_1 = \frac{\exp(-K_2 s)}{K_2 - K_1}\ , \quad C_2 = \frac{\exp(-K_1 s) - \exp(-K_2 s)}{K_2 - K_1}\ , \tag{2.5.24}$$

pa je tražena Greenova funkcija oblika:

$$G(y,s) = \begin{cases} \dfrac{\exp[K_2(x)\cdot(y-s)] - \exp[K_1(x)y-K_2(x)s]}{K_1(x) - K_2(x)}\ , & 0<y<s \\ \dfrac{\exp[K_1(x)\cdot(y-s)] - \exp[K_1(x)y-K_2(x)s]}{K_1(x) - K_2(x)}\ , & s<y<\infty \end{cases} \tag{2.5.25}$$

S obzirom da je dobijena Greenova funkcija (2.5.25) neprekidna na gornjoj poluravni, da zadovoljava uslove (2.5.22) i (2.5.23) i odgovarajuću homogenu diferencijalnu jednačinu jednačine (2.5.19') i da je ograničena u nuli i okolini beskonačno daleke tačke, sledi da je traženo rešenje jednačine (2.5.19') oblika:

$$W(x,y) = [K_2(x)-K_1(x)]^{-1}\cdot\int_0^\infty G(y,\eta)\{(ix+a)[F^-(x)+\Omega^+(x)]\cdot$$

$$\cdot\int_0^\eta \psi(\xi)e^{-c\xi}\,d\xi + [F^+(x)+\Omega^-(x)]\cdot e^{-c\eta}\cdot\varphi(\eta)\}\,d\eta =$$

$$= (ix+a)[F^-(x)+\Omega^+][K_2(x)-K_1(x)]^{-1}\cdot\int_0^\infty G(y,\eta)[\int_0^\eta \psi(\xi)e^{-c\xi}d\xi]\,d\eta +$$

$$+ [F^+(x)+\Omega^-(x)][K_2(x)-K_1(x)]^{-1}\cdot\int_0^\infty G(y,\eta)\varphi(\eta)e^{-c\eta}\,d\eta. \tag{2.5.26}$$

Na osnovu (2.5.18) i (2.5.26) sledi da je:

$$V(x,y)= e^{cy}W_y' = \frac{(ix+a)[F^-(x)+\Omega^+(x)]e^{cy}}{K_2(x) - K_1(x)} \int_0^\infty \tilde{G}_y'(y,\eta)[\int_0^\eta \frac{\psi(\xi)d\xi}{e^{c\xi}}]d\eta +$$

$$+ e^{cy}\cdot\frac{F^+(x)+\Omega^-(x)}{K_2(x)-K_1(x)} \cdot\int_0^\infty \tilde{G}_y'(y,\eta)\cdot\varphi(\eta)e^{-c\eta}\, d\eta, \qquad (2.5.27)$$

gde je $\tilde{G}(y,s) = G(y,s)\ [K_1(x) - K_2(x)]$, i

$$\tilde{G}_y'(y,s) = \begin{cases} [K_2\exp(K_2y)-K_1\exp(K_1y)]\ \exp(-K_2s) & , 0\leqslant y\leqslant s \\ K_1\exp(K_1y)[\exp(-K_1s)-\exp(-K_2s)] & , s\leqslant y<\infty. \end{cases} \qquad (2.5.28)$$

Iz (2.5.27) i (2.5.28) dobijamo da je:

$$V(x,y) = \frac{(ix+a)[F^-(x)+\Omega^+(x)]e^{cy}}{K_2(x) - K_1(x)}\cdot\{-K_2(x)\cdot\exp(K_2(x)y)\cdot$$

$$\cdot\int_0^y [\exp(K_2(x)\eta)-\exp(K_1(x)\eta)]\varphi(\eta)\cdot\exp(-c\eta)d\eta + [1-\exp[(K_2(x) -$$

$$- K_1(x))y]]\cdot\int_0^y \psi(\xi)\exp(-c\xi)d\xi + [-K_1(x)\exp(-K_1(x)y) +$$

$$+ K_2(x)\exp(-K_2(x)y)]\cdot\int_y^\infty \exp(K_1(x)\eta)\cdot[\int_0^y \psi(\xi)\exp(-c\xi)d\xi]d\eta -$$

$$- [1-\exp((K_1(x)-K_2(x))y)]\cdot\int_0\psi(\xi)\exp(-c\xi)d\xi\}+ \frac{F^+(x)+\Omega^-(x)}{K_2(x)-K_1(x)}\ \exp(cy)\cdot$$

$$\cdot\{-K_2(x)\exp(-K_2(x)y)\cdot\int_0^y [\exp(K_2(x)\eta)-\exp(K_1(x)\eta)]\varphi(\eta)e^{-c\eta}d\eta +$$

$$+ [1-\exp((K_1(x)-K_2(x))y)]\exp(-cy)\cdot\varphi(y) + [-K_1(x)\exp(-K_1(x)y) +$$

$$+ K_2(x)\exp(-K_2(x)y]\cdot\int_y^\infty \exp((K_1(x)-c)\eta)\cdot\varphi(\eta)d\eta - [1-\exp((K_1(x) -$$

$$- K_2(x))y)]\exp(-cy)\cdot\varphi(y)\}. \qquad (2.5.29)$$

Na osnovu drugog graničnog uslova $V(x,0) = 0$ iz (2.1.14) i (2.5.29), dobijamo relaciju

$$(ix+a)[F^-(x)+\Omega^+(x)]\cdot A(x) = [F^+(x)+\Omega^-(x)]\cdot B(x),$$ tj.

granični uslov Riemanna:

$$F^+(x)= - \frac{(a+ix)A(x)}{B(x)}\ F^-(x) - \frac{(a+ix)A(x)}{B(x)} - \Omega^-(x), -\infty<x<\infty, \qquad (2.5.30)$$

na realnoj osi, gde je

$$A(x) = \int_0^\infty \exp(K_1(x)\eta)[\int_0^\eta \psi(\xi)\cdot\exp(-c\xi)d\xi]d\eta,$$

$$B(x) = \int_0^\infty \exp[(K_1(x) - c)\cdot\eta]\cdot\varphi(\eta)d\eta. \qquad (2.5.31)$$

Pomoću rešenja Riemannovog problema (2.5.30), kada ono postoji, dobijamo funkcije U i V, iz kojih inverznim Fourierovim transformacijama (1.2.2) dobijamo tražena rešenja $u(x,y)$ i $v(x,y)$ problema 2.5.4.

U slučaju kada je $a+d\neq 0$ homogena diferencijalna jednačina koja odgovara jednačini (2.5.19), ima karakterističnu jednačinu

$$K^2 + (b+c)K + [ad-x^2+i(a+d)x] = 0 \tag{2.5.32}$$

sa kompleksnim koeficijentima koji zavise od parametra $x\in\mathbb{R}$ i čija su rešenja:

$$2\cdot K_{1/2} = -(b+c) \mp \{(b+c)^2 - 4[ad - x^2 + i(a+d)x]\}^{1/2}. \tag{2.5.33}$$

Kada kompleksne funkcije $K_1(x)$ i $K_2(x)$ razložimo na zbirove realnih i imaginarnih delova, dobijamo da je:

$$K_1(x) = \alpha_1(x) + i\cdot\beta(x),\ K_2(x) = \alpha_2(x) - i\cdot\beta(x), \tag{2.5.34}$$

gde je

$$\alpha_{1/2}(x) = -(1/2)\cdot\{(b+c)\pm\sqrt[4]{[(b+c)^2-4ad+4x^2]^2 + 16x^2(a+d)^2}\ \cdot$$
$$\cdot\cos[\operatorname{arctg}\frac{2x(a+d)}{(b+c)^2-4ad+4x^2}]\}, \tag{2.5.35}$$

i

$$\beta(x) = (1/2)\cdot\{[(b+c)-4ad+4x^2]^2+16x^2(a+d)^2]^{1/4}\cdot$$
$$\cdot\sin[\operatorname{arctg}\frac{2x(a+d)}{(b+c)^2-4ad+4x^2}]. \tag{2.5.36}$$

Kako je $\left|\operatorname{arctg}\frac{2x(a+d)}{(b+c)^2-4ad+4x^2}\right| < \pi/2$ sledi da je $\cos[\operatorname{arctg}\frac{2x(a+d)}{(b+c)^2-4ad+4x^2}] > 0$ za svako $x,\ a,\ b,\ c,\ d\in\mathbb{R}$.

Na osnovu toga se jednostavno dokazuje da je, za $b+c>0$, $\alpha_1(x)<0$ za svako $x,\ a,\ b,\ c,\ d\in\mathbb{R}$ i $\alpha_2>0$ kada $|x|\to\infty$.

Za $b+c=0$ je $\alpha_1<0$ i $\alpha_2>0$ za svako $x,a,b,c,d\in\mathbb{R}$. Slično je, za $b+c<0$, $\alpha_2>0$ za svako $x,a,b,c,d\in\mathbb{R}$, a $\alpha_1<0$ kada $|x|\to\infty$. To znači da je za svaki skup vrednosti $a,b,c,d\in\mathbb{R}$, jedno od dva linearno nezavisna rešenja

$$W_1(x,y) = \exp[K_1(x)\cdot y],\quad W_2(x,y) = \exp[K_2(x)\cdot y] \tag{2.5.37}$$

homogene diferencijalne jednačine koja odgovara (2.5.19), ograničeno u nuli i beskonačnosti, oblika:

$$G(y,s) = \begin{cases} C_1\{\exp[K_1(x)\cdot y] - \exp[K_2(x)y]\}, & 0\leqslant y\leqslant s \\ C_2\cdot\exp[K_1(x)y], & s\leqslant y<\infty. \end{cases} \tag{2.5.38}$$

Postupak za rešavanje ovog slučaja teče analogno prethodno opisanom. Na kraju se problem svodi na Riemannov granični problem sa graničnim uslovom (2.5.30), (2.5.31), čije rešenje služi za dobijanje traženih funkcija $u(x,y)$ i $v(x,y)$.

Mogućnosti uopštenja problema 2.5.4 su velike. možemo umesto konstanti $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ uzeti neprekidne funkcije po promenljivoj x ili po obe promenljive x i y, ali se u tom slučaju rešavanje problema veoma komplikuje, jer se pri Fourierovim transformacijama sistema (2.5.10) pojavljuju konvolucije tipa (1.2.4). Ukoliko su a,b,c,d funkcije samo po promenljivoj y, postupak rešavanja je sličan opisanom, i ovde nije naveden zbog obimnosti računanja integrala oblika (2.5.29).

Takodje se mogu posmatrati i složeniji granični uslovi od uslova (2.5.11).

Ovaj rezultat saopšten je na V Seminaru iz primenjene matematike, održanom u Ljubljani 1986 [163].

2.6. Granični problemi za polianalitičke funkcije

Polianalitička funkcija multiporetka $m = (m_1,\dots,m_n)$ kompleksnih promenljivih $z_1,\dots,z_n$, $\bar z_1,\dots,\bar z_n$ u oblasti T kompleksnog prostora $\mathbb{C}^n$, $n > 1$, je funkcija oblika

$$w = \sum_{k_1,\dots,k_n=0}^{m_1-1,\dots,m_n-1} \bar z_1^{k_1}\cdots\bar z_n^{k_n}\cdot f_{k_1,\dots,k_n}(z_1,\dots,z_n), \tag{2.6.1}$$

gde su $f_{k_1,\dots,k_n}$ analitičke funkcije promenljivih $z_1,\dots,z_n$ u T.

Nas će interesovati samo polianalitičke funkcije n-tog reda po promenljivima z i $\bar z$ oblika

$$F(z,\bar z) = \sum_{p=0}^{n-1} z^p\cdot\bar z^p\cdot\varphi_p(z), \tag{2.6.2}$$

gde su $\varphi_p(z)$ proizvoljne analitičke funkcije, koje predstavljaju drugi oblik zadavanja areolarnih polinoma (2.1.45).

Funkcije

$$U(x,y) = \mathrm{Re}\,F(z,\bar z),\quad V(x,y) = \mathrm{Im}\,F(z,\bar z) \tag{2.6.3}$$

nazivaju se <u>spregnutim poliharmonijskim funkcijama</u>.

Očito je

$$\Delta^n U = 0, \ \Delta^n V = 0, \tag{2.6.4}$$

gde je $\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ Laplaceov operator, a eksponent n ukazuje da operator Δ primenjujemo n puta.

Specijalno, za n = 2, jednačina $\Delta^2 U = 0$ naziva se <u>biharmonijskom</u>, a njena rešenja- <u>biharmonijskim funkcijama</u>.

Bianalitičke funkcije $w = \varphi_0(z) + \bar{z}\cdot\varphi_1(z)$ predstavljaju klasu, tzv. Goursatovih funkcija.

Graničnim problemima za polianalitičke funkcije bavili su se pretežno sovjetski autori. U [68] pominje se nekoliko takvih graničnih problema.

Neka je L prosta, zatvorena kontura čija jednačina $t = x(s) + iy(s)$ ima izvode zaključno do (2n-2)-og reda, koji zadovoljavaju Hölderov uslov. Treba odrediti, u oblasti T^+ polianalitičku funkciju n-tog reda:

$$w(z,\bar{z}) = u(x,y) + i\cdot v(x,y) \tag{2.6.5}$$

neprekidnu na konturi L, koja zadovoljava jedan od graničnih uslova:

<u>Problem 2.6.1.</u>

$$a_k(s)\cdot\Delta^k u + b_k(s)\cdot\Delta^k v = c_k(s), \ (k=0,1,2,\dots,n-1). \tag{2.6.6}$$

<u>Problem 2.6.2.</u>

$$a_k(s)\cdot\Delta^k u + b_k(s)\cdot\Delta^k v = c_k(s),$$

$$a_k^*(s) \ \frac{\partial \ \Delta^k u}{\partial \nu} + b_k^*(s) \ \frac{\partial \ \Delta^k v}{\partial \nu} = c_k(s), \tag{2.6.7}$$

$(k=0,1,\dots,[(n-1)/2])$, pri čemu, u slučaju da je n neparan broj, odbacujemo poslednji uslov.

<u>Problem 2.6.3.</u>

$$a_k(s) \ \frac{\partial^k u}{\partial \nu^k} + b_k(s) \ \frac{\partial^k v}{\partial \nu^k} = c_k(s), \ (k=0,1,2,\dots,n-1). \tag{2.6.8}$$

<u>Problem 2.6.4.</u>

$$a_k(s) \ \frac{\partial^{n-1} u}{\partial x^{n-k}\partial y^{k-1}} + b_k(s) \ \frac{\partial^{n-1} v}{\partial x^{n-k}\partial y^{k-1}} = c_k(s), \tag{2.6.9}$$

$$(k=1,2,\dots,n),$$

gde su $a_k(s)$, $b_k(s)$, $a_k^*(s)$, $b_k^*(s)$ date, na L, realne funkcije luka koje, zajedno sa svojim izvodima do (2n-k-2)-og reda, zadovoljavaju Hölderov uslov, pri čemu je $a_k^2 + b_k^2 \neq 0$ i $[a_\lambda(s)]^2 + [b_\lambda(s)]^2 \neq 0$.

Pretpostavimo, takodje, da su zadovoljeni uslovi

$$a_k^2(s) + b_k^2(s) = 1, \quad [a_\lambda(s)]^2 + [b_\lambda(s)]^2 = 1. \tag{2.6.10}$$

Sva četiri pomenuta problema mogu se svesti na granične probleme za analitičke funkcije $\varphi_p(z)$ iz (2.6.2).

Kada se ograničimo na najjednostavnije slučajeve konture L (pravu i kružnicu), sva četiri problema mogu se svesti na skupove od po n Hilbertovih graničnih problema takvih da u svakom od njih figuriše samo po jedna od nepoznatih analitičkih funkcija.

Metode rešavanja problema 2.6.1 - 2.6.4. objavili su V.S.Rogožin [176] i M.P.Ganin [72], [73].

U slučaju problema 2.6.1, granični uslov možemo da napišemo u obliku

$$\mathrm{Re}\{[a_k(s) - i b_k(s)] \cdot \Delta^k w(t,\bar{t})\} = c_k(s), \quad (k=0,1,\ldots,n-1), \tag{2.6.11}$$

gde je

$$w(z,\bar{z}) = u + i \cdot v = \sum_{p=0}^{n-1} z^p \cdot \bar{z}^p \cdot \varphi_p(z), \tag{2.6.12}$$

(vidi [30]).

Ako je oblast T^+ jedinični krug, na kružnici L je $\bar{t} = 1/t$. Kada uvedemo nove analitičke funkcije

$$\Phi_k(z) = \sum_{p=k}^{n-1} \frac{p!}{(p-k)!} \cdot \frac{(z^p \varphi_p(z))^{(k)}}{z^{p-k}}, \tag{2.6.13}$$

na L će biti zadovoljen uslov

$$\Delta^k F(t,\bar{t}) = 4^k \cdot \Phi_k(t), \tag{2.6.14}$$

pa granične uslove (2.6.11) možemo napisati u obliku

$$\mathrm{Re}\left[\frac{\Phi_k(t)}{a_k(s) + i \cdot b_k(s)}\right] = 4^{-k} \cdot c_k(s), \quad (k=0,1,\ldots,n-1), \tag{2.6.15}$$

čime dobijamo n Hilbertovih graničnih problema za odredjivanje nepoznatih analitičkih funkcija $\Phi_k(z)$.

Na osnovu rezultata iz poglavlja 1.8, rešenja problema (2.6.15) su oblika

$$\Phi_k(z) = z^{\varkappa_k} e^{i T_k(z)} \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} c_k(\sigma) \cdot e^{w_k(\sigma)} \frac{e^{i\sigma} + z}{e^{i\sigma} - z} \, d\sigma + Q_k(z)\right], \tag{2.6.16}$$

pri čemu, ako je za neko k indeks $\varkappa_k < 0$, moramo da pretpostavimo da je $Q_k(z) \equiv 0$ i tada moraju biti ispunjeni uslovi rešivosti:

$$\int_0^{2\pi} c_k(\sigma)\cdot \exp[w_k(\sigma)+i\cdot m_k\sigma]d\sigma = 0 \ , \quad (m_k=0,1,\dots,-K_k-1). \qquad (2.6.17)$$

Kada u formulu (2.6.12) uvrstimo dobijena rešenja (2.6.16), dobijamo rešenje problema 2.6.1.

Ako su svi indeksi K_k nenegativni, problem je bezuslovno rešiv i njegovo opšte rešenje zavisi od $N = \sum_{k=0}^{n-1} (2K_k + 1)$ proizvoljnih realnih konstanti.

U opštem slučaju, kada je

$$K_0<0,\ K_1<0,\ \dots,\ K_q<0;\ K_{q+1}\geqslant 0,\ \dots,\ K_{n-1}\geqslant 0,$$

rešenje postoji samo onda kada je ispunjeno $\sum_{k=0}^{q} (-2K_k-1)$ uslova rešivosti oblika (2.6.17). U tom slučaju, opšte rešenje zavisi od $\sum_{k=q+1}^{n-1} (2K_k+1)$ proizvoljnih realnih konstanti.

Ako je oblast T^+ gornja poluravan, problem se rešava na potpuno isti način, osim što na realnoj osi, umesto uslova $\bar{t} = 1/t$, koji smo koristili kada je L jedinična kružnica, imamo da je $\bar{t} = t$.

Slučaj kada se oblast T^+ može preslikati na jedinični krug pomoću racionalnih funkcija,rešavali su P.K.Zeragija [224] i M.P.Ganin. Analognim tehnikama rešavaju se i preostali granični problemi.

Pomenimo još neke značajne rezultate teorije graničnih problema za polianalitičke funkcije.

I.Sokolov je, u radu [195], razmatrao granični problem tipa Riemanna za polianalitičke funkcije u slučaju kada je kontura L kružnica, i dokazao da se taj problem svodi na n Riemannovih problema za analitičke funkcije. Isti autor u radovima [194] i [196] razmatra problem Riemannovog tipa za bianalitičke funkcije za proizvoljnu konturu i problem tipa Riemanna sa pomakom za polianalitičke funkcije ako je kontura L kružnica.

M.Čanak je, u radu [32], razmatrao problem tipa Carlemana na prostoj, glatkoj, zatvorenoj konturi L, za areolarnu diferencijalnu jednačinu n-tog reda, oblika:

$$D^n w + d_1 D^{n-1} w + \dots + d_{n-1} D w + d_n w = 0,$$

gde su d_1, d_2, ...,d_n, proizvoljne konstante. Autor je dokazao da se pomenuti problem svodi na n problema tipa Carlemana za analitičke funkcije.

III glava

Teorija p-analitičkih i (p,q)-analitičkih funkcija

Iako se klase p-analitičkih i (p,q)-analitičkih funkcija mogu svesti na specijalne slučajeve uopštenih analitičkih funkcija Vekuinog tipa, o kojima je bilo reči u prethodnoj glavi, ima mnogo razloga da im se posveti posebna pažnja.

Pomenute funkcije definisao je G.N.Položij, koji je pored brojnih radova vezanih za proučavanje osobina p i (p,q)-analitičkih funkcija i njihovih primena u matematičkoj fizici, objavio i obimnu monogragiju [160] posvećenu ovim dvema klasama kompleksnih funkcija.

Neka je

$$f(z,\bar{z}) = u(x,y) + i\cdot v(x,y) \tag{3.1.1}$$

definisana i jednoznačna u oblasti D i neka funkcije $u(x,y)$ i $v(x,y)$ imaju neprekidne parcijalne izvode po x i y koji zadovoljavaju sistem parcijalnih jednačina

$$pu'_x - v'_y = 0,\ pu'_y + v'_x = 0, \tag{3.1.2}$$

gde je $p = p(x,y)$ data realna funkcija.

Ako je $p = p(x,y) > 0$ na D, funkcija $f(z,\bar{z})$ se naziva <u>p-analitičkom</u>, a ako je $p = p(x,y) < 0$ na D, <u>p-antianalitičkom</u> u oblasti D sa datom <u>karakteristikom</u> p.

Funkcija $f(z,\bar{z})$, p-analitička u D, je kompleksno konjugovana sa odgovarajućom $-p$ -analitičkom funkcijom u D.

Funkcija $f(z,\bar{z}) = u + i\cdot v$, definisana i jednoznačna u oblasti D, takva da funkcije $u(x,y)$ i $v(x,y)$ imaju neprekidne parcijalne izvode po x i y koji zadovoljavaju sistem

$$pu'_x - qu'_y - v'_y = 0,\ qu'_x + pu'_y + v'_x = 0, \tag{3.1.3}$$

gde su $p=p(x,y)$ i $q=q(x,y)$ realne funkcije i $p > 0$, naziva se <u>(p,q)-analitičkom</u> u oblasti D sa <u>karakteristikama</u> $p=p(x,y)$ i $q=q(x,y)$.

Očito je da p-analitičke funkcije predstavljaju poseban slučaj (p,q)-analitičkih funkcija za $q \equiv 0$.

Jednostavno se dokazuje da svakoj p-analitičkoj funkciji $f(z,\bar{z}) = u + i\cdot v$ odgovara funkcija $\Phi(z,\bar{z}) = \varphi + i\cdot\psi = pu + i\cdot v$ koja zadovoljava areolarnu diferencijalnu jednačinu oblika

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\bar{z}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial \ln p}{\partial\bar{z}}(\Phi + \bar{\Phi}), \tag{3.1.4}$$

a da svakoj (p,q)-analitičkoj funkciji $f(z,\bar{z}) = u + iv$ odgovara funkcija $\Phi(z,\bar{z}) = \varphi + i\cdot\psi = pu + i\cdot(v + q\cdot u)$ koja zadovoljava jednačinu oblika

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\bar{z}} = \frac{1}{2p}\cdot\frac{\partial\sigma}{\partial\bar{z}}(\Phi + \bar{\Phi}), \tag{3.1.5}$$

gde je $\sigma = p + i\cdot q$.

Na taj način se p-analitičke i (p,q)-analitičke funkcije dovode u vezu sa uopštenim analitičkim funkcijama Vekuinog tipa.

Motivacija za izučavanje p i (p,q)-analitičkih funkcija bazira se na činjenici da su one uopštene analitičke funkcije koje imaju najviše zajedničkih osobina sa analitičkim funkcijama i da za njih važe mnoga tvrdjenja koja nisu tačna na celom skupu regularnih rešenja Vekuinog sistema (2.1.2).

Klase p-analitičkih funkcija sa karakteristikama $p=x^k$, (k=const.>0) i $p=\alpha(x,y)$, gde je $\alpha(x,y)$ harmonijska funkcija, igraju značajnu ulogu u matematičkoj fizici. Specijalno, za $p = x$ moguće je dobiti u konačnom obliku rešenja odgovarajućih graničnih problema u teoriji osnosimetričnog potencijala.

Položij je, takodje, iskoristio p-analitičke funkcije za nalaženje u eksplicitnom obliku rešenja graničnih problema vezanih za bezmomentne rotacione površi sa pozitivnom Gaussovom krivinom, različitim od rotacionih površi drugog reda.

Pomoću topoloških svojstava p i (p,q)-analitičkih funkcija dobija se takozvani metod majorantnih oblasti kojim se rešavaju mnogi problemi teorije filtracije i teorije torzije rotacionih tela.

I pored toga što se teorija p-analitičkih i (p,q)-analitičkih funkcija intenzivno razvija, mnoga pitanja, naročito u slučaju složenijih karakteristika p i q, ostala su i do danas otvorena.

Na pomenutim klasama moguće je definisati i razviti veoma moćan matematički aparat koji, izmedju ostalog, omogućuje i azvijanje kompleksnih funkcija odredjenog tipa u redove -analitičkih funkcija, definisanje elementarnih p i (p,q)-ana-litičkih funkcija itd.

U ovoj glavi biće navedeni neki od neophodnih rezultata monografije [160] G.N.Položija i rešeni neki granični pro-lemi za p-analitičke funkcije.

p i (p,q)-diferenciranje i integracija

Označimo sa $A(p,D)$ klasu p-analitičkih funkcija u oblasti), a sa $A(p,q,D)$ klasu (p,q)-analitičkih funkcija u D. Ukoliko am za razmatranje nije od važnosti o kojoj je oblasti reč, ko-istićemo kraće oznake: $A(p)$ i $A(p,q)$.

Iz definicija direktno sledi da za svaki par funkcija f, $\in A(p)$ i svako $\lambda \in \mathbb{R}$, važi da je: $\lambda \cdot f,\ f+g,\ f-g \in A(p)$.

Takodje je za svako $f,\ g \in A(p,q)$ i svako $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \cdot f$, $f+g$, -g $\in A(p,q)$.

Ako je $f=u+iv \in A(p)$, tada je $f^{*}(z,\bar{z})=i\cdot f(z,\bar{z}) \in A(1/p)$. lično,za $f=u+iv \in A(p,q)$, imamo da je $f^{*}(z,\bar{z})=i\cdot f(z,\bar{z}) \in A(p^{*},q^{*})$, le je $p^{*} = \dfrac{p}{p^{2}+q^{2}}$, $q^{*} = \dfrac{-q}{p^{2}+q^{2}}$.

Neka je $f(z,\bar{z}) = u + iv$ funkcija kompleksnih promenljivih i $\bar{z}$ koja ima neprekidne parcijalne izvode po x i y, i neka je $= p + i\cdot q$ dati neprekidni kompleksni parametar dovoljno puta eprekidno diferencijabilan po x i y, $p > 0$.

<u>Operatorskim p-izvodom funkcije $f(z,\bar{z}) = u + iv$ po $z=x+iy$</u> azivamo izraz

$$\frac{d_p f(z,\bar{z})}{dz} = p\,\frac{du}{dz} + i\cdot\frac{dv}{dz} = \frac{pu'_x + v'_y}{2} + i\cdot\frac{v'_x - pu'_y}{2}\,. \qquad (3.1.6)$$

Analogno, izrazom

$$\frac{d_p f(z,\bar{z})}{d\bar{z}} = p\,\frac{du}{d\bar{z}} + i\cdot\frac{dv}{d\bar{z}} = \frac{pu'_x - v'_y}{2} + i\cdot\frac{v'_x + pu'_y}{2} \qquad (3.1.7)$$

efinišemo <u>p-izvod funkcije $f(z,\bar{z})=u+iv$ po promenljivoj $\bar{z}=x-iy$.</u>

Izrazom

$$\frac{d_{p,q} f(z,\bar{z})}{dz} = \sigma\cdot\frac{du}{dz} + i\cdot\frac{dv}{dz} = \frac{pu'_x - qu'_y + v'_y}{2} + i\cdot\frac{v'_x - qu'_x - pu'_y}{2} \qquad (3.1.8)$$

efiniše se <u>(p,q)-izvod po z</u> , a izrazom

$$\frac{d_{p,q} f(z,\bar{z})}{d\bar{z}} = \sigma\cdot\frac{du}{dz} + i\cdot\frac{dv}{dz} = \frac{pu'_x - qu'_y - v'_y}{2} + i\cdot\frac{v'_x + qu'_x + pu'_y}{2} \qquad (3.1.9)$$

(p,q)-izvod po $\bar z$ funkcije $f(z,\bar z)$.

Očito je

$$\overline{\frac{d_p f}{dz}} = \frac{d_p \bar f}{d\bar z}, \quad \overline{\frac{d_{p,q} f}{dz}} = \frac{d_{p,q} \bar f}{d\bar z}. \qquad (3.1.10)$$

Teorema 3.1.1. [160] Da bi u klasi funkcija $f(z,\bar z) = u + i\cdot v$, koje imaju neprekidne parcijalne izvode po x i y, postojao $\lim\limits_{\Delta z\to 0} \frac{p\cdot\Delta u+i\cdot\Delta v}{\Delta z}$, $\Delta u=u(z+\Delta z)-u(z)$, $\Delta v=v(z+\Delta z)-v(z)$, nezavisno od načina na koji Δz teži nuli, neophodno je i dovoljno da funkcija $f(z,\bar z)$ bude p-analitička. U tom slučaju je

$$\frac{d_p f(z,\bar z)}{dz} = p(u'_x - i\cdot u'_y) = i(v'_x - i\cdot v'_y). \qquad (3.1.11)$$

Da bi funkcija $f(z,\bar z)=u+iv$, koja ima neprekidne parcijalne izvode po x i y, bila p-analitička, nephodno je i dovoljno da zadovoljava uslov

$$\frac{d_p f(z,\bar z)}{d\bar z} = 0.!! \qquad (3.1.12)$$

Ovo tvrdjenje neposredno sledi iz relacije (3.1.7).

U [160] takodje je dokazano da p-izvod $d_p f/dz$ p-analitičke funkcije $f(z,\bar z) = u + i\cdot v$ zadovoljava areolarnu jednačinu

$$\frac{\partial\Phi(z,\bar z)}{\partial\bar z} = \frac{1}{2p}\cdot\frac{\partial p}{\partial\bar z}\cdot\varphi - \frac{1}{2p}\cdot\frac{\partial p}{\partial z}\cdot\bar\varphi \qquad (3.1.13)$$

i, da svaka uopštena analitička funkcija $\Phi(z,\bar z)$ koja zadovoljava jednačinu (3.1.13) predstavlja p-izvod neke p-analitičke funkcije $f(z,\bar z)=u+iv$ sa karakteristikom p.

Slična tvrdjenja važe i za (p,q)-izvod.

Teorema 3.1.2. [160] Da bi u klasi funkcija $f(z,z)=u+iv$ koje imaju neprekidne parcijalne izvode po x i y, postojao $\lim\limits_{\Delta z\to 0} \frac{\sigma\cdot\Delta u+i\cdot\Delta v}{\Delta z}$ koji ne zavisi od načina na koji Δz teži nuli, neophodno je i dovoljno da funkcija $f(z,\bar z)$ bude (p,q)-analitička. Ako je taj uslov ispunjen važe jednakosti

$$\frac{d_{p,q} f(z,\bar z)}{dz} = p(u'_x-i\cdot u'_y) = p\cdot\frac{i}{\sigma}(v'_x-i\cdot v'_y). \qquad (3.1.14)$$

Da bi funkcija $f(z,\bar z)=u+iv$, koja ima neprekidne parcijalne izvode po x i y, bila (p,q)-analitička, neophodno je i dovoljno da zadovoljava uslov:

$$\frac{d_{p,q}f(z,\bar{z})}{d\bar{z}} = 0\ .!! \qquad (3.1.15)$$

Takodje je (p,q)-izvod po z (p,q)-analitičke funkcije $f(z,\bar{z}) = u+iv$, uopštena analitička funkcija koja zadovoljava areolarnu jednačinu

$$\frac{d\Phi(z,\bar{z})}{d\bar{z}} = \frac{1}{2p}\cdot\frac{d\sigma}{d\bar{z}}\cdot\varphi - \frac{1}{2p}\cdot\frac{d\sigma}{dz}\cdot\bar{\varphi}\ , \qquad (3.1.16)$$

i svako rešenje $\Phi(z,z)$ jednačine (3.1.16) predstavlja (p,q)-izvod neke (p,q)-analitičke funkcije $f(z,\bar{z}) = u + i\cdot v$ sa datim karakteristikama p i q.

Izraz oblika

$$\int_L w(z,\bar{z})\ d_p z = \mathrm{Re}\int_L (w/p)dz + i\cdot\mathrm{Im}\int_L w\ dz \qquad (3.1.17)$$

naziva se <u>p-integralom</u> duž konture L funkcije $w(z,\bar{z}) = \Phi(x,y) + i\cdot\Psi(x,y)$ po promenljivoj z.

Ovako definisan p-integral p-izvoda po z p-analitičke funkcije $f(z,\bar{z})$ ne zavisi od puta integracije koji spaja proizvoljne tačke z i z_o. Pritom važi jednakost:

$$\int_{z_o}^{z}\frac{d_pf(z,\bar{z})}{dz}\,d_pz = \mathrm{Re}\int_{z_o}^{z}\frac{1}{p}\cdot\frac{d_pf(z,\bar{z})}{dz}\,dz + i\cdot\mathrm{Im}\int_{z_o}^{z}\frac{d_pf(z,\bar{z})}{dz}\,dz =$$
$$= f(z) - f(z_o)\ , \qquad (3.1.18)$$

dakle sledi da je p-integral za operator na A(p) inverzan sleva u odnosu na p-izvod po z.

Slično, operator definisan izrazom

$$\int_L w(z,\bar{z})d_pz = \mathrm{Re}\int_L (w/p)dz + i\cdot\mathrm{Im}\int_L (\bar{\sigma}/p)wdz \qquad (3.1.19)$$

nazivamo <u>(p,q)-integralom</u> duž konture L, funkcije $w(z,\bar{z})=\Phi + i\Psi$ po promenljivoj z.

(p,q)-integral (p,q)-izvoda po z funkcije $f(z,\bar{z})\in A(p,q)$ ne zavisi od puta integracije koji spaja proizvoljne tačke z i z_o, i važi jednakost

$$\int_{z_o}^{z}\frac{d_{p,q}f(z,\bar{z})}{dz}\,d_{p,q}z = f(z) - f(z_o)\ , \qquad (3.1.20)$$

pa je (p,q)-integral u odnosu na promenljivu z operator inverzan sleva u odnosu na (p,q)-izvod po z.

Položij je u radovima [148], [149] definisao <u>konjugovane promenljive</u> koje odgovaraju datoj karakteristici $p=p(x,y)>0$ kao dva puta neprekidno diferencijabilne kompleksne funkcije

$$Z = X + iY,\ \widetilde{Z} = \widetilde{X} + i\ \widetilde{Y} \tag{3.1.21}$$

ako su
$$Z^* = X + i\widetilde{Y},\ -i\widetilde{Z}^* = Y - i\widetilde{X},\ (\widetilde{Z}^* = \widetilde{X} + iY) \tag{3.2.22}$$
p-analitičke funkcije u posmatranoj oblasti, sa datom karakteristikom p.

Funkcije X i Y su proizvoljne <u>p-harmonijske funkcije</u> (realni delovi proizvoljnih p-analitičkih funkcija). Ako je promenljiva $Z=X+iY$ fiksirana, druga promenljiva $\widetilde{Z}=\widetilde{X}+i\widetilde{Y}$ odredjena je sa tačnošću do na konstantni sabirak. Zbog toga Z nazivamo <u>osnovnom</u>, a $\widetilde{Z}$ - <u>pomoćnom</u> spregnutom promenljivom.

<u>Integralom po konjugovanoj promenljivoj</u> $Z = X + iY$ funkcije $f(z,\bar{z}) = u + iv$ duž konture L, nazivamo izraz oblika

$$f^*(z,\bar{z}) = \int_L f(z,\bar{z})d_pZ = \int_L ud\widetilde{Z}+ivdZ = \int_L ud\widetilde{X}-vdY + i\int_L vdX+ud\widetilde{Y} =$$
$$= \int_L (pu+iv)\frac{dZ}{dz}dz - (pu-iv)\frac{dZ}{d\bar{z}}d\bar{z}. \tag{3.1.23}$$

Dva puta neprekidno diferencijabilne funkcije kompleksnih promenljivih Z i $\widetilde{Z}$
$$Z = X + iY,\quad \widetilde{Z} = \widetilde{X} + i\widetilde{Y},$$
takve da su $Z^* = X+i\widetilde{Y}$, $-i\widetilde{Z}^* = Y-i\widetilde{X}$ (p,-q)-analitičke funkcije u posmatranoj oblasti sa datim karakteristikama p i -q, nazivamo <u>konjugovanim promenljivima koje odgovaraju karakteristikama p i q</u>, (p>0), [157], [158], [159].

Jednostavno se dokazuje da su konjugovane promenljive u oba slučaja, invarijantne u odnosu na konformna preslikavanja.

Izraz oblika

$$f^*(z,\bar{z}) = \int_L f(z,\bar{z})\cdot d_{p,q}Z = \int_L ud\widetilde{Z}+ivdZ =$$
$$= \int_L (\sigma u+iv)\frac{dZ}{dz}dz - (\bar{\sigma}u-iv)\frac{dZ}{d\bar{z}}d\bar{z} \tag{3.1.24}$$

naziva se <u>integralom po konjugovanoj promenljivoj $Z = X + i\cdot Y$</u> funkcije $f(z,\bar{z}) = u + i\cdot v$ duž konture L.

Ukoliko je zatvorena, prosta, glatka kontura C rub prostopovezane oblasti D^+ i $f(z,\bar{z}) \in A(p,D+C)$, važi da je:

$$\int_C f(z,\bar{z})d_pZ = 0. \tag{3.1.25}$$

Slično za $f(z,\bar{z})\in A(p,q,D+C)$, imamo da je:

$$\int_C f(z,\bar{z})d_{p,q}Z = 0. \tag{3.1.26}$$

<u>Teorema 3.1.3.</u> [160] Da bi integral po spregnutoj promenljivoj

$Z=X+i\cdot Y$ proizvoljne p-analitičke funkcije $f(z,\bar z) = u + i\cdot v$ bio p-analitička funkcija, neophodno je i dovoljno da karakteristika p bude funkcija proizvoljne harmonijske funkcije $\alpha = \alpha(x,y)$.

Ako je taj uslov ispunjen važe relacije

$$Z = X + iY = \beta - i\int(1/p)d\alpha,\quad \tilde Z = \tilde X + i\tilde Y = \beta - i\int p\cdot d\alpha, \qquad (3.1.27)$$

$$f^*(z,\bar z) = u^* + iv^* = \int_{z_0}^{z} ud\beta + (v/p)d\alpha + i\cdot\int_{z_0}^{z} vd\beta - upd\alpha + f^*(z_0), \qquad (3.1.28)$$

gde je β funkcija takva da je $w=\alpha+i\beta$ analitička funkcija od $z = x + i\cdot y$.!!

Teorema 3.1.4. [160] Da bi integral po spregnutoj promenljivoj proizvoljne p-analitičke funkcije $f(z,\bar z) = u + i\cdot v$ bio p'-analitička funkcija, neophodno je i dovoljno, da postoji analitička funkcija $w = \alpha + i\beta$ od z takva da je $\sqrt{p/p'}$ funkcija samo od β, a $\sqrt{p\cdot p'}$ funkcija samo od α. Ako su ti uslovi ispunjeni, sledi da je:

$$\left.\begin{aligned} Z &= X + iY = \int\sqrt{p'/p}\cdot d\beta - i\cdot\int d\alpha/\sqrt{pp'} \\ \tilde Z &= \tilde X + i\tilde Y = \int\sqrt{p/p'}\cdot d\beta - i\cdot\int\sqrt{pp'}\,d\alpha,\end{aligned}\right. \qquad (3.1.29)$$

$$\begin{aligned} f^*(z,\bar z) &= u^* + iv^* = \int_{z_0}^{z} u\sqrt{p/p'}\cdot d\beta + v\cdot d\alpha/\sqrt{pp'} + \\ &+ i\cdot\int_{z_0}^{z} v\cdot\sqrt{(p'/p)}\cdot d\beta - (u/\sqrt{pp'})\cdot d\alpha + f^*(z_0)\ .!! \end{aligned} \qquad (3.1.30)$$

Teorema 3.1.5. [160] Da bi integral po konjugovanoj promenljivoj proizvoljne (p,q)-analitičke funkcije $f(z,\bar z)=u+iv$ bio (p,q)-analitička funkcija, neophodno je i dovoljno, da karakteristike p i q budu funkcije proizvoljne harmonijske funkcije $\alpha = \alpha(x,y)$. Ako je taj uslov ispunjen, sledi da je:

$$\left.\begin{aligned} Z &= X + iY = \beta - \int(q/p)\cdot d\alpha - i\cdot\int d\alpha/p \\ \tilde Z &= \tilde X + i\tilde Y = \beta - \int(q/p)\cdot d\alpha - i\cdot\int d\alpha/p^*,\end{aligned}\right\} \qquad (3.1.31)$$

$$\begin{aligned} f^*(z,\bar z) &= u^* + iv^* = \int_{z_0}^{z} u[d\beta + (q/p)\cdot d\alpha] + (v/p)\cdot d\alpha + \\ &+ i\cdot\int_{z_0}^{z} v[d\beta - (q/p)\cdot d\alpha] - (u/p^*)\cdot d\alpha + f^*(z_0), \end{aligned} \qquad (3.1.32)$$

gde je β harmonijska funkcija takva da je $w = \alpha + i\beta$ analitička po promenljivoj z.!!

Neka je $f^*(z,\bar{z}) = u^* + iv^*$ proizvoljna funkcija koja ima neprekidne parcijalne izvode po x i y, i neka su $Z = X + iY$, i $\tilde{Z} = \tilde{X} + i\tilde{Y}$ konjugovane promenljive koje odgovaraju datoj karakteristici p. Ako u^* tretiramo kao funkciju od $\tilde{Z}^* = \tilde{X} + iY$ i v^* kao funkciju od $Z^* = X + i\tilde{Y}$, izraz

$$\frac{d_p f^*}{dZ} = \frac{du^*}{d\tilde{Z}^*} + i\,\frac{dv^*}{dZ^*} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u^*}{\partial \tilde{X}} + \frac{\partial v^*}{\partial \tilde{Y}}\right) + \frac{i}{2}\left(\frac{\partial v^*}{\partial X} - \frac{\partial u^*}{\partial Y}\right) \tag{3.1.33}$$

nazivamo <u>izvodom funkcije $f^*(z,\bar{z})$ po konjugovanoj promenljivoj $Z = X + iY$</u>.

Slično definišemo <u>izvod funkcije $f^*(z,\bar{z})$ po antikonjugovanoj promenljivoj $\bar{Z} = X - iY$</u> izrazom

$$\frac{d_p f^*}{d\bar{Z}} = \frac{du^*}{d\bar{\tilde{Z}}} + i\,\frac{dv^*}{d\bar{Z}^*} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u^*}{\partial \tilde{X}} - \frac{\partial v^*}{\partial \tilde{Y}}\right) + \frac{i}{2}\left(\frac{\partial v^*}{\partial X} + \frac{\partial u^*}{\partial Y}\right) \tag{3.1.34}$$

Očito je

$$\frac{d_p\overline{f^*(z,\bar{z})}}{d\bar{Z}} = \overline{\frac{d_p f^*(z,\bar{z})}{dZ}}\,. \tag{3.1.35}$$

Ako je $f(z,\bar{z}) = u + i\cdot v \in A(p)$, sledi da je:

$$\frac{d_p}{dZ}\int_{z_0}^{z} f(z,\bar{z})\,d_pZ = f(z,\bar{z}), \tag{3.1.36}$$

tj. da je izvod po konjugovanoj promenljivoj $Z = X + iY$ inverzni operator sleva u odnosu na integral po konjugovanoj promenljivoj Z funkcije $f(z,\bar{z})$.

Jednoznačnu funkciju kompleksnih promenljivih $f(z,\bar{z}) = u + i\cdot v$, definisanu na proizvoljnoj oblasti D, nazivamo <u>p-integrabilnom po konjugovanoj promenljivoj $Z = X + iY$</u> u toj oblasti, ako postoji funkcija $f^*(z,\bar{z}) = u^* + iv^*$ neprekidna u D, sa izuzetkom najviše konačno mnogo tačaka, takva da postoji $\frac{d_p f^*(z,\bar{z})}{dZ}$ i da je zadovoljena jednakost $\frac{d_p f^*(z,\bar{z})}{dZ} = f(z,\bar{z})$. Svaku takvu funkciju $f^*(z,\bar{z})$ nazivamo <u>primitivnom funkcijom</u> funkcije $f(z,\bar{z})$ po konjugovanoj promenljivoj $Z = X + iY$, a skup svih takvih funkcija- <u>neodredjenim p-integralom funkcije $f(z,\bar{z})$ po konjugovanoj promenljivoj Z u oblasti D</u>, koji označavamo sa $\hat{\int} f(z,\bar{z})\,d_pZ$.

Lako se dokazuje da važi jednakost

$$\hat{\int} f(z,\bar{z})\,d_pZ = f^*(z,\bar{z}) + C^*(z,\bar{z}), \tag{3.1.37}$$

gde je $C^*(z,\bar{z})$ proizvoljna funkcija u oblasti D, takva da je $\frac{d_p C^*(z,\bar{z})}{dZ} = 0$.

Na sličan način se uvodi pojam izvoda $\frac{d_{p,q} f^*(z,\bar{z})}{dZ}$ funkcije $f^*(z,\bar{z}) = u^* + iv^*$ po konjugovanoj promenljivoj $Z = X + i \cdot Y$ koja odgovara karakteristikama p i q, kao i pojam neodredjenog ∂-integrala $\hat{\int} f(z,\bar{z})\, d_{p,q}Z$ funkcije $f(z,\bar{z})$ po konjugovanoj promenljivoj Z.

U daljem radu biće nam neophodan jedan poseban slučaj p i (p,q)-analitičkih funkcija i pomenuti operatori primenjeni na takve funkcije.

Pretpostavimo da je $f(z,\bar{z}) = u + iv$ p-analitička funkcija takva da je $p = p(\alpha(x,y))$, gde je $w = \alpha + i\beta$ analitička funkcija promenljive $z = x + iy$. Tada je:

$$\frac{d_p f(z,\bar{z})}{dZ} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial \beta} - \frac{1}{p}\cdot\frac{\partial v}{\partial \alpha}\right) + \frac{i}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial \beta} + p\cdot\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right) = \frac{\partial u}{\partial \beta} + i\cdot\frac{\partial v}{\partial \beta} \qquad (3.1.38)$$

$$\frac{d_p f(z,\bar{z})}{d\bar{Z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{1}{p}\cdot\frac{\partial v}{\partial \alpha}\right) + \frac{i}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial \beta} - p\cdot\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right) = 0 \qquad (3.1.39)$$

i

$$\frac{d_p f(z,\bar{z})}{dZ} \in A(p).$$

Ako je $f(z,\bar{z}) = u + iv \in A(p,q)$ i $p = p(\alpha)$, $q = q(\alpha)$, gde je $w = \alpha + i\beta$ analitička funkcija od $z = x + iy$, važe sledeće relacije:

$$\frac{d_{p,q}f}{dZ} = \frac{q^* v_\beta - p^* v_\alpha + u_\beta}{2} + i\cdot\frac{-qu_\beta + pu_\alpha + v_\beta}{2} = \frac{\partial u}{\partial \beta} + i\cdot\frac{\partial v}{\partial \beta}, \qquad (3.1.40)$$

$$\frac{d_{p,q}f}{d\bar{Z}} = \overline{\frac{d_{p,q}\bar{f}}{d\bar{Z}}} = \frac{-q^* v_\beta + p^* v_\alpha + u_\beta}{2} + i\cdot\frac{qu_\beta - pu_\alpha + v_\beta}{2} = 0, \qquad (3.1.41)$$

$$\hat{\int} f(z,\bar{z})\, d_{p,q}Z = f^*(z,\bar{z}) + C^*(z,\bar{z}), \qquad (3.1.42)$$

gde je $f^*(z,\bar{z})$ jedna od primitivnih (p,q)-analitičkih funkcija od $f(z,\bar{z})$ po Z, a $C^*(z,\bar{z}) = \Upsilon + i\cdot\sigma$ proizvoljna funkcija iz $A(p,q)$.

Iz (3.1.40) sledi da je $d_{p,q}f/dZ$ takodje (p,q)-analitička funkcija.

Klasa p-analitičkih funkcija za koje je karakteristika p funkcija od harmonijske funkcije $\alpha(x,y)$, naziva se <u>invarijantnom klasom p-analitičkih funkcija</u> u smislu Položija.

Slično se, klasa (p,q)-analitičkih funkcija, takvih da je $p = p(\alpha(x,y))$ i $q = q(\alpha(x,y))$, naziva invarijantnom klasom (p,q)-analitičkih funkcija u smislu Položija.

Poseban značaj ove dve klase funkcija ogleda se u činjenici da su obe klase zatvorene u odnosu na diferenciranje i integraciju po konjugovanim promenljivim Z i $\tilde{Z}$. To omogućuje razvoj teorije diferencijalnih jednačina sa izvodima po konjugovanim promenljivima koje odgovaraju karakteristikama p i q, kao i definisanje elementarnih p-analitičkih i (p,q)-analitičkih funkcija posredstvom takvih jednačina [160].

Pomenimo nekoliko specifičnih slučajeva invarijantnih klasa p-analitičkih funkcija koje se posebno često pojavljuju u primenama.

a) Ako je $p = \alpha(x,y)$ harmonijska funkcija od x i y, odgovarajuće konjugovane promenljive su:

$$Z = X + iY = \beta + i\cdot\ln\alpha,\quad \tilde{Z} = \tilde{X} + i\tilde{Y} = \beta + i\cdot\alpha^2/2, \qquad (3.1.43)$$

gde je $w = \alpha + i\beta$ analitička funkcija od $z = x + iy$.

b) Ako je $p = p(x)$, važi da su:

$$Z = y - i\cdot\int dx/p(x)\ ,\quad \tilde{Z} = y - i\cdot\int p(x)dx,\quad w = x + iy. \qquad (3.1.44)$$

c) Ako je $p = p(y)$, imamo:

$$Z = -x - i\cdot\int dy/p(y),\quad \tilde{Z} = -x - i\cdot\int p(y)dy,\quad w = y - ix. \qquad (3.1.45)$$

3.2. p-areolarni polinomi i p-areolarne diferencijalne jednačine

Većina radova posvećenih oblasti o kojoj je reč odnose se na osobine p-analitičkih funkcija za jednostavne karakteristike $p = p(x,y)$. Položij je veći deo svoje monografije [160] posvetio teoriji reprezentacija i graničnim problemima za p-analitičke funkcije sa karakteristikom $p = x^k$, (k=const.>0).

Samo neki od rezultata vezani su za reprezentacije p-analitičkih funkcija za $p = \exp(\alpha(x,y))$ u slučaju da je $\alpha = \alpha(x,y)$ harmonijska funkcija.

Teorija graničnih problema za (p,q)-analitičke funkcije praktično ne postoji.

Razlog ovakvom jednostranom pristupu problematici vezanoj za p i (p,q)-analitičke funkcije, delimično leži u tome što je većina primena ove teorije u matematičkoj fizici vezana za slučaj kada je $p = p(x) = x^k$, (k=const.>0) i $q \equiv 0$. S druge strane, tehnike rešavanja problema u slučaju da $p = p(x,y)$ pripada nekoj opštijoj klasi funkcija i da je $q = q(x,y) \not\equiv 0$, su izuzetno složene jer još ne postoji opšta teorija reprezentacija (p,q)-analitičkih funkcija.

U nastavku ovog poglavlja biće reči pretežno o invarijantnoj klasi p-analitičkih funkcija i mogućnostima uopštenja nekih rezultata teorije areolarnih polinoma, areolarnih redova i diferencijalnih jednačina.

Pretpostavimo da su funkcije $f(z,\bar{z}) = u(x,y) + iv(x,y)$ i $g(z,\bar{z}) = \varphi(x,y) + i\psi(x,y)$ proizvoljne diferencijabilne kompleksne funkcije, da je $p = p(\alpha(x,y))$ data pozitivna realna funkcija harmonijske funkcije $\alpha = \alpha(x,y)$ i $w = \alpha(x,y)+i\beta(x,y)$ analitička funkcija.

Funkcije f i g možemo da shvatimo i kao funkcije od α i β na nekoj oblasti D pod uslovom da je, na D, $\frac{D(u,v)}{D(\alpha,\beta)} \neq 0$ i $\frac{D(\varphi,\psi)}{D(x,y)} \neq 0$. U tom slučaju je $\frac{D(u,v)}{D(\alpha,\beta)} = \frac{D(u,v)}{D(x,y)}\cdot[\frac{D(\alpha,\beta)}{D(x,y)}]^{-1}$ i $\frac{D(\varphi,\psi)}{D(\alpha,\beta)} = \frac{D(\varphi,\psi)}{D(x,y)}\cdot[\frac{D(\varphi,\psi)}{D(x,y)}]^{-1}$, gde je $\frac{D(u,v)}{D(\alpha,\beta)}$ oznaka za Jacobijan.

Na osnovu relacije (3.1.38) sledi da je

$$\frac{d_p(f\cdot g)}{dZ} - f\cdot\frac{d_p g}{dZ} - g\cdot\frac{d_p f}{dZ} = \psi\cdot\frac{p^2-1}{2p}(u'_\alpha - iv'_\alpha) + v\cdot\frac{p^2-1}{2p}\cdot(\varphi'_\alpha - i\psi'_\alpha),$$

tj.

$$\frac{d_p(f\cdot g)}{dZ} = f\cdot\frac{d_p g}{dZ} + g\cdot\frac{d_p f}{dZ} + \frac{p^2-1}{2p}\cdot(\psi\cdot\frac{\partial\bar{f}}{\partial\alpha} + v\cdot\frac{\partial\bar{g}}{\partial\alpha}), \qquad (3.2.1)$$

na osnovu (3.1.39) sledi da je

$$\frac{d_p(f\cdot g)}{d\bar{Z}} - f\cdot\frac{d_p g}{d\bar{Z}} - g\cdot\frac{d_p f}{d\bar{Z}} = \psi\cdot\frac{p^2-1}{2p}\cdot(u'_\alpha - iv'_\alpha) + v\cdot\frac{p^2-1}{2p}\cdot(\varphi'_\alpha - i\psi'_\alpha),$$

tj.

$$\frac{d_p(f\cdot g)}{d\bar{Z}} = f\cdot\frac{d_p g}{d\bar{Z}} + g\cdot\frac{d_p f}{d\bar{Z}} + \frac{p^2-1}{2p}\cdot(\psi\cdot\frac{\partial f}{\partial\alpha} + v\cdot\frac{\partial g}{\partial\alpha}), \qquad (3.2.2)$$

Formule (3.2.1) i (3.2.2) pokazuju da izvodi po konjugovanoj promenljivoj Z i antikonjugovanoj promenljivoj $\bar{Z}$, koje odgovaraju spregnutim harmonijskim funkcijama $\alpha(x,y)$ i $\beta(x,y)$, ne moraju da budu σ-operatori u smislu definicije na strani 52 čak ni u klasi p-analitičkih funkcija.

Na sličan način se pokazuje da operatori $\frac{d_{p,q}}{dZ}$, $\frac{d_{p,q}}{d\overline{Z}}$, $\frac{d_p}{dz}$, $\frac{d_p}{d\overline{z}}$, $\frac{d_{p,q}}{dz}$ i $\frac{d_{p,q}}{d\overline{z}}$ takodje ne zadovoljavaju uslov (2.1.2), tj. ne ponašaju se, u odnosu na proizvod funkcija, kao diferencijalni operatori. Odatle sledi da ne postoji klasa kompleksnih funkcija koja bi, zajedno sa nekim od pomenutih operatora, mogla da predstavlja σ-sistem definisan na strani 52, i na kojoj bi mogla da važi teorema 2.1.1.

Ipak, kao što ćemo videti, izmedju teorije uopštenih analitičkih funkcija Vekuinog tipa i operatora $\frac{d}{dz}$ i $\frac{d}{d\overline{z}}$, i teorije p-analitičkih funkcija i operatora $\frac{d_p}{dZ}$ i $\frac{d_p}{d\overline{Z}}$, postoje izvesne veoma važne i korisne analogije.

Analogno metodi kojom je Theodorescu [201] uveo areolarne polinome, mogu se definisati p-areolarni polinomi.

Neka su $\alpha = \alpha(x,y)$ i $\beta = \beta(x,y)$ spregnute harmonijske funkcije, $p = p(\alpha(x,y))$ realna pozitivna funkcija i Z odgovarajuća konjugovana promenljiva.

Jednačine oblika

$$F(z,\ \overline{z},\ \alpha,\ \beta,\ w,\ \overline{w},\ \frac{d_p w}{dZ},\ \frac{d_p w}{d\overline{Z}},\ \ldots,\ \frac{d_p^n w}{dZ^n},\ \frac{d_p^n w}{d\overline{Z}^n}) = 0,\ n \in \mathbb{N},$$

u kojima se pojavljuju izvodi po Z i $\overline{Z}$ nepoznate funkcije $w = w(z,\overline{z})$, nazivaćemo <u>p-areolarnim diferencijalnim jednačinama n-tog reda</u> .

<u>Teorema 3.2.1.</u> Opšte rešenje p-areolarne diferencijalne jednačine n-tog reda

$$\frac{d_p^n f}{dZ^n} = 0 , \tag{3.2.3}$$

je oblika

$$f(z,\overline{z}) = \sum_{k=0}^{n-1} \beta^k f_k(z,\overline{z}) , \tag{3.2.4}$$

gde su funkcije $f_k(z,\overline{z})$, $(k=0,1,\ldots,n-1)$, proizvoljne p-analitičke funkcije.

Dokaz: Neka je M klasa svih funkcija oblika $f(z,\overline{z}) = u(x,y) + i\cdot v(x,y)$ takvih da su funkcije $u(x,y)$ i $v(x,y)$ neprekidno diferencijabilne dovoljno mnogo puta.

Rešenje p-areolarne diferencijalne jednačine $d_p f/dZ = 0$ u klasi M je, na osnovu (3.1.37), oblika $f(z,\bar{z}) = f_o(z,\bar{z})$, gde je $f_o = f_o(z,\bar{z})$ proizvoljna p-analitička funkcija.

Neposrednom proverom se pokazuje da je opšte rešenje p-bipolarne jednačine $d_p f/dZ = \overline{f_o}$, gde je $f_o = f_o(z,\bar{z})$ proizvoljna p-analitička funkcija iz klase M, oblika $f(z,\bar{z}) = 2\beta\cdot\overline{f_1^*(z,\bar{z})} + \overline{f_o(z,\bar{z})}$, gde je $f_1^* = f_1^*(z,\bar{z})$ takodje proizvoljna p-analitička funkcija. Odatle sledi da je opšte rešenje jednačine $d_p^2 f/dZ^2 = 0$, funkcija

$$f(z,\bar{z}) = \beta\cdot\overline{f_1(z,\bar{z})} + \overline{f_o(z,\bar{z})}, \tag{3.2.5}$$

gde su $f_1(z,\bar{z}) = 2f_1^*(z,\bar{z})$ i $f_o = f_o(z,\bar{z})$ proizvoljne p-analitičke funkcije iz klase M.

Za svako $0 \leqslant k \leqslant n-1$ i svaku p-analitičku funkciju $f_k^*(z,\bar{z}) = u_k^* + iv_k^*$ iz M važi

$$\frac{d_p\beta^k\overline{f_k^*}}{dZ} = \frac{1}{2}\,[(\beta^k u_k^*)'_\beta + \frac{1}{p}(\beta^k v_k^*)'_\alpha] + \frac{i}{2}\,[-(\beta^k v_k^*)'_\beta + p(\beta^k u_k^*)'_\alpha] =$$

$$= \frac{1}{2}\,(k\beta^{k-1}u_k^* + \beta^k\cdot\frac{\partial u_k^*}{\partial\beta} + \frac{1}{p}\cdot\beta^k\cdot\frac{\partial v_k^*}{\partial\alpha}) + \frac{i}{2}\,(-k\beta^{k-1}v_k^* - \beta^k\cdot\frac{\partial v_k^*}{\partial\beta} +$$

$$p\beta^k\cdot\frac{\partial u_k^*}{\partial\alpha}) = \frac{k}{2}\,\beta^{k-1}\cdot\overline{f_k^*} + \beta^k\cdot\frac{\overline{d_p f_k}}{dZ} = \frac{k}{2}\cdot\beta^{k-1}\cdot\overline{f_k^*},\ \text{tj.}$$

$$\hat{\int} \beta^{k-1}\cdot\overline{f_k^*}\, d_pZ = 2\beta^k\cdot\overline{f_k^*}/k + \varphi(z,\bar{z}) = \beta^k\cdot\overline{f_k^*} + \varphi, \tag{3.2.6}$$

gde je $f_k = 2f_k^*/k$ i $\varphi = \varphi(z,\bar{z})$ proizvoljna p-analitička funkcija.

Dokaz teoreme svodi se na sukcesivnu primenu operacije (3.2.6) na (3.2.5) n-2 puta.!!

Iz (3.2.6), specijalno, za proizvoljnu p-analitičku funkciju $f^*(z,\bar{z}) = u^* + i\cdot v^*$ iz M, sledi da je:

$$\frac{d_p^k\beta^m\overline{f^*}}{dZ^k} = \frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{2^k}\,\beta^{m-k}\cdot\overline{f^*}, \tag{3.2.7}$$

a $0 \leqslant k \leqslant m$, $m\in\mathbb{N}$, i

$$\frac{d_p^{m+1}\beta^{m+1}f^*}{dZ^{m+1}} = 0. \tag{3.2.8}$$

S obzirom da je:

$$\frac{d_p\beta^m f^*}{dZ} = \frac{1}{2}(m\beta^{m-1}u^* + \beta^m u_\beta^* - \frac{1}{p}\cdot\beta^m v_\alpha^*) + \frac{i}{2}(m\beta^{m-1}v^* + \beta^m v_\beta^* + p\beta^m u_\alpha) =$$

$$\frac{1}{2}\cdot m\beta^{m-1}f^* + \beta^m\cdot\frac{d_p f^*}{dZ},$$ iz (3.1.38), dobijamo relaciju:

$$\overline{D}_p\beta^m f^* = 2\frac{d_p\beta^m f^*}{dZ} = m\beta^{m-1}f^* + 2\beta^m \frac{d_p f^*}{dZ} = m\beta^{m-1}f^* + 2\beta^m \frac{\partial f^*}{\partial \beta}. \qquad (3.1.38')$$

Otuda je:

$$\overline{D}_\beta^k \beta^m f^* = \sum_{v=0}^{k} 2^v \binom{k}{v} (\beta^m)_\beta^{(v)} \cdot (f^*)_\beta^{(k-v)}, \quad k \in \mathbb{N}. \qquad (3.2.7')$$

Na osnovu teoreme 3.2.1 i relacija (3.1.35) i (3.1.39) sledi da je opšte rešenje p-areolarne jednačine:

$$\frac{D_p^n f}{d\overline{Z}^n} = 0 \ , \ n \in N \qquad (3.2.9)$$

oblika

$$f = f(z,\overline{z}) = \sum_{k=0}^{n-1} \beta^k f_k(z,\overline{z}) \ , \qquad (3.2.10)$$

gde su $f_k = f_k(z,\overline{z})$, $(k=0,1,\ldots,n-1)$, proizvoljne p-analitičke funkcije.

Iz (3.2.4) i (3.2.10) sledi da je opšte rešenje jednačine

$$\frac{D_p^{n+m} f}{dZ^n d\overline{Z}^m} = 0 \ , \ m,n \in \mathbb{N} \qquad (3.2.11)$$

oblika

$$f(z,\overline{z}) = \sum_{k=0}^{n-1} \beta^k f_k(z,\overline{z}) + \sum_{j=0}^{m-1} \beta^j g_j(z,\overline{z}) \ , \qquad (3.2.12)$$

gde su $f_k = f_k(z,\overline{z})$, $(k=0,1,\ldots,n-1)$, i $g_j = g_j(z,\overline{z})$, $(j=0,1,\ldots,m-1)$, proizvoljne p-analitičke funkcije.

Funkciju oblika (3.2.4) nazivaćemo <u>p-areolarnim polinomom.</u>

Po analogiji sa definicijom areolarnih redova (2.1.47), definišemo <u>p-areolarne redove</u> oblika:

$$\sum_{v=0}^{\infty} \beta^v f_v(z,\overline{z}), \qquad (3.2.13)$$

gde su funkcije $f_v = f_v(z,\overline{z})$, $(v=0,1,2,\ldots)$, proizvoljne p-analitičke funkcije, $p = p(\alpha(x,y))$ je pozitivna realna funkcija i $w = \alpha + i\beta$ analitička funkcija.

Za p-areolarni red (3.2.13) kažemo da konvergira u nekoj oblasti D, ako konvergira u svakoj tački oblasti D.

Poznato je da svaka harmonijska funkcija $\beta = \beta(x,y)$ na zatvorenoj oblasti $D = \overline{D}$, dostiže svoju najmanju i najveću vrednost samo u tačkama ruba ∂D oblasti D.

<u>Teorema 3.2.2.</u> p-areolarni red $\sum_{v=0}^{\infty} \beta^v f_v(z,\overline{z})$ konvergira u oblasti D, ako je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\max\limits_{D} |f_{n+1}(z,\bar{z})|}{\max\limits_{D} |f_n(z,\bar{z})|} = q < \frac{1}{M}, \qquad (3.2.14)$$

gde je $M = \max\limits_{\partial D} |\beta(x,y)|$. ¦¦

Teorema 3.2.2 je neposredna posledica d'Alambertovog kriterijuma konvergencije stepenih redova.

Jednačinu oblika

$$\tilde{a}_n \frac{d^n f}{d\bar{Z}^n} + \tilde{a}_{n-1} \frac{d^{n-1} f}{d\bar{Z}^{n-1}} + \ldots + \tilde{a}_1 \frac{d_p f}{d\bar{Z}} + \tilde{a}_0 f = 0, \qquad (3.2.15)$$

gde su $\tilde{a}_k$, $(k=0,1,\ldots,n)$, realne konstante i $\tilde{a}_n \neq 0$, nazivaćemo <u>linearnom p-areolarnom diferencijalnom jednačinom n-tog reda sa konstantnim koeficijentima</u> .

Da bismo pojednostavili dalje računanje uvešćemo oznaku

$$D_p f(z,\bar{z}) = 2 \cdot d_p f(z,\bar{z})/d\bar{Z}. \qquad (3.2.16)$$

Očito je da se jednačina (3.2.15) uvek može transformisati u oblik

$$L[f(z,\bar{z})] \equiv a_n D_p^n f + a_{n-1} D_p^{n-1} f + \ldots + a_1 D_p f + a_0 f = 0, \quad (3.2.17)$$

gde su realni koeficijenti a_k oblika $a_k = \tilde{a}_k/2^k$, $(k=0,1,\ldots,n)$.

<u>Rešenjem</u> jednačine (3.2.17) nazvaćemo kompleksnu funkciju $f(z,\bar{z}) = u(x,y) + iv(x,y)$, koja zadovoljava jednačinu (3.2.17) i čiji su realni i imaginarni deo n puta neprekidno diferencijabilne funkcije.

Algebarsku jednačinu n-tog stepena

$$K(\xi) \equiv a_n \xi^n + a_{n-1}\xi^{n-1} + \ldots + a_1 \xi + a_0 = 0 \qquad (3.2.18)$$

nazivaćemo <u>karakterističnom jednačinom</u> za datu jednačinu (3.2.17).

Kadgod ne bude posebno napomenuto, podrazumevaćemo da je karakteristika oblika $p = p(\alpha(x,y))$, gde su $\beta = \beta(x,y)$ i $\alpha = \alpha(x,y)$ spregnute harmonijske funkcije i da operator $d_p/d\bar{Z}$ ima formu opisanu relacijom (3.1.39).

<u>Lema 3.2.1.</u> Za proizvoljnu p-analitičku funkciju $\varphi = \varphi(z,\bar{z})$ i proizvoljnu kompleksnu konstantu λ, važi da je:

$$L[e^{\lambda p}\varphi] = \varphi(z,\bar{z})e^{\lambda p}\cdot K(\lambda) \quad , \tag{3.2.19}$$

gde je $K(\lambda)$ vrednost polinoma (3.2.18) za $\xi = \lambda$.!!

Dokaz: Iz (3.1.39) sledi da za $\varphi(z,z) = u(x,y) + iv(x,y)$ važi:

$D_p(e^{\lambda p}\varphi) = \lambda e^{\lambda p}u + e^{\lambda p}u'_p + e^{\lambda p}v'_\alpha/p + i(\lambda e^{\lambda p}v + e^{\lambda p}v'_p - pe^{\lambda p}u'_\alpha) =$
$= \lambda e^{\lambda p}\varphi + e^{\lambda p}\cdot D_p\varphi = \lambda e^{\lambda p}\cdot\varphi.$

Ako za $1 \leqslant k < n$ važi da je $D_p^k(e^{\lambda p}\varphi) = \lambda^k e^{\lambda p}\cdot\varphi$, onda je:
$D_p^{k+1}(e^{\lambda p}\cdot\varphi) = \lambda^{k+1}e^{\lambda p}u + \lambda^k e^{\lambda p}u'_p + \lambda^k e^{\lambda p}v'_\alpha/p + i(\lambda^{k+1}e^{\lambda p}v +$
$+ \lambda^k e^{\lambda p}v'_p - p\cdot\lambda^k e^{\lambda p}u'_\alpha) = \lambda^{k+1}e^{\lambda p}\cdot\varphi + \lambda^k e^{\lambda p}\cdot D_p\varphi = \lambda^{k+1}e^{\lambda p}\cdot\varphi$, pa
je $L[e^{\lambda p}\cdot\varphi(z,\bar{z})] = \sum_{v=0}^{n} a_v D_p(e^{\lambda p}\cdot\varphi) = \sum_{v=0}^{n} a_v\lambda^v e^{\lambda p}\cdot\varphi = K(\lambda)\cdot\varphi(z,\bar{z})\cdot$
$\cdot e^{\lambda p}$.!!

<u>Lema 3.2.2.</u> Za bilo koju realnu funkciju $g(p)$ n puta diferencijabilnu po promenljivoj p, važi sledeća formula:

$$L[e^{\lambda p}g(p)] = e^{\lambda p}\sum_{j=0}^{n}\frac{K^{(j)}(\lambda)}{j!}\cdot g^{(j)}(p). \tag{3.2.20}$$

Dokaz: Pretpostavimo da je operator L oblika

$$L[G(p)] = D_p^k[G(p)], \; 0 \leqslant k \leqslant n \; . \tag{3.2.21}$$

Tada je: $L[e^{\lambda p}g(p)] = D_p^k[e^{\lambda p}g(p)] = \sum_{m=0}^{k} \binom{k}{m}\cdot\frac{d^{k-m}(e^{\lambda p})}{dp^{k-m}}\; g^{(m)}(p) =$

$= \sum_{m=0}^{k}\frac{k(k-1)\ldots(k-m+1)}{m!}\;\lambda^{k-m}e^{\lambda p}g^{(m)}(p) = e^{\lambda p}\sum_{m=0}^{k}\frac{1}{m!}\cdot\frac{d^m(\lambda^k)}{d\lambda^m}\cdot g^{(m)}(p) =$

$= e^{\lambda p}\sum_{m=0}^{k}\frac{K^{(m)}(\lambda)}{m!}\; g^{(m)}(p)$. Formula (3.2.20) sledi iz činjenice da je operator L iz (3.2.17) linearna kombinacija sa konstantnim koeficijentima operatora oblika (3.2.21).!!

<u>Lema 3.2.3.</u> Neka je λ koren karakteristične jednačine (3.2.18) reda r, $1\leqslant r\leqslant n$. Tada su funkcije:

$$\varphi_1=\varphi_1(x,y)=e^{\lambda p},\varphi_2=\varphi_2(x,y)=pe^{\lambda p},\ldots,\varphi_r=\varphi_r(x,y)=p^{r-1}e^{\lambda p} \tag{3.2.22}$$

rešenja jednačine (3.2.17).

Dokaz: S obzirom da je λ koren karakteristične jednačine (3.2.18) važi da je: $K(\lambda) = K'(\lambda) = \dots = K^{(r-1)}(\lambda) = 0, K^{(r)}(\lambda) \neq 0$. Primenom formule (3.2.20) iz leme 3.2.2 na funkcije oblika $\varphi_{j+1} = \beta^j \cdot e^{\lambda\beta}$, $0 \leq j \leq r-1$, dobijamo da je: $L[\varphi_{j+1}] =$

$$= e^{\lambda\beta}[\frac{K^{(r)}(\lambda)}{r!} \cdot \frac{d^r(\beta^j)}{d\beta^r} + \dots + \frac{K^{(n)}(\lambda)}{n!} \cdot \frac{d^n(\beta^j)}{d\beta^n}] = 0, \text{jer je } \frac{d^m(\beta^j)}{d\beta^m} =$$

$= 0$, za $m \geq r > j$.!!

Lema 3.2.4. Neka je $L[\beta^s e^{\lambda\beta}]|_{\beta=0} = 0$ za $s = 0,1,\dots,r-1$. Tada je λ koren karakterističnog polinoma (3.2.18) reda ne manjeg od r.

Dokaz: Na osnovu leme 3.2.2 je : $L[\beta^s e^{\lambda\beta}]|_{\beta=0} =$

$$= [e^{\lambda\beta} \sum_{m=0}^{s} \frac{K^{(m)}(\lambda)}{m!} \cdot \frac{d^m(\beta^s)}{d\beta^m}]|_{\beta=0}, \text{ jer je } \frac{d^m(\beta^s)}{d\beta^m} = 0 \text{ za } m > s.$$

Osim toga je $\frac{d^m(\beta^s)}{d\beta^m}|_{\beta=0} = 0$, za $m<s$, pa važi: $L[\beta^s e^{\lambda\beta}]|_{\beta=0} =$

$= e^{\lambda\beta} \cdot \frac{K^{(s)}(\lambda)}{s!} \cdot s! = K^{(s)}(\lambda) = 0$, gde je $s=0,1,\dots,r-1$. To znači da je λ koren karakteristične jednačine (3.2.18) reda ne manjeg od r.!!

Neka karakteristična jednačina $K(\xi)$ ima $m \leq n$ različitih rešenja $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ čiji su redovi $k_1, \dots, k_m$, respektivno.

Na osnovu leme 3.2.3, funkcije:

$$\begin{aligned} &\varphi_1 = e^{\lambda_1\beta}, \varphi_2 = \beta e^{\lambda_1\beta}, \dots, \varphi_{k_1} = \beta^{k_1-1}e^{\lambda_1\beta}, \\ &\varphi_{k_1+1} = e^{\lambda_2\beta}, \varphi_{k_1+2} = \beta e^{\lambda_2\beta}, \dots, \varphi_{k_1+k_2} = \beta^{k_2-1}e^{\lambda_2\beta}, \\ &\varphi_{k_1+\dots+k_{m-1}+1} = e^{\lambda_m\beta}, \dots, \varphi_{k_1+\dots+k_m} = \beta^{k_m-1}e^{\lambda_m\beta}, \end{aligned} \qquad (3.2.23)$$

su rešenja jednačine (3.2.17). Skup (3.2.23) od $k_1+k_2+\dots+k_m = n$ funkcija, nazivaćemo <u>sistemom karakterističnih rešenja</u> jednačine (3.2.17).

Funkciju

$$\sum_{k=1}^{n} \varphi_k(\beta) \cdot f_k(z,\bar{z}) , \qquad (3.2.24)$$

gde su φ_k funkcije sistema (3.2.23), a f_k $(k=1,\dots,n)$ proizvoljne p-analitičke funkcije, nazivaćemo <u>p-linearnom kombinacijom sistema karakterističnih rešenja.</u>

<u>Teorema 3.2.3.</u> Ako je $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ sistem karakterističnih

rešenja jednačine (3.2.17), onda je i p-linearna kombinacija (3.2.24) takodje rešenje jednačine (3.2.17).||

Dokaz ove teoreme sledi direktno iz leme 3.2.1.

Rešenje jednačine (3.2.17) oblika (3.2.24) nazivaćemo <u>regularnim rešenjem</u>.

Specijalno, ako su svi koreni karakteristične jednačine (3.2.18) medjusobno različiti, regularno rešenje jednačine (3.2.17) je oblika

$$f(z,\bar{z}) = \sum_{k=1}^{n} e^{\lambda_k \beta} \cdot f_k(z,\bar{z}), \qquad (3.2.25)$$

gde su f_k, $(k=1,2,\ldots,n)$, proizvoljne p-analitičke funkcije.

Uporedo sa funkcijom oblika (3.2.25) posmatrajmo p-analitičku funkciju oblika:

$$\nu_0 f(z,\bar{z}) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(0) \cdot f_k(z,\bar{z}) = \sum_{k=1}^{n} f_k(z,\bar{z}). \qquad (3.2.26)$$

<u>Teorema 3.2.4.</u> Neka je data p-areolarna diferencijalna jednačina (3.2.17) sa početnim uslovima na nekoj oblasti D:

$$\nu_0 D_p^m f = \psi_m(z,\bar{z}), \quad (m=0,1,2,\ldots,n-1), \qquad (3.2.27)$$

gde su $\psi_k = \psi_k(z,\bar{z})$ date p-analitičke funkcije u oblasti D.

Tada u oblasti D postoji jedinstveno regularno rešenje jednačine (3.2.17) koje zadovoljava početne uslove (3.2.27).

(Takvo rešenje u klasi regularnih rešenja jednačine (3.2.17) nazivaćemo <u>Cauchyjevim rešenjem</u>.)

Dokaz: S obzirom da je opšte regularno rešenje jednačine (3.2.17) oblika

$$f(z,\bar{z}) = \sum_{k=1}^{n} \varphi(\beta) \cdot f_k(z,\bar{z}), \qquad (3.2.28)$$

iz početnih uslova dobijamo sledeći sistem linearnih jednačina za odredjivanje p-analitičkih funkcija $f_k(z,\bar{z})$:

$$\nu_0 D_p^m f = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{d^m \varphi_k(\beta)}{d\beta^m} \Big|_{\beta=0} \right) \cdot f_k(z,\bar{z}) = \psi_m(z,\bar{z}), \qquad (3.2.29)$$

gde je $m=0,1,\ldots,n-1$.

Jednostavno se dokazuje da je sistem karakterističnih rešenja jednačine (3.2.17) linearno nezavisan, tj. da je Wronskian $W(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)|_{\beta=0} \neq 0$, što znači da sistem linearnih jednačina (3.2.29) ima jedinstveno rešenje.||

Pomenuti rezultati ukazuju na činjenicu da i u teoriji linearnih p-areolarnih diferencijalnih jednačina postoje neke analogije sa teorijom običnih linearnih diferencijalnih jednačina, bez obzira na to što ne radimo u σ-sistemu. Do kojih se granica ta analogija prostire, ostaje tek da se vidi.

Autor se u ovom tekstu neće baviti nehomogenim linearnim p-areolarnim diferencijalnim jednačinama, kao ni jednačinama sa funkcionalnim koeficijentima. Još jedno pitanje koje ostaje otvoreno odnosi se na mogućnosti razvoja odgovarajuće teorije (p,q)-areolarnih diferencijalnih jednačina u kojima figurišu operatori oblika (3.1.40) i (3.1.41). Neka autorova istraživanja pokazala su da to, po svoj prilici, neće biti moguće bez uvodjenja daljih ograničenja i dodatnih uslova.

3.3. Granični problemi za p-analitičke funkcije

U ovom paragrafu biće rešeni neki granični problemi za homogene linearne p-areolarne diferencijalne jednačine n-tog reda sa konstantnim koeficijentima i to u slučaju kada je karakteristika $p = x^k$, (k=const.>0). Kadgod ne bude drugačije napomenuto, podrazumevaćemo da su spregnute harmonijske funkcije koje odgovaraju karakteristici p, oblika: $\alpha(x,y)=x$ i $\beta(x,y)=y$.

U monografiji [160] G.N.Položij je detaljno opisao jednu klasu reprezentacija x^k-analitičkih funkcija i, pomoću te klase, rešio nekoliko graničnih problema za x^k-analitičke funkcije. Te probleme Položij je rešavao svodjenjem na Riemannov ili Hilbertov granični problem za analitičke funkcije za koje je dopuštena mogućnost da na rubu oblasti imaju konačno mnogo prekida druge vrste.

Osnovna integralna reprezentacija p-analitičkih funkcija sa karakteristikom $p = x^k$

Neka je G oblast u desnoj poluravni $z = x + i\cdot y$ i $f(z) = u(x,y) + i\cdot v(x,y)$ funkcija kompleksne promenljive z, analitička u oblasti G.

Na osnovu rezultata iz [160] sledi da je funkcija $\tilde{f}(z,\bar{z}) = \tilde{u}(x,y) + i\cdot\tilde{v}(x,y)$ definisana relacijom:

$$\tilde{f}(z,\bar{z}) = \tilde{u}(x,y) + i\cdot\tilde{v}(x,y) = P(f) =$$

$$= \mathrm{Re} \int_{z_0}^{z} f(\zeta)[(z+\bar{z})/2]^{1-k} \cdot (z-\zeta)^{-1+k/2} \cdot (\bar{z}+\zeta)^{-1+k/2} d\zeta \; +$$

$$+ i \cdot \mathrm{Im} \int_{z_0}^{z} f(\zeta)[\zeta-(z-\bar{z})/2](z-\zeta)^{-1+k/2}(\bar{z}+\zeta)^{-1+k/2} d\zeta, \quad \zeta=\xi+i\eta, \qquad (3.3.1)$$

gde se integracija vrši od tačke $z_0=x_0+iy_0$ do tačke $z=x+iy$ po proizvoljnoj deo po deo glatkoj konturi Γ koja leži u oblasti G, pri čemu je $\arg(z-\zeta)\cdot(\bar{z}+\zeta)$ fiksirano na neki način, p-analitička funkcija u oblasti G sa karakteristikom $p = x^k$ u sledeća tri slučaja:

a) Rub oblasti G sadrži odsečak L na imaginarnoj osi, $\mathrm{Im}\, f(z)|_L = 0$ i z_0 je proizvoljna tačka u L;

b) rub oblasti G sadrži beskonačno daleku tačku, $z_0 = \infty$ i kada z teži $z_0 = \infty$ duž konture Γ, postoji granična vrednost koeficijenta pravca tangente na Γ i $f(z)=O(|z|^{-k-\varepsilon})$, ($\varepsilon$=const. > > 0).

c) z_0 je proizvoljna fiksna tačka ruba oblasti G, ($z_0 \neq \infty$), i, kada $z \to z_0$ duž konture Γ, $f(z) = O(|z-z_0|^{-1+\varepsilon})$, ($\varepsilon$=const.>0).

Skupove analitičkih funkcija $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ opisanih u slučajevima "a", "b" i "c" označićemo respektivno sa M, M_1 i M_2.

Jednakost (3.3.1) nazivamo <u>osnovnom integralnom reprezantacijom p-analitičkih funkcija sa karakteristikom $p=x^k$</u> .

U svakom od pomenuta tri slučaja integralni operator $P(f)$ analitičkoj funkciji $f(z)$ dodeljuje po jednu x^k-analitičku funkciju $\tilde{f}(z,\bar{z})$ u odgovarajućoj oblasti.

Položij je dokazao da je ovakva vrsta korespondencije pod odredjenim uslovima, jednoznačna, tj. da je za svaku x^k-analitičku funkciju $\tilde{f}(z,\bar{z})$, moguće odrediti odgovarajuću, u smislu formule (3.3.1), analitičku funkciju $f(z)$.

Neka je C_1 razrez u desnoj poluravni $z=x+iy$ duž pravolinijskog odsečka koji spaja tačke $(0,y)$ i (a,y), pri čemu tačka $(0,y)$ leži na odsečku L koji pripada rubu oblasti G. Označimo sa (x,y^+) i (x,y^-) tačke sa koordinatama (x,y) koje leže respektivno na gornjoj i donjoj strani razreza C_1. Pritom je $z^+= x + + iy^+$ i $z^- = x + iy^-$. Ako tačke $z=x+iy$ i $\zeta=\xi+i\eta$, ($\xi<x$), leže na gornjoj strani C_1, tada je $\arg(z-\zeta)\cdot(\bar{z}+\zeta) = 0$.

Razmotrimo osnovnu integralnu reprezentaciju (3.3.1) (slučaj pod "a"), $z_0=0+iy$. Na gornjoj strani razreza C_1 ona ima oblik:

$$\tilde{f}(z^+,\bar{z}^+) = \tilde{u}(x,y^+) + i\cdot\tilde{v}(x,y^+) = P(f(z^+)) = \tag{3.3.2}$$

$$= \int_0^x [x^{1-k}\cdot u(\xi,y^+) + i\cdot\xi\cdot v(\xi,y^+)]\cdot(x^2-\xi^2)^{-1+k/2}\,d\xi \ .$$

Iz (3.3.1) takodje sledi da je:

$$[\tilde{f}(z,\bar{z})]^{\pm} = \int_0^x (x^{1-k}\cdot \mathrm{Re}\{[f(\zeta)]^{\pm}\cdot e^{-i\pi(-1+k/2)}\} +$$

$$+ i\cdot\xi\cdot \mathrm{Im}\{[f(\zeta)]^{\pm}\cdot e^{-i\pi(-1+k/2)}\})\cdot(\xi^2-x^2)^{-1+k/2}d\xi, \tag{3.3.2'}$$

gde je $[\tilde{f}(z,\bar{z})]^{\pm} = \tilde{f}(z^+,\bar{z}^+) - \tilde{f}(z^-,\bar{z}^-)$, $[f(\zeta,\bar{\zeta})]^{\pm} = f(\zeta^+,\bar{\zeta}^+) - f(\zeta^-,\bar{\zeta}^-)$. Jednakost (3.3.2') predstavlja integralnu reprezentaciju skoka u tački $z \in C_1$ x^k-analitičke funkcije $\tilde{f}(z,\bar{z}) = \tilde{u}(x,y)+i\tilde{v}(x,y)$ definisane integralnom reprezentacijom (3.3.1).

Dokazuje se da u tom slučaju važi formula

$$u(x,y^+) + i\cdot x\cdot v(x,y^+) =$$

$$= \begin{cases} \mu\,\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^x \dfrac{d^m(\tilde{u}(\xi,y^+)\xi^{k-1} + i\tilde{v}(\xi,y^+))}{(d\xi^2)^m}\cdot\dfrac{\xi\,d\xi}{(x^2-\xi^2)^{-m+k/2}}, & k\neq 2m \\ \mu\,\dfrac{d^m(\tilde{u}(x,y^+)x^{k-1} + i\cdot\tilde{v}(x,y^+))}{(dx^2)^m}, & k=2m, \end{cases} \tag{3.3.3}$$

gde je $m = [k/2]$ i $\mu = \dfrac{2}{\Gamma(m+1-k/2)\cdot\Gamma(k/2)}$. Specijalno je $\mu = 2/(m-1)!$, ako je $k = 2m$, i $\mu = 2/\Gamma^2(1/2) = 2/\pi$, ako je $k = 1$.

Formula (3.3.3) naziva se <u>formulom inverzije</u> koja odgovara osnovnoj integralnoj reprezentaciji (3.3.1) za slučaj kada su ispunjeni uslovi "a".

Neka je C_2 razrez u desnoj poluravni $z=x+iy$ duž horizontalne poluprave koja spaja beskonačno daleku tačku sa tačkom (b,y). Ako tačke $z=x+iy$ i $\zeta=\xi+i\eta$ leže na C_2^+ (gornjoj strani razreza C_2), tada je $\arg(z-\zeta)\cdot(\bar{z}+\zeta) = -\pi$.

Na gornjoj strani razreza C_2 integralna reprezentacija (3.3.1) (slučaj "b"), $z_0 = \infty$ je oblika:

$$\tilde{f}(z^+,\bar{z}^+) = \tilde{u}(x,y^+) + i\cdot\tilde{v}(x,y^+) = P(f(z^+)) =$$

$$= \int_\infty^x \{x^{1-k}\mathrm{Re}[f(\zeta^+)e^{-i\pi(-1+k/2)}]+i\cdot\xi\cdot \mathrm{Im}[f(\zeta^+)e^{-i\pi(-1+k/2)}]\}\cdot$$

$$\cdot(\xi^2-x^2)^{-1+k/2}\cdot d\xi \ . \tag{3.3.4}$$

Ako tačka $z = x + iy$ leži na C_2^- (donjoj strani razreza C_2), integralna reprezentacija (3.3.4) je oblika:

$$[\tilde{f}(z,\bar{z})]^{\pm}=\int_{k}^{x}(x^{1-k}[u(\xi,y)]^{\pm}+i\xi[v(\xi,y)]^{\pm})(x^{2}-\xi^{2})^{-1+k/2}d\xi, \quad (3.3.4')$$

a formula inverzije koja odgovara integralnoj reprezentaciji skoka x^k-analitičke funkcije na razrezu C_2 je:

$$\mathrm{Re}[f(z)]^{\pm} + i\cdot x\cdot \mathrm{Im}[f(z)]^{\pm} =$$

$$=\begin{cases} \mu\cdot\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{0}^{x}\dfrac{d^{m}([\tilde{u}(\xi,y)]^{\pm}\cdot\xi^{k-1} + i[\tilde{v}(\xi,y)]^{\pm})}{(d\xi^{2})^{m}}\cdot\dfrac{\xi d\xi}{(x^{2}-\xi^{2})^{-m+k/2}}, & k\neq 2m \\ \mu\cdot\dfrac{d^{m}([\tilde{u}(x,y)]^{\pm}\cdot x^{k-1} + i[\tilde{v}(x,y)]^{\pm})}{(dx^{2})^{m}}, & k\neq 2m. \end{cases} \quad (3.3.5)$$

Neka su x_0 i y koordinate početne tačke z_0 konture integracije Γ u integralnoj reprezentaciji (3.3.1) u slučaju "c". Pretpostavimo da je levi kraj pravolinijskog razreza C_3 koji spaja z_0 sa tačkom (a,y), $(a>x_0)$, i da je na $C_3^{\pm}$ (gornjoj strani razreza C_3) $\arg(z-\zeta)\cdot(\bar{z}+\zeta) = 0, (\xi<x)$. Tada je integralna reprezentacija (3.3.1) na $C_3^{\pm}$ oblika

$$\tilde{f}(z^{+},\bar{z}^{+}) = \tilde{u}(x,y^{+}) + i\cdot\tilde{v}(x,y^{+}) = P(f(z^{+})) =$$
$$= \int_{x_0}^{x}(x^{1-k}u(\xi,y^{+}) + i\xi v(\xi,y^{+}))\cdot(x^{2}-\xi^{2})^{-1+k/2}d\xi, \quad (3.3.6)$$

a njena formula inverzije ima oblik (3.3.3) ako je x_0 početna tačka integracije.

Granični problemi za linearne x^k-areolarne diferencijalne jednačine n-tog reda

Koristeći se osnovnom integralnom reprezentacijom x^k-analitičkih funkcija (3.3.1) i formulom inverzije (3.3.3), kao i nekim poznatim rezultatima iz Položijeve monografije [160] rešićemo nekoliko graničnih problema vezanih za homogene linearne x^k-analitičke diferencijalne jednačine n-tog reda sa konstantnim koeficijentima.

Problem 3.3.1. Neka je oblast G gornja desna četvrtina kompleksne ravni $z=x+iy$, ($x>0$ i $y>0$). Naći ono regularno rešenje $\tilde{f}(z,\bar{z}) = \tilde{u}(x,y) + i\tilde{v}(x,y)$ x^k-areolarne diferencijalne jednačine

$$D^{n}_{x^k} f = 0, \; n \in \mathbb{N}, \quad (3.3.7)$$

neprekidno na rubu Γ oblasti G, osim možda u $(0,0)$, čiji su realni i imaginarni deo su dovoljno puta diferencijabilne funkcije koje zadovoljavaju granične uslove

$$x^{k-1}a_m\cdot\Delta_1^m\widetilde{u}(x,y)-b_m\cdot\Delta_2^m\widetilde{v}(x,y)]|_{y=0} = \widetilde{\varphi}_m(x)\cdot x^{k-1},\quad 0\leqslant x<\infty \tag{3.3.8}$$

$$\Delta_2^m v|_{x=0} = 0,\quad 0\leqslant y<\infty,$$

$$(m = 0,\ 1,\ 2,\dots,\ n-1),$$

gde su $\widetilde{\varphi}_m(x)$ date neprekidne funkcije od x za $0\leqslant x<\infty$, a_m i b_m realne konstante takve da je $a_m^2 + b_m^2 \neq 0$, $(m = 0,1,\dots,n-1)$, i

$$\Delta_1 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{k}{x}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\quad,\quad \Delta_2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{k}{x}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\quad .!!$$

Iz relacije (3.2.10) sledi da je opšte rešenje jednačine (3.3.7) oblika:

$$\widetilde{f}(z) = \sum_{j=0}^{n-1} y^j\cdot f_j(z), \tag{3.3.10}$$

gde su $f_j = f_j(z)$, $(j=0,1,2,\dots,n-1)$, proizvoljne x^k-analitičke funkcije i $\beta(x,y) = y$.

Neposrednom proverom dobijamo da za proizvoljnu kompleksnu funkciju $f^*(z)=u^*(x,y)+iv^*(x,y)$, čiji su realni i imaginarni deo dovoljno puta diferencijabilni, u opštem slučaju važe jednakosti:

$$\frac{d_{x^k}^2 f^*}{dZd\overline{Z}} = \frac{1}{2^2}\,(\Delta_1 u^* + i\cdot\Delta_2 v^*),$$

$$\frac{d_{x^k}^4 f^*}{dZ^2d\overline{Z}^2} = \frac{1}{2^4}\,(\Delta_1\Delta_1 u^* + i\cdot\Delta_2\Delta_2 v^*) = \frac{1}{2^4}\,(\Delta_1^2 u^* + i\cdot\Delta_2^2 v^*),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \tag{3.3.11}$$

$$\frac{d_{x^k}^{2m} f^*}{dZ^m d\overline{Z}^m} = \frac{1}{2^{2m}}\,(\Delta_1^m u^* + i\cdot\Delta_2^m v^*),\quad m\in\mathbb{N}.$$

Odatle sledi da je za funkciju (3.3.10):

$$D_{x^k}^m(\overline{D}_{x^k}^m\widetilde{f}) = 2^{2m}\cdot\frac{d_{x^k}^{2m}\widetilde{f}}{dZ^m dZ^m} = \Delta_1^m\widetilde{u} + i\cdot\Delta_2^m\widetilde{v}, \tag{3.3.12}$$

gde je $D_{x^k} = d_{x^k}/d\overline{Z}$ i $\overline{D}_{x^k} = d_{x^k}/dZ$, pa se granični uslovi (3.3.8) transformišu u oblik:

$$\mathrm{Re}[(x^{k-1}a_m + ib_m)\cdot D_{x^k}^m(\overline{D}_{x^k}^m f)]|_{y=0} = \widetilde{\varphi}_m(x)\cdot x^{k-1}, \tag{3.3.13}$$

$$(m=0,1,2,\dots,n-1),$$

Iz

$$D_{x^k}^m\widetilde{f} = D_{x^k}^m\Big(\sum_{j=0}^{n-1} y^j f_j\Big) = \sum_{j=m}^{n-1} j(j-1)\dots(j-m+1)y^{j-m}f_j \tag{3.3.14}$$

sledi da je

$$\overline{D}_{x^k}^m(D_{x^k}^m\widetilde{f}) = \sum_{j=m}^{n-1} j(j-1)\dots(j-m+1)\cdot 2^m\,\frac{d_{x^k}^m}{dZ^m}(y^{j-m}f_j). \tag{3.3.15}$$

Primenom formule (3.2.7') dobijamo:

$$\widetilde{D}^m_{x^k}(D^m_{x^k} f) = \sum_{j=m}^{n-1} j(j-1)\ldots(j-m+1)\Big[\sum_{v=0}^{j-m} 2^{m-v}\binom{m}{v}(j-m)\ldots$$

$$\ldots(j-m-v+1)y^{j-m-v}\cdot\frac{\partial^{m-v} f_j}{\partial y^{m-v}}\Big] = \tag{3.3.17}$$

$$= \sum_{j=m}^{n-1}\sum_{v=0}^{j-m} 2^{m-v}\binom{m}{v} j(j-1)\ldots(j-m-v+1)y^{j-m-v}\cdot\frac{\partial^{m-v} f_j}{\partial y^{m-v}},$$

i

$$\widetilde{D}^m_{x^k}(D^m_{x^k}\widetilde{f})|_{y=0} = \sum_{j=m}^{n-1} 2^{2m-j}\binom{m}{m-j}\cdot j!\cdot\Big(\frac{\partial^{2m-j} f_j}{\partial y^{2m-j}}\Big)\Big|_{y=0}. \tag{3.3.18}$$

Uvedimo sada nove x^k-analitičke funkcije:

$$\widetilde{\Theta}_m(z) = \sum_{j=m}^{n-1} 2^{2m-j}\binom{m}{m-j} j!\frac{\partial^{2m-j} f_j(z)}{\partial y^{2m-j}}, \quad (m=0,1,\ldots,n-1). \tag{3.3.19}$$

Granične uslove (3.3.8) i (3.3.9) možemo napisati u obliku

$$[x^{k-1}a_m\widetilde{\varphi}_m(x,y) - b_m\widetilde{\psi}_m(x,y)]|_{y=0} = \widetilde{\varphi}_m(x)x^{k-1}, \quad 0\leqslant x<\infty \tag{3.3.20}$$

i

$$\widetilde{\psi}_m(0,y) = 0, \quad 0\leqslant y<\infty, \tag{3.3.21}$$

gde su $\widetilde{\Theta}_m(z) = \widetilde{\varphi}_m(x,y) + i\widetilde{\psi}_m(x,y)$ funkcije oblika (3.3.19) i $m= = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Time smo dobili n graničnih problema (3.3.20) i (3.3.21) za odredjivanje x^k-analitičkih funkcija $\widetilde{\Theta}_m(z)$ na oblasti G.

Na osnovu (3.3.1) i (3.3.2), rešenja graničnog problema (3.3.20) i (3.3.21) tražićemo u obliku

$$\widetilde{\Theta}_m(z) = \int_0^x [x^{1-k}\varphi_m(\xi,y)+i\xi\cdot\psi_m(\xi,y)](x^2-\xi^2)^{-1+k/2}\,d\xi, \tag{3.3.22}$$

gde su $\Theta_m(z) = \varphi_m(x,y) + i\cdot\psi_m(x,y)$, $m = 0, 1, \ldots, n-1$, funkcije analitičke u oblasti G takve da je $\psi_m|_{x=0} = 0$. Iz formula inverzije (3.3.3), za $0\leqslant x<\infty$, dobijamo da je:

$$[a_m\cdot\varphi_m(x,y) - b_m\cdot x\cdot\psi_m(x,y)]|_{y=0} =$$

$$\mu\cdot\frac{d}{dx}\int_0^x\Big\{\frac{d^j[a_m\xi^{k-1}\widetilde{\varphi}_m(\xi,y) - i\widetilde{\psi}_m(\xi,y)]}{(d\xi^2)^j}\Big\}\Big|_{y=0}\cdot\frac{\xi\,d\xi}{(x^2-\xi^2)^{-j+k/2}}, \quad k\neq 2j$$

$$= \mu\cdot x\cdot\frac{d^j[a_m\widetilde{\varphi}_m(x,y) - ib_m\widetilde{\psi}_m(x,y)]}{(dx^2)^j}\Big|_{y=0}, \quad k=2j \tag{3.3.23}$$

$$(m=0,1,2,\ldots,n-1),$$

gde je $j = [k/2]$ i $\mu = \dfrac{2}{\Gamma(j+1-k/2)\cdot\Gamma(k/2)}$, i otuda:

$$[a_m\cdot\varphi_m(x,y) - b_m\cdot x\cdot\psi_m(x,y)]|_{y=0} =$$

$$= \begin{cases} \mu\cdot\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^x \dfrac{d^j[\widetilde{\varphi}_m(\xi)\xi^{k-1}]}{(d\xi^2)^j}\cdot\dfrac{\xi\,d\xi}{(x^2-\xi^2)^{-j+k/2}} & , k \neq 2j \\ \mu\cdot x\cdot\dfrac{d^j[\widetilde{\varphi}_m(x)x^{k-1}]}{(dx^2)^j} & , k = 2j, \end{cases} \tag{3.3.24}$$

za $m = 0, 1, \ldots, n-1$.

Na osnovu (3.3.21), možemo da pretpostavimo da je $\psi_m(-x,0) = -\psi_m(x,0)$ i $\varphi_m(-x,0) = \varphi_m(x,0)$. Na taj način dobijamo n Hilbertovih graničnih problema za analitičke funkcije na gornjoj poluravni $z=x+iy$, oblika

$$[a_m\varphi_m(x,y) - b_m\cdot x\cdot\psi_m(x,y)]|_{y=0} = w_m(x),\ -\infty<x<\infty, \tag{3.3.25}$$

gde je $w_m(x)$ za $x>0$, funkcija odredjena desnom stranom jednakosti (3.3.24) i $w_m(-x) = w_m(x)$ za $m=0,1,\ldots,n-1$.

Time je granični problem (3.3.8), (3.3.9) sveden na konačan skup Hilbertovih problema za analitičke funkcije u gornjoj poluravni koje na realnoj osi mogu da imaju prekide u koordinatnom početku.

<u>Problem 3.2.2.</u> Neka je G gornja desna četvrtina kompleksne ravni $z = x + iy$, $(x>0,y>0)$. Naći ono rešenje $\widetilde{f}(z,\bar{z}) = \widetilde{u}(x,y) + i\cdot\widetilde{v}(x,y)$ x^k-diferencijalne jednačine

$$D^n_{x^k} f = 0,\ n \in \mathbb{N}, \tag{3.3.7'}$$

neprekidno na rubu Γ oblasti G, osim možda u (0,0), čiji su realni i imaginarni deo dovoljan broj puta diferencijabilni i zadovoljavaju granične uslove

$$\mathrm{Re}[D^m_{x^k}\ \widetilde{f}]|_{y=0} = \varphi_m(x)\ ,\ 0\leq x<\infty, \tag{3.3.26}$$

$$\mathrm{Im}[D^m_{x^k}\ \widetilde{f}]|_{x=0} = 0\ ,\ 0\leq y<\infty, \tag{3.3.27}$$

i za $z \to \infty$ dopunski uslov

$$\widetilde{f}(z,\bar{z}) = O(|z|^k),\ z\in G, \tag{3.3.26'}$$
$$(m=0,1,2,\ldots,n-1),$$

gde su $\varphi_m(x)$ date neprekidne funkcije za $0\leq x<\infty$.||

S obzirom da je opšte rešenje jednačine (3.3.7') dato formulom (3.3.10), iz (3.3.14) sledi da je

$$\operatorname{Re}[D_{x^k}^m \tilde{f}] = \operatorname{Re}\{\sum_{j=m}^{n-1} j(j-1)\dots(j-m+1)y^{j-m}[u_j + iv_j]\} =$$

$$= \sum_{j=m}^{n-1} j(j-1)\dots(j-m+1)\ y^{j-m}u_j(x,y),\quad (m=0,1,\dots,n-1), \qquad (3.3.28)$$

gde su $f_j(x,y) = u_j(x,y) + iv_j(x,y)$ proizvoljne x^k-analitičke funkcije. Iz (3.3.28) sledi da je:

$$\operatorname{Re}[D_{x^k}^m\ \tilde{f}]|_{y=0} = m!\cdot u_m(x,0),\ 0\leqslant x<\infty, \qquad (3.3.29)$$

$$\operatorname{Im}[D_{x^k}^m\ \tilde{f}]|_{x=0} = \sum_{j=m}^{n-1} j(j-1)\dots(j-m+1)y^{j-m}\cdot v_j(0,y),\ 0\leqslant y<\infty, \qquad (3.3.30)$$

$$(m-0,1,2,\dots,n-1).$$

S obzirom da sistem homogenih linearnih jednačina

$$\sum_{j=m}^{n-1} j(j-1)\dots(j-m+1)y^{j-m}v_j(0,y) = 0,\ m=0,1,\dots,n-1, \qquad (3.3.31)$$

za svako $y\in[0,\infty)$, ima samo trivijalna rešenja, granični uslovi (3.3.26) i (3.3.27) svode se na n graničnih problema za x^k-analitičke funkcije $f_m(z)$ oblika

$$u_m(x,0) = (1/m!)\tilde{\varphi}_m(x),\ 0\leqslant x<\infty, \qquad (3.3.32)$$

$$v_m(0,y) = 0\ ,\ 0\leqslant y<\infty, \qquad (3.3.33)$$

$$(m=0,1,\dots,n-1).$$

Na osnovu (3.3.1) rešenja graničnih problema (3.3.32), (3.3.33) tražićemo u obliku

$$f_m(z) = \int_0^x [x^{1-k}u_m^*(\xi,y)+i\xi v_m^*(\xi,y)]\cdot(x^2-\xi^2)^{-1+k/2}d\xi, \qquad (3.3.34)$$

$$(m=0,1,\dots,n-1),$$

gde su $f_m^*(z)=u_m^*(x,y)+iv_m^*(x,y)$ funkcije analitičke u oblasti G takve da je $v_m^*|_{x=0} = 0$.

Iz formule inverzije (3.3.3), za $0\leqslant x<\infty$, dobijamo da je:

$$u_m^*(x,0)=\begin{cases} \dfrac{\mu}{m!}\cdot\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^x \dfrac{d^j\tilde{\varphi}_m(\xi)\xi^{k-1}}{(d\xi^2)^j}\cdot\dfrac{\xi\, d\xi}{(x^2-\xi^2)^{-j+k/2}}, & k\neq 2j \\ \dfrac{\mu}{m!}\cdot x\cdot\dfrac{d^j\tilde{\varphi}_m(x)x^{k-1}}{(dx^2)^j}, & k=2j,\ (m=0,1,\dots,n-1). \end{cases} \qquad (3.3.35)$$

Pretpostavimo da je $u_m^*(-x,0) = u_m^*(x,0)$, $(m=0,1,\dots,n-1)$, i da funkcije $u_m^*(x,0)$ na celoj realnoj osi zadovoljavaju Hölderov uslov. S obzirom da je $v_m^*(0,\infty) = 0$ za $m=0,1,\dots,n-1$, pomoću Schwartzovog operatora (1.3.3) dobijamo da su analitičke funkcije $f_m^*(z)$:

$$f_m^*(z) = u_m^*(x,y)+iv_m^*(x,y) = \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{u_m^*(t,0)-a_m}{t-z}\,dt + a_m, \qquad (3.3.36)$$

gde je $a_m = u_m^*(\infty,0)$, $m=0,1,\dots,n-1$.

S obzirom da je $\lim\limits_{z\to\infty} f_m^*(z) = a_m$, [136], [68], sledi da funkcije $f_m(z)$ definisane relacijama (3.3.34) zadovoljavaju uslov (3.3.26'). Zamenom jednakosti (3.3.36) u (3.3.34) dobijamo n x^k-analitičkih funkcija $f_m(z)$ neprekidnih u $z=0$, koje su rešenja graničnog problema (3.3.32), (3.3.33):

$$f_m(z) = u_m(x,y) + i\cdot v_m(x,u) =$$

$$= b_m + \int_0^x (x^2 - \xi^2)^{-1+k/2}\{x^{1-k}\,\mathrm{Re}[\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u_m^*(t,0) - a_m}{t-\zeta}\,dt\,] +$$

$$+ i\xi\cdot\mathrm{Im}[\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u_m^*(t,0) - a_m}{t-\zeta}\,dt\,]\}\,d\xi,\quad m=0,1,\dots,n-1, \qquad (3.3.37)$$

gde su $f_m^*(z) = u_m^*(x,y) + iv_m^*(x,y)$ analitičke funkcije odredjene relacijama (3.3.36), $\zeta = \xi + iy$, $b_m = a_m\cdot\dfrac{\Gamma(k/2)\cdot\Gamma(1/2)}{2\cdot\Gamma(k/2+1/2)}$.

Rešenje graničnog problema 3.3.2 dobija se kada se u (3.3.10) uvrste funkcije $f_m(z)$ date jednakostima (3.3.37).

<u>Problem 3.3.3.</u> Neka je oblast G deo ravni $z=x+iy$ za koji je $0\leqslant x<\infty$ i $0\leqslant y\leqslant h=\mathrm{const}$. Naći ono rešenje $\tilde f(z,\bar z) = \tilde u(x,y)+i\tilde v(x,y)$ x^k-areolarne jednačine

$$D_{x^k}^n \tilde f = 0, \qquad (3.3.7'')$$

neprekidno na rubu Γ oblasti G (osim, možda, u tačkama $(0,0)$ i $(0,h)$), koja zadovoljava granične uslove

$$[x^{k-1}a_m\Delta_1^m\tilde u(x,y)-b_m\Delta_2^m\tilde v(x,y)]|_{y=0} = \tilde\varphi_m(x)x^{k-1},\ 0\leqslant x<\infty, \qquad (3.3.38)$$

$$[x^{k-1}c_m\Delta_1^m\tilde u(x,y)-d_m\Delta_2^m\tilde v(x,y)]|_{y=h} = \tilde\psi_m(x)x^{k-1},\ 0\leqslant x<\infty, \qquad (3.3.39)$$

$$\Delta_2^m\,\tilde v(x,y)|_{x=0} = 0,\ 0\leqslant y\leqslant h, \qquad (3.3.40)$$

$$(m = 0,\ 1,\ 2,\ \dots,\ n-1),$$

$$\tilde f(z) = O(|z|^n),\ \text{kada } z\to\infty, \qquad (3.3.40')$$

gde su $\tilde\varphi_m(x)$ i $\tilde\psi_m(x)$ neprekidne funkcije za $0\leqslant x<\infty$, a_m, b_m, c_m, d_m realne konstante takve da je $a_m^2 + b_m^2 \neq 0$ i $c_m^2 + d_m^2 \neq 0$, $(m=0,1,\dots,n-1)$ i

$$\Delta_1 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{k}{x}\cdot\frac{\partial}{\partial x},\quad \Delta_2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{k}{x}\cdot\frac{\partial}{\partial x}.!!$$

Pošavši od opšteg rešenja (3.3.10) jednačine (3.3.7''), postupkom sličnim kao u slučaju problema 3.3.1, dobijamo da se granični uslovi (3.3.38) i (3.3.39) transformišu u oblik:

$$\mathrm{Re}[(x^{k-1}a_m+ib_m)\cdot D^m_{x^k}\bar{D}^m_{x^k}\tilde{f}]|_{y=0} = \tilde{\varphi}_m(x)\cdot x^{k-1},\quad 0\leq x<\infty, \tag{3.3.38'}$$

$$\mathrm{Re}[(x^{k-1}c_m+id_m)\cdot D^m_{x^k}\bar{D}^m_{x^k}\tilde{f}]|_{y=h} = \tilde{\Psi}_m(x)\cdot x^{k-1},\quad 0\leq x<\infty, \tag{3.3.39'}$$

$$(m=0,1,\dots,n-1).$$

Iz (3.3.17) sledi da je:

$$D^m_{x^k}(\bar{D}^m_{x^k}\tilde{f})|_{y=0} = \sum_{j=m}^{n-1} 2^{2m-j}\binom{m}{m-j}j!\cdot[\frac{\partial^{2m-j}f_j(z)}{\partial y^{2m-j}}|_{y=0}], \tag{3.3.18}$$

i

$$D^m_{x^k}(\bar{D}^m_{x^k}\tilde{f})|_{y=h} = \sum_{j=m}^{n-1}\sum_{v=0}^{j-m} 2^{m-v}\binom{m}{v}j\dots(j-m-v+1)h^{j-m-v}[\frac{\partial^{m-v}f_j(z)}{\partial y^{m-v}}]|_{y=h}],$$

$$(m=0,1,2,\dots,n-1), \tag{3.3.41}$$

pri čemu su sve ove funkcije x^k-analitičke.

Ako uvedemo nove x^k-analitičke funkcije:

$$\tilde{\Theta}_m(z,\bar{z}) = \sum_{j=m}^{n-1} 2^{2m-j}\cdot\binom{m}{m-j}\cdot j!\cdot\frac{\partial^{2m-j}f_j(z)}{\partial y^{2m-j}} \tag{3.3.42}$$

i

$$\tilde{\Gamma}_m(z,\bar{z}) = \sum_{j=m}^{n-1}\sum_{v=0}^{j-m} 2^{m-v}\binom{m}{v}j(j-1)\dots(j-m-v+1)h^{j-m-v}\frac{\partial^{m-v}f_j(z)}{\partial y^{m-v}}$$

$$(m=0,1,2,\dots,n-1), \tag{3.3.43}$$

granične uslove (3.3.38), (3.3.39) i (3.3.40) možemo, takodje, napisati u obliku

$$[x^{k-1}a_m\tilde{\varphi}_m(x,y) - b_m\tilde{\psi}_m(x,y)]|_{y=0} = \tilde{\varphi}_m(x)x^{k-1},\quad 0\leq x<\infty, \tag{3.3.44}$$

$$[x^{k-1}c_m\tilde{\alpha}_m(x,y) - d_m\tilde{\beta}_m(x,y)]|_{y=h} = \tilde{\Psi}_m(x)x^{k-1},\quad 0\leq x<\infty, \tag{3.3.45}$$

$$\tilde{\psi}_m(0,y) = 0,\quad \tilde{\beta}_m(0,y) = 0,\quad 0\leq y\leq h, \tag{3.3.46}$$

gde su $\tilde{\Theta}_m(z,\bar{z})=\tilde{\varphi}_m(x,y)+i\cdot\tilde{\psi}_m(x,y)$ x^k-analitičke funkcije oblika (3.3.42), $\tilde{\Gamma}_m(z,\bar{z})=\tilde{\alpha}_m(x,y)+i\tilde{\beta}_m(x,y)$ x^k-analitičke funkcije oblika (3.3.43) i $m=0,1,\dots,n-1$.

Analognim postupkom kao i u problemu 3.3.1, korišćenjem formule inverzije (3.3.3) sa graničnih uslova (3.3.44), (3.3.45) i (3.3.46), prelazimo na granične probleme Hilberta na oblasti $\tilde{G}=\{(x,y)\mid -\infty<x<\infty,\ 0<y<h\}$:

$$[a_m\cdot\varphi_m(x,y) - b_m\cdot x\cdot\psi_m(x,y)]|_{y=0} = \Phi_m(x),\quad -\infty<x<\infty, \tag{3.3.47}$$

$$[c_m\cdot\alpha_m(x,y) - d_m\cdot x\cdot\beta_m(x,y)]|_{y=h} = \Psi_m(x),\quad -\infty<x<\infty, \tag{3.3.48}$$

gde su $\Theta_m(z)=\varphi_m(x,y)+i\cdot\psi_m(x,y)$ i $\Gamma_m(z)=\alpha_m(x,y)+i\cdot\beta_m(x,y)$, $m=0,$

$1,\ldots,n-1$, tražene analitičke funkcije, $\varphi_m(x)$ funkcije definisane desnom stranom jednakosti (3.3.24), $\Psi_m(x)$ funkcije definisane desnom stranom jednakosti (3.3.24) kada umesto funkcija $\widetilde{\varphi}_m(\xi)$ i $\widetilde{\varphi}_m(x)$ u formulu (3.3.23) uvrstimo $\widetilde{\Psi}_m(\xi)$ i $\widetilde{\Psi}_m(x)$. Pritom je uvedena dodatna pretpostavka da je $\varphi_m(-x) = \varphi_m(x)$ i $\Psi_m(-x) = \Psi_m(x)$ za $m=0,1,\ldots,n-1$.

Problem 3.3.4. U kompleksnoj ravni data je oblast $G = \{(x,y) \mid x > 0,\ y > 0\}$. Naći, regularno u oblasti G, rešenje $\widetilde{f}(z,\bar{z}) = \widetilde{u}(x,y) + i\cdot\widetilde{v}(x,y)$ x^k-areolarne diferencijalne jednačine

$$D^{n}_{x^k}\widetilde{f} + d_1 D^{n-1}_{x^k}\widetilde{f} + \cdots + d_{n-1}D_{x^k}\widetilde{f} + d_n\widetilde{f} = 0 \qquad (3.3.49)$$

sa realnim koeficijentima $d_1,d_2,\ldots,d_n$, koje zadovoljava granične uslove oblika

$$[x^{k-1}a_m\Delta^m_1\widetilde{u}(x,y) - b_m\Delta^m_2\widetilde{v}(x,y)]|_{y=0} = \widetilde{\varphi}_m(x)\cdot x^{k-1},\quad 0\leqslant x<\infty, \qquad (3.3.50)$$

$$\Delta^m_2\widetilde{v}(x,y)|_{x=0} = 0,\quad 0\leqslant y<\infty\ ,\quad (m=0,1,\ldots,n-1), \qquad (3.3.51)$$

$$\widetilde{f}(z) = O(|z|^n),\quad z\to\infty \qquad (3.3.51')$$

gde su $\widetilde{\varphi}_m(x)$ neprekidne funkcije za $0\leqslant x<\infty$, a a_m i b_m realne konstante takve da je $a_m^2 + b_m^2 \neq 0$ za $m = 0, 1,\ldots, n-1$.!!

Kao i u prethodnim slučajevima (problemi 3.3.1 i 3.3.2), granični uslovi (3.3.50) transformišu se u oblik:

$$\mathrm{Re}\ [(x^{k-1}\cdot a_m + i\cdot b_m)\cdot D^m_{x^k}\bar{D}^m_{x^k}\widetilde{f}]|_{y=0} = \widetilde{\varphi}(x)\cdot x^{k-1}. \qquad (3.3.52)$$

Ovde ćemo rešiti jedan partikularni slučaj problema 3.3.4. Kombinacijom tog rešenja i metode kojom je rešen problem 3.3.1 moguće je rešiti granični problem 3.3.4 u opštem slučaju.

Pretpostavimo da odgovarajuća karakteristična jednačina

$$\xi^n + d_1\xi^{n-1} + d_2\xi^{n-2} + \cdots + d_{n-1}\xi + d_n = 0 \qquad (3.3.53)$$

ima n različitih realnih rešenja $r_1, r_2,\ldots, r_n$.

U tom slučaju je, na osnovu (3.2.25), opšte regularno rešenje jednačine (3.3.49) oblika

$$\widetilde{f}(z,\bar{z}) = \sum_{j=1}^{n} \exp(r_j\cdot y)\cdot\varphi_j(z,\bar{z}), \qquad (3.3.54)$$

gde su $\varphi_j = \varphi_j(z,\bar{z})$ proizvoljne funkcije x^k-analitičke u G.

S obzirom da je, na osnovu dokaza leme 3.2.1

$$D^m_{x^k}\widetilde{f} = 2^m\cdot\frac{d^m_{x^k}\widetilde{f}}{d\bar{Z}^m} = \sum_{j=1}^{n} r_j^m\cdot\exp(r_j\cdot y)\cdot\varphi_j(z), \qquad (3.3.55)$$

postupkom sličnim kao u (3.1.38') i (3.2.7') dobijamo da je:

$$\bar{D}^m_{x^k}(D^m_{x^k}\widetilde{f}) = 2^{2m}\,\frac{d^{2m}_{x^k}f}{dZ^m d\bar{Z}^m} = \sum_{j=1}^{n} r_j^m\cdot 2^m\cdot\frac{d_x\,[\exp(r_j y)\cdot\varphi_j(z)]}{dZ^m} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} r_j^m[\sum_{v=1}^{m}\binom{m}{v} r_j^{m-v}2^v\cdot\varphi_j^{(v)}\cdot\exp(r_j y)]=$$

$$= \sum_{j=1}^{n}[\sum_{v=0}^{m}\binom{m}{v} r_j^{2m-v}2^v\cdot\varphi_j^{(v)}(z)]\cdot\exp(r_j y), \qquad (3.3.56)$$

pa je

$$\bar{D}^m_{x^k}(D^m_{x^k}\widetilde{f})|_{y=0} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{v=0}^{m}\binom{m}{v} r_j^{2m-v}2^v\left(\frac{\partial^v\varphi_j(x,y)}{\partial y^v}|_{y=0}\right). \qquad (3.3.57)$$

Ako uvedemo nove x^k-analitičke funkcije oblika

$$\widetilde{\Theta}_m(z,\bar{z}) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{v=0}^{m}\binom{m}{v} r_j^{2m-v}2^v\,\frac{\partial^v\varphi_j(z)}{\partial y^v}, \quad m=0,1,\ldots,n-1, \qquad (3.3.58)$$

granične uslove (3.3.50) i (3.3.51) možemo da napišemo u obliku:

$$[x^{k-1}a_m\cdot\widetilde{\varphi}_m(x,y) - b_m\widetilde{\psi}_m(x,y)]|_{y=0} = \widetilde{\Phi}_m(x)x^{k-1}, \quad 0\leqslant x<\infty, \qquad (3.3.59)$$

$$\widetilde{\psi}_m(0,y) = 0, \quad 0\leqslant y<\infty, \qquad (3.3.60)$$

gde su $\widetilde{\Theta}_m(z,\bar{z})=\widetilde{\varphi}_m(x,y)+i\cdot\widetilde{\psi}_m(x,y)$, $(m=0,1,\ldots,n-1)$, x^k-analitičke funkcije oblika (3.3.58).

Rešavanje problema (3.3.59) i (3.3.60) dalje teče isto kao i u slučaju problema 3.3.1.

<u>Problem 3.3.5.</u> Naći regularno, u oblasti $G = \{(x,y)|x>0,y>0\}$, rešenje $\widetilde{f}(z,\bar{z}) = u(x,y) + i\cdot v(x,y)$ x^k-areolarne diferencijalne jednačine (3.3.49) sa realnim koeficijentima $d_1,\ldots, d_n$, neprekidno na rubu Γ oblasti G (osim, možda, u $(0,0)$), koja zadovoljava granične uslove

$$\mathrm{Re}\,[D^m_{x^k}\widetilde{f}]|_{y=0} = \widetilde{\Phi}_m(x), \quad 0\leqslant x<\infty, \qquad (3.3.61)$$

$$\mathrm{Im}\,[D^m_{x^k}\widetilde{f}]|_{x=0} = 0, \quad 0\leqslant y<\infty; \quad f(z) = O(|z|^n), \ z \to \infty \qquad (3.3.62)$$

gde su $\Phi_m(x)$ neprekidne funkcije za $0<x<\infty$.||

Pretpostavimo, zbog jednostavnosti, da su sva rešenja $r_1, r_2,\ldots,r_n$ odgovarajuće karakteristične jednačine (3.3.53) različita. U tom slučaju, na osnovu (3.3.61), sledi da je

$$\sum_{j=1}^{n} r_j^m\cdot\widetilde{\alpha}_j(x,0) = \widetilde{\Phi}_m(x), \qquad (3.3.63)$$

$$\sum_{j=1}^{n} r_j^m \widetilde{\beta}_j(0,y) = 0, \qquad (3.3.64)$$
$$(m=0,1,\ldots,n-1),$$

gde su $\widetilde{\varphi}_j(z,\bar{z})=\widetilde{\alpha}_j(x,y)+i\cdot\widetilde{\beta}_j(x,y)$ proizvoljne x^k-analitičke funkcije. S obzirom da su, po pretpostavci, kompleksne konstante r_j $(j=1,2,\ldots,n)$, medju sobom različite, sistemi linearnih jednačina (3.3.63) i (3.3.64) po $\widetilde{\alpha}_j(x,0)$ i $\widetilde{\beta}_j(0,y)$, respektivno, imaju jedinstvena rešenja:

$$\widetilde{\alpha}_j(x,0) = \widetilde{F}_j(x), \quad 0\leqslant x<\infty, \qquad (3.3.65)$$

$$\widetilde{\beta}_j(0,y) = 0, \quad 0\leqslant y<\infty, \quad (j=1,2,\ldots,n). \qquad (3.3.66)$$

Rešenja $\widetilde{\varphi}_j$ graničnih problema (3.3.65), (3.3.66) tražimo u obliku

$$\widetilde{\varphi}_j(z,\bar{z}) = \int_0^x [x^{1-k}\cdot\alpha_j(\xi,y)+i\cdot\xi\cdot\beta_j(\xi,y)]\cdot(x^2-\xi^2)^{-1+k/2}d\xi \qquad (3.3.67)$$
$$(j=1,2,\ldots,n),$$

gde su $\varphi_j(z)=\alpha_j(x,y)+i\cdot\beta_j(x,y)$ funkcije analitičke u oblasti G takve da je $\beta_j(0,y)=0$. Iz formule inverzije (3.3.3), za $0\leqslant x<\infty$, dobijamo funkcije

$$\alpha_j(x,0)=\begin{cases} \mu\cdot\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^x \frac{d^g[F_j(\xi)\cdot\xi^{k-1}]}{(d\xi^2)^g}\cdot\frac{\xi\cdot d\xi}{(x^2-\xi^2)^{-g+k/2}}, & k\neq 2g \\[2ex] \mu\cdot x\cdot\dfrac{d^g[F_j(x)\cdot x^{k-1}]}{(dx^2)^g}, & k=2g, \end{cases} \qquad (3.3.68)$$
$$(j=1,2,\ldots,n).$$

Ako pretpostavimo da je $\alpha_j(-x,0)=\alpha_j(x,0)$ i da funkcije $\alpha_j(x,0)$ na celoj realnoj osi zadovoljavaju Hölderov uslov, tada, pod pretpostavkom da je $\beta_j(0,\infty)=0$, za $j=1,2,\ldots,n$, pomoću Schwartzovog operatora, dobijamo da je:

$$\varphi_j(z)=\alpha_j(x,y)+i\cdot\beta_j(x,y)= \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\alpha_j(t,0)-a_j}{t-z}\,dt + a_j, \qquad (3.3.69)$$

gde je $a_j=\alpha_j(\infty,0)$, $(j=1,2,\ldots,n)$. Zamenom (3.3.69) u (3.3.67) dobijamo rešenje problema (3.3.65) i (3.3.66), neprekidno u $z = 0$, u obliku:

$$\widetilde{\varphi}_j(z,\bar{z}) = \widetilde{\alpha}_j(x,y) + i\cdot\widetilde{\beta}_j(x,y) =$$
$$= b_j+\int_0^x (x^2-\xi^2)^{-1+k/2}\cdot[x^{1-k}\cdot\mathrm{Re}\,\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\alpha_j(t,0)-a_j}{t-\zeta} +$$
$$+ i\cdot\xi\cdot\mathrm{Im}\,\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\alpha_j(t,0)-a_j}{t-\zeta}\,dt]d\xi, \quad (j=1,2,\ldots,n), \qquad (3.3.70)$$

gde je $\zeta=\xi+iy$ i $b = a_j \dfrac{\Gamma(k/2)\cdot\Gamma(1/2)}{2\cdot\Gamma(k/2+1/2)}$, $(j=1,2,\dots,n)$.

Time dobijamo i rešenje graničnog problema 3.3.5 pomoću formule (3.3.60) za slučaj kada su koreni karakteristične jednačine (3.3.59) različiti.

Pored pomenutih graničnih problema moguće je na sličan način uopštiti čitav niz graničnih problema za x^k-analitičke funkcije.

3.4. Reprezentacije p-analitičkih funkcija i jedna približna metoda

Videli smo u prethodnom paragrafu da je osnovna integralna reprezentacija p-analitičkih funkcija sa karakteristikom $p = x^k$, $(k=\text{const.}>0)$, od velikog značaja za rešavanje graničnih problema za tu vrstu funkcija.

Položij se u [160] bavio i reprezentacijom p-analitičkih funkcija u opštijim slučajevima. Ovde ćemo pomenuti neke od rezultata uz pomoć kojih se mogu uopštiti granični problemi iz prethodnog paragrafa.

Neka je G^* oblast u desnoj poluravni $w = \alpha+i\cdot\beta$ ograničenoj odsečkom L^* na imaginarnoj osi i krivom monotonom u odnosu na promenljivu α. Označimo sa N skup funkcija $F(w) = U(\alpha,\beta) + iV(\alpha,\beta)$ neprekidno diferencijabilnih po α i β u oblasti G^*, a sa $\tilde{N}$ skup funkcija definisanih u G^* integralnom formulom:

$$\tilde{F}(w) = \tilde{U}(\alpha,\beta) + i\cdot\tilde{V}(\alpha,\beta) = P_w(F(w)) =$$

$$= \int_0^{\alpha} [U(\xi,\beta)\cdot\alpha^{1-k}+i\cdot\xi V(\xi,\beta)](\alpha^2-\xi^2)^{-1+k/2}d\xi,\quad k=\text{const.}>0, \qquad (3.4.1)$$

ili

$$\tilde{F}(w) = \int_0^1 U(\alpha t,\beta)+i\cdot\alpha^k\cdot V(\alpha t,\beta)](1-t^2)^{-1+k/2}dt \qquad (3.4.1')$$

i, specijalno:

$$\tilde{U}(0,\beta) = \frac{\Gamma(k/2)\cdot\Gamma(1/2)}{2\cdot\Gamma(k/2+1/2)}\cdot U(0,\beta),\quad V(0,\beta) = 0. \qquad (3.4.1'')$$

Formula inverzije koja odgovara integralnoj reprezentaciji (3.4.1), analogno (3.3.3) ima oblik

$$U(\alpha,\beta) + i\cdot\alpha\cdot V(\alpha,\beta) =$$

$$\mu\cdot\frac{d}{dx}\int_0^{\alpha}\frac{d^m[\widetilde{U}(\xi,\beta)\cdot\xi^{k-1}+i\widetilde{V}(\xi,\beta)]}{(d\xi^2)^m}\cdot\frac{\xi\,d\xi}{(\alpha^2-\xi^2)^{-m+k/2}}\,,\quad k\neq 2m$$

$$=\qquad\qquad(3.4.2)$$

$$\mu\cdot\alpha\cdot\frac{d^m[\widetilde{U}(\alpha,\beta)\cdot\alpha^{k-1}+i\widetilde{V}(\alpha,\beta)]}{(d\alpha^2)^m}\,,\quad k=2m,$$

gde su konstante m i μ istog oblika kao i u (3.3.3).

Skup funkcija $\widetilde{N}$ naziva se <u>klasom polaznih (početnih) funkcija</u> , a skup N– <u>klasom integralnih transformacija</u> funkcija iz $\widetilde{N}$.

Neka su λ i ν realne konstante. Formulom

$$\frac{\bar{d}_{\lambda,\nu}F(w)}{dw}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\partial U}{\partial\beta}-\lambda\cdot\frac{\partial V}{\partial\alpha}\right)+\frac{i}{2}\cdot\left(\frac{\partial V}{\partial\beta}+\nu\cdot\frac{\partial U}{\partial\alpha}\right)\qquad(3.4.3)$$

definišemo <u>operator diferenciren</u><u>ja sa indeksima λ i ν</u> , a formulom

$$\frac{\widetilde{d}_{\lambda,\nu}\widetilde{F}(w)}{dw}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\partial\widetilde{U}}{\partial\beta}-\frac{\lambda}{\alpha^k}\cdot\frac{\partial\widetilde{V}}{\partial\alpha}\right)+\frac{i}{2}\cdot\left(\frac{\partial\widetilde{V}}{\partial\beta}+\nu\alpha^k\cdot\frac{\partial\widetilde{U}}{\partial\alpha}\right),\qquad(3.4.4)$$

definiše se <u>operator diferenciranja sa indeksima λ i ν i karakteristikom α^k</u> . Obe operacije definisane su na klasi svih funkcija kompleksne promenljive $w=\alpha+i\beta$ koje imaju parcijalne izvode po α i β.

Dokazano je da važi sledeća jednakost:

$$\frac{\widetilde{d}_{\lambda,\nu}\widetilde{F}(w)}{dw}=-\frac{\lambda}{2\cdot\alpha}\cdot V(0,\beta)+P_w\left(\frac{\bar{d}_{\lambda,\nu}F(w)}{dw}\right).\qquad(3.4.5)$$

Iz (3.4.5) sledi da operaciji diferenciranja $\frac{\widetilde{d}_{\lambda,\nu}\widetilde{F}(w)}{dw}$ u klasi polaznih funkcija odgovara operacija diferenciranja $\frac{\bar{d}_{\lambda,\nu}F(w)}{dw}$ u klasi N (sa tačnošću do na sabirak $-\frac{\lambda}{2\cdot\alpha}\cdot V(0,\beta)$, ako je $V(0,\beta)\neq 0$). Zbog toga se, u nekim slučajevima, pri rešavanju graničnih problema za sisteme diferencijalnih jednačina sa promenljivim koeficijentima, može preći na jednostavnije granične probleme za sisteme diferencijalnih jednačina sa konstantnim koeficijentima.

Neka je $w(z)=\alpha+i\beta$ analitička funkcija promenljive $z=x+$ $+iy$ koja preslikava datu oblast G na oblast G^* u ravni $w=\alpha+i\beta$, i neka je $p=p(\alpha)$ pozitivna realna funkcija. Tada su spregnute promenljive koje odgovaraju karakteristici $p=p(\alpha)$ oblika (3.1.27).

Specijalno je, za $p=\alpha^k$ (k=const.>0):

$$\frac{d_p\widetilde{f}(z,\bar{z})}{dZ} = \frac{d_{1,1}\widetilde{f}(z,\bar{z})}{dw}, \quad \frac{d_{\bar{p}}\widetilde{f}(z,\bar{z})}{d\bar{Z}} = \frac{d_{-1,-1}\widetilde{f}(z,\bar{z})}{dw} \qquad (3.4.6)$$

odakle sledi da je:

$$\frac{d_p\widetilde{f}(z,\bar{z})}{dZ} = -\frac{1}{2\cdot\alpha}\cdot v(0,\beta) + P_w(-\frac{df(w,\bar{w})}{i\cdot dw}), \qquad (3.4.7)$$

i

$$\frac{d_{\bar{p}}\widetilde{f}(z,\bar{z})}{d\bar{Z}} = \frac{1}{2\cdot\alpha}\cdot v(0,\beta) + P_w(\frac{df(z,\bar{z})}{i\cdot dw}), \qquad (3.4.8)$$

gde je $f(z,\bar{z}) = u(x,y) + i\cdot v(x,y)$ integralna transformacija funkcije $f(z,\bar{z})$.

Specijalno, za $p = x^k$, je $w = \alpha + i\cdot\beta = i\cdot z$ i

$$Z = y - i\cdot\frac{x^{1-k}}{1-k}, \quad \widetilde{Z} = y - i\cdot\frac{x^{k+1}}{k+1}, \qquad (3.4.9)$$

$$\frac{d_p\widetilde{f}(z,\bar{z})}{dZ} = \frac{1}{2}\cdot(\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial y} - \frac{1}{x^k}\cdot\frac{\partial\widetilde{v}}{\partial x}) + \frac{i}{2}\cdot(\frac{\partial\widetilde{v}}{\partial y} + x^k\cdot\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial x}), \qquad (3.1.38')$$

$$\frac{d_{\bar{p}}\widetilde{f}(z,\bar{z})}{d\bar{Z}} = \frac{1}{2}\cdot(\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial y} + \frac{1}{x^k}\cdot\frac{\partial\widetilde{v}}{\partial x}) + \frac{i}{2}\cdot(\frac{\partial\widetilde{v}}{\partial y} - x^k\cdot\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial x}), \qquad (3.1.39')$$

pa je očito da rezultati paragrafa 3.2 i 3.3 predstavljaju samo jedan specijalan slučaj teorije p-analitičkih funkcija koji je moguće izgraditi.

O drugim integralnim reprezentacijama p-analitičkih funkcija

Neka je $\widetilde{f}(z,\bar{z}) = \widetilde{u}(x,y) + i\cdot\widetilde{v}(x,y)$ x^k-analitička funkcija promenljive $z=x+iy$, definisana osnovnom integralnom reprezentacijom (3.3.1) u oblasti G. Funkcija

$$f^*(z,\bar{z}) = u^*(x,y) + iv^*(x,y) = \widetilde{u}(x,y) + i\cdot\widetilde{v}(x,y)\cdot x^{-k} \qquad (3.4.10)$$

je kompleksna funkcija pridružena x^k-analitičkoj funkciji f.

Lako se proverava da važi sledeća jednakost

$$\frac{df^*}{d\bar{z}} = \frac{k}{2(z+\bar{z})}\,(f^* - \bar{f}^*), \qquad (3.4.11)$$

pa, pored relacije (3.1.4) imamo još jednu moguću vezu između p-analitičkih funkcija i uopštenih analitičkih funkcija Vekuinog tipa.

Iz (3.3.1) dobijamo da je:

$$f^*(z) = u^*(x,y) + iv^*f(x,y) =$$

$$= \frac{1}{2x^k}\int_{z_0}^{z} f(\zeta)(z-\zeta)^{-1+k/2}(z+\zeta)^{k/2}d\zeta + f(\zeta)(z-\zeta)^{k/2}(z+\zeta)^{-1+k/2}d\zeta$$

$$= \int_{z_0}^{z} u(\xi,\eta)dZ + i\cdot v(\xi,\eta)d\bar{Z}, \qquad (3.4.12)$$

gde su Z i $\bar{Z}$ spregnute promenljive zavisne od $\zeta=\xi+iy$:

$$dZ = (z-\zeta)^{-1+k/2}(z+\zeta)^{k/2}\frac{d\zeta}{2x^k} + (z-\zeta)^{k/2}(z+\zeta)^{-1+k/2}\frac{d\zeta}{2x^k}$$
$$d\bar{Z} = (z-\zeta)^{-1+k/2}(z+\zeta)^{k/2}\frac{d\zeta}{2x^k} - (z-\zeta)^{k/2}(z+\zeta)^{-1+k/2}\frac{d\zeta}{2x^k} \qquad (3.4.13)$$

koje odgovaraju karakteristici $p = x^k$,[158], [159].

Jednakost (3.4.12) naziva se <u>drugom kanonskom formom osnovne integralne reprezentacije</u> p-analitičkih funkcija od $z=x+iy$ sa karakteristikom $p=x^k$ (k=const.>0).

Slično kao i kod formule (3.3.1), formula (3.4.12) važi u sledeća tri slučaja:

a) ako rub oblasti G sadrži odsečak L na y-osi, $v|_L = 0$ i ako je za proizvoljnu tačku na L, ($f(z) \in M$);

b) ako je $z_0 = \infty$ i za $z \to \infty$: $f(z)=O(|z|^{-k-\varepsilon})$, ε=const.>0, ($f(z)\in M_1$);

c) ako je $z_0 \neq \infty$ i za $z\to z_0$: $f(z)=O(|z-z_0|^{-1+\varepsilon})$,($f(z)\in M_2$).

Pomenimo još da se u [160] mogu naći i neki specijalni slučajevi integralnih reprezentacija x^k-analitičkih funkcija unutar vertikalnih traka u kompleksnoj ravni, kao i unutar oblasti ograničenih parabolama.

Pored toga [160] sadrži i osnovnu integralnu reprezentaciju p-analitičkih funkcija sa karakteristikom $p=\exp(\alpha(x,y))$, gde je $\alpha(x,y)$ harmonijska funkcija. Pomenuta reprezentacija, zbog svoje složenosti, ima samo teorijski karakter.

U radu [168] autor je, rešivši približno jedan granični problem za p-analitičke funkcije, došao do još jedne reprezentacije p-analitičkih funkcija.

Ako u sistem parcijalnih jednačina, kojim se definišu p-analitičke funkcije uvedemo smenu $v_1 = v/p$,gde je $v_1 = v_1(x,y)$, dobijamo sistem parcijalnih diferencijalnih jednačina:

$$u'_x - (v_1)'_y = v_1\cdot p'_y/p, \quad u'_y + (v_1)'_x = -v_1\cdot p'_x/p. \qquad (3.4.14)$$

Sistem (3.4.14) se na uobičajen način svodi na areolarnu diferencijalnu jednačinu oblika

$$Df = -(f-\bar{f})\cdot\frac{Dp}{2p}, \qquad (3.4.15)$$

gde je $D = 2\cdot\partial/\partial\bar{z}$ operator Kolosova i $f(z,\bar{z}) = u(x,y)+iv_1(x,y)$. Na osnovu teoreme 2.1.1, opšte rešenje areolarne jednačine

$$Df = -f\cdot\frac{Dp}{2p} \tag{3.4.15'}$$

je oblika $f = Q(z)\cdot p^{-1/2}$, gde je $Q(z)$ proizvoljna analitička funkcija. Ako u jednačinu (3.4.14) uvedemo smenu $V = f\cdot p^{1/2}$, dobijamo jednačinu oblika:

$$DV = \frac{Dp}{2\sqrt{p\bar{p}}}\,V. \tag{3.4.16}$$

Specijalno, ako je $p = p(x,y)$ pozitivna realna funkcija, jednačina (3.4.17) se svodi na areolarnu jednačinu:

$$DV = \bar{V}\cdot\frac{Dp}{2p}\ . \tag{3.4.17}$$

Pretpostavimo da je koeficijent $Dp/2p$ jednačine (3.4.17) analitička funkcija. S obzirom na Cauchy-Riemannove uslove, to znači da realna pozitivna funkcija $p=p(x,y)$ zadovoljava sistem parcijalnih diferencijalnih jednačina

$$p''_{xx}\cdot p - (p'_x)^2 = p''_{yy}\cdot p - (p'_y)^2, \tag{3.4.18}$$

$$p\cdot p''_{xy} - p'_x\cdot p'_y = 0\ . \tag{3.4.19}$$

Iz (3.4.19) sledi da je:

$$(p'_y/p)'_x = (p''_{xy}\cdot p - p'_y\cdot p'_x)/p^2 = 0,$$

tj. $p'_y = p(x,y)\cdot g(y)$. Otuda je: $p(x,y) = \exp(\int g(y)dy + f(x)) = G(y)\cdot F(x)$, $(G(y) > 0,\ F(x) > 0)$. Kada tako dobijeno $p(x,y)$ uvrstimo u (3.4.18), dobijamo običnu diferencijalnu jednačinu:

$$[F'(x)/F(x)]' = [G'(y)/G(y)]'\ . \tag{3.4.20}$$

Kako leva strana jednačine (3.4.20) zavisi samo od x, a desna samo od y, sledi da je: $F(x) = k_1\cdot\exp(ax^2 + bx)$, $G(y) = k_2\cdot\exp(ay^2 + cy)$, $(k_1,k_2,a,b,c \in \mathbb{R},\ k_1>0,\ k_2>0)$. Otuda je opšte rešenje sistema jednačina (3.4.18) i (3.4.19), oblika:

$$p(x,y) = \mu\cdot\exp[a(x^2 + y^2) + bx + cy], \tag{3.4.21}$$

gde je $\mu,a,b,c \in \mathbb{R}$, $\mu>0$.

Ako ne zahtevamo da $p = p(x,y)$ bude realna funkcija, za naše potrebe je dovoljno da pretpostavimo da je koeficijent jednačine (3.4.16):

$$A(z) = \frac{Dp}{2\sqrt{p\bar{p}}} \qquad (3.4.22)$$

analitička funkcija.

Ako su pomenuti dodatni uslovi ispunjeni, u oba slučaja se sistem (3.1.2) svodi na areolarnu jednačinu

$$DV = A(z)\cdot\bar{V}, \qquad (3.4.23)$$

gde je $A(z)$ analitička funkcija.

Pretpostavimo da je $w_o(z)$ data analitička funkcija na ograničenoj prostopovezanoj oblasti T, takva da su koeficijenti njenog razvoja u Taylorov red, realni brojevi.

Mi tražimo rešenje $V = V(z,\bar{z})$ areolarne jednačine (3.4.23) takvo da je

$$\alpha_o V(z,\bar{z}) = w_o(z), \qquad (3.4.24)$$

gde je α_o operator opisan na strani 60.

Na osnovu teoreme 2.1.4, areolarna jednačina (3.4.23) sa početnim uslovom (3.4.24) je ekvivalentna areolarnoj integralnoj jednačini

$$V = w_o + \int_0^{\bar{z}} A\bar{V}. \qquad (3.4.25)$$

Pomoću formule (3.4.25) u stanju smo da konstruišemo rekurentni niz funkcija:

$$V_n = w_o + \int_0^{\bar{z}} A\bar{V}_{n-1}\ , \ n = 1, 2, \dots \ . \qquad (3.4.26)$$

Iz (3.4.26) dobijamo niz približnih rešenja jednačine (3.4.23) u obliku:

$$V_1 = w_o + \int_0^{\bar{z}} A\bar{w}_o = w_o + A\cdot\bar{\varphi}_1 W$$

$$V_2 = w_o + \int_0^{\bar{z}} A\bar{V}_1 = w_o + \int_0^{\bar{z}} A(\bar{w}_o + \bar{A}\cdot\varphi_1) =$$

$$= w_o + A\cdot\bar{\varphi}_1 + A\cdot\varphi_1\cdot\bar{\varphi}_2$$

....

$$V_n = w_o + \int_0^{\bar{z}} A\bar{V}_{n-1} = w_o + \sum_{k=1}^{n} \varphi_{k-1}\cdot\bar{\varphi}_k, \qquad (3.4.27)$$

gde je

$$\varphi_o(z) = 1\ ,\ \varphi_1 = (1/2)\int_0^{z} w_o(z)dz,$$

$$\varphi_2(z) = (1/2)\int_0^{z} A(z)\cdot\varphi_o(z)\,dz\ ,\ \dots\ ,$$

$$\varphi_n(z) = (1/2)\int_0^{z} A(z)\cdot\varphi_{n-2}(z)\,dz. \qquad (3.4.28)$$

S obzirom da su $A(z)$ i $w_o(z)$ analitičke funkcije u ograničenoj prostopovezanoj oblasti T, sledi da postoje pozitivni realni brojevi α, β i γ, takvi da je: $|w_o(z)|<\alpha$, $|A(z)|<\beta$, $|z|<\gamma$, $z\in T$, i :

$$|\varphi_1(z)| = (1/2)\left|\int_0^z w_o(z)\,dz\right| < |z|\alpha/2 < \alpha\cdot\gamma/2 ,$$

$$|\varphi_2(z)| = (1/2)\left|\int_0^z A(z)\cdot\varphi_o(z)\,dz\right| < |z|\beta/2 < \beta\cdot\gamma/2 ,$$

$$|\varphi_3(z)| = (1/2)\left|\int_0^z A(z)\cdot\varphi_1(z)\,dz\right| < \alpha\beta\gamma^2/2^2 ,$$

$$|\varphi_4(z)| = (1/2)\left|\int_0^z A(z)\cdot\varphi_2(z)\,dz\right| < (\beta\gamma/2)^2$$

....

$$|\varphi_{2k-1}(z)| < \alpha\beta^{k-1}(\gamma/2)^k , \quad |\varphi_{2k}(z)| < \beta^k(\gamma/2)^k ,$$

i

$$|\varphi_{k-1}\overline{\varphi}_k| < \alpha\beta^{k-1}(\gamma/2)^k , \quad k = 1, 2, \ldots . \tag{3.4.29}$$

Na osnovu (3.4.29) sledi da je:

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\varphi_{k-1}\overline{\varphi}_k\right| < \alpha\beta/2 + \alpha\beta(\gamma/2)^2 + \alpha\beta^2(\gamma/2)^3 + \ldots$$

$$\ldots + \alpha\beta^{n-1}(\gamma/2)^n = (\alpha\gamma/2)\cdot\frac{1-(\beta\gamma/2)^n}{1-\beta\gamma/2} , \tag{3.4.30}$$

što znači da je red

$$\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_{k-1}\overline{\varphi}_k = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\varphi_{k-1}\overline{\varphi}_k \tag{3.4.31}$$

apsolutno i uniformno konvergentan kada je ispunjen uslov

$$\beta\gamma/2 \leqslant q < 1, \tag{3.4.32}$$

što je uvek moguće postići za dovoljno malu ograničenu prostopovezanu oblast $T'\subset T$.

Iz (3.4.30) sledi da je niz (3.4.27) uniformno konvergentan i da je:

$$\lim_{n\to\infty} V_n(z,\bar{z}) = V(z,\bar{z}) = w_o + A\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_{k-1}\cdot\overline{\varphi}_k . \tag{3.4.33}$$

Funkcija $V(z,z)$, dobijena na opisani način je tačno rešenje jednačine (3.4.23), s obzirom da važi:

$$DV = 2A\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_{k-1}\cdot\overline{\varphi}'_k = A\overline{w}_o + A\overline{A}\sum_{k=2}^{\infty}\varphi_{k-1}\cdot\overline{\varphi}_{k-2} =$$

$$= A\overline{w}_o + A\overline{A}\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k\cdot\overline{\varphi}_{k-1} = A(\overline{w}_o + \overline{A}\sum_{k=1}^{\infty}\overline{\varphi}_{k-1}\cdot\varphi_k) = A\overline{V}. \tag{3.4.34}$$

Na osnovu konstrukcije, očigledno je da funkcija (3.4.33) zadovoljava i početni uslov (3.4.24).

Ocena gornje granice apsolutne greške n-te aproksimacije V_n date formulom (3.4.27), dobija se na sledeći način:

$$|R_n| = |V - V_n| = \left| A \sum_{k=n+1}^{\infty} \varphi_{k-1}\cdot\bar{\varphi}_k \right| <$$

$$< \beta\cdot\sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha\beta^{k-1}(\Upsilon/2)^k = \alpha(\beta\Upsilon/2)^{n+1}\cdot$$

$$\cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1-(\beta\Upsilon/2)^n}{1-\beta\Upsilon/2} = \frac{2\alpha}{2-\beta\Upsilon}\cdot(\beta\Upsilon/2)^{n+1}, \qquad (3.4.35)$$

kada je zadovoljen dodatni uslov (3.4.32).

Iz svega navedenog sledi da su funkcije

$$f_n(z,\bar{z}) = \frac{1}{\sqrt{p}}\left(w_0 + \frac{Dp}{2\sqrt{p\bar{p}}}\sum_{k=1}^{n}\varphi_{k-1}\cdot\bar{\varphi}_k\right), \quad n\in\mathbb{N}, \qquad (3.4.36)$$

približna rešenja jednačine (3.4.16), koja zadovoljavaju početni uslov (3.4.24), i da je funkcija

$$f(z,\bar{z}) = \frac{1}{\sqrt{p}}\left(w_0 + \frac{Dp}{2\sqrt{p\bar{p}}}\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_{k-1}\cdot\bar{\varphi}_k\right) \qquad (3.4.37)$$

reprezentacija p-analitičke funkcije definisane sistemom (3.1.2) i uslovom (3.4.22), kadgod red konvergira.

Zaključak

U monografiji [160] G.N.Položija nalaze se rešenja većeg broja graničnih problema za p-analitičke funkcije, medju kojima istaknuto mesto zauzimaju: problem o kompleksnom x-analitičkom potencijalu sistema kružnih i prstenastih diskova i nekoliko kombinovanih graničnih problema teorije osnosimetričnog potencijala za prostorne slojeve.

Veliki broj radova G.N.Položija i drugih autora posvećen je različitim primenama teorije p-analitičkih i (p,q)-analitičkih funkcija. U teoriji filtracije,torzionoj teoriji rotacionih tela, graničnim problemima u teoriji bezmomentnog naponskog stanja rotacionih ljuski, osnosimetričnoj teoriji elastičnosti za rotacione cilindre i paraboloide itd.

Od naših autora, ovom problematikom bavili su se J.D.Kečkić [100], M.Čanak [31] i drugi.

IV glava

Granični problemi za eliptičke parcijalne jednačine višeg reda

4.1. Klasifikacija linearnih parcijalnih jednačina i graničnih problema za eliptičke parcijalne diferencijalne jednačine drugog reda

Eliptičke linearne parcijalne diferencijalne jednačine drugog reda igraju značajnu ulogu u teorijskoj mehanici, fizici i mnogobrojnim primenama. Teorija graničnih problema za eliptičke linearne parcijalne diferencijalne jednačine drugog reda se neprekidno intenzivno razvija. Teško je, čak, i samo nabrojati tehnike rešavanja različitih graničnih problema ove vrste. Zbog toga ćemo se, u ovom poglavlju, ograničiti samo na najpoznatije klase graničnih problema i opisati metode njihovog rešavanja, koje su u neposrednoj vezi sa teorijom graničnih problema za analitičke funkcije.

Jednačina oblika

$$F(x,\dots,p_{i_1,\dots,i_n},\dots) = 0, \tag{4.1.1}$$

gde je F data realna funkcija tačaka $x=x(x_1,\dots,x_n)$ oblasti D euklidskog prostora E^n, $n>2$, i realnih promenljivih

$$p_{i_1,\dots,i_n} \equiv \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{k_1}\dots\partial x_n^{k_n}},$$

($u(x)$-nepoznata funkcija) sa nenegativnim celobrojnim indeksima $i_1,\dots,i_n$, $\sum_{j=1}^{n} i_j = k$, $k=0,\dots,m$, $m\geqslant 1$, takva da je najmanje jedan od izvoda

$$\frac{\partial F}{\partial p_{i_1\dots i_n}}, \quad \sum_{j=1}^{n} i_j = m$$

funkcije F, različit od nule, naziva se <u>parcijalnom diferencijalnom jednačinom m-tog reda</u>.

Funkcija $u(x)$, definisana u oblasti D, neprekidna zajedno sa svim svojim parcijalnim izvodima koji figurišu u jednačini

(4.1.1), koja zadovoljava jednačinu (4.1.1) naziva se <u>regularnim rešenjem</u> parcijalne diferencijalne jednačine (4.1.1).

Pored regularnih rešenja, značajnu ulogu imaju i rešenja jednačine (4.1.1) koja, u okolinama izolovanih tačaka ili na mnogostrukostima odredjenog oblika u oblasti D, nisu regularna. Takva rešenja nazivamo <u>singularnim</u> .

Ako je F linearna funkcija promenljivih $p_{i_1}, \ldots, {}_{i_n}$, jednačina (4.1.1) naziva se linearnom parcijalnom diferencijalnom jednačinom reda m. Specijalno, <u>linearna parcijalna jednačina drugog reda</u> ima oblik

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \cdot \partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} B_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + C \cdot u = f, \qquad (4.1.2)$$

gde su A_{ij}, B_j, C i f date realne funkcije tačke x, neprekidne u oblasti D. Ako je $f(x) \equiv 0$, jednačina (4.1.2) naziva se <u>homogenom</u> . Kvadratna forma

$$Q(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} \cdot \lambda_i \cdot \lambda_j, \qquad (4.1.3)$$

naziva se <u>karakterističnom formom</u> parcijalne jednačine (4.1.2). Kvadratna forma oblika (4.1.3) se, za svako $x \in D$, može, pomoću odgovarajuće nesingularne afine smene promenljivih $\lambda_i = \lambda_i(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, transformisati u kanonski oblik

$$Q = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \xi_i^2,$$

gde koeficijenti α_i, $i=1,2,\ldots,n$, uzimaju vrednosti iz skupa $\{-1, 0, 1\}$, pri čemu su, broj negativnih koeficijenata (<u>indeks inercije</u>), i broj koeficijenata jednakih nuli (<u>defekt forme</u>), afine invarijante. Kada su svi koeficijenti forme (4.1.3) $\alpha_i = 1$ ili $\alpha_i = -1$, tj. kada je karakteristična forma jednačine (4.1.2) pozitivno ili negativno definitna, u tački $x \in D$, kažemo da je jednačina (4.1.2) <u>eliptička</u> u $x \in D$. Ako je jedan od koeficijenata α_i negativan, a svi ostali koeficijenti pozitivni (ili obratno), jednačina (4.1.2) naziva se <u>hiperboličkom</u> u tački x. Kada je k, $1<k<n-1$, koeficijenata α_i pozitivno, a preostalih n-k negativno, jednačina (4.1.2) je <u>ultrahiperbolička</u> u tački x. Ukoliko je bar jedan od koeficijenata $\alpha_i = 0$, jednačina (4.1.2) je <u>parabolička</u> u x. Linearna parcijalna jednačina je u oblasti D eliptičkog, hiperboličkog, ultrahiperboličkog ili paraboličkog tipa, ako je takva u svakoj tački x oblasti D. Eliptičke jednačine oblika (4.1.2) nazivaju se <u>ravnomerno eliptičkim</u> , ako postoje realne konstante k_0 i k_1, istog znaka, takve da je

$$k_0 \cdot \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \leqslant Q(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \leqslant k_1 \cdot \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2$$

za svako $x \in D$. Ako u raznim delovima oblasti D jednačina (4.1.2) pripada različitim tipovima, kažemo da je to jednačina <u>kombinovanog tipa</u> u oblasti D.

Dokazuje se da je jednačina (4.1.2) eliptička u oblasti D ako se u svakoj tački te oblasti, zamenom promenljivih, može svesti na kanonski oblik

$$\Delta u + \sum_{i=1}^{n} a_i(x) \cdot \frac{\partial u}{\partial x_i} + a \cdot u = f(x) \tag{4.1.4}$$

sa Laplaceovim operatorom $\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n}$ u svom glavnom delu. Rešenja linearne eliptičke jednačine (4.1.4) imaju mnogo zajedničkog sa harmonijskim funkcijama.

Ako su koeficijenti $a_i(x)$ i $f(x)$ neprekidni zajedno sa svim svojim parcijalnim izvodima do k-tog reda, zaključno, i ako njihovi k-ti parcijalni izvodi zadovoljavaju Hölderov uslov sa indeksom α, $0<\alpha<1$, tada sva rešenja jednačine imaju parcijalne izvode zaključno do k+m-tog reda, koji zadovoljavaju Hölderov uslov sa indeksom α.

Uslov Höldera je bitan. Ako su koeficijenti $a_i(x)$ i $f(x)$ samo neprekidne funkcije, može se dogoditi da rešenja jednačine nemaju neprekidne izvode reda jednakog redu jednačine.

Granični problemi za parcijalne diferencijalne jednačine oblika (4.1.1), (4.1.3) ili (4.1.4) svode se na probleme određivanja rešenja, u nekoj oblasti D, koja na rubu ∂D oblasti D (ili na njegovom delu) zadovoljavaju zadate granične uslove.

Pored klasičnih problema kao što su: Dirichletov, Neumannov, kombinovani granični problem, Poincareov, Robertov itd, razmatra se, u teoriji eliptičkih jednačina, niz opštijih i složenijih graničnih i inverznih graničnih problema i njihova veza sa teorijom kompleksnih funkcija, teorijom potencijala, topologijom, algebrom, teorijom integralnih jednačina itd.

Mi ćemo se, u ovom radu, baviti jednom relativno uskom klasom eliptičkih jednačina i, pretežno, klasičnim graničnim problemima.

Ograničićemo se, na mogućnost primene rezultata klasične teorije graničnih problema za analitičke funkcije, u rešavanju graničnih problema za eliptičke parcijalne diferencijalne jednačine drugog reda sa dvema nezavisno promenljivim.

U tom slučaju jednačina (4.1.2) je oblika

$$A\cdot u_{xx} + 2B\cdot u_{xy} + C\cdot u_{yy} + a\cdot u_x + b\cdot u_y + c\cdot u = f(x,y), \quad (4.1.5)$$

gde su koeficijenti A,B,C,a,b,c, funkcije od x i y. Na osnovu svega navedenog, jednačine oblika (4.1.5) klasifikujemo pomoću funkcije

$$d = A\cdot C - B^2 \quad (4.1.6)$$

koju nazivamo <u>diskriminantom</u> jednačine (4.1.5). U zavisnosti od znaka funkcije d, linearna parcijalna jednačina (4.1.5) pripada, u datoj oblasti D, jednom od sledećih tipova: $d>0$ -eliptički tip, $d=0$ -parabolički tip, $d<0$ -hiperbolički tip. Ako funkcija d menja znak u oblasti D, jednačina (4.1.5) je kombinovanog tipa.

Obična diferencijalna jednačina

$$A(dy)^2 - 2B\cdot dx\cdot dy + C(dx)^2 = 0 \quad (4.1.7)$$

naziva se <u>karakterističnom jednačinom</u>, a njena rešenja <u>karakteristikama</u> jednačine (4.1.5).

Za jednačine (4.1.5) hiperboličkog tipa postoje dve familije karakteristika $\varphi(x,y)=C_1$ i $\psi(x,y)=C_2$. Ako u jednačinu (4.1.5) uvedemo smene promenljivih oblika $\xi=\varphi(x,y)$, $\eta=\psi(x,y)$, tj. ako elemente familije karakteristika uzmemo za nove krivolinijske koordinate, dobijamo <u>kanonski oblik jednačine hiperboličkog tipa</u> :

$$u_{\xi\eta} + \alpha(\xi,\eta)\cdot u_\xi + \beta(\xi,\eta)\cdot u_\eta + \gamma(\xi,\eta)\cdot u = f(\xi,\eta).$$

Jednačina (4.1.5) paraboličkog tipa ima jednu familiju karakteristika $\varphi(x,y) = C$. Smenom $\xi=\varphi(x,y)$, $\eta=y$, jednačina paraboličkog tipa prelazi u kanonski oblik

$$u_{\eta\eta} + \alpha(\xi,\eta)\cdot u_\xi + \beta(\xi,\eta)\cdot u_\eta + \gamma(\xi,\eta)\cdot u = f(\xi,\eta).$$

Najzad, jednačina (4.1.5) eliptičkog tipa dopušta dve familije kompleksnih karakteristika: $\varphi(x,y)+i\psi(x,y)=C_1$, $\varphi(x,y)-i\psi(x,y)=C_2$. Smenom promenljivih $\xi=\varphi(x,y)$, $\eta=\psi(x,y)$, dobijamo kanonski oblik jednačine eliptičkog tipa

$$L[u] \equiv \Delta u + \alpha(\xi,\eta)\cdot u_\xi + \beta(\xi,\eta)\cdot u_\eta + \gamma(\xi,\eta)\cdot u = f(\xi,\eta), \quad (4.1.4')$$

gde je $\Delta u = u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta}$ Laplaceov operator.

Najjednostavnija jednačina eliptičkog tipa $\Delta u = 0$ naziva se Laplaceovom jednačinom. Nehomogena Laplaceova jednačina $\Delta u = f(\xi,\eta)$ naziva se jednačinom Poisona.

Parcijalne jednačine imaju, u opštem slučaju, beskonačno mnogo rešenja. Da bismo odredili neko traženo partikularno rešenje takve jednačine, moramo zadati još neke dopunske uslove. Kao što je poznato, takvi dopunski uslovi, dele se na tzv. početne i granične uslove.

Problem odredjivanja rešenja $u=u(x,y)$ jednačine (4.1.5), koje zadovoljava početne uslove,

$$\begin{aligned} u(x,y_0) &= \varphi(x) \\ u'_y(x,y_0) &= \varphi_1(x) \end{aligned} \tag{4.1.6}$$

nazivamo Cauchyjevim problemom.

Problem Cauchyja dopušta jednostavnu geometrijsku interpretaciju: treba naći integralnu površ $u=u(x,y)$ jednačine (4.1.5), koja prolazi kroz datu prostornu krivu $\Gamma = \{y=y_0,\ u=\varphi(x)\}$, tako da tangente na nju u tačkama $M(x,y_0,u)$ u ravnima $x=\text{const.}$ sa y-osom zaklapaju ugao β definisan jednakošću $\text{tg}\ \beta = \varphi_1(x)$.

Cauchyjevi problemi obično se zadaju za parcijalne jednačine hiperboličkog i paraboličkog tipa.

Uopštenje Cauchyjevog problema predstavlja takozvani kombinovani problem. Pretpostavimo da je data konačna ili beskonačna oblast D ravni xOy koja ima deo po deo glatku granicu ∂D. Treba naći u oblasti D rešenje jednačine (4.1.5) koje na nekim delovima $\Gamma_1,\Gamma_2,\dots,\Gamma_n$ ruba ∂D zadovoljava uslove oblika

$$\begin{gathered} L_{ij}[u] = \varphi_{ij}(x,y) \\ (x,y)\in\Gamma_i,\quad (i=1,2,\dots,n;\ j=1,2,\dots,p_i), \end{gathered} \tag{4.1.9}$$

gde su L_{ij} diferencijalni operatori po promenljivim x i y najviše prvog reda, a $\varphi_{ij}(x,y)$ date funkcije.

Kombinovani problem (4.1.5), (4.1.9) je korektno postavljen u oblasti D, ako proizvoljnom broju $\varepsilon>0$ odgovara neki broj $\eta=\eta(\varepsilon)>0$ takav da promeni vrednosti funkcije $\varphi_{ij}(x,y)$ koja je po apsolutnoj vrednosti manja od η, odgovara promena vrednosti rešenja $u=u(x,y)$ koja je na celoj oblasti D manja po apsolutnoj vrednosti od ε, tj. ako rešenje problema neprekidno zavisi od početnih uslova. U protivnom slučaju je problem nekorektno postavljen.

Cauchyjevi problemi se obično ne zadaju za jednačine eliptičkog tipa. Razlog tome je činjenica da je, po pravilu, Cauchyjev problem za jednačine eliptičkog tipa nekorektno postavljen, tj. zanemarivo malim promenama početnih uslova mogu da odgovaraju velike promene rešenja.

Primer takvog Cauchyjevog problema dao je prvi Hadamard. Pretpostavimo da treba naći, u gornjoj poluravni, rešenje Laplaceove jednačine, $\Delta u = 0$ koje zadovoljava Cauchyjeve uslove

$$u(x,0) = 0 \ , \ u_y'(x,0) = (\cos nx)/n,$$

gde je $n \in \mathbb{N}$.

Lako se dokazuje da je rešenje tog problema funkcija: $u(x,y) = (1/n^2)\cdot\cos nx\cdot \mathrm{sh}\, ny$. Za dovoljno veliko n je $|u(x,0)|<\eta$ i $|u_y'(x,y)|<\eta$ gde je η proizvoljno mali unapred zadati pozitivan broj, ali je rešenje problema neograničeno, za svako $\eta>0$ kada $n \to \infty$.

Ispitivanja stacionarnih procesa različite fizičke prirode često se svode na parcijalne jednačine eliptičkog tipa. Pritom se obično postavljaju granični uslovi jer Cauchyjev problem, kao što smo videli, za jednačine eliptičkog tipa može da bude nekorektan. Najčešće se, u klasičnoj matematičkoj fizici, pojavljuju sledeća tri tipa graničnih uslova.

<u>Dirichletov granični problem</u> Na rubu ∂D oblasti D data je neprekidna funkcija $\varphi = \varphi(x,y)$.

Treba naći rešenje $u = u(x,y)$ jednačine (4.1.4') unutar oblasti D, koje zadovoljava granični uslov

$$u(x,y) = \varphi(x,y), \quad (x,y)\in\partial D. \,||$$

<u>Neumannov granični problem</u> Na rubu ∂D oblast D data je neprekidna funkcija $\varphi_1(x,y)$. Treba naći rešenje $u = u(x,y)$ jednačine (4.1.4') unutar oblasti D, koje zadovoljava granični uslov

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial n} = \varphi_1(x,y), \quad (x,y)\in\partial D,$$

gde je $\partial u/\partial n$ izvod funkcije $u(x,y)$ u pravcu spoljne normale.||

<u>Kombinovani granični problem</u> Na rubu ∂D oblasti D data je neprekidna funkcija $\psi(x,y)$. Treba naći rešenje $u = u(x,y)$ jednačine (4.1.4'), unutar oblasti D, koje zadovoljava uslov

$$\alpha_0 u(x,y) + \alpha_1 \cdot \frac{\partial u(x,y)}{\partial n} = \psi(x,y), \quad (x,y) \in \partial D$$

gde je $|\alpha_0| + |\alpha_1| \neq 0$.||

Kombinovani granični problem je najopštiji. Za $\alpha_0=1$ i $\alpha_1=0$ dobijamo prvi, a za $\alpha_0=0$ i $\alpha_1=1$ - drugi granični problem.

Standardni primer, u matematičkoj fizici, predstavlja problem raspodele toplote u homogenom telu. Pretpostavimo da je Ω homogeno telo ograničeno glatkom površi σ. Temperatura u različitim tačkama tela Ω opisana je diferencijalnom jednačinom

$$u_t = a^2 \cdot (u''_{xx} + u''_{yy} + u''_{zz}). \qquad (4.1.10)$$

Ako temperatura ne zavisi od vremena već samo od koordinata tačke $M(x,y,z)$ tela Ω, jednačina toplote je oblika

$$\Delta u = \varphi, \qquad (4.1.11)$$

gde je Δ Laplaceov operator.

Da bismo mogli jednoznačno da odredimo temperaturu u svakoj tački $M \in \Omega$ moramo znati temperaturu na rubu σ:

$$u|_\sigma = \psi(M). \qquad (4.1.12)$$

Granični problem (4.1.11), (4.1.12) je, očito, Dirichletov granični problem.

Ako temperatura na σ nije poznata, ali je poznat toplotni fluks u svakoj tački površi σ koji je proporcionalan izvodu nepoznate funkcije $u(x,y,z)$ u pravcu spoljne normale na σ:

$$u_n|_\sigma = \psi^*(M), \qquad (4.1.12')$$

problem odredjivanja temperature u svakoj tački $M \in \Omega$ svodi se na Neumannov granični problem.

Analitičke metode rešavanja klasičnih graničnih problema za eliptičke jednačine drugog reda detaljno su opisane u literaturi (videti,na primer:[15],[16],[71],[190],[207],[208]).

Reč je, pretežno, o primeni tehnika realne analize (Fourierovi redovi, Poisonov integral, itd) i teorije običnih diferencijalnih jednačina.

U ovom radu ograničićemo se na tri teme vezane za ovu problematiku: vezu koja postoji izmedju parcijalnih jednačina drugog reda i Vekuinog sistema parcijalnih jednačina (2.2.2), primenama Fourierovih transformacija (1.2.1) u teoriji graničnih problema za eliptičke jednačine i na diskretnim Fourierovim transformacijama.

Cilj nam je, pre svega, da ukažemo na isprepletanost teorije graničnih problema za parcijalne jednačine drugog reda i graničnih problema za analitičke ili uopštene analitičke funkcije.

4.2. Vekuin sistem eliptičkih jednačina i parcijalne diferencijalne jednačine drugog reda

Videli smo u 2.1 da je, za $U \in C^2$, kompleksni oblik Laplaceovog operatora u ravni

$$\Delta U \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 4\,\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \bar{z}}\,, \tag{4.2.1}$$

pri čemu desna strana jednakosti ne zavisi od poretka diferenciranja.

Neka je $C_\Delta(T)$ klasa funkcija U, takva da U i $\partial U/\partial z$ pripadaju klasi $C_{\bar{z}}(T)$, (vidi 2.2), gde je T neka oblast na rubu L u kompleksnoj ravni. Vekua je u [216] dokazao da se Laplaceov operator ΔU može definisati pomoću jednakosti (4.2.1) na klasi C_Δ koja je šira od C^2.

Klasa funkcija C_Δ značajna je, izmedju ostalog, i zbog toga što u toj klasi uvek postoji rešenje jednačine eliptičkog tipa

$$\Delta w + p\cdot w_x' + q\cdot w_y' + r\cdot w = f, \tag{4.2.2}$$

gde su p,q,r,f neprekidne funkcije u $T+L$. Takvo rešenje možemo predstaviti formulom:

$$w = w_0 + (1/2\pi)\cdot \iint_T \rho(\xi,\eta)\cdot \ln|t-z|\cdot d\xi d\eta\,, \tag{4.2.3}$$

gde su ρ, w_0 date harmonijske funkcije. Ako (4.2.3) uvrstimo u (4.2.2), dobijamo sledeću integralnu jednačinu Fredholmovog tipa po nepoznatoj ρ:

$$\rho(x,y) + (1/2\pi)\cdot \iint_T K(x,y;\xi,\eta)\cdot \rho(\xi,\eta) d\xi d\eta = f_0(x,y)\,, \tag{4.2.4}$$

gde je

$$K(x,y;\xi,\eta) = p\cdot\frac{\partial \ln|t-z|}{\partial x} + q\cdot\frac{\partial \ln|t-z|}{\partial y} + r\cdot \ln|t-z|\,, \tag{4.2.5}$$

$$f_o(x,y) = f - p\cdot\frac{\partial w_o}{\partial x} - q\cdot\frac{\partial w_o}{\partial y} - r\cdot w_o\ . \tag{4.2.6}$$

Kada neprekidno rešenje jednačine (4.2.4) uvrstimo u (4.2.3), dobijamo rešenje eliptičke jednačine (4.2.2) koje pripada klasi funkcija C_A.

Nije teško dokazati da jednačina (4.2.2) nema uvek rešenja u C^2. Neprekidne funkcije p,q,r,f uvek je moguće izabrati tako da funkcija $w\in C_A$, opisana formulom (4.2.3), ne pripada C^2.

U [216] Vekua je dokazao da se eliptički sistem parcijalnih jednačina (2.2.2) može svesti ne samo na normalnu areolarnu jednačinu oblika (2.2.11), već i na parcijalnu diferencijalnu jednačinu drugog reda eliptičkog tipa sa kompleksnim koeficijentima.

Pretpostavimo da su koeficijenti C(z) i H(z) jednačine (2.2.11), funkcije klase $C_*(T)$ i neka je U regularno u T rešenje jednačine (2.2.11). Očito je $\bar{U}$, $\partial U/\partial\bar{z} = C\cdot\bar{U}+H\in C_*(T)$. Otuda je $U\in C_A(T)$. Ako primenimo operator $\partial/\partial z$ na obe strane jednačine (2.2.11), dobijamo parcijalnu jednačinu eliptičkog tipa drugog reda:

$$\Delta U - \frac{4}{C}\cdot\frac{\partial C}{\partial z}\cdot\frac{\partial U}{\partial\bar{z}} - 4C\cdot\bar{C}U = H_o\ , \tag{4.2.7}$$

gde je

$$H_o = 4\cdot C\cdot\bar{H} + 4\cdot C\cdot\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{H}{C}\right) \tag{4.2.8}$$

$$\Delta U = 4\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial z\partial\bar{z}}\ . \tag{4.2.9}$$

Ako je U neko rešenje (iz klase C_A) jednačine (4.2.7), funkcija

$$V = \frac{1}{2}\cdot\left(U + \frac{1}{\bar{C}}\cdot\frac{\partial\bar{U}}{\partial z} - \frac{H_o}{C}\right)\ , \tag{4.2.10}$$

je rešenje polazne jednačine (2.2.11).

Dokazano je, takodje, da se opšte rešenje jednačine (4.2.7), za $H_o \equiv 0$, može dobiti u obliku

$$U = V_1 + i\cdot V_2, \tag{4.2.11}$$

gde su V_1 i V_2 proizvoljna linearno nezavisna rešenja jednačine

$$\partial V/\partial\bar{z} = C(z)\cdot\bar{V}. \tag{4.2.12}$$

Na taj način se jednačina drugog reda (4.2.7), za $H_o \equiv 0$, može svesti na jednačinu prvog reda (4.2.12) i obratno. Ova činjenica može biti od velike koristi pri rešavanju graničnih problema za jednačine tipa (4.2.7) i (4.2.12), jer možemo da izaberemo onu od njih koju je jednostavnije rešiti.

Sistem (2.2.1) možemo svesti i na realnu parcijalnu jednačinu drugog reda, što je neki put veoma korisno, s obzirom da jednačine oblika (4.2.7), u opštem slučaju, nemaju realna rešenja.

Neka je T prostopovezana oblast i $U_*=u_*+iv_*$ neko partikularno rešenje jednačine

$$\partial U/\partial \bar{z} + \bar{C}\cdot\bar{U} = 0 \tag{4.2.13}$$

različito od nule na T+L. (Dokazano je u [216] da takvo rešenje uvek postoji.) Neka je U=u+iv proizvoljno regularno rešenje jednačine (4.2.12), i

$$w=(1/2i)\cdot\int_{z_0}^{z}(U_*Udt-\bar{U}_*\bar{U}d\bar{t})= \int_{z_0}^{z}(uv_*+vu_*)d\xi+(uv_*-vu_*)d\eta, \tag{4.2.14}$$

realna funkcija tačke z. Krivolinijski integral u (4.2.14) ne zavisi od puta integracije koji spaja fiksnu tačku $z_0\in T$ sa promenljivom tačkom $z\in T$.

Proizvoljnom, regularnom u T, rešenju U jednačine (4.2.12), formula (4.2.14) dodeljuje realno rešenje iz klase C_A jednačine drugog reda

$$\Delta w + p\cdot w_\xi' + q\cdot w_\eta' = 0, \tag{4.2.15}$$

gde je $p + iq = (4\bar{C}\cdot\bar{U}_*)/U_* = (-4/U_*)\cdot(\partial u_*/\partial\bar{z})$, i obrnuto, ako je w realno rešenje jednačine (4.2.15), pomoću formule

$$U = \frac{2i}{U_*}\cdot\frac{\partial w}{\partial z} \tag{4.2.16}$$

dobijamo rešenje jednačine (4.2.12).

Drugim rečima, rešavanje sistema eliptičkih parcijalnih jednačina (2.2.2) svodi se na rešavanje jedne jednačine drugog reda (4.2.15) sa realnim koeficijentima. Pri prelazu sa sistema (2.2.2) na jednačinu (4.2.15), neophodno je znati samo jedno partikularno rešenje U_* jednačine (4.2.13) različito od nule na celoj oblasti T.

Postavlja se pitanje da li se opšti oblik parcijalne diferencijalne jednačine drugog reda eliptičkog tipa (4.2.2) može svesti na ekvivalentan eliptički sistem parcijalnih jednačina prvog reda oblika (2.2.2)? Koliko je autoru poznato, odgovor na ovo pitanje još nije poznat.

Pomenuti rezultati omogućuju da se razni granični problemi za eliptičke sisteme Vekuinog tipa (2.2.2) rešavaju u teoriji eliptičkih parcijalnih jednačina drugog reda sa realnim koeficijentima i obratno.

Uzmimo, na primer, Hilbertov granični problem za sistem (2.2.2), tj. jednačinu (2.2.15) (na strani 79) detaljno opisan u 2.3.

Očito se taj problem može svesti na neki granični problem za jednačinu oblika (4.2.15). Kada je w realna funkcija, Hilbertov granični uslov (2.3.1) za jednačinu (2.2.15), prelazi u sledeći granični uslov za jednačinu oblika (4.2.15):

$$\operatorname{Re}[g(t)U] = \operatorname{Re}[\frac{2g(t)}{U_*}\cdot\frac{\partial w}{\partial z}] = \alpha_o \frac{\partial w}{\partial x} + \beta_o \frac{\partial w}{\partial y} = \Upsilon, \; t\in L, \qquad (4.2.17)$$

gde je $g=\alpha-i\cdot\beta$, U_* proizvoljno partikularno rešenje jednačine (4.2.13) takvo da je $U_* \neq 0$ na $T+L$, $\alpha_o=\operatorname{Re}[ig/U_*]$, $\beta_o=\operatorname{Re}[g/U_*]$.

Na taj način Hilbertov granični problem (2.2.15), (2.3.1) postaje granični problem (4.2.15), (4.2.17).

Kada nadjemo rešenje $w(x,y)$, u klasi C_α, jednačine (4.2.15), koje zadovoljava uslov (4.2.17), pomoću formule (4.2.16), dobijamo i rešenje Hilbertovog problema (2.2.15) i (2.3.1) i obratno, ako je U rešenje Hilbertovog problema (2.2.15) i (2.3.1), krivolinijski integral (4.2.14) daje nam rešenje problema (4.2.17) za jednačinu (4.2.15).

Napomenimo da se navedeni rezultati odnose na slučaj kada je T prostopovezana oblast. U slučaju višestruko povezane oblasti, funkcija $w(x,y)$ data formulom (4.2.14) može da bude višeznačna, što bitno komplikuje rešavanje problema.

S obzirom da je $g(t)\neq 0$ i $U_*\neq 0$, sledi da je $\alpha_o^2 + \beta_o^2 \neq 0$ na L. Možemo u svakoj tački $t\in L$ posmatrati pravac π definisan sa

$$\cos(\pi,x) = \frac{\alpha_o(t)}{\sqrt{\alpha_o^2+\beta_o^2}}, \quad \cos(\pi,y) = \frac{\beta_o(t)}{\sqrt{\alpha_o^2+\beta_o^2}}. \qquad (4.2.18)$$

Tada uslov (4.2.17) prelazi u oblik

$$\frac{dw}{d\pi} = \Upsilon_o(t), \quad \left(\Upsilon_o(t) = \frac{\Upsilon}{\sqrt{\alpha_o^2+\beta_o^2}} \right), \qquad (4.2.19)$$

tj. u svakoj tački $t\in L$ dat je izvod po pravcu π rešenja jednačine (4.2.15). Zbog toga se problem (4.2.17) u literaturi naziva <u>problemom o "kosom" izvodu</u> za jednačinu (4.2.15).

Vekua se u [216] bavio i opštijim graničnim problemima za jednačine oblika (4.2.15) sa analitičkim koeficijentima.

Iz svega navedenog sledi da metodama kompleksne analize možemo da objedinimo mnoge različite klase graničnih problema u jedinstvenu teoriju.

4.3. Primena Fourierovih transformacija u teoriji graničnih problema za parcijalne jednačine višeg reda

U poglavlju 2.5 naveden je jedan primer rešavanja graničnih problema za eliptički sistem parcijalnih jednačina prvog reda pomoću Fourierovih transformacija oblika opisanog u 1.2.

Monografija Gahova i Čerskog [71] posvećena je primenama Fourierovih transformacija u rešavanju integralnih jednačina i graničnih problema za parcijalne jednačine. Autori rešavaju, izmedju ostalog, i niz problema matematičke fizike svodjenjem na Riemannove ili Carlemanove probleme za analitičke funkcije.

Navešćemo ovde osnovne tehnike rešavanja graničnih problema za parcijalne jednačine višeg reda primenom Fourierovih transformacija iz [71] i rešiti tim tehnikama dva problema za eliptičke parcijalne jednačine drugog reda sa konstantnim koeficijentima.

Klasa problema koji se svode na Riemannov granični problem

Pretpostavimo da je data oblast D ravni xOy ograničena sa konačno mnogo pravih $y = C$ i polupravih $y = C$, $x<0$ ili $x>0$, gde realna konstanta C uzima vrednost iz skupa $\{y_1,\dots,y_n\}$, gde je $y_i<y_{i+1}$, $i=1,\dots,n-1$.

Neka je data linearna diferencijalna jednačina sa koeficijentima koji ne zavise od promenljive x:

$$\sum_{p=0}^{A}\sum_{q=0}^{B} a_{pq}(y)\cdot\frac{\partial^{p+q}u(x,y)}{\partial x^p\partial y^q} = g(x,y), \tag{4.3.1}$$

gde su A i B celi pozitivni brojevi, $a_{pq}(y)$ i $g(x,y)$ date funkcije i $u(x,y)$ tražena funkcija.

Jednačina (4.3.1) može da bude bilo kog tipa ili kombinovana, što znači da se ovi rezultati ne odnose samo na eliptičke parcijalne jednačine. Umesto jedne jednačine možemo da posmatramo i sistem takvih jednačina.

Granični uslovi mogu biti oblika:

$$\sum_{p=0}^{P}\sum_{q=0}^{Q}\left[\alpha_{pqrm}\frac{\partial^{p+q}u(x,y_m+0)}{\partial x^p\partial y^q} + \beta_{pqrm}\frac{\partial^{p+q}u(x,y_m-0)}{\partial x^p\partial y^q}\right]=g_{rm}(x),\quad x>0$$

$$\sum_{p=0}^{P}\sum_{q=0}^{Q}\left[\gamma_{pqrs}\,\frac{\partial^{p+q}u(x,y_s+0)}{\partial x^p\partial y^q}+\varepsilon_{pqrs}\,\frac{\partial^{p+q}u(x,y_s-0)}{\partial x^p\partial y^q}\right]=g_{rs}(x),\quad x<0,$$

$$r=1,\dots,m_s;\ s=1,\dots,n, \tag{4.3.2}$$

gde su sve veličine, izuzev parcijalnih izvoda funkcije $u(x,y)$, zadate. Uslovima (4.3.2) mogu se pridodati uslovi ograničenosti rešenja kada $y\to\infty$ ili $y\to-\infty$, uslovi ograničenosti na nekoj pravoj y_s, itd.

Problemi opisane klase svode se na Riemannove probleme na sledeći način.

Kada primenimo Fourierovu transformaciju (1.2.1) po promenljivoj x na jednačinu (4.3.1), na osnovu osobine (1.2.13), dobijamo običnu diferencijalnu jednačinu

$$\sum_{p=0}^{A}\sum_{q=0}^{B} a_{pq}(y)\cdot(-ix)^p\,\frac{d^q}{dy^q}\,U(x,y)=G(x,y),\quad -\infty<x<\infty \tag{4.3.3}$$

u kojoj promenljiva x igra ulogu parametra.

Opšte rešenje jednačine (4.3.3) se, zatim, posebno odredjuje na svakoj komponenti oblasti D:

$$U(x,y)=\sum_{k=1}^{m} U_{ks}(x,y)\cdot C_{ks}+U_s^*(x,y)$$
$$y_s<y<y_{s+1},\ y_{n+1}=\infty,\ y_0=-\infty,\ s=0,1,2,\dots,n, \tag{4.3.4}$$

gde su $U_s^*(x,y)$ poznate funkcije (partikularna rešenja nehomogene jednačine (4.3.3)), $U_{ks}(x,y)$ partikularna linearno nezavisna rešenja odgovarajuće homogene diferencijalne jednačine, a $C_{ks}(x)$ nepoznate funkcije parametra x.

Ukoliko su zadati i uslovi ograničenosti rešenja jednačine (4.3.1), neke od funkcija $C_{ks}(x)$ će morati da se izjednače sa nulom. Ukupan broj nepoznatih funkcija $C_{ks}(x)$, u slučaju da je granični problem korektno postavljen, mora da bude jednak broju $m_1+\dots+m_n$, gde je m_s broj graničnih uslova (4.3.2) na pravoj $y=y_s$.

U sledećem koraku dodefinišemo, na celoj x osi, uslove (4.3.2) uvodjenjem novih nepoznatih funkcija $f_{rs+}(x)$ i $f_{rs-}(x)$ takvih da je:

$$f_{rs+}(x)=\begin{cases}\text{nepoznata}, & x>0\\ 0, & x<0,\end{cases} \tag{4.3.5}$$

$$f_{rs-}(x)=\begin{cases}0, & x>0\\ \text{nepoznata}, & x<0.\end{cases} \tag{4.3.6}$$

Uslovi (4.3.2) prelaze u oblik:

$$\sum_{p=0}^{P}\sum_{q=0}^{Q}\Big[\,\alpha_{pqrs}\frac{\partial^{p+q}u(x,y_s+0)}{\partial x^p\partial y^q}+\beta_{pqrs}\frac{\partial^{p+q}u(x,y_s-0)}{\partial x^p\partial y^q}\,\Big]=$$

$$=g_{rs+}(x)+f_{rs-}(x) \tag{4.3.7}$$

$$\sum_{p=0}^{P}\sum_{q=0}^{Q}\Big[\,\gamma_{pqrs}\frac{\partial^{p+q}u(x,y_s+0)}{\partial x^p\partial y^q}+\delta_{pqrs}\frac{\partial^{p+q}u(x,y_s-0)}{\partial x^p\partial y^q}\,\Big]=$$

$$=g_{rs-}(x)+f_{rs+}(x)$$

$$-\infty<x<\infty\ ;\ r=1,\ldots,m;\ s=1,2,\ldots,n,$$

gde su

$$g_{rs+}(x)=\begin{cases} g_{rs}(x), & x>0\\ 0, & x<0\end{cases},\quad g_{rs-}(x)=\begin{cases} 0, & x>0\\ g_{rs}, & x<0\end{cases}$$

Primenom Fourierove transformacije na uslove (4.3.7) dobijamo:

$$\sum_{p=0}^{P}\sum_{q=0}^{Q}\Big[(-ix)^p\alpha_{pqrs}\frac{d^q}{dy^q}U(x,y_s+0)+(-ix)^p\beta_{pqrs}\frac{d^q}{dy^q}U(x,y_s-0)\Big]=$$

$$=G^{\pm}_{s}(x)+F^{\mp}_{s}(x), \tag{4.3.8}$$

$$\sum_{p=0}^{P}\sum_{q=0}^{Q}\Big[(-ix)^p\gamma_{pqrs}\frac{d^q}{dy^q}U(x,y_s+0)+(-ix)^p\delta_{pqrs}\frac{d^q}{dy^q}U(x,y_s-0)\Big]=$$

$$=G^{\mp}_{s}(x)+F^{\pm}_{s}(x),$$

$$-\infty<x<\infty\ ;\ r=1,\ldots,m_s\ ;\ s=1,\ldots,n.$$

U uslovima (4.3.8) su, pored izvoda $\dfrac{d^qU}{dy^q}$, nepoznate i funkcije $F^{\pm}_{s}(x)$ i $F^{\mp}_{s}(x)$. Na osnovu (4.3.5) i (4.3.6) te funkcije su granične vrednosti funkcija $F^{\pm}_{s}(z)$ i $F^{\mp}_{s}(z)$ analitičkih za Im $z>0$ i Im $z<0$, respektivno.

Sledeći korak je eliminacija svih nepoznatih funkcija, izuzev $F^{\pm}_{s}(x)$ i $F^{\mp}_{s}(x)$, iz uslova (4.3.8). U tom cilju, pomoću formula (4.3.4) izražavamo funkcije $\dfrac{d^q}{dy^q}U(x,y_s+0)$ i $\dfrac{d^q}{dy^q}U(x,y_s-0)$ preko nepoznatih funkcija $C_{ks}(x)$ i, zatim, dobijene relacije zamenjujemo u (4.3.8).

Ako, posle toga, iz $2(m_1+\cdots+m_n)$ jednačina (4.3.8) eliminišemo $(m_1+\cdots+m_n)$ nepoznatih $C_{ks}(x)$, dobijamo $(m_1+\cdots+m_n)$ linearnih uslova kojima je povezano $(m_1+\cdots+m_n)$ parova nepoznatih funkcija $F^{\pm}_{s}(x)$ i $F^{\mp}_{s}(x)$, tj. Riemannov problem.

Tako dobijeni Riemannov problem moguće je zapisati, na primer, na sledeći način:

$$F^{\pm}_{rs}(x) = \sum_{\rho=1}^{n} \sum_{\sigma=1}^{m_\sigma} A_{rs\rho\sigma}(x)\cdot F^{\mp}_{\rho\sigma}(x,y) - H_{rs}(x), \qquad (4.3.9)$$
$$-\infty<x<\infty\ ,\ r=1,\dots,m_s\ ,\ s=1,\dots,n,$$

gde su $A_{rs\rho\sigma}$ i H_{rs} poznate funkcije.

Kada pomoću poznatih metoda nadjemo rešenja ovog problema $F^{\pm}_{rs}(x)$ i $F^{\mp}_{rs}(x)$, rešenje $u(x,y)$ polaznog problema (4.3.1), (4.3.2) nalazimo pomoću formule $u(x,y) = (V^{-1}\,U(x,y))(x)$, gde je V^{-1} inverzna Fourierova transformacija (1.2.2), a $U(x,y)$ funkcija odredjena relacijama (4.3.4), gde je $m_1+\dots+m_n$ funkcija $C_{ks}(x)$ odredjeno pomoću $F^{\pm}_{rs}(x)$ i $F^{\mp}_{rs}(x)$, dok su preostale funkcije $C_{ks}(x)$ jednake nuli.

Na sličan način svode se na Riemannove probleme i višedimenzioni problemi koji posle primene Fourierove transformacije postaju dvodimenzioni problemi opisane klase, [71].

<u>Klasa problema koji se svode na Carlemanov granični problem</u>

Pretpostavimo da je na već opisanoj oblasti D data jednačina oblika (4.3.1) i da se traže rešenja te jednačine koja zadovoljavaju granične uslove oblika

$$\sum_{p=0}^{P}\sum_{q=0}^{Q}[\alpha_{pqrs}\frac{\partial^{p+q}u(x,y_s+0)}{\partial x^p\partial y^q} + \beta_{pqrs}\frac{\partial^{p+q}u(x,y_s-0)}{\partial x^p\partial y^q}] - q_{rs}(x)+$$
$$+e^{-x}\{\sum_{p=0}^{P}\sum_{q=0}^{Q}[\gamma_{pqrs}\frac{\partial^{p+q}u(x,y_s+0)}{\partial x^p\partial y^q} + \delta_{pqrs}\frac{\partial^{p+q}u(x,y_s-0)}{\partial x p\partial y^q}]g_{rs}(x)\}=0,$$
$$-\infty<x<\infty\ ,\ r=1,2,\dots,m_s\ ,\ s=1,2,\dots,n. \qquad (4.3.10)$$

Slično kao u prethodnom slučaju, pomoću Fourierove transformacije, iz jednačine (4.3.1) dobijamo običnu diferencijalnu jednačinu (4.3.3), čije je rešenje oblika (4.3.4) iz kojeg eliminišemo neke od nepoznatih funkcija $C_{rs}(x)$, ukoliko su zadati dodatni uslovi ograničenosti rešenja jednačine (4.3.1). Pored toga, neophodno je uvesti nove nepoznate funkcije

$$\varphi_{rs}(x)=\sum_{p=0}^{P}\sum_{q=0}^{Q}[\gamma_{pqrs}\frac{\partial^{p+q}u(x,y_s+0)}{\partial x^p\partial y^q} + \delta_{pqrs}\frac{\partial^{p+q}u(x,y_s-0)}{\partial x p\partial y^q}]-g_{rs}(x), \qquad (4.3.11)$$

takve da je $\varphi_{rs}(x) = O(e^{x})$, $x\to-\infty$. Tada su granični uslovi (4.3.10) oblika:

$$\sum_{p=0}^{P}\sum_{q=0}^{Q}[\alpha_{pqrs}\frac{\partial^{p+q}u(x,y_s+0)}{\partial x^p\partial y^q} + \beta_{pqrs}\frac{\partial^{p+q}u(x,y_s-0)}{\partial x^p\partial y^q}] - q_{rs}(x)+$$
$$+ e^{-x}\varphi_{rs}(x) = 0. \qquad (4.2.12)$$

Ako na (4.3.11) i (4.3.12) primenimo Fourierovu transformaciju i iz dobijenih uslova eliminišemo sve nepoznate funkcije izuzev φ_{rs}, dobijamo Carlemanov granični problem oblika

$$\varphi_{rs}(x) = \sum_{\sigma=1}^{n} \sum_{\rho=1}^{m_\sigma} A_{rs\rho\sigma}(x) \cdot \varphi_{\rho\sigma}(x+i) + H_{rs}(x), \quad -\infty<x<\infty, \quad r=1,\dots,m_s, \quad s=1,\dots,n, \tag{4.3.13}$$

gde su $A_{rs\rho\sigma}(x)$ i $H_{rs}(x)$ poznate funkcije.

Problem (4.3.13) se, u opštem slučaju, može rešiti samo približnim metodama, mada postoje široke klase partikularnih slučajeva koje dopuštaju rešavanje u kvadraturama.

Klase problema koji se svode na integralne jednačine sa konvolucijama

Već je pomenuto u drugoj glavi koliko je tesna veza teorije singularnih integralnih jednačina i teorije graničnih problema za analitičke funkcije. Metoda Fourierovih transformacija omogućuje da se i mnoge klase integralnih jednačina tipa konvolucije svedu na granične probleme za analitičke funkcije.

Razlikovaćemo nekoliko slučajeva takvih integralnih jednačina.

Integralna jednačina tipa konvolucije sa jednim jezgrom je jednačina oblika

$$f(t) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} k(t-s) \cdot f(s)ds = g(t), \quad -\infty<t<\infty, \tag{4.3.14}$$

gde su $k(t)$ i $g(t)$ date funkcije iz klase {0}. Rešenje $f(t)$ ove jednačine, takodje, tražimo u klasi {0}.

Ako na (4.3.14) primenimo Fourierovu transformaciju (1.2.1), na osnovu formule konvolucije (1.2.4), dobijamo običnu algebarsku jednačinu

$$F(x) + K(x) \cdot F(x) = G(x), \quad -\infty<x<\infty, \tag{4.3.15}$$

gde su $K(x)$ i $G(x)$ Fourierovi integrali poznatih funkcija, a $F(x)$ Fourierov integral tražene funkcije. Ako je ispunjen uslov normalnosti

$$1 + K(x) \neq 0, \quad -\infty<x<\infty, \tag{4.3.16}$$

jedinstveno rešenje jednačine (4.3.15) je oblika

$$F(x) = [1 + K(x)]^{-1} \cdot G(x), \tag{4.3.17}$$

odakle sledi da je tražena funkcija $f(t)$ data relacijom:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [1 + K(x)]^{-1} \cdot G(x) \cdot e^{-ixt} dx, \quad -\infty<t<\infty . \qquad (4.3.18)$$

Integralne jednačine oblika

$$f(t) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} k_1(t-s) f(s) ds + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} k_2(t-s) f(s) ds = g(t), -\infty<t<\infty, \quad (4.3.19)$$

u klasi $\{0\}$, nazivaju se integralnim jednačinama sa dva jezgra.

U tom slučaju predstavimo traženu funkciju $f(t)$ u obliku razlike jednostranih funkcija

$$f(t) = f_+(t) - f_-(t).$$

Tada Fourierovom transformacijom jednačina (4.3.19) prelazi u Riemannov granični problem:

$$F^+(x)[1 + K_1(x)] = F^-(x)[1 + K_2(x)] + G(x), \quad -\infty<x<\infty, \qquad (4.3.20)$$

gde su $K_1(x)$, $K_2(x)$ i $G(x)$ Fourierovi integrali poznatih funkcija, $F^+(x) \in \{\{0,\infty\}\}$ i $F^-(x) \in \{\{-\infty,0\}\}$. Ako pretpostavimo da je $1 + K_1(x) \neq 0$ i $1 + K_2(x) \neq 0$ na celoj realnoj osi, u skladu sa poznatim rezultatima iz teorije Riemannovog problema, dobijamo sledeću teoremu:

Teorema 4.3.1. Ako je indeks

$$\kappa = \operatorname{Ind} \frac{1 + K_2(x)}{1 + K_1(x)} \qquad (4.3.21)$$

problema (4.3.20) pozitivan, homogena jednačina (4.3.19) (za $G \equiv 0$) ima tačno κ linearno nezavisnih rešenja, a nehomogena jednačina je bezuslovno rešiva i njeno rešenje zavisi od κ proizvoljnih kompleksnih konstanti.

U slučaju da je $\kappa<0$, homogena jednačina (4.3.19) ima samo trivijalna rešenja. Nehomogena jednačina je za $\kappa=0$ bezuslovno rešiva i rešenje joj je jedinstveno. Kada je $\kappa<0$, nehomogena jednačina je rešiva ako i samo ako su ispunjeni uslovi:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(t)dt}{X^+(t)[1 + K_1(t)](t + i)^k} = 0 , \quad k = 1,2,\dots,-\kappa. \qquad (4.3.22)$$

Kadgod rešenje jednačine (4.3.19) postoji, može se dobiti pomoću formule

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [F^+(x) - F^-(x)] \cdot e^{-ixt} dx, \quad -\infty<t<\infty, \qquad (4.3.23)$$

gde su $F^{+}(x)$ i $F^{-}(x)$ rešenja Riemannovog problema (4.3.20).!!

U praksi se često pojavljuju problemi kod kojih tražena funkcija na dva podskupa, čija je unija jednaka posmatranoj oblasti D, zadovoljava dva različita uslova. Odgovarajuće jednačine čija rešenja moraju da zadovolje takve uslove nazivaju se parnim. Pod <u>parnim integralnim jednačinama</u> podrazumevaćemo jednačine:

$$\begin{aligned} &\varphi(t) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} k_1(t-s)\cdot\varphi(s)ds = g(t),\quad 0<t<\infty, \\ &\varphi(t) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} k_2(t-s)\cdot\varphi(s)ds = g(t),\quad -\infty<t<0, \end{aligned} \tag{4.3.24}$$

u klasi {0}. Da bismo, pomoću Fourierove transformacije, sistem (4.3.14) sveli na Riemannov problem, dopunimo jednačine (4.3.24) novim nepoznatim funkcijama tako da ne budu narušeni dati uslovi. Tako dobijamo jednačine:

$$\begin{aligned} &\varphi(t) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} k_1(t-s)\cdot\varphi(s)ds = g(t) + f_{-}(t) \\ &\varphi(t) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} k_2(t-s)\cdot\varphi(s)ds = g(t) + f_{+}(t), \\ &\qquad -\infty<t<\infty \end{aligned} \tag{4.3.25}$$

gde su $f_{+}(t)$ i $f_{-}(t)$ nepoznate jednostrane funkcije. Sistem (4.3.25) Fourierovom transformacijom i eliminacijom nepoznate funkcije $\Phi(x) = V(\varphi(t))$, prelazi u Riemannov granični uslov:

$$F^{+}(x) = \frac{1 + K_2(x)}{1 + K_1(x)}\cdot F^{-}(x) + \frac{K_2(x)-K_1(x)}{1 + K_1(x)}\cdot G(x),\quad -\infty<x<\infty. \tag{4.3.26}$$

S obzirom da je indeks problema (4.3.26) isti kao i u slučaju (4.3.21) teoreme 4.3.1, i u slučaju parne integralne jednačine može se formulisati teorema potpuno analogna teoremi 4.3.1. Uslovi rešivosti u slučaju da je $\kappa<0$ su oblika

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{K_2(x) - K_1(x)}{X^{+}(x)[1 + K_1(x)]}\cdot G(x)\cdot\frac{dx}{(x + i)^{k}} = 0,\quad k=1,2,\dots,-\kappa. \tag{4.3.27}$$

Rešenje jednačina (4.3.24), kadgod postoji, je oblika:

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(x) + F^{-}(x)}{1 + K_1(x)}\cdot e^{-ixt}\cdot dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(x) + F^{+}(x)}{1 + K_2(x)} \cdot e^{-ixt} \cdot dx, \qquad (4.3.28)$$

gde su $F^{-}(x)$ i $F^{+}(x)$ rešenja problema (4.3.26).

Integralna jednačina

$$f(t) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} k(t-s)f(s)ds = g(t), \quad 0<t<\infty, \qquad (4.3.29)$$

naziva se <u>jednostranom</u> ili <u>jednačinom Wiener-Hopfa</u>. Jednačina (4.3.29) se može na razne načine dopuniti do oblika (4.3.19) ili (4.3.24). Ako u jednačinu (4.3.19) uvrstimo:

$$k_1(t)=k(t), \; k_2(t)=0, \; g(t)=g_{+}(t)=\begin{cases} g(t), & t>0 \\ 0, & t<0, \end{cases} \qquad (4.3.30)$$

za $t>0$ rešenje jednačine (4.3.19) biće istovremeno i rešenje jednostrane integralne jednačine (4.3.29). Obratno, ako jednačinu (4.3.29) dodefinišemo na negativnoj poluosi uvodjenjem jednostranih funkcija $f_{-}(t)$ i $f_{+}(t)$ ($f_{+}(t)=f(t)$ za $t>0$), dobijamo jednačinu

$$f_{+}(t) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} k(t-s)f_{+}(s)ds = f_{-}(t) + g_{+}(t), \quad -\infty<t<\infty \qquad (4.3.31)$$

koja predstavlja specijalan slučaj jednačine (4.3.19). Fourierovom transformacijom prelazimo sa jednačine (4.3.31) na Riemannov granični problem:

$$F^{+}(x) = \frac{1}{1 + K(x)} \cdot F^{-}(x) + \frac{1}{1 + K(x)} \cdot G^{+}(x), \quad -\infty<x<\infty. \qquad (4.3.32)$$

Rešenje jednačine (4.3.29) dobijamo iz rešenja problema (4.3.32) pomoću formule

$$f(t) = f_{+}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F^{+}(x) \cdot e^{-ixt}dx, \quad t>0. \qquad (4.3.33)$$

Za jednačine (4.3.29), očito, važi teorema 4.3.1 za slučaj

$$\kappa = - \operatorname{Ind} [1 + k(x)]. \qquad (4.3.34)$$

Pored pomenutih slučajeva integralnih jednačina u [71] opisane su i metode rešavanja klase integralnih jednačina tipa konvolucije u opštem slučaju.

Pomenimo jednu klasu graničnih problema za parcijalne jednačine koja se Fourierovom transformacijom svodi na integralne jednačine tipa konvolucije koja se, dalje, svodi na

Riemannov granični problem na neki od pomenutih načina.

U oblasti D opisanoj na strani 145, jednačina (4.3.1), i granični uslovi

$$\sum_{p=0}^{P}\sum_{q=0}^{Q}[\alpha_{pqrs}\frac{\partial^{p+q}u(x,y_s+0)}{\partial^p x\partial^q y}+\beta_{pqrs}\frac{\partial^{p+q}u(x,y_s-0)}{\partial^p x\partial^q y}]=g_{rs}(x),$$
$$a\leqslant x\leqslant b, \tag{4.3.35}$$
$$\sum_{p=0}^{P}\sum_{q=0}^{Q}[\gamma_{pqrs}\frac{\partial^{p+q}u(x,y_s+0)}{\partial^p x\partial^q y}+\delta_{pqrs}\frac{\partial^{p+q}u(x,y_s-0)}{\partial^p x\partial^q y}]=g_{rs}(x),$$
$$x<a\ ,\ x>b\ ,$$

se, Fourierovim transformacijama, mogu svesti na sistem integralnih jednačina sa jezgrima koja zavise od razlike argumenata i sa granicama od a do b. Specijalno se može dogoditi da umesto sistema dobijemo samo jednu jednačinu oblika

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b k(t-s)f(s)ds=g(t),\quad a<t<b,$$

u kojoj jezgro ima neku vrstu singulariteta na dijagonali t=s.

4.4. Jedan doprinos rešavanju graničnih problema za eliptičke parcijalne jednačine drugog reda

Korišćenjem navedenih tehnika autor je u svom radu [164] rešio dva granična problema za eliptičke parcijalne jednačine drugog reda sa konstantnim koeficijentima.

Problem 4.4.1. Neka je

$$au_{xx}+bu_{yy}+cu_y+du_x+eu+p(x,y)=0 \tag{4.4.1}$$

eliptička parcijalna diferencijalna jednačina drugog reda sa realnim konstantnim koeficijentima, gde je $ab>0$ i $p(x,y)$ proizvoljna realna funkcija iz klase {O}.

Naći ono rešenje jednačine (4.4.1) koje zadovoljava sledeće uslove:

$$u(x,0)=g(x)\ ,\quad -\infty<x<\infty$$
$$u_y(x,0)=h_+(x),\ x>0\ ;\quad u_{yy}(x,0)=w_-(x),\ x<0\ , \tag{4.4.2}$$

gde su $h_+(x)\in\{0,\infty\}$ i $w_-(x)\in\{-\infty,0\}$ date jednoznačne funkcije.!!

Ako primenimo Fourierovu transformaciju na jednačinu (4.4.2.), na osnovu osobine

$$V\{\frac{\partial^{p+q}u(x,y)}{\partial x^p\partial y^q}\}=(-ix)^p\frac{d^q}{dy^q}U(x,y) \tag{4.4.3}$$

koja se izvodi iz (1.2.12) i (1.2.14), dobijamo običnu diferencijalnu jednačinu

$$b\cdot U_{yy}'' + d\cdot U_y' + (-ax^2 - icx + e)\cdot U = -P(x,y), \qquad (4.4.4)$$

gde je Vu = U, Vp = P i x igra ulogu parametra.

Opšte rešenje jednačine (4.4.4) je dato funkcijom

$$U(x,y)=\begin{cases} C_1(x)\exp[R_1(x)y]+C_2(x)\exp[R_2(x)y]+U_p(x,y), & R_1\neq R_2 \\ [C_1(x)+C_2(x)y]\ \exp[R_1(x)y]+U_p(x,y) & , R_1=R_2 \end{cases} \qquad (4.4.5)$$

gde su C_1 i C_2 proizvoljne funkcije, $U_p(x,y)$ neko partikularno rešenje jednačine (4.4.4) koje se dobija nekom od standardnih metoda, i

$$R_{1/2} = \frac{1}{2b}\,[\,-d \pm (d^2 - 4be + 4abx^2 + 4ibcx)^{1/2}]\ . \qquad (4.4.6)$$

U slučaju kada su svi koeficijenti jednačine (4.4.1) različiti od nule, ne postoji nijedna vrednost parametra x za koju je potkorena veličina u (4.4.6) jednaka nuli.

Ako je c = 0, funkcije (4.4.6) su oblika

$$R_{1/2} = \frac{1}{2b}\,[\,-d \pm (d^2 - 4be + 4abx^2)^{1/2}]\ . \qquad (4.4.7)$$

Ukoliko je $4be - d^2 < 0$, funkcije $r_1(x)$ i $r_2(x)$ su različite za svako x i opšte rešenje jednačine (4.4.4) je realno za svako x, s obzirom da je trivijalno ispunjen uslov $x^2 > (4bc-d^2)/4ab$.

Tada je opšte rešenje jednačine (4.4.4), jedinstveno:

$$U(x,y)=C_1(x)\exp[R_1(x)y]+C_2(x)\exp[R_2(x)y]+U_p(x,y),\quad x\in\mathbb{R} \qquad (4.4.5')$$

U slučaju kada je $4be - d^2 > 0$, sledi da je $r_1(x) = r_2(x)$ kadgod je $|x| = [(4be-d^2)/4ab]^{1/2}$. Tada je opšte rešenje jednačine (4.4.4) u kompleksnom obliku,

$$U(x,y)=\begin{cases} C_1(x)\exp[R_1(x)y]+C_2(x)\exp[R_2(x)y]+U_p(x,y), & |x|\neq \dfrac{4be-d^2}{4ab} \\ [C_1(x) + C_2(x)y]\cdot\exp(\dfrac{-d}{2b}\cdot y), & |x| = \dfrac{4be-d^2}{4ab} \end{cases}$$

Kada je c = 0 i $d^2 - 4be = 0$, funkcije (4.4.6) postaju

$$R_{1,2}(x) = (-d \pm 2|x|\sqrt{ab}\,)/2b \qquad (4.4.9)$$

i $R_1(x)=R_2(x)$ za x=0, pa je opšte rešenje (4.4.4) u kompleksnom obliku

$$U(x,y)=\begin{cases} C_1(x)\exp[R_1(x)y] + C_2(x)\exp[R_2(x)y] + U_p, & x\neq 0 \\ [C_1(x) + yC_2(x)]\cdot\exp(-\frac{d}{2b}\cdot y), & x=0, \end{cases}$$

gde su funkcije R_1 i R_2 date relacijama (4.4.9), tj. ima samo jednu tačku prekida.

Ako je $c=d=0$, sledi da je:

$$R_{1,2}(x) = \pm [(ax^2-e)/b]^{1/2}, \tag{4.4.10}$$

pa je $R_1(x)\neq R_2(x)$ za svako $x\in\mathbb{R}$ u slučaju da je $e<0$, i $R_1(x) = R_2(x)$ kada je $e>0$ i $|x| = (e/a)^{1/2}$. Otuda je opšte rešenje jednačine (4.4.4) oblika (4.4.5') za $c = d = 0$ i $e < 0$, i:

$$U(x,y)=\begin{cases} C_1(x)\exp[R_1(x)y]+C_2(x)\exp[R_2(x)y]+U_p(x,y), & |x|\neq(e/a)^{1/2} \\ [C_1(x)+C_2(x)y]\cdot\exp[R_1(x)y]+U_p(x,y), & |x|=(e/a)^{1/2} \end{cases} \tag{4.4.11}$$

gde su funkcije $R_{1,2}(x)$ date relacijama (4.4.10).

Najjednostavniji slučaj nastupa kada je $c=d=e=0$. Tada je

$$R_{1,2}(x) = \pm |x|\cdot(a/b)^{1/2}, \tag{4.4.12}$$

tako da je $R_1(x)=R_2(x)$ kada je $x=0$. Otuda je opšte rešenje jednačine (4.4.4) oblika

$$U(x,y)=\begin{cases} C_1(x)\cdot\exp[R_1(x)y]+C_2(x)\cdot\exp[R_2(x)y]+U_p(x,y), & x\neq 0 \\ C_1(x)+C_2(x)\cdot y + U_p(x,y), & x=0. \end{cases}$$

Iz svega navedenog sledi da opšte rešenje (4.4.5) jednačine (4.4.4) ima prekide u sledećim slučajevima:

$$\begin{aligned} &1.\ c = 0,\ 4be - d^2 > 0,\ |x| = [(4be - d^2)/4ab]^{1/2}; \\ &2.\ 4be - d^2 = 0,\ x = 0; \\ &3.\ c = d = 0,\ e>0,\ |x| = (e/a)^{1/2};\ \text{i} \\ &4.\ c = d = e = 0,\ x = 0. \end{aligned} \tag{4.4.13}$$

Uslovi (4.4.2) se, slično postupku opisanom u poglavlju 4.3, mogu dodefinisati na celoj realnoj osi

$$\begin{aligned} &u(x,0) = g(x), && -\infty<x<\infty \\ &u_y'(x,0) = h_+(x) + f_-(x), && -\infty<x<\infty \\ &u_{yy}''(x,0) = w_-(x) + f_+(x), && -\infty<x<\infty, \end{aligned} \tag{4.4.14}$$

gde je

$$f_+(x)=\begin{cases}\text{nepoznata}, & x>0\\ 0, & x<0\end{cases}, \quad f_-(x)=\begin{cases}0, & x>0\\ \text{nepoznata}, & x<0\end{cases}.$$

Primenom Fourierove transformacije na uslove (4.4.14), dobijamo sledeće relacije:

$$U(x,0) = G(x), \quad U_y'(x,0) = H^+(x) + F^-(x)$$
$$U_{yy}''(x,0) = \Omega^-(x) + F^+(x) . \tag{4.4.15}$$

Iz relacija (4.4.5) dobijamo da je:

$$\begin{aligned}U(x,0) &= C_1(x) + C_2(x) + U_p(x,0)\\ U_y'(x,0) &= C_1(x)R_1(x) + C_2(x)R_2(x) + (U_p)_y'(x,0)\\ U_{yy}''(x,0) &= C_1(x)R_1(x) + C_2(x)R_2(x) + (U_p)_{yy}''(x,0) ,\end{aligned} \tag{4.4.16}$$

kadgod je $R_1(x) \neq R_2(x)$.

Zamenom relacija (4.4.16) u (4.4.15) dobijamo sledeće jednačine:

$$\begin{aligned}&C_1(x) + C_2(x) = G(x) - U_p(x,0)\\ &C_1(x)R_1(x) + C_2(x)R_2(x) = H^+(x) + F^-(x) - (U_p)_y'(x,0)\\ &C_1(x)R_1^2(x) + C_2(x)R_2^2(x) = \Omega^-(x) + F^+(x) - (U_p)_{yy}''(x,0) .\end{aligned} \tag{4.4.17}$$

Eliminacijom funkcija $C_1(x)$ i $C_2(x)$ iz (4.4.17), dobijamo relaciju:

$$F^+(x) = -\frac{d}{b}\cdot F^-(x) + \xi(x) , \tag{4.4.18}$$

gde je:

$$\xi(x) = d/b[(U_p)_y'(x,0) - H^+(x)] - \frac{ax^2-e+icx}{b}[(U_p)_y'(x,0) - G(x)] + $$
$$+ (U_p)_{yy}''(x,0) - \Omega^-(x) \tag{4.4.19}$$

S obzirom da funkcija $\xi(x)$ ima najviše konačno mnogo tačaka prekida, formula (4.4.18) predstavlja Riemannov granični problem, sa prekidnim koeficijentima, za odredjivanje funkcija $F^-(z)$ i $F^+(z)$ analitičkih respektivno na donjoj i gornjoj poluravni.

Kada rešenja problema (4.4.18) uvrstimo u formule (4.4.17), dobijamo funkcije $C_1(x)$ i $C_2(x)$, pa samim tim i rešenje $U(x,y)$ jednačine (4.4.4) koje zadovoljava uslove (4.4.16). Najzad, pomoću inverzne Fourierove transformacije dobijamo rešenje problema (4.4.1) i (4.4.2):

$$u(x,y) = V^{-1}\{U(x,y)\} \qquad (4.4.20)$$

<u>Problem 4.4.2.</u> Naći rešenje jednačine

$$au_{xx} + bu_{yy} + cu_{y} + eu = 0, \quad a,b,c,e\in\mathbb{R} \qquad (4.4.1')$$

definisano i ograničeno u gornjoj poluravni, koje zadovoljava granični uslov

$$u(x,0) + \sigma(x)\cdot u_{y}(x,0) = h(x), \quad -\infty<x<\infty, \qquad (4.4.21)$$

gde je $h(x)$ data funkcija i

$$\sigma(x) = \frac{\alpha\cdot e^{-x} + \beta}{e^{-x} + \gamma}, \quad \alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R} \ .!! \qquad (4.4.22)$$

Fourierovom transformacijom iz (4.4.1') dobijamo običnu diferencijalnu jednačinu

$$bU_{yy} + (-ax^2 - icx + e)U = 0 , \qquad (4.4.3')$$

koja je netrivijalna ako je $b \neq 0$.

Ako u formulama (4.4.6), za $d=0$, razdvojimo realne i imaginarne delove dobijamo da je:

$$R_1(x) = \frac{\sqrt[4]{A(x)}}{b}\,[\cos B(x) + i\cdot\sin B(x)] ,$$
$$R_2(x) = -\frac{\sqrt[4]{A(x)}}{b}\,[\cos B(x) + i\cdot\sin B(x)] , \qquad (4.4.23)$$

gde je

$$A(x) = b^2[(ax^2- e^2) + c^2x^2], \quad B(x) = \frac{1}{2}\cdot\mathrm{arctg}\,\frac{cx}{ax^2- e}, \qquad (4.4.24)$$

odakle sledi da je $Re[R_1(x)] > 0$ i $Re[R_2(x)] < 0$ za $b < 0$, i $Re[R_1(x)] < 0$ i $Re[R_2(x)] > 0$ za $b>0$ i svaki $x \in \mathbb{R}$.

S obzirom na uslov ograničenosti rešenja jednačine (4.4.1') kada $y \to \infty$, sledi da je opšte rešenje,u kompleksnom obliku, jednačine (4.4.3') oblika

$$U(x,y) = C(x)\cdot\exp[R(x)y] , \quad -\infty<x<\infty, \qquad (4.4.25)$$

gde je $C(x)$ proizvoljna funkcija parametra x, a $R(x) = R_2(x)$ za $b>0$ i $R(x) = R_1(x)$ za $b<0$.

Ako (4.4.22) uvrstimo u (4.4.21), dobijamo relacije:

$$\gamma \cdot u(x,0) + \beta \cdot u'_y(x,0) - \gamma \cdot h(x) = e^{-x} \cdot \varphi(x) \tag{4.4.26}$$

$$\varphi(x) = u(x,0) + \alpha \cdot u'_y(x,0) - h(x), \tag{4.4.27}$$

i primenom Fourierove transformacije,na osnovu formule (1.2.13)

$$\gamma \cdot U(x,0) + \beta \cdot U'_y(x,0) - \gamma \cdot H(x) = -\Phi^{-}(x+i) \tag{4.4.28}$$

$$\Phi(x) = U(x,0) + \alpha \cdot U'_y(x,0) - H(x) . \tag{4.4.29}$$

Iz (4.4.25) dobijamo da je:

$$U(x,0) = C(x), \qquad U'_y(x,0) = C(x) \cdot R(x), \tag{4.4.30}$$

i iz (4.4.28) i (4.4.29):

$$C(x)[\gamma + R(x)] - \gamma \cdot H(x) = -\Phi(x+i), \qquad C(x)[1 + \alpha \cdot R(x)] - H(x) = \Phi(x). \tag{4.4.31}$$

Eliminacijom funkcije $C(x)$ iz (4.4.31) dobijamo relaciju

$$\Phi(x) = -F(x) \cdot \Phi(x+i) + \gamma \cdot F(x) H(x) - H(x), \quad -\infty<x<\infty, \tag{4.4.32}$$

gde je

$$F(x) = \frac{1 + \alpha \cdot R(x)}{\gamma + R(x)} . \tag{4.4.33}$$

i koja predstavlja granični uslov Carlemanovog problema.

Korišćenjem rezultata iz monografije [68] ovaj problem se može redukovati na Riemannov granični problem za analitičke funkcije sa prekidnim koeficijentima, i rešiti u kvadraturama. Pomoću rešenja $\Phi(x)$ ovog problema jednostavno dobijamo funkciju $C(x)$ i, zatim, inverznom Fourierovom transformacijom i rešenje graničnog problema (4.4.1'), (4.4.21).

4.5. Beskonačni sistemi algebarskih linearnih jednačina i jednačine sa periodičnim funkcijama

U različitim oblastima teorije i primena pojavljuju se sistemi linearnih algebarskih jednačina sa beskonačno mnogo nepoznatih

$$x_n + \sum_{1}^{\infty} a_{nk} x_k = c_n, \quad n=1,2,\ldots \qquad (4.5.1)$$

koje predstavljaju diskretne analogone integralnim jednačinama. Uz neka dodatna ograničenja za beskonačnu matricu $\|a_{nk}\|$ i vektor c, ovakvi sistemi su analogni sa Fredholmovim integralnim jednačinama opisanim u [71]. Neka od tih ograničenja su, na primer:

$$\sum_{n,k=1}^{\infty} |a_{nk}| < \infty \quad \text{– uslov normalnosti, ili}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| < 1, \quad n=1,2,\ldots \quad \text{– uslov regularnosti, itd.}$$

Mi ćemo se ograničiti samo na sisteme oblika (4.5.1) za koje je moguće uspostaviti punu analogiju sa teorijom integralnih jednačina sa konvolucijama.

Diskretne Fourierove i Laurentove transformacije

Diskretni analogon integralnoj Fourierovoj transformaciji (1.2.1) predstavlja razlaganje periodičnih funkcija u Fourierov red. Moguće su i generalizacije diskretnih transformacija putem razlaganja periodičnih funkcija po proizvoljnom ortonormiranom sistemu funkcija, neprekidnih ili diskretnih. Ovakve tehnike se danas uveliko koriste u računarskoj tehnici za brzu obradu signala (Fast Fourier-metoda).

Neka je dat neki beskonačan niz kompleksnih brojeva

$$a = \ldots, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \ldots \qquad (4.5.2)$$

Niz a nazivaćemo beskonačnodimenzionim vektorom .

Tada je odgovarajući formalni Fourierov red oblika

$$A(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot \exp(ik\theta). \qquad (4.5.3)$$

Obratno, elementi niza (4.5.2) – Fourierovi koeficijenti, se mogu izraziti preko funkcije $A(\theta)$ pomoću formule

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} A(\theta) \cdot \exp(-in\theta) d\theta, \quad n \in \mathbb{D}. \qquad (4.5.4)$$

Jednakost (4.5.3), kojom se beskonačnodimenzionom vektoru a (4.5.2) dodeljuje funkcija $A(\theta)$, definiše direktnu diskretnu Fourierovu transformaciju vektora a. Formula (4.5.4) predstavlja inverznu diskretnu Fourierovu transformaciju . Vektor a naziva se originalom , a funkcija $A(\theta)$ slikom transformacije.

Operator diskretne Fourierove transformacije označavaćemo sa W:

$$A(\theta) = Wa, \quad a = W^{-1}A. \tag{4.5.5}$$

Diskretna Fourierova transformacija egzistira onda kada se funkcija $A(\theta)$ može razviti u Fourierov red.

Vektor a koji zadovoljava uslov

$$|a_n| < M/n^{1+\lambda}, \quad 0<\lambda<1 \tag{4.5.6}$$

nazivaćemo <u>vektorom klase {1}</u> . Dokazuje se da ako su ispunjeni uslovi (4.5.6), funkcija $A(\theta)$, predstavljena redom (4.5.3), zadovoljva Hölderov uslov.

Ako u formule (4.5.3) i (4.5.4) uvrstimo funkciju $e^{i\theta}=t$, dobijamo:

$$A(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_n \cdot t^k, \tag{4.5.7}$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=1} \frac{A(t)}{t^{n+1}}\, dt. \tag{4.5.8}$$

Neka redovi

$$A^+(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \quad -A^-(z) = \sum_{k=-1}^{-\infty} a_k z^k \tag{4.5.9}$$

konvergiraju respektivno za $|z|<R$ i $|z|>r$, gde je $R>r$, i neka je ρ neki realni broj koji zadovoljava uslov $r<\rho<R$.

Relacijama

$$A(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^k \tag{4.5.10}$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\rho} \frac{A(z)}{z^{n+1}}\, dz \tag{4.5.11}$$

definišemo <u>direktnu</u> i <u>inverznu</u> Laurentovu transformaciju, respektivno, koje označavamo sa:

$$A(z) = La = L_\rho a, \quad a = L^{-1}A = L_\rho^{-1}A\ . \tag{4.5.12}$$

Na taj način, direktna Laurentova transformacija dodeljuje beskonačnodimenzionom vektoru a, analitičku u prstenu $r<|z|<R$ funkciju $A(z)$, za koju su elementi datog vektora koeficijenti razlaganja $A(z)$ u Laurentov red. Ako je $r>R$, Laurentov red (4.5.10) divergira i Laurentova transformacija ne egzistira.

Vektori $a^{\pm}$ definisani relacijama

$$a_n^+ = \begin{cases} a_n, & n \geqslant 0 \\ 0, & n<0 \end{cases}, \quad a_n^- = \begin{cases} 0, & n>0 \\ -a_n, & n \leqslant 0 \end{cases} \tag{4.5.13}$$

nazivaju se, respektivno, <u>desnim</u> i <u>levim jednostranim vektorima</u> , a formulama

$$A^{+}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^{+} z^k, \quad a_n^{+} = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\rho_1} \frac{A^{+}(z)}{z^{n+1}}\,dz, \quad \rho_1 < R$$

$$A^{-}(z) = -\sum_{k=-1}^{-\infty} a_k z^k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^{-} z^k, \quad a_n^{-} = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\rho_2} \frac{A^{-}(z)}{z^{n+1}}\,dz, \quad \rho_2 > r \qquad (4.5.14)$$

definišemo <u>desne</u> i <u>leve jednostrane Laurentove transformacije</u> .

Očito je, pritom:

$$a = a^{+} - a^{-}, \quad A(z) = A^{+}(z) - A^{-}(z). \qquad (4.5.15)$$

<u>Teorema [71]</u> Da bi funkcija $A(t)$, definisana na jediničnoj kružnici, koja zadovoljava Hölderov uslov, bila granična vrednost funkcije analitičke unutar (izvan) jediničnog kruga, neophodno je i dovoljno, da budu ispunjeni uslovi:

$$a = L^{-1}A \in \{1\} \qquad (4.5.16)$$

$$a^{-} = (L^{-1}A)^{-} = 0, \quad (a^{+} = (L^{-1}A)^{+} = 0) \;.!!$$

Vektor h definisan relacijama

$$h_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{n-k}\cdot x_k, \quad n \in \mathbb{D} \qquad (4.5.17)$$

naziva se <u>konvolucijom vektora</u> a, $x \in \{1\}$.

Jednostavno se dokazuje da je konvolucija dva vektora iz $\{1\}$ vektor koji takodje pripada klasi $\{1\}$.

Ako su

$$A(t) = La = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k t^k, \quad X(t) = Lx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k t^k, \quad |t| = 1, \qquad (4.5.18)$$

diskretne Laurentove transformacije vektora a i x, važi da je:

$$Lh = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{n-k} x_k t^n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m t^m \cdot \sum_{p=-\infty}^{\infty} x_p t^p = A(t)\cdot X(t), \qquad (4.5.19)$$

tj. diskretna Laurentova transformacija konvolucije dva vektora jednaka je proizvodu slika dva vektora koji grade konvoluciju.

Za razliku od integralne Fourierove transformacije V, diskretne transformacije W i L preslikavaju vektorski prostor u skup drugačije prirode - prostor funkcija, što omogućuje ne samo razvoj teorije beskonačnih algebarskih sistema tipa konvolucije, potpuno analogno teoriji integralnih jednačina tipa konvolucije, već i razvoj teorije integralnih jednačina i graničnih problema za periodične funkcije i funkcije zadate na kružnicama.

Osobine operatora W su slične osobinama operatora V:

1. $W_{k-p} = \exp(ip\theta)A(\theta);$ (4.5.20)

2. $W^{-1}A(\theta-\xi) = \exp(-in\xi)a_n, \ \xi\in\mathbb{R}$; (4.5.21)

3. $W^{-1}A(x-\zeta) = \exp(-in\xi + n\eta)\cdot a_n, \ \zeta=\xi+i\cdot\eta$; (4.5.22)

4. $Wa_{-k} = A(-\theta)$; (4.5.23)

5. $W^{-1}\dfrac{d^p}{d\theta^p}A(\theta) = (in)^p a_n$; (4.5.24)

6. $W[\dfrac{\partial^q}{\partial y^q}a_k(y)] = \dfrac{\partial^q}{\partial y^q}A(\theta,y)$, gde je y parametar; (4.5.25)

7. $W^{-1}A(\theta)B(\theta) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} a_{n-k}b_k,$ (4.5.26)

8. $W[\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} a_{n-k}b_k] = A(\theta)\cdot B(\theta)$; (4.5.27)

9. $Wa_kb_k = (1/2\pi)\cdot\int\limits_{-\infty}^{\infty} A(\theta-\xi)B(\xi)d\xi,$ (4.5.28)

gde je funkcija $A(\theta)$ proširena na interval $[-\pi,\pi]$ uslovom 2π-periodičnosti.

10. $W\ \varphi_k\cdot\operatorname{sgn}(k+1/2) = \dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\dfrac{\varphi(\xi)e^{i\xi}d\xi}{e^{i\xi}-e^{i\theta}}$; (4.5.29)

11. $(1/2\pi)\cdot\int\limits_{-\pi}^{\pi} A(\xi)B(-\xi)d\xi = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} a_kb_k$; (4.5.30)

12. $W^{-1}A(p\theta) = \begin{cases} a_{p/q}, & \text{kada je p deljivo sa q,} \\ 0, & \text{u protivnom slučaju.}\end{cases}$ (4.5.31)

U [71] opisane su mnoge primene diskretnih transformacija u teoriji beskonačnih sistema algebarskih linearnih jednačina i integralnih jednačina tipa konvolucije. U oba slučaja se problemi svode na Riemannove i Carlemanove granične probleme za analitičke funkcije. Opisaćemo ovde samo neke od mnogobrojnih klasa problema opisanog tipa.

Sistemi oblika

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{n-k}x_k + \sum_{k=-1}^{-\infty} b_{n-k}x_k = c_n, \ n\in\mathbb{D}, \tag{4.5.32}$$

gde su $a_n, b_n, c_n \in \{1\}$, mogu se, pomoću jednostranih vektora $x^\pm$, predstaviti formulom

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{n-k}x_k^+ - \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_{n-k}x_k^- = c_n, \ n\in\mathbb{D}, \tag{4.5.33}$$

odakle diskretnom Laurentovom transformacijom dobijamo Riemannov granični problem za odredjivanje analitičkih funkcija $X^\pm(z)$ unutar (izvan) jediničnog kruga, respektivno:

$$X^+(t) = \frac{A(t)}{B(t)}\cdot X^-(t) + \frac{C(t)}{A(t)}, \quad |t| = 1, \tag{4.5.34}$$

gde je $A(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n t^n$, $B(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n t^n$, $C(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n t^n$, $X^+(t)=$ $=\sum_{n=0}^{\infty} x_n t^n$, $X^-(t)=-\sum_{n=-1}^{-\infty} x_n t^n$, i očigledno, $A(t),B(t),C(t)\in H(\mu)$.

Problem (4.5.34) rešavamo uz dodatni uslov da rešenje teži nuli u beskonačnosti, i za $A(t)\neq 0$ i $B(t)\neq 0$.

Granični problem (4.5.34) ekvivalentan je sistemu (4.5.32) u tom smislu da su oba rešiva ili nerešiva i,u slučaju da su rešiva, imaju podjednak broj linerano nezavisnih rešenja. Kadgod postoji rešenje $X^*(t)$ problema (4.5.34), rešenje sistema (4.5.32) dobija se pomoću formule:

$$x_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=1}\frac{X^+(t)-X^-(t)}{t^{n+1}}\,dt\,. \tag{4.5.35}$$

Parnoj integralnoj jednačini tipa konvolucije (4.3.24) u algebri odgovara sistem:

$$\begin{aligned}\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{n-k}x_k &= c_n\,,\quad n>0\\ \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_{n-k}x_k &= c_n\,,\quad n<0\end{aligned} \tag{4.5.36}$$

koji se metodama sličnim kao u prethodnom primeru, diskretnim Laurentovim transformacijama svodi na Riemannov problem oblika

$$\Psi^+(t)=\frac{B(t)}{A(t)}\cdot\Psi^-(t)+\frac{B(t)-A(t)}{A(t)}\cdot C(t),\quad |t|=1, \tag{4.5.37}$$

uz dodatne uslove, $A(t)\neq 0$, $B(t)\neq 0$, $\Psi^-(\infty)=0$, gde su $\Psi^-(t)$ i $\Psi^+(t)$ slike pri Laurentovoj transformaciji pomoću jedinstvenih vektora ψ^- i ψ^+. Kada rešenje problema (4.5.37) postoji, iz njega se dobija rešenje sistema (4.5.36) pomoću formule:

$$x_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=1}\frac{X(t)}{t^{n+1}}\,dt,\quad n\in\mathbb{D}. \tag{4.5.38}$$

Sličnim postupkom se rešavaju i sledeći beskonačni algebarski sistemi:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}[a_{n-k}+b_{n+k}]x_k=c_n,\ n\in\mathbb{D}, \tag{4.5.39}$$

$$\sigma_n x_n+\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{n-k}x_k=c_n,\ n\in\mathbb{D}, \tag{4.5.40}$$

gde je $\sigma_n=(\alpha\cdot n+\beta)/(n+\gamma)$, $\alpha,\beta,\gamma=\text{const}$, $\gamma\notin\mathbb{D}$ i

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{n-k}x_k-c_n+r^n\Big(\sum_{k=-\infty}^{\infty} b_{n-k}x_k-c_n\Big)=0,\ n\in\mathbb{D},\ |r|\neq 1, \tag{4.5.41}$$

pri čemu se poslednji diskretnom Laurentovom transformacijom svodi na Carlrmanov granični problem.

Često se diskretne inverzne transformacije koriste za rešavanje integralnih jednačina tipa konvolucije sa periodičnim jezgrima, tako što se takvim zadacima dodeljuju beskonačni sistemi algebarskih linearnih jednačina, koje je jednostavnije rešiti nego polazne probleme (vidi [71], strana 233-239). Ta metoda ukazuje na višestruke koristi od primena diskretnih transformacija što ćemo pokazati na jednom primeru uopštivši problem iz [71] na strani 246-249.

Pretpostavimo da je na intervalu $0<y<k$, (k=const.>0), dat beskonačan sistem diferencijalnih linearnih jednačina u kome su nepoznate funkcije parametra y:

$$a\cdot\frac{d^2}{dy^2}\,u_n(y) + b\cdot\frac{d}{dy}\,u_n(y) + \sum_{j=1}^{m} a_j u_{n+i_j}(y) = 0, \qquad (4.5.41)$$

gde su a,b,a_j, ($j=1,\ldots,m$), realne konstante, a i_j,($j=1,\ldots,m$), proizvoljni celi brojevi.

Treba naći niz funkcija $u_n(y)$ koje zadovoljavaju jednačinu (4.5.41) i uslove:

$$u_n(k-0) = f_n,\ n\in\mathbb{D} \qquad (4.5.42)$$

$$u_n(+0) + \sigma(n)\cdot\frac{d}{dy}\,u_n(+0) = g_n,\ n\in\mathbb{D}\ , \qquad (4.5.43)$$

gde su f i g dati beskonačnodimenzioni vektori u l_2, i

$$\sigma(n) = \frac{\alpha\cdot r^n + \beta}{\gamma\cdot r^n + \delta}\ , \qquad (4.5.44)$$

gde su α,β,γ i δ poznate realne konstante i $0<r<1$.

Ako na jednačinu (4.5.41) primenimo transformaciju L, na osnovu (4.5.20) i (4.5.25), dobijamo običnu diferencijalnu jednačinu drugog reda po promenljivoj y i sa parametrom t:

$$a\cdot\frac{d^2}{dy^2}\,U(t,y) + b\cdot\frac{d}{dy}\,U(t,y) + \Big(\sum_{j=1}^{m} a_j t^{-i_j}\Big)\cdot U(t,y) = 0 \qquad (4.5.45)$$

čije je opšte rešenje

$$U(x,y) = \begin{cases} C_1(t)\cdot\exp[R_1(t)y]+C_2(t)\cdot\exp[R_2(t)y], & R_1(t)\neq R_2(t) \\ [C_1(t)+C_2(t)\cdot y]\cdot\exp[R_1(t)y], & R_1(t)=R_2(t), \end{cases} \qquad (4.5.46)$$

gde su $C_1(t)$ i $C_2(t)$ proizvoljne funkcije i

$$R_{1,2}(t) = \frac{1}{2a}\,[-b \pm (b^2 - 4a\cdot\sum_{j=1}^{m} a_j t^{-i_j})^{1/2}],\quad |t|=1. \qquad (4.5.47)$$

Iz uslova (4.5.42), transformacijom L, dobijamo uslov:

$$U(t,k-0) = F(t), \quad |t|=1. \tag{4.5.48}$$

Uslove (4.5.43) možemo da napišemo u obliku:

$$\delta\cdot u_n(+0) + \beta\cdot\frac{d}{dy}\,u_n(+0) - \delta\cdot g_n = -r^n\cdot\varphi_n,$$

$$\varphi_n = \gamma\cdot u_n(+0) + \alpha\cdot\frac{d}{dy}\,u_n(+0) - \gamma\cdot g_n,$$

odakle diskretnom Laurentovom transformacijom dobijamo:

$$\delta\cdot U(t,+0) + \beta\cdot\frac{d}{dy}\,U(t,+0) - \delta\cdot G(t) = -\Phi(rt) \tag{4.5.49}$$

$$\Phi(t) = \gamma\cdot U(t,+0) + \alpha\cdot\frac{d}{dy}\,U(t,+0) - \gamma\cdot G(t), \quad |t|=1. \tag{4.5.50}$$

Iz (4.5.46) i (4.5.48) sledi da je:

$$C_1(t)\cdot\exp[R_1(t)\cdot k]+C_2(t)\cdot\exp[R_2(t)\cdot k] = F(t), \quad |t|=1, \tag{4.5.51}$$

a iz (4.5.49) i (4.5.50):

$$C_1(t)[\delta+\beta\cdot R_1(t)] + C_2(t)[\delta+\beta\cdot R_2(t)] = \delta\cdot G(t)-\Phi(rt), \tag{4.5.49'}$$

$$C_1(t)[\gamma+\delta\cdot R_1(t)] + C_2(t)[\gamma+\alpha\cdot R_2(t)] = \Phi(t)+\gamma\cdot G(t), \tag{4.5.50'}$$

$$|t| = 1.$$

Eliminacijom funkcija $C_1(t)$ i $C_2(t)$ iz (4.5.51),(4.5.49') i (4.5.50') dobijamo Carlemanov problem

$$\Phi(t) = A(t)\cdot\Phi(rt) + B(t), \quad |t| = 1, \tag{4.5.51}$$

gde je:

$$A(t) = \frac{[\gamma+\alpha R_1(t)]\exp[kR_2(t)]-[\gamma+\alpha R_2(t)]\exp[kR_1(t)]}{[\delta+\beta R_2(t)]\exp[kR_1(t)]-[\delta+\beta R_1(t)]\exp[kR_2(t)]}, \tag{4.5.52}$$

$$B(t) = \frac{(\alpha\delta-\beta\gamma)\{G(t)[R_2\exp(kR_1)-R_1\exp(kR_2)]+F(R_1-R_2)\}}{[\delta+\beta R_2(t)]\exp[kR_1(t)] - [\delta+\beta R_1(t)]\exp[kR_2(t)]}. \tag{4.5.53}$$

Kada nadjemo rešenje $\Phi(t)$ problema (4.5.51), pomoću njega dobijamo partikularno rešenje $U(t,y)$ jednačine (4.5.45) koje zadovoljava uslove (4.5.48), (4.5.49) i (4.5.50). Odatle inverznom Laurentovom transformacijom dobijamo rešenje polaznog problema (4.5.41), (4.5.42) i (4.5.43):

$$u_n(y) = L^{-1}U(t,y). \tag{4.5.54}$$

Kompletan opis postupka za rešavanje Carlemanovog graničnog problema tipa (4.5.51) dat je u monografiji [71] na stranama 248-249.

4.6. Osvrt na istorijski razvoj teorije graničnih problema za eliptičke diferencijalne jednačine

Jedan od prvih metoda rešavanja važnih klasa graničnih problema za parcijalne diferencijalne jednačine je poznata metoda razdvajanja promenljivih ili Fourierova metoda sa kojom je u tesnoj vezi opisana metoda Fourierovih integralnih transformacija. Iz te metode vodi poreklo danas veoma često korišćena spektralna teorija diferencijalnih operatora.

Iako je još u drugoj polovini XIX veka prvi put primenjena metoda rešavanja parcijalnih jednačina pomoću integralnih transformacija, ova tehnika je u potpunosti razvijena tek u naše vreme.

A.M.Danilevski [47], je 1936. prvi rešio jedan kombinovani granični problem za eliptičke parcijalne diferencijalne jednačine. Taj problem bio je vezan za raspodelu struje u cilindričnoj elektrodi. Od tog vremena publikovano je mnogo radova u kojima se, svodjenjem na jednačinu Wiener-Hopfa, rešavaju različiti kombinovani granični problemi za eliptičke parcijalne jednačine. Iscrpan spisak literature vezane za tu problematiku može se naći u [128], [134], [142], [211].

L.A.Vajnštajn [211] je prvi primenio metodu faktorizacije u teoriji difrakcije 1947. godine. J.I.Čerski je 1957. u [36], umesto dotada uobičajene metode Wiener-Hopfa, prvi primenio, pri rešavanju kombinovanih problema, teoriju graničnih problema Riemanna u opštem slučaju za sistem n parova funkcija. Cerski je, takodje, u [38] i [39],dao i ocenu srednje kvadratne greške za približne metode rešavanja kombinovanih graničnih problema za parcijalne jednačine.

Prvi rad u kojem se jedan problem matematičke fizike svodi na Carlemanov granični problem je rad W.T.Koitera [101] iz 1955. godine. Interes za takvu problematiku neprestalno raste poslednjih godina (B.M.Nuler [144], Čerski [40], [41] itd).

Prvi teorijski rad o beskonačnim sistemima linearnih algebarskih jednačina sa diferencnim indeksima je rad I.M. Rapoporta [170], u kojem je autor rešio jednostruki sistem u klasi (1) svodjenjem na Riemannov granični problem. Zatim slede adovi J.H.Feljda [55],V.S.Rogožina [177],M.G.Kreina [112] itd.

Godine 1958. I.H.Hairullin je teoriju beskonačnih sistema ıopštio u nekoliko pravaca. Primenom diskretnih Fourierovih i .aurentovih transformacija bavili su se mnogi autori. Nekoliko :adataka vezanih za periodične probleme matematičke fizike ešili su J.I.Čerski u [37], [38], V.P.Šestopalov [200], itd.

Pravi procvat ove metode doživljavaju razvojem teorije ıopštenih funkcija koju je zasnovao S.L.Sobolev 1936. godine i ;istematski razvio L.Schwartz 1950-1951. Veoma brzo nakon ›ojave Schwartzovih rezultata ideje teorije uopštenih funkcije ıašle su primene u čitavoj matematičkoj analizi (vidi I.M. ;eljfand, G.E.Šilov- "Obobščenie funkcii i deistvia nad nimi", loskva, "Nauka", 1971).

U [71] nalazi se obiman spisak literature o primenama eorije uopštenih funkcija u problematici o kojoj je ovde reč.

Danas se razvijaju uporedo raznorodne metode rešavanja raničnih problema za eliptičke parcijalne jednačine: arametarska metoda, metoda potencijala, varijacione metode, etoda Schaudera, razne metode funkcionalne analize itd.

Iako je, u današnje vreme, naglasak, pre svega, na pribižnim metodama rešavanja složenih graničnih problema pomoću ačunara, i dalje se posvećuje dosta pažnje analitičkom ešavanju problema za parcijalne jednačine višeg reda. To pokauju mnogobrojni rezultati publikovani poslednjih godina [3].

Pomenimo rad [143] A.D.Nominova u kome je u poluprostoru efinisan analogon Poissonove formule za višedimenzioni elipički sistem parcijalnih jednačina drugog reda, zatim rad [95] .I.Janušauskasa u kojem je dat prikaz poznatih rezultata anaitičke teorije linearnih parcijalnih diferencijalnih jednačina naveden niz još nerešenih graničnih problema te teorije, kao rad [94] istog autora u kojem su date u eksplicitnom obliku eke integralne reprezentacije Greenovih i Neumannovih funkcija a višedimenzionim oblastima ograničenim hiperravnima i ferama.

V glava

Numeričke metode rešavanja graničnih problema za eliptičke parcijalne diferencijalne jednačine

U ovom poglavlju dat je pregled nejčešće korišćenih metoda numeričke analize za približno rešavanje graničnih problema za eliptičke parcijalne diferencijalne jednačine drugog reda. Takodje su opisane i primene tih metoda u rešavanju graničnih problema za eliptičke sisteme linearnih parcijalnih diferencijalnih jednačina prvog reda.

Savremeni računari predstavljaju moćno sredstvo za matematičko modeliranje složenih problema nauke i tehnike. Realizacija matematičkih modela na računarima ostvaruje se pomoću tehnika numeričke analize koje se neprekidno razvijaju uporedo sa usavršavanjem računskih mašina.

Svaka numerička obrada problema matematičke fizike ili tehnike, u krajnjoj liniji, svodi se na sisteme algebarskih jednačina ili slične strukture.

Metoda formiranja sistema algebarskih jednačina, koji odgovara postavljenom problemu, direktno zavisi od apriorne informacije vezane za polazni problem. U našem slučaju ta apriorna informacija je, zapravo, skup graničnih uslova na rubu neke oblasti.

5.1. Metoda diferencnih shema

Jedna od klasičnih metoda približnog rešavanja graničnih problema za parcijalne jednačine, je metoda diferencnih shema koja se sastoji u tome da se polazna oblast na kojoj se traži rešenje zameni diskretnim skupom tačaka- mrežom, a izvodi nepoznatih funkcija u diferencijalnim jednačinama i granični uslovi aproksimiraju na toj mreži konačnim razlikama. Rezultat takvog postupka je prelaz sa polaznog graničnog problema na konačan istem algebarskih jednačina (linearnih ili nelinearnih) koji azivamo diferencnom shemom. Tako dobijeni sistemi rešavaju se aznim direktnim i iteracionim metodama [49], [127'].

Direktne metode daju rešenja graničnog problema posle onačnog broja algebarskih operacija. Poznate su sledeće takve etode: metoda progona, metoda matričnog progona, metoda dekom-ozicije, tehnika brzih Fourierovih transformacija, metod umarnih reprezentacija itd.

Efikasnost direktnih metoda ocenjuje se redom broja ope-acija neophodnih da bi se problem rešio kada rastojanje zmedju susednih čvorova mreže teži nuli.

Poznati iteracioni postupci su: metoda Richardsona sa ebiševljevim izborom, poprečno-trougaona iteraciona metoda, azne metode promenljivog pravca itd.

Efikasnost iteracionih metoda procenjuje se redom mini-alnog broja iteracija $n_o(\varepsilon)$ neophodnog da se greška početne retpostavke umanji za $1/\varepsilon$ puta.

Iteracione metode su opštije i jednostavnije za realiza-iju, mada se danas i dalje češće koriste direktne metode za rad a računarima.

Konvergencija i aproksimacija diferencnih shema

Pretpostavimo da je D oblast u ravni ograničena prostom, atvorenom, deo po deo glatkom konturom ∂D.

Izbor mreže koja prekriva oblast D ne zavisi od konkret-ih graničnih uslova, već od oblika konture ∂D i očekivanog tepena tačnosti rešenja. Mreža se može sastaviti od kvadrat-ih, pravougaonih, trougaonih ili složenih ćelija. Od dijametra elemenata mreže zavisi veličina ostatka R_d pri zameni dife-encijalne jednačine diferencnom.

Obično se granični problem rešava tako što se, na početku oblem grubo reši za mali broj ćelija mreže, a zatim se mreža sitnjava na celoj posmatranoj oblasti ili nekim njenim delovi-.

Ovu metodu zasnovao je još Euler, a dobila je na značaju ek sa pojavom brzih računara velikog memorijskog kapaciteta.

U ovom tekstu ograničićemo se na prikaz metode diferen-ih shema u slučaju kvadratne mreže.

Neka je (x_o, y_o) proizvoljna tačka u ravni i h pozitivan broj. <u>Mreža</u> D_h koja odgovara oblasti D sastoji se od skupa svih tačaka (x_i, y_j), gde je

$$x_i = x_0 + i \cdot h \ , \ y_j = y_0 + j \cdot h \ , \ (i,j \in \mathbb{D}),$$

koje pripadaju unutrašnjosti oblasti D ili su udaljena od krive ∂D za manje od h.

Tačke (<u>čvorovi</u>) mreže D_h su <u>susedne</u> ako je rastojanje izmedju njih u pravcu x-ose ili y-ose jednako h. Cvor A_h mreže D_h je <u>unutrašnji</u> ako pripada oblasti D i ako sva četiri susedna čvora pripadaju mreži D_h. U protivnom slučaju, čvor A_h je <u>granični</u> .

Granični čvor mreže D_h naziva se čvorom <u>prvog reda</u> ako je bar jedan od njemu susednih čvorova unutrašnji. U protivnom slučaju granični čvor je čvor <u>drugog reda</u> . Unutrašnji čvorovi i granični čvorovi prvog reda mreže D_h su relevantni za izračunavanje, dok se granični čvorovi drugog reda ne uzimaju dalje u obzir, pa se mogu eliminisati iz mreže D_h.

Skup svih unutrašnjih čvorova mreže D_h označićemo sa D_h', a skup svih graničnih čvorova mreže D_h označićemo sa D_h^*.

Primetimo da je skup svih čvorova mreže D_h "povezan", tj. dva proizvoljna čvora iz D_h spojena su nizom medjusobno susednih čvorova. Pritom je mnogougaona oblast G_h ograničena poligonalnom linijom čija su temena sve tačke iz D_h^*, izabrana tako da njena geometrijska granica T_h bude najbliža konturi ∂D u odnosu na posmatranu mrežu. Pritom čvorovi iz D_h^* mogu ležati i unutar G_h, a izvan oblasti D.

Funkcije definisane u čvorovima mreže D_h nazivaju se <u>mrežnim funkcijama</u> .

Označimo sa U prostor funkcija u(x,y) neprekidnih u D, sa U_h prostor svih mrežnih funkcija definisanih na D_h, sa U_h' prostor svih mrežnih funkcija definisanih na D_h' i sa U_h^* sve mrežne funkcije definisane na D_h^* .

Neka su u linearnim prostorima U i U_h uvedene odgovarajuće norme $||\cdot||_U$ i $||\cdot||_{U_h}$ takve da je $||\cdot||_{U_h}$ mrežni analogon normi $||\cdot||_U$. Označimo sa $||\cdot||_{U'}$, $||\cdot||_{U^*}$, $||\cdot||_{U_h'}$ i $||\cdot||_{U_h^*}$ restrikcije odgovarajućih normi na prostorima U', U^*, U_h' i U_h^*, gde su U' i U^* prostori funkcija neprekidnih u intD i ∂D, respektivno.

Specijalno, svakoj funkciji $u(x,y) \in U$ možemo jednoznačno pridružiti mrežnu funkciju $u_h = u_h(x,y) \in U_h$ takvu da je $u_h(x_k, y_j) =$

$u(x_k, y_j)$. Na taj način definisan je linearni operator iz ostora U u U_h koji se naziva projekcijom funkcije $u \in U$ na režu D_h.

Operator L_h naziva se diferencnim ako svakoj mrežnoj funiji $f \in U_h$ dodeljuje neku mrežnu funkciju iz U_h' (ili U_h^*).

Diferencni operator L_h aproksimira diferencijalni operaor L sa k-tim redom u odnosu na h po mrežnoj normi $||\cdot||_{U_h'}$ ako e $k>0$ i ako je za dovoljno puta glatku funkciju $u \in U$ zadovoljea nejednakost

$$||Lu - L_h u||_{U_h'} \leqslant C_u \cdot h^k , \tag{5.1.1}$$

de je C_u neka konstanta koja ne zavisi od h.

Pretpostavimo da je dat granični problem oblika:

$$Lu(x,y) = f(x,y), \quad (x,y) \in D', \tag{5.1.2}$$
$$l_j u(x,y) = g_j(x,y), \quad (x,y) \in D^*, \tag{5.1.3}$$

de su L, l_j linearni (diferencijalni) operatori i $u(x,y)$ nepznata funkcija.

Metoda diferencnih shema sastoji se u tome da se granični roblem oblika (5.1.2), (5.1.3) aproksimira nekim odgovarajićim iferencnim graničnim problemom oblika

$$L_h v = f_h \quad \text{na } D_h', \tag{5.1.2'}$$
$$(l_j)_h v = (g_j)_h \quad \text{na } D_h^*, \tag{5.1.3'}$$

de je $L_h v$ diferencni operator koji odgovara Lu, $(l_j)_h v$ su dierencni operatori koji odgovaraju operatorima l_j, mrežne funcije f_h i $(g_j)_h$ su projekcije funkcija f i g_j na D_h' i D_h^*, reseektivno.

Granični problem (5.1.2') i (5.1.3') naziva se diferencom shemom za granični problem (5.1.2) i (5.1.3).

Rešenje problema (5.1.2), (5.1.3), u opštem slučaju, ne adovoljava na mreži D_h diferencne jednačine (5.1.2'), (5.1.3').

Ako posmatramo jednakosti

$$L_h u = f_h + \psi_h \quad \text{na } D_h', \tag{5.1.4}$$
$$(l_j)_h u = (g_j)_h + (\varphi_j)_h \quad \text{na } D_h^*, \tag{5.1.5}$$

de su $\psi_h = L_h u - f_h$, $(\varphi_j)_h = (l_j)_h u - (g_j)_h$ mrežne funkcije oje se nazivaju odstupanjima rešenja diferencnog od diferencijalnog problema, kažemo da diferencna shema (5.1.2'), (5.1.3') <u>aproksimira</u> diferencijalni problem (5.1.2), (5.1.3) u odnosu na njegovo rešenje u sa k-tim poretkom u odnosu na h, ako je $k>0$ i

$$||\varphi_h||_{U_h'} = O(h^k),\quad ||(\varphi_j)_h||_{U_h^*} = O(h^k),\quad (j=1,2,\ldots,k). \tag{5.1.6}$$

U slučaju da su odstupanja $(\varphi_j)_h$ na D_h^* jednaka nuli za svako h, kažemo da diferencni granični uslovi (5.1.3') tačno aproksimiraju granične uslove (5.1.3) polaznog problema.

Diferencna shema (5.1.2'), (5.1.3') je <u>stabilna</u> ako postoji takvo $h_o>0$ da za proizvoljno $h = 1/N<h_o$ i proizvoljne mrežne funkcije $\xi\in U_h'$, $\eta\in U_h^*$ diferencni problem

$$L_h z = \xi \quad \text{na } D_h' \tag{5.1.7}$$
$$(l_j)_h z = \eta_j \quad \text{na } D_h^* \tag{5.1.8}$$

ima jedinstveno rešenje $z\in U_h$, pri čemu je zadovoljena nejednakost

$$||z||_{U_h} < C'\cdot||\xi||_{U_h'} + C^*\cdot||\eta||_{U_h^*}, \tag{5.1.9}$$

gde su C' i C^* neke pozitivne relne konstante koje ne zavise od h, ξ i η.

Svojstvo **stabilnosti (ili nestabilnosti) diferencnih** shema je njihovo unutrašnje svojstvo, tj. ono nema nikakve veze sa polaznim diferencijalnim graničnim problemom. Veoma je važno da postavljena diferencna shema bude stabilna, jer je, u tom slučaju, ona stabilna i u odnosu na greške pri zaokruživanju koje se često mogu dopisati desnim stranama jednakosti (5.1.2') i (5.1.3') u obliku mrežnih funkcija odstupanja $\xi\in U_h'$ i $\eta\in U_h^*$. Pritom se greške rešenja diferencne sheme (5.1.2') i (5.1.3'), na osnovu linearnosti sheme, poklapaju sa rešenjem diferencnog problema (5.1.7), (5.1.8) koje će biti malo ako su male norme grešaka ξ i η_j.

Kažemo da rešenje y diferencne sheme (5.1.2'), (5.1.3') <u>konvergira</u> na odabranoj mreži D_h rešenju u diferencijalnog graničnog problema (5.1.2), (5.1.3) sa k-tim poretkom u odnosu na h, ako je $k>0$ i

$$||u - y||_{U_h} = O(h^k). \tag{5.1.10}$$

U tom slučaju kažemo da diferencna shema ima <u>k-ti poredak tačnosti</u> .

U teoriji diferencnih shema istaknutu ulogu igra kriterijum konvergencije diferencnih shema dat sledećom teoremom.

eorema 5.1.1. Neka diferencna shema (5.1.2'), (5.1.3') aproksimira diferencijalni granični problem (5.1.2), (5.1.3) u dnosu na njegovo rešenje u sa k-tim poretkom u odnosu na h, i eka je ta shema stabilna. Tada rešenje diferencne sheme konergira na mreži D_h rešenju u diferencijalnog graničnog problea sa istim poretkom u odnosu na h.!!

To znači, da je za proveru konvergencije diferencne sheme ovoljno dokazati da ona aproksimira postavljeni granični probem i da je stabilna u smislu navedene definicije.

Specijalno, kažemo da je diferencna shema (5.1.2') i 5.1.3') stabilna zdesna ako postoje brojevi $h_o>0$ i $C'>0$ takvi a, za proizvoljno $h = 1/N < h_o$ i proizvoljnu mrežnu funkciju $\xi \in U_h$, diferencni granični problem

$$L_h z = \xi \quad \text{na } D_h', \tag{5.1.11}$$

$$(l_j)_h z = 0 \quad \text{na } D_h^*, \ (j=1,2,\ldots,k), \tag{5.1.12}$$

ma jedinstveno rešenje $z \in U_h$, pri čemu je

$$||z||_{U_h} \leqslant C' \cdot ||\xi||_{U_h'}. \tag{5.1.13}$$

S obzirom da su u mnogim slučajevima granični uslovi proksimirani tačno, tj. da je $\varphi_j = (l_j)_h u - g_j = 0$, greška $- y$ na mreži D_h je rešenje graničnog problema

$$L_h(u - y) = \psi, \quad (l_j)_h(u - y) = 0,$$

a je, na osnovu teoreme 5.1.1, jednostavno zaključiti da je u akvom slučaju, za konvergenciju diferencne sheme, dovoljno da na bude stabilna zdesna.

Diferencne sheme za parcijalne jednačine prvog reda

Kao primer primene metode diferencnih shema na slučaj arcijalnih linearnih jednačina prvog reda, rešićemo jedan granični problem za (p,q)-analitičke funkcije.

roblem 5.1.1. Naći (p,q)-analitičku funkciju $f(x,y)=u(x,y) + i\cdot v(x,y)$ definisanu na zatvorenom pojasu $D = \{-\infty<x<\infty, 0\leqslant y\leqslant Y\}$, akvo da je:

$$l_1 f \equiv u(x,0) = \varphi(x), \quad -\infty<x<\infty \tag{5.1.14}$$
$$l_2 f \equiv v(x,0) = \Psi(x), \quad -\infty<x<\infty, \tag{5.1.15}$$

gde su $p = p(x,y)>0$ i $q = q(x,y) \neq 0$ date neprekidne realne funkcije ograničene u D, $u(x,y)$ i $v(x,y)$ dva puta neprekidno diferencijabilne funkcije u D, $\varphi(x)$ i $\Psi(x)$ date dva puta neprekidno diferencijabilne funkcije na celoj x-osi, pri čemu je

$$\sup_D |u''_{xx}| = G_1<\infty, \quad \sup_D |u''_{yy}| = G_2<\infty, \tag{5.1.16}$$
$$\sup_D |v''_{xx}| = G_3<\infty, \quad \sup_D |v''_{yy}| = G_4<\infty \;. \tag{5.1.17}$$

U skladu sa opisanim postupkom, prvo ćemo konstruisati mrežu D_h na pojasu D. Neka je $h>0$ realna konstanta koju ćemo uzeti za korak po promenljivoj x, a $\tau = y/M>0$ realna konstanta koja će biti korak po promenljivoj y.

Nizovima tačaka $x_k = k\cdot h$, $k\in\mathbb{D}$ i $y_v = v\cdot\tau$, $(v=0,1,2,\ldots,M)$ odgovaraju sledeće mreže u D:

$$D_h = \{(x_k,y_v) \mid k\in\mathbb{D},\ v=0,,1,\ldots,M\}$$
$$D'_h = \{(x_k,y_v) \mid k\in\mathbb{D},\ v=1,2,\ldots,M\}$$
$$D^*_h = \{(x_k,0) \mid k\in\mathbb{D}\} \;.$$

Na ovim mrežama definišemo potrebne mrežne funkcije pomoću projekcija $(u_{kv}=u(x_k,y_v), v_{kv}=v(x_k,y_v), p_{kv}=p(x_k,y_v), q_{kv}= = q(x_k,y_v), \Psi_k = \Psi_{k,0} = \Psi(x_k,0), \varphi_k = \varphi_{k,0} = \varphi(x_k,0))$ i za mrežne funkcije definisane na D_h i D_h uvodimo sledeće norme:

$$\|g\|_{U_h} = \|g\|_h = \sup_{D_h} |g(x_k,y_v)|, \tag{5.1.18}$$
$$\|g\|_{U'_h} = \|g\|'_h = \sup_{D'_h} |g(x_k,y_v)|. \tag{5.1.19}$$

Ako u jednačinama

$$pu'_x - qu'_y - v'_y = 0, \quad qu'_x + pu'_y + v'_x = 0 \tag{3.1.3}$$

koje zadovoljava tražena (p,q)-analitička funkcija $f = u + i\cdot v$, zamenimo parcijalne izvode standardnim diferencnim formulama, i ako umesto u i v uvedemo oznake U i V, iz (3.1.3), (5.1.14) i (5.1.15) dobijamo diferencnu shemu

$$[(L_1)_h f]_{kv} \equiv \tag{5.1.20}$$

$$\equiv p_{k,v-1}\frac{U_{k,v-1}-U_{k-1,v-1}}{h} - q_{k,v-1}\frac{U_{k,v}-U_{k,v-1}}{\tau} - \frac{V_{k,v}-V_{k,v-1}}{\tau} = 0$$

$$[(L_2)_h f]_{kv} \equiv \tag{5.1.21}$$

$$\equiv q_{k,v-1}\frac{U_{k,v-1}-U_{k-1,v-1}}{h} - p_{k,v-1}\frac{U_{k,v}-U_{k,v-1}}{\tau} - \frac{V_{k,v-1}-V_{k-1,v-1}}{h} = 0$$

$$[(l_1)_h f]_{k,0} \equiv \varphi(x_k,0) = \varphi_k \tag{5.1.22}$$

$$[(l_2)_h f]_{k,0} \equiv \psi(x_k,0) = \psi_k \tag{5.1.23}$$

$$(k\in D,\ v=1,2,\dots,M).$$

Iako diferencna shema zavisi od dva parametra h i τ, pri označavanju diferencnih operatora $(l_1)_h$, $(l_2)_h$, $(L_1)_h$, $(L_2)_h$ i odgovarajućih normi, zbog jednostavnosti notacije, koristićemo samo indeks h.

Proverimo, prvo, da li diferencna shema (5.1.20)-(5.1.23) aproksimira postavljeni problem. S obzirom na dodatni uslov da funkcije $u(x,y)$ i $v(x,y)$ moraju da budu dva puta neprekidno diferencijabilne po promenljivima x i y, na osnovu Taylorove formule imamo da je:

$$u(x_k,y_v) = u(x_k,y_{v-1}) + \tau\cdot u'_y(x_k,y_{v-1}) + (\tau^2/2)\cdot u''_{yy}(x_k,\theta_{kv})$$

$$u(x_{k-1},y_{v-1}) = u(x_k,y_{v-1}) - h\cdot u'_x(x_k,y_{v-1}) + (h^2/2)\cdot u''_{xx}(\eta_{kv},y_{v-1}),$$

tj.

$$\frac{u_{k,v}-u_{k,v-1}}{\tau} = u'_y(x_k,y_{v-1}) + \frac{\tau}{2}\, u''_{yy}(x_k,\theta_{kv}), \tag{5.1.24}$$

$$\frac{u_{k,v-1}-u_{k-1,v-1}}{h} = u'_x(x_k,y_{v-1}) - \frac{h}{2}\, u''_{xx}(\eta_{kv},y_{v-1}), \tag{5.1.25}$$

i, slično:

$$\frac{v_{k,v}-v_{k,v-1}}{\tau} = v'_y(x_k,y_{v-1}) + \frac{\tau}{2}\, v''_{yy}(x_k,\tilde{\theta}_{kv}), \tag{5.1.26}$$

$$\frac{v_{k,v-1}-v_{k-1,v-1}}{h} = v_x(x_k,y_{v-1}) - \frac{h}{2}\, v_{xx}(\tilde{\eta}_{kv},y_{v-1}), \tag{5.1.27}$$

gde je $f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$ rešenje postavljenog problema, $\theta_{k,v},\tilde{\theta}_{kv}\in(y_{v-1},y_v)$ i $\eta_{kv},\tilde{\eta}_{k,v}\in(x_{k-1},x_k)$. Otuda je:

$$[(L_1)_h f]_{kv} \equiv \tag{5.1.28}$$

$$p_{k,v-1}\,\frac{u_{k,v-1}-u_{k-1,v-1}}{h} - q_{k,v-1}\,\frac{u_{k,v}-u_{k,v-1}}{\tau} - \frac{v_{k,v}-v_{k,v-1}}{\tau} =$$

$$= p_{k,v-1}u'_x(x_k,y_{v-1}) - q_{k,v-1}u'_y(x_k,y_{v-1}) - v'_y(x_k,y_{v-1}) - 1/2\cdot[p_{k,v-1}\cdot$$

$$\cdot h u''_{xx}(\eta_{kv},y_{v-1}) + q_{k,v-1}\cdot\tau\cdot u''_{yy}(x_k,\theta_{kv}) + \tau\cdot v''_{yy}(x_k,\tilde{\theta}_{kv})],$$

$$[(L_2)_h f]_{kv} \equiv \tag{5.1.29}$$

$$q_{k,v-1}\,\frac{u_{k,v-1}-u_{k-1,v-1}}{h} - p_{k,v-1}\,\frac{u_{k,v}-u_{k,v-1}}{\tau} - \frac{v_{k,v-1}-v_{k-1,v-1}}{h} =$$

$$= q_{k,v-1}u'_x(x_k,y_{v-1}) + p_{k,v-1}u'_y(x_k,y_{v-1}) + v'_x(x_k,y_{v-1}) + 1/2\cdot[-q_{k,v-1}\cdot$$

$\cdot hu''_{xx}(\eta_{k,v},y_{v-1})+p_{k,v-1}\tau u''_{yy}(x_k,\theta_{kv})-hv''_{xx}(\eta_{kv},y_{v-1})]$.

S obzirom da su parcijalni izvodi u'_x,u'_y,v'_x,v'_y i funkcije p i q neprekidne u gornjoj poluravni, iz (5.1.20-1) sledi da je:

$$\begin{aligned} &p_{k,v-1}u'_x(x_k,y_{v-1})-q_{k,v-1}u'_y(x_k,y_{v-1})-v'_y(x_k,y_{v-1}) = 0,\\ &q_{k,v-1}u'_x(x_k,y_{v-1})+p_{k,v-1}u'_y(x_k,y_{v-1})+v'_x(x_k,y_{v-1}) = 0, \end{aligned} \tag{5.1.30}$$

za sve $k\in\mathbb{D}$, i $v=0,1,2,\dots,M$, pa je:

$$\begin{aligned} [(L_1)_hf]_{kv} \equiv &- (1/2)\cdot[p_{k,v-1}hu''_{xx}(\eta_{kv},y_{v-1})+\\ &+q_{k,v-1}\cdot\tau\cdot u''_{yy}(x_k,\theta_{kv})+\tau\cdot v''_{yy}(x_k,\tilde{\theta}_{kv})], \end{aligned} \tag{5.1.31}$$

$$\begin{aligned} [(L_2)_hf]_{kv} \equiv &\ (1/2)\cdot[- q_{k,v-1}hu''_{xx}(\eta_{kv},y_{v-1})+\\ &+p_{k,v-1}\tau u''_{yy}(x_k,\theta_{kv})-hv''_{xx}(\tilde{\eta}_{kv},y_{v-1})]. \end{aligned} \tag{5.1.32}$$

Otuda, za granični problem 5.1.1 na mreži D_h važe sledeće relacije:

$$[(L_1f)_h]_{k,v} = \varphi_{k,v} \quad \text{na } D'_h \tag{5.1.33}$$
$$[(L_2f)_h]_{k,v} = \psi_{k,v} \quad \text{na } D'_h \tag{5.1.34}$$
$$[(l_1f)_h]_{k,0} = \Phi_k \quad \text{na } D^*_h \tag{5.1.35}$$
$$[(l_2f)_h]_{k,0} = \Psi_k \quad \text{na } D^*_h \tag{5.1.36}$$
$$(k\in\mathbb{D},\ v=1,2,\dots,M),$$

gde su

$$\begin{aligned} \varphi_{k,v} = &- (1/2)\cdot[p_{k,v-1}h\cdot u''_{xx}(\eta_{k,v},y_{v-1})+\\ &+q_{k,v-1}\cdot\tau\cdot u''_{yy}(x_k,\theta_{kv})+\tau\cdot v''_{yy}(x_k,\tilde{\theta}_{kv})], \end{aligned} \tag{5.1.37}$$

$$\begin{aligned} \psi_{k,v} = &\ (1/2)\cdot[-q_{k,v-1}hu''_{xx}(\eta_{kv},y_{v-1})+\\ &+p_{k,v-1}\cdot\tau\cdot u''_{yy}(x_k,\theta_{kv})-h\cdot v''_{xx}(\tilde{\eta}_{kv},y_{v-1})], \end{aligned} \tag{5.1.38}$$

odstupanja rešenja problema od diferencnih jednačina (5.1.20) i (5.1.21).

Na osnovu uslova (5.1.16), (5.1.17) problema i definicije norme (5.1.19), sledi da je:

$$||\varphi||'_h < (1/2)\cdot[PG_1h + (QG_2 + G_4\cdot\tau)], \tag{5.1.39}$$
$$||\psi||'_h < (1/2)\cdot[(QG_1 + G_3)h + PG_2\cdot\tau], \tag{5.1.40}$$

gde je $P = \sup\limits_D |p(x,y)|$, $Q = \sup\limits_D |q(x,y)|$, što znači da diferencna shema (5.1.20), (5.1.21), (5.1.22) i (5.1.23) tačno aproksimira diferencijalni granični problem 5.1.1 sa poretkom 1 u odnosu na h i τ i normu $||\cdot||'_h$ na mreži D_h.

Ako rešimo jednačine (5.1.20), (5.1.21) po $u_{k,v}$ i $v_{k,v}$ dobijamo rekurentne formule:

$$u_{k,v} = \left(1 - \frac{\tau \cdot q_{k,v-1}}{hp_{k,v-1}}\right) u_{k,v-1} + \frac{\tau \cdot q_{k,v-1}}{hp_{k,v-1}} u_{k-1,v-1} -$$

$$- \frac{\tau}{hp_{k,v-1}} (v_{k,v-1} - v_{k-1,v-1}), \tag{5.1.41}$$

$$v_{k,v} = \frac{\tau \cdot (p^2_{k,v-1} + q^2_{k,v-1})}{hp_{k,v-1}} (u_{k,v-1} - u_{k-1,v-1}) +$$

$$+ \frac{\tau \cdot q_{k,v-1} + hp_{k,v-1}}{hp_{k,v-1}} - \frac{\tau \cdot q_{k,v-1}}{hp_{k,v-1}} v_{k-1,v-1} \tag{5.1.42}$$

koje zajedno sa graničnim uslovima (5.1.22) i (5.1.23), daju algoritam za izračunavanje vrednosti funkcija $u(x,y)$ i $v(x,y)$ sloj po sloj počevši od $u_{k,1}$ i $v_{k,1}$ za $k \in \mathbb{D}$, zatim $u_{k,2}$ i $v_{k,2}$ za $k \in \mathbb{D}$ itd.

Posmatrajmo, dalje, diferencni problem

$$[(L_1\tilde{f})_h] = \xi, \tag{5.1.43}$$
$$[(L_2\tilde{f})_h] = \eta, \tag{5.1.44}$$
$$[(l_1\tilde{f})_h] = 0, \tag{5.1.45}$$
$$[(l_2\tilde{f})_h] = 0, \tag{5.1.46}$$

gde su ξ i η proizvoljne mrežne funkcije definisane na D_h, pri čemu je $||\xi||'_h < \infty$ i $||\eta||'_h < \infty$ i $\tilde{f}=\tilde{u}+i\tilde{v}$. Analogno (5.1.41) i (5.1.42), iz (5.1.43)-(5.1.46) dobijamo rekurentne formule:

$$\tilde{u}_{k,v} = \left(1 - \frac{\tau \cdot q_{k,v-1}}{hp_{k,v-1}}\right) \tilde{u}_{k,v-1} + \frac{\tau \cdot q_{k,v-1}}{hp_{k,v-1}} \tilde{u}_{k-1,v-1} -$$

$$- \frac{\tau}{hp_{k,v-1}} (\tilde{v}_{k,v-1} - \tilde{v}_{k-1,v-1}) + \frac{\tau}{p_{k,v-1}} \eta_{k,v} \tag{5.1.47}$$

$$\tilde{v}_{k,v} = \frac{\tau \cdot (p^2_{k,v-1} + q^2_{k,v-1})}{hp_{k,v-1}} (\tilde{u}_{k,v-1} - \tilde{u}_{k-1,v-1}) + \left(1 + \frac{\tau \cdot q_{k,v-1}}{hp_{k,v-1}}\right) \tilde{v}_{k,v-1} -$$

$$- \frac{\tau \cdot q_{k,v-1}}{hp_{k,v-1}} \tilde{v}_{k-1,v-1} - \tau \cdot \xi_{k,v} - \frac{\tau \cdot q_{k,v-1}}{hp_{k,v-1}} \eta_{k,v} \,. \tag{5.1.48}$$

Ako je $p = \inf_{D} |p(x,y)|$ i ako su koraci h i τ odabrani tako da je

$$0 < \frac{\tau \cdot q_{k,v-1}}{h \cdot p_{k,v-1}} \leqslant 1 \tag{5.1.49}$$

za svako $k \in \mathbb{D}$ i $v=1,2,\dots,M$, iz (5.1.47) i (5.1.48), na osnovu (5.1.45) i (5.1.46), jednostavno dobijamo da je

$$\|\tilde{u}\|_{h'} = \sup_{D} |u_{k,v}| = \max_{0<v<M} \sup_{k} |u_{k,v}| < \max_{0<v<M} (v\cdot\tau/p)\cdot\|\eta\|_{h'} =$$

$$= (M\cdot\tau/p)\cdot\|\eta\|_{h} = (Y/p)\cdot\|\eta\|_{h}$$

i

$$\|v\|_{h}' \leqslant M\cdot\tau\cdot(\|\xi\|_{h}' + \|\eta\|_{h}') = Y(\|\xi\|_{h}' + \|\eta\|_{h}'),$$

gde konstante Y/p i Y ne zavise ni od h ni od τ. Otuda je diferencna shema (5.1.20)-(5.1.23) stabilna zdesna ako je ispunjen dodatni uslov (5.1.49).

S obzirom da diferencna shema (5.1.20)-(5.1.23) aproksimira diferencijalni granični problem (5.1.1) i da je stabilna zdesna, na osnovu teoreme 5.1.1 sledi da rešenje diferencne sheme (5.1.20)-(5.1.23) konvergira rešenju problema (5.1.1) sa poretkom 1 u odnosu na h i τ kada $h\to0$ i $\tau\to0$ i kada je zadovoljen uslov (5.1.49).

Lako se proverava da je uslov (5.1.49) bitan i da shema (5.1.20)-(5.1.23) nije uvek stabilna zdesna ako uslov (5.1.49) nije ispunjen.

Diferencne sheme za parcijalne jednačine višeg reda

Primene diferencnih shema pri rešavanju graničnih problema za eliptičke parcijalne diferencijalne jednačine drugog reda prikazaćemo ukratko na primeru Dirichletovog graničnog problema za Poissonovu jednačinu drugog reda. Postupak se jednostavno uopštava na višedimenzioni slučaj i na slučaj kada je parcijalna jednačina reda višeg od 2.

Pretpostavimo da je data Poissonova jednačina

$$u''_{xx} + u''_{yy} = f(x,y), \qquad (5.1.50)$$

oblast D u ravni xOy i M mreža:

$$x_k = k\cdot h,\ k\in\mathbb{D},\ y_v = v\cdot\tau,\ v\in\mathbb{D},\ h>0,\ \tau>0 \qquad (5.1.51)$$

koja prekriva celu ravan xOy. Označimo da D_h, D_h' i D_h^* ranije opisane skupove čvorova mreže M.

Neka je $(x_k,y_v)\in D_h'$. Zamenu diferencijalne jednačine (5.1.50) diferencnom jednačinom vršićemo samo na skupu D_h' unutrašnjih čvorova mreže D_h. Na osnovu poznatih rezultata iz teorije numeričkog diferenciranja, iz (5.1.50) dobijamo da je

$$\frac{u(x_{k+1},y_v)-2u(x_k,y_v)+u(x_{k-1},y_v)}{h^2} - \frac{h^2}{12}\cdot\frac{\partial^4u}{\partial x^4}\bigg|_{(\theta_{k,v},y_v)} + \qquad (5.1.52)$$

$$+\frac{u(x_k,y_{\nu+1})-2u(x_k,y_\nu)+u(x_k,y_{\nu-1})}{\tau^2}-\frac{\tau^2}{12}\cdot\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\Big|_{(x_k,\eta_{k,\nu})}=f(x_k,y_\nu)$$

gde je $\theta_{k,\nu}\in(x_{k-1},x_{k+1})$, $\eta_{k,\nu}\in(y_{\nu-1},y_{\nu+1})$.

Pretpostavimo da su funkcije $\frac{\partial^4 u(x,y)}{\partial x^4}$, $\frac{\partial^4 u(x,y)}{\partial y^4}$ ograničene po apsolutnoj vrednosti u oblasti $\bar{D} = D\cup\partial D$. U tom slučaju, za dovoljno male h i τ možemo zanemariti sabirke u (5.1.52) koji sadrže h^2 i τ^2, pa tako dobijamo diferencnu jednačinu

$$L_h^{(1)}(u^{(h)}) = f^{(h)}, \tag{5.1.53}$$

gde je

$$L_h^{(1)}(u^h) \equiv \frac{u_{k+1,\nu}-2u_{k,\nu}+u_{k-1,\nu}}{h^2}+\frac{u_{k,\nu+1}-2u_{k,\nu}+u_{k,\nu-1}}{\tau^2},$$

$$f^{(h)} = f(x_k,y_\nu),\quad (x_k,y_\nu)\in D_h'.$$

Iz (5.1.52) i (5.1.53) sledi da je

$$L_h^{(1)}(u_h(x,y)) = f^{(h)} + \delta\cdot f^{(h)}, \tag{5.1.54}$$

gde je

$$\delta f^{(h)} \equiv \frac{h^2}{12}\cdot\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\Big|_{(\theta_{k,\nu},y_\nu)}+\frac{\tau^2}{12}\cdot\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\Big|_{(x_k,\eta_{k,\nu})},$$ pa je

$$||\delta f^{(h)}||_h \leqslant M\cdot h^2, \tag{5.1.55}$$

gde je M konstanta koja ne zavisi od h, s obzirom da je $\tau/ = \alpha\cdot h$ za neko $\alpha>0$.

Na osnovu (5.1.55) sledi da diferencna shema (5.1.53) aproksimira diferencijalnu jednačinu (5.1.50) sa greškom reda $O(h^2)$.

Na sličan način se pokazuje da diferencna jednačina

$$a\cdot\frac{u_{k+1,\nu}-2u_{k,\nu}+u_{k-1,\nu}}{h^2}+2b\cdot\frac{u_{k+1,\nu+1}-u_{k+1,\nu-1}-u_{k-1,\nu+1}+u_{k-1,\nu-1}}{4h\cdot\tau}+$$

$$+c\cdot\frac{u_{k,\nu+1}-2u_{k,\nu}+u_{k,\nu-1}}{\tau^2}=f(x_k,y_\nu),\quad (x_k,y_\nu)\in D_h,$$

aproksimira sa greškom reda $O(h^2+\tau^2)$ diferencijalnu jednačinu $a\cdot u''_{xx} + 2b\cdot u''_{xy} + c\cdot u''_{yy} = f(x,y)$, gde su a,b,c konstante takve da je $b^2 - ac < 0$.

Razmotrimo kako se granični uslovi oblika

$$u|_{\partial D} = \varphi(M), \tag{5.1.56}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial D} = \varphi(M), \qquad (5.1.57)$$

gde je φ data funkcija, $M\in\partial D$ i $\partial u/\partial n$ izvod po spoljnoj normali, mogu zameniti diferencnim uslovima.

Pri tome treba uzeti u obzir da uslove (5.1.56) i (5.1.57) moramo zameniti diferencnim uslovima na skupu D_h^* graničnih čvorova.

Neka je $B(x_k,y_\nu)$ neki čvor iz D_h^*, $A(x_{k+1},y_\nu)$ čvor u D_h najbliži čvoru B u pravcu x ose i $M(x_k-\delta,y_\nu)$, $0<\delta<h$, tačka konture ∂D najbliža čvoru B u pravcu x ose.

Na osnovu graničnog uslova oblika (5.1.56) možemo pretpostaviti da je

$$u_{k,\nu} = \varphi(M), \quad (x_k,y_\nu)\in D_h. \qquad (5.1.57')$$

S obzirom da je

$$u(M) = u(x_k-\delta,y_\nu) = u(B) - \frac{\delta}{1!}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_B + \frac{\delta^2}{2!}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big|_{\tilde{B}}, \quad \tilde{B}\in(M,B)$$

$$u(A) = u(x_k+h,y_\nu) = u(B) + \frac{h}{1!}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_B + \frac{h^2}{2!}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big|_{\tilde{A}}, \quad \tilde{A}\in(B,A),$$

i, otuda:

$$u(B) = \frac{h\cdot\varphi(M) + \delta\cdot u(A)}{h+\delta} + O(h^2), \qquad (5.1.58)$$

diferencni granični uslov, koji aproksimira granični uslov (5.1.56) u čvoru $(x_k,y_\nu)\in D_h^*$ sa greškom reda $O(h^2)$, je oblika

$$u_{k,\nu} = \frac{h\cdot\varphi(M) + \delta\cdot u_{k+1,\nu}}{h+\delta}. \qquad (5.1.59')$$

Sličnim postupkom se granični uslov (5.1.57) u proizvoljnoj tački $M\in\partial D$ može aproksimirati, sa greškom reda $O(h+\delta)$, diferencnim uslovom, u tački $(x_k,y_\nu)\in D_h^*$, oblika:

$$\frac{u_{k,\nu} - u_{k-1,\nu}}{h}\cdot\cos\alpha + \frac{u_{k,\nu} - u_{k,\nu-1}}{\tau}\cdot\sin\alpha = \varphi(M),$$

gde je α ugao izmedju spoljne normale n na ∂D u tački M i pozitivnog smera x-ose.

Pretpostavimo da je u oblasti $D = \{\, 0<x<a,\ 0<y<b \,\}$ data Poissonova jednačina (5.1.50) i na rubu ∂D oblasti D Dirichletov uslov (5.1.56). Takodje ćemo pretpostaviti da problem (5.1.50), (5.1.56) ima jedinstveno rešenje u oblasti $\mathrm{cl}D = D + \partial D$ i da to rešenje u D ima neprekidne izvode u_{xxxx}^{IV} i u_{yyyy}^{IV}.

Koristeći formule (5.1.53) i (5.1.57') dobijamo diferencu shemu koja na mreži

$$x_k = k\cdot h,\ k=0,1,\dots,M,\ h = a/M,$$
$$y_v = v\cdot\tau,\ v=0,1,\dots,N,\ \tau = b/N,$$

proksimira problem (5.1.50), (5.1.56) sa greškom reda $O(h^2+\tau^2)$

$$L_h(u^{(h)}) = f^{(h)}, \tag{5.1.60}$$

de je

$$_h(u^{(h)}) \equiv \begin{cases} \dfrac{u_{k+1,v}-2u_{k,v}+u_{k-1,v}}{h^2} + \dfrac{u_{k,v-1}-2u_{k,v}+u_{k,v-1}}{\tau^2}, \\ \qquad (k=1,2,\dots,M-1,\ v=1,2,\dots,N-1), \\ u_{k,v}, \quad (kh, v\tau)\in D_h^*, \end{cases} \tag{5.1.61}$$

$$f^{(h)} \equiv \begin{cases} f(x_k,y_v)\ ,\ m=1,2,\dots,M-1,\ v=1,2,\dots,N-1, \\ \varphi(x_k,y_v)\ ,\ (kh,v\tau)\in D_h^*. \end{cases} \tag{5.1.62}$$

Diferencna shema (5.1.60) predstavlja sistem od $(M-1)\cdot(N-1)$ linearnih algebarskih jednačina po isto toliko nepoznaih $u_{k,v}$ $(k=1,2,\dots,M-1;\ v=1,2,\dots,N-1)$.

Može se dokazati [114] da je diferencna shema (5.1.60) tabilna, pa odatle sledi i njena konvergencija.

Ako (5.1.60) napišemo u obliku

$$\begin{gathered} _{k+1,v}-2u_{k,v}+u_{k-1,v}+\alpha(u_{k,v+1}-2u_{k,v}+u_{k,v-1}) = h^2 f(x_k,y_v) \\ (k=1,2,\dots,M-1;\ v=1,2,\dots,N-1), \\ _{o,v} = \varphi(0,y_v),\ u_{M,v} = \varphi(a,y_v),\quad v=1,2,\dots,N-1, \\ _{k,o} = \varphi(x_k,0),\ u_{k,N} = \varphi(x_k,b),\quad k=1,2,\dots,M-1, h/\tau=\alpha>0 \end{gathered} \tag{5.1.63}$$

uvedemo oznaku

$$u_m = [u_{m,1},\ u_{m,2},\ \dots,\ u_{m,N-1}]^T,\ m=0,1,\dots,M, \tag{5.1.64}$$

obijamo vektorsku formu sistema (5.1.63):

$$\left.\begin{aligned} u_{k+1} + Au_k + u_{k-1} &= f_m,\ m=1,2,\dots,M-1 \\ u_o = \varphi_o,\ u_M &= \varphi_m, \end{aligned}\right\} \tag{5.1.65}$$

de je A trodijagonalna matrica reda N-1 oblika:

$$A = \begin{bmatrix} -(2+2\alpha) & \alpha & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & -(2+2\alpha) & \alpha & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha & -(2+2\alpha) & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha & -(2+2\alpha) \end{bmatrix},$$

$$
f_k = \begin{bmatrix} h^2 f(x_k,y_1)-\alpha\varphi(x_k,0) \\ h^2 f(x_k,y_2) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ h^2 f(x_k,y_{N-1}) \\ h^2 f(x_k,y_{N-1})-\alpha\varphi(x_k,h) \end{bmatrix}, \quad \varphi_0 = \begin{bmatrix} \varphi(0,y_1) \\ \varphi(0,y_2) \\ \cdot \\ \cdot \\ \varphi(0,y_{N-1}) \end{bmatrix}, \quad \varphi_A = \begin{bmatrix} \varphi(a,y_1) \\ \varphi(a,y_2) \\ \cdot \\ \cdot \\ \varphi(a,y_{N-1}) \end{bmatrix}.
$$

Jednačine (5.1.65) rešavaju se metodom matričnog progona (vidi [48] , [114]), uz pretpostavku da je M >> N.

Ukoliko je broj čvorova mreže D_h mali, tj. ako je mreža gruba, pribegava se iteracionim metodama sa istovremenim korekcijama graničnih uslova. Saglasno procesu usrednjavanja Libmana, pošavši od aproksimacije $u_{kv}^{(0)}$ rešenja nekog graničnog problema za eliptičke jednačine višeg reda, niz aproksimacija $u_{kv}^{(j)}$ za unutrašnje čvorove (x_k,y_v) mreže D_h dobija se iz formule

$$
u_{kv}^{(j)} = (1/4)\cdot[u_{k-1,v}^{(j-1)}+u_{k+1,v}^{(j-1)}+u_{k,v-1}^{(j-1)}+u_{k,v+1}^{(j-1)}],\ (j=1,2,\ldots). \quad (5.1.66)
$$

Ovaj postupak je detaljno opisan u [49].

Iz navedenih primera se vidi da je, da bi se obezbedila konvergencija rešenja diferencnih shema, potrebno uvesti dosta dodatnih pretpostavki, jer rešenja diferencnih problema, čak i ako su tačna, mogu se ne samo kvantitativno već i kvalitativno razlikovati od rešenja polaznog diferencijalnog problema. To je odstupanje naročito veliko ako koeficijenti jednačine, ili njeno rešenje, imaju singularitete (npr. prekidna rešenja jednačine gasnog stanja).

U takvim slučajevima neposredna aproksimacija diferencijalnog problema diferencnim problemom ne daje uvek „dobru diferencnu shemu. Zato je razradjen niz principa za konstruisanje diferencnih shema koji omogućuju dobijanje shema sa dobrim osobinama. Uspešno se primenjuje metod balansa i metod aproksimacije varijacionog funkcionala.

Diferencne sheme dobijene tim metodama pravilno odražavaju integralne zakonitosti koje postoje kod polaznih jednačina.

5.2. Metod pravih

U slučaju metode pravih, za razliku od metode mreža, operacija diferenciranja aproksimira se ne po svim, već po odabranim promenljivim, što znači da se diferencijalna jednačina približno zamenjuje diferencijalno-diferencnom sa manjim brojem neprekidnih nezavisnih promenljivih. Ovaj metod može se shvatiti kao granični slučaj metode mreža kada koraci razlaganja nekih od promenljivih teže nuli. Na taj način, metod pravih omogućuje snižavanje reda diferencijalnog problema.

Osnove ovog metoda ilustrovaćemo na primeru linearne diferencijalne jednačine eliptičkog tipa sa dve nezavisne promenljive i koeficijentima iz C^{∞}.

Neka je u ravni xOy data oblast D ograničena pravama $y = \alpha$ i $y = \beta$, $(\alpha<\beta)$, i glatkim krivama $L: x = g_0(y)$ i $\Gamma: x = g_1(y)$, $(\alpha<y<\beta,\ g_0(y)<g_1(y))$, pri čemu oblast D cela leži u minimalnom pravougaoniku $R = \{a\leq x\leq b,\ \alpha\leq y\leq\beta\}$.

Pretpostavimo da u oblasti D treba naći rešenje $u=u(x,y)$ linearne eliptičke parcijalne jednačine

$$L[u] \equiv A(x,y)u_{xx}'' + 2B(x,y)u_{xy}'' + C(x,y)u_{yy}'' + a(x,y)u_x' + b(x,y)u_y' + c(x,y)u = f(x,y) \tag{5.2.1}$$

koje na rubu ∂D oblasti D zadovoljava granične uslove:

$$u(x,\alpha) = \varphi_0(x),\ u(x,\beta) = \varphi_1(x),$$
$$u(g_0(y),y) = \psi_0(y),\ u(g_1(y),y) = \psi_1(y). \tag{5.2.2}$$

Pretpostavimo da su koeficijenti i slobodni član jednačine (5.2.1) neprekidno diferencijabilne i da je zadovoljen uslov eliptičnosti:

$$A(x,y)C(x,y) - B^2(x,y) > 0,\ (x,y\in R).$$

Pretpostavimo, takodje, da su funkcije $\varphi_0(x)$ i $\varphi_1(x)$ iz $C^{\infty}[a,b]$, a funkcije $\psi_0(y)$ i $\psi_1(y)$ iz $C^{\infty}[\alpha,\beta]$ i da su ispunjeni uslovi:

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_0(g_j(\alpha)) = \psi_j(\alpha), \\ &\varphi_1(g_j(\beta)) = \psi_j(\beta), \quad (j=0,1). \end{aligned}\right\} \tag{5.2.3}$$

Razdelimo interval $[\alpha,\beta]$ na n jednakih delova tačkama

$$y_j = y_0 + j\cdot h,\ (y_0 = \alpha,\ y_n = \beta)$$
$$h = (\beta - \alpha)/n\ ,\ (j=0,1,2,\dots,n),$$

i kroz unutrašnje tačke podele postavimo familiju paralelnih pravih $y = y_j$, $(j=1,2,\dots,n-1)$. Na svakoj takvoj pravoj aproksimiramo jednačinu (5.2.1) običnom diferencijalnom jednačinom po nepoznatim funkcijama $u(x,y_j)$, tako što ćemo parcijalne izvode po y zameniti formulom za približno diferenciranje:

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{y=y_j} = \frac{1}{h^2}\cdot[u(x,y_{j+1}) - 2u(x,y_j) + u(x,y_{j-1})],$$

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right|_{y=y_j} = \frac{1}{2h}\cdot[u'_x(x,y_{j+1}) - u'_x(x,y_{j-1})], \tag{5.2.4}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=y_j} = \frac{1}{2h}\cdot[u(x,y_{j+1}) - u(x,y_j)],\ (j=1,2,\ldots,n-1).$$

Uvedimo, takodje, oznake:
$u(x,y_j) = u_j(x)$, $u'_x(x,y_j) = u'_j(x)$, $u''_{xx}(x,y_j) = u''_j(x)$, $A(x,y_j) = A_j(x)$ itd. Tada iz (5.2.4) i (5.2.1) dobijamo sledeći sistem običnih diferencijalnih jednačina:

$$A_j(x)u''_j(x) + \frac{B_j(x)}{h}\cdot[u'_{j+1}(x)-u'_{j-1}(x)] + \frac{C_j(x)}{h^2}\cdot[u_{j+1}(x)-2u_j(x)+$$
$$+u_{j-1}(x)]+a_j(x)u'_j(x)+ \frac{b_j(x)}{2h}\cdot[u_{j+1}(x)-u_{j-1}(x)]+c_j(x)u_j= f_j(x),$$
$$(j=1,2,\ldots,n-1). \tag{5.2.5}$$

Pored toga, iz graničnih uslova (5.2.3) imamo

$$u_0(x) = \varphi_0(x),\ u_n(x) = \varphi_1(x) \tag{5.2.6}$$

i, otuda:

$$u''_0(x) = \varphi''_0(x),\ u''_n(x) = \varphi''_1(x).$$

Na taj način smo, sa jednačine (5.2.1), prešli na sistem (5.2.5) od n-1 običnih diferencijalnih jednačina sa n-1 nepoznatih funkcija $u_1(x), u_2(x),\ldots, u_{n-1}(x)$, gde su $u_0(x)$ i $u_n(x)$ poznate i odredjene formulama (5.2.6).

Sistem (5.2.5) naziva se <u>sistemom jednačina metode pravih.</u>

S obzirom da su koeficijenti i desne strane linearnog sistema (5.2.5) neprekidni na $[a,b]$ i $A_j(x) \neq 0$ za $a\leqslant x\leqslant b$, na osnovu teorije diferencijalnih jednačina sledi da je opšte rešenje

$$u_j(x) = \varphi_j(x,C_1,C_2,\ldots,C_{2n-2}),\ (j=1,2,\ldots,n-1)$$

sistema (5.2.5) definisano na $[a,b]$ i da sadrži 2n-2 proizvoljnih konstanti $C_1,C_2,\ldots,C_{2n-2}$ koje linearno figurišu u funkcijama φ_j.

Pretpostavimo da su $\underline{x}_j=g_0(y_j)$ i $\overline{x}_j=g_1(y_j)$ projekcije na x osu krajeva odsečaka M_jN_j koji leže na pravoj $y=y_j$ i pripadaju oblasti D. Tada, na osnovu formula (5.2.2), imamo granične uslove

$$\begin{aligned} u_j(\underline{x}_j) &= \psi_0(y_j),\\ u_j(\overline{x}_j) &= \psi_1(y_j), \end{aligned} \tag{5.2.7}$$

gde je $a \leqslant \underline{x}_j < \overline{x}_j \leqslant b$, $(j = 1,2,\ldots,n-1)$.

Time je granični problem (5.2.1), (5.2.2) sveden na rešavanje graničnog problema (5.2.5), (5.2.7) za sistem običnih diferencijalnih jednačina. Ako granični problem (5.2.5),(5.2.7) ma rešenje, ono se može dobiti ili analitičkim putem ili nekom d numeričkih metoda pri čemu je funkcije $u_j(x)$ neophodno odre-iti na celom intervalu $[a,b]$.

Kada nadjemo rešenje graničnog problema (5.2.5), (5.2.7) preostalim tačkama oblasti D, približno rešenje graničnog roblema (5.2.1), (5.2.2) nalazi se interpolacijom.

Specifičnost graničnog problema (5.2.5), (5.2.7) ogleda e u tome što je svaku od traženih funkcija $u_j(x)$ neophodno od-editi na celom intervalu $[a,b]$, znajući njene vrednosti u tač-ama izmedju $\underline{x}_j$ i $\overline{x}_j$ tog intervala. Ako nadjemo neku od funkci-a $u_j(x)$ samo za $\underline{x}_j \leqslant x \leqslant \overline{x}_j$, može se dogoditi da to ne bude ovoljno da bi se rešio problem. Problem je u tome što projek-ije na x-osu duži $y=y_j$, $(\underline{x}_j \leqslant x \leqslant \overline{x}_j)$, u opštem slučaju, ne po-rivaju projekcije susednih paralelnih duži $y=y_{j-1}$, $(\underline{x}_{j-1} \leqslant x \leqslant \overline{x}_{j-1})$ i $y=y_{j+1}$, $(\underline{x}_{j+1} \leqslant x \leqslant \overline{x}_{j+1})$, što znači da je za nalaženje ınkcija u_{j-1} ili $u_{j+1}(x)$ iz sistema (5.2.5), neophodno znati ednosti funkcije $u_j(x)$ i izvan isečka $[\underline{x}_j,\overline{x}_j]$.

U slučaju da su koeficijenti jednačine (5.2.1) i granični slovi (5.2.2) samo neprekidne funkcije, pri primeni metode avih pojavljuju se dodatne poteškoće, s obzirom da rešenje istema (5.2.5) zavisi od vrednosti koeficijenata i funkcija $_j(x)$ i $u_n(x)$ u R i izvan oblasti D, pri čemu ta ekstenzija ije jednoznačna.

Takvih poteškoća nema jedino u slučaju kada je oblast D avougaonik, čije su strane paralelne koordinatnim osama.

Zbog svega navedenog, češće se u praksi primenjuje metoda iferencnih shema (metoda mreža).

U višedimenzionim slučajevima, pomenuta metoda sa često aziva <u>metodom hiperravni</u> .

5.3. <u>Metoda Monte-Carlo</u>

Neka je D oblast u ravni xOy sa deo po deo glatkim rubom), i neka se kvadratna mreža D_h sa korakom h, definisana čvo-ovima

$$x_i = x_0 + i \cdot h, \; y_j = y_0 + j \cdot h, \; i,j \in \mathbb{D},$$

astoji samo od unutrašnjih tačaka i graničnih tačaka prvog eda. Pretpostavimo da se tačka M ravnomerno slučajno kreće po orovima mreže D_h. Iz početnog položaja u nekom unutrašnjem voru $M_{ij}(x_i,y_j) \in D_h$, tačka M se u jednom koraku, pri svom kretanju, sa podjednakom verovatnoćom jednakom 1/4 može naći u jednom od susednih čvorova $M_{i,j+1}$, $M_{i,j-1}$, $M_{i+1,j}$ ili $M_{i-1,j}$, pri čemu je svaki takav jedinični korak savršeno slučajan i ne zavisi od položaja tačke i prethodnog puta.

Rećićemo da se kretanje tačke M završava onda kada ona dospe na rub D_h^*. Dokazano je [49] da je verovatnoća da se kretanje tačke M u konačno mnogo koraka završi na rubu D_h^* jednaka jedinici.

Ako je tačka M započela svoje kretanje iz fiksne tačke $M_{i_0,j_0}\in D_h'$, konačan skup svih sukcesivnih položaja tačke M

$$M_{i_0,j_0},\ M_{i_1,j_1},\ \ldots,\ M_{i_s,j_s},$$

gde $M_{i_k,j_k}\notin D_h^*$, $(k=0,1,\ldots,s-1)$ i $M_{i_s,j_s}\in D_h^*$, naziva se trajektorijom (u s koraka) ili istorijom kretanja tačke M.

Za simulaciju ovakvog slučajnog kretanja koriste se tablice slučajnih brojeva ili generatori pseudoslučajnih brojeva u računarima. Iako je distribucija tako dobijenih brojeva ravnomerna, nijedan računar nije u stanju da generiše nizove savršeno slučajnih brojeva, već su to konačni nizovi brojeva koji se dobijaju manje ili više složenim postupcima. Otuda i naziv pseudoslučajni brojevi .

Neka je u tačkama ruba ∂D oblasti D definisana neka funkcija $\varphi(x,y)$. Tada funkciju $\varphi(x,y)$ aproksimiramo mrežnom funkcijom φ_{pq} na D_h^* na način opisan u paragrafu 5.1, tako da je za svaki granični čvor $M_{pq}(x_p,y_q)\in D_h^*$

$$\varphi_{pq} = \varphi(M_{pq}) = \varphi(N),$$

gde je $N\in\partial D$ tačka najbliža, po horizontali (ili vertikali), tački M_{pq}.

Neka je $P(i,j;p,q)$ verovatnoća da krajnja tačka trajektorije tačke M, koja počinje u $M_{ij}\in D_h'$, bude $M_{pq}\in D_h^*$. S obzirom da se kretanje tačke M neizbežno završava u prvoj tački trajektorije koja pripada rubu D_h^*, važi da je:

$$\sum_{p,q} P(i,j;p,q) = 1, \tag{5.3.1}$$

gde se sumiranje vrši po svim tačkama $M_{pq}\in D_h^*$, pri čemu je

$$P(p',q';p,q) = \begin{cases} 1 & ,\ \text{za } p' = p,\ q' = q \\ 0 & ,\ \text{za } |p'-p|+|q'-q| \neq 0,\ M_{p',q'}\in D_h^*. \end{cases} \tag{5.3.2}$$

Ako funkciju $\varphi(x,y)$ smatramo za slučajnu veličinu koja na D_h^* uzima vrednost $\varphi_{p,q}$, suma

$$v_{ij} = \sum_{p,q} P(i,j;p,q)\cdot\varphi_{pq}, \quad M_{pq}\in D_h^*, \tag{5.3.3}$$

predstavlja <u>matematičko očekivanje</u> funkcije $\varphi(x,y)$ na rubu D_h^* za trajektorije koje počinju u tački $M_{ij}(x_i,y_j)$.

Na osnovu formule potpune verovatnoće sledi da je:

$$P(i,j;p,q) = (1/4)\cdot[P(i-1,j;p,q) + P(i+1,j;p,q) + P(i,j-1;p,q) + P(i,j+1;p,q)]. \tag{5.3.4}$$

Kada formulu (5.3.4) pomnožimo da φ_{pq} i sumiramo po svim vrednostima p i q, na osnovu (5.3.3) dobijamo da je:

$$v_{ij} = (1/4)\cdot(v_{i-1,j}+v_{i+1,j}+v_{i,j-1}+v_{i,j+1}), \tag{5.3.5}$$

pri čemu je

$$v_{pq} = \varphi_{pq}, \; M_{pq} \in D_h^*. \tag{5.3.6}$$

Posmatraćemo, na primer, Dirichletov problem za odredjivanje harmonijske, u oblasti D, funkcije $u = u(x,y)$ koja na rubu ∂D uzima date vrednosti $\varphi(x,y)$.

Slično, kao u slučaju metode mreža, problem se svodi na nalaženje približnih vrednosti $u_{ij}=u(x_i,y_j)$ tražene funkcije $u(x,y)$ u unutrašnjim čvorovima M_{ij} neke mreže D_h uz uslov da su vrednosti u graničnim čvorovima $M_{pq}\in D_h^*$ pozitivne i jednake $\varphi_{pq} = \varphi(x_p,y_q)$.

Nepoznate vrednosti u_{ij} odredjuju se iz sistema linearnih jednačina

$$\left.\begin{aligned} u_{ij} &= (1/4)\cdot[u_{i-1,j}+u_{i+1,j}+u_{i,j-1}+u_{i,j+1}] \\ u_{pq} &= \varphi_{pq} \;. \end{aligned}\right\} \tag{5.3.7}$$

Očito se formule (5.3.7) preklapaju sa formulama (5.3.5) i (5.3.6) do na znak. Otuda tražene nepoznate u_{ij} možemo smatrati za matematička očekivanja v_{ij}.

Veličine v_{ij} moraju se eksperimentalno odrediti. Neka je N dovoljno veliki broj trajektorija tačke M po čvorovima mreže D_h koje počinju iz tačke M_{ij} i završavaju se u tačkama $(x^{(k)}, y^{(k)})$, $(k=1,2,\dots,N)$, na rubu D_h^*.

Zamenom matematičkog očekivanja v_{ij} empirijskim matematičkim očekivanjem, dobijamo formulu

$$u_{ij} = v_{ij} \approx (1/N)\cdot \sum_{k=1}^{N} \varphi(x^{(k)},y^{(k)}), \tag{5.3.8}$$

koja predstavlja statističku ocenu veličine $u_{i,j}$ i koja se koristi za nalaženje približnog rešenja Dirichletovog problema.

Metod rešavanja graničnih problema korišćenjem slučajnih veličina naziva se metodom Monte-Carlo .

Prednost ove metode sastoji se u tome što ona omogućuje da se nadje približna vrednost $u_{i,j}$ rešenja Dirichletovog problema u jedinstvenoj fiksnoj tački $M_{i,j} \in D_h'$ bez poznavanja vrednosti rešenja u preostalim tačkama mreže D_h'.

Nedostatak ove metode je, pre svega, u tome što empirijsko matematičko očekivanje

$$v_{i,j} = (1/N) \cdot \sum_{k=1}^{n} \varphi(x_p^{(k)}, y_q^{(k)}),$$

sporo konvergira matematičkom očekivanju $v_{i,j}$ kada $N \to \infty$.

To je razlog što se ranije ova metoda nije često koristila. Danas je metoda Monte-Carlo u mnogome poboljšana različitim modifikacijama slučajnog kretanja. Problem spore konvergencije prevazidjen je i razvojem brzih računara koji su u stanju da obrade velike količine podataka za relativno kratko vreme.

5.4. Varijacione metode rešavanja graničnih problema

Varijacione metode približnog rešavanja graničnih problema za diferencijalne jednačine rezultat su oblasti funkcionalne analize koja se naziva varijacionim računom.

Neka je $K = \{y(x)\}$ neka klasa funkcija n nezavisnih realnih promenljivih $x=(x_1,\dots,x_n)$, $n \in \mathbb{N}$. Promenljiva veličina $I = I[y(x)]$ naziva se funkcionalom na K, ako svakom $y(x) \in K$ dodeljuje po nekom pravilu broj $I \in \mathbb{R}$. Pritom je klasa K oblast definisanosti funkcianala I, a funkcije $y(x) \in K$ nazivaju se dopustivim funkcijama.

Kažemo da je na K definisan operator L ako svakoj funkciji $y \in K$, po nekom pravilu, odgovara jedna i samo jedna funkcija $z = L(y)$ koja, u opštem slučaju, može da zavisi od nekih drugih promenljivih $t=(t_1,\dots,t_m)$. U tom slučaju je klasa K oblast definisanosti operatora L, a funkcije $y \in K$ su tzv. dopustive funkcije za operator L.

Ako je K klasa realnih funkcija definisanih i neprekidnih u nekoj oblasti w i $u \in K$, $v \in K$, broj

$$(u,v) = \int_{\omega} u \cdot v \, dw$$

aziva se <u>skalarnim proizvodom</u> funkcija u i v. Očito je $(u,v) = (v,u)$.

Neka je linearni operator L definisan na linearnom prostoru funkcija u definisanih i neprekidnih u oblasti w i ako su jegove vrednosti Lu funkcije definisane i neprekidne u w, ada se operator L naziva <u>simetričnim</u> u slučaju da za svake dve opustive funkcije u i v važi da je:

$$(Lu,v) = (u,Lv). \tag{5.4.1}$$

Ako, pored toga, za svako $u \in K$ važi da je $(Lu,u) \geqslant 0$, pri əmu je $(Lu,u) = 0$ onda i samo onda kada je $u \equiv 0$, operator L se aziva <u>pozitivnim</u> .

Problem odredjivanja ekstremuma funkcionala $I = I[u(x)]$ a klasi funkcija $K = \{y(x)\}$, naziva se <u>varijacionim problemom.</u> adatak se, preciznije, svodi na nalaženje funkcije $y = y(x) \in K$ akve da za sve dopustive funkcije $\bar{y}=\bar{y}(x)$ u dovoljno maloj okoini funkcije $\bar{y}(x)$ važi nejednakost:

$$I[y] > I[\bar{y}] \quad \text{u slučaju minimuma,}$$

li

$$I[y] < I[\bar{y}] \quad \text{u slučaju maksimuma.}$$

Pretpostavimo da je u oblasti D sa rubom ∂D data linearna iferencijalna jednačina sa neprekidnim koeficijentima (obična li parcijalna) i da treba naći rešenje y te jednačine koje na ubu ∂D zadovoljava date linearne homogene granične uslove. əvu stranu te jednačine možemo da tretiramo kao linearni operator L definisan na skupu K funkcija sa neprekidnim izvodima ɔvoljno visokog reda u $D + \partial D$, koji zadovoljavaju date granič- ə uslove na ∂D.Na taj način se granični problem svodi na rešaanje operatorske jednačine

$$Ly = f(P), \tag{5.4.2}$$

de P označava skup nezavisnih promenljivih, f(P) je data funcija i $y \in K$, pri čemu rešenje y, na rubu ∂D,mora da zadovoljava -anični uslov

$$R[y] = 0, \tag{5.4.3}$$

de je R dati linearni funkcional ili operator nižeg reda od L.

Nehomogeni granični problem

$$Ly = f(P), \tag{5.4.4}$$

$$R[y] = \varphi(P), \; P \in \partial D, \tag{5.4.5}$$

gde je $\varphi(P)$ poznata funkcija, svodi se na homogeni, ako uvedemo smenu

$$y = z + y_1,$$

gde je z nova nepoznata funkcija i y_1 dovoljno glatka funkcija koja zadovoljava granični uslov (5.4.5).

Tada iz (5.4.4) i (5.4.5) dobijamo

$$Lz = f(P) - Ly_1,$$
$$R[z] = 0.$$

Ideja varijacionog metoda, u našem slučaju, sastoji se u tome da se granični problem (5.4.2), (5.4.3) zameni ekvivalentnim problemom odredjivanja ekstremuma (obično minimuma) nekog funkcionala. Varijacioni metod rešavanja graničnih problema dobija veoma mnogo u značaju od kada je nemački matematičar W. Ritz 1908. godine došao do primenljive tehnike za odredjivanje približnog rešenja varijacionog problema.

U vezi s tim važe sledeće teoreme:

<u>Teorema 5.4.1.</u> Neka je L simetrični linearni operator, definisan i pozitivan u klasi K. Ako postoji rešenje graničnog problema (5.4.2), (5.4.3), ono je jedinstveno.!!

<u>Teorema 5.4.2.</u> Neka je L simetrični operator, definisan i pozitivan u klasi K, a F[y] funkcional oblika:

$$F[y] = (Ly,y) - 2(f,y) \equiv \int_{\omega} (Ly - 2f)y dw, \qquad (5.4.6)$$

gde je f=f(P) desna strana jednačine (5.4.2).

Ako granični problem (5.4.2), (5.4.3) sa homogenim graničnim uslovima ima rešenje $\bar{y}$, tada je $\bar{y}$ minimum funkcionala F[y].

Obratno, ako u klasi K postoji funkcija $\bar{y}$, jednaka minimumu funkcionala (5.4.6), ta funkcija je, istovremeno, i rešenje jednačine (5.4.2).!!

Varijacione metode rešavanja graničnog problema ilustrovaćemo na primeru eliptičke parcijalne diferencijalne jednačine

$$-\Delta u = f(x,y), \quad f(x,y)\in C(D). \qquad (5.4.7)$$

Treba naći rešenje jednačine (5.4.7) neprekidno u zatvorenoj oblasti $\bar{D} = D + \partial D$, koje na rubu ∂D zadovoljava granični uslov

$$u|_{\partial D} = \varphi(x,y). \tag{5.4.8}$$

Pretpostavimo, prvo, da je $\varphi(x,y)\equiv 0$, tj. da je

$$u|_{\partial D} = 0. \tag{5.4.8'}$$

Dokazano je [49] da je u klasi $K = \{u(x,y)\}$ funkcija neprekidnih u $\mathrm{cl}D$ zajedno sa svojim prvim i drugim izvodima, koje su na ∂D jednake nuli, operator

$$Lu = -\Delta u \tag{5.4.9}$$

simetričan i pozitivan. Otuda, granični problem (5.4.7), (5.4.8') zadovoljava uslove teoreme (5.4.2), pa je ekvivalentan varijacionom problemu za funkcional

$$F[u] = (Lu,u) - 2(u,f)$$

u klasi funkcija $u\in K$. Pritom je:

$$F[u] = \int_D\int [(u_x')^2 + (u_y')^2 - 2fu]\, dxdy. \tag{5.4.10}$$

Neka je $K_1 = \{u(x,y)\}$ klasa funkcija $u\in C^{(2)}(D+\partial D)$ koje zadovoljavaju nehomogeni uslov (5.4.8) i neka je $z=z(x,y)\in K_1$ i

$$v(x,y) = u(x,y) - z(x,y), \tag{5.4.11}$$

gde je $u(x,y)$ rešenje nehomogenog graničnog problema (5.4.7), (5.4.8). Tada funkcija $v=v(x,y)$ zadovoljava, na konturi ∂D, homogeni granični uslov

$$v|_{\partial D} = 0 \tag{5.4.12}$$

i rešenje je jednačine

$$Lv = Lu - Lz = f(x,y) - Lz, \tag{5.4.13}$$

gde je $Lz = -(z_{xx}''+z_{yy}'')$ poznata funkcija. Rešenje $v=v(x,y)$ problema (5.4.12),(5.4.13) je istovremeno i minimum funkcionala

$$F[v] = (Lv,v) - 2(v,f(x,y)-Lz). \tag{5.4.14}$$

Dokazuje se [49] da je i granični problem (5.4.7), (5.4.8) ekvivalentan varijacionom problemu za funkcional $F[u]$ definisan relacijom (5.4.10) u klasi K_1.

Daleko opštiji primer dat je u [127'], gde se posmatra Dirichlet-Neumannov problem za eliptičku jednačinu oblika

$$Lu \equiv -\sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_j} A_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{2} B_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + q(x)u = f, \tag{5.4.15}$$

$$x = (x_1,x_2)\in D,$$

u Hilbertovom prostoru $L_2(D)$.

Metode Ritza i Galerkina

Neka je dat neki funkcional oblika

$$F[u] = (Lu,u) - 2(f,u) \tag{5.4.16}$$

definisan na nekom linearnom prostoru funkcija $K = \{u\}$, gde je L pozitivni simetrični linearni operator i f data neprekidna funkcija. Pretpostavimo da funkcije klase K zadovoljavaju linearni granični uslov

$$R[u] = \varphi(x,y), \tag{5.4.17}$$

gde je R poznati linearni funkcional i φ data funkcija.

Pretpostavimo da je

$$u_0(x,y),\ u_1(x,y),\ \ldots,\ u_n(x,y) \tag{5.4.17'}$$

niz dovoljno glatkih linearno nezavisnih funkcija, gde $u_0(x,y)$ zadovoljava uslov (5.4.17), a $u_i(x,y)$, $(i=1,2,\ldots,n)$, zadovoljavaju homogeni uslov $R[u_i] = 0$, $(i=1,2,\ldots,n)$.

Linearna kombinacija

$$u(x,y;C_1,\ldots,C_n) = u_0(x,y) + \sum_{i=1}^{n} C_i \cdot u_i(x,y) \tag{5.4.18}$$

zadovoljava relaciju (5.4.17), pa je $u \in K$ za proizvoljan izbor realnih konstanti $C_1,\ldots,C_n$.

Približno rešenje varijacionog problema (5.4.16), (5.4.17) tražimo u obliku (5.4.18). Polazimo od toga što uvrstimo funkciju $u(x,y;C_1,\ldots,C_n)$ u funkcional (5.4.16). Tako dobijamo

$$F[u] = \Phi(C_1,\ldots,C_n), \tag{5.4.19}$$

gde je Φ poznata funkcija koja zavisi od n promenljivih $C_1,\ldots$ $\ldots,C_n$. Koeficijente $C_1,\ldots,C_n$ funkcije (5.4.18) tražimo tako da $F[u]$ bude minimalna, tj. iz sistema

$$\frac{\partial \Phi}{\partial C_1} = 0\ ,\ \frac{\partial \Phi}{\partial C_2} = 0\ ,\ \ldots\ ,\ \frac{\partial \Phi}{\partial C_n} = 0. \tag{5.4.20}$$

Na taj način se varijacioni problem (5.4.16), (5.4.17) približno svodi na odredjivanje ekstremuma funkcije Φ više promenljivih. Tačnost rešenja zavisi od broja n promenljivih funkcija Φ.

U slučaju, na primer, graničnog problema u oblasti D:

$$\Delta u = 0,\ (x,y) \in D \tag{5.4.21}$$

$$u|_{\partial D} = f(x,y), \tag{5.4.22}$$

gde je ∂D prosta zatvorena kontura i $f(x,y)\in C(D)$, na osnovu (5.4.10) varijacioni problem se svodi na odredjivanje minimuma funkcionala

$$F[u] = \iint_D [(u'_x)^2 + (u'_y)^2]\,dxdy \qquad (5.4.23)$$

u klasi funkcija iz $C^{(2)}(D)$ koje zadovoljavaju uslov (5.4.22).

Na osnovu Ritzove metode, rešenje tražimo u obliku (5.4.18). Iz (5.4.18) i (5.4.23) sledi da je

$$F[u] = \iint_D [(\sum_{i=0}^{n} c_i\cdot\frac{\partial u_i}{\partial x})^2 + (\sum_{i=0}^{n} c_i\cdot\frac{\partial u_i}{\partial y})^2]dxdy = 0, \qquad (5.4.24)$$

$$(j=1,2,\ldots,n)$$

pa minimum funkcionala (5.4.24) tražimo iz sistema jednačina:

$$\begin{aligned}
&[u_0,u_1] + C_1\cdot[u_1,u_1] + \cdots + C_n\cdot[u_n,u_1] = 0\\
&[u_0,u_2] + C_1\cdot[u_1,u_2] + \cdots + C_n\cdot[u_n,u_2] = 0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&[u_0,u_n] + C_1\cdot[u_1,u_n] + \cdots + C_n\cdot[u_n,u_n] = 0\ ,
\end{aligned} \qquad (5.4.25)$$

gde je

$$[u_i,u_j] = \iint_D (\frac{\partial u_i}{\partial x}\cdot\frac{\partial u_j}{\partial x} + \frac{\partial u_i}{\partial y}\cdot\frac{\partial u_j}{\partial y})dxdy \qquad (5.4.26)$$

i

$$[u_i,u_j] = [u_j,u_i]. \qquad (5.4.27)$$

Funkcija $u(x,y;C_1,\ldots,C_n)$ oblika (5.4.18) sa koeficijentima dobijenim iz sistema (5.4.25) predstavlja približno rešenje Dirichletovog problema (5.4.21) i (5.4.22), čija tačnost zavisi od izbora koordinatnih funkcija $u_k(x,y)$ i njihovog broja.

Osnovni nedostatak Ritzovog metoda je u tome što se on može primenjivati samo u slučajevima jednačina sa simetričnim i pozitivnim operatorima. To ograničenje ne važi za metod momenata koji ćemo ovde ukratko opisati na primeru linearne jednačine eliptičkog tipa (5.2.1), gde su koeficijenti jednačine i slobodni član $f(x,y)$ neprekidni u oblasti D ograničenoj konturom ∂D, i graničnog uslova

$$u|_{\partial D} = \varphi(x,y). \qquad (5.4.28)$$

Za odredjivanje približnog rešenja graničnog problema (5.2.1) i (5.4.28) potrebna su nam dva skupa pomoćnih funkcija

$$\{\varphi_k(x,y)\},\ \{\Psi_k(x,y)\},\ k=0,1,2,\ldots \qquad (5.4.29)$$

koje ispunjavaju sledeće uslove:

1. Funkcije $\psi_k(x,y)$, $k=0,1,\dots$, neprekidne su u oblasti D.

2. Funkcije $\psi_k(x,y)$, $k=0,1,\dots$, obrazuju u $C(D)$ zatvoren sistem u tom smislu da iz relacija

$$\iint_D F(x,y)\cdot\psi_k(x,y)dxdy = 0,\ k=0,1,2,\dots,$$

gde je $F(x,y)\in C(D)$, sledi da je $F(x,y)\equiv 0$.

3. Funkcije $\varphi_k(x,y)$, $k=0,1,2,\dots$, su dva puta neprekidno diferencijabilne u $\mathrm{cl}D = D + \partial D$.

4. Za proizvoljno $n \in \mathbb{N}$ funkcije $\varphi_1(x,y),\ \dots,\ \varphi_n(x,y)$ su linearno nezavisne u D.

5. $\varphi_0|_{\partial D} = \varphi(x,y)$ i $\varphi_k|_{\partial D} = 0$, $k=1,2,\dots$.

6. Za proizvoljnu dva puta neprekidno diferencijabilnu u D funkciju $u(x,y)$ koja zadovoljava uslov (5.4.28) i proizvoljno $\varepsilon>0$, postoje takvi brojevi n i $C_1, C_2, \dots, C_n$ koji zadovoljavaju uslove:

$$\left|\frac{\partial^i u(x,y)}{\partial x^i} - \frac{\partial^i u_n(x,y)}{\partial x^i}\right| < \varepsilon,$$

$$\left|\frac{\partial^i u(x,y)}{\partial y^i} - \frac{\partial^i u_n(x,y)}{\partial y^i}\right| < \varepsilon, \qquad (i=0,1,2)$$

$$\left|\frac{\partial^i u(x,y)}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^i u_n(x,y)}{\partial x\partial y}\right| < \varepsilon,$$

gde je

$$u_n(x,y) = \varphi_0(x,y) + \sum_{k=1}^{n} C_k\cdot\varphi_k(x,y).$$

Funkcija $u_n(x,y)$ naziva se <u>n-tom aproksimacijom</u> rešenja graničnog problema (5.2.1) i (5.4.28) ako se konstante C_k, ($k= 1,2,\dots,n$), odredjuju po sledećem pravilu: uvrstimo u $L[u]$, umesto funkcije u, linearnu kombinaciju u_n, pa, zatim, konstante C_k odredjujemo iz uslova ortogonalnosti $L[u_n] - f$ u odnosu na prvih n funkcija $\psi_k(x,y)$:

$$\iint_D (L[u_k] - f)\cdot\psi_k(x,y)dxdy = 0,\ k=0,1\dots,n-1. \qquad (5.4.30)$$

Formula (5.4.30) predstavlja sistem linearnih algebarskih jednačina oblika:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki}C_i + a_k = 0,\ k=0,1,\dots,n-1, \qquad (5.4.31)$$

gde je

$$a_{ki} = \iint_D L[\varphi_i]\cdot\psi_k\, dxdy,$$

$$a_k = \iint_D (L[\varphi_0] - f)\cdot\psi_k dxdy.$$

Ako je $C_1^*, C_2^*, \dots, C_n^*$ rešenje sistema (5.4.31), tada se n - ta aproksimacija pomenutog graničnog problema, metodom momenata, dobija iz formule

$$u_n^*(x,y) = \varphi_0(x,y) + \sum_{k=1}^{n} c_k^* \cdot \varphi_k(x,y). \qquad (5.4.32)$$

Metod Galerkina predstavlja poseban slučaj metode momenata. Sistem funkcija se, u tom slučaju, bira na isti način kao kod metode momenata, a funkcije $\psi_k(x,y)$ odredjuju se po pravilu

$$\psi_k(x,y) = \varphi_{k+1}(x,y), \quad k=0,1,2,\ldots .$$

U monografiji [130] data je kompletna teorija metode Galerkina i opisana je njegova numerička realizacija.

Pomenimo još, da se veoma često varijacioni problemi, koji proističu iz graničnih problema za parcijalne jednačine, rešavaju i metodom najmanjih kvadrata [127'].

5.5. Približno rešavanje graničnih problema pomoću tačnih rešenja približnih problema

Jedna posebna metoda približnog rešavanja graničnih problema za analitičke funkcije, a samim tim i za široku klasu problema matematičke fizike, opisana je detaljno u monografiji F.D.Gahova i J.I.Čerskog [71]. Ta metoda, po svojoj prirodi, ne spada u numeričku analizu, već je posledica nekih rezultata funkcionalne analize.

Neka je data linearna nehomogena jednačina po nepoznatoj f, oblika

$$Lf = g, \qquad (5.5.1)$$

gde je L dati linearni operator koji preslikava linearni prostor X u linearni prostor Y i $g \in Y$. Približno rešavanje jednačine (5.5.1) se, u mnogim slučajevima, može svesti na nalaženje tačnog rešenja jednostavnije približne jednačine

$$\tilde{L}\tilde{f} = \tilde{g}, \qquad (5.5.2)$$

uz dodatni zahtev da je

$$f - \tilde{f} \in X_0 \subset X, \qquad (5.5.3)$$

gde je X_0 neki pogodno izabrani linearni potprostor prostora X.

<u>Teorema 5.5.1.</u> [71] Neka:

1. jednačina (5.5.2) ima jedinstveno rešenje $\tilde{f}$;
2. $g - \tilde{g} \in Y_0$, gde je Y_0 linearni potprostor prostora Y;

3. operator $L - \tilde{L}$ preslikava X u Y_0;

4. na Y_0 je definisan inverzni operator $\tilde{L}^{-1} : Y_0 \to X_0$;

5. operator $I + \tilde{L}^{-1}(L - \tilde{L})$ na X_0 ima sebi inverzan operator, gde je I jedinični operator.

Tada jednačina (5.5.1) ima jedinstveno rešenje oblika:

$$f = \tilde{f} + [I + \tilde{L}^{-1}(L - \tilde{L})]^{-1}\tilde{L}^{-1}(g - L\tilde{f}). \tag{5.5.4}$$

Pritom je ispunjen uslov (5.5.3) i

$$L\tilde{f} - g \in Y_0 \ .!! \tag{5.5.5}$$

Ova teorema je posebno značajna u slučaju kada u X_0 nije uvedena norma. Kada u X_0 postoji definisana norma, važi sledeći stav:

<u>Teorema 5.5.2.</u> Ako su ispunjeni uslovi 1-4 prethodne teoreme, pri čemu je X_0 Banachov prostor, a uslov 5. zamenjen uslovom

$$||\tilde{L}^{-1}(L - L)|| \leqslant 1, \tag{5.5.6}$$

ostaju na snazi sva tvrdjenja teoreme 5.5.1 i, pritom, još i ocena greške

$$||f - \tilde{f}||_{X_0} < \frac{||\tilde{L}^{-1}(g - Lf)||_{X_0}}{1 - ||\tilde{L}^{-1}(L-\tilde{L})||} \ .!! \tag{5.5.7}$$

Ove dve teoreme se mogu iskoristiti za približno rešavanje Riemannovog i Carlemanovog graničnog problema za analitičke funkcije, kao i za rešavanje niza tipova integralnih jednačina sa konvolucijama. U ovom tekstu navešćemo samo kratak prikaz približnog rešavanja Riemannovog i Carlemanovog problema. Koristićemo se, pritom, rezultatima iz paragrafa 1.6 i 1.7 .

Neka je Riemannov granični problem u ravni zadat graničnim uslovom

$$[1 + K_1(x)]\cdot F^+(x) - [1 + K_2(x)]\cdot F^-(x) = G(x), \ -\infty<x<\infty, \tag{5.5.8}$$

gde je $F^+(x)\in L_2^+$ i $F^-\in L_2^-$, (videti stranu 8), i $G(x)\in L_2(-\infty,\infty)$.

Po uzoru na opšti slučaj (5.5.1) i (5.5.2) definišemo operatore:

$$Lf \equiv [1 + K_1(x)]\cdot F^+(x) - [1 + K_2(x)]\cdot F^-(x), \tag{5.5.9}$$

$$\tilde{L}f \equiv [1 + \tilde{K}_1(x)]\cdot F^+(x) - [1 + \tilde{K}_2(x)]\cdot F^-(x). \tag{5.5.10}$$

S obzirom da je, u našem slučaju, $Y\equiv L_2(-\infty,\infty)$, da bi operatori L i $\tilde{L}$ preslikavali X u Y, dovoljno je da funkcije K_1, K_2,

$\widetilde{K}_1$, $\widetilde{K}_2$ budu ograničene.

Uvedimo sledeće oznake:

$$\widetilde{X}^{\pm}(x) = \exp \{ \pm P^{\pm} \ln \frac{1 + \widetilde{K}_2(x)}{1 + \widetilde{K}_1(x)} \} \qquad (5.5.11)$$

gde su P^+ i P^- <u>projekcioni</u> operatori takvi da je $P^+ + P^- = I$,

$$M = \max \{\max_x |\widetilde{X}^+(x)|, \max_x |\widetilde{X}^-(x)|\} \qquad (5.5.12)$$

i

$$\varepsilon = \max\{\max_x \left| \frac{K_1(x)-\widetilde{K}_1(x)}{[1+\widetilde{K}_1(x)]\widetilde{X}^+(x)} \right|, \max_x \left| \frac{K_2(x)-\widetilde{K}_2(x)}{[1+\widetilde{K}_1(x)]\widetilde{X}^+(x)} \right|\}. \qquad (5.1.13)$$

<u>Teorema 5.5.3.</u> [71] Neka su u graničnom uslovu Riemanna (5.5.8) funkcije $K_1(x)$ i $K_2(x)$ ograničene i neka je $2^{1/2}M\cdot\varepsilon < 1$. Tada, za proizvoljnu funkciju $G(x)\in L_2(-\infty,\infty)$ problem (5.5.8) ima jedinstveno rešenje oblika (5.5.4), gde je

$$\widetilde{f} = \begin{bmatrix} \widetilde{F}^+(x) \\ \widetilde{F}^-(x) \end{bmatrix}$$

rešenje približnog Riemannovog graničnog problema

$$[1+\widetilde{K}_1(x)]\cdot\widetilde{F}^+(x) - [1+\widetilde{K}_2(x)]\cdot\widetilde{F}^-(x) = \widetilde{G}(x). \qquad (5.5.14)$$

Srednje kvadratno odstupanje izmedju tačnog i približnog rešenja problema (5.5.8) ocenjuje se pomoću formule:

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} |F^+(x) - \widetilde{F}^+(x)|^2 dx + \int_{-\infty}^{\infty} |F^-(x) - \widetilde{F}^-(x)^2| dx \right)^{1/2} \leq \qquad (5.5.15)$$

$$\leq \frac{M}{1-2^{1/2}M\varepsilon} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{G(x)-[1+K_1(x)]\widetilde{F}^+(x)-[1+K_2(x)]\widetilde{F}^-}{[1+\widetilde{K}_1(x)]\widetilde{X}^+(x)} \right|^2 dx \right)^{1/2} .!!$$

Ova teorema, pored teorijskog, ima i veliki praktični značaj. Ona daje dovoljno podataka o Riemannovom graničnom problemu (5.5.8) i u slučaju kada funkcije $K_1(x)$ i $K_2(x)$ ne zadovoljavaju Hölderov uslov, već kada su samo merljive i ograničene. Teorema 5.5.3 važi čak i onda kada funkcije $K_1(x)$ i $K_2(x)$ imaju prekide u proizvoljnoj okolini proizvoljne tačke $x \in \partial D$.

Pretpostavimo, dalje, da je dat Carlemanov granični problem za oblast $D = \{0<\operatorname{Im}z<1\}$:

$$\Phi(x) + [1 + D(x)]\cdot\Phi(x+i) = G(x), \quad -\infty < x < \infty \qquad (5.5.16)$$

takav da tražena funkcija $\Phi(z)$ mora da bude analitička u oblasti D i da za svako $y \in [0,1]$ zadovoljava uslov

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x+iy)|^2 dx < C. \qquad (5.5.17)$$

Pritom je $G(x) \in L_2(-\infty,\infty)$.

Definišemo operatore:

$$L\varphi \equiv \varphi(x) + [1 + D(x)]\cdot\varphi(x+i), \qquad (5.5.18)$$

$$\widetilde{L}\varphi \equiv \varphi(x) + [1 + \widetilde{D}(x)]\cdot\varphi(x+i), \qquad (5.5.19)$$

gde je prostor $Y = L_2(-\infty,\infty)$, a za prostor X uzimamo skup svih funkcija $\varphi(x)$ koje imaju analitičko produženje na pojasu $0<\mathrm{Im}\ z<1$ i koje zadovoljavaju uslov (5.5.17).

Tada je približni Carlemanov problem dat graničnim uslovom

$$\widetilde{L}\widetilde{\varphi} \equiv \widetilde{\varphi}(x) + [1 + \widetilde{D}(x)]\cdot\widetilde{\varphi}(x+i) = \widetilde{G}(x) \ , \ -\infty<x<\infty \ . \qquad (5.5.20)$$

Da bi ovaj problem imao jedinstveno rešenje, dovoljno je pretpostaviti da je

$$1+\widetilde{D}(x) \neq 0,\ \widetilde{D}(x) \text{ neprekidna},\ \widetilde{D}(\pm\infty)=0,\ \mathrm{Ind}[1+\widetilde{D}(x)]=0. \qquad (5.5.21)$$

Pomoću rezultata teorije uopštenih funkcija može se dokazati da uvek postoji kanonska funkcija $\widetilde{X}(z)$ koja zadovoljava uslov:

$$1 + \widetilde{D}(x) = \widetilde{X}(x)/\widetilde{X}(x+i). \qquad (5.5.22)$$

Kada znamo kanonsku funkciju $\widetilde{X}(z)$, inverzni operator $\widetilde{K}^{-1}$ se može dobiti u obliku

$$\widetilde{K}^{-1}\widetilde{G} \equiv \widetilde{X}(x)\cdot V[\frac{1}{1+e^{-1}}\cdot V^{-1}(\frac{\widetilde{G}}{\widetilde{X}})], \qquad (5.5.23)$$

gde su V i V^{-1} oznake za direktnu i inverznu Fourierovu transformaciju.

Operator $\widetilde{K}^{-1}$ preslikava $Y_0 = L_2(-\infty,\infty)$ u prostor X. Pretpostavimo da je $X_0 = X$ i uvedimo normu:

$$||\varphi||_{X_0} = \max\ \{(\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)|^2 dx)^{1/2}, (\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x+i)|^2 dx)^{1/2}\}. \qquad (5.5.24)$$

<u>Teorema 5.5.4.</u> [71] Neka je u Carlemanovom problemu (5.5.16) funkcija $D(x)$ ograničena i zadovoljava nejednakost

$$M\cdot\max_x\ |[D(x)-\widetilde{D}(x)]/\widetilde{X}(x)| < 1, \qquad (5.5.25)$$

gde je

$$M = \max\ \{\ \max_x\ |\widetilde{X}(x)|,\ \max_x\ |\widetilde{X}(x+i)|\ \}. \qquad (5.5.26)$$

Tada za proizvoljnu funkciju $G(x) \in G_2(-\infty,\infty)$ problem (5.5.6) ima jedinstveno rešenje oblika (5.5.4) u prostoru X, gde je $= \tilde{\Phi}(x)$ rešenje približnog Carlemanovog problema (5.5.20). Greška približnog rešenja procenjuje se pomoću formule (5.5.7) norme (5.5.24).!!

U pomenutoj monografiji [71] (strane (206-216) dati su rojni primeri primene opisane približne metode pri rešavanju aznih graničnih problema matematičke fizike koji se, tehnikom ourierovih transformacija, opisanim u glavi 1, mogu svesti na iemannov ili Carlemanov granični problem.

5.6. Kratak istorijski osvrt

Primena metode konačnih razlika u rešavanju diferencijalih jednačina matematičke fizike zahtevala je detaljno izučavaje konvergencije i stabilnosti diferencnih shema.

Razvoj teorije stabilnosti i konvergencije ubrzan je akon što se u toku rada na računarima pokazalo da diferencne heme, koje aproksimiraju korektne diferencijalne granične proleme, mogu biti nestabilne.

Sredinom pedesetih godina A.F.Filipov [62], P.D.Lax [119], 121], R.D.Richtmayer [171],[172] i J.Neumann [138] su istovreeno i sa različitih aspekata formulisali sledeći osnovni reultat: ako je linearni homogeni diferencijalni problem korekan i diferencna shema aproksimira taj problem, tada je stailnost diferencne sheme neophodan i dovoljan uslov za konverenciju rešenja diferencne sheme ka rešenju polaznog problema. konačnom obliku za apstraktne jednačine u Banachovom prostou, ovu teoremu su dokazali V.S.Rjabenki i A.F.Filipov [174].

Neumann i Richtmayer su formulisali,u [138],lokalni krierijum stabilnosti koji važi samo za jednačine sa konstantnim oeficijentima u slučaju simetričnih operatora.

Mnogo radova posvećeno je pitanjima teorije stabilnosti iperboličkih i paraboličkih diferencijalnih parcijalnih jednaina. Opširan prikaz te problematike dat je u monografiji G.I. arčuka [127'].

Veoma važnu klasu diferencnih shema, tzv. sheme sa pozitivnim operatorima, uveo je K.Friedrichs koji je u [65] ustaovio i dovoljne uslove njihove stabilnosti u L_2.

S.K.Godunov i V.Š.Rjabenkii [74], [75] uveli su pojam spektra familije diferencijalnih operatora, što im je omogućilo da formulišu neophodne uslove stabilnosti diferencijalnih jednačina. Uveden je i pojam jezgra spektra familije diferencnih jednačina. U terminima radijusa jezgra spektra data je ocena norme stepena operatora familije, pri čemu se pokazalo da je ta ocena ravnomerna za svaku familiju i da se može koristiti za izučavanje stabilnosti.

Pomenuti kriterijumi stabilnosti nazivaju se spektralnim. Ovim kriterijumima može se ispitati konvergencija po normi u L_2. Osobinu stabilnosti diferencnih shema u C ispitivali su S. I.Serdjakova [186], V.Tihomeé [205], A.A.Samarski [181] i dr.

Teoriju aproksimacije i konvergencije sa opšteg stanovišta funkcionalne analize razvili su L.V.Kantorovič i G.P.Akilov [96] koji su izučavali široku klasu operatorskih jednačina poklanjajući posebnu pažnju problemima numeričkog rešavanja integralnih jednačina.

Značajnu ulogu u teoriji konvergencije imaju rezultati S. L.Soboleva [191] u teoriji zatvorenja numeričkog algoritma, koji se često koriste za teorijsko zasnivanje metoda približnog rešavanja problema matematičke fizike.

Teorije aproksimacija, stabilnosti i konvergencije predstavljaju neophodnu osnovu za efektivno konstruisanje diferencnih shema za približno rešavanje graničnih problema. Poslednjih godina metode konstruisanja diferencnih shema razvijale su se ubrzano u mnogo različitih pravaca.

Jedan od tih pravaca vezan je za razvoj metoda konstruisanja konzervacionih diferencnih shema zasnovanih na zakonu očuvanja svojstvenom većini fizičkih procesa.

Koristeći principe teorije konzervacionih diferencnih shema,O.A.Ladiženskaja [122] konstruisala je operator za jednačine sa prekidnim koeficijantima, koji ima jedinstvenu formu u proizvoljnoj tački unutrašnjosti date oblasti. Za formiranje algoritma iskorišćen je pojam uopštenog rešenja i dokazano je da rešenje diferencnog problema obrazuje neki funkcional koji za $h \to 0$ prelazi u funkcional diferencijalnog problema.

Konzervacione diferencne sheme u hidrodinamici izučavali su S.K.Godunov [74'], P.D.Lax i B.Wendroff [120],na osnovu eksplicitnih diferencnih aproksimacija.

U novije vreme vlada veliko interesovanje za konstruisa-

je rešenja problema matematičke fizike, visokog stepena tač-
ıosti. U tom smislu se istraživanja vrše pretežno u dva pravca.
'rvi se odnosi na povišavanje poretka aproksimacije diferencnih
ednačina ([182], [93] ,[132] itd). Drugi pravac se odnosi na
ehnike konstruisanja rešenja na osnovu diferencnih jednačina
elativno niskog reda na nizu mreža sa promenljivim koracima.
)va metoda se naziva ekstrapolacijom po Richardsonu i razvili
u je E.A.Volkov [221], L.Fox ,P.Henrici,C.Moler [64] i drugi.

Metode konstruisanja diferencnih shema za jednačine elip-
ičkog i paraboličkog tipa sa prekidnim koeficijentima dali
u, na osnovu integro-interpolacionih metoda, A.N.Tihonov i
.A.Samarski [207] i drugi autori.

Najkompletnije teorijske osnove ove metode dao je S.G.
ihlin [130] koji je ustanovio neophodne i dovoljne uslove sta-
ilnosti varijacionih metoda u prostoru sa energetskom normom.

Osnovni nedostatak varijacionih metoda sastoji se u teš-
oćama koje nastaju pri izboru odgovarajućih pomoćnih funkcija.

Zahvaljujući radovima R.Couranta [24], J.L.Lionsa i R.
'emama [123], J.Céa [21],[22], J.P.Aubina [6],[7], J.Bramblea i
:.Hubbarda [17], G.Stranga i G.Fixa [197], M.Zlamala [223], J.
ouglasa i T.Duporta [53] i drugih, razvijene su nove metode
onstruisanja diferencnih jednačina za granične probleme mate-
atičke fizike, primenom varijacionih metoda sa na poseban
ačin konstruisanim pomoćnim funkcijama koje su različite od
ule u nekim srazmerno malim podoblastima oblasti definisanosti
ešenja.

Metodu Monte-Carlo zasnovali su J.Neumann i Ulam pre više
d tri decenije. Nakon prvobitnog optimizma, interes za ovu
etodu je jedno vreme splasnuo, jer se pokazalo da je metoda
fikasna samo uz primenu računara koji su u stanju da obave po
ekoliko miliona operacija u sekundi,s obzirom da je neophodno,
ri računanju, izvršiti veliki broj statističkih proba. Zbog
edovoljne efikasnosti računara druge generacije, u teoriju me-
ode Monte-Carlo su, vremenom, uvedena mnoga poboljšanja.

Pojavom računara treće i četrvrte generacije ova metoda
e dobila u značaju i danas se često primenjuje.

Osnovni cilj numeričke matematike predstavlja zasnivanje
to bržih i što ekonomičnijih metoda rešavanja problema, tj.
ıptimizacija numeričkih algoritama. U današnje vreme teorija
ısimptotskih ocena predstavlja efikasno sredstvo za rešavanje

problema optimizacije algoritama za različite klase problema.

Sa tačke gledišta optimizacije do danas je najviše razvijena teorija kubaturnih formula koju su zasnovali S.L.Sobolev [191], [192] i I.Babuška [8]. U njihovim radovima se zadatak ocene kubaturnih formula svodi na odredjivanje minimuma funkcionala greške. Teoriji kubaturnih formula posvećeni su članci N.S.Bahvalova [10] i I.M.Sobola [193], vezani za optimalne ocene konvergencije kubaturnih procesa i metode integracije tipa metode Monte-Carlo.

Metodi kubaturnih formula posvećeni su i radovi I.M.Vinogradova [220], N.M. Korobova [110], A.N. Kolmogorova [12] i dr.

N.S.Bahvalov [10] proučavao je kompleks algoritama za rešavanje problema matematičke fizike pomoću konačnih razlika i dao donju ocenu broja operacija pri rešavanju Dirichletovog problema za Laplaceovu jednačinu.

U okviru optimizacije procesa rešavanja graničnih problema, razmatraju se i problemi ekonomičnosti, entropije, brzine rada računara, procesa realizacije algoritama u zavisnosti od tehničkih rešenja aritmetičkih operacija u registrima konkretnih tipova računara itd.

Proučavanju teorije numeričkih procesa i njihovoj optimizaciji posvećen je veliki broj članaka: I.Babuške i S.Soboleva [8], G.Dahlquista [46], P.Henricija [86] i drugih. I.Babuška, E.Vitašek i M.Prager su u [9] uveli pojam α_k-niza numeričkih procesa i, pomoću takvih nizova, pojmove lokalne i globalne stabilnosti numeričkih procesa koji su omogućili analizu velikog broja realnih algoritama numeričke analize.

R.Moore [135], K.Nickel [139], [140] i drugi autori su, poslednjih godina, razvili oblast teorije ocene tačnosti realnih algoritama, koja se naziva intervalnom aritmetikom. Osnovni cilj intervalne aritmetike sastoji se u aposteriornim procenama grešaka računara koje se izvode dva puta za redom na istom računaru.

Neprekidna poboljšanja konstruktivnih osobina i razvoj računarskih tehnika neodvojivi su od razvoja numeričke analize. Jedan od ciljeva računarske tehnike je, pored uvodjenja sve savršenijih programskih jezika prilagodjenih potrebama numeričke analize, i standardizacija paketa programa i algoritama za rešavanje različitih problema iste prirode.

Danas su u praksi veoma aktuelne: teorija konačnih elemenata i metoda graničnih integralnih jednačina.

Literatura

[1] **Aizenštat,A.V.:** Zadača Karlemana s razrivnim sdvigom, Teorija funkcii kompleksnogo peremennogo i kraevie zadači, Izd-vo Čuvašskogo un-ta 2 (1974) 3-11.

[2] **Aleksandrija,G.N.:** Ob odnoi graničnoi zadače dlja obobščenih analitičeslih funkcii, Trudi Tbilisiskogo un-ta, 56 (1955), 135-139.

[3] Analitičeskie metodi v teorii elliptičeskih uravnenii, Nauka, Novosibirsk, 1982. (zbornik radova)

[4] **Aržanov,G.V.:** Sibirski matem.žurn. 11, Nr. 4 (1961).

[5] **Askunov,N.S.:** Diferencialjnoe i integraljnoe isčisljenie, dlja VTUZOV, Nauka, Moskva, 1968.

[6] **Aubin,J.P.:** Približnnoe rešenie elliptičeskih kraevih zadač, Moskva, Mir, 1977.

[7] **Aubin,J.P.:** Behavior of the Error of the Approxemate Solution of Boundary-value Problems for Linear Elliptic Equations by Galerkin's and Finite Difference Methods, Ann.Scuola Norm.Super., Pisa, 21, 4 (1967).

[8] **Babuška,I.,Sobolev,S.L.:** Optimizacija čislennih metodov, Appl.Math. 10, 2, (1965).

[9] **Babuška,I.,Vitasek,E.,Prager,M.:** Čislennie procesi rešenia differencialjnih uravnenii, Mir, Moskva, 1969.

[10] **Bahvalov,N.S.: Ob optimalnih metodah rešenia zadač,** Appl. Math. 13, 1, (1968).

[11] **Bahvalov,N.S.:** Čislennie metodi, t.I, Moskva, Nauka, 1973.

[12] **Bears,L.:** Partial Differential Equations and Generalized Analytic Functions, Proc.Nat.Acad.Sci.USA, 36, No.2, (1950), 130-136; No.1 (1952), 42-47.

[13] **Berezin,I.A.,Židkov,N.P.:** Metodi vičislenii, t.2, Fizmatgiz, Moskva, 1959, gl X.

[14] **Bicadze,A.V.:** Kraevie zadač dlja eliptičeskih uravnenii vtoroga porjadka, Nauka, Moskva, 1966.

[15] **Bicadze,A.V.:** Osnovi teorii analitičeskih funkcii kompleksnogo peremenogo, Nauka, Moskva, 1984.

[16] **Bicadze,A.V., Kaličenko,D.F.:** Sbornik zadač po uravnenijam matematičeskoi fiziki, Mir, Moskva, 1977.

[17] **Bramble,J.,Hubbard,B.:** On the Formulation of Finite Difference Analogues of the Dirichlet Problem for Poisson's Equation, Numer.Math, 4, 4 (1962).

[18] **Calugaréano,G.:** Sur les fonction polygénes d'une variable complexe, Thesis, Paris 1928.

[19] **Calugaréano,G.:** Les fonctions polygénes comme intégrales d'equations différentieles, Frans. Amer. Math. Soc. 31 (1929), 372-378.

[20] **Carleman,T.:** Sur la théorie des équations intégrales et ses applications, Verhandl.des internat. Mathem. kongr. I, Zürich, 1932, 138-151.

[21] **Céa,J.:** Optimisation theorie et algorithmes, Dunod, Paris, 1973.

[22] **Céa,J.,Glowinski,R.:** Sur des methodes d'optimization par relaxation, Revue Francaise d'Automatique, Informatique

et Recherche Opératonnelle, 1973, R-3, S-32.
[23] **Collatz,L.:** Funktionalanalysis und numerische Mathematik, Springer-Verlag, Berlin, 1964.
[24] **Courant,R.:** Variotional Methods for the Solutions of Problems of Equilibrium and Variations, Bull.Amer.Math.Soc. 49, (1943).
[25] **Čanak,M.:** Metode kompleksne analize za rešavanje glavnih tipova konturnih problema sa posebnim osvrtom na jednu klasu neanalitičkih funkcija, Magistarski rad, Beograd, 1972.
[26] **Čanak,M.:** Lösung eines Konturproblems von Riemanntypus durch Anwendung von Differentialgleichungen, Mathematica Balkanica, 3 (1973), 28-32, Beograd.
[27] **Čanak,M.:** Jedna klasa rešenja diferencijalne jednačine stanja napona elastične ljuske, Zbornik radova 12. Jug. kongresa za racionalnu i primenjenu mehaniku, A, C 3-4, Ohrid, 1974.
[28] **Čanak,M.:** Konturproblem von Dirichlettypus für einige elliptische Systeme partieller Glechungen, Mathematica Balkanica, Beograd, 1975.
[29] **Čanak,M.:** Prilozi teoriji eliptičkih sistema parcijalnih jednačina Vekuinog tipa, Kongres matematičara, fizičara i astronoma Jugoslavije, Novi Sad, 1975.
[30] **Čanak,M.:** Metode diferencijalnih i funkcionalnih jednačina za rešavanje nekih tipova konturnih problema, Doktorska disertacija, Beograd, 1976.
[31] **Čanak,M.:** Neke kompleksne reprezentacije p-analitičkih i (p,q)-analitičkih funkcija sa primenom na rešavanje konturnog problema Hilberta, Matematički vesnik, 5 (18) (33), 1981.
[32] **Čanak.M.:** Konturni problem tipa Karlemana za areolarnu diferencijalnu jednačinu n-tog reda,Matematički vesnik, 5(18)(33), 1981.
[33] **Čanak,M.:** Connection Between One Problem in Elasticity Theory and the Method of Approximate Solving of Carleman's Boundary-Value Problem, Niš, 1984.
[34] **Černeckii,V.A.:** O konformnoi ekvivalentnosti kraevoi zadači Karlemana kraevoi zadači Rimana na razomknutom konture, DAN SSSR 190, 1 (1970), 54-56.
[35] **Čerski,J.I.:** Uč. zap. Kazansk. un-ta, 113, 10, (1953).
[36] **Čerski,J.I.:** Obšče singuljarnoe uravnenie i uravnenie tipa svertki, Matem. sb., t. 41(81), NO.2, 1958, 129-130.
[37] **Čerski,J.I.:** K rešeniju kraevoi zadači Rimana v klase obobščennih funkcii, Dokl.AN SSSR,t.125, 6,1959,500-503
[38] **Čerski,J.I.:** Zadači matematičeskoi fiziki, svodjaščiesja k zadaci Rimana, Tr. Tbilisk. matem. in-ta, 28 (1962), 209-246.
[39] **Čerski,J.I.:** DAN SSSR, 150, 2, (1963), 271-274.
[40] **Čerski,J.I.:** DAN SSSR, 190, 1, (1970), 57-60.
[41] **Čerski,J.I.:** Granični zadači i integraljnie uravnenija, rešenie metodom faktorizacii, Tr.simp. po meh.spl.sred. i rodstv. prob. analiza, 2, Tbilisi, "Mcenieréba", 1974, 281-291.
[42] **Čibrikova,L.I.:** Osobie slučai obobščennoi zadači Rimana, Uč.zap.Kazanskogo un-ta 112, 10 (1952), 129-154.
[43] **Čikin,L.A.:** Ob ustoičivosti kraevoi zadači Rimana, Dokl.AN SSSR, t.111, No. 1,1956, 44-46.

44] **Čikin,L.A.:** Ustoičevost kraevoi zadači Rimana, Uč. zap. Rostovsk un-ta, t.43, vip. 6, 1959, 119-125.
44'] **Čerepanov,G.P.:** DAN SSSR 147, No. 3, 1962.
45] **Čočiev,T.Z.:** Ob odnoi graničnoi zadače teorii funkcii, Soobšč. AN Gruz.SSR 27,3 (1961), 263-269.
46] **Dahlquist,G.:** Convergence and Stability in the Numerical Integration of Ordinary Differential Equations, Math. Scand. 41, (1956).
47] **Danilevski,A.M.:** Zap. Naukovo-Dosled. in-tu mat. meh.,HGU, 13, ser.4, v.1 (1936).
48] **Demidovič,B.P., Maron,I.A.:** Osnovi vičisliteljnoi analiza, Fizmatgiz, 1960.
49] **Demidovič,B.P., Maron,I.A., Šuvalova,E.Z.:** Čisljiteljni metodi analiza, FM, Moskva, 1963.
50] **Demidovič,B.P., Maron,I.A., Šuvalova,E.Z.:** Osnovi vičisliteljnoi matematiki, Fizmatgiz, 1960.
51] **Dimitrovski,D.S.:** Prilog kon teorijata na obopštenite analitički funkcii, Teza.
52] **Djakonov,E.G.:** Iteracionnie metodi rešenia raznostnih analogov kraevih zadač dlja uravnenii elliptičeskogo tipa, Kiev, In-t kibernetiki AN USSR, 1970.
53] **Douglas,J.,Dupont,T.:** Alternating Direction Galerkin Methods on Rectangles. Numerical Solution of Partial Differential Equations II, SYNSPADE, 1970, Academic Press, New York-London, 1971.
54] **Fan Tang Da:** Ob odnoi kraevoi zadače Gazemana dlja poluploskosti i ob integraljnih uravnenijah tipa svertki s analitičeskimi jadrami, Izv VUZOV,matematika,10 (1973), 73-82.
55] **Feljd,J.M.: DAN SSSR, 102, 2, (1955), 257-260.**
56] **Fempl,S.:** Glas. Srpske Akad. nauka, odeljenje prirod. mat. nauka CCLIV, 1963, 75-80.
57] **Fempl,S.:** Areolarni polinomi kao klasa neanalitičkih funkcija čiji su realni i imaginarni delovi poliharmonijske funkcije, Mat. Vesnik 1 (16), 1964, 29-38.
58] **Fempl,S.:** Reguläre Lösungen eines Systems partieller differentialglaichungen, Publ.Institut Math, Beograd, 4 (18),(1964), 115-120.
59] **Fempl,S.:** Über einige Systeme partieller differentialgleichungen, These Publications Nr.143-Nr.155,(1965),9-12.
60] **Fempl,S.:** Areoläre Exponentialfunktion als Lösung einer Klasse Differentialgleichungen, Publ.Inst.Math, Beograd 8(22), (1968).
61] **Fihtengoljc,G.M.:** Kurs differencialnogo i integraljnogo isčislenija, t.2, Moskva, Fizmatgiz, 1963.
62] **Filipov,A.F.:** Ob ustoičivosti raznostnih uravnenija, DAN SSSR, 100, 6 (1955).
63] **Filipov,A.F.:** Sbornik zadač po diferencialnim uravnenijam, Nauka, Moskva, 1979.
64] **Fox,L.,Henrici,P.,Moler,C.:** Approximations and Bounds for Eigenvalues of Elliptic Operators, SIAM J.Numer.Anal., 4,1 (1967).
65] **Friedrichs,K.:** Non-linear Hyperbolic Differential Equations for Functions of Two Independent Variables, Amer.J. Math (1948).
66] **Gahov,F.D.:** Lineinie kraevie zadači teorii funkcii kompleksnoi peremennoi, Izv. Kazan. fiz.-matem. o-va, X, ser.3, 1938, 39-79.

[67] **Gahov,F.D.:** Kraevie zadaći teorii analitićeskih funkcii i singuljarnie integraljnie uravnenia, Doktorskaja disertacija, Tbilisi, 1941.
[68] **Gahov,F.D.:** Kraevie zadaći, Moskva, 1963.
[69] **Gahov,F.D.:** O kraevoi zadaće Rimana, Matem. sbor, 2 (44), Nr.4, 1937, 673-683.
[70] **Gahov,F.D.:** O nelineinoj kraevoi zadaće obobšćajušćei kraevuju zadaču Rimana, Dokl. ANSSSR, (1968), 181, Nr.2, 271-274.
[71] **Gahov,F.D., Čerski,J.I.:** Uravnenija tipa svertki, Moskva, 1978.
[72] **Ganin,M.P.:** Kraevie zadaći dlja polianalitićeskih funkcii, Dokl. ANS SR, t.80, Nr. 3, 1951, 313-316.
[73] **Ganin,M.P.:** Kraevie zadaći teorii poligarmonićeskih funkcii, Uč.zap. Kazansk. un-ta, t.III, Nr. 10, 1951, 9-13.
[74'] **Godunov,S.K.:** Raznostnie metodi rešenija uravnenii gazovoi dinamiki, Novosibirsk, Izd-vo NGU, 1962.
[74] **Godunov,S.K.,Rjabenki,V.S.:** Spektralnie priznaki ustoićivosti kraevieh zadač dlja nesamosoprjažennih rasnostnih uravnenii, UMN XVIII, 3,(1963).
[75] **Godunov,S.K,Rjabenki,V.S.:** Raznostnii shemi, Moskva,Nauka, 1973.
[76] **Godunov,S.K.,Zabrodin,A.V.:** O raznostnih shemah vtorogo porjadka točnosti dlja mnogomernih zadač, ZVM i MF, 2, 4, (1962).
[77] **Gohbert,I.C, Feljdman,I.A.:** Uravnjenija v svertkah i proekcionne metodi ih rešenia, Moskva, Nauka, 1971.
[78] **Goluzin,G.M.:** Geometrićeskaja teorija funkcii kompleksnogo peremennogo, Gostehizdat, 1952.
[79] **Gradštajn,I.S,Rižik,I.M.:** Tablici integralov, summ, rjadov i proizvedenii, Moskva, Nauka, 1963.
[80] **Haack,W.,Hellwig,G.:** Die überführung des Randwertproblems für Systeme elliptischer Differentialgleichungen auf Fredhomsche Integralgleichungen. I, Math. Nachr., 4,Nr. 1-8 (1950/1951), 408-418.
[81] **Hairullin,I.H.:** DAN SSSR, 123, 5, (1958), 795-798.
[82] **Hairullin,I.H.:** Beskonečnie sistemi lineinih algebraićeskih uravnenii s kvaziraznostnimi indeksami,Tr.Rostovsk. in-ta inž. ž.-d. transp., 28 (1959), 203-235.
[83] **Hairullin,I.H.:** O nekotorih beskonečnih sistemah lineinih algebraićeskih uravnenii, Sb.issledov. po. sovr. probl. teorii funkc. kompl. per., Moskva, Fizmatgiz, 1961,455-465.
[84] **Hasabov,E.G.:** O kraevoi zadaće tipa Gilberta, Kandidatskaja dissertacija, Rostov-na-Donu, 1958.
[85] **Haseman,C.:** Anwendung der Theorie der Integralgleichungen auf einige Randwertaufgaben, Götingen, 1907.
[86] **Henrici,P.:** Error Propagation for Difference Methods, John Wiley and Sons, New York, 1963.
[87] **Hilbert,D.:** Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, Leipzig-Berlin, 1912.
[88] **Hilbert,D.:** Grundzüge der Integralgleichungen, Leipzig-Berlin, 2-te Aufl., 1924, Drittes Abschnitt.
[89] **Hubbard,B.:** Remarks on the Convergence in the Descrete Dirichlet problem. Numerical Solution of Partial Differential Equations. Edited by James H. Bramble, Academic Press, New York-London, 1965.

[90] **Hvedelidze,B.V.:** Lineinie razrivnie graničnie zadači teorii funkcii,singularnie integraljnie uravnenia i nekotorie ih priloženia, Tr.Tbilissk.Matem. in-ta AN Gruz. SSR, t.XXIII, 1956, 3-158.
[91] **Iljin,V.P.:** Raznosni metodi rešenia elliptičeskih uravnenii, Novosibirsk, Izd-vo NGU, 1970.
[92] **Janenko,N.N.:** Metod drobnih šagov rešenia mnogomernih zadač matematičeskoi fiziki, Novosibirsk, Nauka, 1967.
[93] **Janenko,N.N.:** Vvedenie v raznostnie metodi matematičeskoi fiziki, č.1, 2, Novisibirsk, Izd-vo NGU, 1968.
[94] **Janušauskas,A.I.:** Konstruktivni formuli dlja funkcii Grina i Neimana,Analitičeskie metodi v teorii elliptičeskih uravnenii, Novosibirsk, Nauka, 1982, 108-120.
[95] **Janušauskas,A.I.:** Nekotori zadači analitičeskoi teorii uravnenii s častnimi proizvodnim, Analitičeskie metodi v teorii elliptičeskih uravnenii, Novosibirsk, Nauka, 1982, 63-75.
[96] **Kantorovič,L.V.,Akilov,G.P.:** Funkcionaljni analiz v normirovannih prostranstvah, Moskva, Fizmatgiz, 1959.
[97] **Kartašev,A.P.,Roždesvenski,B.L.:** Obikovanie differencialjnie uravnenija i osnovi variacionogo isčisljenia, Nauka, Moskva, 1980.
[98] **Kečkić,J.:** Analytic and c-analytic Functions, Publ. Inst. Mat., Beograd, 9 (23), 1969, 189-198.
[99] **Kečkić,J.:** O jednoj klasi parcijalnih jednačina, Mat. vesnik 6(21), 1969, 71-73.
100] **Kečkić,J.:** Jedan diferencijalni operator i njegova primena na parcijalne diferencijalne jednačine i neanalitičke funkcije, Teza, Beograd, 1970.
101] **Koiter,W.T.:** On the Diffusion of Load from a Stiffner into a Sheet, Quart.J.Mech and Appl. Math.,8,2,(1955).
102] **Kolmogorov,A.N.:** Diskretni avtomati i konečnii algoritmi, V kn.: Trudi IV vsesojuznogo matematičeskogo sjezda, t.I, Moskva, Izd-vo AN SSSR, 1963.
103] **Kolmogorov,A.N.,Fomin,S.V.:** Elementi teorii finkcii i funkcionalnogo analiza, Moskva, Nauka, 1976.
104] **Kolosov,G.:** O soprjažnenih differencialjnih uravnenijah s častnimi proizvodnimi s priloženiem ih k rešeniju matematičeskoi fiziki, Izvestija EI (AN Inst.Electrot. Petrograd), 11 (1914), 179-189.
105] **Kolosov,G.:** Ob odnom priloženii teorii funkcii kompleksnago peremenogo k ploskoi zadači matematičeskoi teorii uprugosti, Jurjev, 1909.
106] **Kolossoff,G.:** Über einige eigenschaften des ebenen Problems der Elastizitatsteorie, Z. Math.Phys. 62 (1914), 384-409.
107] **Komjak,I.I.:** Nelinejnaja kraevaja zadača tipa zadači Rimana s položiteljnimi pokazateljami, Vesci AN BSSR, Fiz.-mat. 1, 1970, Nr.6, 83-87.
108] **Kondratev,V.A.:** Kraevie zadači dlja elliptičeskih uravnenii v oblastjah s koničeskimi ili uglovimi točkami, Trudi Moskovskogo matematičeskogo obščestva, Moskva, 16 (1967).
109] **Kopčenova,N.V., Maron,I.A.:** Vičesljiteljnaja matematika v primerah i zadač, Nauka, Moskva, 1972.
110] **Korobov,N.M.:** Vičislenie kratnih integralov metodom optimalnih koefficientov, Vestnik MGU, Ser.mat, 4, (1959).

[111] **Kravčenko,V.G.:** Šinguljarnie integraljnie operatori s nekarlemanovskim sdvigom, kand.dis., Odessa, 1972.
[112] **Krein,M.G.:** Integraljnie uravnenija na polupjavoi s jadrom zavisjaščim ot raznosti argumentov, UMN, 13, 5, (83), 1958, 3-120.
[113] **Krikunov,J.M.:** O rešenii obobščennoi kraevoi zadači Rimana i linejnogo singularnogo integr-diferencialjnogo uravnenia, uč.zap.Kazansk. un-ta, t.112, Nr. 10,(1952) 191-199.
[114] **Krilov,V.I.,Bobkov,V.V.,Monastirni,P.I.:** Vičisliteljnie metodi, tom II, Nauka, Moskva, 1977.
[115] **Kveselava,D.A.:** Graničnaja zadača i singuljarnie integraljnie uravnenija v slučae peresekajuščesja konturov, Tr.Tbilissk.matem.in-ta AN Gruz.SSR XVII, 1949, 1-27.
[116] **Kveselava,D.A.:** Zadača Rimana-Gilberta dlja mnogosvjaznoi oblasti, Soobšč.AN Gruz.SSR,t.VI, Nr.8, 1945, 581-590.
[117] **Kveselava,D.A.:** Rešenia odnoi graničnoi zadači T. Karlemana, DAN SSSR, 55, 8 , (1947), 683-686.
[118] **Kveselava,D.A.:** Nekotorie graničnie zadači teorii funkcii, Trudi matem.in-ta AN Gruz.SSR 16 (1948), 39-80.
[119] **Lax,P.D.:** Ob ustočevosti konečno-raznostnih approksimacii rešenii giperboličeskih uravnenii s peremenimi koefficientami, Matematika (Sb. porevodov) 6, 3 (1962).
[120] **Lax,P.D.,Wendroff,B.:** System of Conseravations Laws,Comm. Pure.Appl.Math. 13, 2 (1960).
[121] **Lax,P.D.,Wendorff,B.:** On the Stability of Difference Schemes with Variable Coefficients, Comm. Pure Applied Math, 15, 4 (1962).
[122] **Ladiženskaja,O.A.: Metod konečnih raznosti v teoriji uravnenii s častnimi proizvodnimi, UMN, XII, 5(1957).**
[123] **Lions,J.L.,Temam,R.:** Une méthode d'éclatement des opérateurs et des contraintes en calcul des variations, C. R.Acad.Sci, Paris, 263 (1966).
[124] **Litvinčuk,G.S.:** Kraevie zadači i singuljarnie integraljnie uravnenija so sdvigom, Nauka, Moskva, 1977.
[124'] **Litvinčuk,G.S.:** O nekotorih kraevie zadač Rimana so smeščenijami, Iz.vuzov, matem., 6 (1961), 71-81.
[125] **Magnaradze,L.G.:** Teorija odnogo klassa linejnih singuljarnih integrodifferencialjnih uravnenii, Soobšč. AN Gruz. SSR, t.IV, Nr.2, 1943, 103-110.
[126] **Magnaradze,L.G.:** Ob odnom obobščenii teoremi Plemeli-Privalova, Soobšč. AN Gruz. SSR, t. VIII, Nr. 8, 1947.
[127] **Mandžavidze,G.F.,Hvedelidze,B.V.:** O zadače Rimana-Privalova s neprerivnimi koefficientami, DAN SSSR, 123, 5, (1958), 791-794.
[127'] **Marčuk,G.I.:** Metodi vičisliteljnoi matematiki, Nauka, Moskva, 1977.
[128] Matematičeskaja enciklopedija, tom I-V,"Sovjetskaja enciklopedija", Moskva, 1980-1985.
[129] **Mihajlov,L.G.:** Kraevaja zadača tipa zadači Rimana dlja sistema differncialjnih uravnenii pervogo porjadka elliptičeskogo tipa, Uč.zap.Tadž.un-ta,t.X,1957,32-79.
[130] **Mihlin,S.G.:** Čislenaja realizacija variacionih metodov, Moskva, Nauka, 1966.
[131] **Mihlin,S.G.:** Variacionie metodi v matematičeskoi fizike, Moskva, Nauka, 1970.

[132] **Mitchell,A.R.:** Computational Methods in PDE-s, Wiley, London, 1970.
[133] **Mitrinović,D.:** Un probléme sur les functions analytiques, Revue mathématique de l'Union Interbalkanique 1, 1936, 53-57.
[134] **Mittra,R., Li,S.:** Analitičeskie metodi teorii volnovodov, Moskva, Mir, 1974.
[135] **Moore,R.:** Interval Analysis, Prentice-Hall, 1966.
[136] **Musheliśvili,N.I.:** Singularnie integraljnie uravnenija, Moskva, 1968.
[137] **Natanson,I.P.:** Teorija funkcii veščestvennoj peremennoj, Moskva, Nauka, 1974.
[138] **Neumann,J.,Richtmyer,R.D.:** A Method for the Numerical Calculation of Hydrodynamic Shocks, J.Appl.Phys., 21, 3, (1950).
[139] **Nickel,K:** Über die Notwendigkeit einer Fehlerschranken - Arithmetic für Rechnenautomaten, Numer. Math., 9, 1, (1966).
[140] **Nickel,K.:** Bericht Über neue Kalsruher Ergebnisse bei der Fhelererfassung von numerishen Prozessen, Appl.Math., 13, 2 (1968).
[141] **Nicolesco,M.:** Fonctions complexes dans le plan et dans l' aspace, Thesis, Paris.
[142] **Nobl,B.:** Metod Vinera-Hopfa, Moskva, 1962.
[143] **Nominov,A.D.:** Zadača Dirihle dlja odnoi mnogomernoi virozdajuščeisja eliptičeskoi sistemi, Analitičeskie metodi v teorii eliptičeskih uravnenii, Novosibirsk, 1982.
[144] **Nuller, B.M.:** Prikl. matem. i meh., 38, (1974), 876-882.
[145] **Petrovski,I.B.:** Lekcii po teorii integraljnih uravnenii, Goshizdat, Moskva, 1951.
[146] **Plemelj,J.:** Ein Ergänzungssatz..., Monatsh.Math.und Phys. XIX, 1908, 205-210.
[147] **Položij,G.N.:** Integraljnie predstavljenie neprerivnogo differenciruemih funkcii kompleksnogo premennogo, Kand. disertacija, Saratovskii gos.univ. N.G.Černiševskogo, 1946.
[148] **Položij,G.N.:** DAN SSSR,1947, 58, 7, 1275-1278.
[149] **Položij,G.N.:** DAN SSSR,1948, 60, 5, 769-772.
[150] **Položij,G.N.:** O nekotorih metodah teorii funkcii kompleksnogo peremennogo v mehanike splošnih sred, doktorska disertacija, Matem.inst.im.V.A.Steklova, AN SSSR,1953.
[151] **Položij,G.N.:** Matem.sb., 1953, 32 (74), 3,485-492.
[152] **Položij,G.N.:** UMZ, 1954, 6, 3, 333-348.
[153] **Položij,G.N.:** Izv. AN SSSR, Ser.mat. 1955, 19, 245-270.
[154] **Položij,G.N.:** Naukovii ščoričnik, Kiev, un-ta za 1956,r., 1957.
[155] **Položij,G.N.:** Naukovii ščoričnik, Kiev, un-ta za 1957,r., 1958.
[156] **Položij,G.N.:** Vesnik, Kiev. un-ta, ser.astr-mat. meh. 1959, 2, 1, 19-29.
[157] **Položij,G.N.:** Obobščenie teorii analitičeskih funkcii kompleksnogo peremenogo, Izd.Kievskogo un-ta, 1965.
[158] **Položij,G.N.** Prikl.meh., 1966, 2, 11, 123-126.
[159] **Položij,G.N.:** Vičisliteljnaja i prikladnaja matematika,4. Izd-vo. Kiev un-ta K., 1967.
[160] **Položij,G.N.:** Teorija i primenenie p-analitičeskih i (p,q)-analitičeskih funkcii, Naukova dumka, Kiev,1973.

[161] **Pompeiu,D.:** Sur la continuité des fonction d'une variable complexe, Tesis, Paris, 1905.
[162] **Pompeiu,D.:** Sur une classe de fonctions d'une variable complexe, Rend. Circ. Mat.,Palermo,33,(1912), 108-113 i 35,(1913), 277-281.
[163] **Ralević,N.V.:** Boundary-value Problems for Vekua's System of PDE-s of the First Order with the Unknown Coefficients, Conference on Applied Mathematics, 5., Ljubljana, 2-5 September, 1986, 123-127.
[164] **Ralević,N.V.:** Boundary-value Problems for Elliptic PDE-s of the Second Order and Riemann's and Carleman's Boundary-value Problem for Analytic Functions, ZAMM - Z. Angew. Math. u. Mech. 67 (1986), 789-790.
[165] **Ralević,N.V.:** Boundary-value Problems of Cauchy's Type for Linear p-areolar DE-s in the Form $D^n_{x^*} f=0$, Beograd, 1986. (u rukopisu)
[166] **Ralević.N.V.:** Boundary-value Problems of Hilbert's Type for Linear x^k-areolar DE-s in the form $D^n_{x^*} f = 0$, Drugi simpozijum iz kompleksne analize, Budva, 1986.
[167] **Ralević,N.V.:** Linear p-areolar Differential Equations with Constant Coefficients, Conference on Applied Mathematics,5.,Ljubljana, 2-5 September,1986, 117-122.
[168] **Ralević,N.V.:** On Approximation of p-analytic Functions by Areolar Polynomials, Graz, 1985. (u štampi-Mathematica Balkanica 1986.)
[169] **Ralević,N.V,Čanak.M:** Some Boundary-value Problems for Elliptic System of Partial Equations of Fempl's type, ZAMM-Z. Angew. Math. u.Mech. 66 (1986), 5 T 300 - 302.
[170] **Rapoport,I.M.: Sb.** Tr.in-ta **matem. AN USSR**, 12, (1949), 102-118.
[171] **Richtmyer,R.D.:** Raznostnie metodi rešenia kraevih zadač, Moskva, IL, 1960.
[172] **Richtmyer,R.D.:** O nelineinoj neustoičevosti raznostnih shem, V sb.: Nekotorie vprosi vičisliteljnoj i prikladnoi matematiki, Novosibirsk, Nauka, 1966.
[173] **Riemann,B.:** Sočinenia, Gostehizdat, 1948.
[174] **Rjabenki,V.S.,Filipov,A.F.:** Ob ustoičivosti raznostnih uravninii, Moskva, Gostehizdat, 1956.
[175] **Rodin,J.A.:** Ob uslovjah razrešimosti kraevih zadač Rimana i Gilberta na rimanovih poverhnostjah, Dokl. AN SSSR, t.129, Nr. 6, (1959), 1234-1237.
[176] **Rogožin,V.S.:** Nekotorie kraevie zadači dlja poligarmoničeskogo uravnenija, Uč.zap.Kazansk. un-ta,t.110, No.3, (1950), 71-94.
[177] **Rogožin,V.S.:** DAN SSSR, 114, 3, (1957), 486-489.
[178] **Rogožin,V.S.:** Obščaja shema rešenia kraevie zadač v prostransve obobščenih funkcii, DAN SSSR 164, 2 (1965), 277-280.
[179] **Saltikov,N.:** Teorija parcijalnih jednačina drugog reda, Naučna knjiga, Beograd, 1952.
[180] **Saltikov,N.:** Teorija parcijalnih jednačina prvog reda sa jednom nepoznatom funkcijom,Naučna knjiga,Beograd,1953.
[181] **Samarski,A.A.:** Nekotorie voprosi obščei teorii raznostnih shem, V sb.: Differencialjnie uravnenie s častnimi proizvodnimi, Moskva, Nauka, 1970.
[182] **Samarski,A.A.:** Vvedenie v teoriju raznostnih shem,Moskva, Nauka, 1971.
[183] **Samarski,A.A.,Andrejev,V.B.:** Raznostnie metodi dlja

elliptičeskih uravnenii, Moskva, Nauka, 1976.
[184] **Samarski,A.A.,Gulin,A.V.:** Ustoičivost raznosnih shem, Moskva, Nauka, 1973.
[185] **Samarski,A.A.,Popov,J.P.:** Raznostnie shemi gazovoi dinamiki, Moskva, Nauka, 1975.
[186] **Serdjakova,S.I.:** Issledovanie ustoičevosti v C javnih raznostnih shem s postojannimi deistviteljnimi koefficijentami, ustičivih v l_2, ZVM i MF, 3, 2, (1962).
[187] **Simonenko,I.B.:** Kraevaja zadača Rimana s neprerivnim koefficientom, Dokl. AN SSSR, t.124, No.2, 1959, 278-281.
[188] **Simonenko,I.B.:** Kraevie zadači Rimana i Rimana-Gazemana s neprerivnimi koefficientami, Issledovania po sovr. problemam teorii funkc.kompl.perem., Moskva,Fizmatgiz, 1961, 380-389.
[189] **Smirnov,V.I.:** Kurs visšei matematiki, t.3,Moskva, 1969.
[190] **Sneddon,I.:** Preobrazovanija Furíe, Moskva, 1955.
[191] **Sobolev,S.L.:** Nekotori primenenia funkcionalnoga analiza v matematičeskoi fizike, Lenjingrad, Izd-vo LGU, 1950.
[192] **Sobolev,S.L.:** Vvedenie v teoriju kubaturnih formul, Moskva, Nauka, 1974.
[193] **Sobol,I.M.:** Čislennie metodi Monte-Carlo, Moskva, Nauka, 1973.
[194] **Sokolov,I.A.:** O kraevoi zadači tipa Rimana dlja polianalitičeskih funkcii na okružnosti, Vesti AN BSSR, 1969, No. 5, 64-71.
[195] **Sokolov,I.A.:** O kraevoi zadači tipa Rimana dlja bianalitičeskih funkcii v slučae prizvoljnoga kontura, Vesti, AN BSSR, 1969, No. 6, 29-38.
[196] **Sokolov,I.A.:** O kraevoi **zadači tipa Rimana** so zdvigom **dlja polianalitičeskih funkcii na okružnosti, Vesti** AN BSSR, 1970, No. 1, 118-129.
[197] **Strang,G.,Fix,G.:** Fourier Analysis on the Finite Element Variational Method, Preprint, 1970.
[198] **Susea,A.:** Studii si Sekretari matem.,Bucuresti,19, Nr. 1, 1967.
[199] **Šabat,B.V.:** Vvedenie v kompleksni analiz, Nauka, Moskva, 1976.
[200] **Šestopalov,V.P.:** Metodi zadači Rimana-Gilberta v teorii difrakcii i resprostranenia elektomagnetnih voln, Harkov, 1971.
[201] **Théodorescu,N.:** La dériveé aréolaire ses applications physiques, Thesis, Paris, 1931.
[202] **Théodorescu,N.:** La dériveé aréolaire, Ann. Roumaines. Mathematiques, Cahier 3, Bucurest, 1936.
[203] **Théodorescu,N.:** Dériveé et primitives areolaires, Annali di mathematica 44, (1960).
[204] **Théodorescu,N.:** Deriveé areolaire globale et dériveé généralisée, Bull.Math.de la Soc.de Sci.Math de la R.P.R., 6 (1962), 3-4.
[205] **Tihomeé,V.:** Generally Unconditionally Stable Difference Operators, SIAM J. Numer.Anal. 4, 1 (1967).
[206] **Tihonov,A.N.,Samarski,A.A.:** Uravnenia matematičeskoi fiziki, Moskva, 1966.
[207] **Tihonov,A.N.,Samarski,A.A.:** O raznostnih shemah dlja uravnenia s razrivnimi koefficientami, DAN SSSR 108, 3 (1956).
[208] **Titčmarš,E.:** Vvedenie v teoriju integralov Furje, Moskva-

Lenjingrad, Gostehizdat, 1948.
[209] **Usmanov,N.K.:** Graničnie zadači differencialjnih uravnenii v častnih proizvodnih pervogo porjadka elliptičeskogo tipa, Trudi In-ta fiz.i matem. AN Latv.SSR, I, (1950), 41-100.
[210] **Usmanov,N.K.:** K graničnim zadačam funkcii, udovletvorjajuščih sisteme differencialjnih uravnenii v častnih proizvodnih pervogo porjadka elliptičeskogo tipa, Trudi In-ta fiz. i matem. AN Latv.SSR,II,(1950),59-100
[211] **Vainštain,L.A.:** Teorija difrakcii i metod faktorizacii, Moskva, "Sov. radio", 1966.
[212] **Valiullin,A.N.:** Shemi povišennoj točnost dlja zadač matematičeskoi fiziki.Lekcii dlja studentov NGU, Novosibirsk, Izd-vo NGU, 1973.
[213] **Vekua,I.N.:** Ob odnoi lineinoi graničnoi zadače Rimana,tr. Tbilisisk.matem.in-ta AN Gruz.SSR, t.XI,1942, 109-139.
[214] **Vekua,I.N.:** Novi metodi rešenia eliptičeskih uravnenija, Moskva, 1948.
[215] **Vekua,N.P.:** Obobščennaja kraevaja zadača Gilberta dlja neskolkih neizvestnih funkcii, Trudi matem. in-ta AN Gruz. SSR 16, 1948, 81-103.
[216] **Vekua,I.N.:** Sistemi diferencialjnih uravnenija pervogo porjadka eliptičeskogo tipa i graničnie zadači s primeneniem k teorii oboloček, Matematičeski sbornik, 1952, t. 31 (73), No. 2, 217-314.
[217] **Vekua,I.N.:** Sistemi differencialjnih uravnenii elliptičeskogo tipa,Matem.Sb. 31/73, 2,1952, Moskva.
[218] **Vekua,I.N.:** Obobščenie analitičeskie funkcii, Fizmatgiz, Moskva, 1959.
[219] **Vekua,N.P.:** Obobščennaja kraevaja zadača Gilberta dlja neskolkih neizvestnih funkcii, Soobšč. AN Gruz.SSR 8, 9-10, (1941), 577- 584.
[220] **Vinogradov,I.M.:** K voprosu ob ocenke trigonometričeskih summ, Iz. AN SSSR, ser.matem., 29, 3 (1965).
[221] **Volkov,E.A.:** Metod neravnomernih setok dlja konečnih i beskonečnih oblastei s koničeskimi točkami, Differencialjnie uravnenija, 10, 2, 1966.
[222] **Volkov,F.D.:** Čisljenie metodi, Nauka, Moskva, 1982.
[223] **Zlamal,M.:** On Some Finite Element Procedures for Solving Second Order Boundary-value Problems, Numer.Math., 14, 1, (1969).
[224] **Zeragija,P.K.:** Ob integrirovanii poligarmoničeskih uravnenii, Trudi Tbilissisk. matem. in-ta AN Gruz. SSR, VIII, 1940, 135-163.

Registar pojmova

ОСНОВНА ОРГАНИЗАЦИЈА УДРУЖЕНОГ РАДА
ЗА МАТЕМАТИКУ, МЕХАНИКУ И АСТРОНОМИЈУ
БИБЛИОТЕКА
Број:
Датум: