

KÖNIGLICH SERBISCHE AKADEMIE

KANON DER ERDBESTRAHLUNG
UND
SEINE ANWENDUNG
AUF
DAS EISZEITENPROBLEM

VON
M. MILANKOVITCH

ordentlichem Professor an der Universität in Belgrad, wirklichem Mitgliede
der königlich serbischen Akademie

BELGRAD 1941

M. MILANKOVITICH, KANON DER ERDBESTRAHLUNG

ACADÉMIE ROYALE SERBE

ÉDITIONS SPECIALES
TOME CXXXIII

SECTION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET NATURELLES

TOME 33



BELGRADE 1941

KÖNIGLICH SERBISCHE AKADEMIE

KANON DER ERDBESTRAHLUNG
UND
SEINE ANWENDUNG
AUF
DAS EISZEITENPROBLEM

VON
M. MILANKOVITCH
ordentlichem Professor an der Universität in Belgrad, wirklichem Mitgliede
der königlich serbischen Akademie

BELGRAD 1941

ACADÉMIE ROYALE SERBE

ÉDITIONS SPECIALES
TOME CXXXIII

SECTION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET NATURELLES

TOME 33

BELGRADE 1941

Vorwort

Das vorliegende Werk, das ich durch die hohe Vermittlung der königlich serbischen Akademie der Oeffentlichkeit übergebe, fasst die wichtigsten Ergebnisse meiner dreissigjährigen Arbeit zusammen, ergänzt sie und formt zu einem abgerundeten Ganzen, zu einem besonderen Kapitel der kosmischen Physik. Eine solche systematische Zusammenfassung meiner auf eine ganze Reihe von Problemen sich erstreckenden Untersuchungen war durch den ihnen zugrunde liegenden Leitgedanken angebahnt und durch deren Ergebnisse ermöglicht, wie dies aus der nachstehenden Schilderung des Werdeganges des vorliegenden Werkes ersichtlich ist.

Es war dies, wie ich es in meinem in nachstehendem Verzeichnis unter 27 angeführten autobiographischen Werke ausführlich erzählte, im Jahre 1911 als mir meine Ueberlegungen folgendes kundtaten.

Das Newtonsche Gravitationsgesetz, dem die Lehre von der Bewegung der Himmelskörper, die Mechanik des Himmels, ihr festes Fundament verdankt, ist der erste Paragraph im Gesetzbuche des Weltalls und unseres Planetensystems. Diesem Paragraphen reiht sich ein zweiter Paragraph an, nicht minder wichtig und nicht weniger umfassend. Der erste Paragraph spricht von der Grösse der gegenseitigen Anziehung der Weltkörper, die ihren Lauf regelt und die Planeten zu ihrem Umlauf um die Sonne zwingt, der zweite Paragraph spricht von der Ausbreitung der Strahlung der Gestirne, also auch von der wärmespendenden Kraft der Sonne. Auch diese nimmt, geradeso wie die anziehende Kraft der Sonne, mit dem Quadrat der Entfernung ab. In den Weltraum sich mit Lichtgeschwindigkeit ausbreitend, erreichen die Sonnenstrahlen die Oberflächen der Planeten. Die Wärmemengen, die sie dabei den Planeten zuführen, hängen nicht nur von der Entfernung des betreffenden Planeten von der Sonne ab, sondern auch von dem Einfallswinkel, unter dem die Strahlen den in Betracht gezogenen Teil der Planetenoberfläche erreichen. Die Verteilung der Sonnenwärme auf den Oberflächen der Planeten lässt sich unter Berücksichtigung dieser Tatsachen durch mathematische Formeln erfassen.

Die Bestrahlung der Planeten durch die Sonne, also auch jene des uns am meisten interessierenden unter ihnen, der Erde, ist ununterbrochener Aenderung unterworfen. Die Drehung der Erde um ihre Achse hat den Wechsel von Tag und Nacht zur Folge, ihre Umlaufbewegung um die Sonne ruft den Ablauf der Jahreszeiten hervor; die gegenseitige Anziehung der Planeten ändert langsam aber stetig die Form und die räumliche Lage der Erdbahn; die Präzession der Erdachse bewirkt,

dass sich die Aequinoktiallagen der Erde längs dieser veränderlichen Erdbahn verlagern, und dies alles hat den säkularen Gang der Erdbestrahlung zur unausweichlichen Folge.

Alle diese Aenderungen lassen sich, dank der Sphärischen Astronomie und der Himmelsmechanik mathematisch exakt beschreiben und in ferne Zeiten Schritt für Schritt verfolgen. Der Schlusseffekt der Sonnenstrahlung, der uns ganz besonders interessiert, ist der Temperaturzustand der Planetoberflächen und der Planetatmosphären. Beim Eintritt der Sonnenstrahlen in die Atmosphärenhülle der Planeten erfährt die Energie, die in diesen Strahlen enthalten ist, mannigfaltige Umwandlungen, um schliesslich im jeweiligen Temperaturzustand des Planeten und seiner Atmosphäre ihren sinnfälligen Ausdruck zu finden, ist doch die Sonnenstrahlung die einzige aktive Post im Wärmehaushalt unserer Erde und der mit einer festen Kruste bedeckten Planeten.

Die in den Atmosphärenhüllen der Planeten sich abspielenden Erscheinungen gehorchen ebenfalls wohlbegründeten durch mathematische Formeln erfassbaren Gesetzen der Physik. Wenn es also gelingen würde, den Zusammenhang zwischen dem Bestrahlungszustand und dem Temperaturzustand der Planeten zu ermitteln, so wäre es möglich, aus der Stärke der Sonnenstrahlung und aus dem Mechanismus unseres Planetensystems den zeitlichen Ablauf der Temperaturerscheinungen auf den Oberflächen der Planeten mathematisch zu beschreiben und numerisch zu veranschaulichen.

In dieser exakt formulierten Fassung stand dies grosse kosmische Problem seit jener Zeit im Zielpunkt meiner Forschungen. Die erste Frage, die ich mir vorerst stellen musste, war, ob dieses Problem nicht von jemand anderem schon gelöst worden war. Ich überzeugte mich bald, dass dies nicht der Fall war. Alles, was mit diesem Problem im Zusammenhange stand und was ich aus der ganzen Weltliteratur darüber sammeln konnte, das waren nur einige Abhandlungen, von denen keine einzige dieses Problem in seinem oben angegebenen Umfang erfasste und von denen manche mit kardinalen Fehlern behaftet waren. Während also damals die Lehre von der Bewegung der Himmelskörper, die Mechanik des Himmels, bereits seit hundert Jahren an der ersten Stelle unter den exakten Naturwissenschaften stand, war eine mathematische Lehre von den thermischen Erscheinungen auf den Oberflächen der Planeten nicht einmal ernstlich in Angriff genommen. Ich musste mich also zunächst fragen, was die Ursache dieses Sachverhaltes sei, und fand auf diese Frage die folgende Antwort.

Die Forscher, die sich mit den thermischen Erscheinungen auf der Erdoberfläche, d. h. mit dem Klima der Erde, befassten, die Meteorologen, kümmerten sich damals noch nicht um das Klima der übrigen Planeten. Das Klima der Erde erforschend, waren sie reine Erfahrungswissenschaftler. Sie hatten keine Veranlassung, sich mit komplizierten mathematischen Theorien zu befassen; die meisten von ihnen wären auch nicht in der Lage, dies zu tun. Man könnte es von ihnen auch gar nicht verlangen, durch den Schornstein den Weg in ein Gebäude zu suchen, dessen Pforte weit geöffnet steht. Warum den Weg über die Sonne unternehmen, um zu erfahren, was auf der Erde geschieht? Hat man nicht auf der Erde Tausende von meteorologischen Stationen errichtet, die uns über alle Einzelheiten der Temperaturerscheinungen zuverlässiger und genauer unterrichten als die vollkommenste Theorie,

Der zweite Grund, warum es niemand vor mir ernstlich unternommen hatte, eine mathematische Theorie des Klimas aufzubauen, war wohl der, dass man bei einem derartigen Versuch sofort auf eine ganze Reihe komplizierter Probleme stossen musste, die verschiedenen Gebieten der exakten Wissenschaften angehören, die damals voneinander scharf abgegrenzt waren.

Der dritte, vielleicht der ausschlaggebende Grund, warum sich jene Theorie nicht früher entwickeln konnte, war der Umstand, dass bis zum Jahre 1913 die Stärke der Sonnenstrahlung nicht zuverlässig ermittelt war. Wohl hatten es seit langem viele unternommen, die Intensität der Sonnenstrahlung auszumessen, aber die dabei gewonnenen Messungsergebnisse waren derart verschieden, dass man nicht genau angeben konnte, wieviel Wärme diese Strahlen in der Zeiteinheit der ihnen senkrecht exponierten Flächeneinheit zuführen, d. h. wie gross die Solarkonstante ist. So blieb in der Formel, durch die der zweite Paragraph des Gesetzbuches des Weltalls zum Ausdruck gelangt, eine wichtige Zahl, die Solarkonstante, lange unbekannt. Aus diesem Grunde war damals jede Rechnung, die darauf ausging, aus der Intensität der Sonnenstrahlen die Hauptmerkmale des Erdklimas zu ermitteln, aussichtslos gewesen.

Dies waren die Gründe, warum jenes Problem lange Zeit ungelöst, ja unbenutzt blieb, abseits gelegen an der Dreiländergrenze der Sphärischen Astronomie, der Himmelsmechanik und der Mathematischen Physik. Die Lehrkanzel der Universität in Belgrad, die ich im Jahre 1909 bestiegen hatte, umfasste alle diese wissenschaftlichen Disziplinen, die sonst an den anderen Universitäten voneinander getrennt sind. Diese Koinzidenz, die mir die Inangriffnahme der Behandlung des gestellten Problems ermöglichte, war, so zufällig sie erscheint, doch kein Zufall. Gerade deshalb, weil ich mich mit diesen Disziplinen befasste, war es mir möglich, jenes Problem zu erspähen, zu formulieren und seine Behandlung in Angriff zu nehmen.

Bald war mir folgendes klar geworden. Wenn es tatsächlich gelingen sollte, das gestellte Problem in seinem vollen Umfang zu lösen und dadurch eine mathematische Theorie zu schaffen, mittels der man die Wirkungen der Sonnenstrahlung in Raum und Zeit verfolgen könnte, so wäre man vor allem in der Lage, die wichtigsten Grundzüge des Erdklimas rechnerisch zu ermitteln. Dies allein würde, so möchte es scheinen, nicht Gott weiss was bedeuten, denn man würde bestenfalls nur das gefunden haben, was schon längst bekannt war. Aber ein derartiges Urteil wäre voreilig, denn eine mathematische Theorie des Erdklimas würde uns den ganzen Mechanismus der thermischen Erscheinungen aufdecken, von dem wir bisher nur die Schlusseffekte kannten. Sie würde uns ausserdem Auskunft über die Temperaturen der hohen Luftschichten geben, bis zu denen wir noch nicht emporgestiegen sind. Sie würde noch viel weiter vordringen. Dieselbe Wärmequelle, die Sonne, die unsere Erde mit Wärme versorgt, erwärmt auch jene Planeten, die mit festen Krusten bedeckt sind. Die Ergebnisse der neuen Theorie würden auch für diese Planeten und auch für den Erdmond ihre Gültigkeit bewahren. Sie würden uns die ersten zuverlässigen Angaben über das Klima dieser fernen Welten liefern können, von dem wir vorher nichts Bestimmtes wussten. Doch selbst damit wären die Leistungen einer derartigen Theorie nicht erschöpft. Hat sie einmal die Grundzüge des gegenwärtigen Klimas der Erde erfasst, so wäre sie in der Lage, das Klima der Vorzeit zu erforschen und zu beschreiben, wo die Bahnelemente der Erde und die Neigung

ihrer Drehachse, wie uns dies die Himmelsmechanik lehrt, andere gewesen sind. Mit einem Worte, die neue Theorie würde uns ermöglichen, die Grenzen unserer direkten Wahrnehmungen weit zu überschreiten.

Diese Betrachtungen bildeten den Leitgedanken meiner daran sich anschließenden langjährigen Arbeit, deren Ergebnisse nach und nach in einer Reihe von Abhandlungen und Werken ihre Veröffentlichung fanden. Ein Verzeichnis dieser Schriften befindet sich am Schlusse des vorliegenden Vorwortes. Die in dieses Verzeichnis eingetragenen Schriften sind nach dem Datum ihrer Fertigstellung und nicht nach dem Zeitpunkt ihrer Veröffentlichung geordnet; die durch Sperrschrift gekennzeichneten Werke bilden zusammenfassende Darstellungen der bis zu dem Jahre 1920 bzw. 1930 und 1938 sichergestellten Ergebnisse meiner Arbeit; sie veranschaulichen die wichtigsten Etappen der Erforschung des in der oben angegebenen Richtung beschrifteten neuen Wissensgebietes. Aus diesem stufenförmigen Aufbau ist schliesslich das hier zum Abschluss gebrachte Lehrgebäude entstanden.

Zum besseren Verständnis des vorliegenden Werkes erscheint es notwendig, die wichtigsten Phasen seiner Entstehung hier zu überblicken.

In meinem während des Weltkrieges in der Gefangenschaft geschriebenen Werke „Théorie mathématique des phénomènes thermiques produits par la radiation solaire“, das auch die Ergebnisse der im Verzeichnis unter 1 bis 6 angeführten Abhandlungen beinhaltet, wurden die wichtigsten Teile des gestellten Problems gelöst, wodurch das begonnene Lehrgebäude seine festen Grundmauern erhielt, auf denen man weiter bauen konnte. Jenes Werk gliedert sich in zwei Teile, der erste umfasst die Theorie, der zweite deren Anwendungen, die sich auf drei verschiedene Gebiete erstreckten. Das erste derselben umfasste die mathematische Erforschung und Beschreibung des gegenwärtigen Bestrahlungszustandes und des daraus sich ergebenden solaren Klimas der Erde, das zweite die säkularen Variationen der Erdbestrahlung und deren Effekte, das dritte die Erforschung der thermischen Erscheinungen auf den Oberflächen der Planeten.

Die in meinem Erstlingswerke auf dem dritten der drei aufgezählten Anwendungsgebiete durchgeführten Untersuchungen zeichneten sich durch ihre damalige Aktualität aus und schienen eine Zeit lang das wichtigste Ergebnis meines Buches zu sein, weil im Augenblicke seiner Veröffentlichung die Frage nach der Bewohnbarkeit der Planeten und namentlich jener des Planeten Mars im Blickpunkte der astronomischen Forschung stand. Die in meinem Werke geschaffene Theorie ermöglichte mir tatsächlich, nicht nur jene Wärmemengen zuverlässig zu berechnen, die im Laufe eines Marsjahres den verschiedenen Breiten seiner Oberfläche zugestrahlt werden, sondern auch die zugehörigen jährlichen Temperaturen dieser Breiten zu ermitteln. Aus diesem Resultate ergab sich eine mittlere Temperatur der untersten Luftschicht des Planeten von -17° Celsius. Durch dieses Ergebnis, das bald die Aufmerksamkeit der Astronomen auf sich lenkte, wurde die damals weitverbreitete Ansicht von der Bewohnbarkeit dieses Planeten durch höher organisierte Lebewesen endgültig zerstört. Auch die von den amerikanischen Astronomen fünf Jahre nach der Veröffentlichung meines Werkes durchgeführten Messungen der von der Marsoberfläche zu uns gelangenden Strahlung bestätigten die Ergebnisse meiner Berechnungen vollauf.

In meiner „Théorie mathématique“ wurden auch die Temperaturverhältnisse auf der Oberfläche des Merkurs und jener des Erdmondes einer mathematischen

Untersuchung unterworfen, die durch den Umstand begünstigt, dass diese beiden Himmelskörper keine atmosphärische Hülle besitzen, zu numerischen Ergebnissen führte. Was den Planeten Venus anbelangt, konnte in Unkenntnis seiner Rotationsdauer und der Lage seiner Drehachse nur die obere Grenze der Mitteltemperatur seiner untersten Atmosphärenschicht festgelegt werden, die ein organisches Leben auf diesem Planeten nicht ausschliesst.

Diese Ergebnisse meiner „Théorie mathématique“, die in dem ausführlichen Bericht Schoenberg's „Ueber die Temperaturen der Planeten. Physikalische Zeitschrift. 26. Jahrgang, 1925.“ ihre Würdigung fanden und jene der beiden im nachstehenden Verzeichnis unter 12 und 16 angeführten Abhandlungen, die sich mit dem thermischen Aufbau der Planeten Jupiter, Saturn, Uranus und Neptun und jenem der Uratmosphäre der Erde befassen, habe ich, wie dies in seinem Titel angedeutet, nicht in den Rahmen des vorliegenden Werkes einbeziehen können, weil dadurch dessen Umfang ein viel zu grosser geworden wäre, denn bald nach der Veröffentlichung meines Erstlingswerkes erweiterte sich das Anwendungsgebiet der darin niedergelegten Theorie ganz gewaltig, was einen weiteren Ausbau derselben nach sich zog. Dazu kam es auf folgende Weise.

Die Ergebnisse meiner „Théorie mathématique“ lenkten auf sich die Aufmerksamkeit des grossen deutschen Klimatologen Wladimir Köppen, der die Tragweite dieser Theorie richtig erkannte. Er arbeitete damals mit seinem Schwiegersohne Alfred Wegener an dem Werke „Die Klimate der geologischen Vorzeit“ und gedachte darin meine Theorie zu verwerten. Nach kurzem Briefwechsel luden mich beide Forscher zur Mitarbeit an ihrem Werke ein. Diese Einladung freudig annehmend, überdachte ich, bevor ich an die Ausarbeitung des für ihr Werk bestimmten Beitrages schritt, ob es nicht möglich wäre, die in der „Théorie mathématique“ mitgeteilte Methode der Darstellung des säkularen Ganges der Erdbestrahlung zu vervollkommen. Die gelang mir durch die in meiner im nachstehenden Verzeichnis unter 8 angeführten Abhandlung mitgeteilten Ueberlegungen, aus denen durch die Einführung der kalorischen Jahreszeiten eine einwandfreie Methode zur Darstellung des säkularen Bestrahlungsganges hervorging, die ich mit jeder weiteren Veröffentlichung über diesen Gegenstand verfeinerte, um ihr schliesslich ihre im Kapitel XV dieses Werkes bis in alle Einzelheiten ausgearbeitete endgültige Form zu geben.

Diese Methode wandte ich an, um auf Wunsch von Köppen die säkularen Aenderungen zu berechnen, die die sommerliche Bestrahlung der geographischen Breiten von 55° bzw. 60° und 65° nördlich während der letzterflossenen 650 Jahrtausende erfahren hat. Dabei beschränkte ich mich darauf, nur die Amplituden dieser Veränderungen zu berechnen, stellte das Ergebnis der Rechnung durch Zackenlinien dar und schickte dieses Graphikon mit den erforderlichen Erläuterungen anfangs des Jahres 1923 an Köppen, der diesen Beitrag seinem und Wegeners Werke einverleibte. Ich aber musste mich unverzüglich anderen wissenschaftlichen Problem zuwenden.

Im Mai 1923 tagte in Konstantinopel der Kongress der orthodoxen orientalischen Kirchen, der sich mit der Reform des julianischen Kalenders, der damals bei diesen Kirchen im Gebrauch stand, befassen sollte. Ich hatte die Ehre als bevollmächtigter Delegierte der serbischen orthodoxen Kirche und der königlichen Regierung an diesem Kongress teilzunehmen und die Genugtuung, mein auf die

Kalenderreform sich beziehenden Vorschläge von diesem Kongress angenommen zu sehen, wodurch der neue Kalender der orientalischen Kirchen geschaffen wurde, worüber ich in den im nachstehenden Verzeichnis unter 9 und 10 eingetragenen Schriften berichtete und worüber im Kapitel VIII dieses Werkes ebenfalls die Rede sein wird.

Im Jahre 1924 wurde das Köppen-Wegenersche Werk „Die Klimate der geologischen Vorzeit“ veröffentlicht. Eines der wichtigsten Ergebnisse desselben war, dass Köppen in meinem Strahlungsdiagramm den Ablauf des Eiszeitalters erkannte, wodurch die auf zuverlässiger astronomischer Grundlage beruhende Chronologie dieses Zeitalters geschaffen wurde, wie ich dies in meiner im nachstehenden Verzeichnis unter 11 angeführten akademischen Antrittsrede wie folgt berichten konnte.

Unser bürgerliche und kirchliche Kalender ist seinem Wesen nach nichts anderes als eine Abzählung der Himmelserscheinungen. In seinen Elementen, dem Tag, dem Monat und dem Jahr, spiegeln sich die kosmischen Erscheinungen, die Drehung der Erde, der Umlauf des Mondes und die Umkreisung der Sonne durch die Erde, wider. Geraso verhält es sich mit dem durch die Strahlungskurven geschaffenen Kalender des Eiszeitalters. In ihm spiegeln sich die kosmischen Erscheinungen höherer Kategorie wider, die oszillierenden Schwankungen der Ekliptikschiefe und der Exzentrizität der Erdbahn und der Umlauf des Perihels. Die Ungleichheit und die Unregelmässigkeit dieser Erscheinungen ist es, die die äusserst komplizierten, aber rechnerisch zuverlässig Schritt für Schritt verfolgbaren Schwankungen der Erdbestrahlung verursachen, die ihrerseits derartig tiefe Spuren im Antlitz der Erde hinterlassen hatten, dass man in der Lage ist, diese Spuren astronomisch zu datieren.

Durch das Köppen-Wegenersche Werk haben meine Strahlungskurven eine grosse Publizität erlangt und sind, wie dies im Kapitel XXI berichtet werden wird, zum Ausgangspunkt anderer grundlegender Arbeiten der Klimatologen und Geologen geworden. Als bald darnach W. Köppen in Verein mit R. Geiger an die Ausgabe seines gross angelegten fünfbandigen Handbuches der Klimatologie schritt, übertrug er mir die Ausarbeitung des Einleitsartikels (Band I, Teil A) dieses Handbuches, der den Titel „Mathematische Klimalehre und Astronomische Theorie der Klimaschwankungen“ erhielt und 1930 veröffentlicht wurde. Dieses Buch, in dem auch die Ergebnisse meiner inzwischen erschienenen, im nachstehenden Verzeichnis unter 13 und 14 angeführten Abhandlungen berücksichtigt wurden, bildet die zweite zusammenfassende Darstellung meiner bis zu jenem Zeitpunkt auf diesem Gebiete vollführten Forschungen. In demselben bildet nur der Planet Erde mit seinem gegenwärtigen und vorzeitlichen Klima den Gegenstand der Behandlung, wodurch die Richtung angedeutet erscheint, in der sich das neue Wissensgebiet weiter entwickeln sollte. In dieser Richtung weist das Buch einen wesentlichen Fortschritt gegenüber der „Théorie mathématique“ auf, weil darin die mathematische Theorie des gegenwärtigen Erdklimas, die mathematische Klimalehre, durch die vollständige Lösung ihrer Grundprobleme zu einem abgeschlossenen Lehrgebiet der exakten Wissenschaften geworden ist. Auch die astronomische Theorie der Klimaschwankungen erhielt in diesem Buche ihre festen Umrisse und führte zur numerischen Berechnung dieser Schwankungen. Die in diesem Buche enthaltene vielzählige Tabelle stellt eine ausführliche, in mathematischer Sprache verfasste Geschichte der Erdbestrahlung der letztverflossenen 600 Jahrtausende dar.

Noch während der Niederschrift der „Mathematischen Klimalehre“ erweiterte

sich mein Arbeitsgebiet durch neue Probleme, die mit den in jenem Buche behandelten in enger Beziehung standen. Ende des Jahres 1927 erhielt ich von B. Gutenberg die Einladung zur Mitarbeit an seinem auf zehn Bände vorgesehenem „Handbuch der Geophysik“. Ich war selbstverständlich gern bereit, dieser ehrenden Aufforderung zu entsprechen, war jedoch wegen der bereits übernommenen Verpflichtungen nicht in der Lage, auf die von Gutenberg vorgesehenen Termine für die Ablieferung der mir zugedachten Beiträge einzugehen. Gutenberg kam mir aber weitgehend entgegen. Er erklärte sich bereit, die Einordnung des Materiales in die einzelnen Bände des Handbuches und die Termine ihrer Veröffentlichung derart umzuändern, dass meine Mitarbeit ermöglicht werde und nahm alle meine diesbezüglichen Vorschläge verständnisvoll an. Einer dieser Vorschläge ging dahin, dem ersten Band den Titel zu geben „Die Erde als Planet“ und darin jene Fragen zu behandeln, die diesen höheren Standpunkt der Geophysik zum Ausdruck bringen. Ich übernahm es, für diesen Band drei von einander getrennte Abschnitte zu liefern: „Stellung und Bewegung der Erde im Weltall“, „Drehbewegungen der Erde“ und „Säkulare Polverlagerungen“. Die Fertigstellung der zwei ersten Abschnitte bereitete mir keine Schwierigkeiten, betreffen sie doch klassische Probleme der Himmelsmechanik, die ich mit dem modernen Werkzeug der Vektoranalysis bearbeitend bald nach der Veröffentlichung meiner „Mathematischen Klimalehre“ fertigstellte und dem Herausgeber des Handbuches einlieferte, der sie unverzüglich dem Drucke übergab. Anders war es mit den „Säkularen Polverlagerungen“. In dieser geophysisch sehr wichtigen Frage standen damals die Lehren der beschreibenden Naturwissenschaften und jene der exakten Wissenschaften in schroffem Gegensatz. Während die beschreibenden Wissenschaften untrügliche Belege dafür besaßen, dass während der Vorzeit die Lage der Pole auf der Erdoberfläche eine andere gewesen war als heute, stand die exakte Wissenschaft dieser Erscheinung ratlos gegenüber. Der Begriff der Pole ist ein solcher der Mechanik, die Pole veranschaulichen die Durchstosspunkte der Drehachse der Erde mit deren Oberfläche. Die Drehbewegung der Erde muss den Gesetzen der Mechanik gehorchen. Diese Wissenschaft war, wie es aus meinem vorangehenden Artikel folgte, tatsächlich in der Lage, alle bisher astronomisch festgestellten Eigentümlichkeiten dieser Drehbewegung, die Präzession, die astronomische und die freie Nutation der Erdachse auf das befriedigendste zu erklären und zu beschreiben, aber ihre Lehren waren nicht imstande, eine Ursache für grössere Verlagerungen der Drehpole der Erde anzugeben und deren Mechanismus zu erklären. Ich unternahm also mit meinem Artikel, diese ganze Frage noch einmal zu überprüfen und zu klären. Es ergab sich dabei, dass die Ursache, warum alle früheren Versuche fruchtlos geblieben sind, darin zu erblicken ist, dass man bei jenen theoretischen Untersuchungen der Drehbewegungen der Erde nicht alle Eigentümlichkeiten des Erdkörpers in Rechnung gestellt hatte. Der Bau der Erde ist viel komplizierter als es früher die Theoretiker bei ihren Untersuchungen vorausgesetzt hatten. Es hat sich auch hier abermals gezeigt, dass die gegenwärtige Trennung der Wissenschaften in ihre Spezialgebiete für manches neue Problem nachteilig ist und man bei Stellung eines solchen Problems gezwungen ist, vorerst einen Brückenschlag zwischen zwei solchen Gebieten zu bewerkstelligen. Ich musste also, bevor ich mich an die Lösung des gestellten Problems wagen konnte, als Himmelsmechaniker in die Schule der Geophysiker mich begeben. Hier war mein

Lehrer Alfred Wegener. Das Studium seiner wissenschaftlichen Arbeiten und die mehrfachen Unterredungen, die ich mit ihm gepflogen hatte, haben mich mit geophysikalischen Tatsachen vertraut gemacht, die sonst einem Mathematiker und Himmelsmechaniker wenig geläufig sind. Diese Gespräche haben mir nicht nur die grundlegende Bedeutung des Polverlagerungsproblems offenbart, sondern mich zu neuen Anschauungen über die Beschaffenheit des Erdkörpers geführt, die sich in der Folge als fruchtbringend erweisen sollten. Erst als ich mich mit dem Aufbau der Erdkruste und namentlich mit der isostatischen Lagerung der Kontinentalschollen auf ihrer gegen langandauernde Kräfte nachgiebigen Unterlage vertraut machte, konnte ich das Problem fest anpacken und beweisen, dass die durch die im Tauchgleichgewicht gebetteten und aus ihrer Unterlage hervorragenden Kontinentaltafeln verursachte dynamische Asymmetrie des Erdkörpers eine langsam vor sich gehende, aber unaufhaltsame Verschiebung der Sialdecke der Erde auf ihrer nachgiebigen Unterlage, also eine säkulare Verlagerung der Erdpole zur Folge haben muss. Die weitere Untersuchung ergab, dass diese Verlagerung der Pole längs der orthogonalen Trajektorie des Trägheitsfeldes dieser Sialdecke vor sich gehen muss. Dadurch wurde das grundlegende Theorem hinsichtlich der Polverlagerung gewonnen, das man in der Literatur mit meinem Namen bezeichnete und aus dem sich alle weiteren Einzelheiten dieser Erscheinung ableiten und mathematisch darstellen liessen.

Durch die Ableitung dieses Theorems, das in meiner im nachstehenden Verzeichnis unter 19 angeführten Abhandlung seine erste Veröffentlichung fand, wurde das mir vom Herausgeber des Handbuches der Geophysik zur Behandlung zugewiesene Problem im Prinzip gelöst. Zur weiteren Behandlung dieses Problems blieb aber keine Zeit mehr übrig, weil der Herausgeber die sofortige Drucklegung meines bis zu diesem Stadium gediehenen Beitrages wünschte. Wir vereinbarten also, dass die weitere Behandlung der Polverlagerungsfrage in meinem für den neunten Band des Handbuches vorgesehenem Beiträge „Astronomische Mittel zur Erforschung der erdgeschichtlichen Klimate“ durchgeführt werden möge und so geschah es.

Die Drucklegung dieses letzten Beitrages verzögerte sich durch den inzwischen herangebrochenen wirtschaftlichen Niedergang beträchtlich und erfolgte erst im Juli 1938. Ich hatte aber keine Ursache, mich über diese Verzögerung zu beklagen, denn dadurch habe ich Zeit gewonnen, mehrere wichtige Fragen meines Forschungsgebietes zu klären und zu lösen. Die geschah in einer Reihe von Abhandlungen, die in den Jahren 1932 bis 1937 veröffentlicht wurden und die im nachstehenden Verzeichnis unter 21, 22, 23, 24, 25 und 28 angeführt sind.

Die fünf ersten dieser Abhandlungen betrafen das Polverlagerungsproblem. In denselben wurde die Differentialgleichung der Polverlagerung integriert, d. h. die analytische Gleichung der Polbahnkurve abgeleitet. Mit Hilfe dieser Gleichung konnte dann an die numerische Berechnung der aus der Konfiguration der Kontinente sich ergebenden säkularen Bahnen der beiden Erdpole geschritten und das Ergebnis der Rechnung mit den Dokumenten der Erdgeschichte verglichen und beglaubigt werden. Auch eine neue von den Polfluchtkräften ausgehende Ableitung der Grundgleichung der säkularen Polverlagerungen konnte als ein weiterer Beleg für die Richtigkeit dieser Gleichung geliefert werden.

Nicht minder wichtig waren die Ergebnisse meiner Forschungen über die Auswirkungen des säkularen Ganges der Erdbestrahlung, die ich in meiner im nach-

stehenden Verzeichnis unter 28 angeführten Abhandlung veröffentlichte. Das **wichtigste derselben** betraf die Frage, ob der durch die Veränderlichkeit der **astronomischen Elemente** hervorgerufene Bestrahlungsgang der Erde, an dessen durch die **Rechnung** sich ergebenden Rhythmus nicht mehr zu zweifeln war, ausreichend sei, um auch die grössten klimatischen Schwankungen des Quartärs in ihrem **vollem Umfang** zu erklären. Manche Gelehrte bezweifelten dies, und es war **deshalb** wünschenswert, meine Berechnungen des säkularen Ganges der Erdbestahlung durch die Ermittlung der klimatischen Effekte dieses Ganges zu **vervollständigen**, um zu sehen, wie gross diese Effekte gewesen sind. Einen Schritt in dieser **Richtung** habe ich bereits in meiner „Mathematischen Klimalehre“ gemacht, aber **den entscheidenden** erst in den „Neuen Ergebnissen der astronomischen Theorie der **Klimaschwankungen**“ vollführt. Dabei ging ich von der mathematischen Analyse des **Zusammenhanges** zwischen der Höhenlage der Schneegrenze und der zugehörigen dem **kalorischen Sommerhalbjahr** entsprechenden Strahlungsmenge aus, und fand, dass **jeder Veränderung** dieser Menge von einer kanonischen Einheit eine Verschiebung **der Schneegrenze** von einem Meter entspricht. Ich fand nachträglich, dass dasselbe **Resultat** auch aus dem in der „Mathematischen Klimalehre“ abgeleiteten **Zusammenhang** zwischen Bestrahlung und Temperatur zwangsläufig folgt.

Auf Grund dieses Ergebnisses konnte der wichtigste klimatische Effekt des **vorzeitlichen Ablaufes** der Erdbestahlung, die dadurch hervorgerufenen **Verschiebungen** der Schneegrenze, erfasst werden: man hatte die in meinen Tabellen mitgeteilten Zahlen, die die **Änderungen** der sommerlichen Bestrahlung der einzelnen geographischen Breiten in kanonischen Einheiten wiedergeben, einfach als Meter zu **deuten**, um die zugehörigen Verschiebungen der Schneegrenze zu erhalten. Dabei bedeutet das Vorzeichen + die Verschiebung der Schneegrenze nach oben, das Zeichen - die Verschiebung nach unten. Dadurch haben jene Tabellen einen mit der Hand erfassbaren klimatologischen Inhalt erhalten.

Die derart gedeuteten Tabellen der Erdbestahlung zeigen, dass die durch die **Änderungen** dieser Bestrahlung an Ort und Stelle hervorgerufenen **Verschiebungen** der Schneegrenze genügend mächtig gewesen sind, um deutliche Spuren zu hinterlassen, also den säkularen Bestrahlungsgang der Erde auf ihrem Antlitz zu **markieren**, aber nicht ausreichend waren, um die grossen Vereisungen der Vorzeit in ihrem vollem Umfang hervorzurufen. Zu diesem vollem Ausmass der Vereisungen war ein weiterer klimatischer Faktor erforderlich. Um diesen Faktor zu entdecken und mathematisch zu erfassen, musste noch ein letzter, dem Ziele führende Schritt gemacht werden, zu dem mich folgende Ueberlegungen führten.

Sind wir imstande, rechnerisch zu verfolgen, wie sich die Schneegrenze im Laufe der Vorzeit nach oben bzw. nach unten verschoben hatte, so sind wir dadurch in die Lage versetzt, auch jene **Änderungen** rechnerisch zu verfolgen, die die **polaren Eiskalotten** während der Vorzeit erfahren hatten. Diese schneeweissen **Polar-kappen** besitzen ein sehr hohes Reflexionsvermögen, weshalb sie einen namhaften Teil der ihnen zugestrahlten Wärmemengen in den Weltraum zurückweisen, der dadurch für den Wärmehaushalt der Erde verloren geht. Vergrössert sich also durch die **säkulare Verschiebung** der Schneegrenze nach unten die mit Eis und Schnee bedeckte Kalotte der in Betracht gezogenen Hemisphäre der Erde, so wird durch das vergrösserte Reflexionsvermögen dieser Hemisphäre ihre nutzbare Bestrahlung

vermindert, und daraus resultiert eine weitere, sekundäre Verschiebung der Schneegrenze nach unten.

Es handelte sich also darum, auch diese durch das veränderte Reflexionsvermögen hervorgerufene Verschiebung der Schneegrenze mit ihrer primären Ursache, dem Gang der Erdbestrahlung, in Beziehung zu bringen und mathematisch zu erfassen.

Ich bemühte mich bereits in meiner „Mathematischen Klimalehre“ diesbezügliche Berechnungen durchzuführen, stiess aber dabei auf Schwierigkeiten, die davon herrührten, dass ich keine verlässliche numerische Angabe darüber besass, welcher Bruchteil der Wärmestrahlung der Sonne von der mit Schnee bzw. mit Eis bedeckten Flächeneinheit in den Weltraum zurückreflektiert wird. Eine erfolgversprechende Berechnung wäre ohne eine diesbezügliche Angabe nicht möglich gewesen, und eine solche konnte nur durch systematische Forschungen in schneebedeckten Gebieten der Erde gewonnen werden, was aber damals noch nicht geschehen ist. Ich musste also mein im Sinne gehabtes Vorhaben aufgeben bis derartige Messungen durchgeführt wären.

Ich habe, — und hier hatte ich, so wie es auch mit der Ermittlung der Solar-konstante der Fall gewesen ist, wieder Glück — nicht lange warten müssen. Im Sommer des Jahres 1933 erhielt ich aus Paris eine wissenschaftliche Arbeit des Herrn Joseph Devaux, in der dieser junge Gelehrte, der bald nachher bei einer Forschungsreise in die polaren Gegenden seinen Tod fand, die Ergebnisse seiner auf den Gletschern der Pyrenäen und den Alpen und in Grönland durchgeführten Untersuchungen über das Reflexionsvermögen dieser Schneebedeckungen bekanntgab. In dieser Abhandlung fand ich die für die Durchführung meiner Berechnungen erforderliche zuverlässig ermittelte numerische Angabe. Ich konnte also meine Berechnungen auf einer gesicherten Basis durchführen.

Die Berechnungen, die ich nach Veröffentlichung meines im nachstehenden Verzeichnis unter 26 angeführten Lehrbuches der Mechanik des Himmels durchführte und in meinen „Neuen Ergebnissen“ veröffentlichte, ergaben, dass der mit Berücksichtigung des veränderlichen Reflexionsvermögens der Erde berechnete vorzeitliche Gang der Erdbestrahlung vollkommen ausreicht, um auch die grössten klimatischen Aenderungen des Quartärs in ihrem vollem Umfang zu erklären. Die abkühlende Wirkung der zeitweilig verbreiterten Eiskalotten der Erde gesellte sich als sekundärer Effekt dem säkularen Gange der Erdbestrahlung hinzu, denn sie war durch diesen Gang hervorgerufen. Deshalb weisen die neuen, mit Berücksichtigung dieses Effektes ermittelten Strahlungskurven denselben Rhythmus wie die früher berechneten auf, und zeichnen sich nur durch ihre grösseren Ausschläge aus. Aus diesem Grunde hat mein Kalender des Eiszeitalters auch weiterhin seine Gültigkeit behalten, nur sind darin die grossen Ereignisse der Vorzeit, ähnlich den Feiertagen des bürgerlichen Kalenders, mit fetten Buchstaben eingetragen.

Als ich die endgültige Niederschrift meines letzten Beitrages für das „Handbuch der Geophysik“ der „Astronomischen Mitteln zur Erforschung der erdgeschichtlichen Klimate“, in Angriff nahm, waren alle noch offengebliebenen Fragen vollständig gelöst. So konnte ich diese Veröffentlichung als den Schlussstein meiner Forschungen auf dem Gebiete der Erdgeschichte betrachten und in meinen zwei Vorträgen, die ich Ende des Jahres 1937 an den Universitäten in Prag und Brünn hielt und die im nachstehenden Verzeichnis unter 30 angeführt sind, erklären, dass ich damit meine

Arbeit auf diesem Gebiete als abgeschlossen betrachte. Bald nachher sah ich aber ein, dass mein Lebenswerk damit nicht vollendet war und ich ihm noch weitere Arbeitsjahre widmen müsse.

Die Mechanik des Himmels war eine der beiden Grundmauern, auf denen das vor mir vor vielen Jahren begonnene Lehrgebäude errichtet stand. Ihre Lehren für den Aufbau dieses Gebäudes benützend, habe ich gesehen, dass nur ein besonderer Teil derselben für Probleme, mit denen ich mich befasste, in Betracht kommt, wie sich dies aus verschiedenen Zielen der Astronomie und jenen der Geophysik naturgemäss ergibt. Für den Astronomen ist unsere Erde der Standort, von dem aus er die Himmelserscheinungen erforscht, und das Bezugssystem, auf das er die mathematische Beschreibung dieser Erscheinungen bezieht; für den Geophysiker bildet die Erde das einzige Objekt seiner Untersuchungen. Für den Astronomen sind alle Himmelserscheinungen von Interesse, für den Geophysiker nur jene, die den Lebenslauf der Erde und ihrer Welt beeinflussen. Bei meinen Untersuchungen ward mir die Aufgabe zuteil, die die Geschicke der Erde betreffenden Lehren der Himmelsmechanik aus dem umfangreichen System dieser Wissenschaft herauszuschälen, um sie bei meinen Forschungen zu benützen. Bei dieser Auslese habe ich die Beobachtung gemacht, dass manche von diesen Lehren in den Werken über Himmelsmechanik stiefmütterlich behandelt erscheint und dem ausübenden Astronomen nicht genügend geläufig ist. Den auf dem Gebiete der beschreibenden Wissenschaften tätigen Forschern blieben diese Lehren grösstenteils unzugänglich. Darüber belehrten mich die Einwände, die man seitens einiger dieser Forscher gegen meine Theorie erhoben hat. Alle ihre Einwände rührten, wie man im sechsten Abschnitt deutlich sehen wird und wie es sich aus meinem im nachstehenden Verzeichnis unter 32 angeführten und im § 113 wiedergebenen Referat ebenfalls ergeben hat, davor her, dass keiner der erwähnten Forscher genügende Kenntnisse der exakten Wissenschaft besas, um eine astronomische Theorie begutachten zu können.

Dies alles überzeugte mich, dass meine Theorie erst dann ein in sich abgeschlossenes und auch den beschreibenden Wissenschaften zugängliches Lehrgebiet bilden wird, wenn ich sie durch die für die Geophysik in Betracht kommenden Lehren der Himmelsmechanik ergänze. Einen ersten Schritt in dieser Richtung habe ich bereits in meinen drei im nachstehenden Verzeichnis unter 17, 18 und 20 angeführten Artikeln des „Handbuches der Geophysik“ getan, um die damit begonnene Arbeit erst durch das vorliegende Werk zu vollenden. Darüber möchte ich folgendes vorausschicken.

Die für meine Theorie wichtigen Lehren der Himmelsmechanik betreffen die säkularen Störungen der Planeten und die Drehbewegungen der Erde. Bei der Neubearbeitung der Theorie der säkularen Störungen, die ich in meiner im nachstehenden Verzeichnis unter 31 angeführten Abhandlung einleitete und hier zu Ende führte, bin ich durch Einführung vektorieller Elemente eigene Wege gegangen und habe derselben eine für ihre Anwendungen zweckmässigere Form gegeben, ohne dadurch die Endergebnisse der klassischen Theorie zu ändern. Die Theorie der Drehbewegungen der Erde, die ich hier in der ihr von mir in dem gleichbetitelten Handbuchartikel gegebenen Form wiedergebe, habe ich durch die Ergebnisse meiner Untersuchungen über die säkularen Wanderungen der Pole wesentlich erweitern können.

Mit dem allgemeinen Problem der Drehbewegung der Himmelskörper haben sich auch meine beiden Kollegen, Professoren der Belgrader Universität A. Bili-movitch und W. Jar-detzky, erfolgreich befasst. W. Jar-detzky hat sich dabei mit dem zonalen Drehbewegungszustand der Himmelskörper, den auch unsere Erde einst durchgemacht hat und der möglicherweise noch nicht ganz ausgeklungen ist, sehr eingehend beschäftigt. Seine diesbezüglichen Untersuchungen hat er in seinem Werke „Recherches mathématiques sur l'évolution de la Terre“, das ebenfalls als Veröffentlichung der königlich serbischen Akademie erschienen ist, zusammengefasst und dadurch die auf ein Jahrzehnt auf diesem Gebiet der Himmelsmechanik sich erstreckende Arbeit unserer Belgrader Schule zu einem schönen Abschluss gebracht.

Als ich die für das Verständnis meiner Theorie erforderlichen Lehren der Himmelsmechanik vervollständigte und in der hierzu entsprechenden Form zu einem Ganzen zusammenfügte, führte mich eine Umschau über das bis dahin geleistete zu neuen Entschlüssen, die durch folgende Ueberlegungen veranlasst wurden.

Im Frühjahr 1938 war meine Abhandlung „Neue Ergebnisse der astronomischen Theorie der Klimaschwankungen“ erschienen und ich hatte noch nicht Zeit gefunden, Sonderabdrücke dieser Abhandlung an meine engere Fachgenossen zu versenden, setzte, wohl durch eine in der Meteorologischen Zeitschrift erschienene und von W. Wundt herrührende Besprechung derselben ausgelöst, eine rege Nachfrage nach dieser Arbeit ein. In rascher Folge erhielt ich Briefe auch aus ausser-europäischen Ländern, aus Nord- und Südamerika, aus Südafrika und aus Asien, in denen ich um die Uebersendung dieser Abhandlung ersucht wurde. Mit 50 Exemplaren, die ich hatte, konnte ich nicht alle diese Wünsche befriedigen. Dies überzeugte mich, dass das Interesse an meiner Theorie rege geblieben ist. Dies bewies mir auch der Umstand, dass im Laufe desselben Jahres meine „Mathematische Klimalehre“ ins russische übersetzt und 1939 in 4000 Exemplaren gedruckt worden ist.

Ich dachte also darüber nach, wie ich den durch die vorstehenden Begebenheiten mir zur Kenntnis gebrachten Wünschen am besten nachkommen könnte.

Meine beiden die Theorie der erdgeschichtlichen Klimate ausführlich behandelnden Schriften ergänzen sich gegenseitig. Der räumliche Umfang meiner „Astronomischer Mittel“ wurde schon im Jahre 1927, lange Zeit vor Inangriffnahme dieser Arbeit, festgelegt. Damals ahnte ich nicht, dass sich dieser Rahmen durch die inzwischen erfolgte Lösung neuer Probleme als zu eng erweisen sollte. Aus diesem Grunde und obwohl mir der Herausgeber in entgegenkommender Art ausnahmsweise erlaubt hat, den vorgesehenen Umfang meines Beitrages zu überschreiten, bildet diese Veröffentlichung keine zusammenfassende Darstellung meiner Forschungsergebnisse, sondern nur eine Ergänzung meiner „Mathematischen Klimalehre“. Es ist aber zu berücksichtigen, dass diese beiden Veröffentlichungen, von denen die erste einen Bestandteil des fünfbandigen „Handbuches der Klimatologie“, und die zweite einen solchen des zehnbändigen „Handbuches der Geophysik“ bildet, einzelnen Forschern schwer zugänglich sind, weil selbst nur wenige der wissenschaftlichen Anstalten diese beiden vielbändigen Sammelwerke besitzen. Alle diese Erwägungen führten mich zum Entschluss, an eine vollständige zusammenfassende Darstellung meines Lebenswerkes zu schreiten.

Dies ist der Werdegang meines neuen Werkes, in dem alle wichtigsten Ergebnisse meiner Forschungen über das Klima der Gegenwart und der Vorzeit

mit ihren himmelsmechanischen Grundlagen vereinigt, erweitert und vervollständigt erscheinen und ein zusammenhängendes Ganze bilden, zu dessen vollem Verständnis nur die Kenntnisse der höheren Mathematik und der Vektoranalysis erforderlich sind.

Die ersten drei Abschnitte des Werkes sind jenen Grundlagen, also den aus dem Newtonschen Gravitationsgesetz sich ergebenden Konsequenzen und den für meine Theorie ebenfalls wichtigen Lehren der Sphärischen Astronomie gewidmet, die übrigen drei Abschnitte betreffen die aus dem Bestrahlungsgesetz sich ergebenden Schlussfolgerungen. In dieser Zweiteilung gelangt der Leitgedanke aller meiner Forschungen zum sinnfälligen Ausdruck.

Aus diesem Werdegang meines Werkes und aus seinem soeben gekennzeichneten Inhalt ergibt sich auch die Sonderstellung, die das Werk im System der Wissenschaften einnimmt. Die Hauptergebnisse des Werkes sind, wie es seine programmatische Grundidee forderte, ohne Zuhilfenahme irgendwelcher Hypothesen aus dem Newtonschen Gravitationsgesetz und aus dem Bestrahlungsgesetz gewonnen worden. Wo es notwendig war, sich auch anderer Doktrinen der Naturwissenschaft zu bedienen, so waren es nur wohlbegründete Gesetze der Physik oder anerkannte Lehren der Geophysik. Deshalb gehört das Werk ganz und gar dem Gebiet der exakten Wissenschaften an.

Bei der Berechnung des säkularen Ganges der Erdbestrahlung, der im vorliegenden Werke durch die umfangreiche Tabelle XXV zur vollständigen numerischen Darstellung gebracht wurde, habe ich nur von dem Newtonschen Gravitationsgesetz und von dem Bestrahlungsgesetz Gebrauch machen müssen. Diese beiden Gesetze gehören zu den exaktesten Gesetzen unserer heutigen Naturwissenschaft, weshalb der Berechnung jener Tabelle der Charakter eines astronomischen Kalküls zukommt. Mit denselben Hilfsmitteln, mit denen man die Zeitpunkte der während der Vorzeit stattgefundenen Sonnen- und Mondfinsternisse zu berechnen pflegt, erscheinen hier die Epochen der einzelnen Phasen des säkularen Ganges der Erdbestrahlung ermittelt. Weil man das Ergebnis der Berechnung der stattgefundenen Finsternisse als Kanon der Finsternisse zu bezeichnen gewöhnt ist, kann man das Ergebnis meiner Berechnungen als Kanon der Erdbestrahlung bezeichnen. Dies rechtfertigt den Haupttitel, den ich meinem Werke gegeben habe. Die ersten zwanzig Kapitel dieses Werkes geben diesen Kanon mit allen seinen theoretischen Grundlagen wieder.

Die letzten drei Kapitel des Werkes sind den Anwendungen dieses Kanons auf das Eiszeitenproblem gewidmet, wie dies im Untertitel des Werkes angegeben ist. Die Anwendungen, die meine Strahlungskurven seitens der Klimatologen und der Geologen erfahren haben, sind zahlreich: ich habe in meinem Buche über hundert diesbezügliche Abhandlungen und Werke anführen und benützen können, in denen man sich über 600 Mal auf mich und noch ausgiebiger auf meine Strahlungskurven beruft.

Durch diese Anwendungen greift das auf dem Boden der exakten Wissenschaft fussende Werk auf das Gebiet der beschreibenden Naturwissenschaften hinüber und bildet dadurch eine Brücke zwischen den exakten und den beschreibenden Naturwissenschaften, das bisher fehlende Verbindungsglied zwischen der Himmelsmechanik und der Geologie.

Verzeichnis

der

auf den in diesem Werke behandelten Gegenstand sich beziehenden
Schriften des Verfassers

1. Ueber die Verteilung der Sonnenstrahlung auf der Erdoberfläche. (Serbisch, 79 Seiten). Berichte der königlich serbischen Akademie. Band XCI. 1913.

2. Ueber die Anwendung der mathematischen Theorie der Wärmeleitung auf Probleme der kosmischen Physik. (Serbisch, 23 S.) Arbeiten der jugoslawischen Akademie der Wissenschaften. Band 200. 1913. — Ein Auszug aus dieser Abhandlung erschien im Bulletin des travaux de l'Académie des sciences de Zagreb. 1914.

3. Zur Theorie der Strahlenabsorption in der Atmosphäre. (16 S.) Annalen der Physik. Vierte Folge. Band 43. 1914.

4. Ueber die Verringerung der Wärmeabgabe durch die Marsatmosphäre. (12 S.) Annalen der Physik. Vierte Folge. Band 44. 1914.

5. Ueber die Frage der astronomischen Theorien der Eiszeiten. (Serbisch, 10 S.) Arbeiten der jugoslawischen Akademie der Wissenschaften. Band 204. 1914. — Eine von V. Varićak besorgte deutsche Uebersetzung dieser Abhandlung erschien im Bulletin des travaux de l'Académie des sciences de Zagreb. 1915.

6. Untersuchungen über das Klima des Planeten Mars. (Serbisch, 33 S.) Arbeiten der jugoslawischen Akademie der Wissenschaften. Band 213. 1916. — Eine deutsche Uebersetzung dieser Abhandlung erschien im Bulletin des travaux de l'Académie de Zagreb. 1916/7.

7. Théorie mathématique des phénomènes thermiques produits par la radiation solaire. (XVI + 399 Seiten). Paris 1920. — Dieses als Veröffentlichung der jugoslawischen Akademie der Wissenschaften durch Gauthier-Villars et Cie verlegte Werk wird nachstehend in der Abkürzung „Théorie mathématique“ angeführt. — Eine deutsch geschriebene Inhaltsangabe des Werkes erschien im Bulletin des travaux de l'Académie des sciences de Zagreb. 1920.

8. Kalorische Jahreszeiten und deren Anwendung im paläoklimalen Problem. (Serbisch mit einer französischen Inhaltsangabe, 30 S.) Berichte der königlich serbischen Akademie. Band CIX. 1923.

9. Die Reform des julianischen Kalenders. (Serbisch, 52 S.) Besondere Ausgaben der königlich serbischen Akademie, Band XLVII. 1923.

10. Das Ende des julianischen Kalenders und der neue Kalender der orientalischen Kirchen. (2 S.) Astronomische Nachrichten. Band 220. 1924.

11. Das Kalendarium der Erdgeschichte. (Serbisch, 9 S.). Berichte der königlich serbischen Akademie. Band CXVII. 1926.

12. Untersuchungen über die thermische Konstitution der Planetatmosphären. (Serbisch mit einer französischen Inhaltsangabe, 16 S.). Berichte der königlich serbischen Akademie. Band CXX. 1926.

13. Ueber die Temperaturoszillationen in den verschiedenen Schichten der Atmosphäre. (Serbisch mit einer französischen Inhaltsangabe, 19 S.). Berichte der königlich serbischen Akademie. Band. CXXXIV. 1929.

14. Astronomische Theorie der säkularen Variationen des Klimas (Serbisch, 63 S.) Berichte der königlich serbischen Akademie. CXLIII. 1931.

15. Mathematische Klimalehre und Astronomische Theorie der Klimaschwankungen. (176 S.). Band I, Teil A des Köppen Geigerschen Handbuches der Klimatologie. Berlin 1930. Nachstehend angeführt unter „Mathematische Klimalehre“.

16. Ueber die Uratmosphäre der Erde. (4 S.). Gerlands Beiträge zur Geophysik. Band 33. 1931.

17. Stellung und Bewegung der Erde im Weltall (70 S.). Abschnitt II des ersten Bandes des „Handbuches der Geophysik.“ Berlin. 1931.

18. Drehbewegungen der Erde. (67 S.). Abschnitt VI des ersten Bandes des „Handbuches der Geophysik“. Berlin 1933.

19. Säkulare Verlagerungen der Rotationspole der Erde. (Serbisch, 36 S.). Berichte der königlich serbischen Akademie. Band CLII. 1932.

20. Säkulare Polverlagerungen. (63 S.). Abschnitt VII des ersten Bandes des „Handbuches der Geophysik“. Berlin 1933.

21. Bahnkurve der säkularen Polverlagerung. (5 S.). Publications mathématiques de l'Université de Belgrade. Tome I. 1932.

22. Numerische Ausrechnung der säkularen Bahnkurve der Rotationspole der Erde. (Serbisch, 36 S.). Berichte der königlich serbischen Akademie. Band CLIV. 1933.

23. Das Problem der Verlagerung der Drehpole der Erde in den exakten und in den beschreibenden Naturwissenschaften. Erinnerungen an Alfred Wegener. (23 S.). Publications mathématiques de l'Université de Belgrade. Tome II. 1933.

24. Der Mechanismus der Polverlagerungen und die daraus sich ergebenden Polbahnkurven. (28 S.) Gerlands Beiträge zur Geophysik. Band 42 1934.

25. Ueber das Problem der Polverlagerungen. (5 S.) Actes du congrès interbalkanique de mathématiciens Athènes 1935

26. Die Mechanik des Himmels. (Serbisch, 333 S.). Lehrbücher der Universität in Belgrad. 1935

27. Durch ferne Welten und Zeiten. (389 S) Leipzig, erste Auflage 1936, zweite Auflage 1941.

28. Neue Ergebnisse der astronomischen Theorie der Klimaschwankungen. (Serbisch, 41 S.). Berichte der königlich serbischen Akademie. Band CLXXV. 1937. Eine vollständige deutsche Uebersetzung dieser Abhandlung erschien im Bulletin de l'Académie des sciences mathématiques et naturelles. 1938.

29. Astronomische Mittel zur Erforschung der erdgeschichtlichen Klimate (106 S.) Abschnitt VII des neunten Bandes des „Handbuches der Geophysik“. Berlin 1938.

30. Ein neues Kapitel der exakten Wissenschaften und dessen Anwendung in den beschreibenden Naturwissenschaften. (19 S.). Publications mathématiques de l'Université de Belgrade. Tome VI. 1937. — Eine französische Uebersetzung dieses Artikels erschien in der Revue mathématique de l'Union interbalkanique. Tome II. 1938.

31. Ueber die Verwendung vektorieller Bahnelemente in der Störungsrechnung. (Serbisch, 72 S.). Berichte der königlich serbischen Akademie. Band CLXXXI, 1939. — Eine vollständige deutsche Uebersetzung dieser Abhandlung erschien im Bulletin de l'Académie des sciences mathématiques et naturelles. 1939.

32. Ein auf Veranlassung der Redaktion der Meteorologischen Zeitschrift verfasstes Referat über die Schrift von Spitaler: Die Bestrahlung der Erde durch die Sonne und die Temperaturverhältnisse in der quartären Eiszeit. Meteorologische Zeitschrift. Heft 9. 1940.

ERSTER ABSCHNITT

Die Bewegung der Planeten um die Sonne und die gegenseitigen Störungen dieser Bewegung

KAPITEL I

Das Newtonsche Gravitationsgesetz

§ 1. Die Keplerschen Gesetze. Ich habe in meinen beiden im Vorwort angeführten Schriften „Stellung und Bewegung der Erde im Weltall“ und „Mechanik des Himmels“ den geschichtlichen Entwicklungsgang unserer Kenntnisse von der Bewegung der Himmelskörper ausführlich geschildert. Indem ich auf diese historische Studie verweise, möchte ich einiges davon hier kurz erwähnen.

Der auf Jahrtausende sich erstreckenden ununterbrochenen Tätigkeit der chaldäischen Himmelsbeobachter ist es zu danken, dass eine Fülle astronomischen Tatsachenmaterials zu Tage gefördert wurde, mit dem die alten Griechen und Alexandriner das antike Gebäude der astronomischen Wissenschaft errichten konnten. Die Pythagoräer lehrten die Kugelgestalt der Erde, später auch ihre Drehbewegung. Aristoteles bewies jene Kugelgestalt, und aus der Anschauung einer sich drehenden Erde entwickelte sich nach und nach das heliozentrische Weltsystem der Alten, das durch Aristarch von Samos zum vollständigen Ausbau gebracht wurde, denn „er liess den Fixsternhimmel feststehen, dagegen die Erde sich auf einen gegen den Aequator geneigten Kreise bewegen und gleichzeitig um ihre Achse drehen“.

Sonderbar waren die Schicksale dieses antiken heliozentrischen Weltsystems. Ich glaube in meiner Studie zur Genüge bewiesen zu haben, dass Apollonios

von Perge durch die Beantwortung der naheliegenden Frage, wie die Bewegungen der Planeten im Aristarch'schen Weltsystem verlaufen müssten, wenn man sie von der Erde aus verfolgte, seine Theorie der Epizyklen geschaffen hat. Diese Epizyklen stellten also die relativen Bahnen der Planeten in bezug auf die Erde dar und konnten deshalb im geozentrischen Weltsystem des Ptolemaios ausgiebige Verwendung finden, die das heliozentrische Weltsystem in den Hintergrund, ja in gänzliche Vergessenheit zurückdrängte. Erst Kopernikus gelang es, den Knäuel der Epizyklen zu entwirren und das Gebäude des heliozentrischen Weltsystems wieder zu errichten. Galilei brachte dasselbe zur Anerkennung und Kepler entdeckte die kinematischen Gesetze der Planetenbewegung. Ich habe in den erwähnten Schriften berichtet, wie Kepler die Himmelsbeobachtungen des Tycho Brahe genial verwertend seine Gesetze abgeleitet hat. Diese Gesetze sind bekanntlich die folgenden:

- I. Die Planeten beschreiben um die Sonne Ellipsen, in deren gemeinsamen Brennpunkte die Sonne steht.
- II. Der Radiusvektor von der Sonne nach dem Planeten hin überstreicht dabei in gleichen Zeiten gleiche Flächen.
- III. Die Quadrate der Umlaufszeiten der Planeten verhalten sich zu einander wie die dritten Potenzen der grossen Halbachsen ihrer Bahnellipsen.

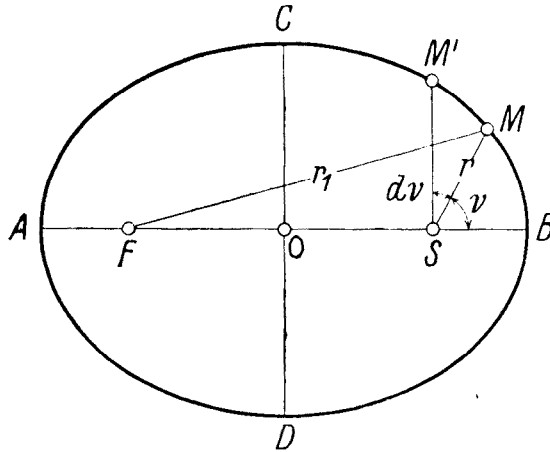


Fig. 1

Es ist notwendig, diese Gesetze in mathematische Formeln zu kleiden, weil davon oft Gebrauch zu machen sein wird. Dabei ist unter der Bahn des Planeten jene seines Schwerpunktes zu verstehen.

Es stelle also $BCADB$ (Fig. 1) die Bahnellipse des in Betracht gezogenen Planeten dar. AB sei die grosse, CD die kleine Achse derselben. S und F seien die beiden Brennpunkte dieser Ellipse, wobei S derjenige dieser Brennpunkte sein möge, den die Sonne umschliesst; dann heisst B das Perihelium und A das Aphelium der Planetenbahn. Bezeichnet a die grosse, b die kleine Halbachse der Ellipse,

ist $OS = OF = \sqrt{a^2 - b^2}$. Die unbenannte Zahl

$$(1) \quad e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

wird die numerische Exzentrizität oder kurz die Exzentrizität der Planetenbahn genannt. Es ist

$$(2) \quad b^2 = a^2 (1 - e^2).$$

Die Länge

$$(3) \quad p = \frac{b^2}{a}$$

$$(4) \quad p = a (1 - e^2)$$

wird der Parameter der Bahnellipse genannt.

Verbindet man einen beliebigen Punkt M der Bahnellipse, d. h. eine beliebige Lage des Planeten auf dieser Bahn mit den beiden Brennpunkten S und F und bezeichnet die beiden Radiusvektoren SM bzw. FM mit r bzw. r_1 , so ist nach der Definition der Ellipse

$$r + r_1 = 2a.$$

Der mit ν bezeichnete Winkel BSM wird die wahre Anomalie des in der Lage M gedachten Planeten genannt.

Es folgt aus dem Dreieck FSM , in dem nach dem soeben gesagten $\overline{FS} = 2ea$ ist,

$$r_1^2 = (2ea)^2 + r^2 + 4ear \cos \nu.$$

Setzt man hierin für r_1 den Wert

$$r_1 = 2a - r$$

ein, so wird

$$(1 + e \cos \nu) ar = a^2 - e^2 a^2 = b^2,$$

d. h.

$$(5) \quad r = \frac{p}{1 + e \cos \nu}.$$

Dies ist die Gleichung der Planetenbahnellipse und der mathematische Ausdruck des ersten Keplerschen Gesetzes.

Für $\nu = \frac{\pi}{2}$ wird $r = p$, woraus die Bedeutung des Parameters p ersichtlich ist: seine Länge ist gleich jener des auf der grossen Bahnachse senkrechten Radiusvektors.

Um das zweite Keplersche Gesetz mathematisch zum Ausdruck zu bringen, sei $d\nu$ die dem unendlich kleinen Zeitintervall dt entsprechende Zunahme der wahren Anomalie. Während dieser Zeit überstreicht der Radiusvektor r die Fläche $dF = \frac{1}{2} r^2 d\nu$ des unendlich schmalen Dreiecks MSM' . Der Quotient

$$\frac{dF}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\nu}{dt}$$

wird die Flächengeschwindigkeit der Bewegung genannt; diese soll dem zweiten Keplerschen Gesetz zufolge konstant sein. Es ist deshalb

$$\frac{dF}{dt} = \frac{1}{2} C,$$

worin C eine der doppelten Flächengeschwindigkeit gleiche Konstante bedeutet. Es folgt aus den vorstehenden Gleichungen

$$(6) \quad r^2 \frac{d\nu}{dt} = C,$$

wodurch das zweite Keplersche Gesetz mathematisch in Differentialform ausgedrückt erscheint.

Bezeichnet T die Umlaufszeit des Planeten um die Sonne, so wird während dieser Zeit die ganze von der Bahnellipse umschlossene Fläche πab überstrichen. Die Flächengeschwindigkeit erscheint also auch durch den Ausdruck

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\pi ab}{T}$$

dargestellt. Es ist also

$$(7) \quad C = \frac{2\pi ab}{T}.$$

Das dritte Keplersche Gesetz ist mathematisch durch die Gleichung

$$(8) \quad \frac{a^3}{T^2} = k$$

veranschaulicht, in der k für alle Planeten eine und dieselbe Grösse ist.

Durch die Gleichungen (5) und (6) ist die Bewegung des Planeten auf seiner Bahn eindeutig gegeben und es lässt sich durch Integration dieser Gleichungen die Lage des Planeten auf dieser Bahn in endlicher Form als Funktion der Zeit darstellen. Kepler hat dieses Problem durch geometrische Überlegungen gelöst, die ihre Bedeutung bis heute bewahrt haben, weshalb sie hier wiedergegeben werden mögen.

Sind die beiden Achsen AP und CD der Bahnellipse gegeben (Fig. 2), so wird der zu einer beliebigen Ordinate LM_1 gehörige Punkt dieser Ellipse bekannterweise wie folgt ermittelt. Man beschreibt über den beiden Achsen als Durchmesser die Kreise PC_1AD_1P und $ECFDE$, verbindet M_1 mit dem Mittelpunkt O und

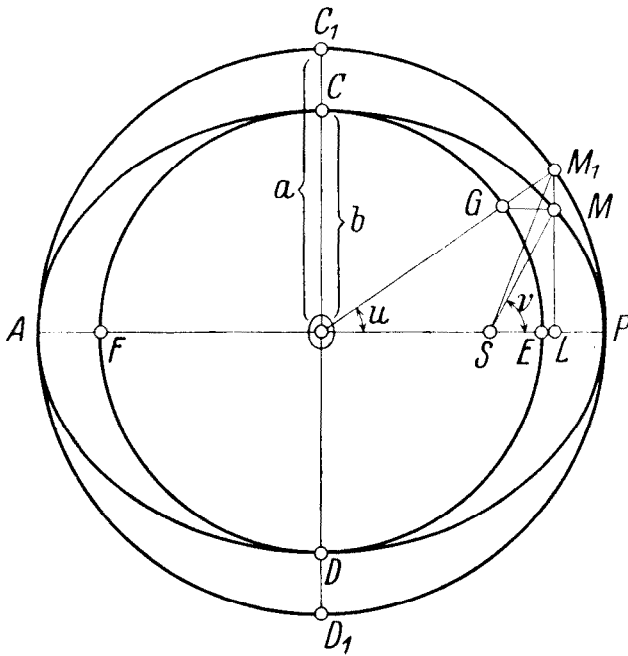


Fig. 2

zieht $GM \parallel OP$. Dann ist M der gesuchte Punkt der Ellipse. Es sind in der Tat wenn man die beiden Halbachsen der Ellipse, wie bisher, mit a bzw. b und den Winkel POM_1 mit u bezeichnet, die beiden Koordinaten von M durch die Ausdrücke

$$(9) \quad \begin{cases} x = \overline{OL} = a \cos u \\ y = \overline{LM} = b \sin u \end{cases}$$

dargestellt, so dass, wie gehörig,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

wird.

Weil

$$\overline{LM_1} = a \sin u \qquad \frac{\overline{LM}}{\overline{LM_1}} = \frac{b}{a}$$

ist, wird die Ellipse PCA erhalten durch Verkürzung der Ordinaten des Kreises PC_1A im Verhältnis $\frac{b}{a}$. Aus diesem Grunde stehen auch die Flächen der Sektoren PSM und PSM_1 der Ellipse bzw. des Kreises in demselben Verhältnis und man hat

$$\text{area } PSM = \frac{b}{a} \text{area } PSM_1.$$

Es ist weiter

$$\text{area } PSM_1 = \text{area } POM_1 - \text{area } OSM_1 = \frac{1}{2} a^2 u - \frac{1}{2} a^2 e \sin u$$

also

$$\text{area } PSM = \frac{1}{2} ab (u - e \sin u).$$

Der hier vorkommende Winkel u wird die exzentrische Anomalie genannt.

Die Überstreichung der Ellipsensektoren erfolgt, wie gezeigt, mit der Flächengeschwindigkeit $\frac{1}{2} C$. Wenn also t den Zeitpunkt des Durchganges des Planeten durch den Punkt M , und τ den Zeitpunkt des Durchganges durch das Perihelium bedeutet, so ist

$$\text{area } PSM = \frac{C}{2} (t - \tau) = \frac{\pi ab}{T} (t - \tau).$$

Man bekommt also

$$\frac{2\pi}{T} (t - \tau) = u - e \sin u.$$

Die Grösse

$$(10) \qquad n = \frac{2\pi}{T}$$

stellt die mittlere Winkelgeschwindigkeit des Planeten dar und wird die mittlere Bewegung genannt. Es wird also

$$(11) \qquad \dot{n} (t - \tau) = u - e \sin u.$$

Diese Gleichung wird die Keplersche Gleichung genannt; sie liefert den Zusammenhang zwischen der Zeit t und der exzentrischen Anomalie u .

Um den Zusammenhang zwischen der exzentrischen Anomalie u und der durch den Winkel PSM dargestellten wahren Anomalie ν zu finden, ist folgendes zu berücksichtigen. Es folgt aus dem Dreieck SLM

$$\overline{SM}^2 = \overline{SL}^2 + \overline{LM}^2,$$

d. h.

$$r^2 = (x - ea)^2 + y^2,$$

d. h. wegen (9) und (2)

$$r^2 = a^2 [(\cos u - e)^2 + (1 - e^2) \sin^2 u] = a^2 (1 - e \cos u)^2$$

oder

$$(12) \quad r = a(1 - e \cos u).$$

Es folgt aus (5) und (4)

$$(13) \quad r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \nu}.$$

Die beiden vorstehenden Gleichungen ergeben

$$1 - e^2 = (1 + e \cos \nu)(1 - e \cos u)$$

d. h.

$$(14) \quad \cos \nu = \frac{\cos u - e}{1 - e \cos u},$$

wodurch der Zusammenhang zwischen der exzentrischen und der wahren Anomalie gegeben ist. Man kann ihm eine für die rechnerische Praxis zweckmässigere Form wie folgt geben. Es ist

$$1 - \cos \nu = 2 \sin^2 \frac{\nu}{2} = \frac{(1 + e)(1 - \cos u)}{1 - e \cos u}$$

$$1 + \cos \nu = 2 \cos^2 \frac{\nu}{2} = \frac{(1 - e)(1 + \cos u)}{1 - e \cos u}$$

$$\operatorname{tang}^2 \frac{\nu}{2} = \frac{1 + e}{1 - e} \cdot \frac{\frac{1 - \cos u}{2}}{\frac{1 + \cos u}{2}} = \frac{1 + e}{1 - e} \operatorname{tang}^2 \frac{u}{2},$$

d. h.

$$(15) \quad \text{tang } \frac{\nu}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \text{ tang } \frac{u}{2}.$$

Um die einem beliebigen Zeitpunkt t entsprechende Lage des Planeten in seiner Bahn zu finden, wird mittels der Gleichung (11) seine exzentrische Anomalie u und dann mittels (12) sein Radiusvektor r und mit (14) oder (15) seine wahre Anomalie ν ermittelt.

§ 2. Ableitung des Gravitationsgesetzes aus den Keplerschen Gesetzen. Hochbedeutend waren die Schlüsse, die Isaac Newton aus den Keplerschen Gesetzen zog und in seinen „Philosophiae naturalis principia mathematica, London 1687“ veröffentlichte, nachdem es ihm durch dieses Werk gelungen war, den von Galilei und Huyghens begonnenen Aufbau der Mechanik zum

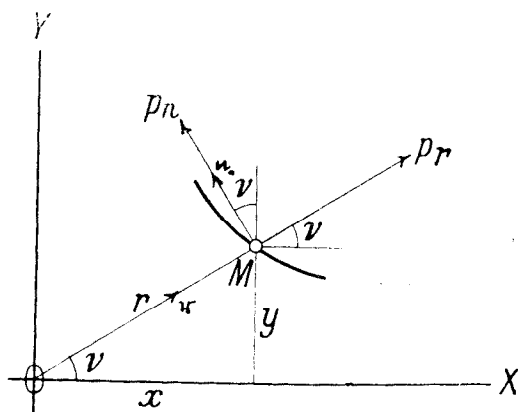


Fig. 3

epochemachenden Abschluss zu bringen. Seine Schlussfolgerungen, in die Sprache der modernen Vektoranalysis übertragen, sind die folgenden.

Ein Massenpunkt bewege sich unter dem Einflusse sonst beliebiger Kräfte in einer Ebene, in der der Pol O und die Achse $O-X$ eines polaren Koordinatensystems nach Belieben festgelegt werden mögen. Seien r und ν die zugehörigen Koordinaten einer beliebig gewählten Lage M des sich bewegenden Massenpunktes und r dessen auf den Punkt O sich beziehender Ortsvektor.

Vektorgrößen sollen in Hinkunft durch gotische, Skalargrößen durch lateinische oder griechische Buchstaben bezeichnet werden; der einem Vektor zugehörige Einheitsvektor soll durch den Index Null gekennzeichnet werden. Es ist also

$$(16) \quad r = r r_0,$$

worin r_0 den Einheitsvektor der Richtung r bedeutet.

Bildet man die Ableitung des vorstehenden Ausdruckes nach der Zeit t , so wird

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dr}{dt} \mathbf{r}_0 + r \frac{d\mathbf{r}_0}{dt}.$$

Die linke Seite dieser Gleichung stellt den Geschwindigkeitsvektor

$$(17) \quad \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

des in Betracht gezogenen Massenpunktes dar. Ebenso stellt $\frac{d\mathbf{r}_0}{dt}$ den Geschwindigkeitsvektor des Endpunktes des Einheitsvektors \mathbf{r}_0 infolge der Aenderung des Winkels ν dar. Bezeichnet also \mathbf{n}_0 den auf dem Vektor \mathbf{r}_0 senkrecht stehenden, in der Bahnebene gelegenen Einheitsvektor, der nach der Seite des wachsenden ν gerichtet ist, so ist jener Geschwindigkeitsvektor dargestellt durch:

$$(18) \quad \frac{d\mathbf{r}_0}{dt} = \frac{d\nu}{dt} \mathbf{n}_0.$$

Es wird also

$$(19) \quad \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dr}{dt} \mathbf{r}_0 + r \frac{d\nu}{dt} \mathbf{n}_0.$$

Setzt man

$$(20) \quad v_r = \frac{dr}{dt} \quad v_n = r \frac{d\nu}{dt},$$

so bekommt man

$$(21) \quad \mathbf{v} = v_r \mathbf{r}_0 + v_n \mathbf{n}_0.$$

Es stellen also v_r und v_n die Komponenten des Geschwindigkeitsvektors \mathbf{v} in der Richtung \mathbf{r}_0 bzw. \mathbf{n}_0 dar.

Die Differentiation des Ausdruckes (19) nach der Zeit t ergibt:

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d^2r}{dt^2} \mathbf{r}_0 + \frac{dr}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{r}_0}{dt} + \frac{dr}{dt} \cdot \frac{d\nu}{dt} \mathbf{n}_0 + r \frac{d^2\nu}{dt^2} \mathbf{n}_0 + r \frac{d\nu}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{n}_0}{dt}.$$

Dieselben Betrachtungen, die man bei der Niederschrift von (18) angestellt hat, ergeben

$$\frac{d\mathbf{n}_0}{dt} = -\frac{d\nu}{dt} \mathbf{r}_0,$$

so dass man bekommt:

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \left\{ \frac{d^2r}{dt^2} - r \left(\frac{d\nu}{dt} \right)^2 \right\} \mathbf{r}_0 + \left\{ r \frac{d^2\nu}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \cdot \frac{d\nu}{dt} \right\} \mathbf{n}_0$$

oder, weil

$$\frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\nu}{dt} \right) = 2r \frac{dr}{dt} \cdot \frac{d\nu}{dt} + r^2 \frac{d^2\nu}{dt^2}$$

ist,

$$(22) \quad \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \left\{ \frac{d^2r}{dt^2} - r \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 \right\} \mathbf{r}_0 + \frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{dv}{dt} \right) \mathbf{n}_0.$$

Die linke Seite dieser Gleichung stellt den Beschleunigungsvektor

$$(23) \quad \mathbf{p} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$$

des in Betracht gezogenen Massenpunktes dar. Setzt man

$$(24) \quad \left\{ \begin{array}{l} p_r = \frac{d^2r}{dt^2} - r \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 \\ p_n = \frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{dv}{dt} \right), \end{array} \right.$$

so bekommt man

$$(25) \quad \mathbf{p} = p_r \mathbf{r}_0 + p_n \mathbf{n}_0.$$

Es stellen also p_r und p_n die Komponenten des Beschleunigungsvektors \mathbf{p} in der Richtung von \mathbf{r}_0 bzw. \mathbf{n}_0 dar.

Wenden wir nun die soeben gewonnenen Gleichungen auf die Bewegung eines unter dem alleinigen Einflusse der Sonne stehenden Planeten an! Legen wir dabei den Pol O unseres Koordinatensystems in den Mittelpunkt der vorläufig ruhend gedachten Sonne und richten wir dessen Achse gegen das Perihelium. Dann kommt den Grössen r und v die ihnen im vorigen Paragraphen gegebene Bedeutung zu und es ist deshalb nach (6)

$$r^2 \frac{dv}{dt} = C,$$

worin C eine von der Zeit unabhängige Grösse bedeutet. Setzt man dies in (24) ein, so wird

$$(26) \quad p_n = 0.$$

Dies bedeutet, dass der Beschleunigungsvektor des Planeten in jedem Punkte seiner Bahn in der Verbindungsgeraden des Planeten mit der Sonne gelegen ist. Um die skalare Grösse und die Richtung dieses Beschleunigungsvektors auf die einfachste Weise zu ermitteln, soll wie folgt verfahren werden.

Weil

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{dv} \cdot \frac{dv}{dt}$$

und

$$\frac{dv}{dt} = \frac{C}{r^2}$$

ist, so wird

$$\frac{dr}{dt} = \frac{C}{r^2} \cdot \frac{dr}{dv} = -C \frac{d}{dv} \left(\frac{1}{r} \right)$$

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -C \frac{d^2}{dv^2} \left(\frac{1}{r} \right) \frac{dv}{dt} = -\frac{C^2}{r^2} \frac{d^2}{dv^2} \left(\frac{1}{r} \right)$$

$$r \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 = \frac{C^2}{r^3}.$$

Setzt man die beiden vorstehenden Ausdrücke in (24) ein, so bekommt man die nachstehende von Binet herrührende Formel

$$(27) \quad p_r = -\frac{C^2}{r^2} \left\{ \frac{1}{r} + \frac{d^2}{dv^2} \left(\frac{1}{r} \right) \right\}$$

Es folgt aus dem ersten Keplerschen Gesetze, also aus (5),

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{e}{p} \cos \nu$$

d. h.

$$\frac{d}{dv} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{e}{p} \sin \nu \quad \frac{d^2}{dv^2} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{e}{p} \cos \nu$$

also

$$\frac{1}{r} + \frac{d^2}{dv^2} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{1}{p}.$$

Setzt man dies in (27) ein, so wird

$$p_r = -\frac{C^2}{p} \cdot \frac{1}{r^2}.$$

Zieht man (3) und (7) heran, so bekommt man

$$(28) \quad p_r = -4\pi^2 \frac{a^3}{T^2} \cdot \frac{1}{r^2}$$

oder wegen (8)

$$p_r = -4\pi^2 k \frac{1}{r^2}.$$

Die Konstante k ist, wie bereits angegeben, für alle Planeten eine und dieselbe, was für

$$\mu = 4\pi^2 k = 4\pi^2 \frac{a^3}{T^2}$$

ebenfalls der Fall ist. Es ist deshalb

$$p_r = - \frac{\mu}{r^2}.$$

Setzt man dies in (26) und (25) ein, so bekommt man

$$(29) \quad \mathbf{p} = - \frac{\mu}{r^2} \mathbf{r}_0.$$

Diese Gleichung besagt, dass alle Planeten in jeder Lage auf ihrer Bahn einer gegen die Sonne gerichteten Beschleunigung unterliegen, deren skalare Grösse dem Quadrat des Abstandes von der Sonne umgekehrt proportional ist.

Bei diesem Ergebnis angelangt, ging Newton mit grosser Kühnheit des Gedankens weiter. Er erkannte, und zwar an dem Beispiel des Erdmondes, dass jene sich kundgebende Beschleunigung ihrem Wesen nach identisch ist mit der uns bekannten Schwerebeschleunigung. Newton nahm also an, die von der Erde ausgehende Wirkung, die sich in der Beschleunigung fallender Körper äussert, reiche in die Himmelsräume, also auch bis zum Erdmond. Um dies zu ersehen, stellte er folgende Berechnung an. Auf der Erdoberfläche, d. h. in einer Entfernung R vom Erdmittelpunkt, wo R den Radius der Erdkugel bedeutet, erleiden schwere Körper eine Beschleunigung g , die nach den Messungen von Galilei etwas über 30 Fuss pro sec^2 beträgt. In der Entfernung r des Mondes von der Erde beträgt diese Beschleunigung, weil sie mit dem Quadrat der Entfernung abnimmt,

$$\frac{R^2}{r^2} g.$$

Wenn also für die Bewegung des Mondes um die Erde dasselbe Gesetz gilt wie für die Bewegung der Planeten um die Sonne, dann muss nach (28) der absolute Wert jener Beschleunigung durch den Ausdruck dargestellt sein:

$$4\pi^2 \frac{a^3}{T^2} \cdot \frac{1}{r^2},$$

worin T die Umlaufszeit des Mondes um die Erde und a die grosse Halbachse der Mondbahn bedeutet. Aus den vorstehenden zwei Ausdrücken folgt weiter:

$$g = \frac{4\pi^2 a^3}{R^2 T^2}.$$

Mit Hilfe dieser Gleichung konnte **Newton** die Schwerebeschleunigung **g** aus den numerischen Werten der Grössen **R, a, T** berechnen. Das Rechnungsergebnis stimmte mit der von **Galilei** ermittelten Grösse der Schwerebeschleunigung überein, wodurch die Richtigkeit des Newtonschen Gedankens erwiesen wurde.

Auch bei diesem grundlegenden Ergebnisse blieb Newtons Genie nicht stehen. Nachdem er erkannt hatte, dass ein und derselbe Körper, je nach seiner Entfernung vom Erdmittelpunkte, eine verschiedene Beschleunigung erleide, d. h. ein verschiedenes Gewicht aufweise, führte **Newton** den Begriff der Masse ein, die, als das eigentliche Merkmal des Körpers, unveränderlich ist. Damit trennte **Newton** als erster klar die Begriffe Masse und Gewicht. Dieses letztere definierte er als Produkt von Masse und Schwerebeschleunigung. Damit war auch der allgemeine Begriff der Kraft gewonnen, die dem Produkt der Masse und der dem Körper erteilten Beschleunigung gleich ist. Zu gleicher Zeit stellte **Newton** auch sein grundlegendes Prinzip der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung auf. Als Folge dieser Klarlegung der Begriffe ergab sich die nachstehende Überlegung.

Multipliziert man die Gleichung (29) mit der Masse **m** des in Betracht gezogenen Planeten, so erhält man links das Produkt der Masse und der Beschleunigung des Planeten, also die auf den Planeten wirkende Kraft:

$$(30) \quad \mathfrak{P} = - \mu \frac{m}{r^2} r_0.$$

Diese Kraft ist wegen des hier vorkommenden Vorzeichen minus gegen die Sonne gerichtet und stellt deshalb die von der Sonne auf den Planeten ausgeübte Anziehungskraft dar. Nach dem Prinzip der Wirkung und Gegenwirkung übt der Planet seinerseits auf die Sonne dieselbe anziehende Wirkung aus, und diese muss nach dem soeben klargelegten Kraftbegriff proportional sein der Masse **M** der Sonne. Führt man also eine neue Grösse **f**, die durch die Gleichung

$$(31) \quad f = \frac{\mu}{M}$$

oder

$$(32) \quad f = 4\pi^2 \frac{a^3}{T^2} \cdot \frac{1}{M}$$

definiert erscheint, ein, so bekommt man statt (30)

$$(33) \quad \mathfrak{P} = - \frac{Mm}{r^2} r_0.$$

Der Faktor **f** wies einen und denselben numerischen Wert für alle Planeten auf, ja er galt in der ihm durch (32) verliehenen Bedeutung auch für den Mond und die Schwere. Es stellt also **f** eine für das ganze Sonnensystem geltende Konstante dar, die eine allgemeine Eigenschaft der in diesem System befindlichen Ma-

terie zum Ausdruck bringt. Zu dieser Erkenntnis gelangt, konnte Newton noch einen gewaltigen Schritt machend, behaupten, dass die Gleichung (33) für alle Teile der im Weltraum angehäuften Materie giltig ist und sein Gesetz der allgemeinen Gravitation aufstellen. Nach demselben zieht jedes Teilchen der Materie im Weltall jedes andere Teilchen instantan mit einer Kraft an, die in der Verbindungslinie der beiden Teilchen gelegen ist und deren Grösse sich direkt wie das Produkt der Massen m_1 und m_2 beider Teilchen und umgekehrt wie das Quadrat ihres Abstandes r verhält, also durch

$$P = f \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

dargestellt erscheint. Dabei ist der Proportionalitätsfaktor f eine universelle Konstante. Im obigen Ausdruck ist das Vorzeichen minus fortgefallen, weil durch die Worte „zieht an“ die Richtung der Kraft eindeutig gegeben ist.

Durch das Newtonsche Gesetz ward das tausendjährige Rätsel der Planetenbewegung gelöst und eine ganze Reihe neuer Erkenntnisse flossen wie von selbst aus demselben. Alle beobachteten Ungleichheiten in der Bewegung der Planeten und des Mondes erwiesen sich als natürliche Folge jenes Gesetzes, indem sie nur die gegenseitige Anziehung dieser Weltkörper zum Ausdruck brachten. Damit erschien aber nicht nur ihr Wesen geklärt, diese Ungleichheiten liessen sich in vorhinein exakt berechnen. Es zeigte sich, und zwar für die Kometen sehr bald, dass auch die übrigen und auch ausserhalb des Planetensystems sich bewegenden Weltkörper dem Newtonschen Gravitationsgesetz gehorchen. Die von Hipparchos entdeckte Präzession der Nachtgleichen fand ihre vollständige mechanische Erklärung, desgleichen die von Bradley später entdeckte Nutation der Erdachse. Auch die Gestalt der Erde, insbesondere deren Abplattung durch die Rotation, wurde mathematisch ergründet und das uralte Problem des Flutphänomens fand seine Lösung in der Anziehung der beweglichen Wassermassen durch Mond und Sonne. So erwies sich das Newtonsche Gravitationsgesetz, das grossartigste, das zu erkennen es einem Sterblichen vergönt war, als ein allgemeines, das Weltall beherrschende Naturgesetz. Diesem Gesetz entspross eine neue Wissenschaft, die Mechanik des Himmels. Die dem Ziele dieses Werkes führenden Lehren dieser Wissenschaft sollen in dem im Vorwort angegebenen Sinne nachstehend zur Behandlung und Anwendung gelangen.

Das Zweikörperproblem der Himmelsmechanik und die ungestörte heliozentrische Bewegung der Planeten

§ 3. Problemstellung. Obwohl sich alle Mitglieder unseres Planetensystems gegenseitig anziehen, erfolgt die jährliche Bewegung eines jeden Planeten fast gerade so, als ob derselbe nur der Anziehung der Sonne unterworfen wäre. Wegen der überwältigenden Grösse der Sonnenmasse gegenüber den Massen aller Planeten ist die gegenseitige Anziehung dieser letzteren im Vergleich zur Anziehungskraft der Sonne derart unbedeutend, dass ihre Wirkung auf die Bewegung der Planeten nur als eine geringfügige Störung empfunden wird, die sich erst nach Verlauf längerer Zeitintervalle fühlbar macht. Deshalb bildet das sogenannte Zweikörperproblem den Ausgangspunkt der Lehre von der Bewegung der Planeten. Dasselbe besteht in folgender Aufgabestellung: Zwei Himmelskörper ziehen sich gegenseitig nach dem Newtonschen Gravitationsgesetz an; man ermittle aus gegebenen Anfangsbedingungen die Bewegung dieser beiden Himmelskörper in bezug auf ein ruhend gedachtes Bezugssystem.

Um unbeschadet der Allgemeinheit der nachstehenden Erörterungen einen konkreten Fall vor sich zu haben, seien die beiden Himmelskörper die Sonne und ein beliebiger Planet. Die Masse der Sonne sei mit M , die Masse des Planeten mit m bezeichnet; der Ortsvektor von M sei mit \mathfrak{R} , der Ortsvektor von m mit \mathfrak{I} bezeichnet. Die relative Lage von m in bezug auf M ist dann durch den Ortsvektor

$$(34) \quad \mathfrak{r} = \mathfrak{I} - \mathfrak{R}$$

gegeben.

Stellt, wie vereinbart, r den Modul, d. h. die skalare Grösse des Vektors \mathfrak{r} dar, dann erscheint der Einheitsvektor der Richtung \mathfrak{r} durch

$$(35) \quad \mathfrak{r}_0 = \frac{\mathfrak{r}}{r}$$

veranschaulicht. Die Kraft, mit der die Sonne M den Planeten m anzieht, ist nach

(33) und (35) dargestellt durch $-f \frac{Mm}{r^3} \mathbf{r}$, und jene, mit der der Planet auf die Sonne wirkt, dargestellt durch $f \frac{Mm}{r^3} \mathbf{r}$. Es sind deshalb die vektoriellen Bewegungsgleichungen dieser beiden Himmelskörper die folgenden:

$$(36) \quad M \frac{d^2 \mathfrak{R}}{dt^2} = f \frac{Mm}{r^3} \mathbf{r}$$

$$(37) \quad m \frac{d^2 \mathfrak{l}}{dt^2} = -f \frac{Mm}{r^3} \mathbf{r},$$

wo t die Zeit bedeutet.

Diese zwei vektoriellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung sind sechs skalaren Differentialgleichungen gleicher Ordnung gleichwertig und besitzen 12 skalare Integrale; es handelt sich darum, diese zu finden.

§ 4. Die Schwerpunktsintegrale. Sei S der gemeinsame Schwerpunkt, besser gesagt Massenmittelpunkt der Massen M und m , \mathfrak{S} der Ortsvektor dieses Punktes. Gemäss der Definition eines solchen Massenmittelpunktes ist dessen Ortsvektor gegeben durch

$$(38) \quad (M + m) \mathfrak{S} = M \mathfrak{R} + m \mathfrak{l}.$$

Zweimalige Differentiation dieser Vektorgleichung nach t liefert die Gleichungen:

$$(39) \quad (M + m) \frac{d\mathfrak{S}}{dt} = M \frac{d\mathfrak{R}}{dt} + m \frac{d\mathfrak{l}}{dt}$$

$$(40) \quad (M + m) \frac{d^2 \mathfrak{S}}{dt^2} = M \frac{d^2 \mathfrak{R}}{dt^2} + m \frac{d^2 \mathfrak{l}}{dt^2}.$$

Weil nun, wie die Addition von (36) und (37) ergibt, die rechte Seite von (40) gleich Null ist, so wird

$$(41) \quad \frac{d^2 \mathfrak{S}}{dt^2} = 0.$$

Dieser Ausdruck stellt den Beschleunigungsvektor des Massenmittelpunktes S dar, und weil derselbe ständig gleich Null ist, so bewegt sich dieser Punkt geradlinig und gleichförmig.

Die Integration der vorstehenden Differentialgleichung ergibt:

$$(42) \quad \frac{d\mathfrak{S}}{dt} = \mathfrak{B},$$

wo \mathfrak{B} ein von der Zeit t unabhängiger Vektor ist und den Geschwindigkeitsvektor des Massenmittelpunktes S veranschaulicht. Das Integral der vorstehenden Differentialgleichung lautet

$$(43) \quad \mathfrak{S} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}t$$

und stellt die in endlicher Form geschriebene Bewegungsgleichung des Punktes S dar.

Die Gleichungen (42) und (43) stellen die sogenannten Schwerpunktsintegrale in vektorieller Form dar; sie sind sechs skalaren Integralen gleichwertig. Die hier vorkommenden Konstanten \mathfrak{A} und \mathfrak{B} ergeben sich aus den Anfangsbedingungen, worunter die Ortsvektoren \mathfrak{R}_0 und \mathfrak{I}_0 der beiden Massenkörper M und m und deren Anfangsgeschwindigkeiten \mathfrak{w}_0 und \mathfrak{v}_0 zu verstehen sind. Sind diese vier Vektoren gegeben, dann ergibt sich aus (38) der Ortsvektor \mathfrak{A} der Anfangslage des Punktes S , und aus (39) dessen Geschwindigkeitsvektor \mathfrak{B} .

Nachdem durch die vorstehenden Integrale die Bewegung des Massenmittelpunktes der beiden Himmelskörper M und m beschrieben worden ist, kann das gestellte Problem in dem Sinn eingeschränkt werden, dass man von nun an nur nach der relativen Bewegung von m in bezug auf M , also nach der ungestörten heliozentrischen Bewegung des in Betracht gezogenen Planeten fragt, weil durch diese relative Bewegung vermittels der bereits gewonnenen Integrale auch die absolute Bewegung von M und m in dem unseren Betrachtungen zugrunde gelegten Bezugssystem gegeben ist

§ 5. Die beiden Vektorintegrale der Differentialgleichung der ungestörten heliozentrischen Bewegung der Planeten. Subtrahiert man (36) v n (37), nachdem man (36) mit M und (37) mit m gekürzt hat, dann bekommt man, weil nach (34)

$$\frac{d^2\mathfrak{I}}{dt^2} - \frac{d^2\mathfrak{R}}{dt^2} = \frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2}$$

ist,

$$(44) \quad \frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} = -f \frac{M + m}{r^3} \mathfrak{r}$$

oder

$$(45) \quad m \frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} = -f \frac{m(M + m)}{r^3} \mathfrak{r}.$$

Dies ist die Differentialgleichung der Bewegung des Planeten relativ zur Sonne; sie besagt, dass sich der Planet um die Sonne derart bewege als ob die Sonne unbeweglich stünde, eine Masse $(M + m)$ aufweise und den Planeten nach dem Newtonschen Gesetz anziehe. Es erscheint somit die im vorhergehenden Ka-

pitel gemachte Annahme einer die Masse M aufweisenden unbeweglichen Sonne durch den Umstand gerechtfertigt, dass, weil m im Vergleich zu M sehr klein ist, $(M + m)$ durch M ersetzt werden kann.

Setzt man der kürzeren Schreibweise halber

$$(46) \quad f(M + m) = \mu,$$

dann erhält (44) die Form

$$(47) \quad \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r}.$$

Aus dieser Differentialgleichung ergeben sich zwei Vektorintegrale, die von grundlegender Bedeutung für den hier einzuschlagenden Weg bei Behandlung des Störungsproblems sind. Man gewinnt diese Vektorintegrale auf folgende Weise.

Multipliziert man die Gleichung (47) vektoriell mit \mathbf{r} , so bekommt man, weil $[\mathbf{r} \mathbf{r}] = 0$ ist,

$$\left[\mathbf{r} \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \right] = 0.$$

Weil

$$(48) \quad \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

den Geschwindigkeitsvektor der relativen Bewegung des Planeten in bezug auf die Sonne bedeutet und weil

$$\frac{d}{dt} [\mathbf{r} \mathbf{v}] = \frac{d}{dt} \left[\mathbf{r} \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right] = \left[\mathbf{r} \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \right]$$

ist, so bekommt man

$$\frac{d}{dt} [\mathbf{r} \mathbf{v}] = 0.$$

Die Integration dieser Vektorgleichung liefert

$$(49) \quad \mathfrak{C} = [\mathbf{r} \mathbf{v}],$$

worin \mathfrak{C} einen von der Zeit t unabhängigen Vektor bedeutet.

Diese Gleichung stellt das erste Vektorintegral der Differentialgleichung (47) dar.

Das zweite Vektorintegral der Differentialgleichung (47) wird auf folgende Weise erhalten. Multipliziert man diese Gleichung vektoriell mit \mathfrak{C} , so bekommt man

$$\left[\mathfrak{C} \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \right] = - \frac{\mu}{r^3} [\mathfrak{C} \mathbf{r}] = \frac{\mu}{r^3} [\mathbf{r} \mathfrak{C}].$$

Setzt man hier für \mathfrak{C} den Ausdruck (49) ein, so wird

$$(50) \quad \left[\mathfrak{C} \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \right] = \frac{\mu}{r^3} [\mathbf{r} | \mathbf{r} \mathbf{v}] .$$

Die Anwendung der bekannten Formel der Vektoranalysis:

$$(51) \quad [a | b c] = b (c a) - c (a b)$$

liefert

$$[\mathbf{r} | \mathbf{r} \mathbf{v}] = \mathbf{r} (\mathbf{r} \mathbf{v}) - \mathbf{v} (\mathbf{r} \mathbf{r}).$$

Es gilt für jeden beliebigen Vektor $(a a) = a^2$ und, wie das Differential der vorstehenden Gleichung ergibt, $a da = a da$, so dass es ist

$$(\mathbf{r} \mathbf{r}) = r^2 \quad (\mathbf{r} \mathbf{v}) = r \frac{dr}{dt}.$$

Es ist deshalb

$$[\mathbf{r} | \mathbf{r} \mathbf{v}] = r \frac{dr}{dt} \mathbf{r} - r^2 \mathbf{v}$$

und, weil \mathfrak{C} von der Zeit unabhängig ist,

$$\frac{d}{dt} [\mathfrak{C} \mathbf{v}] = \left[\mathfrak{C} \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \right],$$

so dass die Gleichung (50) folgende Form erhält:

$$\frac{d}{dt} [\mathfrak{C} \mathbf{v}] = \frac{\mu}{r^2} \cdot \frac{dr}{dt} \mathbf{r} - \frac{\mu}{r} \mathbf{v}.$$

Es ist ausserdem

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\mu}{r} \mathbf{r} \right) = - \frac{\mu}{r^2} \cdot \frac{dr}{dt} \mathbf{r} + \frac{\mu}{r} \mathbf{v}$$

und folglich

$$\frac{d}{dt} [\mathfrak{C} \mathbf{v}] + \frac{d}{dt} \left(\frac{\mu}{r} \mathbf{r} \right) = 0.$$

Die Integration dieser Gleichung liefert:

$$[\mathfrak{C}v] + \frac{''}{r} r + \mathfrak{D} = 0,$$

worin \mathfrak{D} einen von der Zeit unabhängigen Vektor bedeutet. Es ist also

$$(52) \quad \mathfrak{D} = [v \mathfrak{C}] - \frac{''}{r} r.$$

Dieser Ausdruck stellt das zweite Vektorintegral der Differentialgleichung (47) dar.

§ 6. Geometrische Deutung der beiden Vektorintegrale. — Es folgt aus (49) und (48)

$$\mathfrak{C} = \frac{[r dr]}{dt}.$$

Dabei stellt dr die während des Zeitintervalles dt vom Planeten relativ zur Sonne zurückgelegte Strecke, und $[r dr]$ einen Vektor dar, der auf der Ebene der Vektoren r und dr senkrecht stehend, nach jener Seite dieser Ebene gerichtet ist, von der aus betrachtet die Bewegung des Planeten rechtwinklig erfolgt, und der eine skalare Grösse aufweist, die gleich ist der Fläche des durch r und dr begrenzten Parallelogramms. Diese Fläche ist aber nichts anderes als das Zweifache des vom Leitstrahl Sonne-Planet während der Zeit dt überstrichenen Flächenelements dF . Der Vektor \mathfrak{C} stellt also die doppelte Flächengeschwindigkeit der Planetenbewegung vektoriell dar. Das Vektorintegral (49) drückt also das zweite Keplersche Gesetz in Vektorform aus, indem es besagt, dass die vom Leitstrahl r in der Zeiteinheit überstrichene Fläche nicht nur ihrem Betrage nach konstant ist, sondern auch ihrer räumlichen Orientierung nach. Es erfolgt also die Bewegung des Planeten um die Sonne mit einer konstanten Flächengeschwindigkeit in einer Ebene, die durch den Sonnenmittelpunkt hindurchgeht und auf dem Vektor \mathfrak{C} senkrecht steht. Durch den Vektor \mathfrak{C} ist die Bahnebene des Planeten, seine Umlaufrichtung und die Flächengeschwindigkeit seiner Bewegung eindeutig gegeben.

Multipliziert man die Gleichung (49) skalar mit r bzw. mit v , so bekommt man die Gleichungen:

$$(53) \quad \mathfrak{C} r = 0$$

$$(54) \quad \mathfrak{C} v = 0,$$

die das vorher gesagte ebenfalls zum Ausdruck bringen.

Multipliziert man die Gleichung (52) skalar mit \mathfrak{C} , dann bekommt man wegen (53)

$$(55) \quad \mathfrak{C} \mathfrak{D} = 0.$$

Der Vektor \mathfrak{D} steht also senkrecht auf dem Vektor \mathfrak{C} und gehört der **Bahnebene** des Planeten an.

Die Gleichung (53) stellt vektoranalytisch diese Bahnebene dar. In der **Tat**: führt man ein orthogonales Koordinatensystem ein, dessen Ursprung **im Mittelpunkt** der Sonne gelegen und gegen den Fixsternhimmel unveränderlich **orientiert** ist, weshalb wir es als „ruhende“ bezeichnen wollen, und bezeichnet man mit n_1, n_2, n_3 die Einheitsvektoren der Achsenrichtungen dieses Systems, mit x, y, z die Koordinaten des Planeten und mit C_1, C_2, C_3 die Koordinaten des **Vektors** \mathfrak{C} , so ist

$$(56) \quad r = x n_1 + y n_2 + z n_3$$

$$(57) \quad \mathfrak{C} = C_1 n_1 + C_2 n_2 + C_3 n_3.$$

Setzt man dies in (53) ein, so bekommt man

$$(58) \quad C_1 x + C_2 y + C_3 z = 0.$$

Dies ist die analytische Gleichung der Bahnebene des Planeten.

Multipliziert man die Gleichung (52) skalar mit r , so bekommt man

$$\mathfrak{D} r = r [\mathfrak{v} \mathfrak{C}] - \mu r$$

und, weil

$$r [\mathfrak{v} \mathfrak{C}] = \mathfrak{C} [r \mathfrak{v}] = \mathfrak{C} \mathfrak{C} = C^2$$

ist, worin C den Modul des Vektors \mathfrak{C} bedeutet, so wird

$$(59) \quad \mathfrak{D} r = C^2 - \mu r.$$

Diese Gleichung stellt vektoranalytisch eine Fläche zweiter Ordnung dar. Bezeichnet man nämlich mit D_1, D_2, D_3 die Koordinaten des Vektors \mathfrak{D} , so wird

$$(60) \quad \mathfrak{D} = D_1 n_1 + D_2 n_2 + D_3 n_3.$$

Setzt man dies, (56) und

$$(61) \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

in (59) ein, so bekommt man

$$(62) \quad D_1 x + D_2 y + D_3 z = C^2 - \mu \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

und dies ist tatsächlich die analytische Gleichung einer Fläche zweiter Ordnung.

Die Gleichungen (58) und (62) stellen also einen Kegelschnitt, die Bahnkurve des Planeten, dar; die Gleichungen (53) und (59) stellen diese Kurve vektoranalytisch dar.

Um die Gleichung der Bahnkurve des Planeten in einer für unsere Zwecke entsprechenden Form zu erhalten, führen wir noch ein zweites Koordinatensystem $\xi-\eta-\zeta$ ein, dessen Ursprung ebenfalls in den Sonnenmittelpunkt gelegt sein möge, dessen ξ -Achse die Richtung des Vektors \mathfrak{D} und dessen ζ -Achse die Richtung des Vektors \mathfrak{C} aufweisen soll. Weil die Einheitsvektoren der Richtungen \mathfrak{C} und \mathfrak{D} durch

$$(63) \quad \mathfrak{C}_0 = \frac{\mathfrak{C}}{C} \qquad \mathfrak{D}_0 = \frac{\mathfrak{D}}{D}$$

dargestellt erscheinen, so sind die Einheitsvektoren der Achsenrichtungen des Koordinatensystems $\xi-\eta-\zeta$, das wie jenes zuerst benütztes ein englisches sein möge, durch die nachstehenden Ausdrücke veranschaulicht:

$$(64) \quad \mathbf{i} = \mathfrak{D}_0, \quad \mathbf{k} = \mathfrak{C}_0, \quad \mathbf{j} = [\mathbf{k}\mathbf{i}] = [\mathfrak{C}_0 \mathfrak{D}_0].$$

Die Koordinaten des Ortsvektors \mathbf{r} , also die Koordinaten des Planeten bezüglich des neuen Koordinatensystems seien mit ξ, η, ζ bezeichnet, so dass geschrieben werden kann:

$$\mathbf{r} = \xi \mathbf{i} + \eta \mathbf{j} + \zeta \mathbf{k}.$$

Multipliziert man diese Gleichung skalar mit \mathbf{k} , so wird wegen (53), (63), (64)

$$\zeta = \mathbf{r}\mathbf{k} = \frac{1}{C} \mathbf{r}\mathfrak{C} = 0,$$

d. h.

$$(65) \quad \mathbf{r} = \xi \mathbf{i} + \eta \mathbf{j}$$

$$(66) \quad \mathbf{r} = \frac{\mathfrak{D}}{D} \xi + \frac{[\mathfrak{C} \mathfrak{D}]}{CD} \eta.$$

Multipliziert man diese Gleichung skalar mit \mathfrak{D} , so wird:

$$(67) \quad \mathfrak{D} \mathbf{r} = \xi D,$$

also wegen (59)

$$(68) \quad \xi D = C^2 - \mu r.$$

Dies ist die Gleichung der Bahnkurve des Planeten, ausgedrückt in Semi-polarkoordinaten ξ und r .

Die vorstehende Gleichung kann leicht auf Polarkoordinaten r und ν transformiert werden, denn es ist

$$(69) \quad \xi = r \cos \nu,$$

so dass man statt (68) die folgende Gleichung erhält

$$\mu r + r D \cos \nu = C^2,$$

d. h.

$$(70) \quad r = \frac{\frac{C^2}{\mu}}{1 + \frac{D}{\mu} \cos \nu}.$$

Vergleicht man diese Gleichung mit (5) und setzt voraus, dass, was für alle Planeten der Fall ist, $\frac{D}{\mu} > 0$ ist, so ersieht man, dass die Bahnkurve des Planeten eine Ellipse ist. Die grosse Achse dieser Ellipse fällt in die hier gewählte ξ -Achse, deren positiver Ast gegen das Perihelium gerichtet ist. Weil die ξ -Achse aber in die Richtung des Vektors \mathfrak{D} gelegt worden ist, so ergibt sich daraus die wichtige Eigenschaft dieses Vektors, dass er gegen das Perihelium gerichtet ist. Der Vergleich der Gleichungen (70) und (5) ergibt auch, dass der Parameter p der Bahnellipse gleich ist

$$(71) \quad p = \frac{C^2}{\mu}$$

und deren Exzentrizität gleich ist

$$(72) \quad e = \frac{D}{\mu}.$$

Es ist also

$$(73) \quad D = \mu e.$$

Durch die vorstehenden Ergebnisse ist die grundlegende Bedeutung der Vektoren \mathfrak{C} und \mathfrak{D} klar zu Tage getreten; sie ist in der Fig. 4 geometrisch veranschaulicht. In derselben stellt die Ellipse AP die Bahn des Planeten dar. Der von der Sonne eingenommene Brennpunkt der Bahnellipse ist zum Ursprung des ruhenden Koordinatensystems gewählt worden. Die durch O hindurchgehende Bahnebene des Planeten ist gegen dieses Koordinatensystem schräg gerichtet. Der Vektor \mathfrak{C} steht senkrecht auf dieser Ebene, der Vektor \mathfrak{D} , in dieser Ebene gelegen,

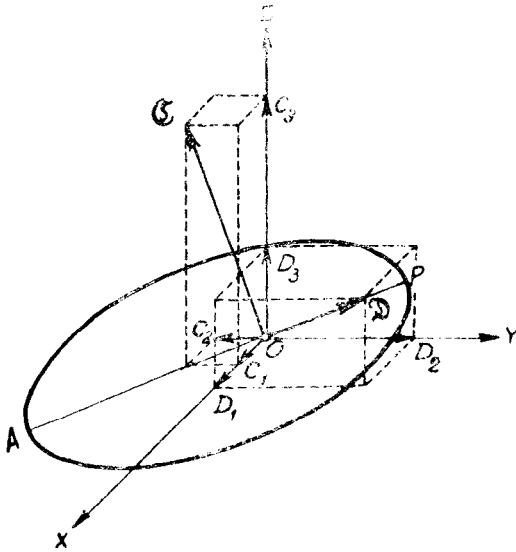


Fig. 4

ist gegen das Perihelium P dieser Bahn gerichtet. Durch den Vektor \mathfrak{C} erscheint die Bahnebene des Planeten festgelegt, die Umlaufrichtung der Planetenbewegung und der Parameter der Bahnellipse gegeben; durch den Vektor \mathfrak{D} ist die Achsenlinie der Bahnkurve in ihrer Ebene festgelegt und die Exzentrizität dieser Bahn gegeben.

Die Koordinaten $C_1, C_2, C_3; D_1, D_2, D_3$ der Vektoren \mathfrak{C} und \mathfrak{D} , die eine hervorragende Rolle auch in der Störungsrechnung spielen werden, will ich die vektoriellen Elemente der Planetenbewegung nennen. Von diesen sechs Elementen sind nur fünf voneinander unabhängig. Setzt man nämlich (57) und (60) in (55) ein, so bekommt man

$$(74) \quad C_1 D_1 + C_2 D_2 + C_3 D_3 = 0,$$

und dieser Gleichung müssen die angeführten Elemente Genüge leisten.

Die Vektorgleichungen (49) und (52) liefern also nur fünf voneinander unabhängige skalare Integrale der Differentialgleichung (47). Weil diese Gleichung sechs skalare Integrale besitzt, so bleibt zur vollständigen Lösung des gestellten

Problems noch übrig, das fehlende sechste Integral dieser Gleichung zu finden. Vorher mögen aus den gewonnenen vektoriellen Integralen noch einige Folgerungen gezogen werden.

§ 7. Verschiedene andere Formen der erhaltenen Integrale. — Den erhaltenen Integralen kann man, nachdem der Zusammenhang mit den elliptischen Elementen a und e gewonnen ist, auch eine andere Form geben.

Es folgt aus (4) und (71)

$$(75) \quad C^2 = \mu a(1 - e^2).$$

Die Gleichungen (73) und (75) ergeben:

$$(76) \quad \frac{\mu^2 - D^2}{C^2} = \frac{\mu}{a}.$$

Multipliziert man die Gleichung (52) skalar mit sich selbst so wird

$$D^2 = [\mathfrak{v} \mathfrak{C}] [\mathfrak{v} \mathfrak{C}] - 2 \frac{\mu}{r} \mathfrak{r} [\mathfrak{v} \mathfrak{C}] + \frac{\mu^2}{r^2} (\mathfrak{r} \mathfrak{r}).$$

Weil die Vektoren \mathfrak{v} und \mathfrak{C} gemäss (54) aufeinander senkrecht stehen, so wird

$$[\mathfrak{v} \mathfrak{C}] [\mathfrak{v} \mathfrak{C}] = v^2 C^2,$$

worin v den Modul des Vektors \mathfrak{v} bedeutet, und weil, wie bereits gezeigt,

$$\mathfrak{r} [\mathfrak{v} \mathfrak{C}] = C^2$$

ist, so bekommt man

$$D^2 = C^2 v^2 - 2 \frac{\mu}{r} C^2 + \mu^2$$

oder

$$v^2 = 2 \frac{\mu}{r} - \frac{\mu^2 - D^2}{C^2}$$

d. h. wegen (76)

$$(77) \quad v^2 = \frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a}.$$

Diese Gleichung wird das Integral der lebendigen Kraft genannt.

Der Modul C des Vektors \mathfrak{C} stellt das Doppelte des skalaren Wertes der Flächengeschwindigkeit dar, ist also nach (7) dargestellt durch

$$(78) \quad C = \frac{2\pi ab}{T}.$$

Weil nach (3) und (71)

$$C^2 = \mu \frac{b^2}{a}$$

ist, so ergibt es sich

$$(79) \quad \mu = \frac{4\pi^2}{T^2} a^3,$$

d. h. wegen (46)

$$(80) \quad \frac{a^3}{T^2} = \frac{f}{4\pi^2} (M + m).$$

Diese Gleichung drückt die bemerkenswerte von Newton gefundene Beziehung zwischen den Grössen a und T aus, die nicht identisch ist mit dem dritten Keplerschen Gesetz. Nach diesem weist der obige Ausdruck für alle Planeten einen und denselben numerischen Wert auf, was nach obigem nicht der Fall ist, weil sich wegen der Anwesenheit von m der numerische Wert der rechten Seite der vorstehenden Gleichung von Planet zu Planet ändert. Nur der Umstand, dass die Planetenmassen sehr klein gegenüber der Sonnenmasse sind und m neben M vernachlässigt werden kann, ergibt eine befriedigende Uebereinstimmung des dritten Keplerschen Gesetzes mit den strengeren Gesetzen der Himmelsmechanik.

Es folgt aus (10) und (79)

$$(81) \quad \mu = n^2 a^3.$$

Die Gleichungen (70), (76), (77), (78), (80) und (81) sind verschiedene Formen der vorher gewonnenen Integrale.

§ 8. Das sechste skalare Integral. Multipliziert man die Gleichung (49) skalar mit sich selbst, so bekommt man

$$C^2 = [\mathbf{r} \mathbf{v}] [\mathbf{r} \mathbf{v}].$$

Wendet man die bekannte Formel

$$(82) \quad [\mathbf{a} \mathbf{b}] [\mathbf{c} \mathbf{d}] = (\mathbf{a} \mathbf{c})(\mathbf{b} \mathbf{d}) - (\mathbf{b} \mathbf{c})(\mathbf{d} \mathbf{a})$$

der Vektoranalysis an, die für $\mathbf{c} = \mathbf{a}$; $\mathbf{d} = \mathbf{b}$ die Form erhält

$$[a b][a b] = a^2 b^2 - (a b)(a b),$$

dann bekommt man

$$C^2 = r^2 v^2 - (r v)(r v).$$

Weil aber

$$(r v) = \frac{r dr}{dt} = r \frac{dr}{dt}$$

ist, so wird

$$C^2 = r^2 v^2 - r^2 \left(\frac{dr}{dt}\right)^2,$$

d. h.

$$(83) \quad v^2 = \frac{C^2}{r^2} + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2.$$

Es folgt aus (77) und (83)

$$\left(r \frac{dr}{dt}\right)^2 = 2 \mu r - \frac{\mu}{a} r^2 - C^2,$$

d. h. mit Anwendung der Formeln (75) und (81)

$$\left(r \frac{dr}{dt}\right)^2 = 2 n^2 a^3 r - n^2 a^2 r^2 - n^2 a^4 (1 - e^2) = n^2 a^2 (a^2 e^2 - a^2 + 2 a r - r^2)$$

$$\left(r \frac{dr}{dt}\right)^2 = n^2 a^2 \{a^2 e^2 - (a - r)^2\}.$$

Es ist also

$$(84) \quad n dt = \frac{r dr}{a \sqrt{a^2 e^2 - (a - r)^2}}.$$

Diese Gleichung lässt sich integrieren, wenn man eine neue Hilfsvariable u einführt, die durch die Gleichung

$$a - r = a e \cos u$$

gegeben ist, denn es ist dann

$$(85) \quad r = a (1 - e \cos u)$$

$$dr = ae \sin u \, du$$

$$a^2 e^2 - (a-r)^2 = a^2 e^2 \sin^2 u ,$$

so dass die Gleichung (84) die Form erhält:

$$n \, dt = (1 - e \cos u) \, du ,$$

woraus man durch Integration die Formel bekommt:

$$(86) \quad n(t - \tau) = u - e \sin u ,$$

worin τ die Integrationskonstante bedeutet.

Vergleicht man (85) mit (12), so ersieht man, dass die Hilfsvariable u nichts anderes ist, als die von Kepler eingeführte exzentrische Anomalie, deren geometrische Bedeutung im § 1 klar zu Tage getreten ist. Weil ferner für $u = 0$ $t = \tau$ wird, so stellt die Integrationskonstante τ den Zeitpunkt des Durchganges des Planeten durch das Perihelium dar. Die Gleichung (86) ist also die bereits abgeleitete Keplersche Gleichung (11). Sie stellt das sechste skalare Integral der Differentialgleichung (47) dar. Die vorstehenden Gleichungen liefern auch den bereits abgeleiteten Zusammenhang zwischen der exzentrischen Anomalie u und der wahren Anomalie ν . Es folgt nämlich aus (70), (75), (72) und (85)

$$1 - e^2 = (1 - e \cos u)(1 + e \cos \nu)$$

$$(87) \quad \cos \nu = \frac{\cos u - e}{1 - e \cos u} ,$$

d. h. die bereits abgeleitete Gleichung (14).

§ 9. Endgültige vektorielle Form der vollständigen Integrale der Differentialgleichung der ungestörten Bewegung der Planeten. Setzt man (87) in (69) ein, so bekommt man mit Berücksichtigung von (85)

$$(88) \quad \xi = a (\cos u - e) .$$

Es folgt aus (65)

$$(89) \quad r^2 = \xi^2 + \eta^2$$

und man bekommt mit Berücksichtigung von (85) und (88)

$$\eta^2 = a^2 (1 - e \cos u)^2 - a^2 (\cos u - e)^2 = a^2 (1 - e^2) \sin^2 u,$$

d. h.

$$(90) \quad \eta = a \sqrt{1 - e^2} \sin u.$$

Ersetzt man mittels (72), (75), (76) und (81) die in den Gleichungen (88), (90) und (86) vorkommenden elliptischen Elemente e , a und n durch die vektoriel-
len, dann bekommt man die Gleichungen:

$$(91) \quad \xi = \frac{C^2}{\sqrt{\mu^2 - D^2}} (\mu \cos u - D)$$

$$(92) \quad \eta = \frac{C^2}{\sqrt{\mu^2 - D^2}} \sin u$$

$$(93) \quad \frac{(\mu - D^2)^{\frac{3}{2}}}{C^3} (t - \tau) = \mu u - D \sin u.$$

Es ist nach (66)

$$(94) \quad \mathbf{r} = \frac{\mathfrak{D}}{D} \xi + \frac{[\mathfrak{C} \mathfrak{D}]}{CD} \eta.$$

Differentiert man diesen Ausdruck nach t , so bekommt man

$$(95) \quad \mathbf{v} = \frac{\mathfrak{D}}{D} \cdot \frac{d\xi}{dt} + \frac{[\mathfrak{C} \mathfrak{D}]}{CD} \cdot \frac{d\eta}{dt}.$$

Es folgt aus (91) und (92)

$$\frac{d\xi}{dt} = -\mu \frac{C^2}{\mu^2 - D^2} \sin u \frac{du}{dt}$$

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{C^2}{\sqrt{\mu^2 - D^2}} \cos u \frac{du}{dt}.$$

Differentiert man (93) nach t , so bekommt man

$$\frac{(\mu^2 - D^2)^{\frac{3}{2}}}{C^3} = \mu \frac{du}{dt} - D \cos u \frac{du}{dt},$$

d. h.

$$\frac{du}{dt} = \frac{(\mu^2 - D^2)^{\frac{3}{2}}}{C^3} \cdot \frac{1}{\mu - D \cos u},$$

so dass es wird

$$(96) \quad \frac{d\xi}{dt} = \mu \frac{\sqrt{\mu^2 - D^2}}{C} \cdot \frac{\sin u}{\mu D - \cos u}$$

$$(97) \quad \frac{d\eta}{dt} = \frac{\mu^2 - D^2}{C} \cdot \frac{\cos u}{\mu - D \cos u}.$$

Setzt man (91), (92), (96), (97) in (94) und (95) ein, so bekommt man

$$(98) \quad \mathbf{r} = \frac{C^2}{\mu^2 - D^2} \cdot \frac{\mu \cos u - D}{D} \mathfrak{D} + \frac{C \sin u}{D \sqrt{\mu^2 - D^2}} [\mathfrak{C} \mathfrak{D}]$$

$$(99) \quad \mathbf{v} = -\mu \frac{\sqrt{\mu^2 - D^2}}{CD} \cdot \frac{\sin u}{\mu - D \cos u} \mathfrak{D} + \frac{\mu^2 - D^2}{C^2 D} \cdot \frac{\cos u}{\mu - D \cos u} [\mathfrak{C} \mathfrak{D}].$$

Diese beiden Ausdrücke stellen die vollständigen Integrale der Differentialgleichung (47), also die vollständige Lösung des gestellten Problems dar. Dabei ist nach (57) und (60)

$$(100) \quad C^2 = C_1^2 + C_2^2 + C_3^2, \quad D^2 = D_1^2 + D_2^2 + D_3^2.$$

Die Hilfsvariable u , durch die in die vorstehenden Integrale neben den Elementen $C_1, C_2, C_3, D_1, D_2, D_3$, von denen aber nur fünf voneinander unabhängig sind, als sechstes Element der Zeitpunkt τ eingeführt erscheint, ist durch die Gleichung (94) gegeben.

Das Element τ hängt mit den Vektoren \mathfrak{C} und \mathfrak{D} eng zusammen. Für $t = \tau$ wird wegen (93) $u = 0$ und es ist in diesem Falle:

$$t = \tau$$

$$\mathbf{r} = \frac{C^2}{D(\mu + D)} \mathfrak{D}, \quad \mathbf{v} = \frac{\mu + D}{C^2 D} [\mathfrak{C} \mathfrak{D}],$$

d. h. der Vektor \mathbf{r} wird kollinear mit dem Vektor \mathfrak{D} , und der Vektor \mathbf{v} kollinear mit dem Vektor $[\mathfrak{C} \mathfrak{D}]$.

Will man diese Gleichungen durch skalare ersetzen, so hat man zu berücksichtigen, dass

$$[\mathfrak{C} \mathfrak{D}] = \begin{vmatrix} \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \\ D_1 & D_2 & D_3 \end{vmatrix},$$

d. h.

$$[\mathfrak{C} \mathfrak{D}] = (C_2 D_3 - C_3 D_2) \eta_1 + (C_3 D_1 - C_1 D_3) \eta_2 + (C_1 D_2 - C_2 D_1) \eta_3$$

ist, so dass sich die Vektorgleichungen (98) und (99) in die nachstehenden skalaren Gleichungen zergliedern:

$$(101) \left\{ \begin{aligned} x &= \frac{D_1}{D} \cdot \frac{C^2}{\mu^2 - D^2} (\mu \cos u - D) + \frac{C}{D} \cdot \frac{C_2 D_3 - C_3 D_2}{\sqrt{\mu^2 - D^2}} \sin u \\ y &= \frac{D_2}{D} \cdot \frac{C^2}{\mu^2 - D^2} (\mu \cos u - D) + \frac{C}{D} \cdot \frac{C_1 D_1 - C_1 D_3}{\sqrt{\mu^2 - D^2}} \sin u \\ z &= \frac{D_3}{D} \cdot \frac{C^2}{\mu^2 - D^2} (\mu \cos u - D) + \frac{C}{D} \cdot \frac{C_1 D_2 - C_2 D_1}{\sqrt{\mu^2 - D^2}} \sin u \end{aligned} \right.$$

$$(102) \left\{ \begin{aligned} v_1 &= -\mu \frac{D_1}{CD} \sqrt{\mu^2 - D^2} \frac{\sin u}{\mu - D \cos u} + \frac{\mu^2 - D^2}{C^2 D} (C_2 D_3 - C_3 D_2) \frac{\cos u}{\mu - D \cos u} \\ v_2 &= -\mu \frac{D_2}{CD} \sqrt{\mu^2 - D^2} \frac{\sin u}{\mu - D \cos u} + \frac{\mu^2 - D^2}{C^2 D} (C_3 D_1 - C_1 D_3) \frac{\cos u}{\mu - D \cos u} \\ v_3 &= -\mu \frac{D_3}{CD} \sqrt{\mu^2 - D^2} \frac{\sin u}{\mu - D \cos u} + \frac{\mu^2 - D^2}{C^2 D} (C_1 D_2 - C_2 D_1) \frac{\cos u}{\mu - D \cos u} \end{aligned} \right.$$

Die vektoriellen Elemente lassen sich aus den initialen Bedingungen leichter ermitteln als dies für die elliptischen Elemente der Fall ist. Wenn nämlich für den initialen Zeitpunkt $t = t_0$ die zugehörigen Bedingungen, d. h. der Ortsvektor \mathbf{r}_0 und der Geschwindigkeitsvektor \mathbf{v}_0 des Planeten in bezug auf die Sonne gegeben sind, dann folgt aus (49) und (52)

$$\mathfrak{C} = [\mathbf{r}_0 \mathbf{v}_0]$$

$$\mathfrak{D} = [\mathbf{v}_0 \mathfrak{C}] - \frac{\mu}{r_0} \mathbf{r}_0,$$

wodurch die Vektoren \mathfrak{C} und \mathfrak{D} oder, falls man diese Gleichungen skalarisiert, die vektoriellen Elemente $C_1, C_2, C_3, D_1, D_2, D_3$ eindeutig gegeben sind.

Es folgt aus (67)

$$\xi = \frac{\mathfrak{D} \mathbf{r}}{D}$$

und aus der Gleichung (66), wenn man dieselbe skalar mit $[\mathfrak{C} \mathfrak{D}]$ multipliziert,

$$\mathbf{r} [\mathfrak{C} \mathfrak{D}] = C D \eta,$$

d. h.

$$\eta = \frac{\mathbf{r} [\mathfrak{C} \mathfrak{D}]}{C D}.$$

Es ist deshalb für $t = t_0$

$$\xi_0 = \frac{\mathfrak{D} \mathbf{r}_0}{D} \quad \eta_0 = \frac{\mathbf{r}_0 [\mathfrak{C} \mathfrak{D}]}{C D}.$$

Setzt man dies und $u = u_0$ in die Gleichungen (91) und (92) ein, so folgt aus diesen Gleichungen eindeutig der numerische Wert u_0 der exzentrischen Anomalie im Initialmoment. Setzt man diesen Wert und $t = t_0$ in (93) ein, so folgt daraus der Wert des Elementes τ .

§ 10 Das Satellitenproblem, zurückgeführt auf das Zweikörperproblem. Sei m_1 die Masse des den Planeten m umkreisenden Satelliten. Bezeichnet man den Ortsvektor von m in bezug auf ein beliebiges, als ruhend zu betrachtendes Bezugssystem mit \mathfrak{R} , und den Ortsvektor von m_1 mit \mathfrak{l} , so ist die Lage des Satelliten in bezug auf den Planet durch den Ortsvektor

$$(103) \quad \mathbf{r} = \mathfrak{l} - \mathfrak{R}$$

veranschaulicht.

Alle Satelliten unseres Planetensystems kreisen in so engen Bahnen um die zugehörigen Planeten, dass die skalare Grösse r des Vektors \mathbf{r} sehr klein ist im Verhältnis zur Entfernung ϱ des Planeten von der Sonne. Aus diesem Grunde kann auch die Entfernung des Satelliten von der Sonne gleich ϱ gesetzt werden; aus demselben Grunde kann auch angenommen werden, dass die auf den Planet bzw. auf den Satellit einwirkenden Kräfte \mathfrak{F} bzw. \mathfrak{F}' der Sonnenanziehung untereinander parallel sind. Bezeichnet man also den Einheitsvektor der Richtung Planet-Sonne mit \mathfrak{f}_0 , so wirkt auf den Planet die anziehende Kraft der Sonne:

$$\mathfrak{F} = f \frac{M m}{\varrho^2} \mathfrak{f}_0$$

und auf den Satellit die anziehende Kraft der Sonne:

$$\mathfrak{F}' = f \frac{Mm_1}{\varrho^2} \mathfrak{f}_0.$$

Sieht man, wie bisher, von der störenden Wirkung der übrigen Planeten ab, so wirkt auf den Planet neben der Kraft \mathfrak{F} noch die Anziehung des Satelliten, die durch $f \frac{mm_1}{r^3} \mathfrak{r}$ dargestellt erscheint; auf den Satellit wirkt hingegen neben der Kraft \mathfrak{F}' noch die Anziehung des Planeten die durch $-f \frac{mm_1}{r^3} \mathfrak{r}$ veranschaulicht ist. Daraus folgt, dass die differentiellen Bewegungsgleichungen des Planeten bzw. des Satelliten die folgenden sind:

$$(104) \quad m \frac{d^2 \mathfrak{R}}{dt^2} = f \frac{Mm}{\varrho^2} \mathfrak{f}_0 + f \frac{mm_1}{r^3} \mathfrak{r}$$

$$(105) \quad m_1 \frac{d^2 \mathfrak{I}}{dt^2} = f \frac{Mm_1}{\varrho^2} \mathfrak{f}_0 - f \frac{mm_1}{r^3} \mathfrak{r}.$$

Die Addition der vorstehenden Gleichungen ergibt:

$$m \frac{d^2 \mathfrak{R}}{dt^2} + m_1 \frac{d^2 \mathfrak{I}}{dt^2} = f \frac{M(m+m_1)}{\varrho^2} \mathfrak{f}_0.$$

Stellt also S den Massenmittelpunkt von m und m_1 , und \mathfrak{s} den Ortsvektor dieses Punktes dar, so ist

$$(m+m_1)\mathfrak{s} = m\mathfrak{R} + m_1\mathfrak{I}$$

d. h.

$$(m+m_1) \frac{d\mathfrak{s}}{dt} = m \frac{d^2 \mathfrak{R}}{dt^2} + m_1 \frac{d^2 \mathfrak{I}}{dt^2}.$$

Man bekommt also

$$(106) \quad (m+m_1) \frac{d^2 \mathfrak{s}}{dt^2} = f \frac{M(m+m_1)}{\varrho^2} \mathfrak{f}_0.$$

Dies ist die Bewegungsgleichung des Massenmittelpunktes S ; dieselbe besagt, dass sich der gemeinsame Massenmittelpunkt des Planeten und seines Satelliten derart bewegt, als ob in demselben die Masse $(m+m_1)$ konzentriert und diese nur der Anziehung der Sonne unterworfen wäre.

Zieht man (104) von (105) ab, nachdem man die erste dieser zwei Gleichungen mit m und die zweite mit m_1 gekürzt hat und berücksichtigt, dass nach (103)

$$\frac{d^2 l}{dt^2} - \frac{d^2 \mathfrak{R}}{dt^2} = \frac{d^2 r}{dt^2}$$

ist, so bekommt man:

$$(107) \quad m_1 \frac{d^2 r}{dt^2} = -f \frac{m_1(m+m_1)}{r^3} r.$$

Dies ist die Differentialgleichung der relativen Bewegung des Satelliten um seinen Planeten; sie besagt, dass sich der Satellit um den Planet derart bewege, als ob dieser letztere unbeweglich wäre, eine Masse $(m+m_1)$ aufweise und nur er auf den Satellit einwirke. Dadurch erscheint, unter den obigen vereinfachenden Annahmen, das Satellitenproblem auf das Zweikörperproblem zurückgeführt. Macht man also von der im Zweikörperproblem gewonnenen Gleichung (80) Gebrauch, bezeichnet die Umlaufszeit des Satelliten um den Planet mit T_1 und die grosse Halbachse seiner diesbezüglichen Bahn mit a_1 , so ist

$$f(m+m_1) = 4\pi^2 \frac{a_1^3}{T_1^2}.$$

Bezeichnet, wie bisher, T die Umlaufszeit des Planeten, besser gesagt des Massenmittelpunktes S um die Sonne und a die grosse Halbachse der diesbezüglichen Bahn, so ist

$$f(M+m+m_1) = 4\pi^2 \frac{a^3}{T^2}.$$

Aus den obigen zwei Gleichungen folgt:

$$\frac{m+m_1}{M+m+m_1} = \left(\frac{a_1}{a}\right)^3 \cdot \left(\frac{T}{T_1}\right)^2$$

und, weil m_1 gegen m , und m gegen M vernachlässigt werden kann,

$$(108) \quad \frac{m}{M} = \left(\frac{a_1}{a}\right)^3 \cdot \left(\frac{T}{T_1}\right)^2.$$

Mit Hilfe dieser Gleichung kann aus der Umlaufszeit des Satelliten und der grossen Halbachse seiner Bahn die Masse des zugehörigen Planeten im Verhältnis zur Sonnenmasse berechnet werden.

Auf diese Weise hat bereits Newton in seinen Principien die Masse der Erde und jene der Planeten Jupiter und Saturn ermittelt. Die Planeten Uranus und Neptun waren damals noch nicht entdeckt, und Mars galt als satellitenlos.

§ 11. Der Zusammenhang zwischen den vektoriellen und den elliptischen Elementen. Der im engen Zusammenhange mit den astronomischen Beobachtungen sich vollziehende Ausbau der Theorie der Planetenbewegung brachte es mit sich, dass auch in dieser Theorie von ihrem Anfang an die bei jenen Beobachtungen in Gebrauch stehenden elliptischen Elemente Benützung fanden, obwohl sie dem Wesen dieses mechanischen Problems eigentlich fremd sind. Die Wissenschaft der Himmelsmechanik wurde auf diese Weise mittels dieser Elemente erbaut,

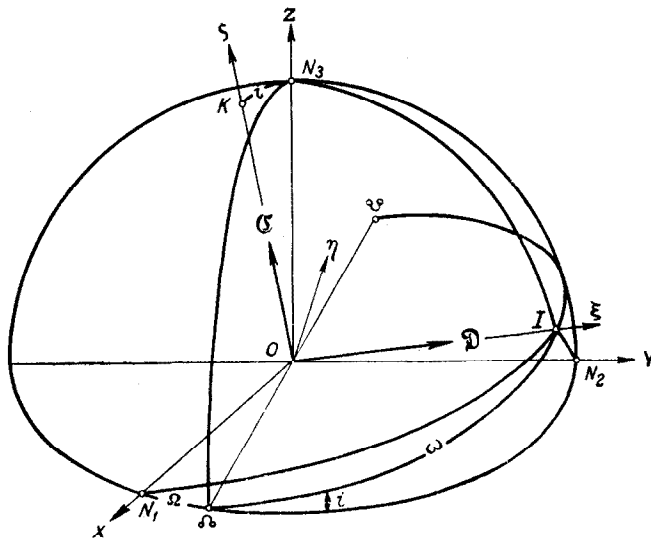


Fig. 5

weshalb es erforderlich ist, den Zusammenhang zwischen diesen elliptischen Elementen und den hier zur Verwendung gelangten vektoriellen Elementen herzustellen.

Bei den vorstehenden Untersuchungen wurde über die räumliche Orientierung des dabei benützten „ruhenden“ Koordinatensystems $X-Y-Z$, das seinen Ursprung in der Sonne hatte und ein orthogonales war, keine besondere Vereinbarung getroffen, weil dies für diese theoretischen Untersuchungen nicht erforderlich gewesen ist; für die praktischen Anwendungen der Himmelsmechanik muss ein exakt determiniertes Koordinatensystem gewählt werden. Als ein solches wird ein orthogonales, englisches Koordinatensystem benützt, dessen $X-Y$ -Ebene mit der einer bestimmten Epoche (gewöhnlich 1,0 Januar 1900) zugehörigen Ebene der Erdbahn zusammenfällt, dessen X -Achse gegen den Frühlingspunkt dieser Epoche und dessen Z -Achse gegen den Nordpol der Ekliptik gerichtet ist. Der positive Drehsinn eines solchen Systems, d. h. die von dem positiven Aste der Z -Achse beobachtete Drehung, die auf dem kürzesten Wege den positiven Ast der X -Achse mit dem positiven Ast der Y -Achse zur Koinzidenz bringt, stimmt mit dem Um-

laufssinn der Planeten überein. Dieses Koordinatensystem sei in der Fig. 5 veranschaulicht. Seine Achsen durchdringen die scheinbare Himmelssphäre in den Punkten N_1, N_2, N_3 , wobei der Punkt N_1 den erwähnten Frühlingspunkt bedeutet. Der grösste Kreis $\Omega I \mathcal{U}$ der Himmelssphäre (die in der Figur nur mit ihrer über der X — Y -Ebene liegenden Hälfte dargestellt erscheint) stelle den Schnitt der Bahnebene des in Betracht gezogenen Planeten mit der Himmelssphäre dar. Diese Ebene der Planetenbahn schneidet die X — Y -Ebene des Koordinatensystems längs der durch seinen Ursprung O gehenden Geraden $\Omega \mathcal{U}$, die die Knotenlinie genannt wird. Der Durchstosspunkt Ω dieser Geraden mit der Himmelssphäre, in dem der Planet oberhalb der X — Y -Ebene aufsteigt, heisst der aufsteigende Knoten. Der Winkel, den der nach Ω gerichtete Halbstrahl der Knotenlinie mit der X -Achse einschliesst, also der Bogen $N_1 \Omega$ der Himmelssphäre, wird die Länge des aufsteigenden Knotens genannt. Wir werden diese Grösse stets mit Ω bezeichnen. Die Bahnebene des Planeten schliesst mit der X — Y -Ebene unseres Koordinatensystems den spitzen Winkel i ein, der die Neigung der Bahnebene genannt wird. Er ist in der Figur durch den sphärischen Winkel $N_2 \Omega I$ veranschaulicht. Durch die Elemente Ω und i ist die Bahnebene des Planeten eindeutig festgelegt. Um die Orientierung der Bahnellipse, deren einer der Brennpunkte in O gelegen ist, in ihrer Ebene festzulegen, projiziere man das Perihelium der Planetenbahn vom Punkte O aus auf die Himmelssphäre. Der Punkt I der Himmelssphäre, der notwendigerweise auf dem Kreise $\Omega I \mathcal{U}$ liegen muss, stelle diese Projektion dar. Dann heisst der Bogen ΩI der Himmelssphäre, der mit ω bezeichnet werden möge, die Länge des Perihels, gemessen vom aufsteigenden Knoten. Durch denselben ist die Orientierung der Bahnellipse eindeutig gegeben; in der astronomischen Praxis geschieht dies durch die Summe der nicht in demselben Hauptschnitt der Himmelssphäre liegenden Bögen $N_1 \Omega$ und ΩI , also durch $\Omega + \omega$. Diese Summe wird kurz die Länge des Perihels genannt; sie möge mit Π bezeichnet werden. Es ist also

$$(109) \quad \Pi = \Omega + \omega.$$

Die Bahnellipse selbst ist durch ihre grosse Halbachse a und ihre numerische Exzentrizität e eindeutig bestimmt. Durch die Grösse a ist, bei gegebenen Massen M und m , auch die mittlere Bewegung n des Planeten vermittels (81) und mit (80) seine siderische Umlaufzeit T gegeben.

Es bleibt noch übrig, die Lage des Planeten in seiner Bahn zu einem gegebenen Zeitpunkte zu wissen, wodurch sich dann die Lage des Planeten zu jedem anderen Zeitpunkte berechnen lässt. Der in den vorstehenden Untersuchungen eingeführte Zeitpunkt τ des Durchganges des Planeten durch das Perihel stellte die Zeit einer bestimmten Lage des Planeten dar; um in die Rechnungen die einem bestimmten Zeitpunkte zukommenden Lage des Planeten einzuführen, verfährt man wie folgt.

Die Grösse

$$(110) \quad n(t - \tau) = \frac{2\pi}{T}(t - \tau) = \zeta$$

wird die mittlere Anomalie des Planeten genannt. Es ist dies die wahre Anomalie jenes fiktiven Planeten, der sich in der Ebene der Planetenbahn auf einem Kreise um die Sonne mit konstanter Winkelgeschwindigkeit n bewegen und gleichzeitig mit dem wahren Planeten die grosse Achse seiner Bahn durchschreiten würde. Demzufolge wird

$$(111) \quad \lambda = \Pi + v$$

die wahre Länge des Planeten, und

$$(112) \quad \iota = \Pi + \zeta = \Pi + n(t - \tau)$$

die mittlere Länge des Planeten genannt.

Im Initialmoment $t=0$, d. h. zu der bereits festgelegten Epoche, von der die Zeit gezählt wird, weist ι den Wert

$$(113) \quad \varepsilon = \Pi - n\tau$$

auf. Dieser Wert, die mittlere Länge der Epoche genannt, liefert das gewünschte sechste Element.

Die sechs Elemente

$$\Omega, i, \Pi, a, e, \varepsilon$$

werden die elliptischen Elemente der heliozentrischen Bewegung der Planeten genannt.

Es soll nun der Zusammenhang zwischen diesen elliptischen Elementen und vorstehend benützten vektoriellen Elementen ermittelt werden.

Sei $\xi-\eta-\zeta$ das bei den vorstehenden Untersuchungen benützte orthogonale Koordinatensystem, dessen ξ -Achse mit dem Vektor \mathfrak{D} und dessen ζ -Achse mit dem Vektor \mathfrak{C} zusammenfällt. Weil der Vektor \mathfrak{D} gegen das Perihelium gerichtet ist, durchdringt die Achse ξ dieses Koordinatensystems die scheinbare Himmelskugel im Punkte I ; weil der Vektor \mathfrak{C} auf der Ebene der Planetenbahn senkrecht steht, schliesst er und damit die Achse ζ mit der Achse Z des Koordinatensystems $X-Y-Z$ denselben Winkel ι ein, den die Bahnebene des Planeten mit der $X-Y$ -Ebene einschliesst. Bezeichnet also K den Durchstosspunkt der Achse ζ mit der Himmelskugel, so ist der Winkel N_3OK und damit auch der Bogen N_3K der Himmelskugel gleich ι .

Nach diesen Feststellungen ergibt sich folgendes. Die Koordinate C_3 des Vektors \mathfrak{C} ist gleich

$$(114) \quad C_3 = C \cos \iota,$$

während die in die $X-Y$ -Ebene fallende Projektion des Vektors \mathfrak{C} eine skalare Grösse

C_a aufweist, die durch

$$C_a = C \sin i$$

dargestellt ist. Bezeichnet α den Winkel, den diese Projektion mit der X -Achse einschliesst, so sind die Koordinaten C_1 und C_2 des Vektors \mathfrak{C} dargestellt durch

$$C_1 = C_a \cos \alpha = C \cos \alpha \sin i$$

$$C_2 = C_a \sin \alpha = C \sin \alpha \sin i.$$

Die Knotenlinie $\mathfrak{O} \mathfrak{O}'$ steht senkrecht auf der erwähnten Projektion des Vektors \mathfrak{C} und ihr gegen den aufsteigenden Knoten \mathfrak{O} gerichtete Halbstrahl $O \mathfrak{O}$ schliesst mit der X -Achse den Winkel

$$\Omega = \alpha + \frac{\pi}{2}$$

ein. Es ist deshalb

$$\alpha = \Omega - \frac{\pi}{2}.$$

Setzt man dies in die vorstehenden Gleichungen ein, so wird

$$(115) \quad C_1 = C \sin \Omega \sin i$$

$$(116) \quad C_2 = -C \cos \Omega \sin i.$$

Legt man durch den Durchstosspunkt I des Vektors \mathfrak{D} mit der Himmelskugel und durch die Durchstosspunkte N_1, N_2, N_3 der Achsen X, Y, Z mit der Himmelskugel die grössten Kreise $N_1 I, N_2 I, N_3 I$, dann erscheinen die Koordinaten D_1, D_2, D_3 des Vektors \mathfrak{D} durch die nachstehenden Ausdrücke veranschaulicht:

$$D_1 = D \cos N_1 I$$

$$D_2 = D \cos N_2 I$$

$$D_3 = D \cos N_3 I.$$

Durch die Anwendung der bekannten Formel der sphärischen Trigonometrie

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C$$

folgt aus dem sphärischen Dreieck $N_1 I \mathfrak{O}$, in dem der sphärische Winkel bei \mathfrak{O} gleich dem Supplement von i ist,

$$\cos N_1 I = \cos \Omega \cos \omega - \sin \Omega \sin \omega \cos i.$$

Aus dem sphärischen Dreieck $\oslash N_2 I$, in dem der Bogen $\oslash N_2$ gleich dem Komplement von Ω ist, folgt

$$\cos N_2 I = \sin \Omega \cos \omega + \cos \Omega \sin \omega \cos i.$$

Aus dem sphärischen Dreieck $\oslash I N_3$, in dem der Bogen $\oslash N_3$ gleich $\frac{\pi}{2}$ ist, und der sphärische Winkel bei \oslash gleich dem Komplement von i ist, folgt

$$\cos N_3 I = \sin \omega \sin i.$$

Es folgt aus den vorstehenden Gleichungen :

$$(117) \quad \left\{ \begin{array}{l} D_1 = D (\cos \Omega \cos \omega - \sin \Omega \sin \omega \cos i) \\ D_2 = D (\sin \Omega \cos \omega + \cos \Omega \sin \omega \cos i) \\ D_3 = D \sin \omega \sin i. \end{array} \right.$$

Durch diese Gleichungen, durch (114), (115), (116), d. h.

$$(118) \quad \left\{ \begin{array}{l} C_1 = C \sin \Omega \sin i \\ C_2 = -C \cos \Omega \sin i \\ C_3 = C \cos i \end{array} \right.$$

und durch die Gleichungen (73), (75), (109), (113) ist der Zusammenhang zwischen den vektoriellen Elementen und den elliptischen Elementen eindeutig gegeben.

KAPITEL III

Die Störungsrechnung

§ 12. Das Mehrkörperproblem der Himmelsmechanik und seine allgemeinen Integrale. Will man eine strengere Untersuchung der Bewegung der Planeten in Angriff nehmen, so müssen auch ihre gegenseitigen Anziehungen in Rechnung gestellt werden, wodurch man zum Mehrkörperproblem der Himmelsmechanik gelangt. Dasselbe besteht in folgender Aufgabestellung: Eine Anzahl von n Himmelskörpern, deren Massen mit $m_1, m_2, m_3 \dots m_n$ bezeichnet werden mögen, zieht sich nach dem Newtonschen Gravitationsgesetz gegenseitig an; man ermittle aus gegebenen Anfangsbedingungen die Bewegung dieser Himmelskörper.

Um dieses Problem mathematisch zum Ausdruck zu bringen, seien die Ortsvektoren der Schwerpunkte der Massen $m_1, m_2 \dots m_n$ in bezug auf einen ruhend gedachten Aufpunkt O mit $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2 \dots \mathfrak{R}_n$ bezeichnet. Die gegenseitigen Anziehungen zweier beliebigen dieser Massen m_i und m_k lassen sich dann wie folgt mathematisch veranschaulichen.

Die relative Lage des Himmelskörpers m_k in bezug auf den Himmelskörper m_i ist durch den Vektor

$$l_{ik} = \mathfrak{R}_k - \mathfrak{R}_i$$

gegeben. Sei Q_{ik} der Modul dieses Vektors, dann stellt $\frac{l_{ik}}{Q_{ik}}$ den Einheitsvektor der Richtung von m_i gegen m_k dar. Weil Q_{ik} bzw. Q_{ki} immer positiv zu nehmende Längen darstellen, so gilt allgemein

$$Q_{ik} = Q_{ki}.$$

Nach diesen Feststellungen ist es ohne weiters klar, dass die Masse m_k auf die Masse m_i mit einer Kraft einwirkt, die durch den Ausdruck

$$f \frac{m_i m_k}{Q_{ik}^2} \cdot \frac{1_{ik}}{Q_{ik}} = f m_i m_k \frac{\mathfrak{R}_k - \mathfrak{R}_i}{Q_{ik}^3}$$

dargestellt ist.

Die Anziehungen der übrigen Massen $m_1, m_2 \dots m_n$ auf die Masse m_i werden erhalten, wenn man im vorstehenden Ausdruck dem Index k die Werte $1, 2, 3, \dots n$ zuweist. Zieht man alle diese auf die Masse m_i einwirkenden Kräfte in Betracht, so bekommt man die nachstehende differentielle Bewegungsgleichung der Masse m_i :

$$m_i \frac{d^2 \mathfrak{R}_i}{dt^2} = \sum_k f m_i m_k \frac{\mathfrak{R}_k - \mathfrak{R}_i}{Q_{ik}^3}.$$

Dabei erstreckt sich das Summenzeichen auf alle Massen $m_1, m_2 \dots m_n$ mit Ausnahme der Masse m_i .

Die obige Gleichung stellt zu gleicher Zeit die Bewegungsgleichung jedes beliebigen der Himmelskörper $m_1, m_2 \dots m_n$ dar, wofern man dem Index i die Werte $1, 2, \dots n$ zuweist. Es stellen also die n Vektorgleichungen

$$(119) \quad m_i \frac{d^2 \mathfrak{R}_i}{dt^2} = \sum_k f m_i m_k \frac{\mathfrak{R}_k - \mathfrak{R}_i}{Q_{ik}^3} \quad i = 1, 2 \dots n$$

die differentiiellen Bewegungsgleichungen der Himmelskörper $m_1, m_2 \dots m_n$ dar. Diese n Gleichungen sind zweiter Ordnung und ihre vollständige Integration würde $2n$ Vektorgleichungen oder $6n$ skalare Gleichungen ergeben, durch die die Ortsvektoren und die Geschwindigkeitsvektoren der n Massen als Funktionen der Zeit t dargestellt wären. Mit den gegenwärtigen mathematischen Mitteln können aber nur drei vektorielle und ein skalares Integral gewonnen werden, wie gross die Anzahl n der bewegten und sich anziehenden Himmelskörper auch sei. Diese Integrale werden die allgemeinen Integrale des Mehrkörperproblems genannt.

In den n Gleichungen (119) kommt auf deren rechten Seiten die Verknüpfung jeder zwei beliebigen Massen m_i und m_k zweimal vor. Wenn nämlich links das Glied $m_i \frac{d^2 \mathfrak{R}_i}{dt^2}$ steht, dann kommt rechts im Summenausdruck das Glied $f m_i m_k \frac{\mathfrak{R}_k - \mathfrak{R}_i}{Q_{ik}^3}$ vor; steht dagegen links das Glied $m_k \frac{d^2 \mathfrak{R}_k}{dt^2}$, dann kommt rechts das Glied $f m_k m_i \frac{\mathfrak{R}_i - \mathfrak{R}_k}{Q_{ki}^3}$ vor. Weil aber $Q_{ik} = Q_{ki}$ ist, so sind die durchwegs paarweise auf tretenden Glieder, aus denen die Gesamtheit der rechten Seiten der Gleichungen (119) zusammengesetzt ist, durch die folgenden zwei allgemein veranschaulicht:

$$f m_i m_k \frac{\mathfrak{R}_k - \mathfrak{R}_i}{Q_{ik}^3}; \quad f m_i m_k \frac{\mathfrak{R}_i - \mathfrak{R}_k}{Q_{ik}^3}.$$

Bildet man also die Summe aller n Gleichungen (119), dann kann die rechte Seite dieser Summe in lauter solche Paare zergliedert werden. Weil jedes dieser Paare in der Gesamtsumme den Betrag:

$$f m_i m_k \frac{\mathfrak{R}_k - \mathfrak{R}_i}{\varrho_{ik}^3} + f m_i m_k \frac{\mathfrak{R}_i - \mathfrak{R}_k}{\varrho_{ik}^3} = 0$$

liefert, so wird auch die linke Seite der Summe der Gleichungen (119) gleich Null. Es ist also

$$(120) \quad \sum_i m_i \frac{d^2 \mathfrak{R}_i}{dt^2} = 0.$$

Multipliziert man die Gleichungen (119) der Reihe nach vektoriell mit $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2 \dots \mathfrak{R}_n$ und bildet die Summe der derart erhaltenen Gleichungen, dann ergibt jedes zusammengehörige Paar der rechten Seiten derselben den Betrag:

$$f \frac{m_i m_k}{\varrho_{ik}^3} \{ [\mathfrak{R}_i (\mathfrak{R}_k - \mathfrak{R}_i)] + [\mathfrak{R}_k (\mathfrak{R}_i - \mathfrak{R}_k)] \} = f \frac{m_i m_k}{\varrho_{ik}^3} \{ [\mathfrak{R}_i \mathfrak{R}_k] + [\mathfrak{R}_k \mathfrak{R}_i] \} = 0.$$

Es ist also

$$(121) \quad \sum_i m_i \left[\mathfrak{R}_i \frac{d^2 \mathfrak{R}_i}{dt^2} \right] = 0.$$

Multipliziert man die Gleichungen (119) der Reihe nach skalar mit $d\mathfrak{R}_1, d\mathfrak{R}_2 \dots d\mathfrak{R}_n$ und bildet die Summe, dann liefert jedes zusammengehörige Paar der rechten Seite den Beitrag:

$$f \frac{m_i m_k}{\varrho_{ik}^3} \{ (\mathfrak{R}_k - \mathfrak{R}_i) d\mathfrak{R}_i + (\mathfrak{R}_i - \mathfrak{R}_k) d\mathfrak{R}_k \} = -f \frac{m_i m_k}{\varrho_{ik}^3} (\mathfrak{R}_k - \mathfrak{R}_i) (d\mathfrak{R}_k - d\mathfrak{R}_i).$$

Nun ist dieser Beitrag, weil

$$(\mathfrak{R}_k - \mathfrak{R}_i)(d\mathfrak{R}_k - d\mathfrak{R}_i) = l_{ik} dl_{ik} = \varrho_{ik} d\varrho_{ik}$$

ist, gleich

$$-f \frac{m_i m_k}{\varrho_{ik}^2} d\varrho_{ik}$$

und man erhält:

$$(122) \quad \sum_i m_i \frac{d^2 \mathfrak{R}_i}{dt^2} d\mathfrak{R}_i = -f \sum_i \sum_k \frac{m_i m_k}{Q_{ik}^2} dQ_{ik}.$$

Es ist zu beachten, dass in der obigen Doppelsumme jede Kombination zweier beliebiger Massen m_i und m_k ($k \neq i$) nur einmal vorkommt, weil jedes erwähnte Paar der diese Massen enthaltenden Glieder zu einem einzigen Glied zusammengezogen worden ist.

Die auf diese Weise gewonnenen Differentialgleichungen (120), (121) und (122) lassen sich ohne weiteres integrieren. Es folgt aus (120)

$$(123) \quad \sum_i m_i \frac{d\mathfrak{R}_i}{dt} = \mathfrak{B},$$

worin \mathfrak{B} einen konstanten, d. h. von der Zeit unabhängigen Vektor bedeutet.

Die Integration der vorstehenden Differentialgleichung ergibt:

$$(124) \quad \sum_i m_i \mathfrak{R}_i = \mathfrak{A} + \mathfrak{B} t,$$

worin \mathfrak{A} einen ebenfalls konstanten Vektor darstellt.

Weil ganz allgemein

$$\frac{d}{dt} \left[\mathfrak{R}_i \frac{d\mathfrak{R}_i}{dt} \right] = \left[\mathfrak{R}_i \frac{d^2 \mathfrak{R}_i}{dt^2} \right]$$

ist, kann die Gleichung (121) auch wie folgt geschrieben werden:

$$\frac{d}{dt} \sum_i m_i \left[\mathfrak{R}_i \frac{d\mathfrak{R}_i}{dt} \right] = 0.$$

Die Integration dieser Gleichung liefert:

$$(125) \quad \sum_i m_i \left[\mathfrak{R}_i \frac{d\mathfrak{R}_i}{dt} \right] = \mathfrak{C},$$

worin \mathfrak{C} einen konstanten Vektor bedeutet.

Auch die Gleichung (122) ist sofort integrierbar: ihre rechte Seite stellt offenbar das Differential des skalaren Ausdrucks

$$(126) \quad U = f \sum_i \sum_k \frac{m_i m_k}{Q_{ik}}$$

dar, wobei, wie bereits festgestellt, in der obigen Doppelsumme jede Kombination der Massen m_i und m_k nur einmal zu nehmen ist. Der Skalar U wird die Kräftefunktion des Systems genannt. Weil

$$(127) \quad \frac{d\mathfrak{R}_i}{dt} = \mathfrak{B}_i$$

den Geschwindigkeitsvektor der Masse m_i bedeutet, und

$$\frac{d^2\mathfrak{R}_i}{dt^2} d\mathfrak{R}_i = \frac{d\mathfrak{B}_i}{dt} d\mathfrak{B}_i = \mathfrak{B}_i d\mathfrak{B}_i = V_i dV_i$$

ist, wobei V_i den Modul von \mathfrak{B}_i bedeutet, kann die Gleichung (122) durch die folgende ersetzt werden:

$$\sum_i m_i V_i dV_i = dU.$$

Die Integration dieser Differentialgleichung ergibt:

$$(128) \quad \sum_i \frac{m_i V_i^2}{2} = U + h,$$

worin h die Integrationskonstante bedeutet.

Die drei Vektorgleichungen (123), (124), (125) und die eine skalare (128), die zusammen zehn skalaren Gleichungen äquivalent sind, stellen die allgemeinen Integrale des Mehrkörperproblems dar.

Die beiden Vektorintegrale (123) und (124) stellen, wie im Zweikörperproblem, die beiden Schwerpunktsintegrale dar. Der Ortsvektor \mathfrak{S} des gemeinsamen Schwerpunktes S der n Massen $m_1, m_2 \dots m_n$ ist durch die Vektorgleichung:

$$(129) \quad \mathfrak{S} \sum_i m_i = \sum_i m_i \mathfrak{R}_i$$

gegeben. Es ist also

$$(130) \quad \frac{d\mathfrak{S}}{dt} \sum_i m_i = \sum_i m_i \frac{d\mathfrak{R}_i}{dt}$$

$$(131) \quad \frac{d^2\mathfrak{S}}{dt^2} \sum_i m_i = \sum_i m_i \frac{d^2\mathfrak{R}_i}{dt^2},$$

d.h. wegen (120)

$$\frac{d^2\mathfrak{S}}{dt^2} = 0.$$

Dieser Ausdruck stellt den Beschleunigungsvektor des Massenmittelpunktes S dar, und weil derselbe ständig gleich Null ist, bewegt sich dieser Punkt geradlinig und gleichförmig. Stellt \mathfrak{B} den Geschwindigkeitsvektor des Punktes S dar, dann ist nach (130):

$$(132) \quad \mathfrak{B} \sum_i m_i = \sum_i m_i \frac{d\mathfrak{R}_i}{dt},$$

während aus (124) und (129) folgt:

$$(133) \quad \mathfrak{G} \sum_i m_i = \mathfrak{U} + \mathfrak{B} t.$$

Diese Gleichung stellt die geradlinige Bahn des Punktes S dar, wobei t als Parameter zu betrachten ist.

Das Vektorintegral (125) wird das Flächenintegral genannt. Wie dies bereits im vorhergehenden Kapitel gezeigt, stellt der Ausdruck $\left[\mathfrak{R}_i \frac{d\mathfrak{R}_i}{dt} \right]$ die mit 2 multiplizierte Fläche dar, die der Ortsvektor \mathfrak{R}_i des Massenkörpers m_i während der Zeiteinheit überstreicht. Die Gleichung (125) besagt, dass die vektorielle Summe aller von den Ortsvektoren $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2 \dots \mathfrak{R}_n$ während der Zeiteinheit überstrichenen orientierten Flächenelemente, nachdem man diese vorher mit den betreffenden Massen multipliziert hat, ein konstanter Vektor ist.

Das skalare Integral (128) wird das Integral der lebendigen Kraft genannt, weil dessen linksseitiger Ausdruck die lebendige Kraft des Massensystems veranschaulicht.

Unser Sonnensystem oder, wie man es in neuerer Zeit zu bezeichnen pflegt, das Planetensystem, erfüllt im weitgehendstem Masse die bei der Behandlung des Mehrkörperproblems gemachten Voraussetzungen, sind doch die Entfernungen selbst der uns am nächsten liegenden Fixsterne derart gewaltig, dass ihre Anziehungskräfte auf das Planetensystem ganz und gar vernachlässigbar sind. Wendet man also die soeben gewonnenen Schwerpunktsintegrale auf das Planetensystem an, so lassen diese eine gleichförmige fortschreitende Bewegung des Schwerpunktes dieses Systems gegen jenes der Fixsterne zu, was schon Newton erkannte. Von dieser Erkenntnis ausgehend, versuchte zuerst W. Herschel und nachher zahlreiche andere Astronomen diese Eigenbewegung des Planetensystems zu ermitteln. Die Eigenbewegungen der Fixsterne erschweren bedeutend die Lösung dieses Problems und behaften die dabei gewonnenen numerischen Ergebnisse mit nicht geringen Unsicherheiten. Immerhin erscheint es als festgestellt, dass sich unser Planetensystem mit einer Geschwindigkeit von rund 20 Kilometer in der Sekunde gegen das Sternbild des Herkules bewegt, eine Tatsache, die für das paläoklimale Problem von einiger Bedeutung ist.

Das Flächenintegral (125) des Mehrkörperproblems wurde aus der Annahme eines ruhenden Aufpunktes O abgeleitet, auf den sich die Ortsvektoren \mathfrak{R}_i und die Geschwindigkeitsvektoren bezogen hatten. Es sei nun die Frage beantwortet, ob ein

derartiges Integral auch für das Planetensystem bestehe, in dem uns kein ruhender Aufpunkt angebbar ist. Fassen wir also einen beliebigen dem Planetensystem angehörig materiellen Punkt O' ins Auge, nehmen wir an, dass dessen Lage zum vorher angenommenen fiktiven Aufpunkt O durch \mathfrak{R}_0 gekennzeichnet ist, dann sind die Ortsvektoren der Massenkörper $m_1, m_2 \dots m_n$ bezüglich O' dargestellt durch:

$$(\mathfrak{R}_1 - \mathfrak{R}_0), (\mathfrak{R}_2 - \mathfrak{R}_0), (\mathfrak{R}_3 - \mathfrak{R}_0) \dots (\mathfrak{R}_n - \mathfrak{R}_0).$$

Wählen wir einen anderen beliebigen materiellen Punkt M des Planetensystems, der sich im ruhenden Bezugssystem zur Zeit t mit der Geschwindigkeit \mathfrak{V}_0 bewegt, dann sind die relativen Geschwindigkeiten der Massenkörper $m_1, m_2 \dots m_n$ bezüglich M dargestellt durch:

$$\left(\frac{d\mathfrak{R}_1}{dt} - \mathfrak{V}_0\right), \left(\frac{d\mathfrak{R}_2}{dt} - \mathfrak{V}_0\right), \left(\frac{d\mathfrak{R}_3}{dt} - \mathfrak{V}_0\right) \dots \left(\frac{d\mathfrak{R}_n}{dt} - \mathfrak{V}_0\right)$$

Bilden wir jetzt den Vektorausdruck:

$$(134) \quad \mathfrak{C} = \sum_i m_i \left[(\mathfrak{R}_i - \mathfrak{R}_0) \left(\frac{d\mathfrak{R}_i}{dt} - \mathfrak{V}_0 \right) \right]$$

und fragen, unter welchen Bedingungen dieser Vektor konstant sein wird, so wie es der Vektor \mathfrak{C} gewesen ist.

Es folgt aus dem vorstehenden Ausdruck, wenn man die darin angegebenen Multiplikationen ausführt und die mit dem laufenden Index i nicht behafteten Glieder vor das Summenzeichen stellt,

$$\mathfrak{C} = \sum_i m_i \left[\mathfrak{R}_i \frac{d\mathfrak{R}_i}{dt} \right] - \left[\mathfrak{R}_0 \sum_i m_i \frac{d\mathfrak{R}_i}{dt} \right] + [\mathfrak{V}_0 \sum_i m_i \mathfrak{R}_i] + [\mathfrak{R}_0 \mathfrak{V}_0] \sum_i m_i.$$

Bezeichnet M die Gesamtmasse des Planetensystems, so ist

$$\sum m_i = M.$$

Es folgt aus (125), (132) und (129)

$$\sum_i m_i \left[\mathfrak{R}_i \frac{d\mathfrak{R}_i}{dt} \right] = \mathfrak{C}$$

$$\sum_i m_i \frac{d\mathfrak{R}_i}{dt} = M \mathfrak{B}$$

$$\sum_i m_i \mathfrak{R}_i = M \mathfrak{S},$$

so dass man bekommt:

$$(135) \quad \mathfrak{C} = \mathfrak{C} - M \{ [\mathfrak{R}_0 \mathfrak{B}] + [\mathfrak{S} \mathfrak{B}_0] - [\mathfrak{R}_0 \mathfrak{B}_0] \}.$$

Dieser Ausdruck ist von der Zeit t nicht unabhängig, weil die darin vorkommenden Grössen $\mathfrak{R}_0, \mathfrak{B}_0, \mathfrak{S}$ veränderlich sind.

Versetzt man den Aufpunkt O' in den Schwerpunkt S des Planetensystems, dann wird $\mathfrak{R}_0 = \mathfrak{S}$, d. h.

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{C} - M [\mathfrak{S} \mathfrak{B}].$$

Lässt man den Punkt O' unberührt, verlegt aber den Bezugspunkt M in den Schwerpunkt S , dann wird $\mathfrak{B}_0 = \mathfrak{S}$, d. h.

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{C} - M [\mathfrak{S} \mathfrak{B}].$$

Verlegt man schliesslich beide Bezugspunkte O' und M nach S , so wird $\mathfrak{R}_0 = \mathfrak{S}; \mathfrak{B}_0 = \mathfrak{B}$, d. h.

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{C} - M [\mathfrak{S} \mathfrak{B}].$$

In allen drei Fällen bekommt man also einen und denselben Vektor \mathfrak{C} . Weil \mathfrak{C} und \mathfrak{B} konstante Vektoren waren und

$$\frac{d}{dt} [\mathfrak{S} \mathfrak{B}] = \left[\frac{d\mathfrak{S}}{dt} \mathfrak{B} \right] = [\mathfrak{B} \mathfrak{B}] = 0$$

ist, so ist der Vektor \mathfrak{C} auch ein von der Zeit unabhängiger Vektor. Deshalb determinieren auch die relativen Bewegungen im Planetensystem eindeutig einen unveränderlichen Vektor. Er lässt sich aus den initialen Bedingungen leicht berechnen. Bezeichnet man die dem Initialmoment entsprechenden Ortsvektoren der einzelnen Massenkörper des Planetensystems in bezug auf den Schwerpunkt dieses Systems mit \mathfrak{R}_i^0 , und mit \mathfrak{B}_i^0 die Geschwindigkeitsvektoren dieser Massenkörper in bezug auf einen beliebigen Massenpunkt dieses Systems, also etwa in bezug auf die Son-

ne, dann ist nach (134)

$$(136) \quad \mathfrak{C} = \sum_i m_i [\mathfrak{R}_i^y \mathfrak{B}_i^x].$$

Die auf dem Vektor \mathfrak{C} senkrecht stehende Ebene besitzt eine unvänderliche Orientierung im Weltraume und wird die unveränderliche Ebene von Laplace genannt. Ihre Koordinaten in bezug auf das im § 11 angegebene Koordinatensystem, also die Länge Ω ihres aufsteigenden Knotens und ihre Neigung i zur X - Y -Ebene ergeben sich nach dem Vorgang, der zur Aufstellung der Gleichungen (117) geführt hat.

§ 13. Die Differentialgleichungen der heliozentrischen Bewegung der Planeten. Um die Differentialgleichungen der heliozentrischen Bewegung der Planeten unter Berücksichtigung ihrer gegenseitigen Anziehungen abzuleiten, seien die Massen aller dieser Planeten der Reihe nach mit $m_1, m_2 \dots m_n$ und ihre Ortsvektoren bezüglich eines als ruhend vorausgesetzten Aufpunktes mit $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \dots \mathfrak{R}_n$ bezeichnet. Die Masse der Sonne sei mit M und der zugehörige Ortsvektor mit \mathfrak{R}_0 bezeichnet. Ziehen wir nun einen beliebigen Planet m_i , dessen Bewegung wir untersuchen und den wir als den gestörten bezeichnen wollen, in Betracht. Seine relative Lage in bezug auf die Sonne ist durch den Ortsvektor

$$(137) \quad \mathfrak{r}_i = \mathfrak{R}_i - \mathfrak{R}_0$$

gegeben. Diese Gleichung gilt bei entsprechender Wahl des Indexes i auch für die übrigen Planeten, die wir im vorliegenden Falle die störenden nennen wollen. Die Ortsvektoren dieser störenden Planeten in bezug auf den gestörten Planeten m_i seien mit $l_{i1}, l_{i2} \dots l_{in}$ und ihre Moduli mit $q_{i1}, q_{i2} \dots q_{in}$ bezeichnet, wobei der hier vorkommende zweite Index von i verschieden sein muss. Nach diesen Feststellungen ist es klar, dass die Bewegungsgleichungen der Himmelskörper m_i und M die folgenden sind:

$$(138) \quad m_i \frac{d^2 \mathfrak{R}_i}{dt^2} = -f m_i M \frac{\mathfrak{r}_i}{r_i^3} + \sum_k f m_i m_k \frac{l_{ik}}{q_{ik}^3}$$

$$(139) \quad M \frac{d^2 \mathfrak{R}_0}{dt^2} = f M m_i \frac{\mathfrak{r}_i}{r_i^3} + \sum_k f M m_k \frac{\mathfrak{r}_k}{r_k^3},$$

wobei der unter dem Summenzeichen befindliche Index k verschieden von i ist. Kürzt man (138) mit m_i , (139) mit M und bildet die Differenz dieser zwei Gleichungen, so folgt mit Berücksichtigung von (137):

$$(140) \quad \frac{d^2 \mathfrak{r}_i}{dt^2} = f (M + m_i) \frac{\mathfrak{r}_i}{r_i^3} + \sum_k f m_k \left(\frac{l_{ik}}{q_{ik}^3} - \frac{\mathfrak{r}_k}{r_k^3} \right).$$

Der Vektor $\frac{l_{ik}}{Q_{ik}^3}$ kann als Gradient einer skalaren Grösse dargestellt werden. Wird dabei sein Aufpunkt m_i als beweglich, sein Endpunkt m_k als unbeweglich angenommen, so ist der Gradient von $\frac{1}{Q_{ik}}$ offenbar gleich $-\frac{1}{Q_{ik}^2} \cdot \left(-\frac{l_{ik}}{Q_{ik}}\right)$. Es ist also

$$\text{grad} \frac{1}{Q_{ik}} = \frac{l_{ik}}{Q_{ik}^3}.$$

Auch der Vektor $\frac{r_k}{r_k^3}$ kann als Gradient eines Skalars dargestellt werden.

Frägt man nämlich nach dem Gradient von

$$U_k = \frac{r_i r_k}{r_k^3}$$

und betrachtet dabei, wie früher, den Punkt m_i als beweglich, so findet man folgendes. Es ist

$$U_k = \frac{x r_k}{r_k^3} = \frac{x}{r_k^2},$$

wobei x die Projektion von r_i auf r_k bedeutet. Bei der Ableitung des Gradienten ist r_k als konstant zu betrachten, und weil x im Vektor r_k gelegen ist, so wird

$$\text{grad} U_k = \frac{1}{r_k^2} \text{grad} x = \frac{1}{r_k^2} \cdot \frac{r_k}{r_k} = \frac{r_k}{r_k^3}.$$

Es ist also

$$(141) \quad \text{grad} f m_k \left(\frac{1}{Q_{ik}} - \frac{r_i r_k}{r_k^3} \right) = f m_k \left(\frac{l_{ik}}{Q_{ik}^3} - \frac{r_k}{r_k^3} \right).$$

Setzt man dies in (140) ein und berücksichtigt, dass die Summe der Gradienten gleich dem Gradient der Summe ist, so bekommt man die Differentialgleichung der heliozentrischen Bewegung des Planeten m_i und, wenn man dem Index i die Werte 1, 2, 3... n zuweist, die nachstehenden n Differentialgleichungen der heliozentrischen Bewegung sämtlicher n Planeten:

$$(142) \quad \frac{d^2 r_i}{dt^2} = -f(M + m_i) \frac{r_i}{r_i^3} + \text{grad} \sum_k f m_k \left(\frac{1}{Q_{ik}} - \frac{r_i r_k}{r_k^3} \right) \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Diese n Differentialgleichungen zweiter Ordnung würden, vollständig integriert, $2n$ Vektorintegrale oder $6n$ skalare Integrale ergeben. Von diesen kennt man,

weil hier bei der Untersuchung der relativen Bewegungen um die Sonne die beiden vektoriellen Schwerpunktsintegrale ausscheiden, nur vier skalare: das vektorielle Flächenintegral (136), das dreien skalaren äquivalent ist, und das Integral der lebendigen Kraft, das sich auch für den vorliegenden Fall ableiten lässt, für die nachstehenden Untersuchungen aber ohne Bedeutung ist.

Die Differentialgleichung der heliozentrischen Bewegung des Planeten m_i bei vorausgesetzter Abwesenheit der übrigen Planeten erscheint nach (44) dargestellt durch:

$$(143) \quad \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = -f(M + m_i) \frac{\mathbf{r}_i}{r_i^3}.$$

Vergleicht man diese Differentialgleichung mit der Gleichung (140), so erkennt man, dass sich diese letztere von der obigen durch das Summenglied

$$(144) \quad \sum_k f m_k \left(\frac{l_{ik}}{q_{ik}^3} - \frac{\mathbf{r}_k}{r_k^3} \right) = \mathfrak{G}_i$$

unterscheidet. Jeder Addend dieser Summe erscheint dabei mit dem Faktor m_k behaftet, der die Masse der einzelnen Planeten veranschaulicht. Jede dieser Massen ist im Vergleich zur Masse M der Sonne, die im ersten Gliede der rechten Seite der Gleichung (140) und auch in der Gleichung (143) als Faktor vorkommt, ausserordentlich klein. Weil aber $\frac{l_{ik}}{q_{ik}^3}$ und $\frac{\mathbf{r}_k}{r_k^3}$ von derselben Grössenordnung wie $\frac{\mathbf{r}_i}{r_i^3}$ sind, ist das obige Summenglied im Vergleich zum ersten Gliede der rechten Seite der Gleichung (140) ebenfalls sehr klein; vernachlässigt man dieses Summenglied ganz, wird die Gleichung (140) identisch mit der Gleichung (143). Dies ist die Ursache, warum sich die Planeten um die Sonne fast derart bewegen, als ob sie nur unter dem Einflusse der anziehenden Kraft der Sonne stünden. Dies ist auch der Grund, weshalb man die durch das Summenglied (144) dargestellte, pro Masseneinheit berechnete, auf den Planeten m_i einwirkende, von den übrigen Planeten herführende Kraft also die störende bezeichnet.

Setzt man:

$$(145) \quad \sum_k f m_k \left(\frac{1}{q_{ik}} - \frac{\mathbf{r}_i \mathbf{r}_k}{r_k^3} \right) = R_i,$$

so ist

$$(146) \quad \mathfrak{G}_i = \text{grad } R_i$$

und die Gleichungen (142) erhalten die folgende Form:

$$(147) \quad \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = -f(M + m_i) \frac{\mathbf{r}_i}{r_i^3} + \text{grad } R_i.$$

Die skalare Grösse R_i wird die Störungsfunktion genannt.

Der rechnerische Vorgang, die vorstehenden Differentialgleichungen zu integrieren, d. h. die Orts- und Geschwindigkeitsvektoren der Planeten als Funktionen der Zeit darzustellen, wird die Störungsrechnung genannt.

§ 14 Die vektoriellen Grundgleichungen der Störungsrechnung. Der der Störungsrechnung zugrunde liegende Gedankengang ist der folgende.

Für die ungestörte Bewegung eines beliebigen Planeten m_i gilt die Gleichung (143), für die gestörte Bewegung die Gleichung (147). Lässt man jetzt den Index i als überflüssig weg, so lauten diese zwei Gleichungen:

$$(148) \quad \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -f(M+m) \frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

$$(149) \quad \frac{d^2 \bar{\mathbf{r}}}{dt^2} = -f(M+m) \frac{\bar{\mathbf{r}}}{r^3} + \text{grad } R.$$

In der Gleichung (149) haben wir den Ortsvektor $\bar{\mathbf{r}}$ vorläufig mit einem wagerechten Strich versehen, um damit anzudeuten, dass er sich auf die gestörte Bewegung bezieht.

Die vollständigen Integrale der Differentialgleichung (148) sind uns aus dem Zweikörperproblem bekannt. Wir haben sie im § 9 durch die Vektorgleichungen (98) und (99) bzw. durch die skalaren Gleichungen (101) und (102) veranschaulicht, durch die der Ortsvektor \mathbf{r} und der Geschwindigkeitsvektor \mathbf{v} bzw. ihre Koordinaten als Funktionen der vektoriellen Elemente und der Zeit t dargestellt sind. Diese Integrale sind von der Form:

$$\mathbf{r} = F_1(t, c_i) \mathbf{n}_1 + F_2(t, c_i) \mathbf{n}_2 + F_3(t, c_i) \mathbf{n}_3$$

$$\mathbf{v} = U_1(t, c_i) \mathbf{n}_1 + U_2(t, c_i) \mathbf{n}_2 + U_3(t, c_i) \mathbf{n}_3,$$

wobei unter c_i die vektoriellen Elemente zu verstehen sind. Statt der dabei auftretenden sieben vektoriellen Elemente, von denen ihrer sechs voneinander unabhängig sind, kann man unbeschadet den nachstehenden Ausführungen in die vorstehenden Gleichungen sechs andere die ungestörte elliptische Bewegung bestimmende Elemente, also etwa die im § 11 angegebenen elliptischen oder die durch (101) gegebenen initialen Elemente oder im allgemeinen n solcher Elemente, falls noch $(n-6)$ Bedingungsgleichungen vorhanden sind, die nur 6 dieser Elemente als von einander unabhängig machen, in die Rechnung einführen. Diese Elemente, sollen, wie immer sie gewählt sein mögen, mit $c_1, c_2 \dots c_n$ bezeichnet werden. Die Integrale der Differentialgleichung (148) der ungestörten Bewegung der Planeten sind also von der Form:

$$\mathbf{r} = F_1(t, c_1, c_2 \dots c_n) \mathbf{n}_1 + F_2(t, c_1, c_2 \dots c_n) \mathbf{n}_2 + F_3(t, c_1, c_2 \dots c_n) \mathbf{n}_3$$

$$\mathbf{v} = U_1(t, c_1, c_2 \dots c_n) \mathbf{n}_1 + U_2(t, c_1, c_2 \dots c_n) \mathbf{n}_2 + U_3(t, c_1, c_2 \dots c_n) \mathbf{n}_3,$$

oder symbolisch geschrieben:

$$(150) \quad \begin{cases} \mathbf{r} = \mathfrak{F}(t, c_1, c_2 \dots c_n) \\ \mathbf{v} = \mathfrak{U}(t, c_1, c_2 \dots c_n). \end{cases}$$

Man kann mit Hilfe eines Verfahrens, welches Lagrange angegeben und als Methode der Variation der Konstanten bezeichnet hat, die vorstehenden Ausdrücke auch als Integrale der Differentialgleichung (149) auffassen, wofern man die darin vorkommenden konstanten Grössen $c_1, c_2 \dots c_n$ als Funktionen $u_1, u_2 \dots u_n$ der Zeit t betrachtet. In diesem Falle sind die Integrale der Differentialgleichung (149) durch die nachstehenden Ausdrücke veranschaulicht:

$$(151) \quad \begin{cases} \bar{\mathbf{r}} = \mathfrak{F}(t, u_1, u_2, \dots u_n) \\ \bar{\mathbf{v}} = \mathfrak{U}(t, u_1, u_2, \dots u_n). \end{cases}$$

Dabei können, wie gezeigt werden wird, die Funktionen $u_1, u_2, \dots u_n$ gewissen Bedingungen unterworfen werden

Weil \mathbf{r} explizit und vermöge der zu ermittelnden Funktionen $u_1, u_2 \dots u_n$ eine Funktion der Zeit ist, so ist:

$$(152) \quad \frac{d\bar{\mathbf{r}}}{dt} = \bar{\mathbf{v}} = \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial t} + \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial u_1} \cdot \frac{du_1}{dt} + \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial u_2} \cdot \frac{du_2}{dt} + \dots + \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial u_n} \cdot \frac{du_n}{dt}.$$

Die partielle Ableitung $\frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial t}$, bei deren Bildung $u_1, u_2 \dots u_n$ als konstant zu betrachten sind, ist offenbar gleich der auf die ungestörte Bewegung und auf denselben Zeitpunkt t sich beziehende Ableitung $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$. Es ist also

$$(153) \quad \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}.$$

Der Ausdruck:

$$(154) \quad \delta \bar{\mathbf{r}} = \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial u_2} du_2 + \dots + \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial u_n} du_n$$

kann als die Variation des Ortsvektor \bar{r} bezeichnet werden, wobei zu verstehen ist, dass im Ausdruck (151) für \bar{r} nur die Funktionen $u_1, u_2 \dots u_n$, oder im Ausdruck (150) für r nur die Elemente $c_1, c_2 \dots c_n$ zu variieren sind, weshalb geschrieben werden kann:

$$(155) \quad \delta \bar{r} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial c_1} dc_1 + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial c_2} dc_2 + \dots + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial c_n} dc_n = \delta \bar{r}.$$

Es folgt aus (152), (153), (154), (155)

$$(156) \quad \delta \bar{r} = \bar{v} dt = v dt + \delta r.$$

Unterwerfen wir nun die Funktionen $u_1, u_2 \dots u_n$ der bereits angekündigten Bedingungsgleichung:

$$(157) \quad \delta r = 0,$$

so folgt aus (156):

$$(158) \quad \bar{v} = v.$$

Durch die Bedingungsgleichung (157) wird also die Forderung gestellt, dass zu dem in Betracht gezogenen Zeitpunkt t die gestörte Bewegung jenen Geschwindigkeitsvektor aufweise, welcher dem der ungestörten Bewegung entspreche, d. h. jenem, den man erhält, wenn man die diesem Zeitpunkt zukommenden Grössen $u_1, u_2 \dots u_n$ als konstant betrachtet. Die gestörte und die dem jeweiligen Zeitpunkte zugehörige ungestörte Bahnkurve sollen sich also berühren. Die gestörte Bahnkurve bilde also die Einhüllende der derart sich ergebenden durch jeden ihrer Punkte gelegten sukzessiven ungestörten Bahnkurven. Die oft gebrauchte Redeweise, die ungestörte Bahnkurve oskuliere die gestörte, entspricht nicht ganz dem Sprachgebrauch der Differentialgeometrie. Die ungestörte Bahnkurve, ein Kegelschnitt mit fünf Parametern, müsste bei einer vollständigen Oskulation fünf gemeinsame Punkte mit der gestörten Bahnkurve besitzen, während durch die Forderung (157) bloss zwei solcher Punkte gewährleistet erscheinen. Erst durch die Kleinheit des zweiten Gliedes der rechten Seite der Gleichung (149) ergibt sich, je nach der Kleinheitsordnung dieses Gliedes, eine Berührung höherer Ordnung zwischen der gestörten und der ungestörten Bahn.

Es folgt aus (156) und (157):

$$(159) \quad \frac{d\bar{r}}{dt} = v.$$

Differentiert man diesen Ausdruck nach t und betrachtet dabei $c_1, c_2 \dots c_n$ als Variable, so wird:

$$(160) \quad \frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial c_1} \cdot \frac{dc_1}{dt} + \frac{\partial v}{\partial c_2} \cdot \frac{dc_2}{dt} + \dots + \frac{\partial v}{\partial c_n} \cdot \frac{dc_n}{dt}.$$

Es ist, weil bei der ungestörten Bewegung und im Gliede $\frac{\partial v}{\partial t} c_1, c_2 \dots c_n$ als Konstante zu betrachten sind,

$$(161) \quad \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 r}{dt^2}$$

und weil man den Ausdruck :

$$(162) \quad \delta v = \frac{\partial v}{\partial c_1} dc_1 + \frac{\partial v}{\partial c_2} dc_2 + \dots + \frac{\partial v}{\partial c_n} dc_n$$

als die Variation des Geschwindigkeitsvektors v bezeichnen kann,

$$(163) \quad \frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} = \frac{d^2 r}{dt^2} + \frac{1}{dt} \delta v.$$

Es folgt aus (148), (149). und weil jetzt (146) durch

$$(164) \quad \mathfrak{S} = \text{grad } R$$

zu ersetzen ist,

$$(165) \quad \frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} = \frac{d^2 r}{dt^2} + \text{grad } R = \frac{d^2 r}{dt^2} + \mathfrak{S},$$

d. h. wegen (163)

$$\delta v = \mathfrak{S} dt = (\text{grad } R) dt.$$

Diese Gleichung und die Gleichung (157), also die beiden Gleichungen:

$$(166) \quad \begin{cases} \delta r = 0 \\ \delta v = \mathfrak{S} dt = (\text{grad } R) dt \end{cases}$$

stellen die vektoriellen Grundgleichungen der Störungsrechnung dar.

§ 15. Die Klammerausdrücke von Lagrange. Die Schöpfer der Störungsrechnung haben die Grundgleichungen dieser Rechnung nicht in der vorstehend angegebenen kondensierten Form dargestellt, weil ihnen der Begriff des Vektors nicht

geläufig war, sie eben so wenig über den Apparat der Vektorenrechnung verfügten und nur mit skalaren Gleichungen zu operieren imstande waren. Um also zu der klassischen Form der Grundgleichungen der Störungsrechnung zu gelangen, müssen die vorstehenden vektoriellen Gleichungen auf die skalare Form gebracht werden. Kehren wir zu diesem Zwecke zu den Gleichungen (155) und (162) zurück! Dieselben lauten, wenn man mit Rücksicht auf (150) \mathfrak{F} durch r ersetzt,

$$(167) \quad \delta r = \frac{\partial r}{\partial c_1} dc_1 + \frac{\partial r}{\partial c_2} dc_2 + \cdots + \frac{\partial r}{\partial c_n} dc_n$$

$$(168) \quad \delta v = \frac{\partial v}{\partial c_1} dc_1 + \frac{\partial v}{\partial c_2} dc_2 + \cdots + \frac{\partial v}{\partial c_n} dc_n.$$

Hier sind rechts für r und v die auf die ungestörte Bewegung sich beziehenden Ausdrücke zu setzen. Setzt man die vorstehenden zwei Ausdrücke in (166) ein, so wird:

$$(169) \quad \frac{\partial r}{\partial c_1} \cdot \frac{dc_1}{dt} + \frac{\partial r}{\partial c_2} \cdot \frac{dc_2}{dt} + \cdots + \frac{\partial r}{\partial c_n} \cdot \frac{dc_n}{dt} = 0$$

$$(170) \quad \frac{\partial v}{\partial c_1} \cdot \frac{dc_1}{dt} + \frac{\partial v}{\partial c_2} \cdot \frac{dc_2}{dt} + \cdots + \frac{\partial v}{\partial c_n} \cdot \frac{dc_n}{dt} = \text{grad } R$$

oder, kürzer geschrieben,

$$(171) \quad \sum_j \frac{\partial r}{\partial c_j} \cdot \frac{dc_j}{dt} = 0$$

$$(172) \quad \sum_j \frac{\partial v}{\partial c_j} \cdot \frac{dc_j}{dt} = \text{grad } R.$$

Multipliziert man die Gleichung (172) skalar mit $\frac{\partial r}{\partial c_i}$, die Gleichung (171) skalar mit $-\frac{\partial v}{\partial c_i}$ und bildet die Summe, so wird:

$$(173) \quad \sum_j \left(\frac{\partial r}{\partial c_i} \cdot \frac{\partial v}{\partial c_j} - \frac{\partial r}{\partial c_j} \cdot \frac{\partial v}{\partial c_i} \right) \frac{dc_j}{dt} = \frac{\partial r}{\partial c_i} \text{grad } R.$$

Berücksichtigt man, dass

$$(174) \quad \frac{\partial r}{\partial c_i} \text{grad } R = \frac{\partial R}{\partial c_i}$$

$$(179) \quad \frac{\partial R}{\partial c_1} dc_1 + \frac{\partial R}{\partial c_2} dc_2 + \dots + \frac{\partial R}{\partial c_n} dc_n = 0.$$

Die durch die Veränderungen der Elemente $c_1, c_2 \dots c_n$ hervorgerufene Variation δR der Störungsfunktion ist also gleich Null.

Die Lagrange'schen Klammersausdrücke (175) weisen neben (178) noch folgende bemerkenswerte Eigenschaft auf. Differentiiert man den Ausdruck (175) partiell nach t und berücksichtigt, dass $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} = \mathbf{v}$; $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{p}$ den Geschwindigkeits- bzw. den Beschleunigungsvektor der ungestörten Bewegung veranschaulichen, so wird

$$\begin{aligned} \frac{\partial [c_i, c_j]}{\partial t} &= \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial c_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial c_j} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial c_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial c_j} - \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial c_j} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial c_i} - \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial c_j} \cdot \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial c_i} \\ \frac{\partial [c_i, c_j]}{\partial t} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial c_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial c_j} - \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial c_j} \cdot \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial c_i} \end{aligned}$$

Es folgt aus (148)

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{p} = -f(M+m) \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \text{grad } U,$$

wobei, wie sofort ersichtlich,

$$U = f(M+m) \frac{1}{r}$$

ist. Es ist deshalb:

$$(180) \quad \frac{\partial [c_i, c_j]}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial c_i} \cdot \frac{\partial \text{grad } U}{\partial c_j} - \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial c_j} \cdot \frac{\partial \text{grad } U}{\partial c_i}.$$

Es ist ferner:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial c_i} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial c_j} \text{grad } U \right) &= \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial c_i \partial c_j} \text{grad } U + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial c_i} \cdot \frac{\partial \text{grad } U}{\partial c_j} \\ \frac{\partial}{\partial c_i} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial c_j} \text{grad } U \right) &= \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial c_i \partial c_j} \text{grad } U + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial c_j} \cdot \frac{\partial \text{grad } U}{\partial c_i}. \end{aligned}$$

Subtrahiert man die zweite dieser Gleichungen von der ersten, so wird

die rechte Seite der derart gewonnenen Gleichung gleich der rechten Seite von (180), weil aber

$$\frac{\partial r}{\partial c_i} \text{grad } U = \frac{\partial U}{\partial c_i} \quad \frac{\partial r}{\partial c_j} \text{grad } U = \frac{\partial U}{\partial c_j}$$

ist, so bekommt man

$$\frac{\partial [c_i, c_j]}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial c_j} \left(\frac{\partial U}{\partial c_i} \right) - \frac{\partial}{\partial c_i} \left(\frac{\partial U}{\partial c_j} \right)$$

d. h.

$$(181) \quad \frac{\partial [c_i, c_j]}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial c_j \partial c_i} - \frac{\partial^2 U}{\partial c_i \partial c_j} = 0.$$

Dies besagt, dass in den Lagrange'schen Klammerausdrücken die Zeit t nicht explizit auftritt und deshalb diese Ausdrücke unabhängig sind von dem Zeitpunkt der ungestörten Bewegung, auf den sie sich beziehen.

§ 16. Berechnung der Lagrange'schen Klammerausdrücke für die vektoriellen Elemente. Die Berechnung der Lagrange'schen Klammerausdrücke ist, wenn man sich der elliptischen Elemente bedient, eine recht komplizierte und schwierige mathematische Arbeit, weil jede der möglichen Kombinationen dieser Elemente ihre besondere Methode und mathematische Spitzfindigkeit erheischt. Bei Benützung der vektoriellen Elemente erfolgt diese Berechnung für alle möglichen Kombinationen dieser Elemente auf eine und dieselbe Weise und wird dadurch standardisiert. Ueberdies genügt es, wie man sehen wird, nur fünf von den verschiedenen Klammerausdrücken zu berechnen, weil alle übrigen durch einfache zyklische Permutation aus den ersten fünf folgen.

Es war nach (98), (99), (93), (100), (74)

$$(182) \quad r = \frac{C^2}{\mu^2 - D^2} \cdot \frac{\mu \cos u - D}{D} \mathfrak{D} + \frac{C \sin u}{D \sqrt{\mu^2 - D^2}} [\mathfrak{E} \mathfrak{D}]$$

$$(183) \quad v = -\mu \frac{\sqrt{\mu^2 - D^2}}{CD} \cdot \frac{\sin u}{\mu - D \cos u} \mathfrak{D} + \frac{\mu^2 - D^2}{C^2 D} \cdot \frac{\cos u}{\mu - D \cos u} [\mathfrak{E} \mathfrak{D}]$$

$$(184) \quad \frac{(\mu^2 - D^2)^{\frac{3}{2}}}{C^3} (t - \tau) = \mu u - D \sin u$$

$$(185) \quad C^2 = C_1^2 + C_2^2 + C_3^2 \quad D^2 = D_1^2 + D_2^2 + D_3^2$$

$$(186) \quad C_1 D_1 + C_2 D_2 + C_3 D_3 = 0.$$

Es ist für die Berechnung der Lagrange'schen Klammerausdrücke erforderlich die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial r}{\partial C_i}, \quad \frac{\partial v}{\partial C_i}, \quad \frac{\partial r}{\partial D_i}, \quad \frac{\partial v}{\partial D_i}, \quad \frac{\partial r}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial v}{\partial \tau}$$

zu bilden, in denen C_i ein beliebiges der Elemente C_1, C_2, C_3 , und D_i ein beliebiges der Elemente D_1, D_2, D_3 bedeutet. Bei dieser Berechnung wird man sich mit Vorteil der soeben bewiesenen Eigenschaft der Lagrange'schen Klammerausdrücke bedienen, dass sie unabhängig sind vom Zeitpunkte der ungestörten Bewegung, auf den sie sich beziehen. Als diesen Zeitpunkt wird man den Zeitpunkt τ des Periheldurchganges wählen, für den wegen (184)

$$(187) \quad t = \tau; \quad u = 0$$

ist. Man hat also nach durchgeführter Differentiation der Ausdrücke (182) und (183) nach C_i bzw. D_i oder τ , wobei (184) und (185) zu berücksichtigen ist, in die erhaltenen Ausdrücke $t = \tau; u = 0$ zu setzen und zur Kenntlichmachung, dass sich die derart erhaltenen Ausdrücke auf den Zeitpunkt τ beziehen, dieselben einzuklammern. Auf diese Weise — diese Rechnung ist in meiner im Vorwort angeführten Abhandlung „Über die Verwendung vektorieller Bahnelemente in der Störungsrechnung“ ausführlich durchgeführt — bekommt man ohne irgend welche Schwierigkeit die nachstehenden Ausdrücke:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial r}{\partial C_i} \right) &= \frac{2C_i}{\mu + D} \mathfrak{D}_0 \\ \left(\frac{\partial v}{\partial C_i} \right) &= \frac{\mu + D}{C^2} [n_i \mathfrak{D}_0] - \frac{2C_i}{C^3} (\mu + D) [\mathfrak{C}_0 \mathfrak{D}_0] \\ \left(\frac{\partial r}{\partial D_i} \right) &= \frac{C^2}{D(\mu + D)} n_i - \frac{C^2 D_i}{D^2} \cdot \frac{\mu + 2D}{(\mu + D)^2} \mathfrak{D}_0 \\ \left(\frac{\partial v}{\partial D_i} \right) &= \frac{\mu + D}{CD} [\mathfrak{C}_0 n_i] - \mu \frac{D_i}{CD^2} [\mathfrak{C}_0 \mathfrak{D}_0] \\ \left(\frac{\partial r}{\partial \tau} \right) &= -\frac{\mu + D}{C} [\mathfrak{C}_0 \mathfrak{D}_0] \\ \left(\frac{\partial v}{\partial \tau} \right) &= \mu \frac{(\mu + D)^2}{C^4} \mathfrak{D}_0 \end{aligned}$$

Die partiellen Ableitungen $\left(\frac{\partial r}{\partial C_j}\right)$, $\left(\frac{\partial v}{\partial C_j}\right)$, $\left(\frac{\partial r}{\partial D_j}\right)$, $\left(\frac{\partial v}{\partial D_j}\right)$ werden erhalten, wenn man in den vorstehenden Ausdrücken den Index i mit j vertauscht.

Setzt man diese beiden Arten von partiellen Ableitungen in die Gleichung (175) ein, so bekommt man mit Berücksichtigung von (185) und (186) mittels den Grundregeln der Vektoranalysis die nachstehenden Gleichungen:

$$(188) \quad \left\{ \begin{array}{l} [C_i, C_j] = 0 \\ [C_i, D_j] = \frac{D_k}{D^2} \quad [C_j, D_i] = \frac{D_k}{D^2} \\ [D_i, D_j] = 0 \\ [C_i, \tau] = \frac{C_i}{C^4} (\mu^2 - D^2) \\ [D_i, \tau] = \frac{D_i}{C^3}, \end{array} \right.$$

wobei der Index k der Reihenfolge i, j, k entspricht, die zyklisch zu permutieren ist

Im vorliegenden Falle, wo man mit sieben Elementen $C_1, C_2, C_3, D_1, D_2, D_3, \tau$ zu tun hat, sind sieben Gleichungen von der Form (177) zu bilden, in denen 49 Lagrange'sche Klammerausdrücke vorkommen, doch hat man wegen (178) nur deren 21 zu bilden. Diese weisen nach (188) folgende Werte auf:

$$\begin{array}{lll} [C_1, C_2] = 0 & [C_2, C_3] = 0 & [C_3, C_1] = 0 \\ [C_1, D_2] = \frac{D_3}{D^2} & [C_2, D_3] = \frac{D_1}{D^2} & [C_3, D_1] = \frac{D_2}{D^2} \\ [C_1, D_1] = 0 & [C_2, D_2] = 0 & [C_3, D_3] = 0 \\ [D_1, C_2] = \frac{D_3}{D^2} & [D_2, C_3] = \frac{D_1}{D} & [D_3, C_1] = \frac{D_2}{D^2} \\ [D_1, D_2] = 0 & [D_2, D_3] = 0 & [D_3, D_1] = 0 \\ [C_1, \tau] = \frac{\mu^2 - D^2}{C^4} C_1 & [C_2, \tau] = \frac{\mu^2 - D^2}{C^4} C_2 & [C_3, \tau] = \frac{\mu^2 - D^2}{C^4} C_3 \\ [D_1, \tau] = \frac{D_1}{C^2} & [D_2, \tau] = \frac{D_2}{C^2} & [D_3, \tau] = \frac{D_3}{C^2} \end{array}$$

§ 17. Die Gleichungen der zeitlichen Aenderungen der vektoriellen Elemente. Setzt man in die Gleichungen (177)

$$c_1 = C_1; \quad c_2 = C_2; \quad c_3 = C_3; \quad c_4 = D_1; \quad c_5 = D_2; \quad c_6 = D_3; \quad c_7 = \tau,$$

ein, dann bekommt man mit den vorstehenden Werten der Langrange'schen Klammerausdrücke die nachstehenden sieben Gleichungen:

$$(189) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{D_3}{D^2} \cdot \frac{dD_2}{dt} - \frac{D_2}{D^2} \cdot \frac{dD_3}{dt} + \frac{\mu^2 - D^2}{C^4} C_1 \frac{d\tau}{dt} = \frac{\partial R}{\partial C_1} \\ \frac{D_1}{D^2} \cdot \frac{dD_3}{dt} - \frac{D_3}{D^2} \cdot \frac{dD_1}{dt} + \frac{\mu^2 - D^2}{C^4} C_2 \frac{d\tau}{dt} = \frac{\partial R}{\partial C_2} \\ \frac{D_2}{D^2} \cdot \frac{dD_1}{dt} - \frac{D_1}{D^2} \cdot \frac{dD_2}{dt} + \frac{\mu^2 - D^2}{C^4} C_3 \frac{d\tau}{dt} = \frac{\partial R}{\partial C_3} \end{array} \right.$$

$$(190) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{D_3}{D^2} \cdot \frac{dC_2}{dt} - \frac{D_2}{D^2} \cdot \frac{dC_3}{dt} + \frac{D_1}{C^2} \cdot \frac{d\tau}{dt} = \frac{\partial R}{\partial D_1} \\ \frac{D_1}{D^2} \cdot \frac{dC_3}{dt} - \frac{D_3}{D^2} \cdot \frac{dC_1}{dt} + \frac{D_2}{C^2} \cdot \frac{d\tau}{dt} = \frac{\partial R}{\partial D_2} \\ \frac{D_2}{D^2} \cdot \frac{dC_1}{dt} - \frac{D_1}{D^2} \cdot \frac{dC_2}{dt} + \frac{D_3}{C^2} \cdot \frac{d\tau}{dt} = \frac{\partial R}{\partial D_3} \end{array} \right.$$

$$(191) \quad \frac{\mu^2 - D^2}{C^4} \left\{ C_1 \frac{dC_1}{dt} + C_2 \frac{dC_2}{dt} + C_3 \frac{dC_3}{dt} \right\} + \\ + \frac{1}{C^2} \left\{ D_1 \frac{dD_1}{dt} + D_2 \frac{dD_2}{dt} + D_3 \frac{dD_3}{dt} \right\} = - \frac{\partial R}{\partial \tau}.$$

Die Gleichungen (189) bzw. (190) ergeben sich, wie ersichtlich, durch zyklische Permutation eine aus den anderen. Man kann diese sechs Gleichungen in zwei Vektorgleichungen kondensieren. Ich will mich dabei einer sehr vorteilhaften Bezeichnungsweise bedienen, die zuerst von A. Bilimovitch in die Mechanik eingeführt wurde ist; sie besteht im folgenden. Ist ein Skalar R eine Funktion zweier oder mehrerer Vektoren

$$a = a_1 n_1 + a_2 n_2 + a_3 n_3; \quad b = b_1 n_1 + b_2 n_2 + b_3 n_3; \quad \dots$$

d. h. der Koordinaten $a_1, a_2, a_3; b_1, b_2, b_3 \dots$ dieser Vektoren, dann kann der Ausdruck:

$$(192) \quad \frac{\partial R}{\partial a_1} n_1 + \frac{\partial R}{\partial a_2} n_2 + \frac{\partial R}{\partial a_3} n_3 = \text{grad}_a R$$

der partielle Gradient des Skalars R in bezug auf a , und

$$(193) \quad \frac{\partial R}{\partial b_1} n_1 + \frac{\partial R}{\partial b_2} n_2 + \frac{\partial R}{\partial b_3} n_3 = \text{grad}_b R$$

der partielle Gradient des Skalars R in bezug auf b genannt werden, was durch die obige Bezeichnungswiese gekennzeichnet erscheint. Ist R eine Funktion nur des Ortsvektors r , dann deckt sich der obige Begriff mit dem üblichen des Gradienten. Er stellt also eine Erweiterung des Begriffes des Gradienten dar. Macht man also von dieser Bezeichnungswiese Gebrauch, multipliziert die Gleichungen (189) mit D^2 und der Reihe nach mit $-n_1, -n_2, -n_3$ und addiert sie sodann, so wird, weil

$$\left[\mathfrak{D} \frac{d\mathfrak{D}}{dt} \right] = \begin{vmatrix} n_1 & n_2 & n_3 \\ D_1 & D_2 & D_3 \\ \frac{dD_1}{dt} & \frac{dD_2}{dt} & \frac{dD_3}{dt} \end{vmatrix}$$

ist,

$$(194) \quad \left[\mathfrak{D} \frac{d\mathfrak{D}}{dt} \right] - \frac{u^2 - l^2}{C^2} \cdot \frac{D^2}{C^2} \mathfrak{C} \frac{d\tau}{dt} + D^2 \text{grad}_{\mathfrak{C}} R = 0.$$

Multipliziert man die Gleichungen (190) mit D^2 und der Reihe nach mit $-n_1, -n_2, -n_3$ und addiert sie sodann, so wird, weil

$$\left[\mathfrak{D} \frac{d\mathfrak{C}}{dt} \right] = \begin{vmatrix} n_1 & n_2 & n_3 \\ D_1 & D_2 & D_3 \\ \frac{dC_1}{dt} & \frac{dC_2}{dt} & \frac{dC_3}{dt} \end{vmatrix}$$

ist,

$$(195) \quad \left[\mathfrak{D} \frac{d\mathfrak{C}}{dt} \right] - \frac{D^2}{C^2} \mathfrak{D} \frac{d\tau}{dt} + D^2 \text{grad}_{\mathfrak{D}} R = 0.$$

Auch die Gleichung (191) kann kondensiert werden. Es folgt nämlich aus (185):

$$\frac{dC^2}{dt} = 2C_1 \frac{dC_1}{dt} + 2C_2 \frac{dC_2}{dt} + 2C_3 \frac{dC_3}{dt}$$

$$\frac{dD^2}{dt} = 2D_1 \frac{dD_1}{dt} + 2D_2 \frac{dD_2}{dt} + 2D_3 \frac{dD_3}{dt},$$

so dass (191) wie folgt geschrieben werden kann:

$$\frac{\mu^2 - D^2}{C^4} \cdot \frac{dC^2}{dt} + \frac{1}{C^2} \cdot \frac{dD^2}{dt} = -2 \frac{\partial R}{\partial \tau}.$$

Es ist nun:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\mu^2 - D^2}{C^2} \right) - \frac{1}{C^4} \left\{ -C^2 \frac{dD^2}{dt} - (\mu^2 - D^2) \frac{dC^2}{dt} \right\} = -\frac{\mu^2 - D^2}{C^4} \cdot \frac{dC^2}{dt} - \frac{1}{C^2} \cdot \frac{dD^2}{dt},$$

so dass die vorangehende Gleichung die Form erhält:

$$(196) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\mu^2 - D^2}{C^2} \right) = 2 \frac{\partial R}{\partial \tau}.$$

In den drei Gleichungen (194), (195), (196), d. h. in:

$$(197) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left[\mathfrak{D} \frac{d\mathfrak{C}}{dt} \right] - \frac{\mu^2 - D^2}{C^2} \cdot \frac{D^2}{C^2} \mathfrak{C} \frac{d\tau}{dt} + D^2 \text{grad}_{\mathfrak{C}} R = 0 \\ \left[\mathfrak{D} \frac{d\mathfrak{D}}{dt} \right] - \frac{D^2}{C^2} \mathfrak{D} \frac{d\tau}{dt} + D^2 \text{grad}_{\mathfrak{D}} R = 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\mu^2 - D^2}{C^2} \right) = 2 \frac{\partial R}{\partial \tau} \end{array} \right.$$

finden sich alle die zeitlichen Aenderungen der Elemente $C_1, C_2, C_3, D_1, D_2, D_3, \tau$ bestimmenden Gleichungen zusammengefasst. Die Gleichung (186), d. h.

$$(198) \quad C_1 D_1 + C_2 D_2 + C_3 D_3 = 0$$

stellt ein Integral der obigen Differentialgleichungen dar.

Aus den Gleichungen (189) folgt noch eine bemerkenswerte. Multipliziert man diese Gleichungen mit D^2 und noch der Reihe nach mit D_1, D_2, D_3 und addiert sie sodann, so bekommt man:

$$\frac{\mu^2 - D^2}{C^4} (C_1 D_1 + C_2 D_2 + C_3 D_3) = D^2 \left\{ D_1 \frac{\partial R}{\partial C_1} + D_2 \frac{\partial R}{\partial C_2} + D_3 \frac{\partial R}{\partial C_3} \right\}$$

d. h. wegen (198) die Gleichung :

$$(199) \quad D_1 \frac{\partial R}{\partial C_1} + D_2 \frac{\partial R}{\partial C_2} + D_3 \frac{\partial R}{\partial C_3} = 0$$

§ 18. Periodische und säkulare Störungen; die Bedeutung dieser letzteren für die Ziele der nachstehenden Forschungen. Der Weg, den ich hier eingeschlagen habe und der mich zur Ableitung der vorstehenden Gleichungen geführt hat, ist nicht derjenige, den man in der Himmelsmechanik bisher gegangen ist. Die klassische Theorie der Planetenbewegung hat, wie bereits erwähnt, von allem Anfang an zu ihrem Aufbau die elliptischen Elemente als Bausteine verwendet. Diese aus der beobachtenden Astronomie übernommenen Elemente sind, wenn man die Planetenbewegung als ein vorzüglich mechanisches Problem auffasst, demselben wesensfremd. Dies beweisen die grossen mathematischen Schwierigkeiten, die man bei der Ableitung der Grundgleichungen der Planetenbewegung zu überwinden hatte, wie dies aus dem Chapitre X des erstes Bandes des grossen Tisserand'schen Werkes „Traité de Mécanique Céleste“ oder aus dem Livre II des Souchon'schen Werkes „Traité d'Astronomie théorique“ deutlich ersichtlich ist; dies beweist auch der komplizierte und unsymmetrische Bau der auf diese Weise gewonnenen Grundgleichungen, die hier zum Vergleich mit den Gleichungen (197) wiedergeben werden mögen :

$$(200) \left\{ \begin{array}{l} \frac{da}{dt} = \frac{2}{na} \cdot \frac{\partial R}{\partial e} \\ \frac{de}{dt} = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \cdot \frac{\partial R}{\partial \Pi} - \sqrt{1-e^2} \frac{1-\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \cdot \frac{\partial R}{\partial e} \\ \frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{2}{na} \cdot \frac{\partial R}{\partial a} + \frac{\operatorname{tang} \frac{i}{2}}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \cdot \frac{\partial R}{\partial i} + \sqrt{1-e^2} \frac{1-\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \cdot \frac{\partial R}{\partial e} \\ \frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \cdot \frac{\partial R}{\partial i} \\ \frac{di}{dt} = -\frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \cdot \frac{\partial R}{\partial \Omega} - \frac{\operatorname{tang} \frac{i}{2}}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \left(\frac{\partial R}{\partial \Pi} + \frac{\partial R}{\partial e} \right) \\ \frac{d\Pi}{dt} = \frac{\operatorname{tang} \frac{i}{2}}{na \sqrt{1-e^2}} \cdot \frac{\partial R}{\partial i} + \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \cdot \frac{\partial R}{\partial e} \end{array} \right.$$

Durch Einführung der sogenannten kanonischen Elemente wurde ein mathematisches Auskunftsmittel gewonnen, durch das man die Schwierigkeiten bei der Ableitung dieser Grundgleichungen beheben konnte, um, nachdem dies geschehen war, wieder bei den elliptischen Elementen zu verbleiben.

Ich habe in meiner vorstehend angeführten akademischen Abhandlung gezeigt, wie der Uebergang von den hier gewonnenen Gleichungen (197) auf die Gleichungen (200) auf sehr einfache Weise bewerkstelligt werden kann, so dass die hier benützten vektoriellen Elemente, ähnlich wie es die kanonischen Elemente gewesen sind, als ein bequemes intermediäres Hilfsmittel zur Ableitung der klassischen Grundgleichungen betrachtet werden könnten. Doch diese episodische Rolle war den hier zur Anwendung gebrachten vektoriellen Elementen nicht zugehört. Der Zweck meiner diesbezüglichen Untersuchungen war vielmehr, das Problem der Planetenbewegung in jenem Umfange, der für meine nachstehenden Forschungen in Betracht kommt, mit Benützung der vektoriellen Elemente vollständig zu lösen, ohne auf die elliptischen Elemente zurückgreifen zu müssen, also den hier eingeschlagenen neuen Weg bis zum Endziele zu verfolgen. Dieses Ziel soll jetzt näher gekennzeichnet werden, weshalb es erforderlich ist, der klassischen Theorie der Planetenbewegung einige Worte zu widmen.

Entwickelt man die Störungsfunktion nach den elliptischen Elementen in eine Reihe, dann weist diese, wenn man der Einfachheit halber und unbeschadet den nachstehenden Ausführungen nur eine der störenden Massen m' in Betracht zieht, die folgende Form auf:

$$(201) \quad R = fm' \sum C \cos D,$$

worin die Koeffizienten C nur Funktionen der Elemente a, e, i des gestörten und der Elemente a', e', i' des störenden Planeten sind, also die Form aufweisen:

$$(202) \quad C = F(a, a', e, e', i, i'),$$

während das Argument D durch den Ausdruck :

$$(203) \quad D = (jn + j'n')t + j\varepsilon + j'\varepsilon' + k\Pi + k'\Pi' + s\Omega + s'\Omega'$$

veranschaulicht erscheint, worin $n, \varepsilon, \Pi, \Omega$ die Elemente des gestörten, $n', \varepsilon', \Pi', \Omega'$ jene des störenden Planeten darstellen und j, k, s, j', k', s' der Zahlenreihe $\dots -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3 \dots$ angehören.

Die Integration der Differentialgleichungen (200) kann nur schrittweise durchgeführt werden, indem nacheinander die sogenannten Störungen erster, zweiter, dritter usw. Ordnung berechnet werden. Die Störungen erster Ordnung, die man mit $\delta_1 a, \delta_1 \Omega, \delta_1 e \dots$ zu bezeichnen pflegt, werden erhalten, wenn man alle elliptischen Elemente, die explizit oder durch Vermittlung der Funktion R auf den rechten Seiten der Gleichungen vorkommen, als konstant betrachtet und sie mit dem Index Null behaftet. Mit diesem Index wird auch die Funktion R versehen, in der jetzt nur die Zeit t als veränderlich zu betrachten ist. Dadurch werden die

rechten Seiten der Gleichungen (200) zu einfachen trigonometrischen Funktionen der Zeit t allein. Dort, wo die partiellen Ableitungen $\frac{\partial R}{\partial a}$, $\frac{\partial R}{\partial e}$, $\frac{\partial R}{\partial i}$ der Funktion R nach den im Argument D nicht vorkommenden Elementen a, e, i stehen, erscheint $\cos D$, dort, wo die partiellen Ableitungen $\frac{\partial R}{\partial \varepsilon}$, $\frac{\partial R}{\partial \Pi}$, $\frac{\partial R}{\partial \Omega}$ der Funktion R nach den im Argument D vorkommenden Elementen ε, Π, Ω stehen, erscheint $\sin D$. Nach Durchführung der Integration dieser Differentialgleichungen, die auf die Quadraturen

$$\int \cos D dt \qquad \int \sin D dt$$

hinausläuft, werden an Stelle dieser Quadraturen die Glieder

$$\frac{\sin D}{j n_0 + j' n_0'} \qquad \frac{\cos D}{j n_0 + j' n_0'}$$

zu Tage treten. Auf diese Weise werden die Störungen erster Ordnung durch eine Reihe trigonometrischer Glieder veranschaulicht erscheinen. Nur an jenen Stellen der rechten Seiten der Gleichungen (200), wo $j=0$; $j'=0$ ist, wo also das Argument D und dadurch auch dessen Sinus und Cosinus als Konstante auftreten, wird

$$\int \cos D dt = t \cos D \qquad \int \sin D dt = t \sin D,$$

so dass diese Glieder proportional der Zeit t werden.

Durch diesen ersten Schritt der Rechnung wird ein beliebiges der elliptischen Elemente, das wir mit c bezeichnen wollen, durch

$$(204) \qquad c = c_0 + \delta_1 c_0$$

als Funktion der Zeit t veranschaulicht erscheinen, wobei c_0 seinen der Entwicklung zugrunde gelegten Anfangswert bedeutet. Dabei ist, wie dies aus (201) folgt, $\delta_1 c_0$ der ersten Potenz der störenden Masse m' proportional.

Die Berechnung der Störungen zweiter Ordnung, die mit $\delta_2 c_0$ bezeichnet werden, besteht im wesentlichen in der Wiederholung des soeben geschilderten Vorganges, wobei man in die Gleichungen (200) an Stelle der elliptischen Elemente links $c = c_0 + \delta_1 c_0 + \delta_2 c_0$ und rechts den Ausdruck (204) einsetzt und hier die dadurch erhaltenen Funktionen in eine Taylorsche Reihe entwickelt und sich mit den ersten Potenzen von $\delta_1 c_0$ zufriedenstellt. Diese Funktionen sind wegen (201) der zweiten Potenz der störenden Masse proportional.

Auf ähnliche Weise werden auch die Störungen höherer Ordnung erhalten, so dass die endgültigen Ausdrücke für die Gesamtstörung eines beliebigen der elliptischen Elemente von der Form sein werden

$$(205) \quad c = c_0 + \delta_1 c_0 + \delta_2 c_0 + \delta_3 c_0 + \dots$$

Dabei ist in bezug auf die störende Masse m' das Glied c_0 von nullter Ordnung und wird aus den Initialbedingungen direkt erhalten; das Glied $\delta_1 c_0$ ist von erster, das Glied $\delta_2 c_0$ von zweiter Ordnung usw. Weil dabei die störenden Massen, die mit der Sonnenmasse gemessen werden, durch sehr kleine Zahlen dargestellt erscheinen, nehmen die Glieder der obigen Reihe sehr rasch ab, was eine Voraussetzung des soeben geschilderten Vorganges gewesen ist.

Bei der Berechnung der Störungen höherer Ordnung geben, wie leicht einzusehen, die vorher erwähnten trigonometrischen Glieder Anlass zu ebensolchen neuen Gliedern, während die der Zeit proportionalen Glieder Anlass zu Gliedern geben, die den zugehörigen Potenzen der Zeit t proportional sind. Es kommen also in den Reihen, durch welche die Gesamtstörungen der elliptischen Elemente dargestellt erscheinen, zwei verschiedene Arten von Gliedern vor: jene, die einfache trigonometrische Funktionen der Zeit t sind, und jene, die der Zeit t bzw. ihren Potenzen proportional sind. Die Glieder erster Art werden periodische, jene der zweiten Art säkulare Glieder genannt. Demzufolge werden die durch diese zwei Arten von Gliedern dargestellten Störungen in periodische und säkulare unterschieden.

Die Länge der Periode der periodischen Glieder, die einfache trigonometrische Funktionen des Argumentes

$$(jn_0 + j'n'_0)t + j\varepsilon_0 + j'\varepsilon'_0 + k\Pi_0 + k'\Pi'_0 + s\Omega_0 + s'\Omega'_0$$

sind, in dem nur t als Veränderliche zu betrachten ist, erscheint durch den Ausdruck

$$T = \frac{2\pi}{jn_0 + j'n'_0}$$

veranschaulicht. Sie hängt von der mittleren Bewegung n_0 des gestörten und der mittleren Bewegung n'_0 des jeweils in Betracht gezogenen störenden Planeten ab und ist um so länger je kleiner der numerische Wert des Ausdrucks $(jn_0 + j'n'_0)$ ist. Auch die Amplitude der Störung wird, weil, wie gezeigt, derselbe Ausdruck im Nenner des Koeffizienten der betreffenden trigonometrischen Funktion vorkommt, um so grosser je kleiner der erwähnte numerische Wert ist. Trotz allen dem schwanken die periodischen Störungen zwischen engen Grenzen und auch ihre Periode überschreitet nicht einen sogleich anzugebbaren Wert.

Der vorstehende Ausdruck würde für die Periode T einen unendlichen Wert ergeben, wenn

$$jn_0 + j'n'_0 = 0 \quad \text{d. h.} \quad \frac{n_0}{n'_0} = -\frac{j'}{j}$$

wäre, d. h. wenn, weil j und j' ganze Zahlen bedeuten, die mittleren Bewegungen n_0 und n'_0 kommensurabel wären. Dieser ideale Fall ist in unserem Planetensystem nirgends verwirklicht, die mittleren Bewegungen von Jupiter und Saturn kommen ihm aber recht nahe. Es ist nämlich für diese zwei Planeten

$$n_0 = 299'' 13 \quad n'_0 = 120'' 45,$$

so dass $2n_0$ fast gleich $5n'_0$ ist. Aus diesem Grunde rufen die Glieder der Störungsfunktion, für die $j = 2$; $j' = -5$ ist, Störungen langer Periode hervor. Weil hier genügend genau

$$5n'_0 - 2n_0 = \frac{1}{74}n_0$$

ist, weist diese Periode eine Länge auf, die 74-mal grösser ist als die Umlaufszeit von Jupiter um die Sonne und beträgt deshalb rund 900 Jahre. Während dieser Periode erschleint der Umlauf des einen dieser Planeten vorerst beschleunigt, der Umlauf des anderen verzögert, bis sich nachher das Verhältnis umkehrt und die Beschleunigung in eine Verzögerung und die Verzögerung in eine Beschleunigung übergeht. Die dadurch hervorgerufenen Störungen der mittleren Längen dieser beiden Planeten sind nicht unbeträchtlich und erreichen für Saturn den Wert von rund $50'$.

Ich werde mich bei meinen Forschungen nur mit den Störungen der Erdbahnelemente zu beschäftigen haben. Die periodischen Störungen dieser Elemente sind derart gering, dass sie aus dem Bereich meiner Untersuchungen ganz und gar ausscheiden.

Anders steht es mit den säkularen Aenderungen dieser Elemente. Sie sind von ausschlaggebendem Einfluss auf den Bestrahlungsgang der Erde, den ich auf Hunderte von Jahrtausenden in die Vorzeit zu verfolgen haben werde. Für solche Zeiträume sind die soeben besprochenen Ausdrücke für die säkularen Störungen, die von der Form sind:

$$(206) \quad c = c_0 + k_1 t + k_2 t^2 + k_3 t^3 + \dots$$

nicht verwendbar; sie dienen den Zwecken der beobachtenden Astronomie und können nur für Zeitintervalle angewendet werden, die sich auf Jahrhunderte, aber nicht auf die soeben angegebenen erstrecken.

Für Zeiträume, die weit über die Bedürfnisse der beobachtenden Astronomie hinausreichen, muss zwecks Ermittlung der säkularen Störungen ein anderer Weg eingeschlagen werden, den schon Lagrange und Laplace betreten ha-

ben und der nach langen Umwegen auf die hier von allem Anfang an benützten vektoriellen Elemente und nur dadurch zum Ziele geführt hat. Ich kann mit Benützung der vorstehend gewonnen Ergebnisse dieses Ziel ohne jene Umwege geradlinig erreichen.

§ 19. Die Differentialgleichungen der säkularen Aenderungen der vektoriellen Elemente. Die von Lagrange und Laplace angewendete Methode, die säkularen Aenderungen der astronomischen Elemente zu berechnen, besteht in ihrem ersten Schritt darin, dass man aus der Störungsfunktion R jenen Teil herausschält, der von der Zeit t unabhängig ist. In der Störungsfunktion R kommt, wie aus (201) und (203) ersichtlich, die Zeit t immer in Verbindung mit ε vor, weil in dem Argument D das Additionsglied $(nt + \varepsilon)$, versehen mit einem Faktor vorkommt. Setzt man in (203) für ε den Ausdruck (113) ein, so erscheint als ständiger Begleiter von t das Element τ in der Form $n(t - \tau)$, wie es auch in der Kepler'schen Gleichung (86) der Fall gewesen ist, die ja den Ausgangspunkt der Entwicklung der Störungsfunktion gebildet hat. Unterdrückt man also in der Störungsfunktion R alle Glieder, in denen t vorkommt, dann verschwindet aus derselben auch das Element τ . Der verbleibende Rest, den man den säkularen Teil der Störungsfunktion nennt und der mit R_0 bezeichnet werden möge, erscheint also durch

$$(207) \quad \frac{\partial R_0}{\partial \tau} = 0$$

gekennzeichnet. Setzt man dies in die Gleichung (196) ein, so wird:

$$(208) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\mu^2 - D^2}{C^2} \right) = 0.$$

Dies besagt, dass der Ausdruck $\frac{\mu^2 - D^2}{C^2}$ säkular unveränderlich ist.

Nun ist wegen (76)

$$(209) \quad \frac{\mu^2 - D^2}{C^2} = \frac{\mu}{a}.$$

Aus den vorstehenden zwei Gleichungen folgt, dass die grossen Halbachsen der Planetenbahnen keinen säkularen Aenderungen unterliegen, ein Ergebnis, zu dem zuerst Laplace gelangte.

Weil nach (81)

$$(210) \quad n^2 a^3 = \mu$$

ist, worin μ eine Konstante bedeutet, so sind auch die mittleren Bewegungen der Planeten säkular unveränderlich.

Um also die Differentialgleichungen für die säkularen Aenderungen der vektoriellen Elemente direkt zu erhalten, hat man (207), (209), (210) in die Gleichungen (189), (190), (196) einzusetzen und mit Berücksichtigung von (198) diese Gleichungen nach den zeitlichen Ableitungen der Elemente, d. h. nach $\frac{dC_1}{dt}$, $\frac{dC_2}{dt}$, $\frac{dC_3}{dt}$, $\frac{dD_1}{dt}$, $\frac{dD_2}{dt}$, $\frac{dD_3}{dt}$ aufzulösen.

Ich kann mir diese Elimination ersparen, weil ich es nicht unterlassen möchte, noch eine andere Methode hier anzugeben, durch die man die Gleichungen für die säkularen Aenderungen der vektoriellen Elemente gerade in der gewünschten jene Ableitungen explizit gebenden Form erhält. Diese Methode, die für die elliptischen Elemente mit vielen Umständlichkeiten zuerst von Pontécoulant Anwendung gefunden hat, besteht im folgendem.

Weil die Vektoren r und v Funktionen der zur Variation bestimmten Elemente sind, sind auch diese Elemente Funktionen von r und v , d. h. Funktionen der Koordinaten x, y, z bzw. v_1, v_2, v_3 dieser beiden Vektoren. Für die vektoriellen Elemente erscheint diese Inversion durch die Gleichungen (49) und (52) auf die einfachste Weise durchgeführt. Sei also c_i ein beliebiges der vektoriellen Elemente oder ein beliebiges der sonstigen zur Variation benutzten Elemente, dann ist, weil nach (116) durch die Variation der Ortsvektor r unberührt bleiben soll,

$$(211) \quad \frac{dc_i}{dt} = \frac{\partial c_i}{\partial v_1} \cdot \frac{dv_1}{dt} + \frac{\partial c_i}{\partial v_2} \cdot \frac{dv_2}{dt} + \frac{\partial c_i}{\partial v_3} \cdot \frac{dv_3}{dt}.$$

Die Gleichung (166)₂ kann auch wie folgt geschrieben werden:

$$\frac{dv_1}{dt} n_1 + \frac{dv_2}{dt} n_2 + \frac{dv_3}{dt} n_3 = \frac{\partial R}{\partial x} n_1 + \frac{\partial R}{\partial y} n_2 + \frac{\partial R}{\partial z} n_3.$$

Multipliziert man diese Gleichung der Reihe nach mit n_1, n_2, n_3 , so bekommt man:

$$\frac{dv_1}{dt} = \frac{\partial R}{\partial x} \quad \frac{dv_2}{dt} = \frac{\partial R}{\partial y} \quad \frac{dv_3}{dt} = \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Setzt man dies in (211) ein, so wird

$$(212) \quad \frac{dc_i}{dt} = \frac{\partial c_i}{\partial v_1} \cdot \frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial c_i}{\partial v_2} \cdot \frac{\partial R}{\partial y} + \frac{\partial c_i}{\partial v_3} \cdot \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Es ist

$$(213) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial R}{\partial c_1} \cdot \frac{\partial c_1}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial c_2} \cdot \frac{\partial c_2}{\partial x} + \dots + \frac{\partial R}{\partial c_n} \cdot \frac{\partial c_n}{\partial x} \\ \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial R}{\partial c_1} \cdot \frac{\partial c_1}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial c_2} \cdot \frac{\partial c_2}{\partial y} + \dots + \frac{\partial R}{\partial c_n} \cdot \frac{\partial c_n}{\partial y} \\ \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial c_1} \cdot \frac{\partial c_1}{\partial z} + \frac{\partial R}{\partial c_2} \cdot \frac{\partial c_2}{\partial z} + \dots + \frac{\partial R}{\partial c_n} \cdot \frac{\partial c_n}{\partial z} \end{array} \right.$$

$$(214) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial R}{\partial v_1} = \frac{\partial R}{\partial c_1} \cdot \frac{\partial c_1}{\partial v_1} + \frac{\partial R}{\partial c_2} \cdot \frac{\partial c_2}{\partial v_1} + \dots + \frac{\partial R}{\partial c_n} \cdot \frac{\partial c_n}{\partial v_1} = 0 \\ \frac{\partial R}{\partial v_2} = \frac{\partial R}{\partial c_1} \cdot \frac{\partial c_1}{\partial v_2} + \frac{\partial R}{\partial c_2} \cdot \frac{\partial c_2}{\partial v_2} + \dots + \frac{\partial R}{\partial c_n} \cdot \frac{\partial c_n}{\partial v_2} = 0 \\ \frac{\partial R}{\partial v_s} = \frac{\partial R}{\partial c_1} \cdot \frac{\partial c_1}{\partial v_s} + \frac{\partial R}{\partial c_2} \cdot \frac{\partial c_2}{\partial v_s} + \dots + \frac{\partial R}{\partial c_n} \cdot \frac{\partial c_n}{\partial v_s} = 0. \end{array} \right.$$

Weil die Störungsfunction R keine Funktion der Geschwindigkeit v bzw. deren Koordinaten v_1, v_2, v_3 ist, sind die Ausdrücke (214) gleich Null. Setzt man also die Ausdrücke (213) in (212) ein und addiert hinzu die Ausdrücke (214), nachdem man sie vorher der Reihe nach mit $-\frac{\partial c_i}{\partial x}, -\frac{\partial c_i}{\partial y}, -\frac{\partial c_i}{\partial z}$ multipliziert hat, dann bekommt man:

$$\begin{aligned} \frac{dc_i}{dt} = & \frac{\partial R}{\partial c_i} \left\{ \frac{\partial c_i}{\partial v_1} \cdot \frac{\partial c_1}{\partial x} + \frac{\partial c_i}{\partial v_2} \cdot \frac{\partial c_1}{\partial y} + \frac{\partial c_i}{\partial v_3} \cdot \frac{\partial c_1}{\partial z} - \frac{\partial c_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial c_1}{\partial v_1} - \frac{\partial c_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial c_1}{\partial v_2} - \frac{\partial c_i}{\partial z} \cdot \frac{\partial c_1}{\partial v_3} \right\} + \\ & + \frac{\partial R}{\partial c_2} \left\{ \frac{\partial c_i}{\partial v_1} \cdot \frac{\partial c_2}{\partial x} + \frac{\partial c_i}{\partial v_2} \cdot \frac{\partial c_2}{\partial y} + \frac{\partial c_i}{\partial v_3} \cdot \frac{\partial c_2}{\partial z} - \frac{\partial c_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial c_2}{\partial v_1} - \frac{\partial c_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial c_2}{\partial v_2} - \frac{\partial c_i}{\partial z} \cdot \frac{\partial c_2}{\partial v_3} \right\} + \\ & \dots \\ & + \frac{\partial R}{\partial c_n} \left\{ \frac{\partial c_i}{\partial v_1} \cdot \frac{\partial c_n}{\partial x} + \frac{\partial c_i}{\partial v_2} \cdot \frac{\partial c_n}{\partial y} + \frac{\partial c_i}{\partial v_3} \cdot \frac{\partial c_n}{\partial z} - \frac{\partial c_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial c_n}{\partial v_1} - \frac{\partial c_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial c_n}{\partial v_2} - \frac{\partial c_i}{\partial z} \cdot \frac{\partial c_n}{\partial v_3} \right\}. \end{aligned}$$

Diese Gleichung kann mit Benützung der durch (192) und (193) festgelegten Bezeichnungsweise einfacher wie folgt geschrieben werden:

$$(215) \quad \frac{dc_i}{dt} = \frac{\partial R}{\partial c_1} \left\{ \text{grad}_{\mathbf{D}} c_i \text{grad}_{\mathbf{r}} c_1 - \text{grad}_{\mathbf{r}} c_i \text{grad}_{\mathbf{D}} c_1 \right\} +$$

$$+ \frac{\partial R}{\partial c_2} \left\{ \text{grad}_{\mathbf{D}} c_i \text{grad}_{\mathbf{r}} c_2 - \text{grad}_{\mathbf{r}} c_i \text{grad}_{\mathbf{D}} c_2 \right\} +$$

$$\dots \dots \dots$$

$$+ \frac{\partial R}{\partial c_n} \left\{ \text{grad}_{\mathbf{D}} c_i \text{grad}_{\mathbf{r}} c_n - \text{grad}_{\mathbf{r}} c_i \text{grad}_{\mathbf{D}} c_n \right\}.$$

Führt man der kürzeren Schreibweise halber die symbolische Bezeichnung ein:

$$(216) \quad (c_i, c_j) = \text{grad}_{\mathbf{D}} c_i \text{grad}_{\mathbf{r}} c_j - \text{grad}_{\mathbf{r}} c_i \text{grad}_{\mathbf{D}} c_j,$$

dann bekommt man statt (215)

$$(217) \quad \frac{dc_i}{dt} = \sum_j (c_i, c_j) \frac{\partial R}{\partial c_j}.$$

Der Ausdruck (216) wird der Klammerausdruck von Poisson genannt, weil er von Poisson und zwar in der vorhergehenden analytisch entwickelteren Form in die Mathematik eingeführt worden ist.

Weil die Gleichung (217) für $i = 1, 2, \dots, n$ gültig ist, sind dadurch die zur Bestimmung der zeitlichen Aenderungen der Elemente erforderlichen Gleichungen und zwar in der gewünschten nach $\frac{dc_i}{dt}$ expliziten Form gewonnen.

Auch für die Poisson'schen Klammerausdrücke gelten, wie aus (216) sofort ersichtlich, die Beziehungen

$$(218) \quad (c_i, c_i) = 0 \quad (c_j, c_i) = - (c_i, c_j).$$

In diesen Ausdrücken kommt ebenso wenig wie in den Lagrange'schen die Zeit explizit vor, wovon wir uns in der Folge überzeugen werden.

Führt man in die Gleichungen (217) die vektoriellen Elemente ein, d. h. setzt man darin

$$c_1 = C_1; \quad c_2 = C_2; \quad c_3 = C_3; \quad c_4 = D_1; \quad c_5 = D_2; \quad c_6 = D_3; \quad c_7 = \tau$$

und berücksichtigt (218), dann bekommt man die für die Ermittlung der zeitlichen Aenderungen der vektoriellen Elemente erforderlichen sieben Gleichungen.

Ich habe in meiner erwähnten akademischen Abhandlung die in diesen Gleichungen vorkommenden Klammerausdrücke berechnet und dadurch das vollständige System der Differentialgleichungen der vektoriellen Elemente gewonnen, das sich, wie gehörig, als dem System (189), (190), (191) äquivalent erwiesen hat. Hier werde ich mich, weil bei meinen nachstehenden Forschungen nur die säkularen Aenderungen der astronomischen Elemente in Betracht zu ziehen sein werden, damit begnügen, das erwähnte Gleichungssystem für den Fall

$$R = R_0$$

d. h. für den säkularen Teil der Störungsfunktion zu entwickeln. In diesem Falle ist in die Gleichungen (217)

$$\frac{\partial R_0}{\partial \tau} = 0$$

einzusetzen und man bekommt dann das nachstehende Gleichungssystem:

$$(219) \left\{ \begin{array}{l} \frac{dC_1}{dt} = (C_1, C_2) \frac{\partial R_0}{\partial C_2} + (C_1, C_3) \frac{\partial R_0}{\partial C_3} + (C_1, D_1) \frac{\partial R_0}{\partial D_1} + (C_1, D_2) \frac{\partial R_0}{\partial D_2} + (C_1, D_3) \frac{\partial R_0}{\partial D_3} \\ \frac{dC_2}{dt} = (C_2, C_1) \frac{\partial R_0}{\partial C_1} + (C_2, C_3) \frac{\partial R_0}{\partial C_3} + (C_2, D_1) \frac{\partial R_0}{\partial D_1} + (C_2, D_2) \frac{\partial R_0}{\partial D_2} + (C_2, D_3) \frac{\partial R_0}{\partial D_3} \\ \frac{dC_3}{dt} = (C_3, C_1) \frac{\partial R_0}{\partial C_1} + (C_3, C_2) \frac{\partial R_0}{\partial C_2} + (C_3, D_1) \frac{\partial R_0}{\partial D_1} + (C_3, D_2) \frac{\partial R_0}{\partial D_2} + (C_3, D_3) \frac{\partial R_0}{\partial D_3} \\ \frac{dD_1}{dt} = (D_1, C_1) \frac{\partial R_0}{\partial C_1} + (D_1, C_2) \frac{\partial R_0}{\partial C_2} + (D_1, C_3) \frac{\partial R_0}{\partial C_3} + (D_1, D_2) \frac{\partial R_0}{\partial D_2} + (D_1, D_3) \frac{\partial R_0}{\partial D_3} \\ \frac{dD_2}{dt} = (D_2, C_1) \frac{\partial R_0}{\partial C_1} + (D_2, C_2) \frac{\partial R_0}{\partial C_2} + (D_2, C_3) \frac{\partial R_0}{\partial C_3} + (D_2, D_1) \frac{\partial R_0}{\partial D_1} + (D_2, D_3) \frac{\partial R_0}{\partial D_3} \\ \frac{dD_3}{dt} = (D_3, C_1) \frac{\partial R_0}{\partial C_1} + (D_3, C_2) \frac{\partial R_0}{\partial C_2} + (D_3, C_3) \frac{\partial R_0}{\partial C_3} + (D_3, D_1) \frac{\partial R_0}{\partial D_1} + (D_3, D_2) \frac{\partial R_0}{\partial D_2} \end{array} \right.$$

Die Berechnung der in diesen Gleichungen vorkommenden Klammerausdrücke geschieht auf folgende Weise.

Stellt man in den Ausdrücken (49) und (52) die Vektoren r , v und \mathfrak{C} durch ihre Koordinaten $x, y, z; v_1, v_2, v_3; C_1, C_2, C_3$ dar, dann wird

$$\mathfrak{C} = \begin{vmatrix} n_1 & n_2 & n_3 \\ x & y & z \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

$$\mathfrak{D} = \begin{vmatrix} n_1 & n_2 & n_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} - \frac{\mu}{r} (x n_1 + y n_2 + z n_3)$$

d. h.

$$(220) \quad \begin{cases} C_1 = v_3 y - v_2 z \\ C_2 = v_1 z - v_3 x \\ C_3 = v_2 x - v_1 y \end{cases}$$

$$(221) \quad \begin{cases} D_1 = v_2 C_3 - v_3 C_2 - \frac{\mu}{r} x \\ D_2 = v_3 C_1 - v_1 C_3 - \frac{\mu}{r} y \\ D_3 = v_1 C_2 - v_2 C_1 - \frac{\mu}{r} z \end{cases}$$

Es ist dabei:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

d. h.

$$(222) \quad \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$$

Es folgt aus den vorstehenden Gleichungen mit Benützung der Bezeichnungsweise (192)

$$(223) \quad \begin{cases} \text{grad}_0 C_1 = y n_3 - z n_2 \\ \text{grad}_0 C_2 = z n_1 - x n_3 \\ \text{grad}_0 C_3 = x n_2 - y n_1 \end{cases}$$

$$(224) \quad \begin{cases} \text{grad}_1 C_1 = v_3 n_2 - v_2 n_3 \\ \text{grad}_1 C_2 = v_1 n_3 - v_3 n_1 \\ \text{grad}_1 C_3 = v_2 n_1 - v_1 n_2 \end{cases}$$

$$(225) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{grad}_v D_1 = -(v_2 y + v_3 z) n_1 + (2 v_2 x - v_1 y) n_2 + (2 v_3 x - v_1 z) n_3 \\ \text{grad}_v D_2 = -(v_3 z + v_1 x) n_2 + (2 v_3 y - v_2 z) n_3 + (2 v_1 y - v_2 x) n_1 \\ \text{grad}_v D_3 = -(v_1 x + v_2 y) n_3 + (2 v_1 z - v_3 x) n_1 + (2 v_2 z - v_3 y) n_2 \end{array} \right.$$

$$(226) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{grad}_r D_1 = \left\{ v_2^2 + v_3^2 - \frac{\mu}{r^3} (y^2 + z^2) \right\} n_1 + \left(\frac{\mu}{r^3} xy - v_1 v_2 \right) n_2 + \left(\frac{\mu}{r^3} zx - v_3 v_1 \right) n_3 \\ \text{grad}_r D_2 = \left\{ v_3^2 + v_1^2 - \frac{\mu}{r^3} (z^2 + x^2) \right\} n_2 + \left(\frac{\mu}{r^3} yz - v_2 v_3 \right) n_3 + \left(\frac{\mu}{r^3} xy - v_1 v_2 \right) n_1 \\ \text{grad}_r D_3 = \left\{ v_1^2 + v_2^2 - \frac{\mu}{r^3} (x^2 + y^2) \right\} n_3 + \left(\frac{\mu}{r^3} zx - v_3 v_1 \right) n_1 + \left(\frac{\mu}{r^3} yz - v_3 v_2 \right) n_2 \end{array} \right.$$

Diese Gleichungen ergeben sich durch zyklische Permutation eine aus der anderen.

Setzt man die vorstehenden Ausdrücke in (216) ein, dann gelangt man zu folgenden Ergebnissen:

$$(C_1, C_2) = v_1 y - v_2 x,$$

d. h. wegen (220) und weil die zwei nachfolgenden Klammerausdrücke durch zyklische Permutation aus diesen ersten folgen,

$$(227) \quad (C_1, C_2) = -C_3 \quad (C_2, C_3) = -C_1 \quad (C_3, C_1) = -C_2.$$

Auf dieselbe Weise bekommt man:

$$(228) \quad (C_1, D_1) = 0 \quad (C_2, D_2) = 0 \quad (C_3, D_3) = 0.$$

Es ist weiters

$$\begin{aligned} (C_1, D_2) &= z \frac{\mu}{r^3} (x^2 + y^2 + z^2) + v_2 v_3 y - v_1^2 z - v_2^2 z + v_3 v_1 x = \\ &= \frac{\mu}{r} z + v_2 (v_3 y - v_2 z) + v_1 (v_3 x - v_1 z) = \\ &= \frac{\mu}{r} z + v_2 C_1 - v_1 C_2 = -D_3. \end{aligned}$$

Es ist deshalb

$$(229) \quad (C_1, D_2) = -D_3 \quad (C_2, D_3) = -D_1 \quad (C_3, D_1) = -D_2.$$

Auf dieselbe Weise bekommt man

$$(230) \quad (D_1, C_2) = -D_3 \quad (D_2, C_3) = -D_1 \quad (D_3, C_1) = -D_2.$$

Die Berechnung des Klammerausdruckes (D_1, D_2) führt zur folgenden Formel:

$$\begin{aligned} (D_1, D_2) &= (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)(v_2 x - v_1 y) + \frac{2\mu}{r^3} \{v_1 y (x^2 + y^2 + z^2) - v_2 x (x^2 + y^2 + z^2)\} = \\ &= v^2 (v_2 x - v_1 y) - \frac{2\mu}{r} (v_2 x - v_1 y) = (v_2 x - v_1 y) \left(v^2 - \frac{2\mu}{r} \right). \end{aligned}$$

Berücksichtigt man (77), (76) und (220), so erhält man

$$(231) \quad (D_1, D_2) = -\frac{\mu^2 - D^2}{C^2} C_3; \quad (D_2, D_3) = -\frac{\mu^2 - D^2}{C^2} C_1; \quad (D_3, D_1) = -\frac{\mu^2 - D^2}{C^2} C_2.$$

Setzt man die Ausdrücke (227) bis (231) in (219) ein, dann erhält man die Ausdrücke für die zeitlichen Aenderungen der vektoriiellen Elemente. Man kann dabei die Klammerausdrücke (231) durch zweckmässigere ersetzen. Es ist nämlich nach (76)

$$(232) \quad \frac{\mu^2 - D^2}{C^2} = \frac{\mu}{a}$$

und dieser Ausdruck kann in (231) gesetzt werden. Dadurch wird in unsere Gleichungen das elliptische Element a eingeführt, dem aber, weil a säkular unveränderlich ist, die Rolle einer absoluten Konstanten zukommt. Man kann mittels (81) auch μ eliminieren und statt dessen die mittlere Bewegung n einführen, die sich ebenfalls als säkular unveränderlich erwiesen hat. Man erhält dadurch:

$$(233) \quad (D_1, D_2) = -n^2 a^2 C_3; \quad (D_2, D_3) = -n^2 a^2 C_1; \quad (D_3, D_1) = -n^2 a^2 C_2.$$

so dass die Gleichungen (219) folgende Form erhalten:

$$(234) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dC_1}{dt} = C_2 \frac{\partial R_0}{\partial C_3} - C_3 \frac{\partial R_0}{\partial C_2} + D_2 \frac{\partial R_0}{\partial D_3} - D_3 \frac{\partial R_0}{\partial D_2} \\ \frac{dC_2}{dt} = C_3 \frac{\partial R_0}{\partial C_1} - C_1 \frac{\partial R_0}{\partial C_3} + D_3 \frac{\partial R_0}{\partial D_1} - D_1 \frac{\partial R_0}{\partial D_3} \\ \frac{dC_3}{dt} = C_1 \frac{\partial R_0}{\partial C_2} - C_2 \frac{\partial R_0}{\partial C_1} + D_1 \frac{\partial R_0}{\partial D_2} - D_2 \frac{\partial R_0}{\partial D_1} \end{array} \right.$$

$$(235) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dD_1}{dt} = D_2 \frac{\partial R_0}{\partial C_3} - D_3 \frac{\partial R_0}{\partial C_2} + n^2 a^2 C_2 \frac{\partial R_0}{\partial D_3} - n^2 a^2 C_3 \frac{\partial R_0}{\partial D_2} \\ \frac{dD_2}{dt} = D_3 \frac{\partial R_0}{\partial C_1} - D_1 \frac{\partial R_0}{\partial C_3} + n^2 a^2 C_3 \frac{\partial R_0}{\partial D_1} - n^2 a^2 C_1 \frac{\partial R_0}{\partial D_3} \\ \frac{dD_3}{dt} = D_1 \frac{\partial R_0}{\partial C_2} - D_2 \frac{\partial R_0}{\partial C_1} + n^2 a^2 C_1 \frac{\partial R_0}{\partial D_2} - n^2 a^2 C_2 \frac{\partial R_0}{\partial D_1} \end{array} \right.$$

Die Gleichungen der Gruppe (234) und ebenso jene der Gruppe (235) folgen, wie ersichtlich, durch zyklische Permutation eine aus den anderen.

Die vorstehenden Gleichungen können in zwei vektorielle Gleichungen kondensiert werden. Es ist nämlich:

$$[\mathfrak{C} \text{ grad}_{\mathfrak{C}} R_0] = \begin{vmatrix} n_1 & n_2 & n_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \\ \frac{\partial R_0}{\partial C_1} & \frac{\partial R_0}{\partial C_2} & \frac{\partial R_0}{\partial C_3} \end{vmatrix},$$

so dass es ist:

$$[\mathfrak{C} \text{ grad}_{\mathfrak{C}} R_0] = \left(C_2 \frac{\partial R_0}{\partial C_3} - C_3 \frac{\partial R_0}{\partial C_2} \right) n_1 + \left(C_3 \frac{\partial R_0}{\partial C_1} - C_1 \frac{\partial R_0}{\partial C_3} \right) n_2 + \left(C_1 \frac{\partial R_0}{\partial C_2} - C_2 \frac{\partial R_0}{\partial C_1} \right) n_3$$

$$[\mathfrak{D} \text{ grad}_{\mathfrak{D}} R_0] = \left(D_2 \frac{\partial R_0}{\partial D_3} - D_3 \frac{\partial R_0}{\partial D_2} \right) n_1 + \left(D_3 \frac{\partial R_0}{\partial D_1} - D_1 \frac{\partial R_0}{\partial D_3} \right) n_2 + \left(D_1 \frac{\partial R_0}{\partial D_2} - D_2 \frac{\partial R_0}{\partial D_1} \right) n_3$$

$$[\mathfrak{D} \text{ grad}_{\mathfrak{C}} R_0] = \left(D_2 \frac{\partial R_0}{\partial C_3} - D_3 \frac{\partial R_0}{\partial C_2} \right) n_1 + \left(D_3 \frac{\partial R_0}{\partial C_1} - D_1 \frac{\partial R_0}{\partial C_3} \right) n_2 + \left(D_1 \frac{\partial R_0}{\partial C_2} - D_2 \frac{\partial R_0}{\partial C_1} \right) n_3$$

$$[\mathfrak{C} \text{ grad}_{\mathfrak{D}} R_0] = \left(C_1 \frac{\partial R_0}{\partial D_3} - C_3 \frac{\partial R_0}{\partial D_2} \right) n_1 + \left(C_3 \frac{\partial R_0}{\partial D_1} - C_1 \frac{\partial R_0}{\partial D_3} \right) n_2 + \left(C_1 \frac{\partial R_0}{\partial D_2} - C_2 \frac{\partial R_0}{\partial D_1} \right) n_3.$$

Multipliziert man also die Gleichungen (234) der Reihe nach mit n_1, n_2, n_3 und addiert sie sodann und tut dasselbe mit den Gleichungen (235), so bekommt man die nachstehenden zwei vektoriellen Gleichungen:

$$(236) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\mathfrak{C}}{dt} = [\mathfrak{C} \operatorname{grad}_{\mathfrak{C}} R_0] + [\mathfrak{D} \operatorname{grad}_{\mathfrak{D}} R_0] \\ \frac{d\mathfrak{D}}{dt} = [\mathfrak{D} \operatorname{grad}_{\mathfrak{C}} R_0] + n^2 a^2 [\mathfrak{C} \operatorname{grad}_{\mathfrak{D}} R_0]. \end{array} \right.$$

Die vorstehenden Gleichungen sind an keine einschränkende Voraussetzungen gebunden; sie sind streng richtig und gelten für beliebige Bahnen der Planeten. In Wirklichkeit sind die Exzentrizitäten e der Bahnen der Hauptplaneten durchwegs sehr klein, desgleichen die Winkel, die die Ebenen dieser Bahnen untereinander einschliessen, so dass bei entsprechender Wahl der Grundebene die Neigungen i dieser Bahnebenen sehr klein sind. Es wird sich im Verlauf der nachstehenden Ausführungen ergeben, dass infolge der gegenseitigen Störungen dieser Planeten sowohl die Exzentrizitäten e als auch die Neigungen i zwischen eng gezogenen numerisch angebbaren Grenzen schwanken und deshalb immer klein bleiben. Dieser Umstand ermöglicht, die für beliebige Werte von e und i geltenden Gleichungen (234) und (235) wie folgt zu vereinfachen.

Werden aus den soeben angeführten Gründen die zweiten und höheren Potenzen von e und i vernachlässigt, dann kann in die vorstehenden Gleichungen gesetzt werden:

$$(237) \quad e^2=0; \quad i^2=0; \quad e \sin i = ei = 0; \quad \cos i = 1 - \frac{1}{2!} i^2 + \frac{1}{4!} i^4 + \dots = 1$$

und es wird dann wegen (75), (73) und (71)

$$C^2 = \mu a = n^2 a^4$$

$$C = na^2$$

$$D = n^2 a^3 e,$$

so dass wegen (109) die Ausdrücke (118) und (117) durch die nachstehenden ersetzt werden können:

$$(238) \quad \left\{ \begin{array}{l} C_1 = na^2 \sin \Omega \sin i \\ C_2 = -na^2 \cos \Omega \sin i \\ C_3 = na^2. \end{array} \right.$$

$$(239) \quad \begin{cases} D_1 = n^2 a^3 e (\cos \Omega \cos \omega - \sin \Omega \sin \omega) = n^2 a^3 e \cos (\Omega + \omega) = n^2 a^3 e \cos \Pi \\ D_2 = n^2 a^3 e (\sin \Omega \cos \omega + \cos \Omega \sin \omega) = n^2 a^3 e \sin (\Omega + \omega) = n^2 a^3 e \sin \Pi \\ D_3 = n^2 a^3 e i \sin \omega = 0. \end{cases}$$

Auf diese Weise gelangt man zu dem Ergebnis, dass von den sechs bisher zur Variation benützten Elemente $C_1, C_2, C_3, D_1, D_2, D_3$ die Elemente C_3 und D_3 als konstante, von der Zeit unabhängige Grössen zu betrachten sind.

Hätten wir von allem Anfang an die vorstehend angegebenen vereinfachenden Annahmen gemacht, d. h. die Elemente C_3 und D_3 als konstant vorausgesetzt und nur die Elemente C_1, C_2, D_1, D_2 als jene, die zu variieren sind, betrachtet, dann hätten wir statt den sechs Gleichungen (219) nur die nachstehenden diese vier Elemente enthaltenden Gleichungen erhalten:

$$\begin{aligned} \frac{dC_1}{dt} &= (C_1, C_2) \frac{\partial R_0}{\partial C_2} + (C_1, D_1) \frac{\partial R_0}{\partial D_1} + (C_1, D_2) \frac{\partial R_0}{\partial D_2} \\ \frac{dC_2}{dt} &= (C_2, C_1) \frac{\partial R_0}{\partial C_1} + (C_2, D_1) \frac{\partial R_0}{\partial D_1} + (C_2, D_2) \frac{\partial R_0}{\partial D_2} \\ \frac{dD_1}{dt} &= (D_1, C_1) \frac{\partial R_0}{\partial C_1} + (D_1, C_2) \frac{\partial R_0}{\partial C_2} + (D_1, D_2) \frac{\partial R_0}{\partial D_2} \\ \frac{dD_2}{dt} &= (D_2, C_1) \frac{\partial R_0}{\partial C_1} + (D_2, C_2) \frac{\partial R_0}{\partial C_2} + (D_2, D_1) \frac{\partial R_0}{\partial D_1}. \end{aligned}$$

Berücksichtigt man (227) bis (231), setzt in diese Ausdrücke (232), (81) und $C_3 = na^3; D_3 = 0$ ein, dann bekommt man an Stelle der vorstehenden Gleichungen die nachfolgenden:

$$(240) \quad \begin{cases} \frac{dC_1}{dt} = -na^2 \frac{\partial R_0}{\partial C_2} \\ \frac{dC_2}{dt} = na^2 \frac{\partial R_0}{\partial C_1} \end{cases}$$

$$(241) \quad \begin{cases} \frac{dD_1}{dt} = -n^3 a^4 \frac{\partial R_0}{\partial D_2} \\ \frac{dD_2}{dt} = n^3 a^4 \frac{\partial R_0}{\partial D_1}. \end{cases}$$

Dies sind die Differentialgleichungen der säkularen Aenderungen der vektoriellen Elemente.

§ 20. Klassische Form der Differentialgleichungen der säkularen Aenderungen der astronomischen Elemente. Der Uebergang von den soeben gewonnenen Differentialgleichungen der säkularen Aenderungen der vektoriellen Elemente auf die Gleichungen, die in der klassischen Theorie der Planetenbewegung Verwendung finden, ist ein überaus einfacher, weil man in der klassischen Theorie nach dem langen Umwege über die elliptischen Elemente letzten Endes und ohne es zu wissen von den elliptischen Elementen auf die vektoriellen überging. Dies geschah auf folgende Weise.

Nachdem man die Grundgleichungen (200) gewonnen und mittels (237) und mit $R=R_0$ auf den vorstehend behandelten Fall reduziert hatte, führte man in die dadurch gewonnenen vier Gleichungen an Stelle der darin verbliebenen vier elliptischen Elemente e, Π, i, Ω vier neue Elemente h, l, p, q ein, die durch die Gleichungen gegeben sind:

$$(242) \quad \begin{cases} h = e \sin \Pi \\ l = e \cos \Pi \end{cases}$$

$$(243) \quad \begin{cases} p = \operatorname{tang} i \sin \Omega \\ q = \operatorname{tang} i \cos \Omega \end{cases}$$

Vergleicht man diese Ausdrücke mit (238) und (239) und berücksichtigt, dass in denselben wegen (237) $\operatorname{tang} i$ durch $\sin i$ ersetzt werden kann, so erhält man

$$(244) \quad \begin{cases} C_1 = na^2 p \\ C_2 = -na^2 q \end{cases}$$

$$(245) \quad \begin{cases} D_1 = n^2 a^3 l \\ D_2 = n^2 a^3 h. \end{cases}$$

Setzt man dies in die Gleichungen (240) und (241) ein, so bekommt man:

$$(246) \quad \begin{cases} \frac{dp}{dt} = \frac{1}{na^2} \cdot \frac{\partial R_0}{\partial q} \\ \frac{dq}{dt} = -\frac{1}{na^2} \cdot \frac{\partial R_0}{\partial p} \end{cases}$$

$$(247) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dh}{dt} = \frac{1}{na^2} \cdot \frac{\partial R_0}{\partial l} \\ \frac{dl}{dt} = -\frac{1}{na^2} \cdot \frac{\partial R_0}{\partial h} \end{array} \right.$$

Dies sind die Grundgleichungen, die in der klassischen Theorie verwendet werden. Wie aus (244) und (245) ersichtlich, sind die darin auftretenden Elemente p, q, h, l nichts anderes als die mit konstanten Faktoren behafteten vektoriiellen Elemente C_1, C_2, D_1, D_2 .

Ich werde mich im weiteren Verlauf meiner Ausführungen der aus (240) und (241) unmittelbar gewonnenen Gleichungen (246) und (247) bedienen, weil alle bisherigen numerischen Ausrechnungen der säkularen Aenderungen der astronomischen Elemente mit Benützung der in diesen Gleichungen auftretenden Elemente und Bezeichnungen durchgeführt worden sind, und ich die Ergebnisse dieser Berechnungen bei meinen Forschungen zu verwerten Gelegenheit haben werde.

Um den vorstehenden Differentialgleichungen die für deren Int'egration erforderliche Form zu geben, ist es notwendig, R_0 als Funktion der Elemente p, q, h, l darzustellen. Die analytische Darstellung der Störungsfunktion bildet ein besonderes Kapitel der Himmelsmechanik, ja, bei seinem riesigen Umfange, einen besonderen Zweig der mathematischen Wissenschaft. Der allgemeine, endliche Ausdruck der Störungsfunktion wird durch die Einsetzung der Ausdrücke (99) und (93) in den Definitionsansatz (145) der Störungsfunktion erhalten, dessen weitere Behandlung und Entwicklung in eine Reihe eine Angelegenheit der reinen Mathematik ist. Die Wege, die man dabei betreten und die Methoden, die man angewendet hat, sind sehr verschieden. Doch, was den säkularen Teil R_0 der Störungsfunktion anbelangt, ist man im Wesentlichen nicht über jene Methoden und Ergebnisse hinausgekommen, die in dem klassischen Werke von Laplace niedergelegt sind. Diese Ergebnisse sind fast unverändert auch in die nachherigen zusammenfassenden Werke der Himmelsmechanik übernommen worden, weshalb es genügen wird, nur das Schlussergebnis der analytischen Darstellung des säkularen Teiles der Störungsfunktion hier zu wiedergeben

Ziehen wir vorläufig abermals nur einen störenden Planeten in Betracht und bezeichnen seine Masse mit m' . Seine Elemente $a, e, \Pi, i, \Omega, h, l, p, q$ sollen ebenfalls mit einem Strich gekennzeichnet werden, so dass es ist:

$$(248) \quad h' = e' \sin \Pi' \quad l' = e' \cos \Pi'$$

$$(249) \quad p' = \text{tang } i' \sin \Omega' \quad q' = \text{tang } i' \cos \Omega'.$$

Es wird sich von Vorteil erweisen, folgende symbolische Bezeichnungen einzuführen:

$$(250) \quad \left\{ \begin{array}{l} \{a, a'\} = a' \left\{ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{a^2}{a'^2} + \left(\frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4}\right)^2 \cdot \frac{a^4}{a'^4} + \left(\frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \cdot \frac{a^6}{a'^6} + \dots \right\} \\ \{a, a'\}' = -a' \left\{ \frac{a}{a'} - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} \cdot \frac{a^3}{a'^3} - \frac{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3}{4 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{a^5}{a'^5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} \cdot \frac{a^7}{a'^7} - \dots \right\} \end{array} \right.$$

$$(251) \quad a_0 = 2 \frac{(a^2 + a'^2) \{a, a'\} + 3(a^2 + a'^2) \{a, a'\}'}{(a'^2 - a^2)^2}.$$

Diese Ausdrücke sind, wie dies aus ihrem Werdegang folgt, symmetrisch in bezug auf a und a' ; sie können zwecks Konvergenz der darin enthaltenen Reihen also immer so angesetzt werden, dass die in denselben vorkommenden Brüche $\frac{a}{a'}$, $\frac{a^2}{a'^2}$, $\frac{a^3}{a'^3}$... kleiner als eins werden, indem man, falls $a > a'$ ist, ihre reziproken Werte nimmt.

Mit Anwendung dieser Bezeichnungsweise erscheint dann der säkulare Teil der Störungsfunktion durch den nachstehenden Ausdruck dargestellt:

$$R_0 = \frac{1}{2} m' a_0 - \frac{3 m' a a' \{a, a'\}'}{8 (a'^2 - a^2)^2} [h^2 + l^2 + h'^2 + l'^2 - (p' - p)^2 - (q' - q)^2] + \\ + 3 m' \frac{a a' \{a, a'\} + (a^2 + a'^2) \{a, a'\}'}{2 (a'^2 - a^2)^2} (h h' + l l').$$

Dabei ist die Gravitationskonstante gleich eins gesetzt worden.

Die Ausdrücke (250) und (251) sind, weil nur Funktionen der grossen Halbachsen der Planetenbahnen, säkular unveränderlich. Dies gilt, wie bereits angegeben, auch für die mittleren Bewegungen n und n' . Setzt man also ferner:

$$(252) \quad \left\{ \begin{array}{l} (a, a') = - \frac{3 m' a^2 a' n \{a, a'\}'}{4 (a'^2 - a^2)^2} \\ [a, a'] = - \frac{3 m' a n [a a' \{a, a'\} + (a^2 + a'^2) \{a, a'\}']}{2 (a'^2 - a^2)^2}, \end{array} \right.$$

wobei den hier benützten Bezeichnungen (a, a') und $[a, a']$ natürlich nicht der Sinn der Poisson'schen bzw. der Lagrange'schen Klammerausdrücke zukommt, dann wird

$$(253) \quad R_0 = \frac{1}{2} m' a_0 + \frac{1}{2 n a} (a, a') [h^2 + l^2 + h'^2 + l'^2 - (p' - p)^2 - (q' - q)^2] - \\ - \frac{1}{n a} [a, a'] [h h' + l l'].$$

Es folgt aus der vorstehenden Gleichung:

$$(254) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial R_0}{\partial l} = \frac{1}{na} \{(a, a') l - [a, a'] l'\} \\ \frac{\partial R_0}{\partial h} = \frac{1}{na} \{(a, a') h - [a, a'] h'\} \end{array} \right.$$

$$(255) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial R_0}{\partial q} = \frac{1}{na} (a, a') (q' - q) \\ \frac{\partial R_0}{\partial p} = \frac{1}{na} (a, a') (p' - p). \end{array} \right.$$

Setzt man dies in die Gleichungen (246) und (247) ein, dann erscheint, weil nach (81) $n^2 a^3 = \mu$ ist, rechts im Nenner die Konstante μ . Setzt man, wie dies bereits geschehen ist, $f = 1$ und wählt die Masse M der Sonne zur Einheit, so wird nach (46) $\mu = 1 + m$. Diese Zahl ist, weil die Masse eines jeden Planeten, gemessen mit der Masse der Sonne, sehr klein ist, von der Einheit sehr wenig verschieden; der dabei sich ergebende Unterschied ist bedeutend kleiner als die Unsicherheiten, mit denen die ohne Angliederung an M in den obigen Gleichungen auftretenden Werte der Planetenmassen behaftet sind, weshalb $\mu = 1$ gesetzt werden kann. Auf diese Weise erhält man die nachstehenden Gleichungen:

$$(256) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dh}{dt} = (a, a') l - [a, a'] l' \\ \frac{dl}{dt} = -(a, a') h + [a, a'] h' \end{array} \right.$$

$$(257) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dp}{dt} = -(a, a') q + (a, a') q' \\ \frac{dq}{dt} = (a, a') p - (a, a') p'. \end{array} \right.$$

Diese Differentialgleichungen beziehen sich auf den gestörten Planet m ; die zugehörigen auf den störenden Planet m' sich beziehenden Differentialgleichun-

gen erhält man, wenn man oben die ungestrichelten Buchstaben durch die gestrichelten ersetzt und umgekehrt. Es ist also

$$(258) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dh'}{dt} = (a', a) l' - [a', a] l \\ \frac{dl'}{dt} = - (a', a) h' + [a', a] h \end{array} \right.$$

$$(259) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dp'}{dt} = - (a', a) q' + (a', a) q \\ \frac{dq'}{dt} = (a', a) p' - (a', a) p \end{array} \right.$$

Die numerischen Werte der hier auftretenden Ausdrücke (a', a) und $[a', a]$ können aus jenen der Ausdrücke (a, a') bzw. $[a, a']$ auf folgende Weise berechnet werden. Weil $\{a, a'\}$ und $\{a, a'\}'$ symmetrisch in bezug auf a und a' sind, so ist

$$\{a, a'\} = \{a', a\} \quad \{a, a'\}' = \{a', a\}'$$

also

$$(a', a) = - \frac{3 m a'^2 a n' \{a, a'\}'}{4(a'^2 - a^2)^2}$$

$$[a', a] = - \frac{3 m a' n' [a' a \{a, a'\} + (a^2 + a'^2) \{a, a'\}']}{2(a'^2 - a^2)^2}.$$

Dividiert man diese Ausdrücke mit jenen (252), so folgt:

$$(a', a) = \frac{m}{na} \cdot \frac{n' a'}{m'} (a, a')$$

$$[a', a] = \frac{m}{na} \cdot \frac{n' a'}{m'} [a, a'],$$

womit (a', a) und $[a', a]$ mittels (a, a') und $[a, a']$ berechnet werden kann.

Durch die Gleichungen (256) bis (259) ist, und, wie wir sehen werden, auch für den Fall einer beliebigen Anzahl der sich gegenseitig störenden Planeten ein vollständiges System linearer Differentialgleichungen gewonnen, das sich in endlicher Form integrieren lässt.

§ 21. Die Integration der Differentialgleichungen der säkularen Änderungen der astronomischen Elemente. Bevor wir auf den allgemeinen Fall einer beliebigen Anzahl der sich gegenseitig störenden Planeten übergehen, beschäftigen wir uns vorerst mit dem Fall, in dem nur einer der störenden Planeten zu berücksichtigen ist; die dabei gewonnenen Ergebnisse können nachher ohne Schwierigkeit verallgemeinert werden. Das für diesen Fall geltende System der Differentialgleichungen (256) und (258) kann durch die Ausdrücke

$$(260) \quad \begin{cases} h = N \sin (gt + \beta) & h' = N' \sin (gt + \beta) \\ l = N \cos (gt + \beta) & l' = N' \cos (gt + \beta) \end{cases}$$

befriedigt werden, wenn, wie man sich durch Einsetzung von (260) in (256) und (258) sofort überzeugt, die in (260) auftretenden Konstanten N, N', g den nachstehenden Gleichungen genügen:

$$(261) \quad \begin{cases} \{(a, a') - g\} N - [a, a'] N' = 0 \\ -[a', a] N + \{(a', a) - g\} N' = 0. \end{cases}$$

Diese beiden linearen homogenen algebraischen Gleichungen weisen, nach N und N' aufgelöst, neben der trivialen Lösung $N=0; N'=0$ nur dann andere Lösungen auf, wenn die aus den Koeffizienten von N und N' gebildete Determinante gleich Null ist, d. h. wenn

$$(262) \quad \begin{vmatrix} \{(a, a') - g\} & -[a, a'] \\ -[a', a] & \{(a', a) - g\} \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$(263) \quad g^2 - \{(a, a') + (a', a)\} g = [a, a'] [a', a] - (a, a')(a', a)$$

ist.

Diese quadratische Gleichung besitzt, wie dies aus dem Bau von (250) und (252) nachgewiesen werden kann, zwei reelle Wurzeln g_1 und g_2 . Das System (261) gibt, weil homogen, nur das Verhältnis der beiden Unbekannten, die sich wie die Subdeterminanten der ersten oder der zweiten Zeile von (262) verhalten. Es ist also

$$(264) \quad \frac{N'}{N} = \frac{(a, a') - g}{[a, a']} = \frac{[a', a]}{(a', a) - g}.$$

Weil uns für g zwei verschiedene Wurzeln zur Verfügung stehen, bekommt man für das obige Verhältnis zwei verschiedene numerische Werte :

$$(265) \quad \frac{N_1'}{N_1} = k_1 \quad \frac{N_2'}{N_2} = k_2.$$

Man erhält also für (260) zwei verschiedene Lösungen, die zusammengefügt die allgemeinen Integrale von (256) und (258) liefern und zwar:

$$(26f.) \quad \begin{cases} h = N_1 \sin(g_1 t + \beta_1) + N_2 \sin(g_2 t + \beta_2) \\ l = N_1 \cos(g_1 t + \beta_1) + N_2 \cos(g_2 t + \beta_2) \\ h' = k_1 N_1 \sin(g_1 t + \beta_1) + k_2 N_2 \sin(g_2 t + \beta_2) \\ l' = k_1 N_1 \cos(g_1 t + \beta_1) + k_2 N_2 \cos(g_2 t + \beta_2). \end{cases}$$

Von den hier auftretenden Konstanten sind g_1, g_2, k_1, k_2 durch (263), (264) und (265) gegeben; die restlichen Konstanten $N_1, N_2, \beta_1, \beta_2$ ergeben sich aus den initialen Bedingungen. Denn, wenn für $t = 0$; $e = e_0, \Pi = \Pi_0, e' = e_0', \Pi' = \Pi_0'$ ist so ist:

$$t = 0$$

$$h_0 = e_0 \sin \Pi_0; \quad l_0 = e_0 \cos \Pi_0; \quad h_0' = e_0' \sin \Pi_0'; \quad l_0' = e_0' \cos \Pi_0',$$

so dass man mit (265) bekommt:

$$(267) \quad \begin{cases} h_0 = N_1 \sin \beta_1 + N_2 \sin \beta_2 \\ l_0 = N_1 \cos \beta_1 + N_2 \cos \beta_2 \\ h_0' = k_1 N_1 \sin \beta_1 + k_2 N_2 \sin \beta_2 \\ l_0' = k_1 N_1 \cos \beta_1 + k_2 N_2 \cos \beta_2, \end{cases}$$

aus welchen Gleichungen die Konstanten $N_1, N_2, \beta_1, \beta_2$ berechnet werden können.

Hat man auf diese Weise die vektoriellen Elemente h und l bzw. h' und l' als Funktionen der Zeit dargestellt, dann folgt aus (242) oder (248) durch Quadrieren und Addieren bzw. durch Division dieser Gleichungen:

$$(268) \quad \begin{cases} e^2 = h^2 + l^2 & e'^2 = h'^2 + l'^2 \\ \text{tang } \Pi = \frac{h}{l} & \text{tang } \Pi' = \frac{h'}{l'}. \end{cases}$$

Es folgt aus den vorstehenden Gleichungen:

$$e^2 = N_1^2 + N_2^2 + 2N_1 N_2 \cos [(g_1 - g_2)t + \beta_1 - \beta_2].$$

Im Falle nur eines störenden Planeten wird also e^2 zu einer einfachen periodischen Funktion und die Exzentrizität e schwankt zwischen den positiv zu nehmenden Grenzen $(N_1 - N_2)$ und $(N_1 + N_2)$ mit der Periode

$$T = \frac{2\pi}{g_1 - g_2}.$$

Der im § 18 mitgeteilte Ausdruck (206), der im vorliegenden Falle die Form hätte:

$$e = e_0 + k_1 t + k_2 t^2 + k_3 t^3 + \dots$$

wäre also nichts anderes als eine Reihenentwicklung des obigen periodischen Ausdruckes von e nach den Potenzen von t , aus der man nicht die Periodizität von e erkennen könnte und die bei der geringen Anzahl ihrer Glieder nur für beschränkte Zeitintervalle verwendbar wäre.

Auch das System der Differentialgleichungen (257) und (259) lässt sich ähnlich dem System (256) und (258) integrieren. Setzt man nämlich:

$$(269) \quad \begin{cases} p = N \sin(gt + \beta) & p' = N' \sin(gt + \beta) \\ q = N \cos(gt + \beta) & q' = N' \cos(gt + \beta) \end{cases}$$

und führt diese Ausdrücke in (257), (259) ein, so ersieht man dass dieses System befriedigt sein wird, wenn die Konstanten N, N', g den nachstehenden Gleichungen genügen:

$$(270) \quad \begin{cases} \{(a, a') + g\} N - (a, a') N' = 0 \\ -(a', a) N + \{(a', a) + g\} N' = 0. \end{cases}$$

Es ist zur Auflösung dieser beiden linearen homogenen algebraischen Gleichungen nach N und N' erforderlich, dass die aus den Koeffizienten von N und N' gebildete Determinante gleich Null ist, d. h.

$$(271) \quad \begin{vmatrix} \{(a, a') + g\} & -(a', a) \\ -(a', a) & \{(a', a) + g\} \end{vmatrix} = 0$$

d. h.

$$(272) \quad g^2 + \{(a, a') + (a', a)\} g = 0$$

ist.

Wie ersichtlich, ist eine der beiden Wurzeln g_1, g_2 dieser Gleichung gleich Null, d. h.

$$(273) \quad g_1 = 0,$$

während die andere durch

$$(274) \quad g_2 = - \{(a, a') + (a', a)\}$$

gegeben ist.

Das System (270) gibt, weil homogen, nur das Verhältnis der beiden Unbekannten N und N' , die sich wie die Subdeterminanten einer der beiden Zeilen der Determinante (271) verhalten. Es ist also

$$\frac{N'}{N} = \frac{(a, a') + g}{(a', a)}.$$

Weil uns für g zwei verschiedene Wurzeln zur Verfügung stehen, bekommt man für das obige Verhältnis zwei verschiedene numerische Werte

$$(275) \quad \frac{N_1'}{N_1} = k_1 = 1 \quad \frac{N_2'}{N_2} = k_2 = \frac{(a, a')}{(a, a')}.$$

Weil jetzt wegen (273) und (275) $k_1 = 1$; $N_1' = N_1$ ist, bekommt man für die allgemeinen Integrale des Systems (257), (259) die Ausdrücke:

$$(276) \quad \left\{ \begin{array}{l} p = N_1 \sin \beta_1 + N_2 \sin (g_2 t + \beta_2) \\ q = N_1 \cos \beta_1 + N_2 \cos (g_2 t + \beta_2) \\ p' = N_1 \sin \beta_1 + k_2 N_2 \sin (g_2 t + \beta_2) \\ q' = N_1 \cos \beta_1 + k_2 N_2 \cos (g_2 t + \beta_2). \end{array} \right.$$

Die hier vorkommenden Konstanten g_2 und k_2 sind durch (274) und (275) gegeben, die Konstanten $N_1, N_2, \beta_1, \beta_2$ ergeben sich aus den initialen Bedingungen. Hat man derart p, q, p', q' als Funktionen der Zeit dargestellt, dann ergeben sich Ω, t, Ω', t' aus (243) und (249).

Die vorstehenden auf nur zwei sich gegenseitig störende Planetenmassen m und m' sich beziehenden Ergebnisse lassen sich ohne Schwierigkeit auf den

Fall verallgemeinern, in dem eine beliebige Anzahl n derartiger Planetenmassen $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$ zu berücksichtigen ist. Sind a_1, a_2, \dots, a_n die säkular unveränderlichen grossen Halbachsen der Bahnen dieser Planeten und wendet man die Bezeichnungen (250) und (252) sinngemäss für die Massen m_i und m_k bzw. die Bahnhachsen a_i und a_k zweier beliebigen dieser Planeten an, dann sind die Differentialgleichungen (256) und (258) durch die nachstehenden zu ersetzen:

$$(277) \left\{ \begin{array}{l} \frac{dh_k}{dt} = \{(a_k, a_1) + (a_k, a_2) + \dots + (a_k, a_n)\} l_k - [a_k, a_1] l_1 - [a_k, a_2] l_2 - \dots - [a_k, a_n] l_n \\ \frac{dl_k}{dt} = \{(a_k, a_1) + (a_k, a_2) + \dots + (a_k, a_n)\} h_k + [a_k, a_1] h_1 + [a_k, a_2] h_2 + \dots + [a_k, a_n] h_n \end{array} \right.$$

oder kürzer geschrieben:

$$(278) \left\{ \begin{array}{l} \frac{dh_k}{dt} = l_k \sum_i (a_k, a_i) - \sum_i [a_k, a_i] l_i \\ \frac{dl_k}{dt} = -h_k \sum_i (a_k, a_i) + \sum_i [a_k, a_i] h_i \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} k = 1, 2, 3, \dots, n \\ i \neq k \end{array}$$

In den obigen Klammerausdrücken sollen, wie oben angedeutet, k und i voneinander verschieden sein

Auf dieselbe Weise, wie dies für (250) und (252) geschehen ist, erhält man für (278) die nachstehenden allgemeinen Integrale:

$$(279) \left\{ \begin{array}{l} h_k = \sum_i N_{k,i} \sin(g_i t + \beta_i) \\ l_k = \sum_i N_{k,i} \cos(g_i t + \beta_i) \end{array} \right. \quad k = 1, 2, 3, \dots, n$$

Zur Ermittlung der Koeffizienten g_1, g_2, \dots, g_n dient, wie im vorher behandelten Fall, eine Determinante, die jetzt, wenn man der einfacheren Schreibweise halber

$$(280) \left\{ \begin{array}{l} \sum_i (a_k, a_i) = A_{k,k} \\ -[a_k, a_i] = A_{k,i} \end{array} \right.$$

setzt, die folgende Form aufweist:

$$(281) \quad \begin{vmatrix} (A_{1,1} - g) & A_{1,2} & A_{1,3} & \dots & A_{1,n} \\ A_{2,1} & (A_{2,2} - g) & A_{2,3} & \dots & A_{2,n} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & (A_{3,3} - g) & \dots & A_{3,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n,1} & A_{n,2} & A_{n,3} & \dots & (A_{n,n} - g) \end{vmatrix} = 0$$

Diese Gleichung wird die Säkular determinante genannt. Sie ist n -ten Grades und besitzt n reelle Wurzeln $g_1, g_2 \dots g_n$, wie dies bereits Laplace bewiesen hat für den Fall, dass alle Planeten denselben Umlaufssinn aufweisen, was ja der Wirklichkeit entspricht. Die Subdeterminanten $\alpha_{m,1}; \alpha_{m,2} \dots \alpha_{m,n}$ irgendwelcher Zeile dieser Determinante verhalten sich wie die in (279) auftretenden Konstanten $N_{1,i}, N_{2,i} \dots N_{n,i}$. Mit Hilfe dieser Verhältnissgleichungen und den auf den initialen Zeitpunkt sich beziehenden Gleichungen (279) ergeben sich alle in den allgemeinen Integralen (279) vorkommenden Konstanten.

Im vorliegenden Falle, wo wir mit n sich gegenseitig störenden Planeten zu tun haben, sind die Differentialgleichungen (257) und (259) durch die nachstehenden zu ersetzen:

$$(282) \quad \begin{cases} \frac{dp_k}{dt} = -\{(a_k, a_1) + (a_k, a_2) + \dots + (a_k, a_n)\} q_k + (a_k, a_1) q_1 + \dots + (a_k, a_n) q_n \\ \frac{dq_k}{dt} = \{(a_k, a_1) + (a_k, a_2) + \dots + (a_k, a_n)\} p_k - (a_k, a_1) p_1 - \dots - (a_k, a_n) p_n \end{cases}$$

oder kürzer geschrieben:

$$(283) \quad \begin{cases} \frac{dp_k}{dt} = -q_k \sum_i (a_k, a_i) + \sum_i (a_k, a_i) q_i \\ \frac{dq_k}{dt} = p_k \sum_i (a_k, a_i) - \sum_i (a_k, a_i) p_i \end{cases} \quad \begin{matrix} k = 1, 2, 3 \dots n \\ i \neq k \end{matrix}$$

In den obigen Klammerausdrücken sollen, wie oben angedeutet, k und i verschieden sein.

Auf dieselbe Weise, wie dies für (257) und (259) geschehen ist, erhält man für (283) die nachstehenden allgemeinen Integrale:

$$(284) \quad \begin{cases} p_k = \sum_i N_{n,i} \sin(g_i t + \beta_i) \\ q_k = \sum_i N_{n,i} \cos(g_i t + \beta_i) \end{cases} \quad k = 1, 2, 3 \dots n$$

Zur Ermittlung der Koeffizienten $g_1, g_2 \dots g_n$ dient, wie im Falle eines störenden Planeten die Säkulardeterminante, die, wenn man der einfacheren Schreibweise halber

$$(285) \quad \begin{cases} \sum (a_n, a_i) = A_{n,n} \\ - (a_n, a_i) = A_{n,i} \end{cases}$$

setzt, folgende Form aufweist:

$$(286) \quad \begin{vmatrix} (A_{1,1} + g) & A_{1,2} & A_{1,3} & \dots & A_{1,n} \\ A_{2,1} & (A_{2,2} + g) & A_{2,3} & \dots & A_{2,n} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & (A_{3,3} + g) & \dots & A_{3,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n,1} & A_{n,2} & A_{n,3} & \dots & (A_{n,n} + g) \end{vmatrix} = 0.$$

Das zu dieser Determinante gehörige in bezug auf $N_{n,i}$ lineare und homogene System algebraischer Gleichungen, das dem System (270) ähnlich ist, wird ebenfalls durch $\xi = 0$; $N = N'$ befriedigt erscheinen, weshalb

$$(287) \quad g_1 = 0$$

$$(288) \quad N_{1,1} = N_{2,1} = N_{3,1} = \dots = N_{n,1}$$

ist.

Die Konstanten $N_{n,i}$ und β_i ergeben sich aus den Subdeterminanten von (286) und aus den Initialbedingungen.

§ 22. Einige Schlussfolgerungen aus den vorstehenden Integralen. Die vorstehend abgeleiteten Integrale gliedern sich in zwei scharf voneinander geschiedene Gruppen (279) und (284). Durch die erste dieser zwei Gruppen erscheinen die säkularen Aenderungen der Elemente h und l oder jene der Elemente e und Π veranschaulicht, während durch die zweite Gruppe die säkularen Aenderungen der

Elemente p und q oder jene der Elemente i und Ω dargestellt sind. Die Aenderungen der Elemente e und Π können also unabhängig von jenen der Elemente i und Ω berechnet werden und umgekehrt. Diese Integrale sind auf Grund der im § 19 gemachten vereinfachenden Annahmen (237) gewonnen worden, durch welche die zweiten Potenzen der kleinen Zahlen e und i als vernachlässigbar betrachtet wurden. Es ist bemerkenswert, dass man zu den Integralen (279) gekommen wäre, wenn man auch die erste Potenz von i vernachlässigt hätte. Eine solche vereinfachende Annahme ginge nach (238), (239) und (243) darauf hinaus, $C_1=0$; $C_2=0$; $p=0$; $q=0$ zu setzen. Dadurch blieben aber die Gleichungen (241) und (247) unberührt. Auch die Gleichungen (254) würden sich nicht geändert haben und folglich auch die Gleichungen (256), (258) und (278) und die Integrale (279) dieser letzteren Gleichungen. Daraus folgt aber, dass man bei der Berechnung der säkularen Aenderungen der Exzentrizitäten e und der Längen Π der Perihelie die Bahnebenen aller in Betracht gezogenen Planeten als in der Grundebene liegend betrachten kann, ohne dadurch das Endergebnis der Rechnung in Mitleidenschaft zu ziehen. Anders gesprochen: die Neigungen der Bahnebenen der Planeten üben keinen Einfluss auf die säkularen Aenderungen der Exzentrizitäten und der Perihelie aus.

Aehnlich verhält es sich mit den Integralen (284). Zu denselben Integralen wäre man gekommen, wenn man auch die erste Potenz von e vernachlässigt hätte. Eine solche vereinfachende Annahme ginge nach (239) und (245) darauf hinaus, $D_1=0$; $D_2=0$; $h=0$; $l=0$ zu setzen. Dadurch blieben die Gleichungen (240) und (246) unberührt. Auch die Gleichungen (255) würden sich nicht geändert haben und ebenso wenig die Gleichungen (257), (259) und (283) und die Integrale (284) dieser letzteren Gleichungen. Man kann deshalb bei der Berechnung der säkularen Aenderungen der Neigungen i und der Längen Ω der aufsteigenden Knoten die Bahnen aller in Betracht gezogenen Planeten als kreisrund annehmen. Anders gesprochen: die Exzentrizitäten der Planetenbahnen üben keinen Einfluss auf die säkularen Aenderungen der Bahnneigungen und der Knoten aus.

Bei der Berechnung der säkularen Aenderungen der ersten Gruppe von Elementen würde man nur denjenigen Teil des auf den Fall von n Planeten erweiterten Ausdruckes (253) der Störungsfunktion in Betracht zu ziehen haben, der die Elemente p_h und q_h nicht enthält, und bei der Berechnung der säkularen Aenderungen der zweiten Gruppe von Elementen nur denjenigen Teil, der die Elemente h_h und l_h nicht enthält, wodurch die Störungsfunktion in zwei besondere Teile getrennt erschiene, die den zwei Gruppen von Elementen zugeordnet wären.

Diese Erkenntnis kann bei der Besprechung der Integrale (278) und (284) vorteilhaft verwertet werden. Ziehen wir vorerst die Integrale (278) in Betracht und fassen einen beliebigen Planeten m_h in's Auge. Weil wir jetzt nur von diesem Planeten reden wollen, können wir in (278) den Index k als überflüssig weglassen. Dadurch erschienen die säkularen Aenderungen der auf diesen Planeten sich beziehenden Elemente h und l dargestellt durch:

$$(289) \quad \left\{ \begin{array}{l} h = \sum_i N_i \sin (g_i t + \beta_i) \\ l = \sum_i N_i \cos (g_i t + \beta_i) \end{array} \right.$$

oder entwickelt:

$$(290) \quad \begin{cases} h = N_1 \sin(g_1 t + \beta_1) + N_2 \sin(g_2 t + \beta_2) + \dots + N_n \sin(g_n t + \beta_n) \\ l = N_1 \cos(g_1 t + \beta_1) + N_2 \cos(g_2 t + \beta_2) + \dots + N_n \cos(g_n t + \beta_n). \end{cases}$$

Es ist nach (242)

$$(291) \quad \begin{aligned} h &= e \sin \Pi & l &= e \cos \Pi \\ e^2 &= h^2 + l^2. \end{aligned}$$

Setzt man in die vorstehende Gleichung die Ausdrücke (289) ein, so wird:

$$(292) \quad e^2 = \sum_i N_i^2 + 2 \sum_i \sum_j N_i N_j \cos [(g_i - g_j) t + \beta_i - \beta_j],$$

wobei in der Doppelsumme i immer verschieden von j sein soll.

Mit dieser Formel können die säkularen Aenderungen der Exzentrizität der in Betracht gezogenen Planetenbahn berechnet werden. Die in dieser Formel auftretende Doppelsumme würde ihren grösstmöglichen numerischen Wert erreichen, wenn jeder der darin vorkommenden Kosinuse den Wert eins und jenes Vorzeichen aufweisen würde, bei dem $N_i N_j$ positiv wäre. In einem solchen Falle wäre also

$$e^2 = (N_1 + N_2 + \dots + N_n)^2,$$

worin N_1, N_2, \dots, N_n mit positivem Vorzeichen zu nehmen sind. Es ist deshalb

$$(293) \quad \lim. \sup. e = |N_1| + |N_2| + \dots + |N_n|.$$

Der grösstmögliche Wert, den die Exzentrizität der Bahn eines Planeten erreichen könnte, ist gleich der Summe der absoluten Werte der zugehörigen Koeffizienten N_i . Dadurch ist der Exzentrizität eines jeden Planeten eine numerisch angebbare obere Grenze gesetzt.

Es folgt aus (289) und (291)

$$(294) \quad \begin{cases} e \sin \Pi = \sum_i N_i \sin(g_i t + \beta_i) \\ e \cos \Pi = \sum_i N_i \cos(g_i t + \beta_i). \end{cases}$$

Durch Division dieser Gleichungen erhält man die Formel:

$$(295) \quad \text{tang } \Pi = \frac{\sum_i N_i \sin (g_i t + \beta_i)}{\sum_i N_i \cos (g_i t + \beta_i)},$$

mit der die säkularen Aenderungen der Perihellänge berechnet werden können. Auch hinsichtlich dieser Aenderungen kann aus den vorstehenden Gleichungen ein allgemeiner Schluss gezogen werden.

Weisen wir dem Index i einen bestimmten aus der Reihe $1, 2, 3 \dots n$ beliebig herausgegriffenen Wert j zu. Es ist

$$\cos (\Pi - g_j t - \beta_j) = \cos \Pi \cos (g_j t + \beta_j) + \sin \Pi \sin (g_j t + \beta_j).$$

Multiplizieren wir diese Gleichung mit e und setzen rechts für $e \sin \Pi$ bzw. für $e \cos \Pi$ die Ausdrücke (294) ein. Durch Gruppierung der dadurch entstandenen Glieder der rechten Seite der obigen Gleichung erhält man dort, wo i verschieden von j ist,

$$N_i \cos (g_i t + \beta_i) \cos (g_j t + \beta_j) + N_i \sin (g_i t + \beta_i) \sin (g_j t + \beta_j) - N_i \cos [(g_i - g_j) t + \beta_i - \beta_j]$$

und and der Stelle, wo i gleich j ist,

$$N_i \cos^2 (g_j t + \beta_j) + N_i \sin^2 (g_j t + \beta_j) = N_i.$$

Es ist deshalb

$$(296) \quad e \cos (\Pi - g_j t - \beta_j) = N_j + \sum_i N_i \cos [(g_i - g_j) t + \beta_i - \beta_j].$$

Unter dem Summenzeichen sind für i alle ganze Zahlen von 0 bis 1 zu setzen mit Ausnahme der Zahl j . Diese Summe kann ihrem absoluten Werte nach nicht grösser werden als die Summe der absoluten Werte der darin enthaltenen Koeffizienten N_i . Tritt also der Fall ein, dass der absolute Wert des Koeffizienten N_j grösser ist als die Summe der absoluten Werte aller übrigen Koeffizienten N_i , dann kann die rechte Seite der Gleichung (296) nie Null werden, d. h. der Winkel

$$(297) \quad \varphi = \Pi - g_j t - \beta_j$$

kann nie die Grösse eines rechten Winkels erreichen, sondern nur zwischen bestimmten Grenzwerten $-\frac{\pi}{2} < -\varphi_0 < \varphi < \varphi_0 < +\frac{\pi}{2}$ schwanken können. Es ist deshalb

$$|\varphi| < |\varphi_0|.$$

Wie ich vorstehend bewiesen habe, verlaufen die säkularen Aenderungen der Perihellänge Π gerade so, als ob die Ebenen der Bahnen der Planeten zusammenfallen würden; man kann also bei der Betrachtung der säkularen Aenderungen von Π diese Ebenen als in die Grundebene umgeklappt denken. In einem solchen Fall ist Π ein ebener Winkel, den der aus dem Mittelpunkt der Sonne, dem Ursprung unseres Koordinatensystems $X-Y-Z$, gegen das Perihel des in Betracht gezogenen Planeten gerichtete Halbstrahl OP mit der X -Achse dieses Koordinatensystems ein-

schliesst. Denken wir uns in der Ebene $X-Y$ einen anderen Halbstrahl OS , der im Initialmoment $t=0$ mit der X -Achse den Winkel β_j gebildet hatte und der sich, durch O ständig hindurchgehend, mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit g_j in der $X-Y$ -Ebene dreht. Der Winkel, den dieser Halbstrahl OS mit der X -Achse zur Zeit t einschliesst, ist offenbar gleich

$$\alpha = \beta_j + g_j t.$$

Es folgt aus den vorstehenden Gleichungen

$$|\Pi - \alpha| < \varphi_0.$$

Der gegen das Perihel gerichtete Halbstrahl OP kann sich von dem Halbstrahl OS nie mehr entfernen als um die Winkelgrösse φ_0 . Weil sich der Halbstrahl OS in der Ebene $X-Y$ mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ständig dreht, wird er den Halbstrahl OP mitziehen und vorschieben, so dass dieser, ähnlich der mittleren Bewegung n des Planeten, eine mittlere Bewegung g_j aufweisen wird. Eine solche mittlere Bewegung wird nur dann sicherlich stattfinden, wenn der absolute Wert eines der Koeffizienten N_1, N_2, \dots, N_n die Summe der absoluten Werte der übrigen Koeffizienten übersteigt.

Die säkularen Aenderungen der Elemente p und q oder der Elemente i und Ω sind im vorliegenden Falle, wo wir einen bestimmten Planet in Betracht ziehen, wegen (284) durch die Ausdrücke nachstehender Form veranschaulicht:

$$(298) \quad \left\{ \begin{array}{l} p = \sum_i N_i \sin(g_i t + \beta_i) \\ q = \sum_i N_i \cos(g_i t + \beta_i). \end{array} \right.$$

Weil im vorliegenden Falle wegen (287) $g_1=0$ ist, können die obigen Ausdrücke wie folgt geschrieben werden:

$$(299) \quad \left\{ \begin{array}{l} p = N_1 \sin \beta_1 + N_2 \sin(g_2 t + \beta_2) + \dots + N_n \sin(g_n t + \beta_n) \\ q = N_1 \cos \beta_1 + N_2 \cos(g_2 t + \beta_2) + \dots + N_n \cos(g_n t + \beta_n). \end{array} \right.$$

Es ist nach (243)

$$(300) \quad p = \text{tang } i \sin \Omega \quad q = \text{tang } i \cos \Omega$$

d. h.

$$\text{tang}^2 i = p^2 + q^2.$$

Setzt man in die vorstehende Formel die Ausdrücke (298) ein, dann wird

$$(301) \quad \text{tang}^2 i = \sum_i N_i^2 + 2 \sum_i \sum_j N_i N_j \cos[(g_i - g_j)t + \beta_i - \beta_j]$$

wobei in der Doppelsumme i verschieden von j sein soll.

Diese Formel dient zur Berechnung der säkularen Aenderungen der Neigung i der Bahnebene des in Betracht gezogenen Planeten.

Auf dieselbe Weise wie vorstehend gezeigt worden ist, dass die Exzentrizität e einen angebbaren Grösstwert nie übersteigen kann, ergibt es sich auch hier

$$(302) \quad \lim . \sup . \text{tang } i = |N_1| + |N_2| + \dots + |N_n|.$$

Es folgt aus den Gleichungen (298) und (300)

$$(303) \quad \begin{cases} \text{tang } i \sin \Omega = \sum_i N_i \sin (g_i t + \beta_i) \\ \text{tang } i \cos \Omega = \sum_i N_i \cos (g_i t + \beta_i) . \end{cases}$$

Durch Division dieser Gleichungen erhält man die Formel

$$(304) \quad \text{tang } \Omega = \frac{\sum_i N_i \sin (g_i t + \beta_i)}{\sum_i N_i \cos (g_i t + \beta_i)},$$

mit der die säkularen Aenderungen der Länge Ω des aufsteigenden Knotens berechnet werden können.

Auf dieselbe Weise, wie mittels (294) und (295) für Π , kann auch hier bewiesen werden, dass falls der absolute Wert eines der Koeffizienten N_i grösser ist als die Summe der absoten Werte aller übrigen Koeffizienten N_i , der aufsteigende Knoten eine mittlere Bewegung besitzt.

Ausgehend von den Gleichungen (189) und (190) können die säkularen Aenderungen des Elementes τ oder vermittels (113) jene der mittleren Länge ϵ der Epoche berechnet werden. Diese, übrigens sehr kleine Aenderungen kommen für die Ziele dieses Werkes gar nicht in Betracht, weshalb ich mich mit ihnen nicht zu befassen brauche.

Ueber die bisher durchgeführten numerischen Ausrechnungen der säkularen Aenderungen der Elemente e , Π , Ω , i wird im vierten Abschnitt dieses Werkes ausführlich berichtet werden. Diese haben ergeben, dass die Exzentrizitäten der Bahnkurven in die Neigungen der Bahnebenen aller Hauptplaneten zwischen eng gezogenen numerisch angebbaren Grenzen schwanken. Dadurch erscheint im Verein mit der säkularen Unveränderlichkeit der grossen Halbachsen der Planetenbahnen die Stabilität unseres Planetensystems auf unermesslich lange Zeiträume sichergestellt.

ZWEITER ABSCHNITT

Die Drehbewegungen der Erde

KAPITEL IV

Ableitung der für das Studium der Drehbewegungen der Erde erforderlichen Sätze und Gleichungen

§ 23. Das tellurische Massenpunktsystem. Unsere Erde samt ihrer Hydrosphäre und Atmosphäre bildet ein materielles System, in welchem alle drei Agregatzustände der Materie vertreten sind. Denken wir uns dasselbe in beliebig viele derart kleine Elemente zerteilt, dass jedes derselben als ein diskreter Massenpunkt aufgefasst werden könne, dann gelangen wir zur Vorstellung des tellurischen Massenpunktsystems, das den folgenden Gesetzen gehorchen wird. Alle Elemente desselben ziehen sich nach dem Newtonschen Gravitationsgesetz gegenseitig an und werden von den übrigen Mitgliedern unseres Planetensystems ebenfalls angezogen. Von diesen letzteren müssen in den nachfolgenden Untersuchungen nur die Sonne und der Erdmond in Betracht gezogen werden, die Sonne wegen ihrer Grösse, der Mond wegen seiner Nähe; die Wirkung der Planeten auf den Gang der hier zu besprechenden Erscheinungen ist verschwindend klein. Die Anziehung der Sonne bzw. des Mondes auf die Elemente des tellurischen Massenpunktsystems sind als äussere auf dieses System einwirkenden Kräfte zu betrachten, während die gegenseitigen Anziehungen der einzelnen Elemente dieses Systems als innere Kräfte des Systems aufgefasst werden müssen. Neben diesen inneren Gravitationskräften sind im System selbst noch andere Kräfte wirksam, so die Reibungswiderstände als

auch verschiedene Spannungen und Molekularkräfte die dem eigentlichen Erdkörper die Eigenschaften eines festen Körpers, der Hydrosphäre die Eigenschaften der Flüssigkeit und der Atmosphäre die Eigentümlichkeiten des Gases verleihen. Welcher Natur diese inneren Kräfte des Systems auch sein mögen, gehorchen sie alle dem Newtonschen Prinzip der Wirkung und Gegenwirkung, nach dem die Kraft p_{ik} , mit der ein beliebiger Massenpunkt m_k auf einen anderen m_i wirkt, gleich und entgegengerichtet ist der Kraft p_{ki} , mit der der Massenpunkt m_i auf jenen m_k einwirkt; diese beiden Kräfte wirken in derselben Geraden: der Verbindungslinie jener zwei Massenpunkte. Diese Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung ist durch die nachstehende Vektorgleichung zum Ausdruck gebracht:

$$(1) \quad p_{ik} + p_{ki} = 0.$$

Um anzugeben, dass die beiden Kräfte in derselben Geraden wirken, sei \mathfrak{R}_i der Ortsvektor des Massenpunktes m_i und \mathfrak{R}_k jener des Massenpunktes m_k in bezug auf einen beliebigen Aufpunkt, dann ist die obige Forderung ausgedrückt durch die nachstehende Vektorgleichung:

$$(2) \quad [\mathfrak{R}_i p_{ik}] + [\mathfrak{R}_k p_{ki}] = 0.$$

Aus den vorstehenden Gleichungen lässt sich eine Reihe wichtiger Sätze und Gleichungen ableiten, was im nachstehenden geschehen soll.

§ 24. Die Impulssätze. Sei m_i ein beliebiger Massenpunkt des in Betracht gezogenen materiellen Systems und \mathfrak{P}_i die Resultante aller äusseren auf diesen Massenpunkt einwirkenden Kräfte. Die Resultante aller inneren auf m_i einwirkenden Kräfte erscheint nach den im vorhergehenden Paragraphen festgelegten Bezeichnungen durch $\sum p_{ik}$ veranschaulicht, wobei die Summe über das ganze System zu erstrecken ist. Denkt man sich im Raume ein ruhendes Koordinatensystem $X_1 - Y_1 - Z_1$ mit dem Ursprung O_1 festgelegt und ist \mathfrak{R}_i der Ortsvektor von m_i bezüglich dieses Systems, so kann der Massenpunkt m_i , wofern man auf ihn alle in Betracht kommenden inneren Kräfte einwirken lässt, als freibeweglich betrachtet werden und es besteht deshalb die Gleichung:

$$(3) \quad m_i \frac{d^2 \mathfrak{R}_i}{dt^2} = \mathfrak{P}_i + \sum_k p_{ik},$$

worin t die Zeit bedeutet.

Solche Bewegungsgleichungen lassen sich für alle Massenpunkte des Systems, deren Anzahl n sein möge, aufstellen, d. h. man kann dem Index i die Werte $1, 2, \dots, n$ zuweisen. Es gelten also folgende n Gleichungen:

$$(4) \quad m_i \frac{d^2 \mathfrak{R}_i}{dt^2} = \mathfrak{P}_i + \sum_k p_{ik}. \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Bildet man die Summe aller n Gleichungen (4), so wird rechtsstehend in der Doppelsumme $\sum_i \sum_k \mathfrak{p}_{ik}$ jede Kombination der Indices i und k zweimal vertreten sein: durch das Glied \mathfrak{p}_{ik} und das Glied \mathfrak{p}_{ki} . Nachdem sich aber diese paarweise auftretenden Glieder wegen (441) gegenseitig tilgen, so gelangt man zur folgenden Gleichung:

$$(5) \quad \sum m_i \frac{d^2 \mathfrak{R}_i}{dt^2} = \sum \mathfrak{P}_i.$$

Multipliziert man die Gleichungen (4) der Reihe nach vektoriell mit $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \dots, \mathfrak{R}_n$ und bildet die Summe der so erhaltenen Gleichungen, so wird man, nachdem sich, ähnlich wie früher, die paarweise auftretenden Glieder $[\mathfrak{R}_i \mathfrak{p}_{ik}]$ und $[\mathfrak{R}_k \mathfrak{p}_{ki}]$ wegen (2) gegenseitig tilgen, zur folgenden Gleichung gelangen:

$$(6) \quad \sum m_i \left[\mathfrak{R}_i \frac{d^2 \mathfrak{R}_i}{dt^2} \right] = \sum [\mathfrak{R}_i \mathfrak{P}_i].$$

Es stellt

$$(7) \quad \mathfrak{K} = \sum \mathfrak{P}_i$$

die Resultante aller auf das in Betracht gezogene materielle System einwirkenden äusseren Kräfte und

$$(8) \quad \mathfrak{M}_1 = \sum [\mathfrak{R}_i \mathfrak{P}_i]$$

das Drehmoment dieser Kräfte in bezug auf O_1 dar. Man hat also:

$$(9) \quad \sum m_i \frac{d^2 \mathfrak{R}_i}{dt^2} = \mathfrak{K}$$

$$(10) \quad \sum m_i \left[\mathfrak{R}_i \frac{d^2 \mathfrak{R}_i}{dt^2} \right] = \mathfrak{M}_1.$$

Es stellt

$$(11) \quad \frac{d\mathfrak{R}_i}{dt} = \mathfrak{V}_i$$

den Geschwindigkeitsvektor des Massenpunktes m_i im ruhenden Koordinatensystem dar, so dass

$$(12) \quad \frac{d^2 \mathfrak{R}_i}{dt^2} = \frac{d \mathfrak{B}_i}{dt}$$

ist. Es ist ferner

$$\left[\mathfrak{R}_i \frac{d^2 \mathfrak{R}_i}{dt^2} \right] = \frac{d}{dt} \left[\mathfrak{R}_i \frac{d \mathfrak{R}_i}{dt} \right] = \frac{d}{dt} [\mathfrak{R}_i \mathfrak{B}_i],$$

so dass man statt (9) und (10) folgende zwei Gleichungen erhält:

$$(13) \quad \frac{d}{dt} \sum m_i \mathfrak{B}_i = \mathfrak{K}$$

$$(14) \quad \frac{d}{dt} \sum m_i [\mathfrak{R}_i \mathfrak{B}_i] = \mathfrak{M}_1.$$

Diese zwei Gleichungen drücken die sogenannten Impulssätze aus. Es stellt nämlich $\sum m_i \mathfrak{B}_i$ den Gesamtimpuls oder die Quantität der Bewegung des in Betracht gezogenen materiellen Systems dar, welche Benennungen man auch durch „Trieb“ zu ersetzen pflegt. Der Ausdruck $\sum m_i [\mathfrak{R}_i \mathfrak{B}_i]$ stellt die Summe der Momente der Quantitäten der Bewegung der einzelnen Massenpunkte bezüglich des Aufpunktes O_1 dar; diese Benennung lässt sich durch die kürzere „Drehimpuls“ oder, wenn das System ein fester Körper ist, durch „Schwung“ ersetzen. Es besagt also die Gleichung (13), dass die zeitliche Aenderung des Triebes gleich ist der Resultante der äusseren Kräfte, während die Gleichung (14) besagt, dass die zeitliche Aenderung des Drehimpulses gleich ist dem Drehmoment der äusseren Kräfte in bezug auf den ruhenden Aufpunkt O_1 .

§ 25. Der Schwerpunktsatz. Ist S der Schwerpunkt, richtiger gesagt der Massenmittelpunkt des in Betracht gezogenen materiellen Systems und \mathfrak{G} der Ortsvektor von S , so ist

$$(15) \quad M \mathfrak{G} = \sum m_i \mathfrak{R}_i,$$

worin

$$(16) \quad M = \sum m_i$$

die Gesamtmasse des Systems bedeutet. Zweimalige Differentiation von (15) nach der Zeit t ergibt

$$M \frac{d^2 \mathfrak{G}}{dt^2} = \sum m_i \frac{d^2 \mathfrak{R}_i}{dt^2},$$

d. h. wegen (9)

$$(17) \quad M \frac{d^2 \mathfrak{S}}{dt^2} = \mathfrak{K}.$$

Diese differentielle Bewegungsgleichung des Schwerpunktes S ist identisch mit jener eines freibeweglichen Massenpunktes von der Masse M , welcher dem alleinigen Einfluss der durch (7) gegebenen Resultante \mathfrak{K} aller äusseren Kräfte un-erworfen wäre. Es folgt daraus:

Der Schwerpunkt des Massenpunktsystems bewegt sich so, als ob alle Massen und alle äusseren Kräfte in demselben vereinigt wären. Die inneren Kräfte üben keinen Einfluss auf die Bewegung des Schwerpunktes aus.

§ 26. Unabhängigkeit der Drehbewegung von der fortschreitenden Bewegung. Man nehme vorläufig an, dass das in Betracht gezogene materielle System ein starrer Körper sei und frage nach der Bewegung dieses Körpers um seinen Schwerpunkt S . Zur Beantwortung dieser Frage verlege man den Ursprung O_1 des bisher als ruhend im Raume angenommenen Koordinatensystems $X_1 - Y_1 - Z_1$ in den Schwerpunkt S und bezeichne dieses neue, translatorisch im Raume, also ohne Drehung sich bewegende Koordinatensystem mit $X - Y - Z$ und seinen mit dem Schwerpunkt S zusammenfallenden Ursprung mit O . Die Ortsvektoren der Massenpunkte $m_1, m_2 \dots m_n$ bezüglich O seien mit $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \dots \mathbf{r}_n$ bezeichnet. Es ist dann

$$(18) \quad \mathfrak{R}_i = \mathfrak{S} + \mathbf{r}_i \quad i = 1, 2 \dots n$$

und zufolge von (15) und (16)

$$M \mathfrak{S} = \sum m_i (\mathfrak{S} - \mathbf{r}_i) = M \mathfrak{S} - \sum m_i \mathbf{r}_i,$$

d. h.

$$(19) \quad \sum m_i \mathbf{r}_i = 0,$$

woraus wieder folgt

$$(20) \quad \sum m_i \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = 0.$$

Setzt man (18) in (10) ein, so wird

$$\sum m_i \left[(\mathfrak{S} + \mathbf{r}_i) \left(\frac{d^2 \mathfrak{S}}{dt^2} + \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} \right) \right] = \mathfrak{M}_1$$

d. h.

$$M \left[\mathfrak{S} \frac{d^2 \mathfrak{S}}{dt^2} \right] - \left[\frac{d^2 \mathfrak{S}}{dt^2} \sum m_i \mathbf{r}_i \right] + \left[\mathfrak{S} \sum m_i \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} \right] + \sum m_i \left[\mathbf{r}_i \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} \right] = \mathfrak{M}_1,$$

und wegen (17), (19) und (20)

$$(21) \quad \sum m_i \left[\mathbf{r}_i \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} \right] = \mathfrak{M}_1 - [\mathfrak{S} \mathfrak{K}].$$

Das Moment der äusseren Kräfte \mathfrak{P}_i in bezug auf den Schwerpunkt S , d. h. in bezug auf den beweglichen Aufpunkt O ist dargestellt durch:

$$\mathfrak{M} = \sum [\mathbf{r}_i \mathfrak{P}_i] = \sum [(\mathfrak{R}_i - \mathfrak{S}) \mathfrak{P}_i] = \sum [\mathfrak{R}_i \mathfrak{P}_i] - [\mathfrak{S} \sum \mathfrak{P}_i],$$

d. h. wegen (8) und (7)

$$(22) \quad \mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 - [\mathfrak{S} \mathfrak{K}].$$

Es folgt also aus (21) und (22)

$$(23) \quad \sum m_i \left[\mathbf{r}_i \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} \right] = \mathfrak{M}.$$

Die Bewegung des starren Körpers um seinen Schwerpunkt hat drei Freiheitsgrade und ist durch die obige Vektorgleichung, welche dreien skalaren Gleichungen äquivalent ist, eindeutig gegeben. Diese Vektorgleichung ist von derselben Form wie die Gleichung (10), wo der Aufpunkt O_1 im Raume unbeweglich angenommen wurde, und besagt, dass sich der in Betracht gezogene starre Körper um seinen Schwerpunkt so drehe, als ob dieser letztere unbeweglich wäre. Diese Bewegung hängt nur von dem Drehmoment \mathfrak{M} der äusseren Kräfte und nicht von deren Resultante \mathfrak{K} ab.

Die Gleichungen (17) und (23) drücken, zusammengenommen, den Satz von der Unabhängigkeit der Translations- und der Rotationsbewegung aus. Nach (17) reduziert sich das Problem der Bewegung des Schwerpunktes eines freibeweglichen starren Körpers auf das Problem der Bewegung eines freien Massenpunktes, nach (23) reduziert sich das Problem der Drehung dieses Körpers um einen unbeweglichen Punkt. Wir haben deshalb im ersten Abschnitt dieses Buches bei der Beschreibung der Bewegung des Schwerpunktes der Erde oder jenes eines beliebigen Planeten nicht deren Bewegungen um ihre Schwerpunkte in Betracht ziehen müssen, und werden jetzt, wo es sich um die Beschreibung der Bewegung der Erde um ihren Schwerpunkt handelt, nicht die fortschreitende Bewegung desselben berücksichtigen müssen.

Die Gleichungen (17) und (23) gelten nicht nur für den Fall eines starren Körpers, sondern auch für den allgemeineren Fall eines beliebigen materiellen Systems, das den Voraussetzungen des § 23 genügeleistet, nur ist in diesem Falle, wenn das System mehr als sechs Freiheitsgrade besitzt, durch jene zwei Vektorgleichungen die Bewegung des Systems nicht gegeben.

§ 27. Einführung beweglicher Bezugssysteme. Auf dieselbe Weise, auf welche aus (10) die Gleichung (14) abgeleitet worden ist, folgt aus (23)

$$(24) \quad \frac{d}{dt} \sum m_i [r_i v_i] = \mathfrak{M},$$

worin v_i die Geschwindigkeit des Massenpunktes m_i im Bezugssystem $X—Y—Z$ bedeutet, welches wir das „ruhende“ nennen wollen, weil in demselben alles so vor sich geht als ob es tatsächlich ruhend wäre. Aus diesem Grunde wollen wir die Bewegungen und die Geschwindigkeiten in diesem Bezugssystem kurz die „absoluten“ benennen.

Der Vektor

$$(25) \quad \mathfrak{G} = \sum m_i [r_i v_i]$$

stellt also den absoluten Drehimpuls des in Betracht gezogenen materiellen Systems bezüglich O dar, so dass es ist:

$$(26) \quad \frac{d \mathfrak{G}}{dt} = \mathfrak{M}.$$

Es ist oft von Vorteil, ja sogar notwendig, den Betrachtungen ein Bezugssystem $x—y—z$ zu Grunde zu legen, welches gegen das ruhende Drehbewegungen ausführt. Man nehme dabei an, dass der Ursprung des beweglichen Koordinatensystems $x—y—z$ mit dem Ursprung O des ruhenden Systems $X—Y—Z$ zusammenfalle und dass jenes bewegliche System im betrachteten Augenblicke t gegen das ruhende eine Drehbewegung ausführe, die wegen obiger

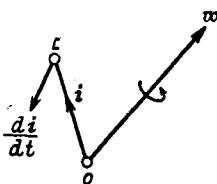


Fig. 6.

Voraussetzung nur um eine durch O hindurchgehende instantane Drehungsachse erfolgen kann. Diese Drehbewegung sei durch den Vektor w veranschaulicht, d. h. dieser Vektor falle in die instantane Drehachse des beweglichen Systems, sei nach

jener Seite dieser Achse gerichtet, von welcher aus gesehen die Drehung im positiven Sinn, d. h. entgegengesetzt dem Uhrzeiger erfolgt, und der Modul w des Vektors w sei gleich der augenblicklichen Winkelgeschwindigkeit der Drehbewegung.

Seien i, j, k die in die Achsenrichtungen x, y, z fallenden Einheitsvektoren, so werden die Endpunkte dieser Vektoren infolge der Drehung des beweglichen Systems im Zeitpunkte t Geschwindigkeiten aufweisen, die, wie aus Fig. 6 ersichtlich, dargestellt sind durch

$$(27) \quad \frac{di}{dt} = [w i]; \quad \frac{dj}{dt} = [w j]; \quad \frac{dk}{dt} = [w k].$$

Bildet man das skalare Vektorprodukt $(\mathfrak{G} i)$, so ist nach der bekannten Regel für die Differentiation eines solchen Produktes

$$\frac{d}{dt} (\mathfrak{G} i) = \frac{d\mathfrak{G}}{dt} i + \mathfrak{G} \frac{di}{dt},$$

d. h. wegen der vorstehenden Gleichung

$$(28) \quad \frac{d\mathfrak{G}}{dt} i = \frac{d}{dt} (\mathfrak{G} i) - \mathfrak{G} [w i].$$

Multipliziert man die Gleichung (26) skalar mit i , so bekommt man mit Benützung der vorstehenden Gleichung

$$(29) \quad \frac{d}{dt} (\mathfrak{G} i) - \mathfrak{G} [w i] = (\mathfrak{M} i).$$

Zwei weitere Gleichungen von derselben Art werden erhalten, wenn man i durch j , bzw. k ersetzt.

Bezeichnet man die Koordinaten des Vektors \mathfrak{G} in bezug auf das bewegliche System mit G_1, G_2, G_3 , jene des Vektors w mit w_1, w_2, w_3 und jene des Vektors \mathfrak{M} mit M_1, M_2, M_3 , so ist

$$(30) \quad \mathfrak{G} = G_1 i + G_2 j + G_3 k$$

$$(31) \quad w = w_1 i + w_2 j + w_3 k$$

$$(32) \quad \mathfrak{M} = M_1 i + M_2 j + M_3 k.$$

Zieht man überdies in Betracht, dass nach der bekannten Regel der Vektorrechnung

$$\mathfrak{G}[\omega i] = \begin{vmatrix} G_1 & G_2 & G_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

ist, so bekommt man statt der Gleichung (29) und der zwei nicht aufgeschriebenen analogen Gleichungen folgende drei:

$$(33) \quad \begin{cases} \frac{dG_1}{dt} + w_2 G_3 - w_3 G_2 = M_1 \\ \frac{dG_2}{dt} + w_3 G_1 - w_1 G_3 = M_2 \\ \frac{dG_3}{dt} + w_1 G_2 - w_2 G_1 = M_3. \end{cases}$$

§ 28. Das mit dem bewegten Körper fest verbundene Bezugssystem.

Ist das in Betracht gezogene materielle System ein starrer Körper, so wird man das soeben benutzte bewegliche Koordinatensystem $x - y - z$ vorteilhaft mit dem Körper selbst fest verbinden. In diesem Falle bedeutet ω auch die instantane Drehgeschwindigkeit des starren Körpers in bezug auf das ruhende Bezugssystem, so dass die absolute Geschwindigkeit v_i des Massenpunktes m_i durch den Ausdruck

$$(34) \quad v_i = [\omega r_i]$$

dargestellt erscheint. Es ist deshalb der durch (25) gegebene Drehimpulsvektor \mathfrak{G} gleich

$$(35) \quad \mathfrak{G} = \Sigma m_i [r_i [\omega r_i]].$$

Im vorliegenden Falle, wo die Massenverteilung eine kontinuierliche ist, wird die obige Summe durch ein Integral zu ersetzen sein, so dass es wird:

$$(36) \quad \mathfrak{G} = \int [r [\omega r]] dm,$$

wobei das Integral über die Gesamtmasse des bewegten Körpers zu erstrecken ist. Es ist nach einem bekannten Satze der Vektorrechnung

$$[a[b c]] = b(c a) - c(a b),$$

so dass man bekommt:

$$(37) \quad \mathfrak{G} = w \int (\mathbf{r} \mathbf{r}) dm - \int \mathbf{r} (w \mathbf{r}) dm.$$

Bezeichnet man die Koordinaten des Ortsvektors \mathbf{r} im beweglichen System mit x, y, z , so ist

$$\mathbf{r} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}$$

$$(\mathbf{r} \mathbf{r}) = x^2 + y^2 + z^2$$

$$(w \mathbf{r}) = w_1 x + w_2 y + w_3 z.$$

Setzt man diese Ausdrücke in die Vektorgleichung (37) ein, so zerfällt dieselbe mit Rücksicht auf (30) in folgende drei skalare Gleichungen:

$$(38) \quad \left\{ \begin{array}{l} G_1 = w_1 \int (y^2 + z^2) dm - w_2 \int xy dm - w_3 \int zx dm \\ G_2 = w_2 \int (z^2 + x^2) dm - w_3 \int yz dm - w_1 \int xy dm \\ G_3 = w_3 \int (x^2 + y^2) dm - w_1 \int zx dm - w_2 \int yz dm. \end{array} \right.$$

Ist das Bezugssystem $x - y - z$ mit dem bewegten Körper derart verbunden, dass die Koordinatenachsen mit den Trägheitshauptachsen, oder vielmehr, weil der Ursprung des Koordinatensystems $x - y - z$ im Schwerpunkt des bewegten Körpers gelegen ist, mit den Zentralhauptachsen des bewegten Körpers zusammenfallen, so wird offenbar

$$(39) \quad \int yz dm = 0; \quad \int zx dm = 0; \quad \int xy dm = 0,$$

weil in diesem Falle die Deviationsmomente des Körpers Null werden. Die Ausdrücke

$$(40) \quad A = \int (y^2 + z^2) dm; \quad B = \int (z^2 + x^2) dm; \quad C = \int (x^2 + y^2) dm$$

stellen dagegen die Trägheitshauptmomente des bewegten Körpers dar. Es wird also

$$(41) \quad G_1 = A w_1; \quad G_2 = B w_2; \quad G_3 = C w_3.$$

Diese Werte, in die Gleichungen (33) eingesetzt, ergeben:

$$(42) \quad \left\{ \begin{array}{l} A \frac{dw_1}{dt} + (C - B) w_2 w_3 = M_1 \\ B \frac{dw_2}{dt} + (A - C) w_3 w_1 = M_2 \\ C \frac{dw_3}{dt} + (B - A) w_1 w_2 = M_3. \end{array} \right.$$

Diese Gleichungen, von Euler (1758) abgeleitet, führen seinen Namen.

§ 29. Die Eulerschen Winkel. Denkt man sich um den gemeinsamen Ursprung O (Fig. 7) des ruhenden und des beweglichen Koordinatensystems eine Kugelfläche beschrieben, so durchdringen die positiven Aeste der Koordinatenachsen

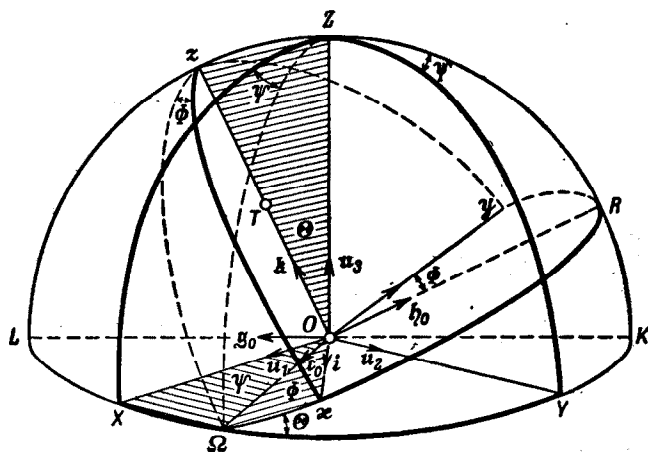


Fig. 7

dieser beiden Systeme die Kugelfläche in den Punkten X, Y, Z bzw. x, y, z , die als Eckpunkte zwei sphärische Dreiecke XYZ und xyz begrenzen, deren Seiten und Winkel je 90° messen. Die Koordinatenebenen $X-Y$ und $x-y$ schneiden sich gegenseitig längs einer durch O gehenden Geraden $O\Omega$, die die Knotenlinie genannt wird. Jener Durchstoßpunkt Ω dieser Geraden mit der erwähnten Kugelfläche, der der Bedingung genügt, dass man auf der positiven Umlaufsrichtung xy nach der positiven Seite (d. h. nach der Seite des positiven Z) der Ebene $X-Y$ gelangt, wird der aufsteigende Knoten genannt und die Richtung $O\Omega$ als die positive Richtung der Knotenlinie betrachtet. Die durch OZ und Oz gelegte Ebene, die der besseren Anschaulichkeit halber zur Bildebene der Figur gewählt wurde,

steht auf der Knotenlinie senkrecht. Der Winkel Ψ , den die Knotenlinie mit der X -Achse einschliesst, wird der Präzessionswinkel, der anschliessende Winkel Φ , den die x -Achse mit der Knotenlinie bildet, der Rotationswinkel genannt, während der zwischen Z und z eingeschlossene Winkel θ den Namen Nutationswinkel führt. Dies sind die drei Eulerschen Winkel, durch welche die Lage des beweglichen Koordinatensystems im ruhenden festgelegt werden kann.

§ 30. Polhodie und Herpolhodie. Bezeichnet man, wie bisher, die in die Richtungen der Achsen x, y, z des beweglichen Koordinatensystems fallenden Einheitsvektoren mit i, j, k und die in die Richtungen der Achsen X, Y, Z des ruhenden Koordinatensystems fallenden Einheitsvektoren mit n_1, n_2, n_3 , so ist die Lage des Rotationsvektors w im beweglichen System gegeben durch

$$(43) \quad w = w_1 i + w_2 j + w_3 k$$

und im ruhenden durch

$$(44) \quad w = \omega_1 n_1 + \omega_2 n_2 + \omega_3 n_3,$$

worin w_1, w_2, w_3 bzw. $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ die Koordinaten des Vektors w im beweglichen bzw. ruhenden System bedeuten. Die Eulerschen Winkel Ψ, θ, Φ vermitteln den Zusammenhang der beiden Systeme und es sollen deshalb die Grössen w_1, w_2, w_3 bzw. $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ mittels dieser Winkel und ihren zeitlichen Ableitungen ausgedrückt werden. Zu diesem Zwecke ist folgendes zu berücksichtigen. Das sphärische Dreieck XYZ (Fig. 7) kann mit dem Dreieck xyz zur Deckung gebracht werden durch folgende drei Drehungen. Man drehe das Dreieck XYZ um OZ , also um n_3 als Achse, um den Winkel Ψ , wodurch es in die Lage ΩKZ gelangt, man drehe weiter um die Knotenlinie $O\Omega$, deren Einheitsvektor mit c_0 bezeichnet werden möge, um den Winkel θ , wodurch man zur Lage ΩRZ gelangt, man drehe schliesslich um Oz , also um k als Achse, um den Winkel Φ wodurch man tatsächlich die Endlage xyz erreicht hat. Alle diese Drehungen sind im positiven Sinn, entgegengesetzt dem Sinne des Uhrzeigers, erfolgt. Bezeichnet man mit $\Psi' = \frac{d\Psi}{dt}$; $\theta' = \frac{d\theta}{dt}$; $\Phi' = \frac{d\Phi}{dt}$ die zeitlichen Aenderungen der Eulerschen Winkel, so ist die aus solchen Aenderungen resultierende Rotationsgeschwindigkeit w nach dem soeben mitgeteiltem dargestellt durch

$$(45) \quad w = \Psi' n_3 + \theta' c_0 + \Phi' k.$$

Bezeichnet man den in die Richtung OR fallenden Einheitsvektor mit h_0 , so folgt aus der Fig. 7

$$\Psi' n_3 = (\Psi' \cos \theta) k + (\Psi' \sin \theta) h_0$$

$$(\Psi' \sin \theta) h_0 = (\Psi' \sin \theta \sin \Phi) i + (\Psi' \sin \theta \cos \Phi) j$$

$$\theta' c_0 = (\theta' \cos \Phi) i - (\theta' \sin \Phi) j,$$

d. h.

$$(46) \quad w = (\Psi' \sin \theta \sin \Phi + \theta' \cos \Phi) i + (\Psi' \sin \theta \cos \Phi - \theta' \sin \Phi) j + (\Psi' \cos \theta + \Phi') k.$$

Auf dieselbe Weise bekommt man, wenn man den in die Richtung OL fallenden Einheitsvektor mit g_0 bezeichnet,

$$\theta' c_0 = (\theta' \cos \Psi) n_1 + (\theta' \sin \Psi) n_2$$

$$\Phi' k = (\Phi' \cos \theta) n_3 + (\Phi' \sin \theta) g_0$$

$$(\Phi' \sin \theta) g_0 = (\Phi' \sin \theta \sin \Psi) n_1 - (\Phi' \sin \theta \cos \Psi) n_2,$$

d. h. wegen (45)

$$(47) \quad w = (\theta' \cos \Psi + \Phi' \sin \theta \sin \Psi) n_1 + (\theta' \sin \Psi - \Phi' \sin \theta \cos \Psi) n_2 + (\Psi' + \Phi' \cos \theta) n_3.$$

Aus (43) und (46) folgt:

$$(48) \quad \left\{ \begin{array}{l} w_1 = \Psi' \sin \theta \sin \Phi + \theta' \cos \Phi \\ w_2 = \Psi' \sin \theta \cos \Phi - \theta' \sin \Phi \\ w_3 = \Psi' \cos \theta + \Phi' . \end{array} \right.$$

Aus (44) und (47) folgt:

$$(49) \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega_1 = \theta' \cos \Psi + \Phi' \sin \theta \sin \Psi \\ \omega_2 = \theta' \sin \Psi - \Phi' \sin \theta \cos \Psi \\ \omega_3 = \Psi' + \Phi' \cos \theta . \end{array} \right.$$

Hat man die Eulerschen Winkel Ψ, θ, Φ als Funktionen der Zeit t dargestellt, so stellen die Ausdrücke (48) und (49) für einen beliebig angenommenen Wert von t die Koordinaten eines und denselben Punktes dar: des Endpunktes P des Rotationsvektors ω . Wird t als variabel angesehen, so stellen uns die obigen Ausdrücke zwei verschiedene Kurven dar. Durch (48) ist jene Kurve dargestellt, die der Endpunkt P des Rotationsvektors ω im Laufe der Zeit im beweglichen, also mit dem bewegten Körper fest verbundenen Bezugssystem beschreibt; diese Kurve wird die Polhodie genannt. Durch (49) ist dagegen jene Kurve dargestellt, die der Punkt P im ruhenden Bezugssystem, also im Raume beschreibt; diese Kurve wird die Herpol-

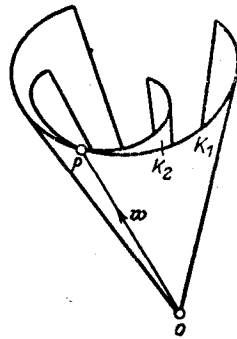


Fig. 8

hodie genannt. Wird ω als Ortsvektor des Punktes P aufgefasst, so ist (46) die vektorielle Gleichung der Polhodie und (47) jene der Herpolhodie. Der Rotationsvektor ω beschreibt deshalb im Laufe der Zeit im bewegten Körper einen Kegel, dessen Spitze der Punkt O und dessen Leitkurve die Polhodie ist; dieser Kegel wird der Polhodiekegel genannt. Der Rotationsvektor ω beschreibt dagegen im Raume einen Kegel, dessen Spitze der Punkt O und dessen Leitkurve die Herpolhodie ist; dieser Kegel wird der Herpolhodiekegel genannt. Der Herpolhodiekegel ist im Raume unbeweglich, der Polhodiekegel im Körper unbeweglich, aber im Raume beweglich. In jedem Zeitpunkte haben diese beiden Kegel eine Erzeugende, den diesem Zeitpunkt entsprechenden Rotationsvektor ω gemeinsam, d. h. die diesem Zeitpunkt entsprechende instantane Rotationsachse. Um diese Achse führt der Körper und der mit ihm fest verbundene Polhodiekegel die instantane Drehbewegung aus, wodurch im nächsten Augenblicke die nächstliegende Erzeugende des Polhodiekegels zur Koinzidenz mit der nächstgelegenen Erzeugenden des Herpolhodiekegels gelangt. Daraus folgt, dass sich der Polhodiekegel und der Herpolhodiekegel in jedem Augenblicke längs ihrer gemeinsamen Erzeugenden gegenseitig berühren, mit anderen Worten: der Polhodiekegel rollt ohne zu gleiten auf dem Herpolhodiekegel. Es kann deshalb die Drehbewegung des in Betracht gezogenen Körpers auf folgende Weise beschrieben werden: Auf einem im Raume unbeweglichen Kegel K_1 (Herpolhodiekegel) rollt ohne zu gleiten ein anderer Kegel K_2 (Polhodiekegel), den damit fest verbundenen Körper mittragend. (Fig. 8).

§ 31. Einiges über das Gravitationsfeld raumfüllender Massen. Die Ergebnisse des ersten Abschnittes dieses Buches sind aus der Voraussetzung abgeleitet worden, die Mitglieder unseres Planetensystems ziehen sich gegenseitig derart an, als ob die Masse eines jeden derselben in seinem Massenmittelpunkt konzentriert wäre. Jetzt ist es am Platze, die Berechtigung dieser Annahme, die die Himmelskörper als diskrete Massenpunkte auffasst, zu überprüfen. Nach dem Newtonschen Gravitationsgesetz zieht eine im Punkte M konzentrierte Masse m die in einem anderen beliebigen Punkte S des Raumes befindliche Masseneinheit mit einer Kraft an, die durch die Formel

$$(50) \quad \mathfrak{F} = -f \frac{m}{r^2} \mathbf{l}$$

dargestellt ist. In derselben bedeutet f die Gravitationskonstante, \mathbf{l} den Ortsvektor des Punktes S in bezug auf den Punkt M , und l den Modul dieses Vektors. Durch

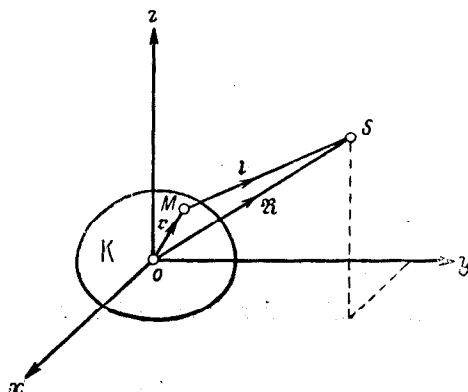


Fig. 9

die obige Formel ist das durch die punktförmige Masse m geschaffene Gravitationsfeld mathematisch dargestellt. Wir wollen nun die Frage stellen und beantworten, wie dieses Gravitationsfeld beschaffen sein wird, wenn wir die punktförmige Masse m durch eine raumfüllende Masse M ersetzt uns denken. Ziehen wir zu diesem Zwecke einen in der Fig. 9 durch K dargestellten Massenkörper beliebiger, aber endlicher Abmessungen in Betracht; hinsichtlich der Form dieses Körpers und hinsichtlich der Verteilung der Materie in seinem Innern brauchen wir vorläufig keine besondere Voraussetzung machen. Legen wir in den Massenmittelpunkt dieses Körpers den Ursprung O eines orthogonalen Koordinatensystems x — y — z und orientieren wir dieses System derart, dass seine Achsen mit den Trägheitshauptachsen des Körpers K zusammenfallen. Es ergibt sich dann folgendes.

Das den Punkt M umfassende unendlich kleine Massenelement dm des Körpers K ruft in dem ausserhalb des Körpers K befindlichen Punkte S , d. h. an den hier sich zu denkenden Masseneinheit eine gravitationelle Feldkraft $d\mathfrak{F}$ hervor, die durch den Ausdruck

$$(51) \quad d\mathfrak{F} = -f \frac{1}{l} dm$$

dargestellt ist. Die von der Gesamtmasse M des Körpers K herrührende Feldkraft wird durch das Vektorintegral

$$(52) \quad \mathfrak{F} = - \int_M f \frac{1}{l} dm$$

veranschaulicht sein, wobei das Integral sich über die gesamte Masse M des Körpers K zu erstrecken hat.

Es ist, wie sofort ersichtlich,

$$-f \frac{1}{l} dm = \text{grad} \frac{f dm}{l},$$

so dass man statt (52) erhält:

$$\mathfrak{F} = \int_M \text{grad} \frac{f dm}{l}.$$

Weil, ganz allgemein, eine beliebige, auch unendliche Summe der Gradienten von Skalaren gleich ist dem Gradient der Summe dieser Skalaren, so bekommt man:

$$(53) \quad \mathfrak{F} = \text{grad} \int_M \frac{f dm}{l}.$$

Setzt man also:

$$(54) \quad U = \int_M \frac{f dm}{l},$$

so wird

$$(55) \quad \mathfrak{F} = \text{grad} U.$$

Dadurch erscheint die Feldkraft \mathfrak{F} des in Betracht gezogenen Gravitationsfeldes als der Gradient einer skalaren Grösse U dargestellt, die man als die Kräftefunktion zu bezeichnen pflegt.

Bezeichnet \mathfrak{R} den Ortsvektor von S in bezug auf O und r den Ortsvektor von M in bezug auf O , so ist

$$(56) \quad l = \mathfrak{R} - r$$

d. h.

$$ll = \mathfrak{R}\mathfrak{R} - 2\mathfrak{R}r + rr$$

oder, wenn man den Modul von \mathfrak{R} mit R , und den Modul von r mit r bezeichnet,

$$l^2 = R^2 - 2\mathfrak{R}r + r^2.$$

Es folgt aus dieser Gleichung

$$(57) \quad \frac{1}{l} = \frac{1}{R} \left\{ 1 - 2\frac{\mathfrak{R}r}{R^2} + \frac{r^2}{R^2} \right\}^{-\frac{1}{2}}.$$

Setzt man voraus, dass $r < R$, d. h. $\mathfrak{R}r \leq Rr$; $\mathfrak{R}r < R^2$ ist, entwickelt den obigen Ausdruck in eine Binomialreihe und begnügt sich mit den ersten Gliedern derselben, so wird

$$(58) \quad \frac{1}{l} = \frac{1}{R} \left\{ 1 + \frac{\mathfrak{R}r}{R^2} - \frac{1}{2} \frac{r^2}{R^2} + \frac{3}{8} \cdot \frac{4(\mathfrak{R}r)^2}{R^4} \right\}.$$

Setzt man dies in (54) ein, so bekommt man:

$$(59) \quad U = \frac{f}{R} \int_M dm + \frac{f}{R^3} \left(\mathfrak{R} \int_M r dm \right) - \frac{f}{2R^3} \int_M r^2 dm + \frac{3}{2} \cdot \frac{f}{R^5} \int_M (\mathfrak{R}r)^2 dm.$$

Das Integral

$$\int_M dm = M$$

stellt die Gesamtmasse des Körpers K dar. Es ist ferner, weil der Aufpunkt O der Vektoren r im Massenmittelpunkt des Körpers K gelegen ist,

$$\int_M r dm = 0.$$

Es ist also

$$(60) \quad U = f \frac{M}{R} - \frac{1}{2} \cdot \frac{f}{R^3} \int_M r^2 dm + \frac{3}{2} \cdot \frac{f}{R^5} \int_M (\mathfrak{R} r)^2 dm.$$

Bezeichnet man mit x, y, z die Koordinaten des Punktes M , und mit X, Y, Z jene des Punktes S , so ist

$$(61) \quad \begin{cases} r = x i + y j + z k \\ \mathfrak{R} = X i + Y j + Z k, \end{cases}$$

worin i, j, k die Einheitsvektoren der Achsenrichtungen des Koordinatensystems bedeuten. Es ist also

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$$

$$\mathfrak{R} r = X x + Y y + Z z$$

$$(\mathfrak{R} r)^2 = X^2 x^2 + Y^2 y^2 + Z^2 z^2 + 2 X Y x y + 2 Y Z y z + 2 Z X z x.$$

Setzt man diese Ausdrücke in (60) ein, so werden die Glieder mit den Produkten xy, yz, zx verschwinden, weil die Koordinatenachsen, wie festgestellt, die Trägheitshauptachsen des Körpers K sind, also nach (39)

$$\int_M x y dm = 0 \quad \int_M y z dm = 0 \quad \int_M z x dm = 0$$

ist. Man bekommt auf diese Weise:

$$U = f \frac{M}{R} - \frac{1}{2} \cdot \frac{f}{R^3} (X^2 + Y^2 + Z^2) \int_M (x^2 + y^2 + z^2) dm + \\ + \frac{3}{2} \frac{f}{R^5} \left\{ X^2 \int_M x^2 dm + Y^2 \int_M y^2 dm + Z^2 \int_M z^2 dm \right\}$$

d. h.

$$(62) \quad U = f \frac{M}{R} + \frac{1}{2} \cdot \frac{f}{R^5} \left\{ X^2 \int_M (2x^2 - y^2 - z^2) dm + Y^2 \int_M (2y^2 - z^2 - x^2) dm + \right. \\ \left. + Z^2 \int_M (2z^2 - x^2 - y^2) dm \right\}.$$

Die Ausdrücke

$$(63) \quad A = \int_M (y^2 + z^2) dm \quad B = \int_M (z^2 + x^2) dm \quad C = \int_M (x^2 + y^2) dm$$

stellen die Trägheitshauptmomente des Körpers K dar und es wird deshalb

$$(64) \quad U = f \frac{M}{R} + \frac{1}{2} f \frac{X^2}{R^5} (B + C - 2A) + \frac{1}{2} f \frac{Y^2}{R^5} (C + A - 2B) + \\ + \frac{1}{2} f \frac{Z^2}{R^5} (A + B - 2C).$$

Dieser Ausdruck stellt die Kräftefunktion U der Attraktion des Körpers K , der Gradient von U die Feldkraft \mathfrak{F} des durch den Körper K geschaffenen Gravitationsfeldes dar.

Wenn

$$(65) \quad A = B = C$$

d. h. das Trägheitsellipsoid des Körpers K eine Kugel wäre, dann würde man statt (64) den Ausdruck

$$(66) \quad U = f \frac{M}{R}$$

und statt (55) den Ausdruck

$$(67) \quad \mathfrak{F} = -f \frac{M}{R^3} \mathfrak{R}$$

erhalten. In einem solchen Falle wäre, wie es der Vergleich mit (50) ergibt, das dem Körper K zugehörige Gravitationsfeld gleich dem, den eine im Punkte O konzentriert gedachte Masse M hervorrufen würde.

Die den Ausführungen des ersten Abschnittes dieses Buches zugrunde gelegte Voraussetzung, dass sich die Mitglieder unseres Planetensystems gegenseitig derart anziehen, als ob ihre Massen je in ihren Massenmittelpunkten konzentriert wären, würde also vollständig erfüllt erscheinen, wenn diese Himmelskörper kugelförmig wären und die Dichte ihrer Materie nur eine Funktion der Entfernung vom Mittelpunkte einer solchen Kugel wäre, weil in einem solchen Falle die zentralen Trägheitsellipsoide dieser Himmelskörper Kugeln wären.

Diese Voraussetzung ist wegen der Abplattung dieser Himmelskörper, von der noch die Rede sein wird, nicht erfüllt, doch ist der Einfluss dieser Abplattungen auf die fortschreitende Bewegung dieser Himmelskörper wegen der fünften Potenz von R in den drei letzten Gliedern des durch (64) dargestellten Ausdruckes von U und wegen der geringen gegenseitigen Abweichungen der darin ebenfalls vorkommenden Grössen A, B, C ein ganz verschwindender, weshalb die oben erwähnte Voraussetzung als vollständig zulässig zu betrachten ist. Nur bei der Bewegung des Erdmondes um die Erde macht sich die Abplattung dieser beiden Himmelskörper in Form einer kleinen, berechenbaren Störung geltend.

Dem entgegen ist die Abplattung der Himmelskörper von fühlbarem Einfluss auf ihre Drehbewegung; ich werde sie bei der Untersuchung der Drehbewegung der Erde zu berücksichtigen haben.

§ 32. Drehbewegung flüssiger oder gasförmiger Himmelskörper. Einige Mitglieder unseres Planetensystems befinden sich im gasförmigen oder flüssigen Zustande. Dies gilt vor allem für die Sonne; auch die grossen äusseren Planeten sind als noch nicht erstarrt zu betrachten. Dies folgt, wie ich dies in meiner im Vorwort angeführten akademischen Abhandlung „Untersuchungen über die thermische Konstitution der Planetatmosphären“ auseinandergesetzt habe, aus der geringen mittleren Dichte dieser Planeten und aus der rechnerisch ermittelbaren grösstmöglichen Höhe einer aus Wasserdampf anzunehmenden Hülle derselben. Auch unsere Erde befand sich einst, bevor sie sich mit ihrer Kruste bedeckte, in einem derartigen astralen Zustande. Es ist deshalb vom Interesse, die Frage zu beantworten, wie die Drehbewegung solcher gasförmiger oder flüssiger Himmelskörper erfolgen könne.

Bei der Beantwortung der gestellten Frage soll von der Viskosität des Mediums abgesehen werden. Unter dieser Annahme gilt für jedes Teilchen eines solchen Mediums die bekannte Gleichung:

$$(68) \quad \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathfrak{P} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p.$$

In derselben bedeutet \mathbf{v} den Geschwindigkeitsvektor, \mathfrak{P} die auf die Masseneinheit einwirkende Kraft, ρ die Dichte, p den Druck und t die Zeit.

Ausser der obigen Grundgleichung gilt die Kontinuitätsgleichung:

$$(69) \quad \frac{d\rho}{dt} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0$$

und die charakteristische Gleichung. Diese letztere ist für ideale Gase durch die Zustandsgleichung:

$$(70) \quad p v = R_0 \theta$$

gegeben, worin v das Volumen der Masseneinheit, R_0 die Gaskonstante und θ die absolut gemessene Temperatur bedeutet. Weil $v = \frac{1}{\rho}$ ist, ist die obige Gleichung von der Form:

$$(71) \quad F(p, \rho, \theta) = 0.$$

Für eine unzusammendrückbare Flüssigkeit hat man statt (69)

$$(72) \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

zu setzen, und statt (70) die Gleichung

$$(73) \quad \rho = \frac{\rho_0}{1 + k u},$$

worin k den Dilatationskoeffizient und ρ_0 die Dichte bei der Temperatur $u = 0$ bedeutet.

Um grossen mathematischen Schwierigkeiten auszuweichen, wollen wir uns im nachstehenden mit speziellen Formen der charakteristischen Gleichung begnügen. Für isotherme Zustandsänderungen der Gase, d. h. bei konstanter Temperatur $\theta = \theta_0$, hat man als charakteristische Gleichung:

$$(74) \quad p = R_0 \theta_0 \rho.$$

Für adiabatische Zustandsänderungen hat man als charakteristische die Gleichung:

$$(75) \quad p = p_0 \rho^{\frac{c'}{c}},$$

worin c bzw. c' die spezifische Wärme bei konstantem Volumen bzw. konstantem Druck bedeutet. Die beiden Gleichungen (74) und (75) sind von der Form:

$$(76) \quad \rho = f(p)$$

und es soll im nachstehenden vorausgesetzt werden, dass die charakteristische Gleichung zu dieser Form von Gleichungen gehört. Führt man also die skalare Funktion

$$(77) \quad V(p) = \int_{p_0}^p \frac{dp}{e}$$

in die Rechnungen ein, so wird nach dem analytischen Ausdruck des Gradienten

$$\text{grad } V = \frac{\partial V}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{k} = \frac{1}{e} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \mathbf{k} \right) = \frac{1}{e} \text{grad } p.$$

Zieht man überdies in Betracht, dass sich die Kraft \mathfrak{P} als Gravitationskraft ebenfalls als Gradient einer skalaren Kräftefunktion U darstellen lässt, so bekommt man, wenn man

$$(78) \quad U - V = Q$$

setzt, statt (68) die Gleichung :

$$(79) \quad \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \text{grad } Q.$$

Wählt man in der Rotationsachse des Himmelskörpers einen fixen Aufpunkt O und bezeichnet \mathbf{r} den Ortsvektor \overrightarrow{OM} des in Betracht gezogenen Teilchens, \mathbf{n} dagegen den Einheitsvektor der positiven Richtung der Rotationsachse, so ist

$$(80) \quad \mathbf{v} = w [\mathbf{n} \mathbf{r}].$$

Dabei ist \mathbf{n} ein unveränderlicher Vektor und w eine von der Zeit unabhängige Funktion von \mathbf{r} . Es ist deshalb

$$(81) \quad \frac{d\mathbf{v}}{dt} = w \left[\mathbf{n} \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right] = w [\mathbf{n} \mathbf{v}] = w^2 [\mathbf{n} [\mathbf{n} \mathbf{r}]].$$

Wird aus M das Lot MS auf die Drehachse gefällt und der Vektor \overrightarrow{SM} mit \mathfrak{R} bezeichnet, so ist

$$(82) \quad [\mathbf{n} [\mathbf{n} \mathbf{r}]] = -\mathfrak{R}.$$

Bezeichnet R den Modul des Vektors \mathfrak{R} und frägt man nach dem Gradient des Skalars R , so ist zu berücksichtigen, dass die entsprechenden Aequiskalarflächen Kreiszyylinder sind mit der Achse OS , dass der Gradient senkrecht zu diesen Flächen steht und den Modul $\frac{\partial R}{\partial R} = 1$ aufweist. Es ist also

$$(83) \quad \text{grad } R = \frac{\mathfrak{R}}{R},$$

d. h. wegen (79), (81), (82) und (83)

$$(84) \quad \frac{dv}{dt} = -w^2 R \text{ grad } R = \text{grad } Q.$$

Multipliziert man diese Gleichung mit dem eine beliebige Verrückung darstellenden Vektor $d\mathfrak{s}$, so wird

$$(85) \quad \text{grad } Q \, d\mathfrak{s} = -w^2 R \text{ grad } R \, d\mathfrak{s}.$$

Es stellt ganz allgemein

$$\text{grad } W \, d\mathfrak{s} = dW$$

die der Verrückung $d\mathfrak{s}$ entsprechende Aenderung dW des Skalars W und es ist deshalb

$$(86) \quad dQ = -w^2 R \, dR.$$

Hier steht links ein exaktes Differential, es muss also auch $w^2 R \, dR$ ein exaktes Differential sein, weshalb w nur von R abhängig, d. h. eine Funktion von der Form

$$(87) \quad w = F(R)$$

sein muss. Setzt man also

$$(88) \quad w^2 R = \Phi'(R),$$

so wird nach (86)

$$dQ + \Phi'(R) \, dR = 0,$$

woraus man durch Integration und mit Berücksichtigung von (78) bekommt:

$$(89) \quad U - V + \Phi(R) = \text{const.}$$

Die Flächen gleichen Druckes, die Niveaulächen, werden erhalten, wenn man der Grösse V einen konstanten Wert zuweist. Diese Flächen sind also durch die Gleichung

$$(90) \quad U + \Phi(R) = C$$

veranschaulicht.

Soll also der in Betracht gezogene Himmelskörper Rotationsbewegungen um eine im Raume unveränderliche Achse vollführen, so kann dies unter den gemachten Voraussetzungen nur dann geschehen, wenn die Winkelgeschwindigkeit w der einzelnen Elementarringe nur eine Funktion des Halbmessers R dieser Ringe ist. Weil man also für ein gegebenes R dasselbe w bekommt, so haben alle auf einer Zylinderfläche, deren Achse die Drehachse ist, befindlichen Teilchen dieselbe Rotationsgeschwindigkeit und die Drehbewegung erfolgt derart, dass jeder dieser Zylinderflächen ihre eigene Rotationsgeschwindigkeit zukommt und sie wie eine feste materielle Fläche um ihre Achse rotiert. Von aussen betrachtet, geschieht die Bewegung derart, dass jeder Breitenkreis, die Schnittlinie der erwähnten Zylinderfläche mit der Oberfläche des Himmelskörpers, seine eigene Rotationsgeschwindigkeit aufweist. Eine solche Drehbewegung der Himmelskörper wird die zonale genannt.

§ 33. Drehbewegung mit ausgeglichenen Winkelgeschwindigkeiten.

Der im vorstehenden Paragraphen beschriebenen zonalen Drehbewegung wirkt die Viskosität entgegen, welche zwischen den mit verschiedener Winkelgeschwindigkeit sich drehenden Schichten sich geltend macht und proportional dem Gradient $F'(R)$ dieser Geschwindigkeiten sein wird. Diese Kraft wird also einen Ausgleich der Winkelgeschwindigkeiten anstreben, theoretisch aber, weil sie immer kleiner werden wird, erst nach unendlich langer Zeit ihr Ziel erreichen können. In Wirklichkeit wird es, bei der riesigen Masse des Himmelskörpers, ebenfalls einer sehr langen Zeit bedürfen, bis dieser Ausgleich vollzogen sein wird. Dann wird sich der Himmelskörper mit durchwegs gleicher Winkelgeschwindigkeit wie ein fester Körper bewegen. Eine derartige Bewegung wird von den Franzosen treffend als eine „rotation en bloc“ bezeichnet.

Fragen wir, wie eine solche Bewegung verlaufen wird, wenn auf den Himmelskörper kein äusseres Drehmoment einwirkt. Die Beantwortung der soeben gestellten Frage ist unter dem Namen des Theorems von Appell bekannt. Wir folgen hier der bedeutend einfacheren vektoranalytischen Betrachtungsweise Jardetzky's.

Es folgt aus der Gleichung (79)

$$(91) \quad \operatorname{rot} \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \operatorname{rot} \operatorname{grad} Q$$

und, weil die Rotation des Gradienten immer gleich Null ist,

$$(92) \quad \operatorname{rot} \frac{d\mathbf{v}}{dt} = 0.$$

Soll der Himmelskörper die oben angegebene Bewegung ausführen, so muss nach (34)

$$(93) \quad \mathbf{v} = [\mathbf{w} \mathbf{r}]$$

sein, wobei, weil jetzt die Voraussetzung, dass die Rotationsachse im Raume unveränderlich sei, nicht aufrecht erhalten werden braucht, \mathbf{w} eine Funktion der Zeit aber in jedem gegebenen Augenblicke für alle Teilchen der sich drehenden Masse dieselbe sein soll. Es folgt deshalb aus (92) und (93)

$$(94) \quad \operatorname{rot} \frac{d}{dt} [\mathbf{w} \mathbf{r}] = \operatorname{rot} \left[\frac{d\mathbf{w}}{dt} \mathbf{r} \right] + \operatorname{rot} \left[\mathbf{w} \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right] = 0,$$

d. h. weil $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}$ ist,

$$(95) \quad \operatorname{rot} \left[\frac{d\mathbf{w}}{dt} \mathbf{r} \right] + \operatorname{rot} [\mathbf{w} [\mathbf{w} \mathbf{r}]] = 0.$$

Bezeichnen $\mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_2, \mathfrak{n}_3$ die Einheitsvektoren des ruhenden Koordinatensystems, $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ die zugehörigen Koordinaten des Vektors \mathbf{w} und x, y, z jene des Ortsvektors \mathbf{r} , so ist

$$(96) \quad \begin{cases} \mathbf{w} = \omega_1 \mathfrak{n}_1 + \omega_2 \mathfrak{n}_2 + \omega_3 \mathfrak{n}_3 \\ \mathbf{r} = x \mathfrak{n}_1 + y \mathfrak{n}_2 + z \mathfrak{n}_3 \end{cases}$$

$$\left[\frac{d\mathbf{w}}{dt} \mathbf{r} \right] = \begin{vmatrix} \mathfrak{n}_1 & \mathfrak{n}_2 & \mathfrak{n}_3 \\ \frac{d\omega_1}{dt} & \frac{d\omega_2}{dt} & \frac{d\omega_3}{dt} \\ x & y & z \end{vmatrix},$$

d. h.

$$\left[\frac{d\mathbf{w}}{dt} \mathbf{r} \right] = \left(\frac{d\omega_2}{dt} z - \frac{d\omega_3}{dt} y \right) \mathbf{n}_1 + \left(\frac{d\omega_3}{dt} x - \frac{d\omega_1}{dt} z \right) \mathbf{n}_2 + \left(\frac{d\omega_1}{dt} y - \frac{d\omega_2}{dt} x \right) \mathbf{n}_3$$

$$\text{rot} \left[\frac{d\mathbf{w}}{dt} \mathbf{r} \right] = \begin{vmatrix} \mathbf{n}_1 & \mathbf{n}_2 & \mathbf{n}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \left(\frac{d\omega_2}{dt} z - \frac{d\omega_3}{dt} y \right) & \left(\frac{d\omega_3}{dt} x - \frac{d\omega_1}{dt} z \right) & \left(\frac{d\omega_1}{dt} y - \frac{d\omega_2}{dt} x \right) \end{vmatrix}$$

Bei der oben vorzunehmenden Differentiation sind $\frac{d\omega_1}{dt}$, $\frac{d\omega_2}{dt}$, $\frac{d\omega_3}{dt}$ als unabhängig von x , y , z zu betrachten, so dass man bekommt

$$\text{rot} \left[\frac{d\mathbf{w}}{dt} \mathbf{r} \right] = \left(\frac{d\omega_1}{dt} + \frac{d\omega_1}{dt} \right) \mathbf{n}_1 + \left(\frac{d\omega_2}{dt} + \frac{d\omega_2}{dt} \right) \mathbf{n}_2 + \left(\frac{d\omega_3}{dt} + \frac{d\omega_3}{dt} \right) \mathbf{n}_3$$

d. h.

$$(97) \quad \text{rot} \left[\frac{d\mathbf{w}}{dt} \mathbf{r} \right] = 2 \frac{d\mathbf{w}}{dt}$$

Es ist nach einer allgemeinen Regel der Vektorrechnung

$$[\mathbf{w}[\mathbf{w}\mathbf{r}]] = (\mathbf{r}\mathbf{w})\mathbf{w} - \mathbf{w}^2\mathbf{r},$$

d. h.

$$(98) \quad \text{rot}[\mathbf{w}[\mathbf{w}\mathbf{r}]] = \text{rot}(\mathbf{r}\mathbf{w})\mathbf{w} - \mathbf{w}^2 \text{rot} \mathbf{r}.$$

Weil aber der Rotor des Ortsvektors immer gleich Null ist, d. h.

$$(99) \quad \text{rot} \mathbf{r} = 0$$

und ferner

$$\text{rot}(\mathbf{r} \mathbf{w}) \mathbf{w} = \begin{vmatrix} \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (x\omega_1 + y\omega_2 + z\omega_3)\omega_1 & (x\omega_1 + y\omega_2 + z\omega_3)\omega_2 & (x\omega_1 + y\omega_2 + z\omega_3)\omega_3 \end{vmatrix}$$

ist, so wird, weil bei der hier vorzunehmenden Differentiation $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ als unabhängig von x, y, z zu betrachten sind,

$$(100) \quad \text{rot}(\mathbf{r} \mathbf{w}) \mathbf{w} = 0,$$

$$(101) \quad \text{rot}[\mathbf{w}[\mathbf{w} \mathbf{r}]] = 0.$$

Es folgt aus (95), (97), (101)

$$(102) \quad \frac{d\mathbf{w}}{dt} = 0,$$

d. h. \mathbf{w} muss ein von der Zeit unabhängiger Vektor sein

Zieht man die für den vorliegenden Fall geltenden Gleichungen (42) heran, in die zufolge der gemachten Voraussetzung $M_1 = M_2 = M_3 = 0$ zu setzen ist, so bekommt man:

$$(103) \quad \begin{cases} A \frac{dw_1}{dt} + (C - B) w_2 w_3 = 0 \\ B \frac{dw_2}{dt} + (A - C) w_3 w_1 = 0 \\ C \frac{dw_3}{dt} + (B - A) w_1 w_2 = 0. \end{cases}$$

Hier bedeuten w_1, w_2, w_3 die Koordinaten des Vektors \mathbf{w} im beweglichen mit den Trägheitshauptachsen zusammenfallenden Koordinatensystem. Weil \mathbf{w} ein zeitlich unveränderlicher Vektor ist, müssen seine Koordinaten w_1, w_2, w_3 nicht konstant sein, wohl aber sein Modul w . Es ist aber

$$(104) \quad w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 = w^2$$

Multipliziert man die Gleichungen (103) der Reihe nach mit w_1, w_2, w_3 und bildet die Summe, so bekommt man:

$$A w_1 \frac{dw_1}{dt} + B w_2 \frac{dw_2}{dt} + C w_3 \frac{dw_3}{dt} = 0,$$

d. h. durch Integration

$$(105) \quad A w_1^2 + B w_2^2 + C w_3^2 = \text{const.}$$

Der Impulsvektor \mathfrak{G} ist im vorliegenden Falle konstant und nach (30) und (41) durch

$$\mathfrak{G}_0 = A w_1 i + B w_2 j + C w_3 k$$

veranschaulicht. Wird sein Modul mit G_0 bezeichnet, so ist

$$(106) \quad A^2 w_1^2 + B^2 w_2^2 + C^2 w_3^2 = G_0^2.$$

Die drei Gleichungen (104), (105), (106) besagen, dass die Grössen w_1, w_2, w_3 ebenfalls konstant sind, d. h.

$$(107) \quad \frac{dw_1}{dt} = \frac{dw_2}{dt} = \frac{dw_3}{dt} = 0.$$

Man bekommt deshalb statt (103)

$$(108) \quad \left\{ \begin{array}{l} (C - B) w_2 w_3 = 0 \\ (A - C) w_3 w_1 = 0 \\ (B - A) w_1 w_2 = 0. \end{array} \right.$$

Diese drei Gleichungen können bei verschiedenen A, B, C nur dann befriedigt werden, wenn zwei der Grössen w_1, w_2, w_3 zu gleicher Zeit Null sind, d. h. wenn der Rotationsvektor \mathfrak{w} mit einer der drei Trägheitshauptachsen zusammenfällt. Ausserdem können die obigen Gleichungen auch dadurch befriedigt werden, dass zwei der Grössen A, B, C einander gleich sind, also beispielsweise $A = B$ ist und die auf die Ebene dieser Hauptachsen normale Komponente des Vektors \mathfrak{w} , im vorliegenden Falle w_3 , gleich Null ist. Dann wird das Trägheitsellipsoid zu einem Rotationsellipsoid, der Rotationsvektor \mathfrak{w} liegt in der Aequatorebene dieses Ellipsoides,

kann also als eine Trägheitshauptachse betrachtet werden. Ist schliesslich $A=B=C$, so wird das Trägheitsellipsoid zu einer Kugel und die Drehachse kann wie immer sie orientiert sei, als eine Trägheitshauptachse aufgefasst werden. Aus allen dem folgt das Theorem von Appell: Die Drehbewegung „en bloc“ kann nur um eine der Trägheitshauptachsen vor sich gehen.

§ 34. Gleichgewichtsbedingungen. In vorstehend behandeltem Falle, wo der flüssige oder gasförmige Himmelskörper um eine im Raume unveränderliche Gerade mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit

$$(109) \quad w = n$$

rotiert, kann als Bezugssystem das mit dem Himmelskörper festverbundene und mit dessen Trägheitshauptachsen zusammenfallende Koordinatensystem gewählt, d. h. der Körper als ruhend betrachtet werden, wofern man auf die einzelnen Teilchen neben der Gravitationskraft \mathfrak{P} die Fliehkraft einwirken lässt. Diese letztere Kraft wirkt in der Richtung des im § 32 definierten Vektors \mathfrak{R} und hat, pro Masseneinheit berechnet, eine skalare Grösse $\frac{v^2}{R}$, worin v die absolute lineare Geschwindigkeit des Teilchens und R den Modul des Vektors \mathfrak{R} bedeutet, sie ist also durch den Vektor

$$\mathfrak{F} = \frac{v^2}{R} \cdot \frac{\mathfrak{R}}{R},$$

oder weil $v = nR$ ist, durch

$$(110) \quad \mathfrak{F} = n^2 \mathfrak{R}$$

veranschaulicht. Diese Kraft kann nach dem bei der Aufstellung von (83) befolgten Vorgange als der Gradient des Skalars $\frac{1}{2} n^2 R^2$ dargestellt werden, so dass man bekommt:

$$(111) \quad \mathfrak{F} = \text{grad} \frac{1}{2} n^2 R^2.$$

Jetzt kann das in Betracht gezogene Teilchen als ruhend betrachtet, d. h. $v = 0$ gesetzt werden und man bekommt statt (68) die Gleichung

$$(112) \quad \mathfrak{P} + \mathfrak{F} = \frac{1}{\varrho} \text{grad } p.$$

Setzt man

$$(113) \quad W = U + \frac{1}{2} n^2 R^2,$$

so wird, weil, wie im § 32 angegeben,

$$(114) \quad \mathfrak{P} = \text{grad } U$$

ist,

$$(115) \quad \text{grad } p = \varrho \text{ grad } W.$$

Multipliziert man die vorstehende Gleichung skalar mit $d\mathfrak{s}$, so wird nach einer bereits mitgeteilten allgemein giltigen Gleichung

$$(116) \quad dp = \varrho dW.$$

Verschiebt man sich längs einer Fläche des konstanten W , d. h. längs einer solchen, auf der die Kräftefunktion der Gravitations- und Fliehkraft konstant ist, und die man kurzweg als die Aequipotentialfläche bezeichnen kann, so wird hier $dW = 0$, d. h. wegen (116) auch $dp = 0$. Die Aequipotentialflächen sind also zugleich Flächen gleichen Druckes oder Niveauflächen. Es ist deshalb

$$(117) \quad p = f(W)$$

$$\frac{dp}{dW} = f'(W),$$

d. h. wegen (116)

$$(118) \quad \varrho = f'(W).$$

Die obige Gleichung besagt, dass auch die Flächen gleicher Dichte mit den Aequipotentialflächen zusammenfallen.

Den Ausführungen des vorstehenden Paragraphen liegt die charakteristische Gleichung (76) zugrunde. Weist diese Gleichung die allgemeinere Form

$$F(p, \varrho, \theta) = 0$$

auf, dann folgt aus den obigen Gleichgewichtsbedingungen, dass auf jeder Aequipotentialfläche, weil hier sowohl p als auch ϱ konstant ist, auch θ konstant sein muss, d. h. die Aequipotentialflächen Isothermflächen sind.

§ 35. Das Theorem von Clairaut. Von der Voraussetzung ausgehend, die Erde habe bei ihrer Erstarrung jene Form beibehalten, die der Gleichgewichtsfigur eines sich drehenden flüssigen Himmelskörper entspricht, hat Clairaut sein Theorem betreffend die Abplattung der Erde abgeleitet. Es ist notwendig, sich mit diesem Theorem bekannt zu machen.

Es folgt aus den vorstehend abgeleiteten Gleichgewichtsbedingungen, dass in einem solchen Falle die Oberfläche der Erde eine Aequipotentialfläche der Gravitations- und der Fliehkräfte sein muss, denn nur in diesem Falle stehen die auf die Teilchen der Oberfläche einwirkenden Kräfte senkrecht auf derselben, vermögen also keine Verschiebung dieser Teilchen zu bewirken. Die Oberfläche der Erde ist also wegen (113) durch die Gleichung

$$(119) \quad W = W_0$$

gegeben, wo W_0 eine Konstante und

$$(120) \quad W = U + \frac{1}{2} n^2 R^2$$

ist. Dabei ist U durch (64) gegeben. Weil für die Erde

$$(121) \quad A = B$$

ist, wird (64) durch

$$(122) \quad U = f \frac{M}{r} + \frac{1}{2} f \frac{X^2 + Y^2 - 2Z^2}{r^5} (C - A)$$

zu ersetzen sein. In der vorstehenden Gleichung bedeutet: f die Gravitationskonstante, M die Gesamtmasse der Erde, r die Entfernung des in Betracht gezogenen Punktes der Aequipotentialfläche vom Erdmittelpunkt und X, Y, Z die Koordinaten dieses Punktes bezüglich des mit den Trägheitshauptachsen des Erdkörpers zusammenfallenden Koordinatensystems. Dieses Koordinatensystem kann, weil wegen (121) jede durch den Erdmittelpunkt hindurchgehende und in der Aequatorebene liegende Achse eine Trägheitshauptachse ist, um seine Z -Achse beliebig gedreht werden. Drehen wir es derart, dass seine X -Achse nach dem Kreuzungspunkt des nullten Meridians mit dem Aequator gerichtet ist, so ist

$$(123) \quad X = r \cos \varphi \cos \psi \quad Y = r \cos \varphi \sin \psi \quad Z = r \sin \varphi,$$

worin ψ die geographische Länge und φ die geozentrische Breite bedeutet. Die in (111) vorkommende Grösse R ist jetzt durch

$$(124) \quad R = r \cos \varphi$$

veranschaulicht Man bekommt also statt (113)

$$(125) \quad W = f \frac{M}{r} + \frac{f}{2r^3} (C - A) (1 - 3 \sin^2 \varphi) + \frac{n^2 r^2}{2} \cos^2 \varphi.$$

Die Ableitung dieses Ausdruckes nach r ergibt die Schwerebeschleunigung im Punkte r, φ, ψ , und wenn man diese positiv nach unten, d. h. in der Richtung des Abnehmenden r zählt, so wird

$$(126) \quad g = - \frac{\partial W}{\partial r},$$

d. h.

$$(127) \quad g = f \frac{M}{r^2} \left[1 + \frac{3}{2} \cdot \frac{C - A}{r^2 M} (1 - 3 \sin^2 \varphi) - \frac{n^2 r^3}{f M} \cos^2 \varphi \right].$$

Handelt es sich um die Ermittlung der Schwerebeschleunigung auf der Erdoberfläche, so kann in obigem Klammerausdruck r durch den Aequatorhalbmesser a ersetzt werden. Man bekommt also

$$(128) \quad g = f \frac{M}{r^2} \left[1 + \frac{3}{2} \cdot \frac{C-A}{a^2 M} (1 - 3 \sin^2 \varphi) - \frac{n^2 a^3}{f M} \cos^2 \varphi \right].$$

Dasselbe kann auch im Ausdruck (125) geschehen, wenn man hier $W = W_0$ setzt. Berechnet man aus dem so gewonnenen Ausdrücke den Radiusvektor r , so wird

$$(129) \quad r = f \frac{M}{W_0} \left[1 + \frac{C-A}{2a^2 M} (1 - 3 \sin^2 \varphi) + \frac{n^2 a^3}{2f M} \cos^2 \varphi \right].$$

Eliminiert man mittels (129) r aus (128), so bekommt man

$$(130) \quad g = \frac{W_0^2}{f M} \left[1 + \frac{3}{2} \cdot \frac{C-A}{a^2 M} (1 - 3 \sin^2 \varphi) - \frac{n^2 a^3}{f M} \cos^2 \varphi \right] \left[1 + \frac{C-A}{2a^2 M} (1 - 3 \sin^2 \varphi) + \frac{n^2 a^3}{2f M} \cos^2 \varphi \right]^{-2}$$

Wenn man den obigen Klammerausdruck in eine Reihe entwickelt und die höheren Potenzen seiner Nebenglieder vernachlässigt, so bekommt man leicht:

$$(131) \quad g = \frac{W_0^2}{f M} \left[1 + \frac{C-A}{2a^2 M} - \frac{2n^2 a^3}{f M} \right] \left[1 + \left(\frac{2n^2 a^3}{f M} - \frac{3}{2} \cdot \frac{C-A}{a^2 M} \right) \sin^2 \varphi \right].$$

Bezeichnet g_a die Schwerebeschleunigung am Aequator und g_p an den Polen, so bekommt man aus (131) mit $\varphi = 0$ bzw. mit $\varphi = \frac{\pi}{2}$

$$(132) \quad g_a = \frac{W_0^2}{f M} \left(1 + \frac{C-A}{2a^2 M} - \frac{2n^2 a^3}{f M} \right)$$

$$(133) \quad g_p = (1 + \beta) g_a,$$

wobei

$$(134) \quad \beta = \frac{2n^2 a^3}{f M} - \frac{3}{2} \cdot \frac{C-A}{a^2 M}$$

gesetzt wurde. Es ist also

$$(135) \quad \beta = \frac{g_p - g_a}{g_a}$$

d. h.

$$(136) \quad g = g_a + (g_p - g_a) \sin^2 \varphi.$$

Die Gleichung (129) kann auf die folgende Form gebracht werden:

$$(137) \quad r = \frac{fM}{W_0} \left[1 + \frac{C-A}{2a^2M} + \frac{n^2 a^3}{2fM} \right] \left[1 - \left(\frac{n^2 a^3}{2fM} + \frac{3}{2} \cdot \frac{C-A}{a^2M} \right) \sin^2 \varphi \right].$$

Für $\varphi = 0$ wird $r = a$, und für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ wird $r = c$, falls c die polare Halbachse der Meridiankurve bedeutet. Es wird also

$$(138) \quad a = \frac{fM}{W_0} \left[1 + \frac{C-A}{2a^2M} + \frac{n^2 a^3}{2fM} \right]$$

$$(139) \quad c = a \left[1 - \left(\frac{n^2 a^3}{2fM} + \frac{3}{2} \cdot \frac{C-A}{a^2M} \right) \right].$$

Setzt man

$$(140) \quad \frac{n^2 a^3}{2fM} + \frac{3}{2} \cdot \frac{C-A}{a^2M} = \nu,$$

so folgt aus (139)

$$(141) \quad \nu = \frac{a-c}{a},$$

und aus (137), (138) und (139)

$$(142) \quad r = a(1 - \nu \sin^2 \varphi).$$

Dies ist die Gleichung der Meridiankurve der Erde; sie ist eine Ellipse. Die durch (141) gegebene Grösse ν wird die Abplattung der Erde genannt.

Es folgt aus den Gleichungen (133) und (140):

$$(143) \quad \nu + \beta = \frac{5}{2} \cdot \frac{n^2 a^3}{f M},$$

d. h. mit Berücksichtigung von (135)

$$(144) \quad \nu = \frac{5}{2} \cdot \frac{n^2 a^3}{f M} - \frac{g_p - g_a}{g_a}.$$

Diese Gleichung drückt das Theorem von Clairaut aus. Mittels derselben kann aus den Schwermessungen am Aequator und an dem Pole die Abplattung der Erde ermittelt werden. Diese Messungen ergaben

$$(145) \quad \nu = \frac{1}{298}.$$

Die Abplattung der Erde kann ausserdem durch geodätische Messungen und auch aus der bereits erwähnten durch die Erdabplattung hervorgerufenen Ungleichheit in der Bewegung des Erdmondes ermittelt werden. Diese Ermittlungen ergaben ein mit dem vorstehenden übereinstimmendes Ergebnis. Dies würde beweisen, dass die Erde tatsächlich jene Form erhalten hat, die der Gleichgewichtsfigur einer rotierenden Flüssigkeitsmasse entspricht.

KAPITEL V

Die tägliche Drehbewegung der Erde und ihre Folgen

§ 36. Mechanismus der kräftefreien Drehbewegung der Erde. Nach dem im § 26 bewiesenen Satze ist die Drehbewegung der Erde um ihren Massenmittelpunkt unabhängig von der fortschreitenden Bewegung dieses Punktes. Die fortschreitende Bewegung des Massenmittelpunktes erfolgt unter dem Einflusse der Resultante der auf die Erde einwirkenden äusseren Kräfte, während die Drehbewegung der Erde um diesen Punkt unter dem Einflusse des bezüglich desselben zu nehmenden Drehmoments jener äusseren Kräfte vor sich geht. Deshalb können diese beiden Bewegungen getrennt untersucht werden. Die fortschreitende Bewegung des Massenmittelpunktes der Erde ist im ersten Abschnitt dieses Buches geschildert worden; hier haben wir uns mit der Drehbewegung der Erde um ihren Massenmittelpunkt zu befassen. Weil dieselbe derart verläuft, als ob dieser Punkt unbeweglich wäre, kann man diesen Punkt als ruhend annehmen. Diese Drehbewegung kann weiter zergliedert werden, indem man vorerst nur jene Bewegung in Betracht zieht, die sich bei Abwesenheit des Drehmoments der äusseren Kräfte ergeben würde, um nachher auch die Wirkung dieses Drehmoments zu berücksichtigen. Dieser Vorgang soll hier befolgt werden. Die bei der Abwesenheit jenes Drehmoments sich vollziehende Bewegung wird die kräftefreie Drehbewegung der Erde genannt; für diese ist also \mathfrak{M} gleich Null zu setzen. Es ist deshalb

$$(146) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{M} = 0 \\ M_1 = M_2 = M_3 = 0. \end{array} \right.$$

Setzt man ausserdem voraus, die Erde ändere ihre Form nicht, dann gelten für ihre Drehbewegung die Eulerschen Gleichungen (42), die wegen (146) die folgende Form erhalten:

$$(147) \quad \left\{ \begin{array}{l} A \frac{dw_1}{dt} + (C-B) w_2 w_3 = 0 \\ B \frac{dw_2}{dt} + (A-C) w_3 w_1 = 0 \\ C \frac{dw_3}{dt} + (B-A) w_1 w_2 = 0. \end{array} \right.$$

Es folgt aus den Gleichungen (26) und (146)

$$\frac{d\mathfrak{G}}{dt} = 0,$$

d. h.

$$(148) \quad \mathfrak{G} = \mathfrak{G}_0,$$

worin \mathfrak{G}_0 einen konstanten Vektor bedeutet. Der Drehimpuls der kräftefreien Bewegung der Erde ist ein im Raume unveränderlich orientierte Vektor; die auf demselben senkrecht stehende Ebene wird die unveränderliche Ebene genannt.

Die Achsen des mit Erdkörper fest verbundenen beweglichen Koordinatensystems $x-y-z$, dessen Ursprung O im Massenmittelpunkt der Erde gelegen ist, stimmen, wie dies bei der Ableitung der Gleichungen angenommen wurde, mit den Trägheitshauptachsen der Erde zusammen, weshalb der Drehimpuls \mathfrak{G}_0 wegen (41) durch

$$(149) \quad \mathfrak{G}_0 = Aw_1 i + Bw_2 j + Cw_3 k$$

dargestellt ist, worin i, j, k die Einheitsvektoren der Richtungen der Achsen x, y, z bedeuten.

Wären die Trägheitsmomente A, B, C einander gleich, d. h. wäre das zentrale Trägheitsellipsoid des Erdkörpers eine Kugel, dann wäre nach (147)

$$\frac{dw_1}{dt} = 0 \quad \frac{dw_2}{dt} = 0 \quad \frac{dw_3}{dt} = 0,$$

d. h. w_1, w_2, w_3 wären konstante Grössen und damit wäre wegen (13)

$$\mathfrak{w} = w_1 i + w_2 j + w_3 k$$

ein unveränderlicher Vektor, der, weil jetzt

$$\mathfrak{G}_0 = A \mathfrak{w}$$

ist, mit dem Vektor \mathfrak{G}_0 zusammenfallen würde; die Drehbewegung der Erde verlief um eine sowohl im Raume als im Erdkörper selbst unveränderlich orientierte Achse mit konstanter Drehgeschwindigkeit.

Sind die Trägheitsmomente A, B, C von einander verschieden, dann führt die Untersuchung der Drehbewegung des in Betracht gezogenen Körpers auf elliptische Funktionen. Weil wir aber hier die Drehbewegung der Erde, für die

$$(150) \quad A = B$$

und

$$(151) \quad C > A$$

ist, zu untersuchen haben, wird der Mechanismus der Bewegung wesentlich einfacher. Die Gleichungen (147) erhalten nämlich jetzt die Form:

$$(152) \quad A \frac{dw_1}{dt} + (C-A) w_2 w_3 = 0$$

$$(153) \quad A \frac{dw_2}{dt} + (A-C) w_3 w_1 = 0$$

$$(154) \quad \frac{dw_3}{dt} = 0.$$

Es folgt aus (154) durch Integration

$$(155) \quad w_3 = n,$$

worin n eine Konstante bedeutet. Die Erde dreht sich also um ihre Trägheitshauptachse z mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit n . Bezeichnet τ die Periode dieser komponentalen Drehbewegung, dann ist

$$(156) \quad w_3 = n = \frac{2\pi}{\tau}.$$

Setzt man der kürzeren Schreibweise halber

$$(157) \quad \frac{2\pi}{\tau} \cdot \frac{C-A}{A} = k,$$

worin wegen (151) k eine konstante positive Grösse bedeutet, so bekommt man

statt (152) und (153) die zwei Gleichungen:

$$(158) \quad \frac{dw_1}{dt} + kw_2 = 0$$

$$(159) \quad \frac{dw_2}{dt} - kw_1 = 0.$$

Multipliziert man die erste dieser Gleichungen mit w_1 , die zweite mit w_2 und addiert sie sodann, so wird

$$w_1 dw_1 + w_2 dw_2 = 0.$$

Die Integration dieser Gleichung liefert

$$(160) \quad w_1^2 + w_2^2 = c^2,$$

worin c eine Konstante bedeutet.

Es folgt aus (158), (159) und (160)

$$(161) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dw_1}{\sqrt{c^2 - w_1^2}} = -k dt \\ \frac{dw_2}{\sqrt{c^2 - w_2^2}} = k dt. \end{array} \right.$$

Die Integration dieser zwei Differentialgleichungen ergibt, wenn man als Initialmoment $t=0$ einen von den Zeitpunkten wählt, in welchem $w_1=c$; $w_2=0$ ist, d. h. der Rotationsvektor w die $x-z$ Ebene durchschreitet,

$$\arccos \frac{w_1}{c} = kt \quad \arcsin \frac{w_2}{c} = kt,$$

d. h.

$$(162) \quad w_1 = c \cdot \cos kt$$

$$(163) \quad w_2 = c \cdot \sin kt.$$

Um von dem beweglichen Bezugssystem auf das ruhende zu übergehen, wähle man die unveränderliche Richtung des Drehimpulsvektors \mathfrak{G}_0 zur Z -Achse des ruhenden Koordinatensystems, dessen Ursprung ebenfalls im Mittelpunkt der Erde zu denken ist. Die zugehörige $X-Y$ -Ebene, in der die Orientierung der X -Achse

beliebig gewählt werden kann, deckt sich mit der bereits erwähnten unveränderlichen Ebene. Es folgt aus der Fig. 7 (Seite 107), in der jetzt die \hat{Z} -Achse sich mit der Richtung des Vektors \mathfrak{G}_0 deckt, falls man den Modul von \mathfrak{G}_0 mit G_0 bezeichnet,

$$\mathfrak{G}_0 = G_0 n_3 = (G_0 \sin \theta) h_0 + (G_0 \cos \theta) k.$$

Weil

$$(G_0 \sin \theta) h_0 = (G_0 \sin \theta \sin \Phi) i + (G_0 \sin \theta \cos \Phi) j$$

ist, so erhält man:

$$(164) \quad \mathfrak{G}_0 = (G_0 \sin \theta \sin \Phi) i + (G_0 \sin \theta \cos \Phi) j + (G_0 \cos \theta) k.$$

Es folgt aus (149) und (150)

$$(165) \quad \mathfrak{G}_0 = Aw_1 i + Aw_2 j + Cw_3 k,$$

und aus (164) und (165)

$$(166) \quad w_1 = \frac{G_0}{A} \sin \theta \sin \Phi$$

$$(167) \quad w_2 = \frac{G_0}{A} \sin \theta \cos \Phi$$

$$(168) \quad w_3 = \frac{G_0}{C} \cos \theta.$$

Es folgt aus (165)

$$G_0^2 = A^2 w_1^2 + A^2 w_2^2 + C^2 w_3^2,$$

d. h. wegen (160) und (156)

$$(169) \quad G_0^2 = c^2 A^2 + n^2 C^2.$$

Die Gleichungen (168) und (156) ergeben:

$$(170) \quad G_0 \cos \theta = nC,$$

d. h. wegen (169)

$$\cos^2 \theta = \frac{n^2 C^2}{c^2 A^2 + n^2 C^2} \quad \sin^2 \theta = \frac{c^2 A^2}{c^2 A^2 + n^2 C^2} = \frac{c^2 A^2}{G_0^2}$$

$$(171) \quad \sin \theta = \frac{cA}{G_0}.$$

Setzt man diesen Ausdruck in (166) bzw. (167) ein, so wird

$$(172) \quad w_1 = c \sin \Phi$$

$$(173) \quad w_2 = c \cos \Phi.$$

Es folgt aus (172), (173), (162) und (163)

$$(174) \quad \Phi = \frac{\pi}{2} - kt.$$

Die Gleichung (171), in der auf der rechten Seite lauter konstante Grössen stehen, besagt, dass der Eulersche Winkel θ ein unveränderlicher ist. Es ist deshalb

$$(175) \quad \theta' = 0.$$

Die Ausdrücke, durch die die Koordinaten des Rotationsvektors w im beweglichen bzw. im ruhenden Bezugssystem als Funktionen der Eulerschen Winkel dargestellt erscheinen, sind durch (48) bzw. (49) gegeben. Setzt man in diese Ausdrücke (175) ein, so bekommt man:

$$(176) \quad \left\{ \begin{array}{l} w_1 = \Psi' \sin \theta \sin \Phi \\ w_2 = \Psi' \sin \theta \cos \Phi \\ w_3 = \Psi' \cos \theta + \Phi' \end{array} \right.$$

$$(177) \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega_1 = \Phi' \sin \theta \sin \Psi \\ \omega_2 = - \Phi' \sin \theta \cos \Psi \\ \omega_3 = \Psi' + \Phi' \cos \theta. \end{array} \right.$$

Es folgt aus (166), (167) und (176)

$$(178) \quad \Psi' = \frac{G_0}{A}.$$

Die Integration dieser Gleichung, in der

$$\Psi' = \frac{d\Psi}{dt}$$

bedeutet, liefert, wenn man die bisher noch freie Wahl der Orientierung der X -Achse in der unveränderlichen Ebene derart trifft, dass für $t=0$; $\Psi=0$ wird,

$$(179) \quad \Psi = \frac{G_0}{A} t.$$

Es folgt aus (174)

$$(180) \quad \Phi' = -k.$$

Setzt man (170), (171), (179) und (180) in (177) ein, so wird

$$(181) \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega_1 = -\frac{kcA}{G_0} \sin \frac{G_0}{A} t \\ \omega_2 = \frac{kcA}{G_0} \cos \frac{G_0}{A} t \\ \omega_3 = \frac{G_0}{A} - \frac{knC}{G_0}. \end{array} \right.$$

Durch die vorstehenden Gleichungen erscheint die kräftefreie Drehbewegung des Erdkörpers mathematisch veranschaulicht. Die Gleichungen (156), (162), (163) geben die Koordinaten des Drehvektors w im beweglichen Bezugssystem, also die Gleichung der Polhodie in Parameterform an. Diese Kurve ist ein Kreis, der in der Fig. 10 durch UP dargestellt ist. Sein Mittelpunkt liegt auf der Trägheitshauptachse z des Erdkörpers in der Entfernung $w_3=n$ vom Erdmittelpunkt O . Die Ebene dieses Kreises steht senkrecht auf der Trägheitshauptachse des Erdkörpers. Der Halbmesser dieses Kreises ist gegeben durch

$$(182) \quad r_1 = \sqrt{w_1^2 + w_2^2} = c.$$

Der dem Zeitpunkte t entsprechenden Punkte der Polhodie zugehörige Halbmesser r_1 schliesst mit der x - z -Ebene einen Winkel φ ein, der durch die Gleichung

$$\text{tang } \varphi = \frac{w_2}{w_1} = \text{tang } kt$$

gegeben ist, woraus wieder folgt

$$(183) \quad \varphi = kt = \frac{2\pi}{\tau} \cdot \frac{C-A}{A} t.$$

Dieser Winkel nimmt mit der Zeit t gleichmässig zu, so dass die Polhodie während der Periode

$$(184) \quad T = \frac{A}{C-A} \tau$$

und zwar in positivem Umlaufsinne durchlaufen wird, wonach dasselbe Spiel von neuem beginnt.

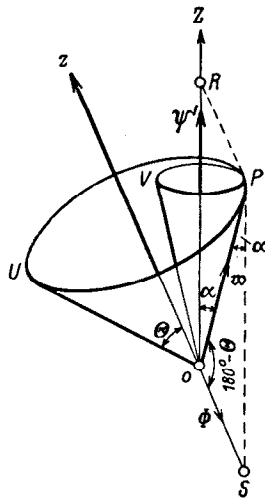


Fig. 10

Die Ausdrücke (181) stellen die Koordinaten des Drehvektors ω im ruhenden Bezugssystem, also die Gleichung der Herpolhodie dar. Auch diese Kurve ist ein Kreis, der in der Fig. 10 durch VP veranschaulicht erscheint. Sein Mittelpunkt liegt in der Z -Achse des ruhenden Koordinatensystems und zwar in der Entfernung ω_3 vom Mittelpunkte O . Die Ebene dieses Kreises steht senkrecht auf der Z -Achse, sein Halbmesser ist durch

$$(185) \quad r_2 = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} = kc \frac{A}{G_0}$$

gegeben. Der dem Zeitpunkte t entsprechenden Punkte der Herpolhodie zugehörige Halbmesser r_2 schliesst mit der X - Y -Ebene einen Winkel ψ ein, der durch die Gleichung

$$\operatorname{tang} \psi = \frac{\omega_2}{\omega_1} = -\operatorname{cotg} \frac{G_0}{A} t$$

gegeben ist, woraus wieder folgt:

$$(186) \quad \psi = \frac{\pi}{2} + \frac{G_0}{A} t.$$

Auch dieser Winkel nimmt mit der Zeit t gleichmässig zu, so dass die Herpolhodie während der Periode

$$(187) \quad T_1 = 2\pi \frac{A}{G_0}$$

und zwar im positiven Sinne durchlaufen wird.

Durch die Ermittlung der Polhodie und der Herpolhodie und der Gesetzmässigkeit der Bewegung des Endpunktes des Drehvektors \mathfrak{w} auf diesen beiden Kurven erscheint das Problem der kräftefreien Drehbewegung der als starr vorausgesetzten Erde vollständig gelöst. Die geometrische Deutung dieser Bewegung ist die folgende.

Es folgt aus (45) und (175)

$$(188) \quad \mathfrak{w} = \Psi' n_3 + \Phi' k,$$

d. h. wegen (174) und (178)

$$(189) \quad \mathfrak{w} = \frac{G_0}{A} n_3 - k k.$$

Der Rotationsvektor \mathfrak{w} ist also die Resultante zweier Drehgeschwindigkeiten $\frac{G_0}{A}$ und $-k$, von denen die erste um die Z -Achse des ruhenden Koordinatensystems, die zweite um die z -Achse des beweglichen Koordinatensystems, also um die Trägheitshauptachse des Erdkörpers vor sich geht. Trägt man also (Fig. 10) in der Richtung der Z -Achse die Strecke $\overline{OR} = \frac{G_0}{A}$, und in der Richtung der negativen z -Achse die Strecke $\overline{OS} = k$ auf, so stellt die Diagonale OP des Parallelogramms $OSPR$ nach Richtung und Grösse die augenblickliche Rotationsgeschwindigkeit \mathfrak{w} des Erdkörpers dar; sie fällt ausserhalb des spitzen Winkels ZOz . Weil \overline{OR} , \overline{OS} und θ unveränderliche Grössen sind, bleibt die relative Lage der beiden Achsen und des Rotationsvektors während der Bewegung eine und dieselbe. Der Endpunkt P des Rotationsvektors beschreibt um die Z -Achse den Herpolhodiekreis PV , und um

die Trägheitshauptachse den Polhodiekreis PU . Der Polhodiekreis umschlingt, weil für die Erde $C > A$ ist, den Herpolhodiekreis und rollt auf demselben mit gleichförmiger Geschwindigkeit, den mit ihm fest verbundenen Erdkörper mitführend. Die Bewegung des Erdkörpers kann nach dem soeben gesagten auch derart gedeutet werden, dass sich die Trägheitshauptachse z des Erdkörpers um die Z -Achse des ruhenden Koordinatensystems mit konstanter Winkelgeschwindigkeit Ψ' drehe, während der Erdkörper selbst um seine Trägheitshauptachse die Rotation $-k$ vollführe. Aus dem Dreieck OPS folgt der nachstehende Zusammenhang der Öffnungswinkel θ bzw. α des Polhodie- und des Herpolhodiekegels:

$$(190) \quad \frac{\sin \alpha}{\sin \theta} = \frac{OS}{OP} = \frac{k}{G_0} A.$$

Est ist wegen (157) und (184)

$$(191) \quad k = \frac{2\pi}{T},$$

so dass man mit Berücksichtigung von (187)

$$(192) \quad \frac{\sin \alpha}{\sin \theta} = \frac{T_1}{T}$$

bekommt.

Diese Relation folgt auch aus dem Umstande, dass der Polhodiekreis, indem er auf dem Herpolhodiekeise rollt, für eine volle Umdrehung die Zeit T , und für den Umlauf um die Herpolhodie die Zeit T_1 erfordert.

§ 37. Erfahrungstatsachen. Wenn sich der Erdkörper, so wie es aus dem Clairaut'schen Theorem und aus dem Appell'schen Theorem gefolgert werden könnte, bei der Erstarrung seiner Drehbewegung derart angepasst hätte, dass seine Trägheitshauptachse mit der Rotationsachse zusammenfiel, ja wenn diese Koinzidenz der beiden Achsen bloss für einen Augenblick $t = t_1$ nachweisbar, d. h. wenn

$$t = t_1; \quad w_1 = 0; \quad w_2 = 0$$

wäre, dann würde aus (147) folgen

$$\frac{dw_1}{dt} = 0 \quad \frac{dw_2}{dt} = 0.$$

Die Komponenten w_1 und w_2 des Rotationsvektors würden also in einem

solchen Falle ständig gleich Null bleiben, der Erdkörper würde ununterbrochen um seine Trägheitshauptachse rotieren. Der Drehimpulsvektor \mathfrak{G}_0 , den wir mit der Z-Achse des ruhenden Koordinatensystems zusammenfallend angenommen haben, würde nach (149) ebenfalls mit der Trägheitshauptachse der Erde zusammenfallen, so dass diese Achse eine auch im Raume unveränderliche Orientierung aufweisen würde. Es wäre also $\theta = 0$, d. h. die Polhodie und die Herpolhodie würden zu einem gemeinsamen Punkt zusammenschrumpfen, der Polhodie- und der Herpolhodiekegel zu einer gemeinsamen unveränderlichen Geraden degenerieren. Die

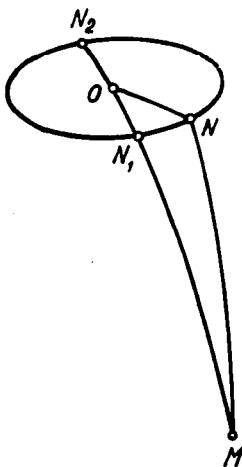


Fig. 11

Erde würde also um ihre auch im Raume unveränderlich gerichtete Trägheitshauptachse mit konstanter Winkelgeschwindigkeit sich drehen.

Bis tief in das neunzehnte Jahrhundert hinein schien es als erwiesen, dass, abgesehen von ihrer Präzession und astronomischen Nutation, die Rotationsachse der Erde unveränderlich sei. Man nannte ihre diesbezügliche Bewegung die tägliche Drehbewegung der Erde, die Periode dieser Drehung den Sterntag.

Fragen wir, um die Richtigkeit dieser Annahme zu überprüfen, welche Folgen die aus dem vorhergehenden Paragraphen sich ergebende Verlagerung der Drehachse der Erde haben müsste.

Der im vorhergehenden Paragraphen ermittelte Polhodiekegel durchdringt die Erdoberfläche in zwei die beiden Trägheitspole umschliessenden Kreisen, die den geometrischen Ort der jeweiligen Durchstosspunkte der Drehachse der Erde mit ihrer Oberfläche veranschaulichen, also die Bahnen der ständig sich verlagernden Rotationspole darstellen. Sei N_1MN_2 (Fig. 11) die Bahn des nördlichen Rotationspols der Erde, O der zugehörige Trägheitspol. Der in Bogenmass gemessene Halbmesser dieses Kreises ist nach den Bezeichnungen des § 36 durch θ veranschaulicht. Der Rotationspol, dessen dem Zeitpunkt t entsprechende Lage durch N veranschaulicht werden möge, durchschreitet je einmal seine Bahn während der durch (184) dargestellten Periode

$$(193) \quad T = \frac{A}{C-A} \tau.$$

Im vorstehenden Ausdruck bedeutet τ die Periode der um die Figurenaxe erfolgenden komponentalen Drehbewegung der Erde, also nach dem soeben gesagten die Dauer eines Sterntages. Aus dem numerischen Wert des Bruches $\frac{A}{C-A}$ ergibt sich für T das Zeitintervall von 305 Sterntagen oder von 304 mittleren Sonnentagen. Diese Periode, die sich aus der Eulerschen Theorie der Drehbewegung ergeben hat, wird die Eulersche Periode genannt.

Zieht man nun einen beliebigen Punkt M der Erdoberfläche in Betracht, so folgt aus dem sphärischen Dreieck MNO :

$$\cos MN = \cos OM \cos ON + \sin OM \sin ON \cos \sphericalangle MON.$$

In diesem Dreieck stellt MN das Komplement der wahren augenblicklichen geographischen Breite φ des Punktes M dar; OM ist das Komplement der auf den Trägheistpol O sich beziehenden mittleren Breite φ_m des Punktes M , während ON nach dem soeben gesagten gleich θ ist. Zählt man die Zeit t von dem Augenblicke, in dem der Rotationspol den im Meridiane des Ortes M liegenden Punkt N_1 seiner Bahn durchschreitet, so ist

$$\sphericalangle MON = \frac{2\pi}{T} t.$$

Es ist also

$$\sin \varphi = \sin \varphi_m \cos \theta + \cos \varphi_m \sin \theta \cos \frac{2\pi}{T} t.$$

Es wird sich sogleich ergeben, dass θ eine sehr kleine Grösse ist, weshalb $\cos \theta = 1$; $\sin \theta = \theta$ gesetzt werden kann. Man bekommt also

$$\sin \varphi = \sin \varphi_m + \theta \cos \varphi_m \cos \frac{2\pi}{T} t.$$

Wegen der Kleinheit von θ wird die Grösse

$$(194) \quad \Delta \varphi = \varphi - \varphi_m,$$

die man als die Breitenschwankung zu bezeichnen pflegt, ebenfalls sehr klein sein müssen, so dass man mittels der Taylorschen Reihe erhält:

$$\sin \varphi = \sin (\varphi_m + \Delta \varphi) = \sin \varphi_m + \Delta \varphi \cdot \cos \varphi_m .$$

Es folgt aus den vorstehenden Gleichungen :

$$(195) \quad \Delta \varphi = \theta \cos \frac{2\pi}{T} t .$$

Die im vorstehenden Paragraphen geschilderte Drehbewegung der Erde müsste also eine durch die vorstehende Formel gegebene Schwankung der geographischen Breite eines jeden beliebigen Ortes der Erdoberfläche zur Folge haben. Weil alle bis in das neunzehnte Jahrhundert durchgeführten astronomischen Ortsbestimmungen gegen eine derartige Änderung der geographischen Breiten zu sprechen schienen, betrachtete man die Unveränderlichkeit der Rotationsachse der Erde als erwiesen. Aber bereits im Jahre 1814 äusserte der grosse deutsche Astronom Bessel seine Bedenken gegen eine solche Annahme; auch die in den Jahren 1842 und 1843 durchgeführten Beobachtungen des russischen Astronomen Peters sprachen in demselben Sinne. Aber die von diesen beiden und auch von anderen Astronomen beobachteten Breitenänderungen waren derart geringfügig, dass man sie auch durch andere Ursachen, durch die optische Refraktion etwa, deuten konnte. Erst als im Jahre 1888 durch die Beobachtungen des Berliner Astronomen Küstner die Realität der Breitenänderungen nachgewiesen ward, wurde der Beschluss gefasst, diese Erscheinung systematisch zu erforschen. Ist sie reell, dann müssten, wie dies aus der vorstehenden Formel folgt, die Breitenschwankungen zweier auf derselben Hemisphäre liegenden, einen Längenunterschied von 180° aufweisenden Orten im entgegengesetzten Sinne verlaufen. Um sich davon zu überzeugen, wurden eine deutsche und eine amerikanische Expedition nach Honolulu entsendet, um die dort stattfindenden Variationen der geographischen Breite zu beobachten. Zu gleicher Zeit wurden in Berlin, Prag und Strassburg derartige Beobachtungen vorgenommen. Diese von Mai 1891 bis Juni 1892 durchgeführten Beobachtungen regaben einwandfrei, dass die Rotationspole der Erde eng geschlungene Bahnen um die zugehörigen Trägheitspole beschreiben. Ende des vorigen Jahrhunderts wurde zwecks systematischer Beobachtung der Breitenschwankungen ein besonderer internationaler Breiten dienst organisiert, der an sechs auf demselben Breitenkreis von $38^\circ 8' \text{ n. Br.}$ gelegenen Stationen durchgeführt wird.

Die Ergebnisse des internationalen Breiten dienstes haben erwiesen, dass die Rotationspole der Erde um die zugehörigen Trägheitspole eng gewundene unregelmässig sich schlingende Bahnen beschreiben, wobei sich der Rotationspol nicht mehr als um $0''32$ in Bogenmass, also in Längenmass gemessen, nicht mehr als 10 Meter vom Trägheitspole entfernt. Ein voller kreisähnlicher Umlauf um den Trägheitspol erfordert eine Zeitdauer von durchschnittlich 430 Sterntagen. Diese Zeitdauer, die nach ihrem Entdecker die Chandler'sche Periode benannt wurde, ist von der vorstehend mitgeteilten Eulerschen Periode nicht unwesentlich verschieden. Der hier zutage tretende Unterschied rührt davon her, dass der Erdkörper nicht, so wie es die Eulerschen Gleichungen voraussetzen, ein starrer, sondern ein elastischer ist; seine Nachgiebigkeit gegenüber den bei der Drehung auftretenden

Fliehkräften hat zur Folge, dass die Figurenachse des Erdkörpers ständig gegen die instantane Drehachse verlagert wird, wodurch

$$T = 430 \tau$$

wird.

Nach diesem Sachverhalt kann jetzt auch die Frage beantwortet werden, wie sich bei der soeben beschriebenen Bewegung der Erde ihre Drehachse im Raume verlagert, denn verlagert sich diese Achse im Erdkörper selbst, kann sie nicht unveränderlich im Raume bleiben; beschreibt diese Achse einen Polhodiekegel, muss sie auch einen Herpolhodiekegel erzeugen. Es folgt aus der Gleichung (192), in der man wegen der Kleinheit der beiden Winkel α und θ ihre Sinuse durch diese Winkel ersetzen kann,

$$(196) \quad \frac{\alpha}{\theta} = \frac{T_1}{T}$$

und aus (170), wo $\cos \theta = 1$ gesetzt werden kann,

$$G_0 = nC,$$

so dass man mittels (187) und (156) erhält

$$(197) \quad T_1 = \frac{2\pi}{n} \frac{A}{C} = \frac{A}{C} \tau.$$

Setzt man dies in (196) ein, so wird

$$(198) \quad \alpha = \frac{A}{C} \cdot \frac{\tau}{T} \theta.$$

Nach den soeben mitgeteilten Ergebnissen überschreitet θ den Wert von $0,32$ nicht. Weil der Unterschied zwischen A und C ein sehr kleiner und überdies $C > A$ ist, bekommt man mit Benützung des vorstehend mitgeteilten Wertes für T als die obere Grenze von α den Wert $0,00074$; derselbe ist derart unbedeutend, dass man bei der kräftefreien Drehbewegung der Erde die räumliche Orientierung ihrer Drehachse als praktisch unveränderlich betrachten kann. Um die derart unveränderlich orientierte Drehachse wankt der Erdkörper derart, dass die Durchstosspunkte dieser Achse mit der Erdoberfläche um die Trägheitspole die soeben geschilderten Bahnen beschreiben. Diese Erscheinung wird also treffend die freie Nutation der Erde genannt.

Die freie Nutation der Erde ist nach dem soeben mitgeteilten eine quanti-

tativ belanglose Erscheinung; ich werde sie bei meinen Berechnungen des Verlaufes der Erdbestrahlung nicht zu berücksichtigen haben. Qualitativ genommen, ist diese Erscheinung jedoch hochbedeutend: sie beweist, dass sich die Erde weder ihrer Gleichgewichtsform angepasst hat, noch als ein starrer Körper zu betrachten ist. Ueberdies zeigen die Ergebnisse des internationalen Breitendienstes, dass die Bewegung der Rotationspole relativ zur Erdoberfläche eine säkulare Komponente besitzt, worüber im nächsten Abschnitt dieses Buches noch die Rede sein wird.

§ 38. Die tägliche Drehbewegung der Erde und ihr Spiegelbild. Die kräftefreie und auch von der freien Nutation befreite Drehbewegung der Erde, ihre tägliche Drehbewegung genannt, bildet die Grundanschauung der Sphärischen Astronomie, deren wichtigste Lehren und Formeln hier zwecks späterer Anwendung kurz wiedergeben werden mögen. Vorher soll eine in die nachstehenden Probleme einschlägige kinematische Frage beantwortet werden.

Die tägliche Umdrehung der Erde erfolgt von West nach Ost, also, von der nördlichen Seite der Erdachse betrachtet, im positiven Drehsinn, mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit. Als ruhendes Bezugssystem soll dabei vorläufig der Fixsternkomplex angenommen werden, wobei man von der Eigenbewegung der einzelnen Fixsterne absehen, oder diese durch Festlegung eines Bezugsmomentes eliminieren soll. Weil, wie im vorhergehenden Kapitel gezeigt, die Drehbewegung der Erde so verläuft, als ob der Schwerpunkt der Erde, welcher mit dem Mittelpunkt der Erde identifiziert werden kann, ruhend wäre und weil man die Folgen der jährlichen Bewegung der Erde und der fortschreitenden des Sonnensystems auf die gegenseitige Stellung der Fixsterne als jährliche bzw. säkulare Parallaxe genannt behandeln kann, denke man sich den Ursprung jenes ruhenden Bezugssystems in den Mittelpunkt der Erde verlegt. Ein anschauliches Bild dieses Bezugssystems gewinnt man auf folgende Weise. Man denkt sich um den Mittelpunkt der Erde eine Kugelfläche mit unendlich grossem Radius beschrieben und auf derselben die Fixsterne von jenem Mittelpunkt aus projiziert. Diese Kugelfläche wird die scheinbare Himmelskugel genannt. Sie ist, im Grunde genommen, identisch mit der Fixsternsphäre der alten Astronomen und ist aus deren Vorstellungen hervorgegangen. Der Unterschied unserer gegenwärtigen diesbezüglichen Auffassung von jener der Alten besteht darin, dass diese an die Realität jener Sphäre glaubten. Dabei nahm Ptolemäios diese Sphäre als beweglich, Aristarch und Kopernikus als ruhend an. Die Frage, ob der Mittelpunkt dieser Sphäre in der Sonne oder in der Erde gelegen ist, wird belanglos, sobald man die Entfernung Sonne-Erde als verschwindend klein gegenüber dem Radius der Himmelsphäre annimmt, wie dies auch die alten Astronomen vorausgesetzt haben. Wir werden von jenen beiden Auffassungen, der ruhenden bzw. der beweglichen Himmelskugel im nachstehenden Gebrauch machen. Handelt sich um die Beschreibung der Bewegung der Erde und der übrigen Planeten relativ zur Sonne, wird man die Himmelskugel als ruhend voraussetzen, will man dagegen die Himmelserscheinungen in bezug auf die Erde beschreiben, wird man die Himmelsphäre als beweglich annehmen. Um den Zusammenhang dieser beiden Vorstellungen mathematisch zu erfassen, ist folgendes zu berücksichtigen.

Sei O (Fig. 12) der Mittelpunkt der Erde, N deren Nordpol, S der Südpol. Die Drehung der Erde relativ zur Himmelskugel erfolgt um die Rotationsachse NS von West nach Ost mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit ω . Der Rotationsvektor ω ist deshalb ein von O gegen N gerichteter Vektor \vec{OP} , dessen Modul gleich ω ist. Nimmt man die Erde als ruhend an, so ist die Bewegung der

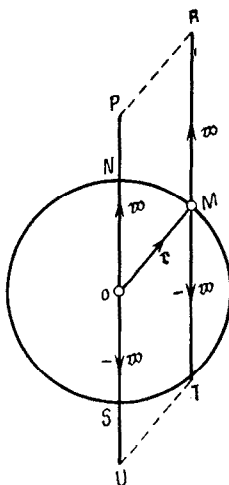


Fig. 12

Himmelskugel relativ zur Erde nach dem Prinzip der Relativität der Bewegungen durch den entgegengesetzt gerichteten Vektor $\vec{OU} = -\omega$ veranschaulicht. Die Himmelskugel dreht sich relativ zur Erde von Ost nach West mit derselben Winkelgeschwindigkeit ω .

Die Beobachtung der Bewegung der Himmelskugel kann nicht vom Mittelpunkt O der Erde erfolgen, sondern von einem Punkte M der Erdoberfläche, dessen Ortsvektor \vec{OM} mit r bezeichnet werden möge. Um zu erfahren, wie sich die Himmelskugel relativ zum Beobachter in M bewege, wird man wie folgt verfahren. Man bringe in M die entgegengesetzt gleichen Vektoren $\vec{MR} = \omega$ und $\vec{MT} = -\omega$ an und berücksichtige, dass sich das System der vier Vektoren \vec{OP} , \vec{OU} , \vec{MR} , \vec{MT} im Gleichgewicht befinde. Nachdem der Vektor \vec{OP} die Bewegung der Erde zur Himmelskugel veranschaulicht, so geben die drei Vektoren \vec{OU} , \vec{MR} , \vec{MT} die Bewegung der Himmelskugel relativ zur Erde, bei der Wahl von M als Bezugspunkt, an. Die durch die Vektoren \vec{OU} und \vec{MR} dargestellten Rotationen sind äquivalent der Translationsbewegung $v = [r\omega]$, so dass die Himmelskugel relativ zum Beobachter in M folgende zwei Bewegungen vollführt: eine durch den Vektor $\vec{MT} = -\omega$ dargestellte Rotation und eine durch den Vektor v dargestellte Translation. Die Geschwindig-

keit dieser letzteren Bewegung ist aber, wie sofort einzusehen, entgegengesetzt gleich der linearen Geschwindigkeit des Beobachters im Parallelkreis infolge seiner Bewegung um die Erdachse. Diese Bewegung ändert wegen der Unermesslichkeit der Himmelsphäre, die Lage derselben zum Beobachter nicht und kommt in der später zu besprechenden Aberration des Lichtes als tägliche Aberration zum Vorschein. Für die unmittelbar nachstehenden Erörterungen ist demnach nur die durch den Vektor \vec{MT} dargestellte Rotation der Himmelskugel zu berücksichtigen. Die Himmelskugel dreht sich also relativ zum Beobachter in M um eine durch M hindurchgehende, zur Erdachse parallele Rotationsachse von Ost nach West mit der Winkelgeschwindigkeit w . Diese Bewegung ist das Spiegelbild der täglichen Drehbewegung der Erde.

§ 39. Sphärische Koordinaten. Um die gegenseitigen Bewegungen der beiden Bezugssysteme, Erde bzw. Himmelskugel, mathematisch zu beschreiben, müssen in diesen Bezugssystemen eindeutig definierte Koordinatensysteme festgelegt werden. Dies geschieht auf folgende Weise.

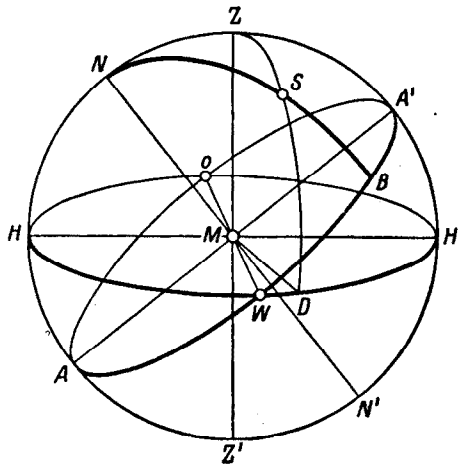


Fig. 13

Sei M (Fig. 13) ein beliebiger Punkt der Erdoberfläche, gekennzeichnet durch seine geographischen Koordinaten, nämlich durch seine geographische Breite φ , positiv gezählt vom Aequator gegen Norden, und seine geographische Länge ψ , positiv gezählt von einem festgelegten Nullmeridian in der Richtung von West gegen Ost. Sieht man von geringfügigen, durch die Anziehung der Sonne und Mond hervorgerufenen zeitlichen Änderungen ab, die an einer anderen Stelle dieses Werkes behandelt werden, so kann die Richtung der irdischen Schwerkraft an jedem Punkt der Erdoberfläche als eine bestimmte und unveränderliche betrachtet werden. Diese Richtung wird durch einen, mit einem Gewichte beschwerten, frei hängenden Faden veranschaulicht und wird die Vertikalrichtung genannt. Denkt man sich dieselbe nach

oben und unten bis an die scheinbare Himmelskugel verlängert, so wird sie dieselbe in zwei entgegengesetzten Punkten treffen, von welchen das obere Z der Zenit, das untere (dem Beobachter unsichtbare) Z' das Nadir genannt wird. Legt man durch den Beobachtungspunkt M eine Ebene senkrecht zur Vertikalrichtung, also eine horizontale Ebene, so wird dieselbe die scheinbare Himmelskugel in einem grössten Kreise schneiden, welcher der Horizont des Standpunktes genannt wird. Dieser sei durch den Kreis $HWH'OH$ dargestellt. Dadurch hat man eine, mit dem Standpunkt des Beobachters fest verbundene Ebene fixiert, was aber zum Aufbau eines Koordinatensystems noch nicht ausreicht. Um das noch fehlende Orientierungselement zu erhalten, hat man zu berücksichtigen, dass sich, wie gezeigt, die Himmelskugel relativ zum Beobachter um eine Achse dreht, die, durch den Standpunkt M hindurchgehend, der Rotationsachse der Erde parallel ist. Sei MN diese Achse; sie treffe die Himmelskugel in den Punkten N und N' . Weil nun die Abmessungen der Erde gegenüber jenen der Himmelskugel verschwindend klein sind, so sind die Punkte N und N' auch jene, in denen die Verlängerungen der eigentlichen Rotationsachse der Erde die Himmelskugel treffen. Aus demselben Grunde wird die durch den Mittelpunkt der Erde gelegte Ebene, die der Ebene des Horizontes parallel ist, die Himmelskugel ebenfalls im Kreis $HWH'OH$ schneiden. Man kann demnach ohne weiters den bisher eingenommenen, auf der Erdoberfläche befindlichen (anthropozentrischen, Standpunkt mit dem geozentrischen vertauschen, d. h. annehmen, dass der Punkt M mit dem Mittelpunkt der Erde zusammenfalle. Die beiden Punkte N und N' , also die Durchstosspunkte der Erdachse mit der Himmelskugel, heissen die Weltpole; der auf der Seite des Nordpales der Erde gelegene Punkt N wird gleichfalls der Nordpol, der andere, N' , der Südpol genannt. Der grösste Kreis $AWA'OA$ der Himmelskugel, dessen Pole die beiden Weltpole sind, heisst der Himmelsäquator; seine Ebene steht senkrecht auf der Erdachse und fällt mit der Ebene des Erdäquators zusammen.

Die Ebene, die durch die Pole N, N' und den Zenit Z gelegt wird, heisst Meridian- oder Mittagsebene; sie schneidet die Himmelskugel in einem grössten Kreise $HZ'H'ZH$, welcher der Meridian- oder der Mittagskreis des Standortes genannt wird und sowohl auf dem Horizont als auf dem Äquator senkrecht steht, da er die Pole dieser grössten Kreise enthält. Der Meridian schneidet den Horizont in zwei Punkten, von denen der dem Nordpol nähere H der Nordpunkt, der gegenüberliegende, H' , der Südpunkt genannt wird. Die Gerade HH' in der Ebene des Horizontes, die den Nordpunkt mit dem Südpunkte verbindet, heisst die Mittagslinie. Die Schnittpunkte O und W des Horizontes und des Äquators heissen Ost- bzw. Westpunkt, von denen der erstere auf jener Seite des Meridianes liegt, auf der die Gestirne sich über den Horizont erheben, d. h. aufgehen, der letztere auf der entgegengesetzten Seite, wo die Sterne untergehen. Die Meridianebene $HZ'H'ZH$ schneidet, weil sie durch die Rotationsachse der Erde und die Vertikalrichtung MZ des Standortes gelegt ist, die Erdoberfläche nach einer krummen Linie, dem Meridian des Standortes.

Durch die vorstehenden Ueberlegungen sind drei mit dem Erdkörper fest verbundene Ebenen fixiert, nämlich die Ebene des Horizontes, des Äquators und des Meridians, von denen die letztere auf den zwei anderen senkrecht steht. Mit

Benützung derselben können folgende Koordinatensysteme und sphärische Koordinaten festgelegt werden.

Die durch Zenit und Nadir gelegten grössten Kreise der Himmelskugel stehen auf dem Horizonte senkrecht, weil jene zwei Punkte die Pole des Horizontes sind. Diese Kreise werden die Vertikal- oder Höhenkreise genannt; auch der Meridian gehört zu denselben. Der durch den Ost- und Westpunkt gelegte Vertikalkreis hat ebenfalls einen besonderen Namen, den des ersten Vertikals, erhalten. Legt man durch einen beliebigen Punkt der Himmelskugel, also etwa durch den Stern S , den Vertikalkreis ZSD , so wird der Bogen DS des Vertikalkreises zwischen Horizont und Stern die Höhe des Sternes genannt. Dieser Bogen, der mit h bezeichnet werden möge, misst den Winkel DMS , den die Richtung MS mit der Ebene des Horizontes einschliesst, und ist positiv zu zählen vom Horizont gegen Zenit, negativ gegen das Nadir. Der sphärische Winkel $H'ZS$, den der durch S gelegte Vertikalkreis mit dem Meridiane bildet, heisst das Azimut und hat den zwischen Meridian- und Vertikalkreis liegenden Bogen HD des Horizontes zum Masse. Diese Grösse, die mit A bezeichnet werden möge, wird vom südlichen Teile des Meridians in der Richtung von Süd über West, von 0° bis 360° gezählt. Die Grössen h und A sind die beiden auf den Horizont sich beziehenden sphärischen Koordinaten. Statt der ersteren kann auch deren Komplement, die Zenitdistanz genannt, benützt werden. Es ist dies der zwischen Zenit und Stern liegende Bogen ZS des Vertikalkreises, und soll mit z bezeichnet werden. Es ist also immer $h + z = 90^\circ$.

Die Höhe des sichtbaren Weltpoles N über dem Horizonte des Standortes, also der Bogen HN , wird die Polhöhe genannt. Dieselbe ist offenbar gleich dem Bogen $A'Z$, den die Vertikalrichtung des Beobachtungsortes mit der Ebene des Aequators bildet, d. h. gleich der geographischen Breite φ des Standortes.

Auf dieselbe Weise, wie man die auf den Horizont sich beziehenden Koordinaten festgelegt hat, können die auf den Aequator sich beziehenden vereinbart werden. Legt man durch die Weltpole und den Stern S den grössten Kreis NSB , Deklinations- oder Stundenkreis genannt, so heisst sein zwischen dem Aequator und dem Stern S liegende Bogen BS die Deklination des Sternes S . Diese Grösse soll mit δ bezeichnet und positiv vom Aequator gegen den Nordpol gezählt werden. Der sphärische Winkel ZNS zwischen Stundenkreis und Meridian heisst der Stundenwinkel des Sternes; er hat das zwischenliegende Stück $A'B$ des Aequators zum Masse und wird, wie das Azimut, vom südlichen Teile des Meridians in der Richtung von Süd über West gezählt. Der Stundenwinkel soll mit t bezeichnet werden. Man pflegt den Stundenwinkel mit dem Zeitmasse zu messen, indem man 360° gleich 24^h , d. h. 15° gleich 1^h , $1^\circ = 4^m$, $1' = 4^s$ setzt. Die Gründe für dieses Vorgehen werden bald ersichtlich werden. δ und t sind die beiden auf den Aequator sich beziehenden Koordinaten. Statt δ kann auch dessen Komplement, der Bogen NS des Deklinationskreises, Poldistanz genannt, benutzt werden.

Von den beiden soeben festgelegten, mit dem Erdkörper fest verbundenen Koordinatensystemen ist das erste vorwiegend der astronomischen Beobachtungspraxis, das zweite dem Mechanismus der täglichen Bewegung des Himmels angepasst. Um diese Bewegung mathematisch beschreiben zu können, ist ein weiteres Koordinatensystem erforderlich, das mit der Himmelskugel fest verbunden ist. Die-

se hat mit dem Erdkörper die Rotationsachse NN' und die Aequatorebene $AWA'O$ gemeinsam und ihre tägliche Bewegung relativ zur Erde besitzt nur einen Freiheitsgrad. Es genügt also ein einziger Parameter oder Koordinate, um die Lage der Himmelskugel relativ zur Erde in jedem Moment angeben zu können. Als eine solche Koordinate wählt man den Stundenwinkel eines Punktes des Aequators der Himmelskugel. Dies geschieht auf folgende Weise.

Die Erde bewegt sich relativ zur Sonne von West nach Ost in einer Bahn, deren Ebene durch den Schwerpunkt, d. h. durch den Mittelpunkt der Sonne hindurchgeht, weshalb die relative Bewegung der Sonne zur Erde ebenfalls in demselben Sinne erfolgen wird, in einer durch den Erdmittelpunkt hindurchgehenden Ebene. Der Schnitt dieser Ebene mit der Himmelskugel, also die Projektion der relativen Sonnenbahn aus dem Erdmittelpunkt auf die Himmelskugel, wird die Ekliptik genannt. Weil die Rotationsachse der Erde nicht senkrecht steht auf der Bahnebene der Erde, sondern mit der Normalen dieser Bahn einen Winkel ε einschliesst, wird die Ekliptik nicht mit dem Himmelsäquator zusammenfallen, vielmehr mit demselben ebenfalls den Winkel ε einschliessen, der die Schiefe der Ekliptik genannt wird. Gegenwärtig ist $\varepsilon = 23^\circ 27'$.

Seien (Fig. 14) N, N' die Weltpole und AA' der zugehörige Aequator der Himmelskugel, EE' die Ekliptik und P, P' die zugehörigen Pole derselben. Der zwischen den Achsen MN und MP eingeschlossene Winkel oder der Bogen

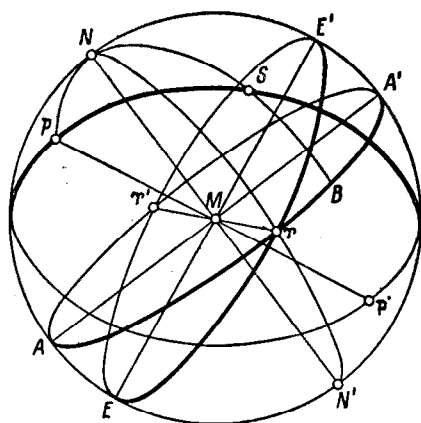


Fig. 14

NP als auch der sphärische Winkel $A'YE'$ sind der Schiefe ε der Ekliptik gleich. Die Gerade YY' , längs welcher sich die Ebenen des Himmelsäquators und der Ekliptik schneiden, steht senkrecht zur Ebene des Winkels NMP und wird die Tag- und Nachtgleichen- oder die Aequinoktiallinie genannt. Diese Gerade trifft die Himmelskugel in zwei einander gegenüberliegenden Punkten Y und Y' , die man die Tag- und Nachtgleichen- oder Aequinoktialpunkte nennt. Ekliptik und Aequator halbieren sich gegenseitig als grösste Kreise; jener von den beiden Aequinoktialpunkten (Y in der Fig. 14), den die Sonne durchschreitet, wenn sie sich aus der süd

lichen Hälfte der Himmelskugel in die nördliche erhebt, heisst der Frühlings- Tag- und Nachtgleichenpunkt, kurz der Frühlingspunkt oder das Frühlingsäquinoktium, der andere, Υ' , der Herbstpunkt.

Ist $NAN'A'N$ der Meridian des Standortes des Beobachters, so stellt der sphärische Winkel $A'N\Upsilon$ den jeweiligen Stundenwinkel des Frühlingspunktes dar und es hat dieser Winkel den Bogen $A'\Upsilon$ des Aequators zum Masse. Durch diesen Stundenwinkel ist die jeweilige Lage der Himmelskugel zu den mit dem Erdkörper fest verbundenen Koordinatensystemen eindeutig gegeben und es wird dieser Stundenwinkel, im Zeitmass ausgedrückt, die Sternzeit genannt; wir werden sie mit θ bezeichnen.

Der Himmelsäquator und die Ekliptik sind, wenn man von deren säkularen Aenderungen, von denen später die Rede sein wird, absieht, oder diese durch Festlegung einer bestimmten Epoche eliminiert, feste Kreise der Himmelskugel und können zum Aufbau der mit der Himmelskugel fest verbundenen Koordinatensysteme benutzt werden. Der eine dieser Koordinatensysteme hat die Aequatorebene zur Grundebene und die Aequinoktiallinie zur Grundrichtung. Legt man demnach durch einen beliebigen Punkt der Himmelskugel oder einen Stern S den Deklinationkreis NSB hindurch, so wird der Bogen ΥB des Aequators die gerade Aufsteigung oder die Rektaszension des Sternes genannt; wir werden diese Grösse mit α bezeichnen. Sie wird vom Frühlingspunkte aus von West gegen Ost, also in einer der täglichen Bewegung des Himmels entgegengesetzten Richtung gezählt und ebenfalls mit dem Zeitmasse gemessen. Rektaszension ($\alpha = \Upsilon B$) und Deklination ($\delta = BS$) sind die Koordinaten des mit der Himmelskugel fest verbundenen Aequator-Koordinatensystems.

Es folgt aus der Fig. 14

$$\text{arc } \Upsilon B + \text{arc } BA' = \text{arc } \Upsilon A'.$$

Nun stellt nach den soeben getroffenen Vereinbarungen der Bogen ΥB die Rektaszension α , der Bogen $A'B$ den Stundenwinkel t des Gestirnes S dar; nachdem der Bogen $\Upsilon A'$ die Sternzeit θ veranschaulicht, so folgt die bemerkenswerte Beziehung:

$$(199) \quad \alpha + t = \theta.$$

Ein weiteres mit der Himmelskugel fest verbundenes Koordinatensystem erhält man, wenn man die Ekliptik zur Grundebene und die Aequinoktiallinie zur Grundrichtung wählt. Legt man durch den Stern S einen durch die Pole P und P' der Ekliptik hindurchgehenden Kreis $PSGP'$, der offenbar auf der Ekliptik senkrecht steht, so wird derselbe, Breitenkreis genannt, die Ekliptik im Punkte G treffen. Der zwischen der Ekliptik und dem Stern liegende Bogen GS dieses Kreises wird die Breite genannt, der Bogen ΥG der Ekliptik dagegen die Länge des Gestirnes. Die Breite soll mit β bezeichnet und positiv gegen den in der nördlichen Hälfte der Himmelskugel gelegenen Ekliptikpol P gezählt werden; die

Länge soll mit λ bezeichnet und vom Frühlingspunkte aus von 0° bis 360° von West gegen Ost, also in derselben Richtung wie die Rektaszension gezählt werden. Länge und Breite sind die auf die Ekliptik sich beziehenden sphärischen Koordinaten der Gestirne.

Es ist oft erforderlich von einem der aufgezählten vier Koordinatensysteme zu einem andern dieser Systeme überzugehen. Weil die beiden Systeme des Aequators eine Koordinate, die Deklination, gemeinsam haben, die zwei anderen Koordinaten, Stundenwinkel in dem einen, Rektaszension in dem andern Systeme, durch die einfache Beziehung (199) zusammenhängen, hat man sich nur mit folgenden zwei Aufgaben zu befassen: 1) Höhe h und Azimut A in Stundenwinkel t und Deklination δ zu verwandeln und umgekehrt; 2) Rektaszension α und Deklination δ in Länge λ und Breite β zu verwandeln und umgekehrt. Durch Lösung dieser zwei Aufgaben ist auch die Frage erledigt, wie man aus Höhe und Azimut Länge und Breite berechnet oder umgekehrt.

Zur Lösung der ersten dieser zwei Aufgaben bedient man sich des durch Zenit, Weltpol und Stern gekennzeichneten sphärischen Dreiecks der Himmelskugel, das oft auch das nautische Dreieck genannt wird. Wie dies aus Fig. 13 und

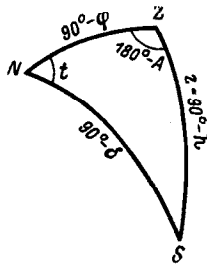


Fig. 15

den zugehörigen Erörterungen folgt, ist in diesem Dreieck, das in Fig. 15 wiedergegeben ist, die Seite NZ gleich dem Komplement $(90^\circ - \varphi)$ der geographischen Breite φ des Standortes des Beobachters, die Seite NS gleich dem Komplement $(90^\circ - \delta)$ der Deklination des Gestirnes, während die Seite ZS gleich ist der Zenitdistanz z oder dem Komplement $(90^\circ - h)$ der Höhe des Gestirnes. Der sphärische Winkel ZNS stellt den Stundenwinkel t und der Winkel SZN das Supplement $(180^\circ - A)$ des Azimutes des Gestirnes dar. Weil die Seite NZ dieses Dreiecks durch den Standort des Beobachters als gegeben zu betrachten ist, können zwei von den vier Grössen h , t , δ , A durch die übrigen zwei mit den Mitteln der sphärischen Trigonometrie ausgedrückt werden. Zwecks späterer Anwendung sollen hier folgende Gleichungen abgeleitet werden. Man hat nach dem Kosinussatze der sphärischen Trigonometrie

$$\cos ZS = \cos NZ \cos NS + \sin NZ \sin NS \cos \sphericalangle ZNS$$

$$\cos NS = \cos ZN \cos ZS + \sin ZN \sin ZS \cos \sphericalangle NZS,$$

d. h

$$(200) \quad \cos z = \sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t$$

$$(201) \quad \sin \delta = \sin \varphi \sin h - \cos \varphi \cos h \cos A.$$

Zur Lösung der zweiten Aufgabe bedient man sich des durch Weltpol, Ekliptikpol und Stern gekennzeichneten sphärischen Dreiecks der Himmelskugel, das auch das astronomische Dreieck genannt wird. Es folgt aus Fig. 14 und den zugehörigen Erörterungen, dass in diesem Dreieck die Seite NP gleich ist der Schiefe

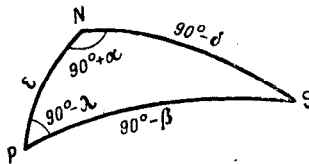


Fig. 16

ε der Ekliptik, Seite PS gleich dem Komplement ($90^\circ - \beta$) der Breite, Seite NS gleich dem Komplement ($90^\circ - \delta$) der Deklination des Gestirnes; der sphärische Winkel NPS ist, weil $M\Upsilon$ (Fig. 16) senkrecht auf der Ebene NMP steht, gleich dem Komplement ($90^\circ - \lambda$) der Länge des Gestirnes, während der sphärische Winkel PNS gleich ist ($90^\circ + \alpha$). Weil die Seite NP als gegeben zu betrachten ist, können zwei von den vier Grössen $\alpha, \delta, \lambda, \beta$ durch die übrigen zwei ausgedrückt werden. Es folgt nach den Kosinussätze der sphärischen Trigonometrie

$$\cos NS = \cos PS \cos PN + \sin PS \sin PN \cos \sphericalangle NPS$$

$$\cos PS = \cos NP \cos NS + \sin NP \sin NS \cos \sphericalangle PNS$$

d. h.

$$(202) \quad \sin \delta = \sin \beta \cos \varepsilon + \cos \beta \sin \varepsilon \sin \lambda$$

$$(203) \quad \sin \beta = \cos \varepsilon \sin \delta - \sin \varepsilon \cos \delta \sin \alpha$$

und nach den Sinussätze

$$\frac{\sin NS}{\sin \sphericalangle NPS} = \frac{\sin PS}{\sin \sphericalangle PNS},$$

d. h.

$$(204) \quad \cos \alpha \cos \delta = \cos \beta \cos \lambda.$$

§ 40. Die tägliche Bewegung des Himmels. — Infolge der täglichen Bewegung des Himmels, die um die Weltachse mit konstanter Winkelgeschwindigkeit von Ost gegen West erfolgt, wird, wie dies aus den vorstehenden Erörterungen und Festlegungen folgt, die Deklination δ der Gestirne nicht geändert, während ihr Stundenwinkel t gleichförmig zunimmt. Zu dieser relativen Drehbewegung der Himmelskugel und deren Gestirne gesellen sich noch andere Bewegungen, durch die sowohl die Lage der beiden Fundamentalkreise der Himmelskugel, des Himmelsäquators und der Ekliptik, als auch die gegenseitige Stellung der Gestirne gewissen, langsam vor sich gehenden Aenderungen unterworfen sind. Weil dieselben, wie bereits angegeben, getrennt behandelt sein werden, ist bei der Untersuchung der täglichen Bewegung des Himmels die gegenseitige Lage jener Fundamentalkreise und der Gestirne als unveränderlich zu betrachten. Aus diesem Grunde sind alle Koordinaten, die sich auf die mit der Himmelskugel fest verbundenen Koordinatensysteme beziehen, also die Grössen $\alpha, \delta, \lambda, \beta$ als Konstante zu behandeln. Weil deshalb in (199) d. h. in

$$(205) \quad \alpha + t = \theta$$

α als konstant anzusehen ist, kann die Grösse θ als die unabhängige Variable gewählt werden. Diese Grösse, Sternzeit genannt, wird mit dem Zeitmasse gemessen, indem eine Zunahme derselben um 360° gleich 24 Sternzeitstunden, oder gleich einem Sterntag gesetzt wird. Man lässt den Sterntag beginnen, oder man sagt es ist 0^h Sternzeit, in dem Augenblicke, in dem der Frühlingspunkt durch den Meridian geht. Es ist $1^h, 2^h, 3^h \dots$ Sternzeit, wenn der Stundenwinkel des Frühlingspunktes $15^\circ, 30^\circ, 45^\circ \dots$ beträgt. Durch Angabe der Sternzeit ist die Lage eines beliebigen Gestirnes, dessen Rektaszension und Deklination bekannt sind, vermöge der Gleichung (205) auch in dem mit dem Standorte des Beobachters fest verbundenen System des Aequators gegeben, d. h. die Koordinaten t und δ bekannt. Um die Lage des Gestirnes relativ zum Horizont und Meridian des Standpunktes zu ermitteln, hat man sich der Gleichungen (200) und (201) zu bedienen. Darnach ist die Höhe des Gestirnes über dem Horizont des Beobachters zur Sternzeit $\theta = \alpha + t$ durch die Gleichung gegeben:

$$(206) \quad \sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t.$$

Die Höhe des Gestirnes ist also veränderlich, was schon daraus folgt, dass das Gestirn im Laufe des Sterntages einen zum Himmelsäquator parallelen Kreis der Himmelskugel beschreibt, der, falls nicht $\varphi = \pm 90^\circ$ ist, gegen den Horizont des Beobachters geneigt ist. Bei dieser Bewegung wird das Gestirn den Horizont durchschreiten, d. h. es wird $h=0$ werden, für $t=t_0$, wobei t_0 durch die Gleichung

$$\sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t_0 = 0,$$

d. h.

$$(207) \quad \cos t_0 = -\operatorname{tang} \varphi \operatorname{tang} \delta$$

gegeben ist. Diese Gleichung liefert den Stundenwinkel t_0 , die Gleichung (205) die Sternzeit des Auf- bzw. des Untergangs des Gestirnes. Der absolut genommene Wert des Stundenwinkels t_0 wird der halbe Tagbogen des Gestirnes genannt und gibt, mit zwei multipliziert, die in Sternzeitstunden gemessene Zeit an, während der das Gestirn oberhalb des Horizontes des Standortes verweilt.

Befindet sich der Standort des Beobachters auf der nördlichen Halbkugel der Erde, d. h. ist φ positiv, so ist, wenn δ ebenfalls positiv ist, d. h. das Gestirn nördlich des Himmelsäquators sich befindet, nach (207) $\cos t_0$ negativ, also der halbe Tagbogen t_0 grösser als 90° oder 6^h ; das Gestirn verweilt länger oberhalb des Horizontes des Standortes als unter demselben. Die Gleichung (207) ergibt dabei nur dann reelle Wurzeln, solange $\tan \varphi \tan \delta \leq 1$ ist. Für $\tan \varphi \tan \delta > 1$, d. h. $\tan \delta > \cot \varphi = \tan(90^\circ - \varphi)$, also für $\delta > 90^\circ - \varphi$, verweilt der Stern ständig oberhalb des Horizontes und wird Zirkumpolarstern genannt. Für $\delta = 0$ wird $t_0 = 90^\circ$, d. h. ein Gestirn des Himmelsäquators verweilt ebensolange über dem Horizonte als unter demselben. Für $\delta < 0$, d. h. für Gestirne südlicher Deklination, wird $\cos t_0$ positiv und t_0 kleiner als 90° oder 6^h ; solche Gestirne verweilen daher kürzere Zeit über dem Horizont als unter demselben. Ein Gestirn, dessen südliche Deklination grösser ist als $90^\circ - \varphi$ steigt über dem Horizont nicht mehr empor.

Die vorstehenden Ueberlegungen gelten für die südliche Halbkugel der Erde, wofern man φ und δ durch $-\varphi$ und $-\delta$ ersetzt.

Setzt man in (201) $h=0$, so liefert die so erhaltene Gleichung das Azimut $A=A_0$ jenes Punktes des Horizontes, in dem der Stern auf- bzw. untergeht. Es ist also

$$(210) \quad \cos A_0 = -\frac{\sin \delta}{\cos \varphi}.$$

Der negative Wert von A_0 ist das Azimut des Sternes bei seinem Aufgange, der positive Wert das Azimut bei seinem Untergange. Die Entfernung des in Rede stehenden Punktes des Horizontes vom Ost- bzw. Westpunkte nennt man die Morgen- bzw. Abendweite des Gestirnes. Bezeichnet man diese mit A' , so wird $A_0 = 90^\circ + A'$, $\sin A' = -\cos A_0$, d. h.

$$(211) \quad \sin A' = \frac{\sin \delta}{\cos \varphi}.$$

A' ist positiv, wenn der Aufgang und der Untergang des Gestirnes nördlich der Ost—Westlinie gelegen sind.

Die Zenitdistanz des Gestirnes ist nach (200) gegeben durch:

$$(212) \quad \cos z = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t.$$

Dieser Ausdruck erreicht seine extremen Werte für $t=0$ und $t=180^\circ$. Das Maximum von $\cos z$, d. h. das Minimum von z , das mit z_1 bezeichnet werden möge, wird erreicht für $t=0$, und es ist in diesem Falle

$$\cos z_1 = \cos (\varphi - \delta),$$

d. h.

$$(213) \quad z_1 = \varphi - \delta \quad \text{oder} \quad z_1 = \delta - \varphi,$$

je nachdem das Gestirn südlich oder nördlich vom Zenit seine grösste Annäherung erreicht hat. Das Minimum von $\cos z$, d. h. das Maximum von z , das mit z_2 bezeichnet werden möge, wird erreicht für $t=180^\circ$ und es ist in diesem Falle

$$\cos z_2 = -\cos (\varphi + \delta)$$

$$(214) \quad z_2 = 180^\circ - (\varphi + \delta).$$

Die Formeln (213) und (214) liefern die Zenitdistanzen der Gestirne in ihrer oberen bzw. unteren Kulmination. Diese erfolgen, falls wie oben δ konstant angenommen wird, im Meridiane des Standortes.

§ 41. Die Bewegung der Sonne am Himmel. Die Voraussetzung, dass Rektaszension und Deklination Konstante sind, trifft bei den Planeten, Sonne und Mond nicht mehr zu, vielmehr sind es die zeitlichen Aenderungen jener beiden Koordinaten, die die wechselnden Lichtgestalten des Mondes, den Lauf der Jahreszeiten, die Sonnen- und Mondfinsternisse, also die auffallendsten Himmels- und Naturerscheinungen zur Folge haben. An dieser Stelle sollen einige Folgen der jährlichen Bewegung der Sonne am Himmel besprochen werden.

Die relative Bewegung der Sonne um die Erde ist das Spiegelbild des jährlichen Umlaufes der Erde um die Sonne; diese heliozentrische Bewegung der Planeten und der Erde ist im ersten Abschnitt dieses Buches bereits besprochen worden. Wenn man den dort eingenommenen heliozentrischen Standpunkt mit dem geozentrischen vertauscht, so ergibt es sich vorerst, dass zwischen der geozentrischen Länge λ der Sonne, die, wie vereinbart, vom Frühlingspunkt längs der Ekliptik zu messen ist, und der ebenfalls vom Frühlingspunkt zu messenden heliozentrischen Länge λ_h der Erde ein Unterschied von 180° besteht, d. h.

$$(215) \quad \lambda - \lambda_h = 180^\circ$$

ist.

Die Gesetzmässigkeiten der Aenderung der Grösse λ_h sind bereits klargelegt worden, und daraus ergeben sich auch die Gesetze, nach denen sich die Grösse λ im Laufe des Jahres ändert. Die andere auf das System der Ekliptik sich beziehende Koordinate der Sonne, die Breite β , bleibt, weil die Sonne sich längs der Ekliptik am Himmel verlagert, ständig gleich Null.

$$(216) \quad \beta = 0$$

Die Gleichungen (202), (203) und (204) erhalten jetzt die Form:

$$(217) \quad \sin \delta = \sin \varepsilon \sin \lambda$$

$$(218) \quad \cos \varepsilon \sin \delta = \sin \varepsilon \cos \delta \sin \alpha$$

$$(219) \quad \cos \lambda = \cos \alpha \cos \delta .$$

Aus (217) und (218) folgt:

$$(220) \quad \cos \varepsilon \sin \lambda = \cos \delta \sin \alpha ,$$

und aus (219 und (220)

$$(221) \quad \cos \varepsilon \operatorname{tang} \lambda = \operatorname{tang} \alpha .$$

Die Deklination der Sonne ist nach (217) gleich Null für $\lambda=0$ und $\lambda=180^\circ$, also im Frühlings bzw. Herbstpunkte; sie erreicht ihre extremen Werte $\delta = +\varepsilon$; $\delta = -\varepsilon$ für $\lambda = 90^\circ$ bzw. $\lambda = 270^\circ$. Diese beiden Punkte der Ekliptik, die von den Aequinoctialpunkten um 90° entfernt sind, heissen die Sonnenwende- oder Solstitialpunkte, und zwar der in der nördlichen Halbkugel des Himmels liegende der Sommersolstitialpunkt, oder das Sommersolstitium, der andere der Wintersolstitialpunkt oder das Wintersolstitium. Die beiden Parallelkreise zum Himmelsäquator, die durch diese Punkte gehen, heissen Wendekreise, der nördliche jener des Krebses, der südliche jener des Steinbockes

Der Zeitraum das Jahres, während welchem die Sonne den Ekliptikbogen zwischen dem Frühlingsäquinoktium und dem Sommersolstitium durchschreitet, wird der astronomische Frühling der nördlichen Halbkugel der Erde genannt. Während dieses Intervalles nimmt λ von 0° bis 90° , und die Deklination δ von 0 bis zu ihrem Maximalwert $+\varepsilon$ zu. Während des astronomischen Sommers der nördlichen Halbkugel legt die Sonne den Ekliptikbogen zwischen dem Sommersolstitium und dem Herbstäquinoktium (zwischen $\lambda = 90^\circ$ und $\lambda = 180^\circ$) zurück, und δ nimmt von $+\varepsilon$ bis 0 ab. Während des astronomischen Herbstes der nördlichen Halbkugel legt die Sonne den Ekliptikbogen zwischen dem Herbstäquinoktium und dem Wintersolstitium (zwischen $\lambda = 180^\circ$ und $\lambda = 270^\circ$) zurück, und δ sinkt von 0 bis zu seinem Minimalwert $-\varepsilon$. Während des astronomischen Winters der nördlichen Halbkugel legt die Sonne den Ekliptikbogen zwischen dem Wintersolstitium und dem Frühlingsäquinoktium (zwischen $\lambda = 270^\circ$ und $\lambda = 360^\circ$) zurück, und δ nimmt von $-\varepsilon$ bis 0 zu. Der astronomische Frühling, Sommer, Herbst und Winter der

südlichen Halbkugel der Erde entsprechen in der angeführten Reihenfolge den Quadranten $\lambda = 180^\circ$ bis $\lambda = 270^\circ$; $\lambda = 270^\circ$ bis $\lambda = 360^\circ$; $\lambda = 0$ bis $\lambda = 90^\circ$; $\lambda = 90^\circ$ bis $\lambda = 180^\circ$ der Sonnenbahn.

Die Aenderungen der Deklination der Sonne kommen in der Länge des Tagbogens zum Ausdruck und rufen dadurch den Wechsel der Jahreszeiten hervor. Für $\delta = 0$, ist nach (207) für jedes φ $t_0 = 90^\circ$, d. h. auf der ganzen Erdkugel Tag und Nacht einander gleich, für $\delta > 0$ erfreut sich die Nordkugel des längeren Tages, für $\delta < 0$ die Südkugel. Es folgt aber aus (207), dass diese Gleichung nur dann einen reellen Wert für t_0 liefern kann, solange $-1 \leq \tan \varphi \tan \delta \leq +1$ ist. Da die Deklination der Sonne zwischen den Grenzen $-\varepsilon$ und $+\varepsilon$ eingeschlossen

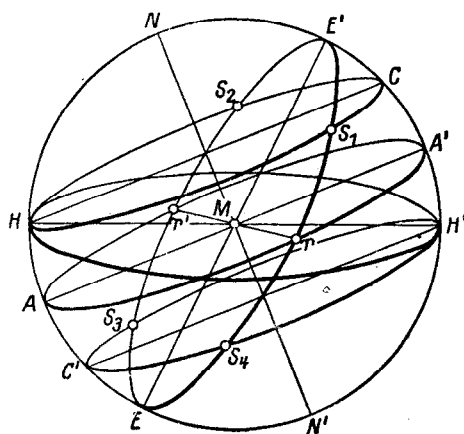


Fig. 17

ist, ist die soeben gestellte Bedingung während des ganzen Jahres befriedigt auf jenen geographischen Breiten, für die $-(90^\circ - \varepsilon) \leq \varphi \leq +(90^\circ - \varepsilon)$ ist.

Durch die Breitenkreise $\varphi = 90^\circ - \varepsilon$ und $\varphi = -(90^\circ - \varepsilon)$, welche die Polarkreise genannt werden, wird auf der Erdoberfläche ein Gürtel abgegrenzt, auf dem tagtäglich die Sonne auf- und untergeht. Auf den beiden jenseits der Polarkreise liegenden Kalotten der Erdoberfläche ist es anders. Hier verweilt, solange $\delta > 90^\circ - \varphi$ ist, die Sonne oberhalb des Horizontes, ohne infolge der Umdrehung des Himmels unterzugehen; die betreffende Breite hat ständigen Tag. Sinkt dagegen die Deklination der Sonne unter dem Wert $-(90^\circ - \varphi)$, so steigt die Sonne über dem Horizont nicht empor und es währt an der betreffenden Breite ständige Nacht. Um dies zu veranschaulichen, stelle uns der Kreis HH' (Fig. 17) den Horizont eines der Polarzone angehörigen Punktes der Erdoberfläche dar. AA' sei der Himmelsäquator, EE' die Ekliptik. Legt man durch den Nordpunkt H der Mittagslinie den Parallelkreis HS_1CS_2H hindurch, so schneidet derselbe die Ekliptik in den Punkten

S_1 und S_2 , deren Deklination gleich ist $90^\circ - \varphi$. Sobald die Sonne auf ihrer jährlichen Bahn den Punkt S_1 erreicht, geht sie, wie dies aus der Figur anschaulich folgt, nicht mehr unter. Dies dauert während der ganzen Zurücklegung des Bahnintervalles $S_1 E' S_2$ und dieses Intervall soll das Intervall des ständigen Tages genannt werden. Legt man durch den Südpunkt H' der Mittagslinie den Parallelkreis $H' S_3 C' S_4 H'$ hindurch, so schneidet derselbe die Ekliptik in den Punkten S_3 und S_4 , deren Deklination gleich ist $-(90^\circ - \varphi)$, und man ersieht sofort, dass die Sonne während der Zurücklegung des Bahnintervalles $S_3 E S_4$ über dem Horizont nicht mehr erscheint. Dieses Intervall soll das Intervall der ständigen Nacht genannt werden. Während der Zurücklegung der Bahnintervalle $S_4 \Upsilon S_1$ und $S_2 \Upsilon' S_3$ geht die Sonne täglich auf und unter.

Um die Längen der Punkte S_1, S_2, S_3, S_4 zu ermitteln, ist folgendes zu berücksichtigen. Das Intervall des ständigen Tages beginnt im Moment, in dem

$$\text{tang } \varphi \text{ tang } \delta = 1$$

ist und dauert solange $\text{tang } \varphi \text{ tang } \delta > 1$ ist. Das Intervall der ständigen Nacht beginnt sobald

$$\text{tang } \varphi \text{ tang } \delta = -1$$

wird und dauert solange $\text{tang } \varphi \text{ tang } \delta < 1$ ist. Die Deklinationen der Punkte S_1, S_2, S_3, S_4 sind durch die obigen zwei Gleichungen gegeben, die man in eine einzige,

$$\text{tang}^2 \varphi \text{ tang}^2 \delta = 1,$$

zusammenfassen kann. Daraus folgt

$$1 + \text{tang}^2 \varphi = 1 + \text{cotg}^2 \delta,$$

d. h.

$$\sin^2 \delta = \cos^2 \varphi,$$

also wegen (217)

$$(222) \quad \sin^2 \lambda = \frac{\cos^2 \varphi}{\sin^2 \varepsilon}.$$

Die vier zwischen 0° und 360° liegenden Wurzeln dieser Gleichung, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$, stellen die Längen der Punkte S_1, S_2, S_3, S_4 dar. Dabei ist, wie leicht einzusehen $0 < \lambda_1 < 90^\circ$; $\lambda_2 = 180^\circ - \lambda_1$; $\lambda_3 = 180^\circ + \lambda_1$; $\lambda_4 = 360^\circ - \lambda_1$.

Die Zeit, die zwischen zwei aufeinanderfolgenden Kulminationen der Sonne verfließt, heisst der wahre Sonnentag. Es ist wahrer Mittag in dem Augenblicke, wo die Sonne durch den Meridian des Standortes geht, und in irgend einem Augenblicke ist die wahre Sonnenzeit gleich dem Stundenwinkel der Sonne, in Zeit ausgedrückt. Der wahre Sonnentag ist um rund 4^m länger als der Sterntag, aber die wahren Sonnentage sind im Laufe des Jahres gewissen Aenderungen unterworfen und sind nicht einander genau gleich, weshalb für die Zeitmessung der mittlere Sonnentag eingeführt werden musste, worüber noch die Rede sein wird. Handelt es sich um die Berechnung der Länge des Tagbogens der Sonne für einen bestimmten Tag und geographische Breite, so ist es, weil die erwähnten Schwankungen des wahren Sonnentages gering sind, gestattet, den wahren Sonnentag mit dem mittleren identifizierend, die Gleichung (207) zu benützen. Will man beispielsweise die Dauer des längsten bzw. des kürzesten Tages an einer zwischen den Polarkreisen liegenden geographischen Breite φ berechnen, so hat man in der Gleichung (207) die Deklination δ gleich $+\varepsilon$ bzw. $-\varepsilon$ zu setzen, um den halben Tagbogen der Sonne in mittlerer Sonnenzeit zu erhalten.

Handelt es sich um die Berechnung des Jahresintervalles des ständigen Tages bzw. der ständigen Nacht an den Breiten der Polarzonen, so hat man die Längen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ der Sone zu ermitteln, bei denen jene Intervalle beginnen bzw. endigen; die Zeitintervalle, die für die Zurücklegung dieser Bahnintervalle erforderlich sind, kann man dann direkt berechnen oder den Ephemeriden der Sonne entnehmen.

§ 42. Nebeneinflüsse. Die vorstehend geschilderten Erscheinungen erleiden durch den Standort des Beobachters, durch die Abmessungen der beobachteten Gestirne und durch die Art der Lichtfortpflanzung einige Beeinflussungen, die unter Umständen nicht unberücksichtigt gelassen werden können. Im vorstehenden wurde der Standort des Beobachters mit dem Mittelpunkt der Erde identifiziert, was

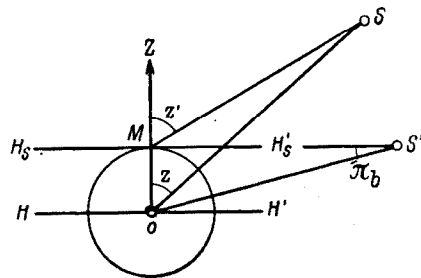


Fig. 18

durch die verschwindend kleinen Abmessungen der Erde gegenüber den Entfernungen der Himmelskörper begründet wurde. Wenn es sich aber um Himmelskörper handelt, die unserem Sonnensystem angehören, also beispielsweise um die Sonne selbst, so ist jene Identifikation der beiden Standpunkte nicht ohne Vorbehalt zulässig. Um dies zu erläutern, sei O (Fig. 18) der Erdmittelpunkt und M der Standpunkt

des Beobachters; eine durch M gelegte horizontale Ebene $H_s H'_s$ wird die Ebene des scheinbaren Horizontes genannt, im Gegensatz zu der ihr parallelen und durch den Erdmittelpunkt O gehenden Ebene HH' , die die Ebene des wahren Horizontes genannt wird und die identisch ist mit der bei dem Aufbau der Koordinatensysteme benutzten Ebene des Horizontes. Ist S ein Gestirn, dessen Entfernung OS vom Erdmittelpunkt nicht als unendlich gross gegen die Abmessungen der Erde zu betrachten ist, so ist es klar, dass die von O bzw. von M gegen S gerichteten Absehlilien OS und MS nicht untereinander parallel sein, vielmehr einen Winkel einschliessen werden, den man als Parallaxe bezeichnet. Dieser Winkel ist in der beiliegenden Figur durch $\sphericalangle MSO$ veranschaulicht, und um denselben unterscheidet sich die wahre Zenitdistanz z von der scheinbaren z' , so dass in einem solchen Zusammenhange dieser Winkel als die Höhenparallaxe oder die Parallaxe in Zenitdistanz genannt wird. Dieser Winkel ist eine Funktion der Entfernung OS und der Zenitdistanz z' . Er erreicht seinen Maximalwert π_h , wenn $z'=90^\circ$, d. h. wenn das Gestirn im Horizonte des Beobachters sich befindet; die in diesem Falle stattfindende Parallaxe π_h wird die Horizontalparallaxe genannt. Für die Sonne ist, wenn man mit der mittleren jährlichen Entfernung der Sonne von der Erde rechnet, und OM gleich dem Aequatorradius setzt, $\pi_h=8,80''$. Um diesen Winkel ist die wahre Zenitdistanz z der Sonne kleiner im Momente, in dem der Mittelpunkt der Sonnenscheibe den Horizont des Beobachters durchschreitet, so dass man mit $z=90^\circ-\pi_h$ den tatsächlichen Auf- bzw. Untergang des Mittelpunktes des Sonnenscheibe zu berechnen hätte. Die Korrekturen die man dadurch auf die vorstehend mitgetheilten Formeln für die Tageslänge anzubringen hätte, sind nicht nennenswert.

Fühlbarer ist der Einfluss, der von den Abmessungen der Sonne selbst herrührt. Weil diese solche sind, dass uns der Halbmesser der Sonnenscheibe unter einem Winkel von rund $16'$ erscheint, so wird die Sonne erst dann unter dem Horizont vollständig verschwinden, wenn der Mittelpunkt der Sonnenscheibe eine Tiefe unter dem Horizont von $16'$, d. h. eine Zenitdistanz von $90^\circ 16'$ erreicht hat. Ähnliches wird auch beim Sonnenaufgang stattfinden; hier wird der obere Rand der Sonne sichtbar, wenn die Zenitdistanz auf den obigen Wert gesunken ist. Anlässlich diesbezüglicher Berechnungen der Tageslänge wird noch ein anderer Nebeneinfluss zu berücksichtigen sein, von dem sogleich die Rede sein wird.

Die scheinbaren Stellungen und Bewegungen der Gestirne am Himmel unterliegen gewissen Veränderungen, die von der Art der Lichtfortpflanzung herrühren. Die relative Bewegung des Beobachters zur Lichtquelle, oder umgekehrt, hat eine scheinbare Ortsveränderung der Lichtquelle zum Beobachter zur Folge und zwar um einen Winkel $\Delta\eta$, welcher durch den Ausdruck $\Delta\eta = v:c$ gegeben ist, worin c die Geschwindigkeit des Lichtes und v die zur Absehlilie normale Relativgeschwindigkeit des Beobachters zur Lichtquelle bedeutet. Wegen der grossen Geschwindigkeit der Lichtfortpflanzung ist der obige Ausdruck immer sehr klein. Für die jährliche Bewegung der Erde um die Sonne wird, wenn die Absehlilie zur Richtung dieser Bewegung senkrecht steht, $\Delta\eta=20'',52$, welche Grösse die Konstante der jährlichen Aberration genannt wird. Für die Bewegung des Beobachters infolge der täglichen Drehung der Erde wird unter den gleichen Voraussetzungen und unter der Annahme, dass der Standort am Aequator sich befindet, $\Delta\eta=0'',320$, welche Grösse die Konstante der täglichen Aberration genannt wird. Diese Ortsveränderungen sind für die hier zu besprechenden Erscheinungen ohne nennenswerten Einfluss.

Weitgehender sind die von der Refraktion des Lichtes herrührenden Ortsveränderungen der Gestirne. Beim Eintritt der Lichtstrahlen in die Atmosphäre werden diese infolge der Zunahme der Dichte der Atmosphäre gegen die Erdoberfläche zu von ihrer ursprünglichen Richtung abgelenkt und zum Lot gebrochen, wodurch der scheinbare Ort der Gestirne dem Zenit zu um einen Winkel verschoben wird, der für Zenitdistanzen von 0° , 30° , 60° , 90° folgende Werte besitzt $0''$; $33''$; $1' 40''$; $34'$. Um diese Winkelgrößen wird also die tatsächliche Zenitdistanz der Gestirne scheinbar vermindert.

Da wir infolge der Refraktion die Gestirne in einer grösseren Höhe erblicken, als dieselbe wirklich einnehmen, so wird durch dieselbe auch der Aufgang der Gestirne beschleunigt, der Untergang verzögert.

Differentiert man die Gleichung (212) nach t , so wird

$$\sin z \, dz = \cos \varphi \cos \delta \sin t \, dt,$$

d. h. für den Horizont, wo $z = 90^\circ$ ist,

$$dt = \frac{dz}{\cos \varphi \cos \delta \sin t_0}.$$

Dieser Ausdruck stellt die der Aenderung der Zenitdistanz entsprechende Aenderung des Stundenwinkels dar. Da, wie oben mitgeteilt, die Refraktion im Horizont $34'$ oder im Zeitmass 136^s beträgt, so ist

$$(223) \quad dt = \frac{136^s}{\cos \varphi \cos \delta \sin t_0},$$

wodurch die durch die Refraktion hervorgerufene Beschleunigung bzw. Verzögerung des Auf- und Unterganges der Gestirne in Zeitsekunden gegeben ist.

Will man bei der Berechnung des Auf- bzw. des Unterganges der Sonne wissen, wann der obere Sonnenrand auf-, bzw. untergeht, so hat man den Winkel von $34'$ um den angegebenen Wert von $16'$ des scheinbaren Sonnenhalbmesseres zu vergrössern, wodurch man $50'$ oder in Zeitsekunden 200^s erhält. Dadurch wird

$$(224) \quad dt = \frac{200^s}{\cos \varphi \cos \delta \sin t_0}.$$

Mit dieser Formel können die Korrekturen berechnet werden, die die Berücksichtigung der obigen Erscheinungen erheischen würde.

Für $t_0 = 0$ oder für $t_0 = 180^\circ$ wird die obige Formel unbrauchbar, weshalb man bei der Berechnung der Länge der Intervalle des ständigen Tages bzw. der ständigen Nacht zur Gleichung (212) zurückgreifen muss. Diese Berechnung gestaltet sich wie folgt.

Das Intervall des ständigen Tages wird, strenggenommen, so lange dauern, solange die Sonne infolge der täglichen Umdrehung der Erde nicht zur Gänze unter dem Horizont verschwindet. Dieses Intervall wird demnach dann beginnen bzw. endigen, wenn in der unteren Kulmination der Sonne der obere Rand der Sonnenscheibe den Horizont des Beobachters gerade noch berührt. Dies wird nach dem vorstehenden dann stattfinden, wenn zu dieser Zeit die Tiefe oder Depression D des Sonnenmittelpunktes unter dem Horizonte den Wert $D_1 = 50'$ erreicht, also die Zenitdistanz der Sonne gleich $90^\circ + D_1$ wird. Man bekommt die zugehörige Deklination der Sonne aus der Gleichung (212), in die $t = 180^\circ$ und $z = 90^\circ + D_1$ zu setzen ist, also aus

$$\cos(90^\circ + D_1) = \sin \varphi \sin \delta - \cos \varphi \cos \delta,$$

d. h.

$$-\cos(90^\circ - D_1) = -\cos(\varphi + \delta),$$

oder

$$(225) \quad \delta = 90^\circ - (\varphi + D_1).$$

Das Intervall der ständigen Nacht wird beginnen, bzw. endigen, wenn in der oberen Kulmination, d. h. für $t = 0$, die Depression der Sonne den obigen Wert D_1 erreicht, also wegen (212), wenn:

$$\cos(90^\circ + D_1) = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta = \cos(\varphi - \delta),$$

d. h.

$$(226) \quad \delta = -[90^\circ - (\varphi - D_1)]$$

wird.

Weil δ nicht grösser als $23^\circ 27'$ und nicht kleiner als $-23^\circ 27'$ werden kann, so reicht die Polarzone, in der Zeitintervalle mit ständigem Tag vorkommen bis zu jener Breite, die durch die Gleichung

$$23^\circ 27' = 90^\circ - (\varphi + 50')$$

gegeben ist, also bis zur geographischen Breite von $65^\circ 43'$. Auf dieselbe Weise findet man, dass Intervalle mit ständiger Nacht nur oberhalb der geographischen Breite von $67^\circ 23'$ vorkommen.

Die Tageshelle wird, und zwar bedeutend mehr als durch Refraktion, durch das Phänomen der Dämmerung vergrössert. Weil die Sonne für die höheren Schichten der Atmosphäre später untergeht und früher aufgeht als für den Standort des

Beobachters, werden jene Schichten noch nach dem Sonnenuntergange und schon vor dem Sonnenaufgange erleuchtet und das von ihnen reflektierte Licht bewirkt die Abend- bzw. die Morgendämmerung. Die Beobachtungen lehren, dass bei einer Tiefe der Sonne unter dem Horizonte von 6° bis 8° es in den Wohnungen anfängt dunkel zu werden; bis zu dieser Zeit dauert die sogenannte bürgerliche Dämmerung. Wenn die Sonne um etwa 16° bis 18° unter dem Horizont gesunken ist, wird es wirklich Nacht; bis zu dieser Zeit dauert die astronomische Dämmerung. Bei der Ausrechnung der Dauer der bürgerlichen Dämmerung wird die zugehörige Depression der Sonne gewöhnlich $D_2 = 6^\circ 30'$ oder, im Zeitmass gemessen, gleich 45^m angenommen; für die Berechnung der astronomischen Dämmerung wird gewöhnlich $D_3 = 18^\circ$ oder im Zeitmass 2^h gesetzt, während man für die Berechnung der hellen Nächte, von welchen gleich die Rede sein wird, $D_3 = 16^\circ$ zu setzen pflegt.

Bezeichnet man mit t_0 den Stundenwinkel des Sonnenunterganges, d. h. des Moments, in dem der Mittelpunkt der Sonnenscheibe den Horizont erreicht hat, mit t_1 den Stundenwinkel, der dem Ende der astronomischen Dämmerung, also der Zenitdistanz $z = 90^\circ + D_3$ entspricht, so ist nach (212)

$$0 = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t_0$$

$$- \sin D_3 = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t_1,$$

d. h.

$$(227) \quad \cos t_0 - \cos t_1 = \frac{\sin D_3}{\cos \varphi \cos \delta}.$$

Der Winkel $(t_1 - t_0)$, im Zeitmass ausgedrückt, gibt die Dauer der astronomischen Dämmerung an. Diese hängt, wie dies aus der obigen Gleichung folgt, von der geographischen Breite des Standortes des Beobachters und von der Declination der Sonne, d. h. von der Jahreszeit ab und nimmt mit φ und δ zu.

In den höheren Breiten trifft es sich im Laufe des Jahres, dass die Abenddämmerung kein Ende und die Morgendämmerung keinen Anfang aufweist, weil beide Dämmerungen in einander eingreifen, so dass die Dämmerung die ganze Nacht hindurch dauert. Solche Nächte werden helle Nächte genannt. Aus dem vorstehenden wird es ohne weiters klar, dass das Intervall der hellen Nächte beginnen, bzw. endigen wird, wenn zur Zeit der unteren Kulmination der Sonne, d. h. für $t = 180^\circ$ die Tiefe der Sonne unter dem Horizont den Wert D_3 gerade erreicht hat, also nach (212)

$$\cos(90^\circ + D_3) = \sin \varphi \sin \delta - \cos \varphi \cos \delta$$

wird. Dies wird also stattfinden für

$$(228) \quad \delta = 90^\circ - (\varphi + D_3).$$

Da δ höchstens $23^{\circ} 27'$ werden kann, und man für das Phänomen der hellen Nächte, wie bereits erwähnt, $D_3=16^{\circ}$ zu setzen hat, so werden sich in der Breite $\varphi=90^{\circ} - (23^{\circ}27' + 16^{\circ})=50^{\circ}33'$ zur Zeit der sommerlichen Sonnenwende eine helle Nacht und mit zunehmender Breite deren mehrere einstellen.

Während des Jahresintervalles der ständigen Polarnacht wird diese im allgemeinen Tag für Tag durch die Dämmerung unterbrochen. Wenn aber die Sonne, selbst in ihrer oberen Kulmination, d. h. für $t=0$ tiefer als 16° unter dem Horizonte liegt, so wird eine solche Nacht durch keine Dämmerung unterbrochen sein, und es wird in diesem Falle die dunkle Nacht sich einstellen. Das Intervall der dunklen Nächte

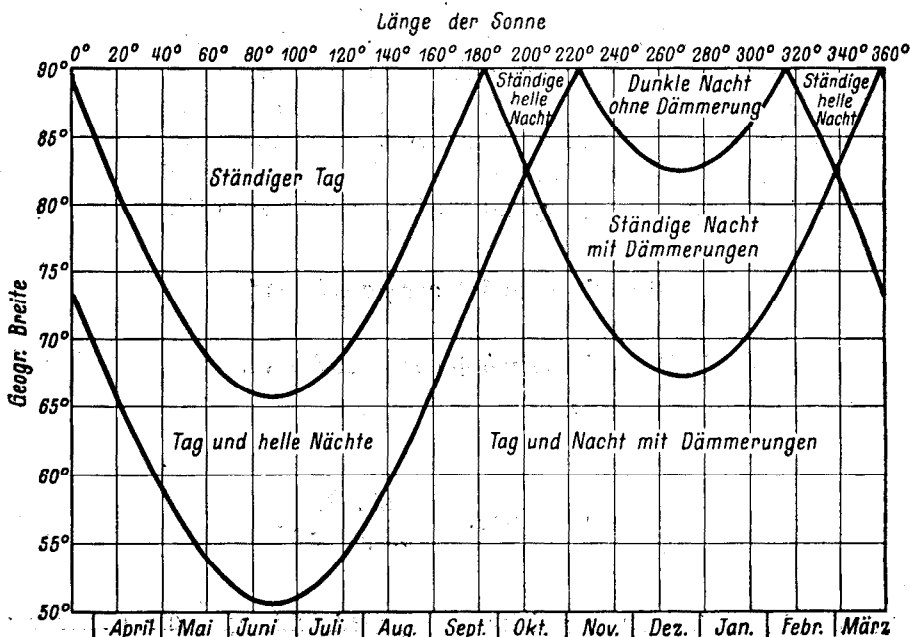


Fig. 19

wird beginnen bzw. endigen, wenn für $t=0$ die Zenitdistanz der Sonne $z=90^{\circ} + D_3$ wird, also nach (212), wenn die Gleichung

$$\cos(90^{\circ} + D_3) = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta$$

d. h.

$$(229) \quad \delta = - [90^{\circ} - (\varphi - D_3)]$$

erfüllt sein wird. Da δ höchstens auf den Wert $- 23^{\circ}27'$ sinken kann, so können die dunklen Nächte nur bis zur Breite $\varphi=90^{\circ} - (23^{\circ}27' - 16^{\circ})=82^{\circ}33'$ reichen.

Mittels der Gleichungen (225) bis (229) können unter Zuhilfenahme der Gleichung (217), in die $\epsilon=23^{\circ}27'$ zu setzen ist, jene Längen der Sonne berechnet werden, die die Jahresintervalle des ständigen Tages, der ständigen Nacht, der hellen Nächte und der dunklen Nächte begrenzen.

Tabelle I

| Geographische Breite (nördl.) | Helle Nächte vor dem Sommersolstitium | | Ständiger Tag | | Helle Nächte nach dem Sommersolstitium | | Ständige Nacht | | Dunkle Nacht ohne Dämmerung | |
|-------------------------------|---------------------------------------|----------|---------------|----------|--|----------|----------------|----------|-----------------------------|----------|
| | Beginn | Ende | Beginn | Ende | Beginn | Ende | Beginn | Ende | Beginn | Ende |
| 90° | 316° 10' | 357° 54' | 357° 54' | 182° 6' | 182° 6' | 223° 50' | 182° 6' | 357° 54' | 223° 50' | 316° 10' |
| 85° | 331° 21' | 10° 31' | 10° 31' | 169° 29' | 169° 29' | 208° 39' | 169° 29' | 345° 12' | 244° 14' | 295° 46' |
| 82° 32' | 338° 4' | 16° 50' | 16° 50' | 163° 10' | 163° 10' | 201° 56' | 163° 10' | 338° 47' | 270° | 270° |
| 80° | 344° 46' | 23° 36' | 23° 36' | 156° 24' | 156° 24' | 195° 14' | 156° 24' | 331° 49' | . | . |
| 75° | 357° 29' | 37° 57' | 37° 57' | 142° 3' | 142° 3' | 182° 31' | 142° 3' | 316° 43' | . | . |
| 70° | 10° 6' | 55° 35' | 55° 35' | 124° 25' | 124° 25' | 169° 54' | 124° 25' | 296° 39' | . | . |
| 67° 23' | 16° 50' | 68° 50' | 68° 50' | 111° 10' | 111° 10' | 163° 10' | 111° 10' | 270° | . | . |
| 65° 43' | 21° 13' | . | 90° | . | . | 158° 47' | . | . | . | . |
| 65° | 23° 9' | . | . | . | . | 156° 51' | . | . | . | . |
| 60° | 37° 26' | . | . | . | . | 142° 34' | . | . | . | . |
| 55° | 54° 54' | . | . | . | . | 125° 6' | . | . | . | . |
| 50° 33' | 90° | . | . | . | . | 90° | . | . | . | . |

Länge der Sonne

Die Tabelle I enthält diesbezügliche Angaben für eine Anzahl geographischer Breiten der nördlichen Halbkugel der Erde; für die südliche Halbkugel sind die in der Tabelle mitgeteilten Längen der Sonne um 180° zu vergrössern. Die numerischen Angaben der Tabelle I sind in der Fig. 19 graphisch dargestellt.

Aus den vorstehenden Darstellungen ist zu ersehen, dass am Nordpol der ständige Tag volle 191 Tage währt (vom 18. März bis 25. September), diesem folgt ein 42 Tage dauerndes Intervall einer ständigen, aber die ganze Zeit hindurch hellen Nacht, um durch ein am 6. November einsetzendes, 91 Tage dauerndes, also bis zum 6. Februar reichendes Intervall einer ständigen, durch keine Dämmerung unterbrochenen dunklen Nacht abgelöst zu werden; diesem folgt ein zweites, 41 Tage dauerndes Intervall der ständigen hellen Nacht. Sobald man den Nordpol verlassen hat, schieben sich zwischen die erwähnten vier Intervalle weitere vier, während welchen die Sonne täglich aufgeht und untergeht, aber die zugehörige Nacht eine helle ist. In der Breite von $82^\circ 33'$ ist das Intervall der ständigen dunklen Nacht gänzlich verschwunden, und unmerklich südlicher auch das Intervall der ständigen hellen Nacht. In der Breite von $82^\circ 33'$ dauert das Intervall des ständigen Tages 152 Tage (vom 7. April bis 6. September), diesem folgt ein bis zum 15. Oktober, also 39 Tage dauerndes Intervall des täglichen Sonnenaufganges und Unterganges mit hellen Nächten, um durch ein bis zum 28. Februar, also 136 Tage dauerndes Intervall der ständigen Nacht, welche aber durch tägliche Dämmerungen gemildert ist, abgelöst zu werden; diesem folgt ein zweites, 39 Tage dauerndes Intervall des täglichen Sonnenaufganges und Unterganges mit hellen Nächten. Weiter südlich stellen sich Intervalle mit regelrechtem Wechsel von Tag und Nacht mit Morgen- und Abenddämmerungen ein. Südlich der Breite von $67^\circ 23'$ kommt keine ständige Nacht und südlich der Breite von $65^\circ 43'$ kein ständiger Tag mehr vor. An dieser letzteren Breite dauert das Intervall der hellen Nacht 143 Tage (vom 11. April bis 1. September). In der Breite von $50^\circ 33'$ ist auch dieses Intervall auf Null gesunken, so dass hier nur eine Nacht als hell bezeichnet werden kann.

KAPITEL VI

Die Präzession der Erdachse

§ 43. Geschichtliches. Klaudius Ptolemaios berichtet in seinem Handbuch, dass Hipparch durch Vergleichung von zu seiner Zeit genau beobachteten Mondfinsternissen mit solchen, die noch früher von Timocharis beobachtet worden waren zu dem Ergebnis gelangte, dass die Spika von dem Herbstnachtgleichenpunkt gegen die Richtung der Zeichen zu seiner Zeit 6° , zu Timocharis Zeit dagegen nahezu 8° entfernt stand. Aehnliche Verrückungen fand Hipparch auch bei anderen von Timocharis oder Aristyll beobachteten und in die Vergleichung miteinbezogenen Fixsternen. Es ergab sich dabei, dass durch diese Verrückungen die Entfernung der Sterne von der Ekliptik, ihre Breite, nicht betroffen erschien. Daraus schloss Hipparch mit einem gewissen Vorbehalt, dass die Nachtgleichen in einem Jahre mindestens $\frac{1}{100}^\circ$ gegen die Richtung der Zeichen zurückgegangen sein müssten. Durch die obigen Aussagen des Ptolemaios ist, trotzdem die betreffenden beiden Schriften des Hipparch nicht erhalten geblieben sind, die Hauptleistung Hipparchs sichergestellt. Ob die Verrückung der Nachtgleichen chaldäischen oder anderen älteren Himmelsbeobachtern aufgefallen ist, konnte trotz allen Nachforschungen nicht festgestellt werden.

Ptolemaios widmete dieser Himmelserscheinung, die später den Namen der Präzession der Nachtgleichen erhielt, den grössten Teil des siebenten Buches seines Hauptwerkes, worin er eigene Beobachtungen anführt, die mit jenen von Timocharis, Aristyll und Hipparch verglichen, ihm zu dem, ohne Vorbehalt verkündeten Ergebnis führten, dass die Fixsternsphäre, ausser ihrer täglichen Rotation um die Weltpole, sich um eine durch die Pole der Ekliptik gehende Achse in der Richtung der Zeichen drehe, wodurch die Nachtgleichenpunkte in entgegengesetzter Richtung wandern und in hundert Jahren einen Grad oder $36''$ pro Jahr zurücklegen. Diese Zahl hat, wie schon erwähnt, bereits Hipparch und zwar als eine untere Grenze angegeben, wodurch sich Ptolemaios die ungerechtfertigte Verdächtigung Delambre's und Tannery's zuzog, dass sein Sternkatalog nicht

aus Beobachtung, sondern aus jenem von Hipparch durch einfache Extrapolation gewonnen worden sei.

Durch Ptolemaios' ausführliche, klare und wissenschaftliche Behandlung wurde die Präzession der Nachtgleichen zu einem wohlbegründeten Bestandteil der alten Astronomie, was zu weiteren Beobachtungen und Berechnung Anlass gab. Albategnius verglich die von ihm um 879 ermittelten Sternpositionen mit dem Sternkatalog des Ptolemaios und berechnete daraus eine jährliche Verrückung der Aequinoktien von 55". Nassir-Edin fand um 1260, dass diese Verrückung 51" betrage, wodurch er dem tatsächlichen Werte von 50"25 schon sehr nahe kam.

Die alexandrische Schule machte für die Verschiebung der Aequinoktialpunkte die Fixsternsphäre verantwortlich. Als Kopernikus sein heliozentrisches System ausbaute und die Fixsternsphäre still stehen hiess, deutete er, ganz richtig, die Präzession als eine Folge der Orientierungsänderung der Erdachse, kombinierte aber diese säkulare Drehung der Erdachse unnötigerweise mit einer jährlichen.

Newton entdeckte durch sein Gravitationsgesetz den wahren Grund und den ganzen Mechanismus der Präzession, die dadurch einen weiteren schlagenden Beweis für die Richtigkeit seiner Lehre lieferte. Nachdem Newton im III. Buch, II. Abschnitt, seiner Prinzipien die Ungleichheiten der Mondewegung erforschte und fand, dass der störende Körper, die Sonne, eine rückläufige Drehung der Knoten der Bahnebene des Mondes hervorruft, wies er im IV. Abschnitt des erwähnten Buches, dass die Abplattung der Erde, bei der man die äquatoriale Anschwellung als eine Anhäufung der Satelliten deuten könne, eine ähnliche Erscheinung zur Folge haben müsse, so dass die Knoten der Aequatorebene der Erde, die Aequinoktialpunkte, eine der täglichen Drehung der Erde entgegengesetzte Bewegung, eben die durch die Beobachtung gefundene, ausführen müssen, welche Bewegung dadurch ihre vollständige Erklärung gefunden hat.

Bei den vorstehenden Betrachtungen Newtons über die Ursache der Präzession hat man mit zwei gleichwertigen störenden Körpern, Sonne und Mond, zu tun, deren Wirkungen sich im säkularen Betrage der Präzession summieren, weil aber die Schnittlinie der Bahnebenen dieser zwei störenden Körper den bereits erwähnten Rücklauf vollführt, der zu einem vollständigen Umlauf rund 19 Jahre erfordert, so wird sich diese Bewegung als eine weitere, periodische Störung der Orientierung der Erdachse fühlbar machen müssen. Diese Störung konnte wegen ihrer Kleinheit aber erst durch Bradley's Beobachtungen 1748 nachgewiesen werden. Die erste Theorie dieser Erscheinung, die den Namen der astronomischen Nutation der Erdachse erhielt und deren Vorhandensein schon aus den Newtonschen Prinzipien gefolgert werden konnte, lieferte D'Alembert.

§ 44. Das Drehmoment der auf die Erde einwirkenden äusseren Kräfte. Bei der Untersuchung des Mechanismus der Präzession ist es erforderlich, so wie es Newton bereits getan hat, die Abplattung der Erde zu berücksichtigen, denn nur in diesem Falle weist die Kraft, mit der die Sonne oder der Mond die Erde anzieht, ein Drehmoment bezüglich des Massenmittelpunktes der Erde auf. Ziehen wir vorläufig nur einen dieser beiden störenden Himmelskörper in Betracht, dessen Masse m wir uns im Punkte S (Fig. 9, Seite 111) konzentriert denken. Im

31 wurde gezeigt, dass ein Himmelskörper, also im vorliegenden Falle die Erde, deren Masse mit M und deren Trägheitshauptmomente mit A, B, C bezeichnet werden mögen, die im Punkte S befindliche Masseneinheit mit einer Kraft anzieht, die durch (55) gegeben ist wobei U durch den Ausdruck (64) dargestellt erscheint. Infolgedessen wird die Erde den störenden Himmelskörper m mit einer Kraft anziehen, die durch

$$\mathfrak{K} = m\mathfrak{F} = \text{grad } U$$

veranschaulicht ist, wobei für U statt (64) der Ausdruck:

$$(230) \quad U = f \frac{Mm}{R} + \frac{1}{2} f \frac{mX^2}{R^5} (B + C - 2A) + \frac{1}{2} f \frac{mY^2}{R^5} (C + A - 2B) + \\ + \frac{1}{2} f \frac{mZ^2}{R^5} (A + B - 2C)$$

zu setzen ist.

Dem Newton'schen Prinzip der Aktion und Reaktion zufolge wird der störende Himmelskörper m die Erde mit einer Kraft anziehen, die durch $-\mathfrak{K}$ veranschaulicht ist; die Gerade, in der diese Kraft wirksam ist, geht durch den Punkt S (Fig. 9) hindurch. Das Drehmoment dieser Kraft bezüglich des Massenmittelpunktes O der Erde ist, weil der Ortsvektor von S in bezug auf O mit \mathfrak{R} bezeichnet wurde, gleich:

$$(231) \quad \mathfrak{M} = -[\mathfrak{R} \mathfrak{K}],$$

d. h.

$$(232) \quad \mathfrak{M} = -[\mathfrak{R} \text{ grad } U].$$

Setzt man also

$$(233) \quad \left\{ \begin{array}{l} U_0 = f \frac{Mm}{R} \\ U_1 = \frac{1}{2} f \frac{m}{R^5} \\ U_2 = (B + C - 2A) X^2 + (C + A - 2B) Y^2 + (A + B - 2C) Z^2, \end{array} \right.$$

so wird:

$$(234) \quad U = U_0 + U_1 U_2,$$

d. h.

$$\text{grad } U = \text{grad } U_0 + U_2 \text{ grad } U_1 + U_1 \text{ grad } U_2.$$

Es ist deshalb

$$\mathfrak{M} = - [\mathfrak{R} \text{ grad } U_0] - U_2 [\mathfrak{R} \text{ grad } U_1] - U_1 [\mathfrak{R} \text{ grad } U_2].$$

Nun ist

$$\text{grad } U_0 = -f \frac{Mm}{R^3} \mathfrak{R} \quad \text{grad } U_1 = -\frac{5}{2} f \frac{m}{R^7} \mathfrak{R},$$

d. h. diese Vektoren sind kollinear dem Vektor \mathfrak{R} , und es ist deshalb

$$[\mathfrak{R} \text{ grad } U_0] = 0 \quad [\mathfrak{R} \text{ grad } U_1] = 0,$$

so dass man bekommt:

$$(235) \quad \mathfrak{M} = -U_1 [\mathfrak{R} \text{ grad } U_2].$$

Die partiellen Ableitungen des Ausdruckes U_2 nach X, Y, Z , d. h.

$$\frac{\partial U_2}{\partial X} = 2(B + C - 2A) X$$

$$\frac{\partial U_2}{\partial Y} = 2(C + A - 2B) Y$$

$$\frac{\partial U_2}{\partial Z} = 2(A + B - 2C) Z$$

stellen die Koordinaten des Vektors $\text{grad } U_2$ dar, während jene von \mathfrak{R} durch X, Y, Z gegeben sind. Man hat also nach dem analytischen Ausdruck des vektoriellen Produktes:

$$\mathfrak{M} = -f \frac{m}{R^5} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ X & Y & Z \\ (B+C-2A)X & (C+A-2B)Y & (A+B-2C)Z \end{vmatrix}.$$

Die Koordinaten M_1, M_2, M_3 , des Vektors \mathfrak{M} , d. h. seine in die Richtungen der Koordinatenachsen fallenden Komponenten, sind also durch die Ausdrücke veranschaulicht:

$$(236) \quad \left\{ \begin{array}{l} M_1 = 3 \frac{fm}{R^5} (C - B) YZ \\ M_2 = 3 \frac{fm}{R^5} (A - C) ZX \\ M_3 = 3 \frac{fm}{R^5} (B - A) XY. \end{array} \right.$$

Für die Erde ist, wie bereits erwähnt,

$$(237) \quad B = A.$$

Es ist also

$$(238) \quad \left\{ \begin{array}{l} M_1 = 3 \frac{fm}{R^5} (C - A) YZ \\ M_2 = -3 \frac{fm}{R^5} (C - A) ZX \\ M_3 = 0. \end{array} \right.$$

§ 45. Bewegungsgleichungen. Permanente und periodische Störungsglieder. Setzt man in die vorstehenden Gleichungen (238) für m die Masse des störenden Himmelskörpers ein, und für X, Y, Z dessen geozentrische Koordinaten, so erhält man die Koordinaten M_1, M_2, M_3 des auf den Erdkörper einwirkenden Drehvektors \mathfrak{M} . Bezeichnet also m die Masse der Sonne und X, Y, Z, R deren geozentrische Koordinaten, m_1 die Masse des Mondes und x, y, z, r dessen geozentrische Koordinaten, so ist

$$(239) \quad \left\{ \begin{array}{l} M_1 = 3 \frac{fm}{R^5} (C - A) YZ + 3 \frac{fm_1}{r^5} (C - A) yz \\ M_2 = -3 \frac{fm}{R^5} (C - A) ZX - 3 \frac{fm_1}{r^5} (C - A) zx \\ M_3 = 0. \end{array} \right.$$

Die Präzession der Erdachse erforschend, machen wir die Voraussetzung, dass der Erdkörper seine Form nicht ändert, die Trägheitshauptmomente A und C also als konstante Grössen zu betrachten sind. In diesem Falle gelten für die Drehbewegung der Erde die Eulerschen Gleichungen (42), in die nach (237) $B = A$ zu setzen ist. Man bekommt also mit Berücksichtigung der vorstehenden Gleichungen:

$$(240) \quad \left\{ \begin{array}{l} A \frac{dw_1}{dt} + (C - A) w_1 w_2 = 3 \frac{fm}{R^5} (C - A) Y Z + 3 \frac{fm_1}{r^5} (C - A) y z \\ A \frac{dw_2}{dt} - (C - A) w_3 w_1 = - 3 \frac{fm}{R^5} (C - A) Z X - 3 \frac{fm_1}{r^5} (C - A) z x \\ \frac{dw_3}{dt} = 0. \end{array} \right.$$

Dies sind die differentialen Gleichungen der Drehbewegung der Erde unter dem Einflusse der Anziehung von Sonne und Mond.

Es folgt aus der letzten dieser drei Gleichungen:

$$(241) \quad w_3 = n,$$

worin n eine Konstante bedeutet. Dies besagt, dass die Winkelgeschwindigkeit der Eigenrotation der Erde um ihre polare Trägheitshauptachse, d. h. um ihre Figuren-achse durch Sonne und Mond nicht gestört wird.

Es folgt aus der letzten der Gleichungen (48):

$$(242) \quad \Psi' \cos \theta + \Phi' = n.$$

Man kann durch Benützung der Gleichungen (48) auch die Grössen w_1 und w_2 durch die Eulerschen Winkel θ , Ψ und Φ ausdrücken und da sich auch die Drehmomentkomponenten, ähnlich wie es vorstehend geschehen ist, als partielle Ableitungen von Skalaren durch diese Winkel darstellen lassen, bekommt man die erforderlichen Differentialgleichungen, deren Integration die Grössen θ , Ψ , Φ als Functionen der Zeit, also die Lösung des gestellten Problems liefert. Dabei ist folgendes zu berücksichtigen. In den Koordinaten X , Y , Z und x , y , z kommen alle Eigentümlichkeiten der Umlaufsbewegung der Erde um die Sonne und jener des Mondes um die Erde samt allen ihren Störungen und Ugleichheiten zum Vorschein. Eine strenge, alle diese Eigentümlichkeiten berücksichtigende Lösung des gestellten Problems führt auf besonders lange Entwicklungen, hat beispielsweise Oppolzer nicht weniger als 202 Störungsglieder in Betracht gezogen. Indessen sind die meisten dieser Glieder selbst für astronomische Zwecke belanglos, für die Probleme der Geophysik kommen aber nur die wichtigsten dieser Glieder wirklich in Betracht. Man wird die Rolle und Bedeutung der einzelnen solcher Störungsglieder erkennen, wenn man von der Betrachtung des zeitlichen Verlaufes des Drehmoments \mathfrak{M} des störenden Körpers ausgeht. Dabei soll vorerst nur die Sonne in Be-

tracht gezogen werden, weil das Drehmoment ihrer Anziehung auch alle Merkmale jener des Mondes deutlich erkennen lässt.

Weil $A=B$ und die Erde ein Rotationskörper ist, hat die Drehung der Erde um ihre Figurenaxe keinen Einfluss auf die Grösse des Drehmoments \mathfrak{M} . Man kann deshalb bei der Berechnung von \mathfrak{M} des mit der Himmelskugel verbundenen Koordinatensystems des Aequators sich bedienen. Die x -Achse dieses Koordinatensystems ist gegen den Frühlingspunkt Υ (Fig. 14), die z -Achse gegen den nördlichen Weltpol N gerichtet. Der Ortsvektor \mathfrak{R} der Sonne schliesst mit der x -Achse den Winkel (x, \mathfrak{R}) ein, der offenbar gleich ist der Länge λ der Sonne. Mit der z -Achse wird jener Vektor einen Winkel (z, \mathfrak{R}) einschliessen, welcher gleich ist der Poldistanz oder dem Komplement $(90^\circ - \delta)$ der Deklination der Sonne. Der Winkel (y, \mathfrak{R}) , den der Ortsvektor \mathfrak{R} mit der y -Achse einschliesst, ergibt sich dann aus der allgemeinen Beziehung:

$$\cos^2(x, \mathfrak{R}) + \cos^2(y, \mathfrak{R}) + \cos^2(z, \mathfrak{R}) = 1.$$

Man hat also

$$\cos(x, \mathfrak{R}) = \cos \lambda; \quad \cos(z, \mathfrak{R}) = \sin \delta$$

$$\cos^2(y, \mathfrak{R}) = \sin^2 \lambda - \sin^2 \delta.$$

Es ist nach (217)

$$\sin \delta = \sin \varepsilon \sin \lambda,$$

d. h.

$$\cos(y, \mathfrak{R}) = \cos \varepsilon \sin \lambda.$$

Die Koordinaten X, Y, Z der Sonne erscheinen also durch die folgenden Ausdrücke dargestellt:

$$(243) \quad \left\{ \begin{array}{l} X = R \cos(x, \mathfrak{R}) = R \cos \lambda \\ Y = R \cos(y, \mathfrak{R}) = R \cos \varepsilon \sin \lambda \\ Z = R \cos(z, \mathfrak{R}) = R \sin \varepsilon \sin \lambda. \end{array} \right.$$

Es folgt aus (238) und (243):

$$(244) \quad \begin{cases} M_1 = 3 \frac{fm}{R^3} (C - A) \sin \varepsilon \cos \varepsilon \sin^2 \lambda \\ M_2 = - 3 \frac{fm}{R^3} (C - A) \sin \varepsilon \sin \lambda \cos \lambda \\ M_3 = 0. \end{cases}$$

Um die zeitliche Veränderlichkeit und namentlich den jährlichen Gang der obigen Grössen zu verfolgen, muss auch R durch λ ausgedrückt werden. Es folgt aus den Gleichungen (4), (5) und (111) des ersten Abschnittes dieses Buches:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{a(1-e^2)} [1 + e \cos(\lambda_h - \Pi)],$$

worin a die grosse Halbachse, e die Exzentrizität der Erdbahn, λ_h die heliozentrische Länge der Erde und Π die heliozentrische Länge des Perihels bedeutet. Mit Benützung der Gleichung (215) bekommt man

$$\frac{1}{R^3} = \frac{1}{a^3(1-e^2)^3} [1 - e \cos(\lambda - \Pi)]^3.$$

Der obige Ausdruck kann, weil e immer sehr klein bleibt, in eine Reihe entwickelt werden. Dabei kann man die Potenzen des Kosinus durch den Kosinus des vielfachen Winkels ausdrücken, so dass man eine Reihe nachstehender Form erhält:

$$\frac{1}{R^3} = \frac{1}{a^3} \left[1 + \frac{9}{2} e^2 - 3e \cos(\lambda - \Pi) + \frac{3}{2} e^2 \cos(2\lambda - 2\Pi) + \dots \right].$$

In dieser Reihe sind die Grössen e und Π , wie im ersten Abschnitt dieses Buches gezeigt, säkular schwach veränderlich, so dass sie vorerst als konstant betrachtet werden können. Die Länge λ nimmt jährlich um 2π zu, so dass die trigonometrischen Glieder der obigen Reihe ganzjährige, halbjährige, dritteljährige usw. Perioden aufweisen. Es wird sich zeigen, dass die Wirkung der periodischen Glieder auf die Drehbewegung der Erde um so kleiner ausfällt je kleiner ihre Periode ist; weil überdies die Koeffizienten der obigen periodischen Glieder sehr klein sind und rasch abnehmen, so treten diese Glieder gegenüber den noch zu besprechenden periodischen Gliedern so zurück, dass man sie vorläufig ausser Acht lassen und setzen kann:

$$(245) \quad R = a.$$

Man bekommt dann statt (244):

$$(246) \quad \left\{ \begin{array}{l} M_1 = \frac{3}{2} \frac{fm}{a^3} (C-A) \sin \varepsilon \cos \varepsilon - \frac{3}{2} \frac{fm}{a^3} (C-A) \sin \varepsilon \cos \varepsilon \cos 2\lambda \\ M_2 = -\frac{3}{2} \frac{fm}{a^3} (C-A) \sin \varepsilon \sin 2\lambda \\ M_3 = 0. \end{array} \right.$$

Bezeichnet man also mit i_1, i_2, i_3 die Einheitsvektoren der Richtungen x, y, z unseres Koordinatensystems und setzt zwecks kürzerer Schreibweise

$$(247) \quad \frac{3}{2} \frac{fm}{a^3} (C-A) \sin \varepsilon = c,$$

so wird

$$\mathfrak{M} = M_1 i_1 + M_2 i_2 + M_3 i_3 = (c \cos \varepsilon) i_1 - (c \cos \varepsilon \cos 2\lambda) i_1 - (c \sin 2\lambda) i_2.$$

Der Vektor \mathfrak{M} kann also als die Summe zweier Vektoren \mathfrak{M}_s und \mathfrak{M}_p aufgefasst werden; es ist dabei

$$(248) \quad \mathfrak{M} = \mathfrak{M}_s + \mathfrak{M}_p$$

$$(249) \quad \mathfrak{M}_s = M_s i_1, \quad M_s = \frac{3}{2} \frac{fm}{a^3} (C-A) \sin \varepsilon \cos \varepsilon$$

$$(250) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{M}_p = -M_1' i_1 - M_2' i_2 \\ M_1' = \frac{3}{2} \frac{fm}{a^3} (C-A) \sin \varepsilon \cos \varepsilon \cos 2\lambda. \\ M_2' = \frac{3}{2} \frac{fm}{a^3} (C-A) \sin \varepsilon \sin 2\lambda. \end{array} \right.$$

Der Vektor \mathfrak{M}_s ist gegen den Frühlingspunkt gerichtet und vom jährlichen Gange der Sonne unabhängig. Dieser Vektor liegt im benutzten Koordinatensystem unbeweglich und soll der permanente Bestandteil des Drehmoments \mathfrak{M} genannt werden.

Der Vektor \mathfrak{M}_p ist dagegen ein veränderlicher Vektor. Verlegt man seinen Anfangspunkt in den Ursprung des Koordinatensystems, so sind die Koordinaten seines Endpunktes L gegeben durch:

$$x = -c \cos \varepsilon \cos 2\lambda; \quad y = -c \sin 2\lambda.$$

Eliminiert man aus diesen zwei Gleichungen λ , so bekommt man

$$\frac{x^2}{(c \cos \varepsilon)^2} + \frac{y^2}{c^2} = 1$$

als die Gleichung der Bahnkurve des Endpunktes L des Vektors \mathfrak{M}_p . Diese Kurve ist eine Ellipse und der Vektor \mathfrak{M}_p ein periodisch sich ändernder Vektor; er soll der periodische Hauptbestandteil des Drehmoments genannt werden.

Der Voraussetzung (245) zufolge nimmt die Länge der Sonne mit der Zeit t gleichförmig zu. Zählt man die Zeit vom Durchgang der Sonne durch die x Achse, so wird:

$$(251) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda = \frac{2\pi}{T} t \\ M_1' = c \cos \varepsilon \cos \frac{4\pi}{T} t \\ M_2' = c \sin \frac{4\pi}{T} t. \end{array} \right.$$

Die Komponenten M_1' und M_2' des Vektors \mathfrak{M}_p unterliegen harmonischen Schwankungen mit einer halbjährigen Periode.

Hätte man bei der Ermittlung von λ als Funktion der Zeit t die Exzentrizität der Erdbahn berücksichtigt, so wären, wie am Beispiel von $\frac{1}{R}$ gezeigt, weitere periodische Glieder zu Tage getreten, welche indessen aus bereits erwähnten Gründen von untergeordneter Bedeutung sind. Aus diesem Grunde sollen vorerst nur die oben abgeleiteten Hauptglieder \mathfrak{M}_s und \mathfrak{M}_p des Drehmoments in Betracht gezogen werden, zumal wir in denselben die typischen Vertreter beider Kategorien der Störungsglieder vor uns haben und ihre Eigentümlichkeiten auch für die übrigen Störungsglieder charakteristisch sind.

§ 46. Wirkung der einzelnen Bestandteile des Drehmoments. Die Ebene der Erdbahn kann, wenn man von ihren langsam vor sich gehenden Schwankungen, die später Berücksichtigung finden sollen, absieht, als im Raume unveränderlich betrachtet werden. Diese Ebene oder, besser gesagt, die Ebene der scheinbaren Sonnenbahn, der Ekliptik, soll zur $X - Y$ -Ebene des sogleich zu benützendem ruhenden Koordinatensystems gewählt werden. Sei also (Fig. 7) O der Schwerpunkt der Erde und $X - Y$ die unveränderlich vorausgesetzte Ebene der Ekliptik; die X -Achse des ruhenden Koordinatensystems sei dabei, aus Gründen, welche man

bald kennen lernen wird, gegen den Herbstpunkt einer bestimmten Epoche gerichtet. Das mit der Erde fest verbundene, also das bewegliche Koordinatensystem sei das mit $x-y-z$ bezeichnete; die Figurenachse der Erde sei zur z -Achse dieses Systems gewählt, die Schnittgerade des Erdäquators und des Greenwichers Meridianes zur x -Achse. Die $x-y$ -Ebene des beweglichen Koordinatensystems schneide zur Zeit t die $X-Y$ -Ebene des ruhenden Koordinatensystems längs der Geraden $O\delta$; diese steht senkrecht auf der Ebene ZOz , welche letztere zur Bildebene der Figur gewählt wurde. Die in diese Bildebene fallende Gerade OR steht senkrecht auf der Geraden $O\delta$. Der Punkt δ stellt den aufsteigenden Knoten des Himmelsäquators in bezug auf die Ekliptik dar, ϵ ist also der absteigende Knoten der Ekliptik in bezug auf den Himmelsäquator; δ stellt also den jeweiligen Herbstpunkt dar. Bezeichnet also c_0 den Einheitsvektor der Richtung $O\delta$ und h_0 den Einheitsvektor der Richtung OR , so besteht zwischen diesen Vektoren und den vorstehend in (249) und (250) benutzten Einheitsvektoren der folgende Zusammenhang:

$$(252) \quad i_1 = -c_0; \quad i_2 = -h_0.$$

Es ist deshalb:

$$(253) \quad \mathfrak{M}_s = -M_s c_0$$

$$(254) \quad \mathfrak{M}_p = M_1' c_0 + M_2' h_0.$$

Die Winkel $XO\delta$, δOx , ZOz stellen die drei Eulerschen Winkel Ψ , Φ , θ dar, welche die Lage des beweglichen Systems in bezug auf das ruhende eindeutig festlegen. Hinsichtlich dieser Winkel ist folgendes zu bemerken. Der Winkel θ stellt die Schiefe der Ekliptik zur Zeit t dar, es ist also

$$(255) \quad \epsilon = \theta.$$

Der Winkel Φ misst den Bogen des Himmelsäquators, der zwischen dem Herbstpunkt und dem Greenwicher Meridian gelegen ist, ergänzt also die im Winkelmaß gemessene Sternzeit Greenwich zu 180° .

Nach diesen Festlegungen kann zur Ermittlung der Drehbewegung der Erde unter dem Einflusse des Drehmoments \mathfrak{M} geschritten werden. Dabei soll die im § 36 erwähnte freie Nutation der Erdachse ausser Acht gelassen werden. Weil, wie nachträglich beglaubigt werden wird, der Rotationsvektor ω sich unter dem Einflusse des Drehmoments \mathfrak{M} nur unendlich wenig von der Figurenachse der Erde entfernen kann, so wird, ähnlich wie bei der Berechnung der Störungen erster Ordnung, von seiner Abweichung von der Figurenachse vorerst abgesehen und angenommen werden, dass der Drehvektor ω die Richtung der z -Achse aufweise. Es ist also:

$$w_1 = 0 \quad w_2 = 0,$$

d. h. wegen (43) und (241)

$$w = n k,$$

und wegen (41)

$$G_1 = 0 \quad G_2 = 0 \quad G_3 = n C,$$

d. h.

$$(256) \quad \mathfrak{G} = G_3 k = n C k.$$

Der Vektor \mathfrak{G} ist ein im beweglichen Bezugssystem unveränderlicher Vektor mit einer skalaren Grösse $G = nC$. Man denke sich diese Grösse auf der z-Achse (Fig. 7, Seite 107) aufgetragen, d. h. $\overline{OT} = G_3$ gemacht und frage nach den Aenderungen des Vektors \mathfrak{G} im ruhenden Bezugssystem. Seien $d\Phi$, $d\theta$, $d\Psi$ die dem Zeitelement dt zugehörigen Aenderungen der Eulerschen Winkel. Weil \mathfrak{G} mit der z-Achse zusammenfallend angenommen wurde, so hat die Aenderung des Winkels Φ keinen Einfluss auf die Lage des Vektors \mathfrak{G} im ruhenden Bezugssystem. Eine Zunahme des Winkels θ um $d\theta$ hat die Verschiebung $\overline{OT} \cdot d\theta$ des Punktes T in der Ebene ZOz , senkrecht zu \overline{OT} , also entgegengesetzt der Richtung des Einheitsvektors h_0 zur Folge. Daraus resultiert eine Aenderung des Vektors \mathfrak{G} um $-G_3 d\theta \cdot h_0$. Eine Zunahme des Winkels Ψ um $d\Psi$ hat eine Drehung der Ebene ZOz um die Achse Z , also eine Verschiebung $G_3 \sin \theta d\Psi$ des Punktes T zur Folge und zwar senkrecht zu dieser Ebene in der Richtung des Einheitsvektors c_0 . Daraus resultiert aber eine Aenderung des Vektors \mathfrak{G} um $G_3 \sin \theta d\Psi c_0$. Es ist also die Gesamtänderung des Vektors \mathfrak{G} dargestellt durch:

$$d\mathfrak{G} = -G_3 d\theta \cdot h_0 + G_3 \sin \theta \cdot d\Psi \cdot c_0,$$

so dass man bekommt:

$$(257) \quad \frac{d\mathfrak{G}}{dt} = -nC \frac{d\theta}{dt} h_0 + nC \sin \theta \frac{d\Psi}{dt} c_0.$$

Nach dem Impulssatz (26) muss der vorstehende Ausdruck gleich sein dem Drehmoment

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_s + \mathfrak{M}_p$$

der äusseren Kräfte. Man hat also mit Rücksicht auf (253) und (254)

$$-nC \frac{d\theta}{dt} \mathfrak{h}_0 + nC \sin \theta \frac{d\Psi}{dt} \mathfrak{c}_0 = -M_s \mathfrak{c}_0 + M_1' \mathfrak{c}_0 + M_2' \mathfrak{h}_0.$$

Durch skalare Multiplikation mit \mathfrak{c}_0 bzw. \mathfrak{h}_0 kann die vorstehende Vektorgleichung in folgende zwei skalare Gleichungen getrennt werden:

$$(258) \quad nC \sin \theta \frac{d\Psi}{dt} = -M_s + M_1'$$

$$(259) \quad nC \frac{d\theta}{dt} = -M_2'.$$

Es wird sich zeigen, dass die Aenderungen von θ so klein sind, dass sie im Gliede $\sin \theta$ nicht zum fühlbaren Ausdruck gelangen, weshalb man in (258) die durch M_s bzw. M_1' hervorgerufenen Aenderungen von Ψ getrennt berechnen kann. Auf diese Weise findet man, dass die Wirkung des permanenten Bestandteiles \mathfrak{M}_s des Drehmoments \mathfrak{M} durch die Gleichung:

$$(260) \quad nC \sin \theta \frac{d\Psi}{dt} = -M_s$$

gegeben ist, während die Wirkungen des periodischen Bestandteiles \mathfrak{M}_p des Drehmoments \mathfrak{M} durch die Gleichungen

$$(261) \quad \begin{cases} nC \sin \theta \frac{d\Psi}{dt} = M_1' \\ nC \frac{d\theta}{dt} = -M_2' \end{cases}$$

wiedergegeben sind.

Es folgt aus (260), (249) und (255)

$$(262) \quad \frac{d\Psi}{dt} = -\frac{3}{2} \frac{fm}{a^3} \frac{1}{n} \frac{C-A}{C} \cos \theta.$$

Diese Gleichung besagt, dass der permanente Bestandteil des Drehmoments eine gleichförmige Abnahme des Winkels Ψ , also eine rückläufige Bewegung der Knotenlinie $O\Omega$ verursacht. Diese Bewegung hat keine Aenderung des Winkels θ zur Folge und es ist, wenn man nur den permanenten Anteil des Drehmoments berücksichtigt, $\theta' = 0$. Daraus folgt aber aus der allgemeinen Gleichung (45), dass der Rotationsvektor \mathfrak{w} durch:

$$(263) \quad \mathfrak{w} = \Psi' n_3 + \Phi' k$$

gegeben ist.

Es folgt aus der Fig. 7

$$\Psi' n_3 = (\Psi' \cos \theta) k + (\Psi' \sin \theta) h_0,$$

also

$$\mathfrak{w} = (\Phi' + \Psi' \cos \theta) k + (\Psi' \sin \theta) h_0,$$

d. h. wegen (242)

$$\mathfrak{w} = nk + (\Psi' \sin \theta) h_0.$$

Es ist ferner:

$$(\Psi' \sin \theta) h_0 = (\Psi' \sin \theta \cos \Phi) i + (\Psi' \sin \theta \sin \Phi) j + nk,$$

also

$$(264) \quad \mathfrak{w} = (\Psi' \sin \theta \sin \Phi) i + (\Psi' \sin \theta \cos \Phi) j + nk,$$

d. h. wegen (31), (41) und (237)

$$(265) \quad \left\{ \begin{array}{l} G_1 = A \sin \theta \sin \Phi \Psi' \\ G_2 = A \sin \theta \cos \Phi \Psi' \\ G_3 = nC. \end{array} \right.$$

Der Drehimpulsvektor \mathfrak{G} ist also in aller Strenge nicht durch (256) dargestellt, weil er eine in die x - y -Ebene fallende Komponente

$$(266) \quad G_a = \sqrt{G_1^2 + G_2^2} = A \sin \theta \Psi'$$

aufweist und mit der z -Achse einen Winkel φ einschliesst, welcher gegeben ist durch:

$$(267) \quad \text{tang } \varphi = \frac{G_a}{G_3} = \frac{1}{n} \frac{A}{C} \sin \theta \Psi'.$$

Aus den nachstehend mitgeteilten numerischen Angaben über die Drehbe-

wegung der Erde wird man ersehen, dass der Beitrag (226) zum ursprünglich angenommenen Drehimpuls (256) und die durch (267) gegebene Abweichung seiner tatsächlichen Richtung von der angenommenen k so verschwindend klein sind, dass sie das Endergebnis (262) der Berechnung nur unmerklich beeinflussen. Zu einer Berechnung der Störungen zweiter Ordnung, durch welche die obigen Abweichungen zu berücksichtigen wären, liegt also kein Anlass vor.

Dem Ausdruck (262) kann auch eine andere, für die späteren Anwendungen zweckmässigere Form gegeben werden. Bedeutet T die Umlaufszeit der Erde um die Sonne, so ist nach der Gleichung (80) des ersten Abschnittes dieses Buches

$$(268) \quad \frac{f}{a^3} = \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot \frac{1}{M+m}.$$

Bezeichnet also

$$(269) \quad \frac{2\pi}{T} = \nu$$

die mittlere Bewegung der Erde um die Sonne, so kann man auch setzen:

$$(270) \quad \frac{fm}{a^3} = \frac{m}{M+m} \nu^2.$$

Auf diese Weise bekommt man statt (262)

$$(271) \quad \frac{d\Psi}{dt} = -\frac{3}{2} \frac{m}{M+m} \frac{\nu^2}{n} \frac{C-A}{C} \cos \theta.$$

Die Grösse:

$$(272) \quad p_1 = -\frac{d\Psi}{dt} T = 3\pi \frac{m}{M+m} \frac{\nu}{n} \frac{C-A}{C} \cos \theta$$

stellt den absoluten jährlichen Betrag der Solarpräzession dar.

Um die Wirkungen des periodischen Bestandtheiles \mathfrak{M}_p des Drehmoments der Sonnenanziehung zu ermitteln, hat man in (261) die Ausdrücke (251) einzusetzen. Es folgt mit Berücksichtigung von (247), (255), (269) und (270)

$$(273) \quad \frac{d\Psi}{dt} = \frac{3}{2} \frac{m}{M+m} \frac{\nu^2}{n} \frac{C-A}{C} \cos \theta \cos 2\nu t$$

$$(274) \quad \frac{d\theta}{dt} = -\frac{3}{2} \frac{m}{M+m} \frac{v^2 C-A}{n C} \sin \theta \sin 2\nu t.$$

Integriert man die vorstehenden Differentialgleichungen, wobei, wie bereits erwähnt, rechts die Veränderlichkeit von θ nicht zu berücksichtigen ist, so folgt, wenn man die Zeit t von dem Augenblicke zählt, in welchem $\Psi = 0$ und θ seinen Maximalwert erreicht,

$$(275) \quad \Psi = \frac{3}{4} \frac{m}{M+m} \frac{v}{n} \frac{C-A}{C} \cos \theta \sin 2\nu t$$

$$(276) \quad \theta = \frac{3}{4} \frac{m}{M+m} \frac{v}{n} \frac{C-A}{C} \sin \theta \cos 2\nu t,$$

d. h. wegen (272) und (269)

$$(277) \quad \Psi = \frac{1}{4\pi} p_{\tau} \sin \frac{4\pi}{T} t$$

$$(278) \quad \theta = \frac{1}{4\pi} p_{\tau} \operatorname{tang} \theta \cos \frac{4\pi}{T} t.$$

§ 47. Die Präzession der Erdachse. Aus dem vorstehenden folgt, dass der permanente Bestandteil des Drehmoments der Sonnenanziehung auf die Erde eine rückläufige Bewegung der Knoten des Himmelsäquators und der Ekliptik längs dieser letzteren zur Folge hat. Diese Bewegung, pro Zeiteinheit berechnet, ist nach (271) und (255) durch den Ausdruck gegeben:

$$(279) \quad \frac{d\Psi}{dt} = -\frac{3}{2} \frac{m}{M+m} \frac{v^2 C-A}{n C} \cos \varepsilon.$$

Die Anziehung des Mondes hat eine ähnliche, und zwar wegen der Nähe dieses Himmelskörpers, quantitativ grössere Wirkung zur Folge, deren mathematischen Ausdruck man erhalten wird, wenn man in der vorstehenden Gleichung die Masse m der Sonne durch die Masse m_1 des Mondes, die mittlere Bewegung v der Sonne um die Erde durch die mittlere Bewegung v_1 des Mondes um die Erde und die Schiefe der Ekliptik ε durch die Neigung ε_2 der Mondbahn zur Ebene des Himmelsäquators ersetzt. Dabei ist folgendes zu berücksichtigen. Die Mondbahn schliesst mit der Ebene der Ekliptik einen nahezu unveränderlichen Winkel $\varepsilon_1 = 5^\circ 9'$ ein, dabei dreht sich, wie dies noch ausführlich besprochen werden wird, die Ebene der Mondbahn infolge der Störung durch die Sonne derart, dass die Knoten der Mondbahn längst der Ekliptik rückläufig wandern, weshalb die Neigung der Ebene der Mondbahn zur Ebene des Himmelsäquators zwischen

$(\varepsilon - \varepsilon_1)$ und $(\varepsilon + \varepsilon_1)$ schwankt. Nachdem es sich oben um den permanenten Bestandteil des Drehmoments der Mondanziehung handelt, so werden wir vorläufig in (279) für ε_2 den Mittelwert zwischen $(\varepsilon - \varepsilon_1)$ und $(\varepsilon + \varepsilon_1)$, also den Wert ε einsetzen, später aber eine schärfere Berücksichtigung aller soeben erwähnten Umstände nachholen. Auf diese Weise bekommt man für die stationäre Wirkung der Mondanziehung folgenden Ausdruck:

$$(280) \quad \frac{d\Psi}{dt} = -\frac{3}{2} \frac{m_1}{M + m_1} \frac{r_1^2}{n} \frac{C-A}{C} \cos \varepsilon.$$

Dabei ist nach (269)

$$(281) \quad r = \frac{2\pi}{T}; \quad r_1 = \frac{2\pi}{T_1},$$

worin T die siderische Umlaufszeit der Erde um die Sonne und T_1 die siderische Umlaufszeit des Mondes um die Erde bedeutet.

Die Gesamtwirkung der Sonne und des Mondes, die sogenannte lunisolare Präzession, ist also durch den nachstehenden Ausdruck gegeben:

$$(282) \quad \frac{d\Psi}{dt} = -\frac{6\pi^2}{n} \frac{C-A}{C} \left[\frac{1}{T^2} + \frac{m_1}{M + m_1} \frac{1}{T_1^2} \right] \cos \varepsilon.$$

Dabei wurde die Masse M der Erde gegen die Masse m der Sonne als ausserordentlich klein vernachlässigt.

Die Zeit, während welcher der Eulersche Rotationswinkel Φ der Erde um 2π zunimmt, wird der Sterntag genannt. Bezeichnet man diese Zeitspanne mit τ , so ist

$$(283) \quad \Phi' = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{2\pi}{\tau}.$$

Weil in (242), wie es sich gleich zeigen wird, $\Psi' \cos \theta$ vernachlässigbar gegen Φ' ist, so kann gesetzt werden

$$(284) \quad n = \frac{2\pi}{\tau}.$$

Man bekommt also für den absoluten jährlichen Betrag der lunisolaren Präzession den folgenden Ausdruck:

$$(285) \quad p_{\tau} = -\frac{d\Psi}{dt} T = 3\pi\tau \frac{C-A}{C} \left[\frac{1}{T} + \frac{m_1}{M+m_1} \frac{T}{T_1^2} \right] \cos \varepsilon.$$

Der numerische Wert dieses Ausdruckes hängt von der schwach veränderlichen Grösse ε ab; setzt man darin für ε den bisher benutzten, der Gegenwart entsprechenden abgerundeten Wert $\varepsilon = 23^{\circ}27'$ ein und berücksichtigt, dass

$$T = 366,25 \tau; \quad T_1 = 27,397 \tau; \quad m_1 = 0,0123 M; \quad \frac{C-A}{C} = 0,003261,$$

ist, so bekommt man $p_{\tau} = 50''36$ als den jährlichen Betrag der Lunisolar-Präzession. Hievon entfällt auf die Anziehung der Sonne $15''88$, auf jene des Mondes $34''48$.

Zu dieser Berechnung ist folgendes zu bemerken. In Wirklichkeit wird der jährliche Betrag der Präzession nicht aus dem numerischen Wert der Grösse $\frac{C-A}{C}$ berechnet, sondern, umgekehrt, aus dem durch direkte Beobachtung gewonnenen Betrag der Präzession die Grösse $\frac{C-A}{C}$ ermittelt, was am obigen Zusammenhang nichts ändert. Nach den Berechnungen von Newcomb entspricht der Epoche 1850,0 und pro tropisches Jahr ein Betrag der Lunisolar-Präzession von $50''3684$,

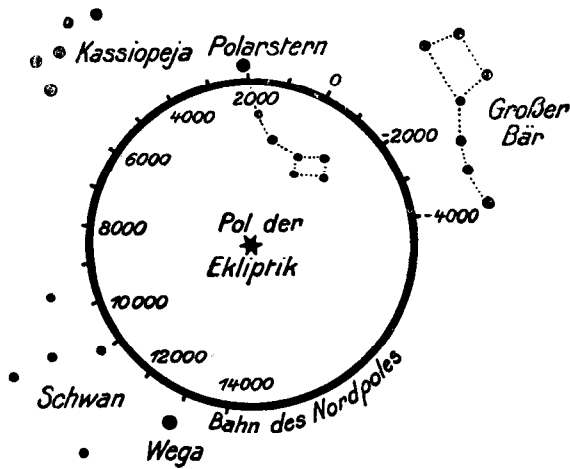


Fig. 20

so dass der hier errechnete Wert eine hinreichende Genauigkeit aufweist. Infolge dieser Verschiebung der Aequinoktialpunkte würde jeder derselben während $\frac{360 \times 60 \times 60}{50,36} = 25735$ Jahren, also während eines Zeitintervalles von rund 26 000 Jahren einen vollständigen Umlauf längs der Ekliptik vollführen. Dieses Intervall

wird mitunter auch das Platonische Jahr genannt. Infolge dieser Verrückung der Aequinoctialpunkte beschreiben die beiden Weltpole auf der Himmelskugel um die beiden Pole der Ekliptik Kreisbahnen mit dem scheinbaren Radius gleich der Schiefe der Ekliptik. Die auf diese Weise ermittelte Bahn des nördlichen Weltpoles ist in Fig. 20 veranschaulicht. Diese Kreisbahn stellt den Schnitt des Herpolhodiekegels der Erddrehung mit der scheinbaren Himmelskugel dar.

Fragen wir nach der Gestalt des Polhodiekegels, d. h. nach der Kegelfläche, welche die Drehachse im Erdkörper selbst beschreibt! Die Gleichung der Polhodie ist durch (264) gegeben, worin w als Ortsvektor aufzufassen ist und i, j, k die Einheitsvektoren des mit dem Erdkörper fest verbundenen Koordinatensystems $x - y - z$ bedeuten. Aus (264) folgt, dass die Polhodie ein Kreis ist, der in der Entfernung n vom Erdmittelpunkt die Figurenachse der Erde senkrecht umschlingt und einen Radius R aufweist, welcher gegeben ist durch:

$$R^2 = (\Psi' \sin \theta \sin \Phi)^2 + (\Psi' \sin \theta \cos \Phi)^2,$$

woraus wieder folgt

$$R = - \Psi' \sin \theta$$

Der Oeffnungswinkel α des Polhodiekegels ist also gegeben durch

$$(286) \quad \alpha = - \frac{\Psi'}{n} \sin \theta,$$

wobei man wegen der Kleinheit dieses Winkels dessen Tangens durch den Bogen ersetzt hat.

Man bekommt mit Benützung von (255), (282), (284) und (258)

$$(287) \quad \alpha = \frac{1}{2\pi} \frac{\tau}{T} p_{\tau} \sin \varepsilon,$$

d. h. mit den bereits angegebenen numerischen Werten für T, ε und p_{τ} $\alpha = 0''0087$. Dieser Winkel ist so klein, dass er sich direkten Beobachtung entzieht. Auch der durch (267) gegebene Winkel φ , der nach obigem gleich $\frac{A}{C} \alpha$ gesetzt werden kann, ist, weil A und C fast gleich sind, von derselben Kleinheitsordnung. Dieser Winkel φ , in Bogenmass gemessen, d. h. durch 206265 dividiert, gibt nach (267) das Verhältnis des vernachlässigten Drehimpulsanteiles zum berücksichtigten an, woraus die Kleinheit jenes ersteren Anteiles ersichtlich ist. Dadurch ist die Berechtigung des Ansatzes (256) erwiesen; dasselbe gilt auch für den Ansatz (284).

Aus den vorstehenden Angaben folgt, dass die Drehbewegung der Erde unter dem Einflusse des permanenten Anteiles des Drehmoments der Sonnen- und Mondanziehung folgenderweise geometrisch dargestellt werden kann. In einem wei-

ten Herpolhodiekegel, dessen Achse senkrecht zur Ebene der Erdbahn steht und dessen Oeffnung rund $23^{\circ}30'$ beträgt, rollt, ohne zu gleiten, im positiven Drehsinne ein äusserst spitzer Polhodiekegel (mit einer Oeffnung von nur $0''0087$), eine Umdrehung während eines Sterntages vollführend; der Mantel des Herpolhodiekegels wird dabei in 26000 Jahren rückläufig abgelaufen.

§ 48. Periodische Glieder. Die Drehmomente der Sonnen- bzw der Mondanziehung auf die Erde weisen, wie vorher erläutert, neben ihren permanenten Bestandteilen noch periodische auf. Falls man die Störungen der Mondbahn, die später besprochen werden sollen, vorläufig nicht berücksichtigt, sind die hauptsächlichsten dieser periodischen Glieder jene mit einer halbjährigen bzw. halbmonatlichen Periode. Die Wirkungen dieser periodischen Glieder auf den Rotationszustand der Erde sind bereits im § 46 analytisch dargestellt worden, so dass es sich hier nur darum handelt, die numerische Auswertung der Ausdrücke (277) und (278) für die Sonnen- bzw. Mondanziehung durchzuführen.

Der jährliche Betrag der durch die Sonnenanziehung bewirkten Präzession betrug nach vorstehenden Berechnungen $15''88$. Setzt man also in (277) und (278) für p_r diesen Betrag ein und für θ den bereits benutzten Wert von $23^{\circ}27'$ ein, so bekommt man:

$$(288) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Psi = 1''26 \sin \frac{4\pi}{T} t \\ \theta = 0''55 \cos \frac{4\pi}{T} t. \end{array} \right.$$

Der jährliche Betrag der durch die Mondanziehung bewirkten Präzession beträgt nach den durchgeführten Berechnungen $34''48$. Umgerechnet auf die Dauer des siderischen Mondumlaufes bekommt man für diese Verschiebung den Wert $2''58$. Dieser Wert in die Ausdrücke (277) und (278) eingesetzt, ergibt als die Wirkung der Mondanziehung

$$(289) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Psi = 0''205 \sin \frac{4\pi}{T_1} t \\ \theta = 0''089 \cos \frac{4\pi}{T_1} t. \end{array} \right.$$

Durch diese Aenderungen, Richtungsänderungen der Drehachse der Erde, werden die Längen der Gestirne im gleichen Masse, aber in entgegengesetztem Sinne wie oben Ψ gezählt wird, betroffen. In der astronomischen Praxis pflegt man sowohl die stationären als auch die periodischen Schwankungen der Aequinoctiallinie im retrograden Sinne positiv zu zählen, in welchem Falle man die obigen Ausdrücke für Ψ mit dem negativen Vorzeichen zu versehen hätte. Eine genauere

Ausrechnung der periodischen Glieder als sie hier vorgenommen wurde, würde eine Korrektur der Koeffizienten $1''26$, $0''55$, $0''205$, $0''089$ auf $1''269$, $0''551$, $0''204$, $0''089$ ergeben.

Die periodischen Aenderungen der Lage der Drehachse der Erde werden als Nutationsglieder bezeichnet und zu den Hauptgliedern der Nutation gezählt, von denen noch die Rede sein wird.

Der Frühlings- Tag- und Nachtgleichenpunkt, in dem der Aequator und die Ekliptik sich wirklich schneiden, heisst das wahre Frühlingsäquinoktium zu dieser Zeit; dagegen der von allen Nutationsgliedern befreite Durchschnittspunkt in dem sich der Himmelsäquator und die Ekliptik bloss infolge der vorstehend besprochenen Präzession schneiden würden, das mittlere Aequinoktium. In derselben Bedeutung werden die Bezeichnungen wahre und mittlere Schiefe der Ekliptik gebraucht.

KAPITEL VII

Die astronomische Nutation der Erdachse

§ 49. Störungen der Ebene der Mondbahn. Die Ebene der Bahn des Mondes um die Erde fällt nicht mit der Ebene der Ekliptik zusammen; dieser Umstand hat Störungen der Mondbewegung zur Folge, die sich auch in der Drehbewegung der Erde fühlbar machen, weshalb sie hier besprochen werden müssen.

Im § 10 ist das Satellitenproblem in seiner einfachsten Form behandelt und auf das Zweikörperproblem zurückgeführt worden, indem man die Voraussetzung machte, die auf den Planet bzw. auf den Satellit einwirkenden Kräfte seien untereinander parallel. Dies ist im Falle der Erde und des Erdmondes nur annähernd richtig, so dass zwecks Berechnung der erwähnten Störungen diese vereinfachende Annahme fallen gelassen werden muss.

Von den mannigfaltigen Störungen der Mondbewegung kommt für das Rotationsproblem der Erde in erster Reihe die Störung der Ebene der Mondbahn in Betracht. Um den Mechanismus und die Reichweite dieser Störung klarzulegen, ist es gestattet, von der Exzentrizität der Mondbahn abzusehen und anzunehmen, die Erde und der Mond bewegen sich um ihren gemeinsamen Massenmittelpunkt O auf kreisförmigen Bahnen. Die Halbmesser r und r_1 dieser beiden Bahnen sind, wenn man, wie früher, die Masse der Erde mit M , jene des Mondes mit m_1 bezeichnet, durch die Ausdrücke gegeben:

$$(290) \quad r = \frac{m_1}{M + m_1} a_1 \quad r_1 = \frac{M}{M + m_1} a_1$$

worin a_1 die mittlere Entfernung des Mondes von der Erde bedeutet.

Das System Erde-Mond kann jetzt als ein geschlossenes, seine Form nicht änderndes materielles System aufgefasst werden, auf welches, als eine äussere Kraft, die Sonnenanziehung einwirkt. Dieses unveränderliche System rotiert bei seinem jährlichen Umlaufe um die Sonne um die durch den Massenmittelpunkt O hindurch-

gehende, auf der Ebene der Mondbahn senkrecht stehende Drehachse mit einer Winkelgeschwindigkeit ν_1 , die der mittleren Bewegung des Mondes um die Erde gleichzusetzen ist. Weil das auf den Punkt O sich beziehende Trägheitsellipsoid dieses materiellen Systems keine Kugel ist, wird, geradeso, wie es mit der unter dem Einfluss der Sonnenanziehung stehenden Erde der Fall gewesen ist, die soeben gekennzeichnete Drehachse dieses Systems sich verlagern müssen. Man kann die im vorigen Kapitel entwickelte Theorie der Verlagerung der Drehachse auch auf den vorliegenden Fall ungeändert anwenden, wofern man die Analogie der beiden Fälle zu einer vollständigen gestaltet.

Die Drehbewegung der Erde um ihre Achse hatte, weil die Erde ein Rotationskörper ist, keinen Einfluss auf das Drehmoment \mathfrak{M} der äusseren Kräfte. Im vorliegenden Falle trifft dies nicht mehr zu, vielmehr wird die Drehbewegung des Systems Erde-Mond um die oben angegebene Achse zu einer periodischen Aenderung der Grösse \mathfrak{M} Anlass geben, deren Periode der Umlauszeit T_1 des Mondes um die Erde gleich ist, also die Dauer eines siderischen Monats sein wird. Die aus dieser kurzperiodischen Aenderung des Drehmoments \mathfrak{M} sich ergebenden Störungen der Mondbahn sind zu unbedeutend, um bei den Problemen, mit denen ich mich in diesem Buche zu beschäftigen haben werde, berücksichtigt werden zu müssen und können auf folgende Weise leicht eliminiert werden.

Während des Zeitintervalles T_1 vollführen Erde und Mond einen ganzen Umlauf auf ihren Kreisbahnen. Der diesem Zeitintervalle entsprechende Mittelwert des Drehmoments \mathfrak{M} kann, wie leicht einzusehen, erhalten werden, indem man die Erdmasse M längs der Erdbahn, die Mondmasse m_1 längs der Mondbahn gleichmässig verteilt sich denkt und sodann das Drehmoments \mathfrak{M} ermittelt, mit dem die Sonne auf das System dieser beiden materiellen Ringe einwirkt. Dieser Vorgang ist gleichbedeutend mit der auch von Klein und Sommerfeld benützten Methode der Elimination der periodischen Störungen, die Gauss bei der Berechnung der säkularen Störungen angewendet hat, nachdem er bewiesen hatte, dass die säkularen Aenderungen der Bahnen zweier sich gegenseitig störenden Planeten dieselben sind wie jene, die man erhält, wenn man diese Bahnen mit den zugehörigen Planetmassen derart belegt, dass die Masse jedes Bahnelements invers proportional wird der zugehörigen Geschwindigkeit des Planeten und sodann die Attraktion berechnet, die diese materiellen Bahnringe aufeinander ausüben. Weil in unserem Falle zufolge der gemachten Voraussetzung die Bahnen von Erde und Mond als kreisförmig zu betrachten sind, ergab sich eine homogene Verteilung der zugehörigen Massen M und m_1 .

Das Trägheitsmoment C der derart gestalteten materiellen Ringe bezüglich der durch den Punkt O hindurchgehenden Drehachse des Systems ist durch den Ausdruck veranschaulicht:

$$C = Mr^2 + m_1 r_1^2.$$

Denselben Wert weist auch das polare Trägheitsmoment J_0 bezüglich des Punktes O auf. Es ist also

$$J_0 = C$$

Weil nach einer allgemeinen Eigenschaft der Trägheitsmomente

$$A + B + C = 2J_0$$

ist, worin A und B die beiden anderen Trägheitshauptmomente bedeuten, die aus Symmetriegründen einander gleich sind, d. h. $B=A$ ist, so wird

$$2A = C$$

d. h.

$$(291) \quad \frac{C-A}{C} = \frac{1}{2}.$$

Jetzt haben wir denselben Fall vor uns, dem wir bei der Berechnung der Präzession begegnet haben; man hat in den damals erhaltenen Formeln bloss die nachstehenden selbstverständlichen Substitutionen durchzuführen. Statt der Z -Achse des damals verwendeten Koordinatensystems, die mit der Drehachse der Erde zusammen fallend angenommen wurde, hat man die auf der Ebene der Mondbahn senkrecht stehende Achse einzuführen. Der Ursprung dieses Koordinatensystems kann, weil die Entfernung des Punktes O vom Erdmittelpunkt sehr klein ist, in diesen Punkt verlegt werden. Die X -Achse des Koordinatensystems ist gegen den aufsteigenden Knoten der Ekliptik in bezug auf die Mondbahn, d. h. gegen den absteigenden Knoten dieser Bahn in bezug auf die Ekliptik zu richten. Die Länge λ der Sonne ist durch die von dem erwähnten Knotenpunkt der Mondbahn gemessene Länge λ_1 zu ersetzen und anstelle der Schiefe der Ekliptik $\varepsilon = \theta$ die Neigung ε_1 der Mondbahn zur Ekliptik zu setzen. Die Drehgeschwindigkeit n der Erde ist durch die Drehgeschwindigkeit des Systems Erde-Mond, d. h. durch die mittlere Bewegung ν_1 des Mondes auf seiner geozentrischen Bahn zu ersetzen. Statt der Masse M der Erde ist die Masse $(M + m_1)$ des Systems Erde-Mond einzuführen und statt des Bruches $\frac{C-A}{C}$ der soeben angegebene numerische Wert (291) zu setzen. Auf diese Weise bekommt man statt der Formel (279) die Formel:

$$(292) \quad \frac{d\Psi_1}{dt} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{m}{m+M+m_1} \cdot \frac{\nu^2}{\nu_1} \cdot \frac{1}{2} \cos \varepsilon_1.$$

Die Gesamtmasse $(M+m_1)$ des Systems Erde-Mond ist im Vergleich zur Sonnenmasse m ausserordentlich klein und man kann sie oben im Nenner vernachlässigen, so dass man mit Berücksichtigung von (281) erhält:

$$(293) \quad \frac{d\Psi_1}{dt} = -\frac{3\pi}{2} \cdot \frac{T_1}{T^2} \cos \varepsilon_1$$

Die Bewegung der Knoten der Mondbahn ist also eine rückläufige. Der absolute jährliche Betrag dieser Verrückung ist gleich:

$$(294) \quad p_{\tau} = \frac{3\pi}{2} \cdot \frac{T_1}{T} \cos \varepsilon_1$$

oder, in Graden gemessen,

$$(295) \quad p_{\tau} = 270^{\circ} \cdot \frac{T_1}{T} \cos \varepsilon_1.$$

Mit $\varepsilon_1 = 5^{\circ} 8' 43''$; $T_1 = 27,322$ Tage; $T = 365,24$ Tage bekommt man eine jährliche Verrückung von 20° . Ein vollständiger Umlauf würde unter den oben gemachten vereinfachenden Annahmen rund 18 Jahre erfordern; in Wirklichkeit beträgt die siderische Umlaufszeit der Knoten der Mondbahn etwas mehr und zwar 18,6 Jahre.

Ausser dieser stationären Bewegung der Mondknoten weisen die Winkel Ψ und θ der Ebene der Mondbahn periodische Schwankungen; sie ergeben sich mittels (277) und (278) und man bekommt mit dem obigen Ausdruck für p_{τ} :

$$(296) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Psi = 1^{\circ}36'' \sin \frac{4\pi}{T} t \\ \theta = 8'39'' \cos \frac{4\pi}{T} t. \end{array} \right.$$

Der letztere Ausdruck besagt, dass die Neigung ε_1 der Ebene der Mondbahn zur Ekliptik um ihren Mittelwert von $5^{\circ} 8' 43''$ mit einer Amplitude von $8'39''$ schwankt. Eine genauere Ausrechnung würde eine Korrektur der obigen Koeffizienten $1^{\circ} 36''$ bzw. $8' 39''$ auf $1^{\circ}38''$ bzw. $8'48''$ ergeben.

§ 50. Die astronomische Nutation der Erdachse. Die rückläufige Bewegung der Mondknoten hat periodische Aenderungen der Rotationsachse der Erde zur Folge, die, durch die Beobachtung zuerst entdeckt, den Namen Nutation erhielten, welcher Name auch für die später entdeckten, bereits besprochenen periodischen Glieder in Anwendung kam. Es sollen nun die mathematischen Ausdrücke für jene durch die Bewegung der Mondknoten hervorgerufene Nutation im engsten Sinne des Wortes abgeleitet werden.

Sei (Fig. 21) AA' der Himmelsäquator, EE' die Ekliptik, LL' die auf der Himmelskugel projizierte Mondbahn, es stellt dann F den Frühlingspunkt, D den aufsteigenden Knoten der Mondbahn in bezug auf die Ekliptik und C in bezug auf den Aequator dar. Es ist ferner $\sphericalangle DFC = \varepsilon$ die Schiefe der Ekliptik, $\sphericalangle L'DE' = \varepsilon_1$ die Neigung der Mondbahn zur Ekliptik, $\sphericalangle DCA' = \varepsilon_2$ die Neigung der Mondbahn zum Aequator. Es stellt schliesslich $\text{arc } FD = \lambda_1$ die Länge des Knotens D und

arc $FC = \alpha$ die Rektaszension des Knotens C dar. So wie der permanente Bestandteil des Drehmoments der Sonnenanziehung auf die Erde gegen den Frühlingspunkt gerichtet war, so wird der permanente Bestandteil M_s des Drehmoments M der

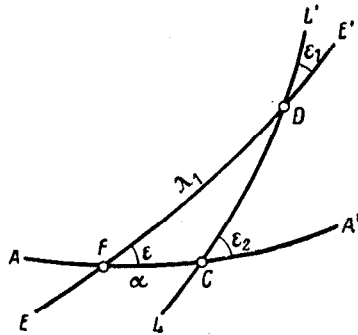


Fig. 21

Mondanziehung auf die Erde gegen den Knoten C gerichtet sein und eine skalare Grösse

$$(297) \quad M_s = \frac{3}{2} \frac{fm_1}{a_1^3} (C-A) \sin \varepsilon_2 \cos \varepsilon_2$$

aufweisen. Zerlegt man dieses Drehmoment in zwei Komponenten, von denen die eine, M_s' , in die Aequinoktiallinie fällt, die andere, M_s'' , senkrecht darauf steht, so sind die skalaren Grössen dieser Komponenten gleich $M_s' = M_s \cos \alpha$; $M_s'' = M_s \sin \alpha$, d. h.

$$(298) \quad M_s' = \frac{3}{2} \frac{fm_1}{a_1^3} (C-A) \sin \varepsilon_2 \cos \varepsilon_2 \cos \alpha$$

$$(299) \quad M_s'' = \frac{3}{2} \frac{fm_1}{a_1^3} (C-A) \sin \varepsilon_2 \cos \varepsilon_2 \sin \alpha.$$

Aus dem sphärischen Dreieck FCD folgen nachstehende Gleichungen:

$$\cos \varepsilon_2 = \cos \varepsilon \cos \varepsilon_1 - \sin \varepsilon \sin \varepsilon_1 \cos \lambda_1$$

$$\sin \varepsilon_2 \sin \alpha = \sin \varepsilon_1 \sin \lambda_1$$

$$\sin \varepsilon_2 \cos \alpha = \sin \varepsilon \cos \varepsilon_1 + \cos \varepsilon \sin \varepsilon_1 \cos \lambda_1.$$

Setzt man diese Ausdrücke in (298) und (299) ein und berücksichtigt, dass

$$\cos^2 \lambda_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\lambda_1; \quad \sin \lambda_1 \cos \lambda_1 = \frac{1}{2} \sin 2\lambda_1$$

ist, so bekommt man:

$$(300) \quad M_s' = \frac{3}{2} \frac{fm_1}{a_1^3} (C-A) \left[\sin \epsilon \cos \epsilon - \frac{3}{2} \sin \epsilon \cos \epsilon \sin^2 \epsilon_1 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \cos 2\epsilon \sin 2\epsilon_1 \cos \lambda_1 - \frac{1}{2} \sin \epsilon \cos \epsilon \sin^2 \epsilon_1 \cos 2\lambda_1 \right]$$

$$(301) \quad M_s'' = \frac{3}{4} \frac{fm_1}{a_1^3} (C-A) [\cos \epsilon \sin 2\epsilon_1 \sin \lambda_1 - \sin \epsilon \sin^2 \epsilon_1 \sin 2\lambda_1].$$

In (300) stellt

$$\frac{3}{2} \frac{fm_1}{a_1^3} (C-A) \left[\sin \epsilon \cos \epsilon - \frac{3}{2} \sin \epsilon \cos \epsilon \sin^2 \epsilon_1 \right]$$

den gegen den Frühlingspunkt gerichteten permanenten Bestandteil des Drehmoments \mathfrak{M} . Um zu dem infolge des Umlaufes der Mondknoten periodischen Bestandteil \mathfrak{M}_p dieses Drehmoments zu gelangen, ist der erstere Bestandteil, als in der lunisolaren Präzession bereits inbegriffen, auszuscheiden, wobei zu bemerken ist dass, wie der Vergleich mit (249) zeigt, jener berücksichtigte um 1,2% zu gross geraten ist wegen der vereinfachenden Annahmen, welche bei der Bildung von (280) gemacht worden sind. Auf diese Weise bekommt man für die Koordinaten M'_1, M'_2 des Drehmoments \mathfrak{M}_p nachstehende Ausdrücke; dieselben mussten wegen den durch (250) getroffenen Vereinbarungen mit dem entgegengesetzten Vorzeichen versehen werden. Es ist also:

$$(302) \quad M_1' = - \frac{3}{4} \frac{fm_1}{a_1^3} (C-A) [\cos 2\epsilon \sin 2\epsilon_1 \cos \lambda_1 - \sin \epsilon \cos \epsilon \sin^2 \epsilon_1 \cos 2\lambda_1]$$

$$(303) \quad M_2' = - \frac{3}{4} \frac{fm_1}{a_1^3} (C-A) [\cos \epsilon \sin 2\epsilon_1 \sin \lambda_1 - \sin \epsilon \sin^2 \epsilon_1 \sin 2\lambda_1].$$

Zieht man die Gleichungen (261) heran und berücksichtigt (255), so bekommt man:

$$(304) \quad \frac{d\Psi}{dt} = -\frac{3}{4} \frac{fm_1}{a_1^3} \frac{1}{n} \frac{C-A}{C} \left[\frac{\cos 2\varepsilon}{\sin \varepsilon} \sin 2\varepsilon_1 \cos \lambda_1 - \cos \varepsilon \sin^2 \varepsilon_1 \cos 2\lambda_1 \right]$$

$$(305) \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{3}{4} \frac{fm_1}{a_1^3} \frac{1}{n} \frac{C-A}{C} [\cos \varepsilon \sin 2\varepsilon_1 \sin \lambda_1 - \sin \varepsilon \sin^2 \varepsilon_1 \sin 2\lambda_1].$$

Es ist wegen (268) und (281)

$$\frac{fm_1}{a_1^3} = \frac{m_1}{M+m_1} \nu_1^2.$$

Der absolute jährliche Betrag der durch die Mondanziehung bewirkten Präzession beträgt nach (280):

$$p_\tau = \frac{3}{2} \frac{m_1}{M+m_1} \frac{\nu_1^2}{n} T \frac{C-A}{C} \cos \varepsilon.$$

Berücksichtigt man noch, dass infolge des Rücklaufes der Mondknoten

$$(306) \quad \lambda_1 = -\frac{2\pi}{T_2} t$$

ist, worin T_2 die bereits ermittelte Periode des Umlaufes der Mondknoten bedeutet, so bekommt man:

$$(307) \quad \frac{d\Psi}{dt} = -\frac{1}{2} p_\tau \frac{1}{T} \left[2 \cotg 2\varepsilon \sin 2\varepsilon_1 \cos \frac{2\pi}{T_2} t - \sin^2 \varepsilon_2 \cos \frac{4\pi}{T_2} t \right]$$

$$(308) \quad \frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{2} p_\tau \frac{1}{T} \left[\sin 2\varepsilon_1 \sin \frac{2\pi}{T_2} t - \text{tang } \varepsilon \sin^2 \varepsilon_1 \sin \frac{4\pi}{T_2} t \right].$$

Die Integration dieser Gleichungen ergibt unter Beibehaltung der Initialbedingungen, wie sie der Integration der Ausdrücke (273) und (274) zugrunde lagen:

$$(309) \quad \Psi = -\frac{1}{4\pi} p_{\tau} \frac{T_2}{T} \left[2 \cotg 2\varepsilon \sin 2\varepsilon_1 \sin \frac{2\pi}{T_2} t - \frac{1}{2} \sin^2 \varepsilon_1 \sin \frac{4\pi}{T_2} t \right]$$

$$(310) \quad \theta = \frac{1}{4\pi} p_{\tau} \frac{T_2}{T} \left[\sin 2\varepsilon_1 \cos \frac{2\pi}{T_2} t - \frac{1}{2} \operatorname{tang} \varepsilon \sin^2 \varepsilon_1 \cos \frac{4\pi}{T_2} t \right].$$

Mit $p_{\tau}=34''48$; $T_2=18,6 T$; $\varepsilon = 23^{\circ} 27'$; $\varepsilon_1=5^{\circ} 8' 43''$ bekommt man:

$$(311) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Psi = -17''06 \sin \frac{2\pi}{T_2} t + 0''205 \sin \frac{4\pi}{T_2} t \\ \theta = 9''117 \cos \frac{2\pi}{T_2} t - 0''089 \cos \frac{4\pi}{T_2} t. \end{array} \right.$$

In der astronomischen Praxis ist es üblich, den Winkel Ψ retrograd zu zählen, in welchem Falle die Ausdrücke für Ψ in (288), (289) und (311) mit dem entgegengesetzten Vorzeichen zu versehen sind. Ausserdem pflegt man statt der unabhängigen Variablen t die Länge \odot der Sonne, die Länge ζ des Mondes und die Länge \oslash des aufsteigenden Mondknotens in die Ausdrücke (288), (289), (311) einzuführen. Weil \oslash retrograd zunimmt, so ist in den Gliedern mit $\sin \oslash$ abermals ein Zeichenwechsel vorzunehmen. Auf diese Weise bekommt man mit Benützung der auf zwei Dezimalen genau bestimmten Werte der zugehörigen Koeffizienten folgenden Ausdruck für die Gesamtnutation:

$$\Psi = -1''27 \sin 2 \odot - 0''20 \sin 2 \zeta - 17''26 \sin \oslash + 0''21 \sin 2 \oslash$$

$$\theta = + 0''55 \cos 2 \odot + 0''09 \cos 2 \zeta + 9''22 \cos \oslash - 0''09 \cos 2 \oslash.$$

Jedes gleichperiodische Paar der obigen Glieder verursacht eine Verlagerung der Rotationsachse der Erde von solcher Art, dass der Durchstosspunkt dieser Achse mit der Himmelssphäre während der zugehörigen Periode am Himmelsgewölbe eine kleine Ellipse, die Nutationsellipse, beschreibt. Einer Richtungsänderung der Erdachse um θ und Ψ entsprechen nämlich die scheinbaren Verrückungen $x=\theta$; $y=\Psi \sin \varepsilon$ auf der Himmelssphäre und man bekommt beispielsweise für die beiden Hauptglieder der obigen Ausdrücke

$$x = 9''22 \cos \oslash; \quad y = -17''26 \sin \varepsilon \sin \oslash.$$

Eliminiert man aus diesen beiden Gleichungen Ω , so bekommt man

$$\frac{x^2}{(9''22)^2} + \frac{y^2}{(17''26 \sin \varepsilon)^2} = 1$$

als die Gleichung der Bradleyschen Nutationsellipse. Ihre Halbachsen sind, weil $\varepsilon = 23^\circ 27'$ ist, $a = 9''22$; $b = 6''87$; die grosse Halbachse ist dabei gegen den Pol der Ekliptik gerichtet.

KAPITEL VIII

Zeitmessung und Zeitzählung.

§ 51. Stern- und Sonnentage. Die Drehbewegung der Erde ist die natürliche Grundlage unserer Zeitmessung und Zeitzählung; der Zeitmessung, weil diese Bewegung die gleichmässigste ist, die wir kennen, der Zeitzählung, weil sie den Wechsel von Tag und Nacht verursacht, auf deren Ablauf unsere ganze Lebensweise und Tätigkeit eingerichtet ist.

Die Winkelgeschwindigkeit der Eigenrotation der Erde um ihre Figurenachse ist nach (241) eine konstante Grösse, so dass diese Rotation vollkommen gleichmässig erfolgt. Hätte man also eine auf der Himmelskugel, wie angenagelt, befestigte Marke, so würde diese den Zeiger der irdischen Uhr darstellen, weil sich dieser Punkt relativ zum irdischen Beobachter längs seines Parallelkreises gleichmässig bewegen und sein Stundenwinkel das Mass der Zeit getreulich angeben würde.

Es ist aber unmöglich einen mit der Himmelssphäre fest verbundenen Punkt namhaft zu machen, weil das Netz der Fixsterne, trotz ihren Namens, kein fixes ist. Man war deshalb veranlasst, einen, zwar beweglichen, aber als Schnitt des Himmelsäquators und der Ekliptik wohl definierten Punkt der Himmelssphäre, den Frühlingspunkt, als den Zeiger der irdischen Uhr zu benützen, und seinen Stundenwinkel die Sternzeit zu nennen. Die Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation relativ zum Frühlingspunkt ist im vorstehenden Kapitel mit Φ' bezeichnet worden; der Zusammenhang zwischen dieser Winkelgeschwindigkeit und der Winkelgeschwindigkeit n der Eigenrotation der Erde war durch (242), d. h. durch $\Phi' + \Psi' \cos \theta = n$ gegeben, worin Ψ' die Präzessionsgeschwindigkeit des mittleren Aequinoktiums und θ die mittlere Schiefe der Ekliptik bedeutet. Wenn Ψ' und θ konstante Grössen wären, würde aus der Konstanz von n auch jene von Φ' folgen und die Verwendbarkeit der täglichen Bewegung des Frühlingspunktes zum Zeitmass wäre ohne weiters erwiesen. Die Grösse Ψ' ist aber nicht konstant, sondern, weil wir hier mit dem mittleren, also von periodischen Schwankungen befreiten Aequinoktium zu tun haben, säkular veränderlich; dasselbe gilt auch hinsichtlich der Grösse θ . Es ist indessen folgendes zu berücksichtigen. Der Frühlingspunkt braucht zum vollständigen Umlauf längs der Ekliptik rund 26.000 Jahre oder rund 9,5 Millionen Sterntage, weshalb

die Präzessionsgeschwindigkeit Ψ' 9,5 Millionen Mal kleiner ist als die Rotationsgeschwindigkeit der Erde. Das Glied $\Psi' \cos \theta$ der obigen Gleichung ist also im Vergleich zu den übrigen sehr klein und die säkularen Aenderungen dieses Gliedes, die nur einen geringen Bruchteil desselben erreichen, beeinflussen die durchschnittliche Dauer des Sterntages nur ganz unmerklich. Aus diesem Grunde kann auch der Stundenwinkel des mittleren Frühlingspunktes zum praktischen Mass der Zeit benützt werden.

Für das bürgerliche Leben ist der Sterntag als Mass der Zeit nicht gut brauchbar, weil sein Beginn im Laufe des Jahres nach und nach alle Stunden des Sonnentages durchlaufen würde. Aus diesem Grunde muss im bürgerlichen Leben, welches auf den regelmässigen Wechsel von Tag und Nacht eingerichtet ist, mit der Sonnenzeit gezählt werden. Es ist bereits im § 41 angegeben worden, was unter wahrem Sonnentag, wahrem Mittag und wahrer Sonnenzeit zu verstehen ist; die dort mitgetheilten Angaben mögen durch die folgenden ergänzt werden.

Weil sich die Sonne auf ihrer scheinbaren jährlichen Bahn um die Erde nicht mit gleicher Winkelgeschwindigkeit bewegt, sondern mit einer veränderlichen, die dem zweiten Keplerschen Gesetz genügeleistet, weil überdies diese Bahn gegen den Himmelsäquator geneigt ist und deshalb selbst einer gleichmässigen Zunahme der Sonnenlänge keine solche der Rektaszension entsprechen würde, ist die Dauer der wahren Sonnentage im Laufe des Jahres veränderlich. Um diese Unzukömmlichkeit zu beseitigen und ein gleichförmiges, von der täglichen Bewegung der Sonne abhängiges Zeitmass zu gewinnen, denkt man sich die wahre Sonne durch eine andere, die sogenannte erste mittlere Sonne, ersetzt, deren Anomalie gleichmässig zunimmt und die mit der wahren Sonne gleichzeitig die Apsidenlinie durchschreitet; dadurch erscheinen die wirklichen Ungleichheiten in der Bewegung der wahren Sonne beseitigt. Um auch die andere aus der Schiefe der Ekliptik herrührende Ungleichheit in der Bewegung in Rektaszension wegzuschaffen, denkt man sich eine zweite mittlere Sonne, die sich längs des Aequators derart bewegt, dass sie mit der ersten mittleren Sonne zugleich die Aequinoktialpunkte durchreitet; die Rektaszension der zweiten mittleren Sonne ist also stets gleich der Länge der ersten mittleren Sonne. Die Zeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden Kulminationen der zweiten mittleren Sonne heisst ein mittlerer Sonnentag; es ist mittlerer Mittag im Augenblicke der Kulmination derselben und die mittlere Zeit in irgend einem Augenblicke wird durch den Stundenwinkel dieser zweiten mittleren Sonne gemessen. Im bürgerlichen Leben seit langem und in der astronomischen Praxis seit 1925 ist es üblich, den mittleren Sonnentag von Mitternacht bis Mitternacht zu zählen u. zw. von 0^h bis 24^h oder in je zwei gleichen Perioden von 0^h bis 12^h .

Aus dem Vostehendem folgt, dass die Sternzeit durch den Stundenwinkel des Frühlingspunktes, die wahre Sonnenzeit durch den Stundenwinkel der Sonne und die mittlere Sonnenzeit durch den Stundenwinkel der zweiten mittleren Sonne gemessen wird. Wird dabei dieser Stundenwinkel vom Meridiane des Standortes gezählt, so heissen jene Zeiten Ortszeiten. Zwei Orte, die unter verschiedenen Meridianen liegen, haben, wie leicht einzusehen, in demselben Augenblicke eine verschiedene Ortszeit, und der Unterschied dieser Ortszeiten ist gleich dem im Zeitmasse gemessenen Längenunterschied beider Orte. Mit der Entwicklung der Verkehrsmittel und namentlich seit der Einführung der Eisenbahnen musste die

auf die Ortszeit gegründete Zeitmessung, nach der jedem Orte seine eigene lokale Zeit zukommt, fallengelassen werden und es führten zuerst die Bahnverwaltungen Einheitszeiten ein, die mit der Ortszeit der Landeshauptstadt oder oder eines andern passend gewählten Ortes übereinstimmten. Nach und nach bürgerte sich diese Art der Zeitmessung in Form von Landeszeiten im privaten und öffentlichen Leben ein, um allmählich auf eine noch zweckmässigere Grundlage gestellt zu werden. Vor allem wurde die Ortszeit des Greenwicher Meridianes als die Weltzeit allgemein anerkannt. Es wurde weiters nach einem Vorschlag von Fleming die ganze Erde durch vierundzwanzig voneinander um 15° abstehende

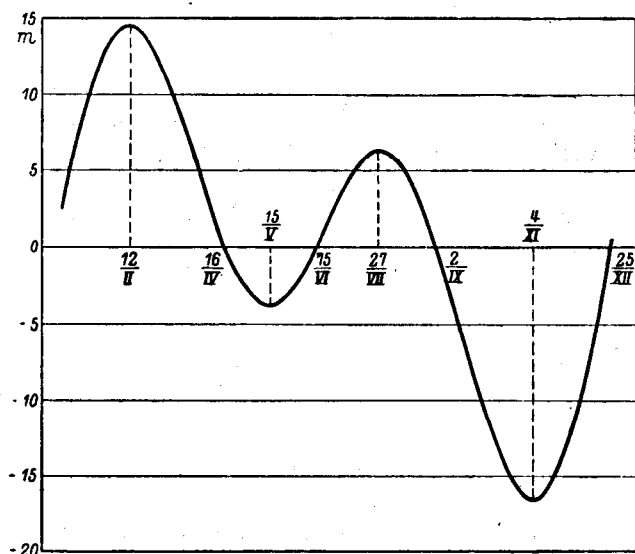


Fig. 22

Meridiane in ebensoviele Kugelzweiecke, die man fälschlich als Zonen bezeichnete, geteilt, von denen das erste Kugelzweieck durch den Meridian von Greenwich halbiert erscheint. Führt man also in jeder dieser Zonen Einheitszeiten ein, die dem mittleren Meridian der Zone entsprechen, so werden diese Zonenzeiten um eine ganze Anzahl von Stunden von der Weltzeit sich unterscheiden. Dieser auf Zonenzeiten beruhenden Zeitmessung haben sich fast alle Staaten der Erde weitgehend angepasst.

Der Unterschied zwischen der wahren und mittleren Zeit irgend eines Ortes der Erde wird die Zeitgleichung genannt. Die Ermittlung der Zeitgleichung gründet sich auf der analytischen Lösung des im Kapitel II behandelten Problems des Umlaufes der Erde um die Sonne; man findet den Wert der Zeitgleichung für jeden Tag des Jahres in den astronomischen Ephemeriden angegeben. In Fig. 22 ist die Aenderung der Zeitgleichung im Laufe des Jahres 1931 graphisch dargestellt; der Unterschied, der sich für ein anderes Jahr der Gegenwart ergeben würde, ist unbedeutend. Man ersieht aus dieser Darstellung, dass viermal im Jahre, am 16. April, 15. Juni, 2. September und 25. Dezember, die Zeitgleichung gleich Null ist. Am

12. Februar bzw. am 25. Juli erreicht die Zeitgleichung ihre positiven Maximalwerte, von denen der erste $14^m 23^s$, der zweite $6^m 23^s$ beträgt; am 15. Mai bzw. am 4. November erreicht die Zeitgleichung ihre negativen Maximalwerte, von denen der erste $3^m 47^s$, der zweite $16^m 23^s$ beträgt.

§ 52. Zeitzählung. Der Sonnentag ist eine viel zu kleine Einheit, als dass mit derselben längere Zeitintervalle gemessen oder Ereignisse datiert werden könnten. Deshalb ist die Datierung nach Tagen allein nur ausnahmsweise im Gebrauch, so nach der Scaligerschen Zählung (Julianische Periode), die mit dem 1. Januar 4713 vor Christi beginnt und nach der der 1. Januar 1940 mit 2429630 zu datieren ist. Grössere Einheiten der Zeitzählung sind seit jeher in Anwendung gekommen: die Woche, der Mond und das Jahr, von denen die zwei letzteren Einheiten den Naturerscheinungen, dem Wechsel der Lichtgestalten des Mondes bzw. dem Ablauf der Jahreszeiten entnommen wurden, die Zählung nach Monden aber diese Bedeutung grösstenteils verlor, weil der Wechsel der Lichtgestalten des Mondes mit dem Lauf der Jahreszeiten schwer in Einklang zu bringen war. Nach Mondmonaten wird in christlichen Kalender nur bei der Festlegung des Osterfestes gerechnet, während der Kalender der Mohammedaner und jener der Juden nach Mondmonaten aufgebaut ist.

Die Umlaufszeit der Erde um die Sonne, oder anders gesprochen, die Zeit während der die Sonne auf der scheinbaren Himmelskugel einen vollständigen Umlauf vollführt, heisst das siderische Jahr. Die Länge des siderischen Jahres ist, wie bereits berichtet, als konstant zu betrachten und beträgt 365 Tage $6^h 9^m 9^s$. Diese Zeitspanne ist die natürliche Einheit, mit der der Gang der Erde im Weltall gemessen werden kann, für die Naturerscheinungen, die sich auf der Erde selbst abspielen, ist sie es nicht. Der Ablauf der Jahreszeiten geht nämlich mit den Durchgangszeiten der Sonne durch die Aequinoktialpunkte Hand in Hand, zu welchen Zeiten auf der ganzen Erde Tag und Nacht einander gleich sind. Die Zeit, die die Sonne braucht, um vom Frühlingspunkt ausgehend wieder zu demselben zurückzukehren, heisst das tropische Jahr. Weil der Frühlingspunkt jährlich um den Betrag der allgemeinen Präzession auf der Ekliptik sich rückläufig bewegt, also der Sonne entgegengieht, ist das tropische Jahr kürzer als das siderische und beträgt gegenwärtig $365^d 5^h 48^m 46^s = 365,24220^d$. Diese Grösse ist, weil von den Störungen der Erdbahn abhängig, säkular schwach veränderlich.

Aus der Länge des tropischen Jahres ergibt sich der Zusammenhang zwischen der mittleren Sonnenzeit und der Sternzeit. Während des tropischen Jahres durchläuft auch die mittlere Sonne den Weltäquator von West nach Ost und hat deshalb für jeden Ort der Erde einen Meridiandurchgang weniger als es solcher dem Frühlingspunkte zukommen. Das tropische Jahr hat daher genau um einen Sterntag mehr Sterntage als mittlere Sonnentage. Daraus ergibt sich die Beziehung:

$$366,2422 \text{ Sterntage} = 365,2422 \text{ mittlere Sonnentage,}$$

die zur Umrechnung der Sternzeit in mittlere oder umgekehrt dient.

Handelt es sich darum, eine Zeitzählung zu schaffen, die mit dem Lauf der Jahreszeiten im Einklang ist, so ist es erforderlich, aus den gegebenen zwei natürlichen Zeiteinheiten, dem Tag und dem tropischen Jahr, einen Kalender zu bilden, in dem das Jahr eine ganze Anzahl von Tagen umfasst, aber eine mittlere Länge aufweist, die jener des tropischen Jahres möglichst nahe kommt. Dieses Problem haben bereits die Alexandriner in einer ersten Annäherung glücklich gelöst. Wie dies durch die von Lepsius entdeckte Steininschrift, dem „Edikt von Kanopus“ (datiert mit der 19. Tybi des neunten Jahres von Euergetes, d. h. mit dem 7. März 238 v. Chr.) einwandfrei festgestellt ist, hat im Jahre 238 v. Chr. die ägyptische Priesterschaft beschlossen, dem ägyptischen Kalenderjahre von 365 Tagen alle vier Jahre einen Schalttag hinzuzufügen. Durch dieses Schaltverfahren erhielt das Kalenderjahr eine mittlere Länge von $365^d 6^h$ und kam der oben angegebenen Länge des tropischen Jahres auf $11^m 14^s$ nahe. Es ist für die Würdigung dieser Leistung der Alexandriner belanglos, ob diese Kalenderreform zu jener Zeit tatsächlich durchgeführt wurde, sicher ist es, dass sie zwei Jahrhunderte später zur Basis des römischen und nachher des christlichen Kalenders wurde. Die Römer teilten das bürgerliche Jahr in 12 Monate: martius, aprilis, maius, junius, quintilis, sextilis, september, october, november, december, januarius und februarius, deren Dauer von der willkürlichen Bestimmung des Pontifex maximus abhing. Da man sich bei dieser Bestimmung um die Länge des Sonnenjahres nicht vier kümmerte, kam der römische Kalender in eine solche Unordnung, dass sich Julius Cäsar als Pontifex maximus veranlasst sah, hier Wandel zu schaffen. Zu jener Zeit und bis zu Cäsars Tode weilte in Rom Aegyptens Königin Kleopatra, Cäsars ungetraute Gattin. In ihrem königlichen Gefolge befanden sich auch einige Gelehrte des alexandrinischen Museums, darunter der Astronom Sosigenes, der zum geistigen Vater der Julianischen Kalenderreform wurde, deren Schaltverfahren nur eine Neuauflage des Ediktes von Kanopus darstellt. Im Jahre 325 wurde der Julianische Kalender durch den Konzil von Nicäa von der christlichen Kirche angenommen.

Im Julianischen Kalender ist jedes vierte Jahr und zwar jenes, deren Jahreszahl durch 4 restlos teilbar ist, ein Schaltjahr. Als Schalttag dient gegenwärtig der 29. Februar. Die Längen der einzelnen Monate, deren Aufzählung hier überflüssig ist, sind recht ungleichmässig verteilt, auch die Bezeichnungen September, Oktober, November, Dezember entsprechen ihrer gegenwärtigen Stellung in der Reihenfolge der Monate nicht mehr; der römische Monat quintilis erhielt zu Ehren Cäsars den Namen Julius, sextilis zu Ehren Augustus dessen Namen.

Im Laufe der Jahrhunderte machte sich der Unterschied von $11^m 14^s$ zwischen der mittleren Länge des Julianischen Kalenderjahres und der Länge des tropischen Jahres deutlich fühlbar. Das Frühlingsäquinoktium, das zur Zeit des Konzils von Nicäa am 21. März stattfand, traf im 16. Jahrhundert schon zehn Tage früher ein, und es ergab sich die Notwendigkeit einer neuen Kalenderreform, die dieses Abrücken des Äquinoktiums beseitigen und in Zukunft verhindern sollte. Das grosse Verdienst, eine solche Reform des Kalenders, deren Notwendigkeit bereits im 14. und 15. Jahrhundert erkannt wurde, durchgeführt zu haben, gebührt dem Papst Gregor XIII. Durch diese Reform, die den Kalender neuen Stils, den Gregorianischen, schuf, wurden nach den von Luigi Lilio herrührenden Vor-

schlagen folgende Aenderungen an dem bestehenden christlichen Kalender vorgenommen. Um die Aequinoktien an die ursprüngliche Stelle im Kalender zurückzusetzen, wurden 10 Tage aus dem Kalender ausgelassen, indem der 5. Oktober 1582 des Julianischen Kalenders mit dem 15. Oktober datiert wurde. Um überdies die mittlere Länge des Kalenderjahres mit der Länge des tropischen Jahres in Einklang zu bringen, wurde das nachstehende Schaltverfahren eingeführt: Schaltjahre sollen, wie bisher, jene Jahre sein, deren Jahreszahl mit 4 restlos teilbar ist, mit Ausnahme der Säkularjahre. Diese, deren Jahreszahl mit zwei Nullen endigt, sollen nur dann Schaltjahre sein, wenn die Anzahl ihrer Jahrhunderte durch 4 restlos teilbar ist. So war im Gregorianischen Kalender von den Säkularjahren nur das Jahr 1600 ein Schaltjahr, während es in Zukunft die Jahre 2000, 2400, 2800 u. s. f. sein sollen. Es folgt aus dieser Schaltregel, dass der Gregorianische Kalender in 400 Jahren 3 Tage weniger aufweist als der Julianische, weshalb die mittlere Länge seines Jahres in Tagen

$$365,25 - \frac{3}{100}$$

beträgt, d. h. 365,2425 Tage oder $365^d 5^h 49^m 12^s$. Dadurch wurde der Unterschied zwischen dem tropischen Jahr und dem mittleren Kalenderjahr von $11^m 14^s$ auf 26^s herabgedrückt.

Die Gregorianische Kalenderreform wurde in den katholischen Ländern rasch durchgeführt, in den protestantischen nach Sträuben und Gegenvorschlägen, viel später, so in England erst im Jahre 1752.

Die griechisch-orthodoxe Kirche hielt am Julianischen Kalender fest, um erst im Jahre 1923 die dringend notwendige Reform desselben zu beschliessen. In diesem Jahre wurde vom ökumenischen Patriarchen Meletius IV. ein Kongress der orthodoxen orientalischen Kirchen (worunter in erster Linie die russische, die griechische, die serbische und die rumänische zu nennen sind) in Konstantinopel einberufen, auf dem beschlossen wurde, den bereits auf 13 Tage angewachsenen Unterschied zwischen dem Kalender der westlichen und jenen der östlichen Kirchen verschwinden zu lassen, aber bei der Verteilung der Schaltjahre die seit der Gregorianischen Kalenderreform erzielten Fortschritte der astronomischen Wissenschaft im vollen Masse zu berücksichtigen. Um aber durch diese Massregel keine praktisch fühlbare Divergenz mit dem Gregorianischen Kalender zu schaffen, wurde auf meinen Vorschlag folgende Schaltregel angenommen. Die Schaltjahre werden, wie bisher, jene Jahre sein, die restlos durch 4 dividiert werden können; eine Ausnahme bilden, wie im Gregorianischen Kalender, die Säkularjahre, die aber nur dann Schaltjahre sein werden, wenn die Anzahl ihrer Jahrhunderte, durch 9 dividiert, den Rest 2 oder 6 ergibt. Es werden also von den kommenden Säkularjahren nur die Jahre 2000, 2400, 2900, 3300 u. s. f. Schaltjahre sein. Diese Schaltregel bewirkt folgendes. Ein Auseinandergehen vom Gregorianischen Kalender wird erst im Jahre 2800

stattfinden, Der neue Kalender weist in 9 Jahrhunderten 7 Tage weniger als der Julianische auf, weshalb die mittlere Länge seines Jahres in Tagen

$$365,25 - \frac{7}{900}$$

beträgt, d. h. 365, 24222 Tage oder $365^d 5^h 48^m 48^s$, sich also nur um 2 Sekunden von der gegenwärtigen Länge des tropischen Jahres unterscheidet.

DRITTER ABSCHNITT

Säkulare Wanderungen der Drehpole der Erde

KAPITEL IX

Das Polwanderungsproblem und seine mathematische Erfassung

§ 53. Geschichtliches. Die klassische Theorie der Drehbewegung der Erde ist aus der Voraussetzung der Starrheit des Erdkörpers entstanden. Obwohl eine solche Annahme nur unvollständig der Wirklichkeit entsprach, war diese Theorie, wie im vorhergehenden Abschnitt dargetan, imstande, die astronomisch festgestellten Eigentümlichkeiten der Drehbewegung der Erde, die Präzession und die astronomische Nutation der Erdachse, auf das befriedigendste zu erklären und mathematisch exakt darzustellen. Kein Wunder also, dass anderthalb Jahrhunderte seit der Begründung dieser Theorie verflossen waren, ohne dass man es unternommen hatte, an der gemachten, scheinbar wohlerprobten Annahme zu rütteln.

Erst um die Mitte des vorigen Jahrhunderts gab die aktuell gewordene Frage nach dem Zustand des Erdinnern Veranlassung zur Erörterung des Problems, wie die Präzessions- und die Nutationsbewegung der Erdachse verlaufen müssten, wenn die Erde ein flüssiges, in einer festen Schale eingeschlossenes Innere besäße. Fast sieben Jahrzehnte hat man sich mit dieser Frage befasst, um schliesslich durch die Arbeiten Oppenheim's und Poincaré's dahin zu gelangen, dass eine flüssige Erde dieselbe Präzessionsbewegung vollführen würde wie eine starre, was Schweydar auch hinsichtlich einer elastischen bewies. Es lag also keine Veranlassung

vor, die klassische Theorie durch eine neue zu ersetzen. Wohl hat die Entdeckung der Chandlerschen Periode der freien Nutation der Erdachse gezeigt, dass man dabei mit der klassischen Annahme des starren Erdkörpers kein Auslangen finden könne, doch genügte, wie bereits erwähnt, die Annahme eines festen aber elastischen Erdkörpers, um auch diese Erscheinung befriedigend zu erklären.

Durch die vorstehend angeführten glänzenden Ergebnisse der exakten Wissenschaften blieb aber eine, ja vielleicht die wichtigste Frage der Geophysik unbeantwortet. Geologische Forschungen haben nach und nach erwiesen, dass die Drehpole der Erde nicht mit deren Kruste fest verbunden sind, dass sie vielmehr im Verlauf der Erdgeschichte weite Wege auf der Erdoberfläche zurückgelegt haben. Zahlreiche Dokumente der erdgeschichtlichen Vergangenheit, namentlich jene, die uns von dem Klima der geologischen Vorzeit Kunde geben, sprechen deutlich für die Wandelbarkeit der Erdpole. So haben, um nur einige diesbezügliche Belege anzuführen, die mächtigen frühkarbonischen Kohlenvorräte Spitzbergens wohl nicht an der gegenwärtigen geographischen Breite dieser Inselgruppe sich bilden können. Dies konnte nur in den äquatorialen Regenzoneen oder jenen der gemässigten Breiten geschehen sein. Dies beweist, dass während des Karbons die Lage der Erdpole und des zugehörigen Erdäquators eine andere war als heute und dies gilt auch für die übrigen Epochen der Erdgeschichte. So haben die Geologen, soviel dies bei dem ständig sich ändernden Antlitz der Erde möglich ist, die jeweilige Lage der Erdpole Schritt für Schritt durch die Zeitalter der Erdgeschichte verfolgen und nachweisen können, dass diese Pole weite Wege auf der Erdoberfläche zurückgelegt haben.

Dieser von der Geologie aufgerollten Frage von der Wanderung der Erdpole standen die exakten Wissenschaften lange Zeit ratlos gegenüber. Die in der zweiten Hälfte des vorigen Jahrhunderts von W. Thomson, G. H. Darwin, Löffelholz von Colberg und Schiaparelli¹⁾ unternommenen Versuche, diese Frage mit Hilfe der Mechanik zu beantworten, blieben erfolglos, worüber auch Tisserand in seinem grossen Werke berichtet hat. Die angesehensten von diesen Forschern machten für die Verschiebung der Pole geologische Massenverlagerungen verantwortlich, durch welche die Lage der Trägheitspole und damit auch jene der Drehpole in Mitleidenschaft gezogen wurde. Derartige Massenverlagerungen haben während der Erdgeschichte tatsächlich stattgefunden, die quartäre Vereisung, über die noch ausführlich die Rede sein wird, ist ein Beispiel dafür. Aber selbst die durch diese Vereisung stattgefundenen Massentransporte, die uns auf den ersten Blick riesig erscheinen, waren, wie dies rechnermässig bewiesen werden kann, ganz ungenügend, um grössere Verlagerungen der Drehpole hervorzurufen. Die exakten Wissenschaften schienen also ausserstande zu sein, greifbare mechanische Ursachen für grosse Verlagerungen der Erdpole, wie solche von

¹⁾ Thomson W., *Mathem. and phys. Papers*, Vol. 3, Cambridge 1890; Vol. 5, 1911. — Darwin G. H., *On the influence of geological changes on the Earth's axis of rotation*. *Phil. Transact.* 1877. — Löffelholz von Colberg *Die Drehung der Erdkruste in geologischen Zeiträumen*. München 1886. Zweite gänzlich umgearbeitete und vermehrte Auflage, München 1886. Schiaparelli, *De la rotation de la Terre sous l'influence des actions géologiques*. Mémoire présenté à l'Observatoire de Poulkova à l'occasion de sa fête sémiséculaire. St. Petersburg 1889.

den beschreibenden Naturwissenschaften gefordert wurden, ausfindig zu machen. Der Mechanismus solcher Polwanderungen blieb trotz aller Bemühungen derart ungeklärt, dass selbst ihre Möglichkeit in Frage gestellt schien. Als deshalb im Jahre 1927 B. Gutenberg an die Herausgabe des „Handbuches der Geophysik“ schritt, sah er sich veranlasst, die ungelöst gebliebene Frage der Verlagerung der Erdpole wieder aufzugreifen und mir deren Beantwortung anzuvertrauen. Für die Klärung dieser Frage war der Abschnitt „Säkulare Polverlagerungen“ des ersten Bandes jenes Handbuches vorgesehen. In demselben habe ich vorerst die erwähnten Versuche, diese Frage zu lösen, analysiert und kritisch besprochen, um in's Reine zu gelangen, warum sie erfolglos geblieben sind. Es ergab sich dabei, dass zur Zeit als diese Versuche unternommen wurden, gewisse grundlegende geophysikalische Tatsachen nicht genügend oder gar nicht bekannt gewesen sind, und ohne Kenntnis derselben war das Problem der Polwanderungen nicht zu lösen. Also nicht Mangel an Scharfsinn und Begabung, sondern Mangel an erforderlichem Tatsachenmaterial war es, der die erwähnten Forscher an der Lösung des gestellten Problems hinderte. Es ist deshalb nicht mein persönliches Verdienst, dass ich mich vier Jahrzehnte später bei Inangriffnahme desselben Problems in einer günstigeren Lage befand als jene hervorragenden Forscher. Ich habe im Vorwort geschildert, wie ich mich mit dem zur Lösung des Problems erforderlichen Material vertraut machte, das jetzt kurz besprochen werden möge.

§ 54. Geophysikalische Tatsachen. Denkt man sich die Meeresbedeckungen der Erde entfernt, so zeigt die Oberfläche des dadurch blossgelegten Erdkörpers ein stark modelliertes Relief, in dem der schroffe Gegensatz zwischen Kontinent und Ozeanbecken deutlich in die Augen springt, weist doch die mittlere Tiefe des gesamten Weltmeeres den Betrag von rund 3800 *m* auf, während die mittlere Höhe des über den Meeresspiegel emporragenden Festlandes rund 820 *m* beträgt. Berücksichtigt man, dass die grösste bekannte Meerestiefe 10800 *m* misst, während der höchste Berggipfel den Meeresspiegel um 8840 *m* überragt, so ergibt sich daraus eine Profiltiefe des Reliefs der festen Erdoberfläche von fast 20000 *m*. Schwermessungen haben überraschenderweise ergeben, dass trotz dieser Unregelmässigkeiten der Erdoberfläche die Schwerkraft bei weitem nicht in dem zu erwartenden Masse von dem ihr nach der geographischen Breite zukommenden Normalwert abweicht, sondern dass jede kontinentale Massenanhäufung durch unterirdische Massendefekte und die an den Ozeanen in Erscheinung tretenden Massendefekte durch unterirdische Massenüberschüsse kompensiert erscheinen. Daraus muss gefolgert werden, dass die feste Erdrinde derart gelagert sei, als ob sie auf einer flüssigen Unterlage unter Wahrung des Tauchgleichgewichts schwimmen würde. Dieser Zustand hat den Namen „Isostasie“ erhalten, denn das dem archimedischen Prinzip gehorchende hydrostatische Gleichgewicht, das hier verwirklicht erscheint, rührt nicht etwa von festen, sondern von flüssigen Aggregatzustände der erwähnten Unterlage her, die unter gewissen Einschränkungen, von denen sofort die Rede sein wird, als fest zu betrachten ist. Es könnte auf den ersten Blick erscheinen, dieser hydrostatische Gleichgewichtszustand, der bereits im Clairautschen Theorem zum Ausdruck gekommen ist, sei nur das erstarrte Abbild eines sehr frühen Entwicklungsstadiums

unserer Erde, wo sie, aus ihrem astralen Zustand in jenen eines abgekühlten Himmelskörpers übergehend, sich mit einer festen Kruste zu umhüllen begann und die leichteren, zuerst erstarrten Teile derselben auf dem noch feuerflüssigen Reste geschwommen haben mussten wie Eisschollen auf dem Wasser. Einer solchen Annahme widersprechen aber triftige Argumente. Seit jener Jugendzeit der Erde ist die ganze geologische Vorzeit verflossen und während derselben hat sich das Antlitz der Erde tief verändert und ist noch immer in ständiger Wandlung begriffen. Einige dieser Veränderungen beweisen, dass jener hydrostatische Auftrieb noch immer wirksam ist. Die postglaziale Hebung Fennoskandiens, die durch die Wegräumung der während der letzten Eiszeit hier lastenden Inlandeisbedeckung zustande gekommen ist und die noch immer andauert, ist ein schlagender Beweis für die Wirksamkeit jenes hydrostatischen Druckes. Er beweist, dass die Unterlage der Kontinentaltafeln gewisse Eigenschaften flüssiger Körper besitzen muss und nicht als fest im gewöhnlichen Sinne dieses Wortes zu betrachten ist. Wie ist dies zu verstehen?

Der Begriff des starren Körpers ist ein ideeller Begriff; absolut starre Körper gibt es in Wirklichkeit nicht. Sie sind alle gegen genügend grosse Kräfte als nachgiebig zu betrachten. Wenn dabei beim Verschwinden dieser Kräfte ein fester Körper seine ursprüngliche Form wieder vollständig annimmt, wird er als vollkommen elastisch, wenn er dagegen im deformierten Zustande verbleibt, als vollkommen plastisch bezeichnet. Auch dies sind ideelle, in Wirklichkeit nie vollkommen vorhandene Eigenschaften, die nur als Grenzfälle zu betrachten sind. Von ganz besonderem Interesse sind die Eigenschaften solcher Körper, die sich gegen kurzandauernde Kräfte wie fest, gegen langandauernde wie flüssig verhalten. Man kann sie als zähflüssig, d. h. als Flüssigkeiten mit sehr grosser innerer Reibung, Viskosität, betrachten, wobei auch die kleinste Kraft, falls sie genügend lang andauert, diese Reibung zu überwinden vermag. Ein solcher Körper ist gewissermassen ein Zwischending zwischen einem festen und einem flüssigen. Das harte Pech ist ein Beispiel dafür, wie man es im Baugewerbe täglich beobachten kann. Will man ein Fass solchen, nicht angewärmten Pechs ohne Verzug entlehren, dann muss der Boden des Fasses entfernt und sein Inhalt mit Axt und Hammer zerstückelt werden, gegen deren Schläge sich das Pech wie ein harter glasformiger Körper verhält. Kippt man dagegen das geöffnete Fass um und lässt es in dieser Lage einige Tage ruhig liegen, dann fliesst aus demselben sein Inhalt allmählich von selbst heraus. Solche Körper werde ich, im Gegensatz zu den flüssigen, „fluiden“, als „fluidal“ bezeichnen. Die Fluidalität ist gewissen Körpern in natürlichem Zustande eigen, bei einigen tritt sie auf, wenn sie sehr starken Drucken unterworfen werden; auch kann man feste Körper durch Temperaturerhöhung flüssig machen.

Nach dem soeben gesagten muss die Unterlage der Erdrinde ebenfalls fluidale Eigenschaften besitzen, sonst wäre ihr erwähnter hydrostatischer Auftrieb nicht verständlich und die Erscheinung der Isostasie nicht erklärlich.

Diese von der Fluidalität ihrer Unterlage herrührende isostatische Lagerung der Erdkruste soll bei den nachstehenden Untersuchungen gebührend berücksichtigt werden. Alfred Wegener hat sie zur Grundlage seiner bekannten Theorie von der Entstehung der Kontinente und Ozeane gemacht. Sein ursprüngliches diesbe-

zügliches Grundschema war das folgende. Die Kontinente der Erde sind aus festem Baumaterial geformt, das mit dem Sammelnamen „Sial“ bezeichnet werden kann, weil Silicium und Aluminium die charakteristischen chemischen Elemente der darin vorherrschenden Gesteinsarten sind. Diese Kontinentaltafeln sind in dem fluidale Eigenschaften aufweisenden „Sima“ (nach Silicium und Magnesium) isostatisch eingebettet, welche letzteres auch den Boden der Ozeane bildet. Seit der Aufstellung dieses originellen und durch seine Einfachheit gewinnenden Schemas sind schon drei Jahrzehnte verflossen und während dieser Zeit hat es sich als notwendig erwiesen, an demselben Änderungen vorzunehmen. Das durch die neuesten Tiefseeforschungen immer deutlicher zutage tretende unregelmäßige Relief des Meeresbodens spricht gegen die Fluidalität desselben, denn in einem solchen Falle müsste seine Oberfläche eingebneter sein. Es ist deshalb anzunehmen, dass auch der Boden der Ozeane oder wenigstens weite Teile desselben ebenfalls aus festem Material gebildet sein müssten. Auch hinsichtlich der Zweiteilung des Baumaterials der Erdkruste in Sial und Sima haben sich Schwierigkeiten ergeben. Für das hier zu behandelnde mechanische Problem kommen nur die darauf bezug habenden Eigenschaften des Baumaterials der Erdkruste in Betracht, nämlich ob dasselbe unter den gegebenen Umständen als fest oder als fluidal zu betrachten ist. Weil die Fluidität auch eine Folge des im Erdinnern wirksamen Druckes oder der dort herrschenden Temperatur ist, will ich mich von den an chemische Eigenschaften gebundene oder erinnernde Bezeichnungen „Sial“ und „Sima“ freimachen und jenen Teil der Erdkruste, der als fest zu betrachten und der auf dem darunterliegenden Teil im Tauchgewicht gelagert ist, als die „isostatische Decke der Erde“, den darunterliegenden Teil als deren „fluidale Unterlage“, mitunter auch als den „fluidalen Erdkern“ bezeichnen.

Die soeben besprochenen geophysikalischen Tatsachen sollen nun zwecks weiterer Verwendung in mathematischer Sprache zum Ausdruck gelangen.

§ 55. Mathematische Erfassung des vorstehenden Tatsachenmaterials. Aus den vorstehend geschilderten Tatsachen ergibt sich das folgende physikalische Bild von dem Bau und der Beschaffenheit der Erde. Der gegen kurz andauernde Kräfte als fest, gegen langandauernde als nachgiebig zu betrachtende Erdkörper ist mit einer festen, ungleichmässig dicken, ausgedehnte Meeresbedeckungen tragenden Schicht bedeckt, die ihn ganz oder teilweise umhüllt, isostatisch auf der fluidalen Unterlage ruht und die Formänderungen, denen sie unterworfen ist, unter Wahrung des Gleichgewichts vollführt.

Denkt man sich an einer beliebigen Stelle der Erde durch ihre isostatische Decke einen vertikalen gegen Wassereinbruch geschützten, genügend weiten Schacht bis zu ihrer fluidalen Unterlage vorgetrieben, so wird wegen der geschilderten Eigenschaften des fluidalen Baumaterials der Erde dasselbe in einem solchen Schacht langsam aufsteigen bis nach genügend langer Zeit in einer bestimmten Höhe der hydrostatische Gleichgewichtszustand erreicht sein wird. Setzt man voraus, dass in dem hinsichtlich seiner Tiefe ziemlich beschränkten Bereiche, der bei den nachstehenden Untersuchungen in Betracht kommt, das fluidale Material homogen ist und eine konstante Dichte aufweist, so wird die erreichte Höhenlage des fluidalen Materials, wo immer man sich den erwähnten Schacht abgeteuft

denkt, einer und derselben Aequipotentialfläche des Schwerkraftfeldes angehören. Diese Fläche stellt, ähnlich dem Grundwasserspiegel, die theoretische Spiegelfläche des fluidalen Erdkernes dar.

Der soeben geschilderte Sachverhalt kann wie folgt geometrisch veranschaulicht werden.

Dem archimedischen Prinzip zufolge ist die Masse jedes schwimmenden Körpers gleich jener der verdrängten Flüssigkeit. Denkt man sich also die isostatische Decke der Erde samt ihren Meeresbedeckungen auf die Dichte der fluidalen Unterlage kondensiert, so werden alle durch den Gegensatz zwischen Kontinent und Ozean, Berg und Tal zum Ausdruck gelangenden Unregelmässigkeiten der Erdoberfläche verschwinden und der Erdkörper eine glatte Oberfläche erhalten. Diese Oberfläche, eine Aequiskalarfläche des Gravitations- und Fliehkräftepotentials, ist ein schwach abgeplattetes Rotationsellipsoid, dessen Meridiankurve nach den Ergebnissen des § 35 durch die Gleichung:

$$(1) \quad r = a(1 - v \sin^2 \varphi)$$

dargestellt ist, worin a den Aequatorradius des Ellipsoides, v dessen Abplattung und φ die geozentrische Breite bedeutet.

Dieses Ellipsoid kann mit grossem Vorteil bei den nachstehenden Untersuchungen als Bezugssystem benützt werden. Seiner Definition nach ist es nahe verwandt mit dem in der Geodäsie zur Anwendung gelangendem Referenzellipsoid, zu dem man dadurch gelangt, dass man die Fläche des Meeresspiegels durch die Kontinente fortgeführt sich denkt und dabei die ausserhalb desselben befindlichen Massen in das Innere zusammengedrängt sich denkt. In unserem Falle erscheint der Meeresspiegel durch die Spiegelfläche des fluidalen Erdkernes ersetzt. Ich werde das durch die Gleichung (1) dargestellte Rotationsellipsoid, zum Unterschied von dem geodätischen Ellipsoid, das geophysikalische Referenzellipsoid nennen; ich habe es in meinen früheren Schriften als das innere Referenzellipsoid bezeichnet, weil es, wie leicht ersichtlich, innerhalb des geodätischen Referenzellipsoides gelegen ist.

Bezeichnet man mit A, B, C die Trägheitshauptmomente des durch Kondensation der isostatischen Schicht entstandenen Erdkörpers, so wird wegen der vorausgesetzten Homogenität des fluidalen Materials und der axialen Symmetrie der Aequipotentialflächen

$$(2) \quad B = A$$

zu setzen sein. Das Trägheitsmoment T bezüglich einer beliebigen durch den Erdmittelpunkt hindurchgehenden Achse ζ kann wie folgt ermittelt werden. Legt man in diesen Mittelpunkt den Ursprung O des orthogonalen Koordinatensystems $X—Y—Z$, dessen Achse die Trägheitshauptachsen des auf seiner Oberfläche kondensiert gedachten Erdkörpers sind, wozu es wegen der erwähnten axialen Symmetrie nur erforderlich ist, dass die Z -Achse, die wir gegen Norden richten wollen, mit der Rotationsachse des Referenzellipsoides zusammenfällt und bezeichnet mit α, β, γ die Winkel, welche die Achse ζ mit den Koordinatenachsen einschliesst, so

ist das gesuchte Trägheitsmoment nach einem bekannten Satze der Mechanik durch den Ausdruck gegeben :

$$(3) \quad T = A \cos^2 \alpha + B \cos^2 \beta + C \cos^2 \gamma.$$

Weil für jede Achse, die mit den Koordinatenachsen die Winkel α , β , γ einschliesst,

$$(4) \quad \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

ist, bekommt man mit Berücksichtigung von (2)

$$T = A(1 - \cos^2 \gamma) + C \cos^2 \gamma,$$

d. h.

$$(5) \quad T = A + (C - A) \cos^2 \gamma.$$

Die Trägheitsmomente sind, wie im zweiten Abschnitt dieses Werkes dargestellt, ausschlaggebende dynamische Parameter, weshalb wir ihnen auch im vorliegenden Problem besondere Beachtung schenken müssen. Dabei wird es sich als vorteilhaft erweisen, die den verschiedenen durch O hindurchgehenden Achsen ζ zugeordneten Trägheitsmomente des Erdkörpers auf einer Kugel abzubilden. Denkt man sich also um den Erdmittelpunkt O eine Kugel mit einem beliebigen Radius beschrieben, dann entspricht jedem Punkte dieser Kugel eine durch diesen Punkt und durch O hindurchgehende Achse ζ und jeder solcher Achse ein bestimmter Wert des Trägheitsmoments T . Auf diese Weise erscheint jedem Punkte der Kugel ein bestimmter Wert von T zugeordnet, so dass diese zu einem sphärischen Feld des Skalars T wird. Dieses Feld ist analytisch durch die Gleichung (5) eindeutig gegeben, geometrisch kann es durch die Aequiskalarlinien, d. h. die Linien des gleichen T veranschaulicht werden. Diese Linien sind durch die Formel

$$(6) \quad A + (C - A) \cos^2 \gamma = \text{const.}$$

gegeben; sie sind Parallelkreise, wenn man die Durchstosspunkte der Achse Z mit der Sphäre als Pole betrachtet.

Kehren wir nun zu dem tatsächlichen Zustand des Erdkörpers zurück, d. h. denken wir uns die kondensiert gedachte isostatische Schale der Erde in ihren wahren Zustand zurückgeführt und fragen wir, welche Aenderungen das soeben geschilderte Feld des Trägheitsmoments T dadurch erleiden wird. Ziehen wir zu die-

sem Zwecke einen beliebigen Punkt M des geophysikalischen Referenzellipsoides in Betracht. Die Koordinaten dieses Punktes seien r , ψ , φ , wobei r den Radiusvektor, ψ die von einem beliebigen Meridiane dieses Ellipsoides gezählte Länge und φ die von der Aequatorebene des Ellipsoides gemessene Breite bedeutet, die in der Richtung gegen Norden positiv zu zählen ist. Begrenzt man an der Stelle M durch die Meridiane ψ und $(\psi+d\psi)$ und die Parallelkreise φ und $(\varphi+d\varphi)$ ein unendlich kleines Flächenelement df des Referenzellipsoides, so ist

$$(7) \quad df = r^2 \cos \varphi \, d\varphi \, d\psi.$$

Ist D die Mächtigkeit der isostatischen Decke der Erde an der in Betracht gezogenen Stelle und ϱ die Dichte des hier befindlichen Materiales, so ruht auf der Fläche df ein vertikales Elementarprisma der isostatischen Decke, dessen Masse durch

$$(8) \quad d\mu = D \cdot \varrho \cdot df$$

dargestellt ist. Dieses Prisma taucht so tief in den mit dem Referenzellipsoid begrenzten fluidalen Kern der Erde ein, wie es das archimedische Prinzip fordert. Bezeichnet also H die Tauchtiefe des Elementarprismas und ϱ_0 die Dichte der fluidalen Unterlage, so ist die verdrängte Masse derselben gleich $\varrho_0 H df$ und diese muss nach dem archimedischen Prinzip der Masse $d\mu$ gleich sein. Es ist also

$$(9) \quad \varrho_0 H = \varrho D.$$

Der Schwerpunkt des auf die Dichte ϱ_0 kondensiert gedachten Prismas lag $\frac{1}{2}H$ oberhalb seiner Basis, jetzt liegt er um $\frac{1}{2}D$ von derselben entfernt; die Zurückführung der isostatischen Schale in ihren natürlichen Zustand hat die Hebung des Schwerpunktes des Elementarprismas um die Strecke

$$(10) \quad \lambda = \frac{1}{2}(D - H)$$

zur Folge gehabt. Um diese Strecke liegt der Schwerpunkt S des Elementarprismas oberhalb des Schwerpunktes A der verdrängten fluidalen Masse, welcher letzterer Punkt auch der Auftriebspunkt genannt wird. Die Strecke λ will ich die isostatische Ueberragung nennen. Diese Strecke ist, wie dies aus den zwei vorstehenden Gleichungen folgt, auch durch den Ausdruck

$$(11) \quad \lambda = \frac{\varrho_0 - \varrho}{2\varrho_0} D$$

veranschaulicht.

Durch diese Hebung des Schwerpunktes der Masse $d\mu$ hat sich ihr Trägheitsmoment bezüglich der Achse ζ vergrößert. Diese Aenderung kann wie folgt berechnet werden. Bezeichnet r_a den Radiusvektor des Auftriebspunktes A und θ den Winkel, den dieser Radiusvektor mit der durch den Punkt O hindurchgehenden Achse ζ einschliesst, so war das Trägheitsmoment der Masse $d\mu$ vor ihrer isostatischen Erhebung und bezüglich der Achse ζ gleich $r_a^2 \sin^2 \theta d\mu$. Nach der Hebung wird das Trägheitsmoment den Wert $(r_a + \lambda)^2 \sin^2 \theta d\mu$ ausweisen, der, weil λ im Vergleich zu r_a sehr klein ist, durch $(r_a^2 + 2\lambda r_a) \sin^2 \theta d\mu$ ersetzt werden kann. Die Aenderung des Trägheitsmoments, die ich mit $d\Omega$ bezeichnen will, ist also gleich:

$$d\Omega = 2\lambda r_a \sin^2 \theta d\mu.$$

Die Gesamtänderung Ω , die das Trägheitsmoment T durch die isostatische Erhebung der ganzen isostatischen Decke der Erde erfahren hat, wird erhalten, wenn man das über die ganze Erdoberfläche sich erstreckende Integral des vorstehenden Ausdruckes bildet. Dabei kann, weil die Dicke der isostatischen Schichte im Vergleich zu den Abmessungen der Erde sehr klein ist, in der obigen Formel statt r_a der Radiusvektor r des geophysikalischen oder auch jener des geodätischen Referenzellipsoides eingesetzt werden. Aus demselben Grunde braucht auf die Aenderung, die das Gravitationsfeld der Erde durch die isostatische Erhebung erfahren hat, und die nur als eine geringfügige Störung zu betrachten ist, keine Rücksicht genommen werden. Man bekommt also:

$$(12) \quad d\Omega = 2\lambda r \sin^2 \theta d\mu.$$

Um die angegebene Integration durchzuführen, kann der folgende Weg eingeschlagen werden. Das Trägheitsmoment des Elementarprismas $d\mu$ der isostatischen Decke ist nach den soeben zugestandenen Vereinfachungen gleich $r^2 \sin^2 \theta d\mu$. Man kann deshalb, wie der Vergleich des vorstehenden Ausdruckes mit (12) lehrt, die isostatische Gesamtänderung Ω des Trägheitsmoments T auf die Weise berechnen, dass man jedes Massenelement $d\mu$ der isostatischen Decke der Erde mit dem Koeffizient $\frac{2\lambda}{r}$ behaftet und das Trägheitsmoment der derart reduzierten Massen bezüglich der Achse ζ berechnet. Dies gilt selbstverständlich auch für die Trägheits- und Deviationsmomente bezüglich der Koordinatenachsen X, Y, Z . Die Trägheits- bzw. die Deviationsmomente des elementaren Prismas $d\mu$ erfahren also durch die isostatische Erhebung nachstehende Aenderungen:

$$(13) \quad dI_1 = (y^2 + z^2) \frac{2\lambda}{r} d\mu \quad dI_2 = (z^2 + x^2) \frac{2\lambda}{r} d\mu \quad dI_3 = (x^2 + y^2) \frac{2\lambda}{r} d\mu$$

$$(14) \quad d\lambda_1 = yz \frac{2\lambda}{r} d\mu \quad d\lambda_2 = zx \frac{2\lambda}{r} d\mu \quad d\lambda_3 = xy \frac{2\lambda}{r} d\mu.$$

Diese Ausdrücke erleiden keine Veränderung, wenn man an ihnen die Substitution

$$x| - x \quad y| - y \quad z| - z$$

durchführt, was zu besagen hat, dass die vorstehenden Trägheits- und Deviationsmomente nicht geändert werden, wenn man beliebige Teile der isostatischen Schale der Erde antipodisch verlagert. Aus diesem Grunde ist es bei der Berechnung dieser Momente gestattet, eines Planiglobs der Antipoden sich zu bedienen, wie dies in nachfolgendem geschehen wird.

Führen wir in die vorstehenden Ausdrücke statt der orthogonalen die polaren Koordinaten ein! Der Zusammenhang zwischen diesen beiden Arten von Koordinaten ist durch die Gleichungen gegeben:

$$(15) \quad x = r \cos \varphi \cos \psi \quad y = r \cos \varphi \sin \psi \quad z = r \sin \varphi.$$

Benützt man dies und ausserdem (7) und (8) und setzt der kürzeren Schreibweise halber

$$(16) \quad 2\varrho D\lambda r^3 = f(\varphi, \psi),$$

wo bei gegebenen Abmessungen und Dichteverhältnissen der isostatischen Schale der Erde $f(\varphi, \psi)$ eine empirisch zu ermittelnde Funktion ist, so bekommt man:

$$(17) \quad \begin{cases} dI_1 = f(\varphi, \psi) [\cos^3 \varphi \sin^2 \psi + \sin^2 \varphi \cos \varphi] d\varphi d\psi \\ dI_2 = f(\varphi, \psi) [\sin^2 \varphi \cos \varphi + \cos^3 \varphi \cos^2 \psi] d\varphi d\psi \\ dI_3 = f(\varphi, \psi) \cos^3 \varphi d\varphi d\psi \end{cases}$$

$$(18) \quad \begin{cases} d\Lambda_1 = f(\varphi, \psi) \sin \varphi \cos^2 \varphi \sin \psi d\varphi d\psi \\ d\Lambda_2 = f(\varphi, \psi) \sin \varphi \cos^2 \varphi \cos \psi d\varphi d\psi \\ d\Lambda_3 = f(\varphi, \psi) \cos^3 \varphi \sin \psi \cos \psi d\varphi d\psi. \end{cases}$$

Durch die über die ganze Erdoberfläche sich erstreckende Integration der vorstehenden Ausdrücke bekommt man die Aenderungen $I_1, I_2, I_3, \Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$, welche die auf die Koordinatenachsen sich beziehenden Trägheits- und Deviations-

momente des ursprünglich auf seiner Oberfläche auf die Dichte ρ_0 kondensierten Erdkörpers durch die isostatische Erhebung seiner Decke erfahren haben. Hat man diese Momente ermittelt, so erscheint das vorher definierte Trägheitsmoment Ω bezüglich einer durch den Erdmittelpunkt hindurchgehenden Achse ζ , die mit den Koordinatenachsen die Winkel α , β , γ einschliesst, nach einem bekannten Satze der Mechanik durch den Ausdruck gegeben:

$$(19) \quad \Omega = I_1 \cos^2 \alpha + I_2 \cos^2 \beta + I_3 \cos^2 \gamma - 2\Lambda_1 \cos \beta \cos \gamma - \\ - 2\Lambda_2 \cos \gamma \cos \alpha - 2\Lambda_3 \cos \alpha \cos \beta.$$

Weil

$$(20) \quad x = r \cos \alpha \quad y = r \cos \beta \quad z = r \cos \gamma$$

ist, bekommt man mit Heranziehung von (15) statt (19) den Ausdruck:

$$(21) \quad \Omega = I_1 \cos^2 \varphi \cos^2 \psi + I_2 \cos^2 \varphi \sin^2 \psi + I_3 \sin^2 \varphi - \\ - \Lambda_1 \sin 2\varphi \sin \psi - \Lambda_2 \sin 2\varphi \cos \psi - \Lambda_3 \cos^2 \varphi \sin 2\psi,$$

wodurch das vorher definierte Feld des Skalars Ω eindeutig gegeben ist.

Durch die vorstehenden Ausführungen ist ein Schema des Erdkörpers gewonnen worden, das die im § 54 mitgeteilten geophysikalischen Tatsachen vollauf berücksichtigt und sich, wie man sehen wird, für die mathematische Behandlung der Polwanderungsfrage gut eignet. Ich will die Grundzüge dieses Schemas hier kurz rekapitulieren. Die Erde, als ein Ganzes aufgefasst, ist als ein fluidaler, d. h. gegen langandauernde Kräfte nachgiebiger Körper zu betrachten, der mit einer unregelmässigen, festen, elastisch biegsamen, vielleicht zerrissenen oder unvollständigen Decke umhüllt ist, die je nach dem Bedarf des hydrostatischen Gleichgewichts in ihre Unterlage teilweise eingetaucht erscheint. Wenn diese Decke auf die Dichte ihrer Unterlage kondensiert wäre, würde die Erdoberfläche vollkommen glatt sein und ein regelmässiges Ellipsoid veranschaulichen, das ich das geophysikalische Ellipsoid benannt habe und das durch die Gleichung (1) dargestellt ist. Die Trägheitshauptmomente des derart kondensiert gedachten Erdkörpers mit A , B , C bezeichnend, wobei $B=A$ ist, und dessen Trägheitshauptachsen als Koordinatenachsen benützend, wäre das Trägheitsmoment des derart gestalteten Erdkörpers in bezug auf eine beliebige durch den Erdmittelpunkt hindurchgehende, mit den Koordinatenachsen die Winkel α , β , γ einschliessenden Achse ζ durch (3) oder (5) gegeben.

Die tatsächliche aus dem Referenzellipsoid herausragende Form der isostatischen Decke der Erde hat zur Folge, dass das Trägheitsmoment der Erde bezüglich der Achse ζ nicht gleich T , sondern gleich J ist, wobei

$$(22) \quad J = T + \Omega$$

ist und Ω durch die vorstehenden Gleichungen gegeben ist. Diese Grösse stellt also den isostatischen Bestandteil des Trägheitsmomentes der Erde dar und ist von grundlegender Bedeutung bei den nachstehenden Untersuchungen.

KAPITEL X

Die dynamische Asymmetrie der Erdrinde und ihre Folgen

§ 56. Die Anomalie der Trägheitspole des Erdkörpers. Durch die vorstehenden Ergebnisse ist das Trägheitsmoment J des Erdkörpers, d. h. seines fluidalen Kerns, seiner isostatischen Hülle und ihrer Wasserbedeckungen bezüglich einer beliebigen durch den Erdmittelpunkt hindurchgehenden Achse ζ eindeutig gegeben. Dadurch ist man in die Lage versetzt, auch die Lage der Trägheitshauptachsen des Erdkörpers zu ermitteln, in bezug auf welche das Trägheitsmoment J seine extremen Werte erreicht. Die der Drehachse der Erde benachbarte Trägheitshauptachse, die dem maximalen Wert des Trägheitsmoments J entspricht, trifft die Erdoberfläche in zwei Punkten, die man als Trägheitspole der Erde zu bezeichnen pflegt. Weil ich das geophysikalische Referenzellipsoid als Bezugssystem benütze, will ich die Durchstosspunkte der erwähnten Trägheitshauptachse mit diesem Ellipsoid als die Trägheitspole des Erdkörpers bezeichnen. Es sei dabei P der nördliche, P' der südliche Trägheitspol der Erde. Die Achse des Referenzellipsoides, die mit der Z -Achse des Koordinatensystems X — Y — Z zusammenfallend angenommen war, trifft die Oberfläche des Referenzellipsoides in zwei Punkten, die ich die Referenzpole nennen will; der nördliche dieser beiden Pole sei mit F , der südliche mit F' bezeichnet.

Wegen der Isostasie der Erdrinde fallen, wie sogleich gezeigt werden wird, die Trägheitspole mit den Referenzpolen nicht zusammen, können aber von diesen, weil die isostatische Rinde im Verhältnis zu den Erdabmessungen sehr dünn ist, nur ganz wenig entfernt sein. Um die Lage der Trägheitspole — es genügt nur den nördlichen dieser beiden Pole in Betracht zu ziehen — in bezug auf die Referenzpole zu ermitteln, lasse man die vorstehend definierte Sphäre, auf der das Trägheitsmoment J abgebildet erscheint und deren Mittelpunkt im Erdmittelpunkt gelegen ist, durch die Referenzpole hindurchgehen, lege durch den nördlichen Referenzpol F eine Tangentialebene an das Referenzellipsoid und jene Sphäre und fixiere in dieser Ebene ein orthogonales Koordinatensystem ξ — η , dessen Ursprung

im Punkte F gelegen ist. Jedem Punkte des sehr kleinen Bereiches dieser Sphäre, der hier in Betracht kommt, und der durch ihre Tangentialebene ersetzt werden kann, entspricht eine bestimmte durch den Erdmittelpunkt hindurchgehende Achse ζ und dieser ein bestimmter Wert des Trägheitsmomentes J des Erdkörpers. Der gesuchten Trägheitshauptachse bzw. dem gesuchten Trägheitspol entspricht der maximale Wert von J , weshalb seine Lage aus den Gleichungen:

$$\frac{\partial J}{\partial \xi} = 0 \qquad \frac{\partial J}{\partial \eta} = 0$$

zu ermitteln ist. Man bekommt also mit Rücksicht auf (22) die folgenden für die Ermittlung des Trägheitspoles dienenden Gleichungen:

$$(23) \qquad \frac{\partial T}{\partial \xi} + \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} = 0 \qquad \frac{\partial T}{\partial \eta} + \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} = 0.$$

Weil sich der Trägheitspol T in der nächsten Nähe des Referenzpoles F , also in jener des Ursprunges unseres Koordinatensystems $\xi-\eta$ befindet, sind dessen Koordinaten, die wir nach dem Winkel, den der Radiusvektor der zugehörigen Punkte der Achse ξ bzw. η mit der Z -Achse einschliesst, in Bogenmass messen wollen, sehr klein. Man bekommt also, wenn man die in (23) vorkommenden Funktionen T und Ω in Maclaurinsche Reihen entwickelt und die höheren Potenzen von ξ und η wegen ihrer Kleinheit vernachlässigt, die nachstehenden Gleichungen:

$$(24) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial T(0,0)}{\partial \xi} + \xi \frac{\partial^2 T(0,0)}{\partial \xi^2} + \frac{\partial \Omega(0,0)}{\partial \xi} + \xi \frac{\partial^2 \Omega(0,0)}{\partial \xi^2} = 0 \\ \frac{\partial T(0,0)}{\partial \eta} + \eta \frac{\partial^2 T(0,0)}{\partial \eta^2} + \frac{\partial \Omega(0,0)}{\partial \eta} + \eta \frac{\partial^2 \Omega(0,0)}{\partial \eta^2} = 0. \end{array} \right.$$

Es folgt aus (5)

$$(25) \qquad \frac{\partial T}{\partial \gamma} = -(C-A) \sin 2\gamma \qquad \frac{\partial^2 T}{\partial \gamma^2} = -2(C-A) \cos 2\gamma.$$

Weil vom Ursprung F des Koordinatensystems $\xi - \eta$, also von der Z -Achse gemessen, die Bogendifferentiale $\partial \xi$ und $\partial \eta$ dasselbe darstellen, was $\partial \gamma$ ist, so wird wegen (25)

$$\frac{\partial T(0,0)}{\partial \xi} = \frac{\partial T(0,0)}{\partial \eta} = \frac{\partial T(0,0)}{\partial \gamma} = 0$$

$$\frac{\partial^2 T(0,0)}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2 T(0,0)}{\partial \eta^2} = \frac{\partial^2 T(0,0)}{\partial \gamma^2} = -2(C-A).$$

Berücksichtigt man überdies, was sich bei der späteren numerischen Berechnung ergeben wird, dass die Grössen $\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \xi^2}$, $\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \eta^2}$ im Vergleich zu $2(C-A)$ sehr klein sind, also vernachlässigt werden können, so bekommt man statt (24) die Gleichungen:

$$(26) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi = \frac{1}{2(C-A)} \cdot \frac{\partial \Omega(0,0)}{\partial \xi} \\ \eta = \frac{1}{2(C-A)} \cdot \frac{\partial \Omega(0,0)}{\partial \eta} \end{array} \right.$$

durch die die Lage des Trägheitspoles in bezug auf den Referenzpol dargestellt ist.

Durch die Gleichung (21) war das Feld $\Omega(\varphi, \psi)$ des Skalars Ω auf der oben angegebenen Sphäre abgebildet. Geht man zwecks Abbildung des sehr kleinen um den Referenzpol gelegenen Bereiches des Skalars Ω von der Sphäre auf ihre Tangentialebene über und richtet die Achse ξ des dabei benützten Koordinatensystems $\xi-\eta$ derart, dass sie den nullten Meridian tangiert, so erhält man die Schnittlinie des Feldes $\Omega(\varphi, \psi)$ mit der ξ -Achse, wenn man in (21) $\psi=0$; $\varphi=\frac{\pi}{2}-\xi$ setzt. Diese Schnittlinie ist also durch die Gleichung gegeben:

$$\Omega(\xi, 0) = I_1 \sin^2 \xi + I_3 \cos^2 \xi - \Lambda_2 \sin 2\xi.$$

Die Schnittlinie des Feldes $\Omega(\varphi, \psi)$ mit der η -Achse wird erhalten, wenn man in (21) $\psi=\frac{\pi}{2}$; $\varphi=\frac{\pi}{2}-\eta$ setzt; sie ist also durch die Gleichung gegeben:

$$\Omega(0, \eta) = I_2 \sin^2 \eta + I_3 \cos^2 \eta - \Lambda_1 \sin 2\eta.$$

Es ist deshalb

$$\frac{\partial \Omega(\xi, 0)}{\partial \xi} = I_1 \sin 2\xi - I_3 \sin 2\xi - 2\Lambda_2 \cos 2\xi$$

$$\frac{\partial \Omega(0, \eta)}{\partial \eta} = I_2 \sin 2\eta - I_3 \sin 2\eta - 2\Lambda_1 \cos 2\eta,$$

d. h.

$$\frac{\partial \Omega(0,0)}{\partial \xi} = -2\Lambda_2 \quad \frac{\partial \Omega(0,0)}{\partial \eta} = -2\Lambda_1.$$

Setzt man dies in (26) ein, so bekommt man:

$$\xi = -\frac{\Lambda_2}{C-A} \quad \eta = -\frac{\Lambda_1}{C-A}.$$

Dies sind die Koordinaten des Trägheitspoles des Erdkörpers in bezug auf den Referenzpol; ich will sie mit α_1 und α_2 bezeichnen. Es ist also

$$(27) \quad \alpha_1 = -\frac{\Lambda_2}{C-A} \quad \alpha_2 = -\frac{\Lambda_1}{C-A}.$$

Der absolute Betrag der in Bogenmass gemessenen Entfernung des Trägheitspoles vom Referenzpole ist gleich:

$$(28) \quad \alpha = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} = \frac{\sqrt{\Lambda_1^2 + \Lambda_2^2}}{C-A}.$$

Diese Grösse will ich die Anomalie des Trägheitspoles nennen; sie kann nur dann Null werden, wenn Λ_1 und Λ_2 zugleich Null sind, d. h. wenn die Achse des Referenzellipsoides die Hauptachse des isostatischen Bestandtheiles des Trägheitsmomentes der Erde ist. Dies ist nur bei einer ganz besonderen Lage der isostatischen Decke der Erde auf ihrem fluidalen Kern möglich, sonst hat die Anomalie des Trägheitspoles immer einen endlichen Wert. Durch dieses Ergebnis gelangt die dynamische Asymmetrie des Erdkörpers zum deutlichen, mathematisch erfassten Ausdruck. Der im § 53 bereits erwähnte Löffelholz von Colberg, ein ehemaliger österreichischer Artillerieoffizier, hat aus der gewaltigen Erhebung der Kontinente über dem Meeresspiegel mit genialer Intuition auf eine solche Asymmetrie geschlossen, war aber nicht in der Lage, diese mathematisch zu erfassen und für das Rotationsproblem der Erde zu verwerten. Diese Anomalie spielt die Rolle der Triebfeder im Mechanismus der Polwanderungen.

§ 57. Die dynamische Anpassung des Erdkörpers. Wie im § 36 gezeigt, erfolgt die kräftefreie Drehbewegung der Erde derart, dass der Rotationspol der Erde während der Periode T , die je nachdem man den Erdkörper als starr oder als elastisch annimmt, eine Dauer von 305 bzw. 430 Sterntagen aufweist, einen vollen Umlauf auf seiner kreisförmigen um den Trägheitspol geschlungenen Bahn vollführt. Weil es sich jetzt um die Erforschung der säkularen Verlagerungen des

Rotationspoles handelt, kann diese ganz unbedeutende kurzperiodische Bewegung ausser Acht gelassen werden, indem man dem Rotationspole seine mittlere der erwähnten Periode entsprechende Lage zuweist. Diese mittlere Lage ist aber, weil die Bahnkurve des Rotationspoles um den Trägheitspol ein Kreis ist, der Trägheitspol selbst. Dieser mittlere Rotationspol weist nach den Ergebnissen des vorhergehenden Paragraphen einen endlichen Abstand vom Referenzpol auf. Dieser Umstand wird zu Folge haben, dass der mit dem Referenzellipsoid begrenzte fluidale Erdkern deformierenden Kräften ausgesetzt sein wird und diesen mit der Zeit auch

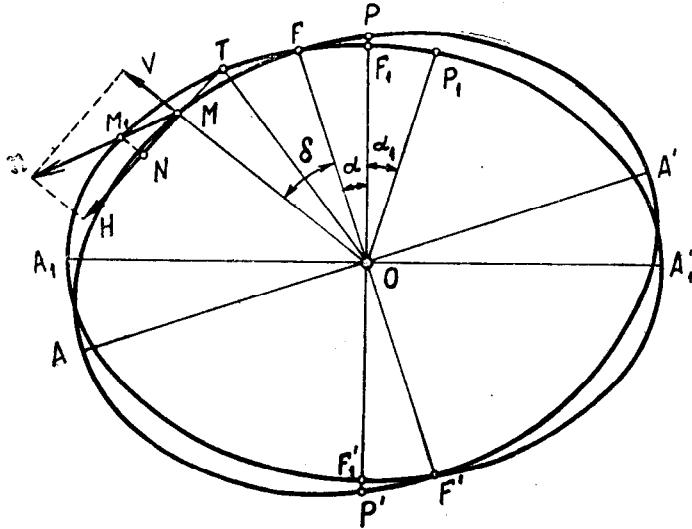


Fig. 23

nachgeben wird, seine isostatische Decke in Mitleidenschaft ziehend. Dieser Vorgang, auch Anpassung des Erdkörpers genannt, kann auf die einfachste Weise mathematisch wie folgt beschrieben werden, wobei wir unsere Betrachtungen auf jenen Meridianschnitt des Referenzellipsoides beschränken wollen, in dem der erwähnte mittlere Drehpol der Erde gelegen ist, weil in diesem Meridianschnitt die deformierenden Kräfte ihren Grösstwert erreichen. Weil infolge seiner Anpassung der Erdkörper seine Form langsam aber ständig ändert, soll den nachstehenden Betrachtungen ein beliebiger Zeitpunkt t der Erdgeschichte als Ausgangspunkt gewählt werden.

Seien in der Fig. 23 die dem Zeitpunkt t entsprechenden dynamischen Verhältnisse veranschaulicht. AA' und FF' seien die Hauptachsen des den Referenzpol F und den mittleren Drehpol P enthaltenden Meridianschnittes des Referenzellipsoides. Die Polargleichung dieses Meridianschnittes ist die eingangs mitgeteilte Gleichung (1).

Die Kräftefunktion der Gravitations- und Fliehkräfte des Erdkörpers ist durch den Ausdruck (125) des zweiten Abschnittes dieses Buches veranschaulicht, wobei das zugehörige Koordinatensystem $X-Y-Z$ mit den Hauptachsen des Referenzellipsoides zusammenfallend angenommen worden ist, auf welches sich auch die

Gleichung (1) bezieht. Im vorliegenden Falle fällt die Drehachse des Erdkörpers nicht mit der Z-Achse zusammen, sondern schliesst mit derselben den im vorigen Paragraphen ermittelten Winkel α ein. Aus diesem Grunde wird das letzte, die Funktion der Fliehkräfte darstellende Glied des Ausdruckes (125), welches, wenn man statt der geozentrischen Breite deren Komplement, die Poldistanz $\delta = \frac{\pi}{2} - \varphi$, einführt, durch den Ausdruck $\frac{n^2 r^2}{2} \sin^2 \delta$ dargestellt ist, infolge der bestehenden Anomalie α eine Aenderung erfahren, die durch

$$\Delta W = \frac{\partial}{\partial \delta} \left(\frac{n^2 r^2}{2} \sin^2 \delta \right) \alpha,$$

dargestellt sein wird, weil sich die Poldistanz δ des Punktes M , die in der Richtung PF vom Referenzpole zu messen ist, um den sehr kleinen Winkel α vergrössert hat und weil die zugehörige Aenderung des Radiusvektors r nicht im Betracht gezogen werden muss. Es ist also

$$(29) \quad \Delta W = \alpha \frac{n^2 r^2}{2} \sin 2\delta.$$

Durch diese Aenderung der Kräftefunktion wird eine auf die im Punkte M des Referenzellipsoides befindliche Masseneinheit wirkende Kraft \mathfrak{R} erzeugt. Grösse und Richtung dieser Kraft können wie folgt ermittelt werden. Weil diese Kraft in dem in Betracht gezogenen Meridianschnitt gelegen ist, kann sie in eine in die Richtung des wachsenden r und eine darauf senkrechte gegen den Aequator gerichtete Komponente zerlegt werden. Bezeichnet man diese Komponenten mit V bzw. H , so ist

$$V = \frac{\partial}{\partial r} \Delta W \quad H = \frac{\partial}{\partial n} \Delta W,$$

wobei das Element dn der Normalen auf r durch $dn = r \delta \delta$ ersetzt werden kann, so dass es ist:

$$H = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \delta} \Delta W.$$

Man bekommt also mit Benützung von (29):

$$(30) \quad \begin{cases} V = a n^2 r \sin 2 \delta \\ H = a n^2 r \cos 2 \delta . \end{cases}$$

Die durch die Anomalie des Trägheitspoles hervorgerufenen Fliehkräfte werden das Bestreben haben, den fluidalen Erdkern zu deformieren. Die Art und Weise dieser Deformation ist aus den vorstehenden Gleichungen sofort ersichtlich. Weil, wie angegeben, die Poldistanz δ von der Achse OF aus in dem dem Umlauf des Uhrzeigers entgegengesetzten Sinne von 0° bis 360° zu messen ist, so ist im ersten und dritten Quadranten, denen die Teile FA und $F'A'$ des in Fig. 23 dargestellten Meridianschnittes des Referenzellipsoides angehören, nach (30) die Vertikalkomponente V der Kraft \mathfrak{R} positiv, weshalb diese Kraft nach oben gerichtet ist und das Bestreben haben wird, am Referenzellipsoid Ausbuchtungen zu erzeugen; im zweiten und vierten Quadrant, denen die Teile AF' und $A'F$ des Meridianschnittes angehören, ist diese Kraft nach unten gerichtet und wird das Bestreben haben das Ellipsoid einzudrücken. Der Erdkörper wird, weil er sich um die Rotationsachse OP dreht, jener Gleichgewichtsform zustreben, die nach dem Clairaut'schen Theorem ein Rotationsellipsoid mit der Achse OP ist, dessen Meridianschnitt in der Fig. 23 durch die mit ihren Achsen A_1A_1' und F_1F_1' gekennzeichnete Ellipse ist. Dadurch wird der Refenzpol nach und nach aus der Lage F in die Lage F_1 gelangen. Um die Frage beantworten zu können, wie sich durch diesen Vorgang die Lage des Referenzpoles in bezug auf die Erdrinde verändert hat, muss vorher untersucht werden, welche Folgen die soeben geschilderte Anpassung des fluidalen Erdkernes auf seine isostatische Hülle und ihre Lage auf demselben haben müsse. Ziehen wir zu diesem Zwecke das vor der Anpassung an der Stelle M des Referenzellipsoides befindliche elementare Teilchen der isostatischen Decke der Erde in Betracht. Die Anpassung wird dieses Teilchen in der Richtung der Kraft \mathfrak{R} verschieben, bis es im Punkte M_1 der dem neuen Gleichgewichts-

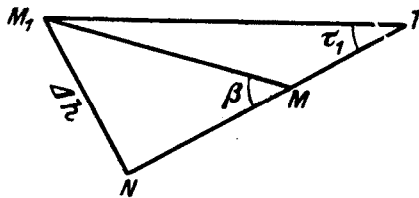


Fig. 24

zustand angepassten Oberfläche des Referenzellipsoides seine Endlage erreichen wird. Um diese Lage in bezug auf den ursprünglichen und den neuen Referenzpol zu ermitteln, beschreibe man mit dem Radius OM den Bogen MT , dessen Zenitwinkel MOT gleich ist der Anomalie a des Trägheitspoles. Um diesen Winkel erscheint die ursprüngliche Meridiankurve des Referenzellipsoides nach rechts ge-

dreht, so dass die neue Meridiankurve durch den Punkt T hindurchgehen muss. Weil der Bogen MT wegen der Kleinheit des Winkels α sehr klein ist, kann er durch die auf OM senkrecht stehende gerade Strecke MT ersetzt werden. Ersetzt man den ebenfalls sehr kurzen Bogen TM_1 der Meridianellipse durch die im Punkte T an die Meridianellipse gezogene Tangente, so bekommt man das in Fig. 24 abgebildete Dreieck MTM_1 . In demselben stellt der Winkel MTM_1 , der mit τ_1 bezeichnet werden möge, jenen Winkel dar, den die Tangente der Meridianellipse mit der auf dem zugehörigen Radiusvektor errichteten Normalen einschliesst. Die Gleichung dieser Ellipse ist durch (1) veranschaulicht. Der Winkel τ , den die Tangente dieser Ellipse mit dem Radiusvektor einschliesst, ist durch die für alle ebene Kurven gültige Gleichung:

$$\operatorname{tang} \tau = \frac{r}{r'}$$

gegeben, worin r' die Ableitung des Radiusvektors r nach der Amplitude bedeutet. Der Winkel τ_1 , den die Tangente mit der Normalen des Radiusvektors einschliesst, ist gleich dem Komplement des Winkels τ , weshalb

$$(31) \quad \operatorname{tang} \tau_1 = \frac{r'}{r} = \frac{1}{r} \frac{dr}{d\delta}$$

ist. Zieht man die Gleichung (1) heran und führt in dieselbe als Amplitude statt der geozentrischen Breite φ die Poldistanz $\delta = \frac{\pi}{2} - \varphi$ ein, so wird:

$$(32) \quad r = a(1 - \nu \cos^2 \delta)$$

$$\frac{dr}{d\delta} = a \nu \sin 2\delta.$$

Es ist deshalb

$$(33) \quad \operatorname{tang} \tau_1 = \frac{\nu \sin \delta}{1 - \nu \cos^2 \delta}.$$

Verlängert man TM bis zum Fusspunkt N der auf diese Strecke aus M_1 gefällten Normalen, dann stellen NM_1 bzw. MN die beiden Komponenten der Verrückung MM_1 dar, die erstere, die mit Δh bezeichnet werden möge, veranschaulicht die Verrückung in der Richtung des Radiusvektors r , die zweite, die mit $\Delta \xi$ bezeichnet und in Bogensmass gemessen werden soll, stellt die Verrückung in der auf dem Radiusvektor senkrechten Richtung dar. Dieselbe Richtungen weisen die

Komponenten V und H der Kraft \mathfrak{R} auf. Bezeichnet man also den Winkel NMM_1 mit β , so ist

$$(34) \quad \text{tang } \beta = \frac{V}{H}.$$

Setzt man in diese Gleichung die Ausdrücke (30) ein, so wird

$$(35) \quad \text{tang } \beta = \text{tang } 2\delta,$$

d. h.

$$(36) \quad \beta = 2\delta.$$

Es folgt aus dem Dreieck NMM_1 , in dem NM_1 gleich Δh und NM gleich $r\Delta\xi$ ist, weil $\Delta\xi$ in Bogenmass gemessen war,

$$\Delta h = r\Delta\xi \text{ tang } \beta,$$

und aus dem Dreieck NMT_1 , weil $MT = r\alpha$ ist,

$$\Delta h = r(\Delta\xi + \alpha) \text{ tang } \tau_1.$$

Löst man diese Gleichungen nach $\Delta\xi$ und Δh auf, so wird

$$(37) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta\xi = \frac{\text{tang } \tau_1}{\text{tang } \beta - \text{tang } \tau_1} \alpha \\ \Delta h = r \frac{\text{tang } \beta \text{ tang } \tau_1}{\text{tang } \beta - \text{tang } \tau_1} \alpha. \end{array} \right.$$

Setzt man in diese Formeln die Ausdrücke (33) und (35) ein, so sind die gesuchten Komponenten der Verrückung gefunden. Dabei ist folgendes zu beachten. Die Abplattung ν des geophysikalischen Referenzellipsoides kann sich, weil die isostatische Decke der Erde sehr dünn ist, nur wenig von der Abplattung des geodätischen Ellipsoides unterscheiden, für die im § 35 der Wert $\nu = \frac{1}{298}$ angegeben worden ist. Deshalb kann im Nenner des Ausdruckes (33) das Glied $\nu \cos^2 \delta$ neben der dort auftretenden Einheit vernachlässigt werden. Auf diese Weise bekommt man:

$$\Delta\xi = \frac{\nu \cos 2\delta}{1 - \nu \cos 2\delta} \alpha$$

$$\Delta h = r \frac{\nu \sin 2\delta}{1 - \nu \cos 2\delta} \alpha.$$

Man kann auch hier das Glied $\nu \cos 2\delta$ neben der Einheit unterdrücken und man bekommt schliesslich:

$$(38) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta\xi = \nu \alpha \cos 2\delta \\ \Delta h = \nu r \alpha \sin 2\delta. \end{array} \right.$$

Dabei erscheint $\Delta\xi$ im Bogenmass Δh in linearem Mass gemessen.

Diese Verrückungen des Punktes M der isostatischen Decke der Erde betreffen nur jenen Meridianschnitt des Referenzellipsoides, in welchem der Drehpol der Erde gelegen ist; ausserhalb dieses Meridianes werden sie immer kleiner, um in senkrecht stehendem Meridiane gänzlich zu verschwinden. Diese Verrückungen sind also Funktionen der geographischen Koordinaten φ und ψ oder, falls man sich auf den erwähnten Hauptschnitt beschränkt, Funktionen der Poldistanz δ . Gemäss den durch die Fig. 23 festgelegten Bezeichnungen sollen die Grössen α und δ in entgegengesetzter Richtung gezählt werden, so dass der Rotationspol P im vierten Quadrant von δ , knapp vor dem Werte $\delta = 360^\circ$ anzunehmen ist.

Die vertikale Verrückung Δh ist gleich der an der betreffenden Stelle stattgefundenen durch die Deformation des fluidalen Erdkernes hervorgerufenen Erhebung der Spiegelfläche dieses Kernes, denn diese ist, weil sich diese Spiegelfläche um $\delta = \alpha$ gedreht hat, nach (32) durch

$$\Delta h_1 = \frac{dr}{d\delta} \alpha = a \nu \alpha \sin 2\delta$$

oder, falls man in (32), wie es oben geschehen ist, $\nu \cos^2 \delta$ neben der Einheit unterdrückt, durch

$$\Delta h_1 = \nu r \alpha \sin 2\delta$$

veranschaulicht, so dass $\Delta h_1 = \Delta h$ ist.

Die horizontale Verrückung $\Delta\xi$ des Punktes M der isostatischen Decke ist eine Funktion der Poldistanz δ ; sie ist positiv, also der der Bewegung des Uhrzeigers entgegengesetzten Richtung, für die Intervalle $\delta = 0$ bis $\delta = 45^\circ$; $\delta = 135^\circ$

bis $\delta=225^\circ$; $\delta=315^\circ$ bis $\delta=360^\circ$, sonst ist sie negativ, wie dies durch die Fig. 25 veranschaulicht erscheint. In den mit einem Ring gekennzeichneten Punkten, in welchen ein Richtungswechsel der Verrückung stattfindet, ist sie gleich Null.

Diese horizontale Verrückung ist selbst an jenen Stellen, wo sie ihre extremen Werte $\nu\alpha$ oder $-\nu\alpha$ erreicht, wegen des Faktors ν sehr klein. Während sich also der Referenzpol um die in Bogenmass gemessene Strecke $FF_1 = a$ verlagert hat, hat sich der Punkt M höchstens nur um den dreihundertsten Teil jener Ver-

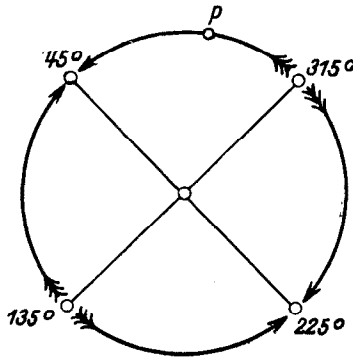


Fig. 25

rückung verschoben. Diese Verrückung ist gegenüber jener Verlagerung sehr klein, so dass gesagt werden kann, der Anpassungsvorgang ändert die horizontale Konfiguration der isostatischen Decke nur unmerklich; unter derselben gleitet der Referenzpol nach Massgabe der Anomalie α . Ist er durch den soeben geschilderten Anpassungsvorgang aus der Stellung F in Stellung F_1 gelangt, so wird dieser neuen Lage des Referenzpols in bezug auf die isostatische Decke der Erde ein neuer Wert α_1 der Anomalie des Trägheitspols entsprechen, also eine neue Lage P_1 des mittleren Rotationspols. Infolgedessen wird eine neue Anpassung des Erdkörpers an die neue Lage des Drehpols beginnen. Dieser Anpassungsvorgang kann nur dann zum Stillstand gelangen, wenn die durch (28) dargestellte Anomalie gleich Null wird, d. h. wenn der Rotationspol auf seinem Weg den Trägheitspol des Feldes Ω erreicht hat.

Dieser Vorgang wird im nachstehenden Kapitel seine mathematische Beschreibung erfahren, vorher will ich über die in der isostatischen Decke der Erde durch den Anpassungsvorgang hervorgerufenen Spannungen kurz berichten, wobei ich mich auch diesmal auf den erwähnten Meridianschnitt der maximalen Spannungen beschränken will.

An der Stelle M , der eine Poldistanz δ entspricht, erfährt der dort befindliche Teil der isostatischen Decke der Erde eine Horizontalverschiebung, die in Längenmass gemessen

$$r \Delta\xi = r \nu \alpha \cos 2\delta$$

beträgt. Unmittelbar daneben, in der horizontalen Entfernung $l=r d\delta$, erfährt die Decke die Verschiebung:

$$r(\Delta\xi + d\Delta\xi) = r\nu\alpha(\cos 2\delta - 2\sin 2\delta d\delta).$$

Die Gesamtdehnung Δl der Länge l beträgt also

$$\Delta l = -2r\nu\alpha \sin 2\delta d\delta.$$

Weil nach dem Hooke'schen Gesetz

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{\sigma}{E}$$

ist, worin σ die Zugspannung und E den Elastizitätsmodul des Materials bedeutet, so wird

$$(39) \quad \sigma = -2\nu\alpha E \sin 2\delta.$$

Diese Spannung erreicht ihre extremen Werte $2\nu\alpha E$ bzw. $-2\nu\alpha E$ an der Poldistanz $\delta = 135^\circ$ und $\delta = 315^\circ$ bzw. an der Poldistanz $\delta = 45^\circ$ und $\delta = 225^\circ$; sie sind der Abplattung des Referenzellipsoides, dem Elastizitätsmodul des Materials und der Anomalie des Trägheitspoles direkt proportional.

KAPITEL XI

Der Mechanismus der säkularen Polwanderungen

§ 58 Die vektorielle Grundgleichung der säkularen Bewegung der Erdpole. Im vorhergehenden Kapitel habe ich, um alle hier in Betracht zu ziehenden Eigentümlichkeiten des Baues der Erde und ihrer Rinde mathematisch beschreiben zu können, das geophysikalische Referenzellipsoid als Bezugssystem benützt. Nachdem auf diese Weise die erforderlichen Schlussfolgerungen hinsichtlich der Trägheitsmomente des Erdkernes und seiner isostatischen Hülle gezogen und für die weitere Behandlung des Problems der Polverlagerungen vorbereitet worden sind, kann ich nun die Erdoberfläche selbst als Bezugssystem benützen und dabei, weil die Abplattung der Erde und die Unregelmässigkeiten ihrer Rinde in den Trägheitsmomenten T und Ω , die als dynamische Parameter bei der Drehbewegung der Erde allein in Betracht kommen, bereits zum Ausdruck gekommen sind, die Erdoberfläche, unter der das mittlere Niveau der Meere zu verstehen ist, als kugelförmig voraussetzen. Diese Kugelfläche möge zu gleicher Zeit zur Abbildung des sphärischen Feldes der Trägheitsmomente T und Ω benützt werden.

Die soeben zugestandenen Vereinfachungen beeinträchtigen die Genauigkeit der Berechnung der Polbahnkurven ganz unwesentlich; die dadurch sich ergebenden geringen Abweichungen fallen auch deshalb nicht in die Wagschale, weil wir nicht in der Lage sind, genaue Angaben über die Mächtigkeit der isostatischen Decke der Erde zu machen.

Ich nehme also bei den nachstehenden Ausführungen an, die Erde sei kugelförmig, weil ihre aus der Abplattung und aus der Unregelmässigkeit ihrer Rinde sich ergebenden dynamischen Eigentümlichkeiten durch die Trägheitsmomente T und Ω bereits zum richtigen Ausdruck gebracht worden sind. Daraus ergibt sich das folgende.

Denkt man sich die Achse des geophysikalischen Referenzellipsoides gegen Norden verlängert, so trifft dieselbe die Erdoberfläche in einem Punkte F , den ich den nördlichen Figrenpol der Erde nennen will. Sieht man von der ganz gering-

fügigen freien Nutation der Erde ab, so trifft die Drehachse der Erde deren nördliche Hemisphäre in einem Punkte, der mit dem nördlichen Trägheitspol P der Erde zusammenfällt. Die gegenseitige Entfernung der beiden Punkte F und P ist sehr klein und man kann jenen Bereich der Erdoberfläche, in dem diese Punkte liegen und auf dem sich die nachstehenden Betrachtungen beziehen, als eben betrachten. Fixiert man in diesem ebenen Bereich ein mit der Erdrinde fest verbundenes orthogonales Koordinatensystem $\xi-\eta$, dessen Ursprung, wofern er dem erwähnten Bereich angehört, beliebig gewählt werden kann, so sind die beiden in die Achsen dieses Koordinatensystems fallenden Projektionen der in Bogenmass zu messenden Strecke FP nach (26) durch die Ausdrücke gegeben:

$$(40) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = \frac{1}{2(C-A)} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} \\ \alpha_2 = \frac{1}{2(C-A)} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} \end{array} \right.,$$

in welchen sich die partiellen Ableitungen auf den Punkt F beziehen. Der Ortsvektor α des Punktes P in bezug auf den Punkt F ist also durch den Ausdruck

$$(41) \quad \alpha = \alpha_1 i + \alpha_2 j$$

veranschaulicht, in dem i und j die Einheitsvektoren der Achsenrichtungen ξ und η bedeuten. Setzt man (40) in (41) ein, so wird

$$\alpha = \frac{1}{2(C-A)} \left\{ \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} i + \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} j \right\},$$

d. h.

$$(42) \quad \alpha = \frac{1}{2(C-A)} \text{ grad } \Omega.$$

Dieser Ausdruck stellt uns vektoranalytisch die Anomalie des Trägheitspols dar, die nach den Ausführungen des § 57 die Ursache des Anpassungsvorganges ist. Durch diese Anpassung wird, wie dort geschildert, der Punkt F in bezug auf die Erdrinde, also in bezug auf das Koordinatensystem $\xi - \eta$ in der Richtung des Vektors α gegen den Punkt P wandern, wodurch die Richtung seiner Bewegung, also die Richtung seines Geschwindigkeitsvektors v gegeben ist. Weil nach (30) die die Anpassung hervorrufenden Kräfte dem Betrag α der Anomalie α proportional sind und weil die Anpassungen langsam und mit Ueberwindung der Viskosität des Erdkernes vor sich geht, muss ihre Anpassungsgeschwindigkeit, also

auch die skalare Grösse der Geschwindigkeit v der Anomalie α proportional sein. Daraus folgt:

$$(43) \quad v = \kappa \alpha,$$

worin κ einen konstanten Faktor bedeutet, der der Anpassungskoeffizient des Erdkörpers genannt wird. Mit dieser Geschwindigkeit sich bewegend, würde der Figurenpol F mit dem Trägheitspol zur Koinzidenz gelangen, wenn dadurch die Anomalie α verschwinden würde. Aber diese kleine, aber endliche Grösse, die eine Funktion der Lage des Punktes F ist, kann nach (42) nur dann gleich Null werden, wenn der Gradient des skalaren Feldes Ω Null wird, und dies ist nur an jenen Stellen der Erdoberfläche möglich, in denen die Hauptachsen des Tensors Ω die Erdoberfläche durchdringen. Solange der Figurenpol F einen dieser Punkte nicht erreicht hat, wird er sich verlagern und den Trägheitspol vor sich schieben in der Richtung der Anomalie α , die der jeweiligen Lage des Punktes F auf der Erdoberfläche zugeordnet erscheint. Die beiden Punkte F und P werden sich also in einer sehr kleinen gegenseitigen Entfernung a in der Richtung des Vektors α und mit einer Geschwindigkeit v , die diesem Vektor proportional ist, einer hinter dem anderen auf der Erdoberfläche bewegen, bis sie endlich ihre gemeinsame Gleichgewichtslage, in der $\alpha = 0$ ist, erreicht haben werden. Der Ausdruck (43) stellt also die Geschwindigkeit der gemeinsamen Bewegung dieser zwei Punkte in bezug auf die feste Erdoberfläche dar. Weil, wie im vorigen Paragraphen gezeigt, der mittlere Drehpol der Erde mit dem Trägheitspol zusammenfällt, stellt uns die Grösse v die Geschwindigkeit der Bewegung des mittleren Drehpoles, also der säkularen Bewegung des Rotationspoles der Erde in bezug auf die Erdoberfläche dar.

Es folgt aus (42) und (43), wenn der kürzeren Schreibweise halber gesetzt wird,

$$(44) \quad \frac{\kappa}{2(C-A)} = n,$$

worin n eine Konstante bedeutet, als Endergebnis der vorstehenden Betrachtungen:

$$(45) \quad v = n \text{ grad } \Omega.$$

Dies ist die vektorielle Grundgleichung der säkularen Polbewegung.

Aus der Gleichung (45) folgt das grundlegende Theorem hinsichtlich der säkularen Polbewegung:

Der Geschwindigkeitsvektor der säkularen Polbewegung ist in jedem Punkte der Polbahn proportional dem Gradient des Feldes Ω .

Dieses Theorem kann wie folgt geometrisch gedeutet werden. Weil der Geschwindigkeitsvektor v der säkularen Polbewegung auch die Tangente der Polbahn veranschaulicht und in jedem Punkte dieser Bahn mit dem Gradient von Ω

zusammenfällt, ist die Bahnkurve des Drehpoles eine der Vektorlinien des Feldes grad Ω . Welche von diesen Linien die tatsächliche Bahnkurve des Poles veranschaulicht, ist durch die gegenwärtige Lage des Drehpoles, durch die ein Punkt der Polbahn gegeben ist, eindeutig beantwortet.

Nach einer allgemeinen Eigenschaft des Gradienten kreuzen die Vektorlinien des Feldes grad Ω unter geradem Winkel die Linien des gleichen Ω , sind also orthogonale Trajektorien der Linien gleichen Trägheitsmomentes Ω . Daraus ergibt sich das folgende geometrische Bild der Polwanderungen. Um zu ihrer stabilen Lage zu gelangen, muss die auf dem fluidalen Erdkern isostasisch gelagerte Decke der Erde so lange die anpassenden Deformationen des Erdkernes mitmachen, bis der Trägheitspol des Feldes Ω mit dem Figurenpol der Erde zusammenfällt. Bei dieser Bewegung verzeichnet der Drehpol auf der Erdrinde eine Linie, die mit der Fall-Linie einer topographischen Fläche verglichen werden kann. So wie diese Fall-Linie die Schichtenlinien der topographischen Fläche, d. h. die Linien des gleichen Schwerkraftpotentials, senkrecht kreuzt, so verläuft die Polbahnkurve senkrecht zu den Linien des gleichen Trägheitsmomentes Ω . Anders gesprochen: die Erdrinde fällt relativ zum Drehpol nach der Linie des steilsten Gefälles von Ω . Aus dieser jetzt leicht verständlichen Eigenschaft der Polbahnkurve folgen alle ihre weitere Eigenschaften und diese Kurve selbst; sie zu finden ist jetzt ein rein geometrisches Problem.

§ 59. Periodische Glieder der Polbahnbewegung. Ich habe vorstehend die Voraussetzung gemacht, der Drehpol P falle mit dem Trägheitspol T zusammen. Diese Annahme erscheint bei der gegenwärtigen Entfernung dieser beiden Pole, die den Betrag von $10 m$ nicht übersteigt, vollauf berechtigt, doch muss die

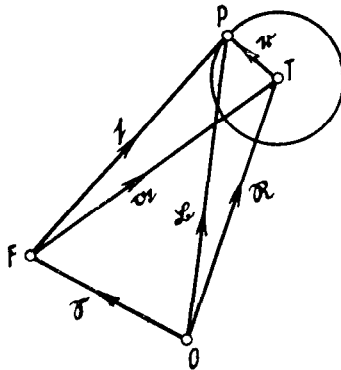


Fig. 26

Frage gestellt werden, ob dies auch für die lange Vergangenheit zutrifft, auf die ich meine Untersuchungen zu erstrecken gedenke. Ich will deshalb die Voraussetzung von dem Zusammenfallen des Trägheitspoles und des Drehpoles fallen lassen, um die Folgen des Anpassungsvorganges zu untersuchen für den Fall, dass diese Pole einen endlichen gegenseitigen Abstand aufweisen.

Sei also (Fig. 26) T der nördliche Trägheitspol, P die augenblickliche Lage des nördlichen Drehpoles der Erde, der nach dem in § 37 gesagten eine Kreisbahn um T beschreibt mit einer Umlaufzeit T , die rund 430 Sterntage beträgt. Sei F der geophysikalische Referenzpol. Diese drei Punkte können als in einer horizontalen Ebene befindlich angenommen werden. Man wähle in dieser Ebene einen mit der Erdrinde, welche als Bezugssystem dienen soll, fest verbundenen Aufpunkt O und bezeichne die Ortsvektoren der Punkte P, T, F bezüglich dieses Punktes mit $\mathfrak{B}, \mathfrak{A}, \mathfrak{G}$; der Ortsvektor von P in bezug auf T sei mit r bezeichnet. Setzt man noch

$$(46) \quad \frac{2\pi}{T} = k,$$

so ist die Umlaufgeschwindigkeit v_r des Rotationspoles P um den Trägheitspol T durch den Ausdruck:

$$(47) \quad v_r = k [k r],$$

veranschaulicht, worin k den auf der Ebene FTP normalen gegen Norden gerichteten Einheitsvektor bedeutet.

Infolge der bei der Anpassung des Erdkörpers sich kundgebenden Kräfte wird der Referenzpol F in der Richtung FP geschoben erscheinen und dessen resultierende Geschwindigkeit durch den Ausdruck:

$$(48) \quad v = \varkappa s$$

dargestellt sein, wobei \varkappa den Anpassungskoeffizient und s den Ortsvektor des Punktes P in bezug auf den Punkt F zu bedeuten hat. Der Ortsvektor von T in bezug auf F stellt die Anomalie α des Trägheitspoles dar. Es folgt aus den obigen Feststellungen und Bezeichnungen:

$$(49) \quad s = \alpha + r$$

$$(50) \quad \mathfrak{A} = \mathfrak{G} + \alpha$$

$$(51) \quad \mathfrak{B} = \mathfrak{G} + \alpha + r.$$

Die augenblicklichen Geschwindigkeiten v und v_r des Referenzpoles bzw. des Rotationspoles sind durch die nachstehenden Ausdrücke gegeben:

$$(52) \quad v = \frac{d\mathfrak{G}}{dt}$$

$$(53) \quad v_r = \frac{d\mathfrak{B}}{dt}.$$

Es folgt durch Differentiation der Gleichungen (50) und (51) nach der Zeit t

$$(54) \quad \frac{d\mathfrak{R}}{dt} = \frac{d\mathfrak{G}}{dt} + \frac{da}{dt}$$

$$(55) \quad \frac{d\mathfrak{B}}{dt} = \frac{d\mathfrak{G}}{dt} + \frac{da}{dt} + \frac{dr}{dt},$$

d. h. mit Berücksichtigung der Gleichungen (52), (48), (53) und (47)

$$\frac{d\mathfrak{R}}{dt} = \kappa s + \frac{da}{dt}$$

$$[kr] = \kappa s + \frac{da}{dt} + \frac{dr}{dt}.$$

Setzt man in diese Gleichungen den Ausdruck (49) ein, so wird

$$(56) \quad \frac{d\mathfrak{R}}{dt} = \kappa a + \kappa r + \frac{da}{dt}$$

$$(57) \quad \frac{dr}{dt} = k[kr] - \kappa a - \kappa r - \frac{da}{dt}.$$

Bei der Ableitung der periodischen Glieder der Polbewegung kann der säkular nur langsam sich ändernde Vektor a als konstant angenommen werden, wodurch die obigen vektoriellen Gleichungen die Form erhalten:

$$(58) \quad \frac{d\mathfrak{R}}{dt} = \kappa a + \kappa r$$

$$(59) \quad \frac{dr}{dt} = k[kr] - \kappa a - \kappa r.$$

Legt man in den Bezugspunkt O den Ursprung eines orthogonalen Koordinatensystems $x-y$, dessen x -Achse parallel zu a ist, bezeichnet mit i und j die Einheitsvektoren der Achsenrichtungen x und y , mit r_1 und r_2 die Koordinaten des Vektors r und mit R_1 und R_2 jene des Vektors \mathfrak{R} , so ist, wenn α den Modul des Vektors a bedeutet,

$$\mathbf{r} = r_1 \mathbf{i} + r_2 \mathbf{j}$$

$$\mathfrak{R} = R_1 \mathbf{i} + R_2 \mathbf{j}$$

$$[\mathbf{k} \mathbf{r}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ r_1 & r_2 & 0 \end{vmatrix} = -r_2 \mathbf{i} + r_1 \mathbf{j}.$$

Man bekommt also statt der vektoriellen Gleichungen (58) und (59) die skalaren Gleichungen:

$$(60) \quad \begin{cases} \frac{dR_1}{dt} = \varkappa \alpha + \varkappa r_1 \\ \frac{dR_2}{dt} = \varkappa r_2 \end{cases}$$

$$(61) \quad \begin{cases} \frac{dr_1}{dt} = -kr_2 - \varkappa r_1 - \varkappa \alpha \\ \frac{dr_2}{dt} = kr_1 - \varkappa r_2. \end{cases}$$

Differentiert man die Gleichungen (61) nach t , so bekommt man, weil α als konstant zu betrachten ist,

$$(62) \quad \begin{cases} \frac{d^2 r_1}{dt^2} + \varkappa \frac{dr_1}{dt} + k \frac{dr_2}{dt} = 0 \\ \frac{d^2 r_2}{dt^2} + \varkappa \frac{dr_2}{dt} - k \frac{dr_1}{dt} = 0. \end{cases}$$

Setzt man, um die Integrale dieser zwei Gleichungen zu finden,

$$(63) \quad r_1 = C_1 e^{\nu t} \quad r_2 = C_2 e^{\nu t}$$

worin C_1, C_2, ν Konstanten bedeuten, so bekommt man, wenn man (63) in (62) einsetzt,

$$(64) \quad \begin{cases} (\nu + \kappa) C_1 + k C_2 = 0 \\ -k C_1 + (\nu + \kappa) C_2 = 0. \end{cases}$$

Die Ausdrücke (63) werden partikuläre Integrale von (62) darstellen, wenn die Konstanten C_1, C_2, ν die Gleichungen (64) befriedigen. Will man diese in bezug auf C_1 und C_2 homogene lineare Gleichungen nach diesen Unbekannten auflösen, so ist es erforderlich, dass die aus den Koeffizienten dieser Unbekannten gebildete Determinante gleich Null wird, d. h.

$$(65) \quad (\nu + \kappa)^2 + k^2 = 0$$

ist.

Diese Gleichung besitzt zwei Wurzeln

$$\nu_1 = -\kappa + ik \qquad \nu_2 = -\kappa - ik,$$

so dass auch durch die Ausdrücke:

$$(66) \quad \begin{cases} r_1 = A + C_1 e^{-\kappa t + i k t} + C_2 e^{-\kappa t - i k t} \\ r_2 = B + C_3 e^{-\kappa t + i k t} + C_4 e^{-\kappa t - i k t} \end{cases}$$

worin A, B, C_1, C_2, C_3, C_4 Konstanten bedeuten, die Differentialgleichungen (62) befriedigt werden können.

Mit Anwendung des bekannten Satzes von Euler

$$e^{\pm i \kappa t} = \cos kt \pm i \sin kt$$

kann man den Ausdrücken (66) die Form geben:

$$(67) \quad \begin{cases} r_1 = A + e^{-\kappa t} \{ C_1 \cos kt + C_2 \sin kt \} \\ r_2 = B + e^{-\kappa t} \{ C_3 \cos kt + C_4 \sin kt \}. \end{cases}$$

Setzt man dies in (61) ein, und verlangt, dass die dadurch erhaltenen Gleichungen identisch befriedigt erscheinen, so findet man:

$$(68) \quad \left\{ \begin{array}{l} A = -\frac{\kappa^2}{\kappa^2 + k^2} \alpha \quad B = -\frac{k\kappa}{\kappa^2 + k^2} \alpha \\ C_3 = -C_2 \quad C_4 = C_1. \end{array} \right.$$

Man bekommt auf diese Weise statt (67)

$$r_1 = -\frac{\kappa}{\kappa^2 + k^2} \kappa \alpha + e^{-\kappa t} \{C_1 \cos kt + C_2 \sin kt\}$$

$$r_2 = -\frac{k}{\kappa^2 + k^2} \kappa \alpha + e^{-\kappa t} \{-C_2 \cos kt + C_1 \sin kt\}.$$

Der Anpassungskoeffizient κ ist, wie sich dies bei der numerischen Ausrechnung der säkularen Polbewegung ergeben wird, verschwindend klein gegenüber der Winkelgeschwindigkeit k der Umlaufsbewegung des Rotationspoles um den Trägheitspol, weshalb die obigen Formeln durch die nachstehenden ersetzt werden können:

$$r_1 = e^{-\kappa t} \{C_1 \cos kt + C_2 \sin kt\}$$

$$r_2 = e^{-\kappa t} \{-C_2 \cos kt + C_1 \sin kt\}.$$

Die Konstanten C_1 und C_2 sind aus den Initialbedingungen zu ermitteln. Zählt man die Zeit t von einem der Momente, in welchem r parallel zu α ist, d. h. die Punkte F , T und P in dieser Reihenfolge einer Geraden angehören und bezeichnet den diesem Moment zugehörigen Modul von r mit r_0 , so ist für $t=0$, $r_1=r_0$; $r_2=0$ zu setzen und man bekommt $C_1=r_0$; $C_2=0$, d. h.

$$(69) \quad \left\{ \begin{array}{l} r_1 = r_0 e^{-\kappa t} \cos kt \\ r_2 = r_0 e^{-\kappa t} \sin kt. \end{array} \right.$$

Es folgt aus diesen Gleichungen, weil

$$r_1^2 + r_2^2 = r^2$$

ist, worin r die Entfernung des Rotationspoles vom Trägheitspol bedeutet,

$$(70) \quad r = r_0 e^{-\kappa t}.$$

Diese Gleichung besagt, dass die ursprüngliche Entfernung r_0 des Rotationspoles vom Trägheitspole durch den Anpassungsvorgang ständig verkleinert wird. Deshalb muss die freie Nutation der Erde auch während der Vorzeit eine Erscheinung untergeordneter Bedeutung gewesen sein und wird es auch fernerhin bleiben.

Fragen wir noch, wie die durch (69) dargestellte periodische Bewegung des Rotationspoles die Bewegung der beiden anderen Pole F und T beeinflusst.

Weil α während eines sehr langen Zeitintervalles als konstant betrachtet werden kann, so folgt aus (50) und (52)

$$\frac{d\mathfrak{R}}{dt} = \frac{d\mathfrak{S}}{dt} = v,$$

d. h. die Punkte T und F haben die gleiche Geschwindigkeit. Bezeichnet man die mit der Achse x bzw. y parallele Komponente dieser Geschwindigkeit mit v_1 bzw. v_2 , so ist:

$$v_1 = \frac{dR_1}{dt} \quad v_2 = \frac{dR_2}{dt},$$

d. h. wegen (60)

$$v_1 = \kappa\alpha + \kappa r_1 \quad v_2 = \kappa r_2.$$

Setzt man in diese Gleichungen die Ausdrücke (69) ein, so bekommt man:

$$v_1 = \kappa\alpha + \kappa r_0 e^{-\kappa t} \cos kt$$

$$v_2 = \kappa r_0 e^{-\kappa t} \sin kt.$$

Zieht man einen der Punkte F und T , den Punkt T etwa, in Betracht und bezeichnet seine Koordinaten mit x und y , so folgt aus den vorstehenden zwei Gleichungen:

$$\frac{dx}{dt} = \kappa\alpha + \kappa r_0 e^{-\kappa t} \cos kt$$

$$\frac{dy}{dt} = \kappa r_0 e^{-\kappa t} \sin kt.$$

Die Integration dieser Gleichungen liefert:

$$x = \alpha t + \frac{\alpha r_0}{k^2 + \alpha^2} \{-\alpha \cos kt + k \sin kt\} e^{-\alpha t} + C_1$$

$$y = -\frac{\alpha r_0}{k^2 + \alpha^2} \{\alpha \sin kt + k \cos kt\} e^{-\alpha t} + C_2.$$

Weil vorstehend im Nenner α^2 neben k^2 und in der Klammer α neben k vernachlässigt werden kann, so bekommt man, wenn man die Bezeichnung einführt:

$$(71) \quad \frac{\alpha}{k} r_0 = r_t$$

und als Initialbedingungen $t=0$, $x=0$, $y=0$ wählt,

$$(72) \quad \begin{cases} x = \alpha t + r_t e^{-\alpha t} \sin kt \\ y = r_t - r_t e^{-\alpha t} \cos kt \end{cases}$$

als die Bewegungsgleichungen des Trägheitspoles T .

Weil α sehr klein ist, kann man für ein sehr langes Zeitintervall $e^{-\alpha t}$ gleich eins setzen, und man bekommt:

$$x = \alpha t + r_t \sin kt$$

$$y = r_t - r_t \cos kt.$$

Eliminiert man aus diesen Gleichungen t oder fasst diese Grösse als Parameter auf, so stellen die obigen Gleichungen die Bahnkurve des Trägheitspoles dar. Diese Kurve ist, solange α grösser als r_t ist, was wegen der Kleinheit der in (71) vorkommenden Grösse r_0 , der Fall sein wird, eine verlängerte Zyloide, besser gesagt eine sehr flache Trochoide. Die Anwesenheit des Faktors $e^{-\alpha t}$ in den obigen Gleichungen wird diese Kurve ganz verflachen, so dass sie als vollständig geradlinig betrachtet werden kann. Längs dieser Linie gleitet nach Massgabe des säkularen Gliedes $x = \alpha t$ der Trägheitspol T und um denselben beschreibt der Rotationspol mit einem ständig abnehmenden und durch (70) dargestellten Radius r seine Bahn, die, solange r grösser als α ist, was wegen der Kleinheit von α der Fall sein wird, die Form einer verkürzten Trochoide aufweisen wird, wie dies auch aus den im § 37 angegebenen Ergebnissen des internationalen Breitendienstes ebenfalls ersichtlich ist.

Lässt man die hier abgeleiteten periodischen Glieder der Bewegung der drei in Betracht gezogenen Punkte ganz ausser Acht, so verbleibt nur die durch $x = \kappa \alpha t$ dargestellte säkulare Bewegung des Trägheitspoles und des Referenzpoles, wie sie bereits im vorhergehenden Paragraphen beschrieben worden ist.

§ 60. Eine andere Ableitung der Grundgleichung der säkularen Bewegung der Erdpole. Sehr bald nachdem ich die im § 58 mitgeteilte Grundgleichung abgeleitet und veröffentlicht hatte, gelang es mir, eine andere Ableitung dieser Grundgleichung zu finden, die wegen ihrer Einfachheit und Anschaulichkeit den Beifall der Geophysiker fand und die hier wiedergegeben werden möge.

Die Kräftefunktion des Gravitations- und Fliehkraftfeldes der Erde ist nach der Gleichung (125) des zweiten Abschnittes dieses Buches durch den Ausdruck

$$(73) \quad W = f \frac{M}{r} + \frac{f}{2r^3} (C - A) (1 - 3 \sin^2 \varphi) + \frac{n^2 r^2}{2} \cos^2 \varphi$$

veranschaulicht.

Zieht man das an einer beliebigen Stelle der Erdoberfläche befindliche, im § 55 gekennzeichnete Elementarprisma der isostatischen Decke der Erde in Betracht, so ergibt sich folgendes. Dieses Prisma taucht in den fluidalen Erdkern hinein und seine Tauchtiefe ist gleich H . Der Schwerpunkt M des verdrängten fluidalen Materials, der auch der Auftriebspunkt genannt wird, liegt in der Mitte der Tauchtiefe H , der Schwerpunkt S des Elementarprismas liegt in der Mitte der Höhe D dieses Prismas, der Höhenunterschied λ dieser beiden Punkte, die isostatische Erhebung, ist durch den Ausdruck (11) veranschaulicht. Die Masse $d\mu$ des Elementarprismas kann in deren Schwerpunkt konzentriert gedacht werden. Die auf das Elementarprisma einwirkende Kraft ist gleich dem Gradient von W im Punkte S multipliziert mit der Masse $d\mu$. Diese Kraft weist, wie sofort gezeigt werden wird, eine in bezug auf die durch M hindurchgehende äquiskalare Fläche des Feldes W tangentielle Komponente auf, die auf folgende Weise ermittelt werden kann.

Seien PP' (Fig. 27, Seite 243) die beiden Drehpole der Erde und PMP' der durch den Punkt M hindurchgehende Meridian der Erdoberfläche. Legt man in den Punkt M den Ursprung des orthogonalen in der Meridianebene liegenden Koordinatensystems $x-y$, dessen y -Achse vertikal nach oben und dessen x -Achse gegen den Aequator gerichtet ist, so ist für diesen Punkt:

$$(74) \quad \frac{\partial W}{\partial x} = 0,$$

weil in demselben die x -Achse die Äquiskalarfläche des Feldes W berührt. Der Punkt S weist in bezug auf das Koordinatensystem $x-y$ die Koordinaten $x=0$; $y=\lambda$ auf. In diesem Punkte wird die partielle Ableitung von W nach x nicht gleich Null, sondern durch den Ausdruck

$$\frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right) \lambda$$

veranschaulicht sein, worin sich die darin vorkommenden Ableitungen auf den Punkt M beziehen. Deshalb wird mit Rücksicht auf (74) die auf das Elementarprisma $d\mu$ einwirkende Horizontalkraft durch den Ausdruck

$$(75) \quad dH = \lambda \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right) d\mu$$

dargestellt sein.

Vertauscht man, was zulässig ist, die Reihenfolge der obigen Ableitungen, so wird:

$$(76) \quad dH = \lambda \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial W}{\partial y} \right) d\mu.$$

Die Ableitung

$$(77) \quad \frac{\partial W}{\partial y} = -g$$

stellt die Schwerebeschleunigung im Punkte M dar; diese Beschleunigung ist nach abwärts gerichtet, weshalb in obiger Gleichung das Zeichen Minus gesetzt werden musste. Setzt man (77) in (76), so bekommt man:

$$(78) \quad dH = -\lambda \frac{\partial g}{\partial x} d\mu.$$

In dieser Formel kann für das Element ∂x der Meridiantangente der Ausdruck

$$(79) \quad \partial x = -r \partial \varphi$$

eingesetzt werden, in dem, weil die geozentrische Breite φ entgegengesetzt der Richtung x zunehmend ist, rechts das Zeichen Minus vorkommt. Man bekommt also:

$$(80) \quad dH = \frac{\lambda}{r} \frac{\partial g}{\partial \varphi} d\mu.$$

Die Abhängigkeit der Schwerebeschleunigung von der geozentrischen Breite

φ ist durch die Formel (136) des zweiten Abschnittes dieses Buches, d. h. durch

$$(81) \quad g = g_a + (g_p - g_a) \sin^2 \varphi$$

gegeben, worin g_a die Schwerebeschleunigung am Aequator, g_p jene an den Polen bedeutet. Setzt man dies in (80) ein, so wird:

$$(82) \quad dH = \frac{\lambda}{r} (g_p - g_a) \sin 2\varphi \, d\mu.$$

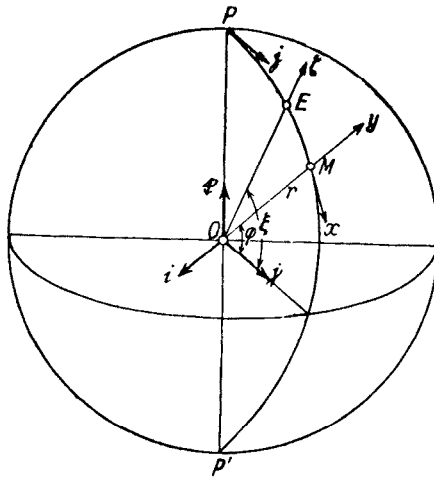


Fig. 27

Diese Kraft, in der Meridianebene wirkend, ist, weil $g_p > g_a$ und die x -Achse des hier benützten Koordinatensystems gegen den Aequator gerichtet ist, ebenfalls gegen den Aequator gerichtet, weshalb sie auch den Namen Polfluchtkraft erhalten hat. Bei gleichbleibendem λ würde sie ihr Maximum an der Breite $\varphi = 45^\circ$ erreichen. An den Polen und am Aequator ist sie gleich Null.

Jedes Elementarprisma der aus dem fluidalen Kern herausragenden isostatischen Decke der Erde unterliegt einer solchen horizontalen Kraft, und es ist unsere nächste Aufgabe, das Drehmoment aller dieser Kräfte zu berechnen. Dabei können wir, weil aus der ellipsoidalen Gestalt der Erde und jener der Aequiskalarflächen des zugehörigen Kraftfeldes alle Konsequenzen bereits gezogen sind, die Erdoberfläche als kugelförmig betrachten und in den vorstehenden Gleichungen für r den mittleren Radius r_0 der Erde setzen. Unter dieser Voraussetzung wird das Drehmoment der Kraft dH in bezug auf den Erdmittelpunkt die skalare Grösse

$$(83) \quad dM = r_0 dH$$

aufweisen.

Um dieses Drehmoment, wie es sich als notwendig ergeben wird, vektoranalytisch darzustellen, lege man (Fig. 27) in den Erdmittelpunkt den Ursprung O eines orthogonalen Koordinatensystems $X-Y-Z$, dessen Z -Achse, mit der Drehachse der Erde zusammenfallend, gegen Norden gerichtet werden möge; die Y -Achse falle in die die in Betracht gezogene Elementarmasse $d\mu$ enthaltende Meridianebene der Erde. Bezeichnet man mit i, j, k die Einheitsvektoren der Achsenrichtungen des Koordinatensystems $X-Y-Z$, so ist, weil der Einheitsvektor i senkrecht auf der erwähnten Meridianebene steht und das Drehmoment als positiv zu bezeichnen ist, wenn es entgegengesetzt dem Umlaufsinne des Uhrzeigers wirkt, das Drehmoment $d\mathfrak{M}$ der auf die Elementarmasse $d\mu$ einwirkenden Horizontalkraft durch den Ausdruck:

$$(84) \quad d\mathfrak{M} = -r_0 dH \cdot i$$

veranschaulicht. Setzt man hier (82) mit $r = r_0$ ein, so bekommt man:

$$(85) \quad d\mathfrak{M} = -\lambda (g_p - g_a) \sin 2\varphi d\mu \cdot i.$$

Ich habe im § 55 die durch die isostatische Erhebung λ der Masse $d\mu$ hervorgerufene Aenderung des Trägheitsmomentes der Erde bezüglich der mit dem Radiusvektor r den Winkel θ einschliessenden durch den Erdmittelpunkt hindurchgehenden Achse ζ mit $d\Omega$ bezeichnet und durch die Formel (12) veranschaulicht, die im vorliegenden Falle, wo $r = r_0$ zu setzen ist, also lautet:

$$(86) \quad d\Omega = 2\lambda r_0 \sin^2 \theta d\mu.$$

Liegt diese Achse ζ in der Meridianebene des Punktes M und schliesst sie mit der Aequatorebene den Winkel ξ ein, so ist $\theta = \xi - \varphi$, d. h.

$$(87) \quad d\Omega = 2\lambda r_0 \sin^2 (\xi - \varphi) d\mu.$$

Liege die Achse ζ nicht in der Meridianebene des Punktes M , so wäre die obige Formel durch eine andere zu ersetzen, die aber nicht aufgeschrieben werden muss, weil von derselben nachstehend kein Gebrauch zu machen sein wird.

Jeder durch den Erdmittelpunkt gehenden Achse ζ entspricht ein eindeutig gegebener Wert des Skalars $d\Omega$, also dem Durchstosspunkt E der Achse ζ mit der Erdoberfläche ein bestimmter Wert $d\Omega$, wodurch die Erdoberfläche zu einem sphärischen Feld des Skalars $d\Omega$ wird. Fragen wir, was ist der Gradient dieses Feldes an jener Stelle der Erdoberfläche, die durch die Lage des in Betracht gezogenen Poles, sagen wir des Nordpoles P , gekennzeichnet ist. Dieser Gradient muss aus Symmetriegründen in die Meridianebene des Punktes M fallen, d. h. den Meridian-

kreis des Punktes M im Punkte P tangieren. Er ist nach der Seite des zunehmenden Skalars $d\Omega$, d. h. des zunehmenden ξ gerichtet und hat einen skalaren Betrag, der durch

$$\frac{\partial d\Omega}{\partial s} = \frac{1}{r_0} \left\{ \frac{\partial d\Omega}{\partial \xi} \right\}_{\xi=90^\circ} = 2\lambda \sin 2\varphi d\mu$$

gegeben ist. Dieser Gradient ist, weil er nach den gemachten Vereinbarungen über das Koordinatensystem $X-Y-Z$ dem Einheitsvektor j entgegengesetzt gerichtet ist, durch den Ausdruck veranschaulicht:

$$(88) \quad \text{grad}(d\Omega) = -2\lambda \sin 2\varphi d\mu j.$$

Multipliziert man diese Gleichung vektoriell mit dem Einheitsvektor k , so wird, weil $[k j] = -[j k] = -i$ ist,

$$(89) \quad [k \text{ grad}(d\Omega)] = 2\lambda \sin 2\varphi d\mu i.$$

Es folgt aus (85) und (89)

$$(90) \quad d\mathfrak{M} = -\frac{1}{2}(g_p - g_a)[k \text{ grad}(d\Omega)].$$

Dies ist das von der auf die Masse $d\mu$ wirkenden Horizontalkraft herrührende Drehmoment in bezug auf den Erdmittelpunkt. Das von den auf die gesamte isostatische Decke wirkenden Horizontalkräften herrührende Drehmoment wird durch die über die ganze Erdoberfläche sich erstreckende Integration des obigen Ausdruckes erhalten und ist, weil g_p, g_a, k konstante Grössen sind, durch den Ausdruck veranschaulicht:

$$(91) \quad \mathfrak{M} = -\frac{1}{2}(g_p - g_a)[k \int \text{grad}(d\Omega)].$$

Weil ganz allgemein

$$\int \text{grad}(d\Omega) = \text{grad} \int d\Omega = \text{grad} \Omega$$

ist, erhält man:

$$(92) \quad \mathfrak{M} = -\frac{1}{2} (g_p - g_a) [k \text{ grad } \Omega].$$

Dieses Drehmoment wird das Bestreben haben, die isostatische Decke der Erde über ihre fluidale Unterlage um eine Achse zu drehen, die wegen des Faktors k im obigen vektoriellen Klammerausdruck in der Ebene des Aequators liegt. Die durch dieses Drehmoment bewirkte Verlagerung der Decke kann nur sehr langsam und mit Ueberwindung von Hindernissen erfolgen, weshalb die Rotationsgeschwindigkeit w dieser Drehbewegung dem Drehmoment \mathfrak{M} proportional sein wird. Es folgt daraus:

$$(93) \quad w = -\frac{m}{2} (g_p - g_a) [k \text{ grad } \Omega],$$

worin m ein Proportionalitätsfaktor ist.

Infolge dieser Drehbewegung wird jeder Punkt der isostatischen Decke der Erde mit einer Geschwindigkeit $[w r]$ über die Unterlage gleiten, wobei r den Ortsvektor des in Betracht gezogenen Punktes der Decke in bezug auf den Erdmittelpunkt bedeutet. Für den am Drehpol P liegenden Punkt dieser Decke ist $r = r_0 k$ zu setzen, so dass dessen Verlagerungsgeschwindigkeit in bezug auf das Koordinatensystem $X-Y-Z$ gleich $r_0 [w k]$ ist. Der Drehpol P der Erde wird sich mit entgegengesetzter Geschwindigkeit relativ zur Erdkruste bewegen, weshalb seine Geschwindigkeit, d. h. die Geschwindigkeit der Polwanderung durch den Ausdruck:

$$(94) \quad v = r_0 [k w]$$

dargestellt ist.

Es folgt aus (94) und (93)

$$(95) \quad v = -\frac{m}{2} r_0 (g_p - g_a) [k [k \text{ grad } \Omega]].$$

Wendet man die bekannte Formel

$$[a [b c]] = b (c a) - c (a b)$$

der Vektorrechnung an, so ist, weil der Gradient von Ω im Punkte P senkrecht auf dem Vektor k steht, also $(k \text{ grad } \Omega) = 0$ ist,

$$(96) \quad v = \frac{m}{2} r_0 (g_p - g_a) \text{ grad } \Omega.$$

Setzt man

$$(97) \quad \frac{m}{2} r_0 (g_p - g_a) = n,$$

wobei n wieder einen konstanten Koeffizienten bedeutet, so wird:

$$(98) \quad v = n \text{ grad } \Omega.$$

Diese Gleichung besagt, wie die Gleichung (45), dass der Geschwindigkeitsvektor der säkularen Polbewegung proportional dem Gradient des Feldes Ω und die säkulare Polbahnkurve eine Vektorlinie des Feldes $\text{grad } \Omega$ ist.

Die Uebereinstimmung dieser gleichlautenden Aussagen der Gleichungen (45) und (98) bliebe aufrecht, selbst wenn infolge der verschiedenen vereinfachenden Annahmen, die bei der Ableitung dieser beiden Gleichungen gemacht worden sind, die numerischen Werte der durch (44) bzw. (97) gegebenen Koeffizienten n untereinander nicht ganz gleich wären, denn diese Werte haben keinen Einfluss auf die Bahnkurve des Poles. Diese hängt nur von der Konfiguration der isostatischen Decke der Erde, d. h. von jener des Feldes Ω ab, über dessen Geometrie einiges berichtet werden möge.

§ 61. Allgemeine Eigenschaften des Feldes Ω und der Polbahnkurven. Ist die Konfiguration der isostatischen Decke der Erde bekannt, so ist durch die Gleichung (21) das zugehörige sphärische Feld des Skalars Ω eindeutig gegeben. Bei der Ableitung dieser Gleichung ist als Bezugssystem ein Koordinatensystem verwendet worden, dessen Ursprung im Erdmittelpunkt gelegen und dessen Z-Achse mit der Figurenachse des geophysikalischen Referenzellipsoides zusammenfallend ist; die Gleichung (21) behält auch ihre Gültigkeit, wenn man auch ein anderes orthogonales Koordinatensystem benützt, dessen Ursprung im Erdmittelpunkt gelegen ist. Aus diesem Grunde kann man sich bei der Berechnung des Feldes Ω des gegenwärtigen Gradnetzes der Erde bedienen. Hat man durch die Integration der Ausdrücke (17) und (18) die numerischen Werte der Konstanten $I_1, I_2, I_3, \Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$ ermittelt, so ist durch die Gleichung (21), d. h. durch

$$(99) \quad \Omega = I_1 \cos^2 \varphi \cos^2 \psi + I_2 \cos^2 \varphi \sin^2 \psi + I_3 \sin^2 \varphi - \\ - \Lambda_1 \sin 2\varphi \sin \psi - \Lambda_2 \sin 2\varphi \cos \psi - \Lambda_3 \cos^2 \varphi \sin 2\psi,$$

in der jetzt φ die geographische Breite und ψ die geographische Länge bedeutet, das Feld Ω in bezug auf das Gradnetz der Erde gegeben.

Weil nach dem im § 55 gesagten Ω das Trägheitsmoment des mit dem Faktor $\frac{2\lambda}{r}$ behafteten Erdkruste bezüglich der durch den Erdmittelpunkt und den Punkt (φ, ψ) der Erdoberfläche hindurchgehenden Achse bedeutet, ist das Feld Ω

einem Trägheitstensor zugeordnet und weist die Eigenschaften desselben auf. Die aufeinander senkrecht stehenden Achsen dieses Trägheitstensors durchdringen die Erdoberfläche in sechs Punkten, in denen Ω seine extremen Werte erreicht. Die Koordinaten φ und ψ dieser Punkte sind deshalb die Wurzeln der Gleichungen:

$$(100) \quad \frac{\partial \Omega}{\partial \varphi} = 0 \quad \frac{\partial \Omega}{\partial \psi} = 0.$$

Setzt man in diese Gleichungen den Ausdruck (99) ein, so erhält man:

$$(101) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{tang } 2\varphi = \frac{2\Lambda_1 \sin \psi + 2\Lambda_2 \cos \psi}{I_3 - \frac{1}{2}(I_1 + I_2) - \frac{1}{2}(I_1 - I_2) \cos 2\psi + \Lambda_3 \sin 2\psi} \\ \text{tang } \varphi = \frac{(I_1 - I_2) \sin 2\psi + 2\Lambda_3 \cos 2\psi}{2\Lambda_2 \sin \psi - 2\Lambda_1 \cos \psi} \end{array} \right.$$

Diese Gleichungen können zur Ermittlung der Durchstosspunkte der Achsen des Trägheitstensors Ω mit der Erdoberfläche verwendet werden. Hat man diese Ermittlung durchgeführt, dann können die Achsen des Trägheitstensors Ω mit Vorteil als Koordinatenachsen benützt werden. Legen wir also unseren weiteren Betrachtungen das mit diesen Achsen zusammenfallende Koordinatensystem zugrunde, wobei dessen X -Achse mit der Achse des minimalen, die Z -Achse mit der Achse des maximalen Trägheitsmoments zur Deckung gebracht werden möge. Bezeichnet man also die den Koordinatenachsen X, Y, Z zugehörigen Werte von Ω mit $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$, so ist

$$(102) \quad \Omega_1 < \Omega_2 < \Omega_3.$$

Bezeichnen Φ und Ψ die polaren Koordinaten eines beliebigen Punktes der Erdoberfläche bezüglich des neuen Koordinatensystems, wobei Φ den Winkel bedeutet, den der Radiusvektor r des in Betracht gezogenen Punktes mit der X - Y -Ebene einschliesst, und Ψ den Winkel, den die durch r und die Z -Achse hindurchgelegte Ebene mit der X - Z -Ebene einschliesst, also dem Winkel Φ die Rolle der Breite und dem Winkel Ψ jene der Länge zukommt, so ist der Wert des Skalars Ω im Punkte Φ, Ψ der Erdoberfläche nach (99) durch den Ausdruck:

$$(103) \quad \Omega = \Omega_1 \cos^2 \Phi \cos^2 \Psi + \Omega_2 \cos^2 \Phi \sin^2 \Psi + \Omega_3 \sin^2 \Phi$$

veranschaulicht, weil die Deviationsmomente $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$ bezüglich der Achsen des Trägheitstensors gleich Null sind.

Die Formel (103) stellt uns das Feld des Skalars Ω analytisch dar. Die Vektorlinien des Feldes grad Ω , denen auch die Polbahnkurve angehört, sind orthogonale Trajektorien der äquiskalaren Linien des Feldes Ω . Eine derartige Äquiskalarlinie erscheint durch die Gleichung:

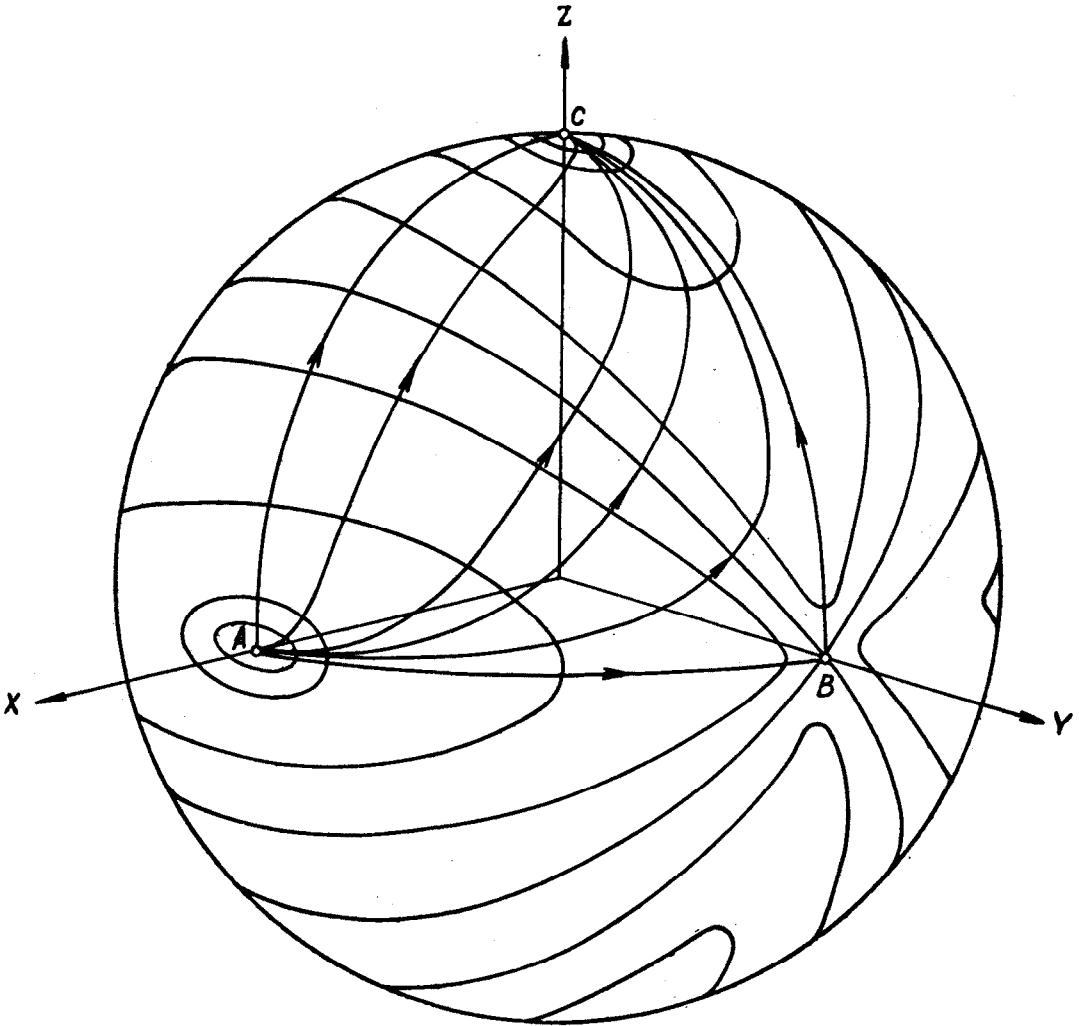


Fig. 28

$$(104) \quad \Omega_1 \cos^2 \Phi \cos^2 \Psi + \Omega_2 \cos^2 \Phi \sin^2 \Psi + \Omega_3 \sin^2 \Phi = C$$

veranschaulicht, wobei der Konstanten C ein bestimmter numerischer Wert zuzuweisen ist.

Des Feld des Skalars Ω ist, weil die Substitution

$$\Phi | - \Phi \quad \Psi | - \Psi \quad \Psi | 180^\circ - \Psi$$

die Gleichung (103) unberührt lässt, symmetrisch in bezug auf die Koordinatenebenen $X-Y$; $Y-Z$; $Z-X$. Diese Koordinatenebenen teilen dieses sphärische Feld in acht rechtwinklige und gleichseitige Oktanten, in denen die Aequiskalarlinien von Ω und die Vektorlinien von grad Ω denselben Verlauf aufweisen. Es genügt also

nur einen dieser Oktanten in Betracht zu ziehen, etwa denjenigen, dessen Eckpunkte die Durchstosspunkte der positiven Aeste der Koordinatenachsen mit der Erdoberfläche sind.

Dieser Oktant sei in der Fig. 28 durch das sphärische Dreieck ABC veranschaulicht. Der Eckpunkt A entspreche dem minimalen Wert von Ω ; in diesem Punkt durchdringt die Koordinatenachse X die Erdoberfläche. Der Punkt C entspreche dem Maximum von Ω ; in diesem Punkt durchdringt die Koordinatenachse Z die Erdoberfläche. Der Punkt B , in dem die Koordinatenachse Y die Erdoberfläche durchdringt, entspricht dem Maximum-Minimum von Ω .

Weil nach dem soeben gesagten die Seiten dieses Dreiecks Symmetralen des Feldes Ω sind, schneiden die Aequiskalarlinien des Feldes Ω diese Seiten unter dem rechten Winkel, so dass diese Seiten orthogonale Trajektorien dieser Linien sind, also drei verschiedene Vektorlinien des Feldes $\text{grad } \Omega$ veranschaulichen. Weil diese Vektorlinien nach der Seite des wachsenden Ω gerichtet sind, ist die positive Richtung derselben: $A \rightarrow B$, $A \rightarrow C$, $B \rightarrow C$.

Um sich über den Verlauf der übrigen Vektorlinien des Feldes $\text{grad } \Omega$ Rechenschaft zu geben, untersuche man den Verlauf dieser Linien in der Umgebung der Punkte A , B , C .

Legt man durch den Punkt A eine Tangentialebene an die Erdoberfläche und legt in diesen Punkt den Ursprung des in dieser Ebene liegenden orthogonalen Koordinatensystems $x-y$, dessen x -Achse die Seite AB und dessen y -Achse die Seite AC des Dreiecks ABC berührt, so kann in der Umgebung von A das Feld Ω als eben betrachtet und für die in Bogenmass gemessenen Koordinaten x , y eines beliebigen Punktes dieser Umgebung $x = \Psi$; $y = \Phi$ gesetzt werden. Weil Ψ und Φ sehr kleine Grössen sind, so wird:

$$\begin{aligned} \sin^2 \Phi &= y^2 & \cos^2 \Phi &= 1 - y^2 \\ \sin^2 \Psi &= x^2 & \cos^2 \Psi &= 1 - x^2. \end{aligned}$$

Setzt man dies in (104) ein, vernachlässigt dabei die höheren Potenzen von x und y und vereinigt alle darin alleinstehenden Konstanten zu einer einzigen C , so erhält man:

$$(105) \quad \frac{x^2}{\Omega_2 - \Omega_1} + \frac{y^2}{\Omega_2 - \Omega_1} = C$$

als die Gleichung der der Umgebung von A angehörenden Aequiskalarlinien des Feldes Ω . Diese Kurven bilden ein System homothetischer Ellipsen, deren grosse Achsen in der x -Achse des Koordinatensystems, d. h. in der Seite AB des sphärischen Dreiecks ABC gelegen sind.

Um die orthogonalen Trajektorien dieser Linien, d. h. die Gleichung der Vektorlinien des Feldes $\text{grad } \Omega$ zu erhalten, differentiiere man die obige Gleichung

nach x , ersetze y' durch $-\frac{1}{y}$ und integriere die derart gewonnene Differentialgleichung. Man bekommt auf diese Weise

$$(106) \quad y = Cx^{\frac{\Omega_2 - \Omega_1}{\Omega_2 - \Omega_1}},$$

worin wegen (102)

$$\frac{\Omega_2 - \Omega_1}{\Omega_2 - \Omega_1} > 1$$

ist. Diese Trajektorien sind Parabeln, die alle durch den Punkt A hindurchgehen und in diesem Punkte die Seite AB des sphärischen Dreiecks ABC berühren.

In der Umgebung des Punktes B haben wir das folgende Bild. Legt man hier das Koordinatensystem $x-y$ derart, dass dessen Achsen x und y die Seite AB bzw. BC berührend, nach rechts bzw. nach aufwärts gerichtet sind, so ist $x = \frac{\pi}{2} - \Psi$; $y = \Phi$ zu setzen und man bekommt mittels (104) auf dieselbe Weise wie vorher:

$$(107) \quad \frac{x^2}{\Omega_3 - \Omega_1} - \frac{y^2}{\Omega_2 - \Omega_1} = C$$

als die Gleichung der Aequiskalarlinien des Feldes Ω . Diese Kurven bilden ein System homothetischer Hyperbeln. Ihre orthogonale Trajektorien sind durch die Gleichung veranschaulicht:

$$(108) \quad y = Cx^{\frac{\Omega_3 - \Omega_1}{\Omega_2 - \Omega_1}}.$$

Weil hier der Exponent von x wegen (102) negativ ist, gehen diese Trajektorien mit Ausnahme der Kurven BA und BC nicht durch den Punkt B hindurch.

Für die Umgebung des Punktes C findet man folgendes. Ein orthogonales Koordinatensystem $x-y$ benützend, dessen x -Achse die Seite CA und dessen y -Achse die Seite CB des sphärischen Dreiecks ABC berührt, wird, wenn man das Komplement von Φ mit Δ bezeichnet, für die Umgebung von C $x = \Delta \cos \Psi$; $y = \Delta \sin \Psi$, d. h. wegen des sehr kleinen Δ

$$x = \sin \Delta \cos \Psi = \cos \Phi \cos \Psi \quad y = \cos \Phi \sin \Psi.$$

Führt man dies in (104) ein, so bekommt man:

$$(109) \quad \frac{x^2}{\Omega_3 - \Omega_2} + \frac{y^2}{\Omega_3 - \Omega_1} = C$$

als die Gleichung der Aequiskalarlinien des Feldes Ω . Diese Kurven sind homothetische Ellipsen, deren grosse Achsen, weil $\Omega_3 - \Omega_1 > \Omega_3 - \Omega_2$ ist, in der Seite BC des sphärischen Dreiecks ABC gelegen sind. Ihre orthogonalen Trajektorien sind Parabeln:

$$(110) \quad y = Cx^{\frac{\Omega_3 - \Omega_2}{\Omega_3 - \Omega_1}},$$

die alle durch den Punkt C hindurchgehen und hier die Seite CB des sphärischen Dreiecks ABC berühren.

Auf diese Weise erhält man das folgende Bild vom Verlauf der Vektorlinien des Feldes $\text{grad } \Omega$. Alle diese Linien beginnen im Scheitelpunkt A des sphärischen Dreiecks ABC , der dem Minimum von Ω entspricht, und endigen im Scheitelpunkt C , in dem Ω sein Maximum erreicht; sie berühren dabei in diesen beiden Punkten die beiden anderen, jene Scheitelpunkte nicht direkt verbindenden Seiten des sphärischen Dreiecks. Weil sowohl in dem Anfangspunkt als auch in dem Endpunkt dieser Linien der Skalar Ω seine extremen Werte erreicht, ist in diesen Punkten der Gradient von Ω und deshalb auch die Geschwindigkeit v der Polbewegung gleich Null. Diese zwei Punkte stellen also zwei Gleichgewichtslagen des Rotationspoles dar, und zwar der Anfangspunkt A die Lage des labilen, der Endpunkt C die Lage des stabilen Gleichgewichts. Hat sich der Pol während der Vorzeit in der erwähnten Anfangslage befunden, dann hat er diese Lage bei der geringsten Störung des Gleichgewichts verlassen und seinen Weg, je nach der Richtung dieser Störung, längs einer der Vektorlinien nehmen müssen, um sich dem Endpunkte C dieser Vektorlinie zu nähern, wo er seine stabile Lage erreichen wird. Hat er sich in einem anderen innerhalb oder an der Peripherie des Dreiecks ABC gelegenen Punkte befunden, so hat er den durch diese Lage selbst gegebenen Weg ohne weiters einschlagen müssen, um schliesslich den Punkt C zu erreichen. Die Gesamtverschiebung des Poles kann also höchstens neunzig Bogengrade betragen, wozu aber wegen der ausserordentlich kleinen Geschwindigkeit am Beginn und am Ende dieser Strecke eine unermesslich lange Zeit erforderlich ist.

Die säkulare Bahnkurve des in Betracht gezogenen Poles gehört, wie die Anfangsbedingungen auch sein mögen, den soeben geschilderten Vektorlinien. Welche dieser Linien die Polbahn veranschaulicht, ist durch die gegenwärtige Lage der Pole eindeutig gegeben.

§ 62. Die Gleichung der ungestörten Polbahnkurve. Wenn das Feld Ω permanent, d. h. mit der Zeit nicht veränderlich ist, dann lässt sich die analytische Gleichung der Polbahnkurve ohne Schwierigkeit ermitteln. Die unter der obigen Voraussetzung berechnete Polbahnkurve soll die „ungestörte“ genannt werden. Die Störungen, die sie durch die Veränderlichkeit des Feldes Ω erleiden kann, sollen später besprochen werden.

Um diese ungestörte Polbahn zu finden, werden wir uns des im vorigen Paragraphen gekennzeichneten Koordinatensystems bedienen, dessen Achsen mit den Achsen des Trägheitstensors Ω zusammenfallen, bezüglich deren Ω seine ex-

tremen Werte besitzt, wobei, wie vorher angegeben,

$$(111) \quad \Omega_1 < \Omega_2 < \Omega_3$$

ist. Führt man dabei die ebenfalls im vorigen Paragraphen gekennzeichneten Polarkoordinaten Φ und Ψ ein, dann ist durch die Gleichung (103), d. h. durch

$$(112) \quad \Omega = \Omega_1 \cos^2 \Phi \cos^2 \Psi + \Omega_2 \cos^2 \Phi \sin^2 \Psi + \Omega_3 \sin^2 \Phi$$

das Feld Ω eindeutig gegeben. Zieht man nun einen beliebigen durch die Koordinaten Φ und Ψ gekennzeichneten Punkt M der Polbahnkurve in Betracht, legt in diesen Punkt den Ursprung eines ebenen orthogonalen Koordinatensystems $\xi-\eta$, dessen Ebene die Erdkugel und dessen ξ -Achse den durch M und den Durchstosspunkt der Z -Achse mit der Erdkugel gelegten grössten Kreis berührt und nach der Seite des zunehmenden Φ gerichtet ist, so ist das Element $d\xi$ der Verlagerung des Poles in der Richtung ξ gleich:

$$(113) \quad d\xi = r_0 d\Phi,$$

wobei r_0 den Radius der Erdkugel bedeutet. Das Element $d\eta$ der Polverlagerung senkrecht zu ξ und in der Richtung des zunehmenden Ψ ist dagegen gleich:

$$(114) \quad d\eta = r_0 \cos \Phi d\Psi.$$

Die in diese Richtungen fallenden Komponenten des Geschwindigkeitsvektors v der Polverlagerung sind also gleich:

$$(115) \quad \frac{d\xi}{dt} = r_0 \frac{d\Phi}{dt} \quad \frac{d\eta}{dt} = r_0 \cos \Phi \frac{d\Psi}{dt},$$

so dass dieser Vektor durch den Ausdruck

$$(116) \quad v = \frac{d\xi}{dt} i + \frac{d\eta}{dt} j$$

veranschaulicht ist, worin i und j die Einheitsvektoren der Achsenrichtungen ξ und η bedeuten.

Der Gradient von Ω im Punkte M ist durch den Ausdruck veranschaulicht:

$$(117) \quad \text{grad } \Omega = \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} \mathbf{i} + \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} \mathbf{j}.$$

Setzt man die Ausdrücke (116) und (117) in die vektorielle Grundgleichung (45) der säkularen Polbewegung ein, so wird:

$$\frac{d\xi}{dt} \mathbf{i} + \frac{d\eta}{dt} \mathbf{j} = n \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} \mathbf{i} + n \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} \mathbf{j}.$$

Multipliziert man diese Vektorgleichung skalar mit \mathbf{i} bzw. \mathbf{j} , so zerfällt sie in die zwei skalaren Gleichungen:

$$\frac{d\xi}{dt} = n \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} \qquad \frac{d\eta}{dt} = n \frac{\partial \Omega}{\partial \eta}.$$

Setzt man in diese Gleichungen (113) und (114) ein, so bekommt man .

$$(118) \quad \frac{d\Phi}{dt} = \frac{n}{r_0^2} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial \Phi} \qquad \frac{d\Psi}{dt} = \frac{n}{r_0^2} \cdot \frac{1}{\cos^2 \Phi} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial \Psi},$$

d. h.

$$(119) \quad \frac{d\Psi}{d\Phi} = \frac{1}{\cos^2 \Phi} \cdot \frac{\frac{\partial \Omega}{\partial \Psi}}{\frac{\partial \Omega}{\partial \Phi}}.$$

Weil wegen (112)

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \Psi} = (\Omega_2 - \Omega_1) \cos^2 \Phi \sin 2\Psi$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \Phi} = (\Omega_3 - \Omega_2 \sin^2 \Psi - \Omega_1 \cos^2 \Psi) \sin 2\Phi$$

ist, erhält man statt (119)

$$(120) \quad \frac{d\Psi}{d\Phi} = \frac{(\Omega_2 - \Omega_1) \sin 2\Psi}{(\Omega_3 - \Omega_2 \sin^2 \Psi - \Omega_1 \cos^2 \Psi) \sin 2\Phi}.$$

Weil

$$\cos^2 \Psi = 1 - \sin^2 \Psi$$

ist, so wird

$$(121) \quad \frac{\Omega_3 - \Omega_1 - (\Omega_2 - \Omega_1) \sin^2 \Psi}{(\Omega_2 - \Omega_1) \sin 2\Psi} d\Psi = \frac{d\Phi}{\sin 2\Phi}.$$

Setzt man der kürzeren Schreibweise halber

$$(122) \quad \frac{\Omega_3 - \Omega_1}{\Omega_2 - \Omega_1} = k,$$

wo wegen (111)

$$(123) \quad k > 1$$

ist, so erhält man statt (121)

$$(124) \quad k \frac{d\Psi}{\sin 2\Psi} - \frac{1}{2} \operatorname{tang} \Psi d\Psi = \frac{d\Phi}{\sin 2\Phi}$$

als die endgültige Differentialgleichung der Polbahnkurve.

Weil

$$\int \frac{d\Psi}{\sin 2\Psi} = \frac{1}{2} \int \frac{d\Psi}{\sin \Psi \cos \Psi} = \frac{1}{2} \int \frac{\sec^2 \Psi d\Psi}{\operatorname{tang} \Psi} = \frac{1}{2} l \operatorname{tang} \Psi + C$$

$$\int \frac{d\Phi}{\sin 2\Phi} = \frac{1}{2} l \operatorname{tang} \Phi + C$$

$$\int \operatorname{tang} \Psi d\Psi = \int \frac{\sin \Psi d\Psi}{\cos \Psi} = -l \cos \Psi + C$$

ist, so folgt durch Integration der Differentialgleichung (124)

$$k \cdot l \operatorname{tang} \Psi + l \cos \Psi = l \operatorname{tang} \Phi + l C_1,$$

d. h.

$$(125) \quad \cos \Psi \operatorname{tang}^k \Psi = C_1 \operatorname{tang} \Phi.$$

Dies ist die Gleichung der Polbahnkurve.

Die Konstante C_1 ist durch die gegenwärtige Lage des Rotationspoles ge-

geben. Sind Φ_0 und Ψ_0 dessen Koordinaten in bezug auf das vorstehend verwendete Koordinatensystem, so ist

$$(126) \quad C_1 = \frac{\cos \Psi_0 \operatorname{tang}^k \Psi_0}{\operatorname{tang} \Phi_0}.$$

§ 63. Die säkulare Bewegung des Poles längs seiner Bahnkurve. Die Art und Weise, wie der in Betracht gezogene Drehpol der Erde auf seiner soeben ermittelten Bahnkurve sich bewegt, ist durch die Gleichungen (118) und (112) eindeutig gegeben. Es folgt aus diesen Gleichungen:

$$(127) \quad \frac{d\Psi}{dt} = \frac{n}{r_0^3} (\Omega_2 - \Omega_1) \sin 2\Psi.$$

Setzt man der kürzeren Schreibweise halber

$$(128) \quad \frac{2n}{r_0^2} (\Omega_2 - \Omega_1) = \mu,$$

worin μ eine Konstante bedeutet, so erhält man:

$$\frac{d\Psi}{\sin 2\Psi} = \frac{\mu}{2} dt.$$

Die Integration dieser Gleichung liefert:

$$\frac{1}{2} l \operatorname{tang} \Psi = \frac{1}{2} \mu t + \frac{1}{2} l C_2,$$

d. h.

$$(129) \quad \operatorname{tang} \Psi = C_2 e^{\mu t},$$

worin e die Basis der natürlichen Logarithmen bedeutet.

Dadurch ist die Koordinate Ψ des beweglichen Poles als Funktion der Zeit gegeben. Wird die Zeit t von der Gegenwart aus gezählt, so ist

$$(130) \quad C_2 = \operatorname{tang} \Psi_0.$$

Numerische Ausrechnung und kartographische Veranschaulichung der säkularen Polwanderungen

§ 64. Grundlagen der Berechnung. Die Anwendung der vorstehenden theoretischen Ergebnisse zur Berechnung der während der Vorzeit stattgefundenen Verlagerungen der Erdpole setzt die Kenntnis der Abmessungen der isostatischen Decke der Erde voraus. Von dieser Decke kennen wir recht genau ihre sichtbare, und minder genau ihre mit dem Meere bedeckte Oberfläche. Wie mächtig diese Decke ist, und wie tief sie in den fluidalen Kern der Erde reicht, darüber sind die Ansichten noch recht auseinandergehend, doch darin übereinstimmend, dass die Lagerung dieser Decke dem archimedischen Prinzip gehorcht, wie ich dies in der vorstehend entwickelten Theorie vorausgesetzt habe. Dem unregelmässigen Relief der oberen Fläche dieser Decke muss also ein aus dem Tauchgleichgewicht sich ergebendes Relief ihrer unteren Fläche entsprechen. Es wäre selbst bei genügender Kenntnis der lokalen Mächtigkeit dieser Decke und ihrer zugehörigen Dichte kaum möglich, alle ihre diesbezüglichen Unregelmässigkeiten in Rechnung zu stellen. Um diese Rechnung praktisch bewältigen und bis zu numerischen Ergebnissen führen zu können, müssen gewisse vereinfachende Annahmen gemacht werden. Diese müssen vor allem den stark in die Augen fallenden Gegensatz zwischen Kontinent und Ozeanboden ausreichend berücksichtigen, der A. Wegener zu der Annahme der sogenannten Kontinentalschollen geführt hat. Die horizontalen Begrenzungslinien dieser Schollen, zu denen auch ihre Schelfe zu zählen sind, können kartographisch dargestellt werden und eine solche Veranschaulichung wird den Ausgangspunkt meiner Berechnungen bilden. Die darin dargestellten Kontinente werde ich durch Streckung von ihren Gebirgen befreit, also eingeebnet mir denken und sie durch einfachere Konturen, die dem Gradnetz der Erde angepasst sind, begrenzen. Ich setze weiter voraus, dass diese Kontinentalschollen plattenförmig und homogen sind, d. h. dass ihre Dicke D_1 und ihre Dichte ρ_1 überall dieselbe ist. Dieselbe Annahme mache ich auch hinsichtlich des der isostatischen Decke zugehörigen festen, also nicht fluidalen Boden der Meere. Derselbe weise überall dieselbe Mächtigkeit D_2 und

dieselbe Dichte ϱ_2 auf. Ueber die numerischen Werte der Grössen $D_1, D_2, \varrho_1, \varrho_2$ mache ich keine besondere Voraussetzung, weil man über dieselben nicht genügend unterrichtet ist und weil eine diesbezügliche Voraussetzung, wie gezeigt werden wird, nicht erforderlich ist. Die Erdoberfläche setze ich, wie dies im § 58 bereits geschehen ist, als kugelförmig voraus, wobei r_0 ihr Halbmesser sein möge. Diese Voraussetzungen, in mathematische Sprache übertragen, ergeben das folgende.

Die durch (11) gegebene isostatische Erhebung erscheint jetzt für die Kontinente durch

$$(131) \quad \lambda_1 = \frac{\varrho_0 - \varrho_1}{2\varrho_0} D_1$$

und für den Meeresboden durch

$$(132) \quad \lambda_2 = \frac{\varrho_0 - \varrho_2}{2\varrho_0} D_2$$

veranschaulicht, wobei ϱ_0 die Dichte der fluidalen Unterlage bedeutet.

Die vorstehend durch (16) dargestellte Funktion $f(\varphi, \psi)$ wird jetzt zu einer Konstanten und ist, wenn es sich um Kontinente handelt, durch

$$(133) \quad f(\varphi, \psi) = 2\varrho_1 D_1 \lambda_1 r_0^3 = c_1,$$

und wenn es sich um den Meeresboden handelt, durch

$$(134) \quad f(\varphi, \psi) = 2\varrho_2 D_2 \lambda_2 r_0^3 = c_2$$

zu ersetzen.

Die Grössen c_1 und c_2 sind also zwei verschiedene Konstanten, was bei der Integration der Ausdrücke (17) und (18) zu berücksichtigen ist.

Um diese Integration durchzuführen, ziehe man einen endlichen durch die Meridiane ψ' und ψ'' und die Breitenkreise φ' und φ'' begrenzten Teil der isostatischen Decke der Erde in Betracht, der zur Gänze entweder der Kontinentalbelegung oder dem Ozean angehört, so dass für denselben für $f(\varphi, \psi)$ c_1 oder c_2 zu setzen ist. Setzen wir also in (17) und (18) für $f(\varphi, \psi)$ die Konstante c ein, um später, je nachdem es sich um Kontinente oder um Ozeane handelt, dieselbe durch c_1 oder c_2 zu ersetzen. Diese Konstante kann vor das Integralzeichen gestellt werden, weshalb die von dem in Betracht gezogenen zwischen den Meridianen ψ' und ψ'' und den Breitenkreisen φ' und φ'' eingeschlossenen sphärischen Rechteck herrührenden Bestandteile der Grössen $I_1, I_2, I_3, \Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$ durch die nachstehenden Ausdrücke veranschaulicht sein werden:

$$(135) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta I_1 = c \int_{\varphi'}^{\varphi''} d\varphi \int_{\psi'}^{\psi''} (\cos^3 \varphi \sin^2 \psi + \sin^2 \varphi \cos \varphi) d\psi \\ \Delta I_2 = c \int_{\varphi'}^{\varphi} d\varphi \int_{\psi'}^{\psi''} (\sin^2 \varphi \cos \varphi + \cos^3 \varphi \cos^2 \psi) d\psi \\ \Delta I_3 = c \int_{\varphi'}^{\varphi''} d\varphi \int_{\psi'}^{\psi''} \cos^3 \varphi d\psi \end{array} \right.$$

$$(136) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta \Lambda_1 = c \int_{\varphi'}^{\varphi''} d\varphi \int_{\psi'}^{\psi''} \sin \varphi \cos^2 \varphi \sin \psi d\psi \\ \Delta \Lambda_2 = c \int_{\varphi'}^{\varphi''} d\varphi \int_{\psi'}^{\psi''} \sin \varphi \cos^2 \varphi \cos \psi d\psi \\ \Delta \Lambda_3 = c \int_{\varphi'}^{\varphi''} d\varphi \int_{\psi'}^{\psi''} \cos^3 \varphi \sin \psi \cos \psi d\psi. \end{array} \right.$$

Weil

$$\int_{\psi'}^{\psi''} \sin^2 \psi d\psi = \int_{\psi'}^{\psi''} \frac{1 - \cos 2\psi}{2} d\psi = \frac{1}{2} (\psi'' - \psi') - \frac{1}{4} (\sin 2\psi'' - \sin 2\psi')$$

$$\int_{\psi'}^{\psi''} \cos^2 \psi d\psi = \frac{1}{2} (\psi'' - \psi') + \frac{1}{4} (\sin 2\psi'' - \sin 2\psi')$$

$$\int_{\psi'}^{\psi''} \sin \psi d\psi = -(\cos \psi'' - \cos \psi')$$

$$\int_{\psi'}^{\psi''} \cos \psi d\psi = \sin \psi'' - \sin \psi'$$

$$\int_{\psi'}^{\psi''} \sin \psi \cos \psi d\psi = \frac{1}{2} \int_{\psi'}^{\psi''} \sin 2\psi d\psi = -\frac{1}{4} (\cos 2\psi'' - \cos 2\psi')$$

$$\int_{\varphi'}^{\varphi''} \cos^2 \varphi d\varphi = \int_{\varphi'}^{\varphi''} (1 - \sin^2 \varphi) \cos \varphi d\varphi = (\sin \varphi'' - \sin \varphi') - \frac{1}{3} (\sin^3 \varphi'' - \sin^3 \varphi')$$

$$\int_{\varphi'}^{\varphi''} \sin^2 \varphi \cos \varphi d\varphi = \frac{1}{3} (\sin^3 \varphi'' - \sin^3 \varphi')$$

$$\int_{\varphi'}^{\varphi''} \cos^2 \varphi \sin \varphi d\varphi = -\frac{1}{3} (\cos^3 \varphi'' - \cos^3 \varphi')$$

ist, so erhält man statt (135) und (136) die Formeln:

$$(137) \left\{ \begin{aligned} \Delta I_1 &= c \left[\frac{1}{2} (\psi'' - \psi') - \frac{1}{4} (\sin 2\psi'' - \sin 2\psi') \right] \left[(\sin \varphi'' - \sin \varphi') - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{3} (\sin^3 \varphi'' - \sin^3 \varphi') \right] + c \frac{1}{3} (\psi'' - \psi') (\sin^3 \varphi'' - \sin^3 \varphi') \\ \Delta I_2 &= c \left[\frac{1}{2} (\psi'' - \psi') + \frac{1}{4} (\sin 2\psi'' - \sin 2\psi') \right] \left[(\sin \varphi'' - \sin \varphi') - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{3} (\sin^3 \varphi'' - \sin^3 \varphi') \right] + c \frac{1}{3} (\psi'' - \psi') (\sin^3 \varphi'' - \sin^3 \varphi') \\ \Delta I_3 &= c (\psi'' - \psi') \left[(\sin \varphi'' - \sin \varphi') - \frac{1}{3} (\sin^3 \varphi'' - \sin^3 \varphi') \right] \end{aligned} \right.$$

$$(138) \left\{ \begin{aligned} \Delta \Lambda_1 &= \frac{c}{3} (\cos \psi'' - \cos \psi') (\cos^3 \varphi'' - \cos^3 \varphi') \\ \Delta \Lambda_2 &= -\frac{c}{3} (\sin \psi'' - \sin \psi') (\cos^3 \varphi'' - \cos^3 \varphi') \\ \Delta \Lambda_3 &= -\frac{c}{4} (\cos 2\psi'' - \cos 2\psi') \left[(\sin \varphi'' - \sin \varphi') - \frac{1}{3} (\sin^3 \varphi'' - \sin^3 \varphi') \right] \end{aligned} \right.$$

Wenn die ganze Erdoberfläche mit Ozeanen und dem zugehörigen festen Meeresboden, auf dessen Dichte seine Wasserbedeckung kondensiert zu denken ist, bedeckt wäre, so hätte man in die obigen Ausdrücke

$$c = c_2 \quad \psi' = 0 \quad \psi'' = 2\pi \quad \varphi' = -\frac{\pi}{2} \quad \varphi'' = +\frac{\pi}{2}$$

einzusetzen und man bekäme auf diese Weise als isostatischen Bestandteil der Trägheits und Deviationsmomente der Erde folgende Beträge:

$$(139) \quad I_1 = I_2 = I_3 = \frac{8}{3} \pi c_2$$

$$(140) \quad \Lambda_1 = \Lambda_2 = \Lambda_3 = 0.$$

Das Vorhandensein der Kontinentalschollen ändert dieses Ergebnis, weil für alle jene Teile der Erdoberfläche, die mit Kontinenten belegt sind, in die Formeln (137) und (138) $c=c_1$ zu setzen ist. Aus diesem Grunde ist den durch (139) und (140) dargestellten Grössen noch die über die Kontinentalbedeckungen sich erstreckende Summe von Integralen (137) und (138) hinzuzufügen, nachdem man in derselben den Koeffizient c durch (c_1-c_2) ersetzt hat, weil der Betrag c_2 in den Ausdrücken (139) und (140) bereits inbegriffen ist. Bezeichnet man also die auf die gesamte Kontinentalbelegung sich erstreckende Summe der mit dem Koeffizient $c=1$ versehenen Integrale (137) und (138) mit

$$i_1, i_2, i_3, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3,$$

so erhält man die nachstehenden aus dem Vorhandensein der Kontinente und Ozeanboden sich ergebenden isostatischen Bestandteile der Trägheits- und Deviationsmomente des Erdkörpers in bezug auf die Achsen X, Y, Z des der Berechnung zugrunde gelegten Koordinatensystems:

$$(141) \quad \left\{ \begin{array}{l} I_1 = \frac{8}{3} \pi c_2 + (c_1 - c_2) i_1 \\ I_2 = \frac{8}{3} \pi c_2 + (c_1 - c_2) i_2 \\ I_3 = \frac{8}{3} \pi c_2 + (c_1 - c_2) i_3 \end{array} \right.$$

$$(142) \quad \begin{cases} \Lambda_1 = (c_1 - c_2) \lambda_1 \\ \Lambda_2 = (c_1 - c_2) \lambda_2 \\ \Lambda_3 = (c_1 - c_2) \lambda_3 . \end{cases}$$

Dabei hängen die Grössen $i_1, i_2, i_3, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ nur von den horizontalen Begrenzungslinien der Kontinentalschollen ab. Dies ist sehr wichtig, weil uns diese Begrenzungslinien bekannt sind, nur muss man sie, wie bereits angegeben, um die Formeln (137) und (138) anwenden zu können, durch aus Meridian- und Breitenkreiselementen zusammengesetzte Linienzüge ersetzen, die sich den Konturen der Kontinente genügend anschmiegen.

Hat man die Grössen i und λ berechnet, dann ergibt sich die Lage der Achsen des Trägheitstensors Ω auf folgende Weise.

Die Punkte der Erdoberfläche, in denen diese von den Achsen des Trägheitstensors Ω durchstossen wird, sind nach einer allgemeinen Eigenschaft dieser Achsen jene, für welche

$$\Lambda_1 = \Lambda_2 = \Lambda_3 = 0$$

ist. Es folgt aus (142), dass für diese Punkte auch

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

sein muss, was zu besagen hat, dass die Achsen des Trägheitstensors Ω mit den Achsen des nur die Kontinentalbelegungen beinhaltenden Trägheitstensors zusammenfallen. Die Lage dieser Achsen ergibt sich, wie im § 61 gezeigt, aus den Gleichungen (101), die jetzt wegen (141) und (142) die Form erhalten :

$$(143) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{tang } 2\varphi = \frac{2\lambda_1 \sin \psi + 2\lambda_2 \cos \psi}{i_3 - \frac{1}{2}(i_1 + i_2) - \frac{1}{2}(i_1 - i_2) \cos 2\psi + \lambda_3 \sin 2\psi} \\ \text{tang } \varphi = \frac{(i_1 - i_2) \sin 2\psi + 2\lambda_3 \cos 2\psi}{2\lambda_2 \sin \psi - 2\lambda_1 \cos 2\psi} . \end{array} \right.$$

Die Wurzeln φ und ψ dieser Gleichungen können am einfachsten graphisch ermittelt werden, indem man die beiden durch diese Gleichungen gegebenen Kurven aufzeichnet; die Koordinaten der drei Schnittpunkte dieser Kurven stellen die gesuchten Wurzeln der Gleichungen (143) dar. Die Genauigkeit der gefundenen Lösung kann durch analytische Nachrechnung beliebig gesteigert werden.

Die Gleichungen (143) ergeben im Intervall

$$-\frac{\pi}{2} < \varphi < +\frac{\pi}{2} \quad -\pi < \psi < +\pi$$

sechs Paare reeller Wurzeln. Sei φ_1, ψ_1 ein solches Wurzelpaar, so ist der isostatische Bestandteil der gesamten Decke der Erde bezüglich der durch φ_1, ψ_1 gehenden Achse wegen (99), (141) und (142) durch den Ausdruck veranschaulicht:

$$(144) \quad \Omega = \frac{8}{3} \pi c_2 + (c_1 - c_2) [i_1 \cos^2 \varphi_1 \cos^2 \psi_1 + i_2 \cos^2 \varphi_1 \sin^2 \psi_1 + i_3 \sin^2 \varphi_1 - \\ - \lambda_1 \sin 2\varphi_1 \sin \psi_1 - \lambda_2 \sin 2\varphi_1 \cos \psi_1 - \lambda_3 \cos^2 \varphi_1 \sin 2\psi_1].$$

Der eckig eingeklammerte Teil dieses Ausdruckes stellt den isostatischen Bestandteil des Trägheitsmomentes der Kontinentalbelegung für den Fall $c=1$ dar bezüglich der Achse φ_1, ψ_1 , die, wie vorstehend gezeigt, auch eine Trägheitshauptachse dieser Kontinentalbelegung ist. Bezeichnet man also die isostatischen Trägheitshauptmomente dieser Belegung mit a, b, c und, wie es im § 61 geschehen ist, mit $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ jene der gesamten isostatischen Decke der Erde, so wird:

$$(145) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Omega_1 = \frac{8}{3} \pi c_2 + (c_1 - c_2) a \\ \Omega_2 = \frac{8}{3} \pi c_2 + (c_1 - c_2) b \\ \Omega_3 = \frac{8}{3} \pi c_2 + (c_1 - c_2) c. \end{array} \right.$$

Es hängt von dem gegenseitigen Verhältnis der durch (133) und (134) gegebenen Grössen c_1 und c_2 ab, ob die Achse des maximalen Trägheitsmomentes Ω der gesamten isostatischen Decke der Erde mit der Achse des maximalen oder mit der Achse des minimalen Trägheitsmomentes der Kontinentalbelegung zusammenfällt; ersteres ist der Fall, wenn $c_1 > c_2$, letzteres, wenn $c_1 < c_2$ ist.

Hat man die Lage der Achsen des Trägheitstensors Ω und die zugehörigen Werte a, b, c ermittelt, so folgt aus (122) und (148)

$$(146) \quad k = \frac{c-a}{b-a}.$$

Mit diesem Wert kann mittels (125) und (126) die Polbahnkurve und mittels (129) und (130), worin wegen (128) und (148) für μ der Wert

$$(147) \quad \mu = \frac{2n}{r_0^2} (c_1 - c_2) (b - a)$$

zu setzen ist, die Bewegung des Poles auf seiner Bahn berechnet werden, was nun geschehen soll.

§ 65. Gang und Ergebnis der Berechnung. Wie im § 55 gezeigt, erleidet das sphärische Feld Ω keine Veränderung, wenn man beliebige Teile der iso-



Fig. 29

statischen Schale der Erde antipodisch verlagert. Man kann also bei der Ermittlung der Lage der Achsen des Tensors Ω ein Planiglob der Antipoden zur Hilfe nehmen, durch den die gesamte Kontinentalbelegung der Erde auf einer ihrer Hemisphären veranschaulicht erscheint. Ein solches Planiglob ist durch die Fig. 29 gegeben. In derselben sind die Kontinente der Erde samt ihren Schelfen und Landbrücken dargestellt, wobei durch Schraffieren gekennzeichnet ist, welche Kontinente der östlichen, welche der westlichen Hemisphäre angehören.

Die durch diese Figur dargestellte Kontinentalbelegung muss zwecks weiteren Gebrauch durch eine dynamisch äquivalente ersetzt werden, die aus lauter

sphärischen Figuren besteht, die ihrerseits durch Meridiane und Breitenkreise begrenzt sind. Dies ist durch die Fig. 30 geschehen, die auf folgende Weise zustande gekommen ist.

Weil angenommen wurde, dass die Kontinentaltafeln plattenförmig sind, mussten die in der Fig. 29 eingezeichneten Kontinente durch Streckung von ihrer hauptsächlichsten Faltungen befreit werden. Diese Faltungen betreffen das äquatoriale System, welches sich über den Atlas, die Alpen, den Kaukasus und Himalaja erstreckt, und das meridionale System der Anden. Befreit man durch Streckung den

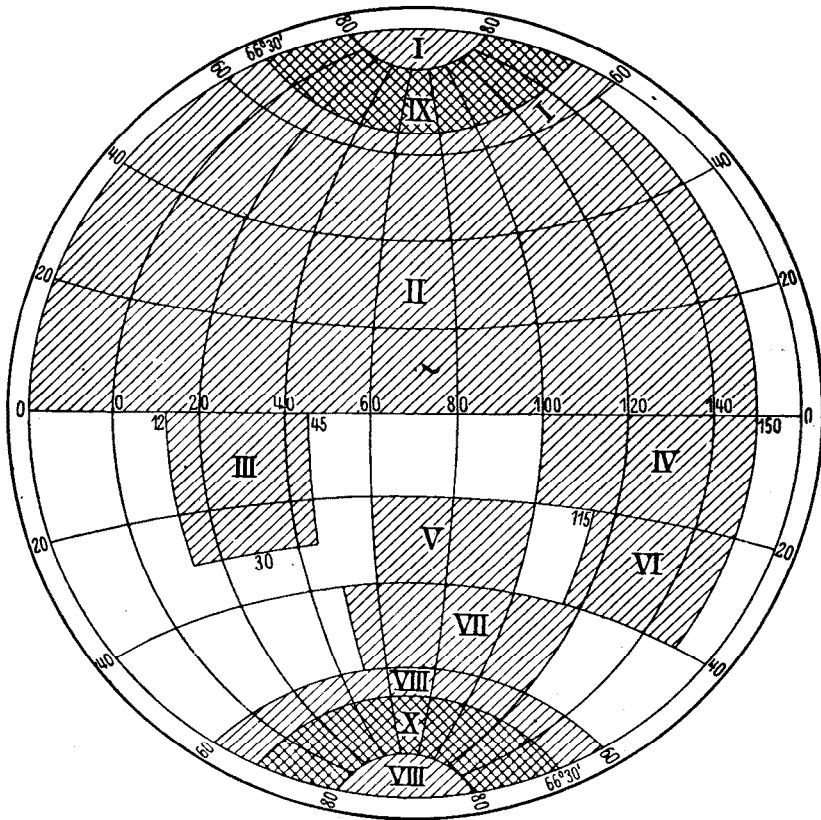


Fig. 30

europäischen Kontinent von seinem äquatorialen Faltungssystem, so wird das Mitteländische und das Schwarze Meer von Kontinenten überdeckt, während die Streckung Asiens den Aequatorkreis erreicht. Führt man noch die Glättung des meridionalen Faltungssystems durch und ersetzt die von Südamerika herrührende zweite Bedeckung durch Ausdehnung in eine einfache so gelangt man zu den sphärischen Figuren I und II. Die Zone IX ist als doppelt bedeckt zu betrachten; dasselbe gilt von der Zone X. Die Figuren III, IV, V, VI VII und VIII sind durch Umwandlung der unregelmässigen Kontinentalbelegungen in rechteckige sphärische Vierecke entstanden. Auf diese Weise ist die gesamte Kontinentalbelegung der Erde durch die

Tabelle II

Begrenzungen und dynamische Parameter der transformierten und durch die Fig. 30 dargestellten Kontinentalbelegung der Erde

| Viereck | ψ'' | ψ' | ϕ'' | ϕ' | Δi_1 | Δi_2 | Δi_3 | $\Delta \lambda_1$ | $\Delta \lambda_2$ | $\Delta \lambda_3$ |
|----------|----------|---------|----------|---------|--------------|--------------|--------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| I | 160° | -20° | 90° | 60° | 0,39395 | 0,39395 | 0,05385 | +0,07831 | +0,02850 | — |
| II | 150° | -20° | 60° | 0° | 1,64223 | 1,56971 | 1,92722 | +0,52669 | +0,24559 | +0,04320 |
| III | 45° | 12° | 0° | -30° | 0,08801 | 0,22397 | 0,26398 | -0,03167 | -0,05832 | +0,10468 |
| IV | 150° | 100° | 0° | -20° | 0,19811 | 0,11199 | 0,28683 | -0,03928 | +0,02750 | -0,11830 |
| V | 100° | 60° | -20° | -40° | 0,19936 | 0,06311 | 0,15749 | -0,08539 | -0,01506 | +0,02480 |
| VI | 150° | 115° | -20° | -40° | 0,12047 | 0,10919 | 0,13780 | -0,05621 | +0,05150 | -0,06445 |
| VII | 120° | 50° | -40° | -60° | 0,25863 | 0,17047 | 0,11640 | -0,12362 | -0,01082 | +0,00777 |
| VIII | 160° | -20° | -60° | -90° | 0,39395 | 0,39395 | 0,05385 | -0,07831 | -0,02850 | — |
| IX | 160° | -20° | 80° | 66°30' | 0,20268 | 0,20268 | 0,02033 | +0,03644 | +0,01326 | — |
| X | 160° | -20° | -66°30' | -80° | 0,20268 | 0,20268 | 0,02033 | -0,03644 | -0,01326 | — |
| Zusammen | | | | | 3,70007 | 3,44170 | 3,03808 | +0,19052 | +0,24039 | -0,00230 |

sphärischen Figuren I bis X ersetzt worden. Einen höheren Grad der Genauigkeit einer derartigen Umwandlung zu erreichen, erscheint kaum möglich, weil wir über die lokal sehr verschiedene Mächtigkeit der Kontinentalschollen keine zuverlässigen Angaben besitzen.

In der beiliegenden Tabelle II sind die Begrenzungen ψ'' , ψ' , φ'' , φ' der einzelnen mit I bis X bezeichneten sphärischen Figuren numerisch festgelegt. Setzt man diese numerischen Werte in die Formeln (137) und (138) ein, so bekommt man mit $c=1$ die in derselben Tabelle enthaltenen Beträge Δi und $\Delta \lambda$ der einzelnen Teile dieser Kontinentalbelegung zu den Trägheitsmomenten i und den Deviationsmomenten λ . Die Summe dieser Beträge ergibt:

$$(148) \quad \begin{cases} i_1 = 3,700 & i_2 = 3,442 & i_3 = 3,038 \\ \lambda_1 = 0,191 & \lambda_2 = 0,240 & \lambda_3 = -0,002. \end{cases}$$

Setzt man diese Werte in die Gleichungen (143) ein, und löst diese Gleichungen, wie vorher angegeben, nach ψ und φ auf, so bekommt man für das Intervall $-180^\circ < \psi < +180^\circ$; $-90^\circ < \varphi < +90^\circ$ folgende sechs Wurzelpaare, wobei die negative geographische Länge die westliche, und die negative Breite die südliche bedeutet.

$$(149) \quad \begin{cases} \left. \begin{array}{l} \psi_1 = +49^\circ 34' \\ \varphi_1 = +65^\circ 16' \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{unweit der} \\ \text{Petschoramündung} \end{array} & \left. \begin{array}{l} \psi_4 = -130^\circ 26' \\ \varphi_4 = -65^\circ 16' \end{array} \right\} \text{südliches Eismeer} \\ \left. \begin{array}{l} \psi_2 = -72^\circ 56' \\ \varphi_2 = +13^\circ 55' \end{array} \right\} \text{Karaisches Meer} & \left. \begin{array}{l} \psi_5 = +107^\circ 4' \\ \varphi_5 = -13^\circ 55' \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{südlich Christmas-} \\ \text{Insel} \end{array} \\ \left. \begin{array}{l} \psi_3 = -168^\circ 8' \\ \varphi_3 = +20^\circ 2' \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{südlich} \\ \text{Hawaii-Inseln} \end{array} & \left. \begin{array}{l} \psi_6 = +11^\circ 52' \\ \varphi_6 = -20^\circ 2' \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Südwest-Afrika bei} \\ \text{Giebel-Vorland} \end{array} \end{cases}$$

Die ersten drei Paare dieser Wurzeln gehören der nördlichen Hemisphäre an und die zugehörigen drei Punkte der Erdoberfläche begrenzen deren Oktant, innerhalb dessen die säkulare Bahnkurve des nördlichen Poles gelegen ist; die Bahnkurve des südlichen Poles ist zu jener des nördlichen antipodisch gelegen.

Die isostatischen Trägheitshauptmomente a, b, c der Kontinentalbelegung werden nach dem, was in Verfolg der Gleichung (144) gesagt wurde, erhalten, wenn man in den Ausdruck

$$i_1 \cos^2 \varphi \cos^2 \psi + i_2 \cos^2 \varphi \sin^2 \psi + i_3 \sin^2 \varphi - \lambda_1 \sin 2\varphi \sin \psi - \\ - \lambda_2 \sin 2\varphi \cos \psi - \lambda_3 \cos^3 \varphi \sin 2\psi$$

die Werte (148) und dann der Reihe nach die in (149) enthaltenen Werte für ψ_1, φ_1 bzw. für ψ_2, φ_2 und für ψ_3, φ_3 einsetzt. Auf diese Weise bekommt man:

$$(150) \quad a = 2,899 \quad b = 3,491 \quad c = 3,790.$$

Dem Punkte ψ_1, φ_1 entspricht der minimale, dem Punkte ψ_3, φ_3 der maximale Wert dieser drei Trägheitsmomente.

Die Ergebnisse der geologischen Forschung sprechen unzweideutig dafür, dass sich der Nordpol in der Richtung von ψ_3, φ_3 gegen ψ_1, φ_1 , und der Südpol in der Richtung von ψ_6, φ_6 gegen ψ_4, φ_4 hat bewegen müssen. Weil sich nach dem im § 61 gesagten die Pole in der Richtung vom Punkte des minimalen Wertes von Ω nach dem Punkte des maximalen Wertes von Ω bewegen, so muss

$$(151) \quad c_1 < c_2$$

sein, denn nur in einem solchen Falle entspricht nach (148) der Punkt ψ_3, φ_3 dem Minimum und der Punkt ψ_1, φ_1 dem Maximum des Skalars Ω .

Untersuchen wir, was die Ungleichheit (151) bedeutet!

Setzt man die Ausdrücke (131), (132), (133), (134) in (151) ein, so erhält man:

$$(152) \quad \varrho_1 (\varrho_0 - \varrho_1) D_1^2 < \varrho_2 (\varrho_0 - \varrho_2) D_2^2.$$

Wenn $\varrho_1 = \varrho_2$ wäre, so würde die durch die obige Ungleichheit gestellte Forderung auf die Forderung $D_1 < D_2$ hinauslaufen. Es ist aber ϱ_1 nicht gleich ϱ_2 zu setzen, denn alle Anzeichen sprechen dafür, dass der Boden der Meere ein höheres spezifisches Gewicht aufweise als das Baumaterial der Kontinente. Ich setze also voraus, dass $\varrho_2 > \varrho_1$ ist und stelle die Frage, wann bei der geringsten Abweichung von den anzunehmenden Werten für $\varrho_0, \varrho_1, \varrho_2, D_1$ die durch (152) gestellte Forderung erfüllt werden könne. Dies wird offenbar dann der Fall sein, wenn

$$(153) \quad \varrho_1 (\varrho_0 - \varrho_1) D_1^2 = \varrho_2 (\varrho_0 - \varrho_2) D_2^2$$

ist. Dabei muss noch der folgende Umstand berücksichtigt werden. Die Oberfläche der durch die Streckung eingeebnet gedachter Kontinente überragt den Meeresspiegel, also auch den Boden der Ozeane. Denkt man sich die Wasserbedeckung dieses Bodens auf dessen Dichte kondensiert und dem Meeresboden hinzugezählt, so ergibt sich eine Ueberragung der Oberfläche der Kontinentalschollen über diesem hypothetischen Boden von rund 3 Kilometer. Bezeichnet man diese Ueberragung mit h , so ergibt sich aus diesem Sachverhalt eine Bedingungsgleichung, die Berücksichtigung finden müsse. Bezeichnet H_1 die Tauchtiefe der Kontinentalschollen und H_2 jene des festen Meeresbodens, so überragt die Oberfläche der Kontinentalschollen den Spiegel des fluidalen Erdkernes um $D_1 - H_1$, d. h. wegen (10) und (131) um $2\lambda_1$, und die Oberfläche des Meeresbodens wegen (10) und (132) um $2\lambda_2$. Der Unterschied zwischen diesen beiden Ueberragungen muss der Ueber-

ragung h gleich sein, d. h. es muss die Gleichung bestehen:

$$(154) \quad 2\lambda_1 - 2\lambda_2 = h.$$

Setzt man in diese Gleichung die Ausdrücke (131) und (132) ein, so erhält man:

$$(\varrho_0 - \varrho_1) D_1 = (\varrho_0 - \varrho_2) D_2 + \varrho_0 h,$$

d. h.

$$\varrho_1 (\varrho_0 - \varrho_2) D_1 D_2 = \varrho_1 (\varrho_0 - \varrho_2) D_1 D_2 + \varrho_0 \varrho_1 h D_1.$$

Setzt man dies in (153) ein, so wird:

$$(155) \quad \varrho_1 (\varrho_0 - \varrho_2) D_1 D_2 + \varrho_0 \varrho_1 h D_1 = \varrho_2 (\varrho_0 - \varrho_2) D_2^2.$$

Von dieser Grenzbedingung angefangen, kann die Forderung (151) erfüllt werden. Ueber die numerischen Werte der in dieser Gleichung vorkommenden Grössen ϱ_0 , ϱ_1 , ϱ_2 , h sind wir nur ungefähr, hinsichtlich jener der Grössen D_1 und D_2 noch ganz ungenügend unterrichtet. Um einen ersten Anhaltspunkt dafür zu gewinnen, welches Verhältnis zwischen den Grössen D_1 und D_2 bestehen müsste, damit (151) erfüllt werde, nehmen wir an, dass die mittlere Dichte der obersten Schichten des fluidalen Erdkernes 3,4, jene der Kontinentalschollen 2,8 und jene des Meeresbodens 3,0 beträgt, setzen wir also:

$$\varrho_0 = 3,4 \quad \varrho_1 = 2,8 \quad \varrho_2 = 3,0$$

und, wie oben angegeben, $h = 3 \text{ km}$ und ausserdem

$$D_1 = 60 \text{ km}.$$

Führt man diese Werte in die Gleichung (155) ein, so erhält man die Gleichung:

$$D_2^2 - 56 D_2 = 1428,$$

in der D_2 in Kilometern zu messen ist.

Die positive Wurzel dieser quadratischen Gleichung, die allein in Betracht kommt, ist

$$D_2 = 75 \text{ km.}$$

Dies ist die mindest erforderliche Dicke des als fest zu betrachtenden Meeresbodens samt der darauf kondensierten Meeresbedeckung bei einer Dicke der Kontinentalschollen von 60 km . Berücksichtigt man, dass, wie oben angegeben, die Oberfläche der Kontinentalschollen jene des soeben definierten Meeresbodens um rund 3 km überragt, so folgt aus der obigen Berechnung, dass die Unterfläche der Kontinentalschollen jene des festen Meeresbodens mehr als um $(75 + 3 - 60) \text{ km} = 18 \text{ km}$ überragen müsse. Dieser aus dem geologisch festgestellten Richtungssinn der Polbewegung sich ergebende Sachverhalt führt zu folgenden Schlüssen. Die Fluidalität des Erdkernes ist, wie bereits gesagt, eine Funktion des Druckes und der Temperatur, so dass sie sich bei grösserem Drucke und höherer Temperatur früher einstellt als bei niedrigeren Werten des Druckes und der Temperatur. Weil auf dem Meeresboden ein kleinerer Druck und eine niedrigere Temperatur herrscht als in dem gleichen Niveau unter den Kontinenten, muss der fluidale Zustand unter den Kontinenten in einer grösseren Höhe erreicht werden als unter dem Meere. Unter diesem fluidalen Zustand ist aber bloss die Nachgiebigkeit des Materials gegen langandauernde Kräfte zu verstehen.

Um die Bahnkurve der säkularen Polwanderung und die Bewegung des Poles auf dieser Bahn zu berechnen, muss dieser Berechnung vorerst ein Koordinatensystem zugrunde gelegt werden, dessen Achsen mit den Achsen des Tensors Ω zusammenfallen, d. h. dessen Durchstosspunkte mit der Erdoberfläche die durch (149) gegebenen Punkte sind, um dann später auf das gegenwärtige Gradnetz der Erde übergehen zu können. Der Zusammenhang zwischen diesen beiden Koordinatensystemen ist durch die Fig. 31 und die daraus abgeleiteten nachstehenden Gleichungen gegeben.

Es stelle in der erwähnten Figur der Kreis $XA'YC'M'B'X$ die Erdkugel, gesehen von Norden her, und P den gegenwärtigen Nordpol dar. Die beiden

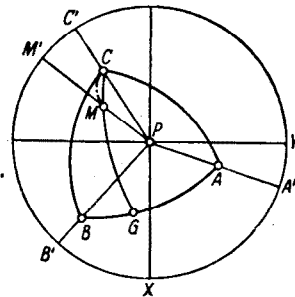


Fig. 31

soeben erwähnten Koordinatensysteme haben ihren Ursprung im Erdmittelpunkt. Das mit dem Gradnetz der Erde verbundene Koordinatensystem sei mit $X-Y-Z$ bezeichnet; seine Z -Achse fällt mit der gegenwärtigen Drehachse der Erde zusammen und ist gegen

Norden gerichtet, seine X -Achse und seine Y -Achse liegen in der Ebene des Aequators, wobei die X -Achse nach dem Schnittpunkt des Greenwicher Meridianes mit dem Aequator gerichtet ist. Die Achsen des mit den Achsen des Tensors Ω zusammenfallenden Koordinatensystems $X_1 - Y_1 - Z_1$ durchdringen die Erdoberfläche in den Punkten $A (\varphi_1, \varphi_1)$, $B (\varphi_2, \varphi_2)$, $C (\varphi_3, \varphi_3)$, die ein rechteckiges gleichseitiges sphärisches Dreieck begrenzen. Wenn $c_1 > c_2$ wäre, würde der Punkt A dem Minimum von Ω , der Punkt C dem Maximum von Ω entsprechen; weil aber $c_1 < c_2$ ist, so ist das Umgekehrte der Fall. Wir wollen aber trotzdem die Achsen des Koordinatensystems $X_1 - Y_1 - Z_1$ in dieser Reihenfolge nach den Punkten A, B, C richten, dafür aber später den entsprechenden Sinn der Polbewegung berücksichtigen. Sei M ein beliebiger Punkt der Polbahnkurve, dann sind dessen Polarkoordinaten Ψ und Φ in bezug auf das Koordinatensystem $X_1 - Y_1 - Z_1$ durch die nachstehenden sphärischen Bogen veranschaulicht:

$$\Psi = \text{arc } AG \qquad \Phi = \text{arc } GM,$$

während die Polarkoordinaten ψ und φ bezüglich des gegenwärtigen Gradnetzes der Erde, d. h. die geographischen Koordinaten des Punktes M dargestellt sind durch:

$$\psi = \text{arc } XYM' \qquad \varphi = 90^\circ - \text{arc } PM.$$

Für die geographischen Koordinaten $\varphi_1, \psi_1; \varphi_2, \psi_2; \varphi_3, \psi_3$ der Punkte A, B, C ergeben sich, wenn man durch diese Punkte und durch den Punkt P die grössten Kreise PA, PB, PC legt, folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned} \text{arc } PA &= 90^\circ - \varphi_1 & \text{arc } PB &= 90^\circ - \varphi_2 & \text{arc } PC &= 90^\circ - \varphi_3 \\ \text{arc } XA' &= \psi_1 & \text{arc } XYB &= \psi_2 & \text{arc } XYC &= \psi_3. \end{aligned}$$

Die gegenwärtige Drehachse der Erde schliesst mit den Achsen X_1, Y_1, Z_1 die Winkel $(90^\circ - \varphi_1), (90^\circ - \varphi_2), (90^\circ - \varphi_3)$ ein, weshalb die Koordinaten des gegenwärtigen Rotationspoles der Erde bezogen auf dieses Koordinatensystem durch die Ausdrücke:

$$x = r_0 \sin \varphi_1 \qquad y = r_0 \sin \varphi_2 \qquad z = r_0 \sin \varphi_3$$

veranschaulicht sind. Diese Koordinaten sind, weil Φ_0 und Ψ_0 die polaren Koordinaten des Rotationspoles in bezug auf dasselbe Koordinatensystem bedeuten, analog den Ausdrücken (15) durch die Gleichungen gegeben:

$$x = r_0 \cos \Phi_0 \cos \Psi_0 \qquad y = r_0 \cos \Phi_0 \sin \Psi_0 \qquad z = r_0 \sin \Phi_0.$$

Es folgt aus den vorstehenden Gleichungen:

$$(156) \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos \Phi_0 \cos \Psi_0 = \sin \varphi_1 \\ \cos \Phi_0 \sin \Psi_0 = \sin \varphi_2 \\ \sin \Phi_0 = \sin \varphi_3, \end{array} \right.$$

wodurch die gegenwärtige Lage des Rotationspoles in bezug auf das Koordinatensystem $X_1—Y_1—Z_1$ gegeben ist.

Gehen wir nach diesen Vorbemerkungen auf die Berechnung der Polbahnkurve über.

Setzt man die numerischen Werte (150) in die Formel (146) ein, so erhält man:

$$(157) \quad k = 1,505.$$

Durch diesen Parameter und durch die gegenwärtige Lage des nördlichen Drehpoles der Erde ist nach (125) und (126) die Kurve eindeutig gegeben längs welcher sich der nördliche Drehpol der Erde während der Vorzeit bewegt hat und auch in Zukunft bewegen wird. Weil bei der Berechnung von (150) $c = 1$ zu setzen war, hängt diese Kurve unter Voraussetzung plattenförmiger Kontinentalschollen nur von den horizontalen Konturen dieser Schollen bzw. von den diese Schollen ersetzenden sphärischen Figuren I bis X ab. Wie mächtig diese Schollen sind und wie tief sie in den fluidalen Erdkern hineinreichen, dies ist für die Form und die Lage der Polbahnkurve ohne Belang und nur für den Richtungssinn der Bewegung des Poles längs dieser Kurve von Bedeutung. Diese Richtung der Polbewegung ist durch das Vorzeichen des numerischen Wertes des durch (147) gegebenen Koeffizienten μ gegeben, und weil nach (151) und (147) μ eine negative Zahl ist, wofern wir die Zeit positiv in die Zukunft zählen, so ist in der Gleichung (129), durch welche die Bewegung des Poles längs seiner Bahn gegeben ist, μ durch eine negative Zahl zu veranschaulichen. Diese Zahl kann aus den erdgeschichtlichen Angaben über den zeitlichen Verlauf der Polverlagerungen ermittelt werden, was nachträglich geschehen soll. Vorläufig soll für μ der willkürliche Wert

$$(158) \quad \mu = -0,2$$

gesetzt werden, um nachher das Zeitmass der Polbewegung zu bestimmen, welches diesem Wert von μ entspricht. Die Ermittlung der Polbahnkurve und des zeitlichen Verlaufes der Polbewegung geschieht auf folgende Weise.

Setzt man in die Gleichungen (156) die durch (149) gegebenen numerischen Werte für $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ ein, so erhält man

$$(159) \quad \Phi_0 = 20^\circ 2' \quad \Psi_0 = 14^\circ 50'$$

Tabelle III

Die Koordinaten von 25 Punkten der säkularen Bahnkurve des nördlichen Drehpoles der Erde, bezogen auf das mit den Achsen des Tensors Ω zusammenfallende Koordinatensystem

| t | Ψ | Φ | t | Ψ | Φ |
|-----------|---------------------|---------------------|-----------|----------------|----------------|
| $-\infty$ | | 90° | -3 | $25^\circ 45'$ | $39^\circ 58'$ |
| -40 | $89^\circ 55' 39''$ | $89^\circ 17' 29''$ | -2 | $21^\circ 33'$ | $32^\circ 38'$ |
| -30 | $89^\circ 27' 49''$ | $88^\circ 3' 26''$ | -1 | $17^\circ 55'$ | $25^\circ 52'$ |
| -20 | $86^\circ 2' 36''$ | $84^\circ 40' 1''$ | 0 | $14^\circ 50'$ | $20^\circ 2'$ |
| -15 | $79^\circ 21'$ | $81^\circ 5'$ | $+1$ | $12^\circ 14'$ | $15^\circ 16'$ |
| -12 | $71^\circ 5'$ | $77^\circ 31'$ | $+2$ | $10^\circ 4'$ | $11^\circ 30'$ |
| -10 | $62^\circ 56'$ | $74^\circ 29'$ | $+3$ | $8^\circ 16'$ | $8^\circ 36'$ |
| -9 | $58^\circ 2'$ | $71^\circ 33'$ | $+4$ | $6^\circ 47'$ | $6^\circ 25'$ |
| -8 | $52^\circ 41'$ | $68^\circ 31'$ | $+6$ | $4^\circ 34'$ | $3^\circ 32'$ |
| -7 | $47^\circ 2'$ | $64^\circ 41'$ | $+10$ | $2^\circ 3'$ | $1^\circ 4'$ |
| -6 | $41^\circ 19'$ | $59^\circ 53'$ | $+15$ | $0^\circ 45'$ | $0^\circ 14'$ |
| -5 | $35^\circ 45'$ | $54^\circ 3'$ | $+\infty$ | 0 | 0 |
| -4 | $30^\circ 31'$ | $44^\circ 17'$ | | | |

als die Koordinaten des nördlichen Drehpoles der Erde in bezug auf das Koordinatensystem $X_1 - Y_1 - Z_1$.

Setzt man die numerischen Werte (158) und (159) in die Formeln (126) und (130) ein, so erhält man:

$$(160) \quad C_1 = 0,35886$$

$$(161) \quad C_2 = 0,26480.$$

Logarithmiert man die Gleichung (129) und transformiert man sie von den natürlichen auf die Briggschen Logarithmen, so bekommt man mit Benützung der vorstehenden numerischen Werte für μ und C_2 die Gleichung:

$$(162) \quad \log \tan \Psi = -0,086859 t - 0,57708.$$

Indem man der Zeit t die Zahlen

$$-\infty, -40, -30, -20, -15, -12, -10, -9, -8, -7, -6, \\ -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 6, 10, 15, +\infty$$

zuweist, bekommt man mittels der vorstehenden Formel die Koordinaten Ψ jener Punkte der Polbahn, die diese Kurve in Strecken teilen, die den obigen relativen Zeitintervallen entsprechen. Die Formel (125) liefert dann mit den vorstehenden numerischen Werten für k und C_1 die zugehörige Koordinaten Φ . Auf diese Weise ist die beiliegende Tabelle III entstanden; dieselbe enthält die Koordinaten Ψ und Φ von 25 Punkten der säkularen Bahn des nördlichen Poles der Erde samt den zugehörigen obigen Werten der relativen Zeit t , die bei der Berechnung der Polbahn als Parameter benützt wurde.

Die auf diese Weise gewonnenen Koordinaten, die sich auf das Koordinatensystem $X_1-Y_1-Z_1$ beziehen, müssen zwecks weiteren Gebrauchs auf das Koordinatensystem $X-Y-Z$, d. h. auf das gegenwärtige Gradnetz der Erde transformiert werden. Dies geschieht auf folgende Weise.

Aus dem rechtwinkligen sphärischen Dreieck AGM (Fig. 31) folgt, wenn man dessen Winkel bei A mit α bezeichnet,

$$(163) \quad \tan \alpha = \frac{\tan \Phi}{\sin \Psi},$$

und aus dem sphärischen Dreieck APB , dessen Seite AB gleich 90° ist, wenn man den Winkel bei A mit β bezeichnet,

$$(164) \quad \cos \beta = \frac{\sin \varphi_2}{\cos \varphi_1}.$$

Im sphärischen Dreieck APM ist der Winkel bei A gleich $(\alpha - \beta)$, die Seite PA gleich $(90^\circ - \varphi_1)$, die Seite PM gleich $(90^\circ - \varphi)$, der Winkel bei P gleich $(\psi - \varphi_1)$, so dass man bekommt, wenn man die Seite AM mit ξ bezeichnet,

$$(165) \quad \sin \varphi = \cos \xi \sin \varphi_1 + \sin \xi \cos \varphi_1 \cos (\alpha - \beta).$$

Die Grösse ξ lässt sich aus dem rechtwinkligen sphärischen Dreieck AMG berechnen und es wird:

$$(166) \quad \cos \xi = \cos \Phi \cos \Psi.$$

Es folgt aus (165):

Tabelle IV
Die Koordinaten von je 25 Punkten der beiden Polbahnkurven

| Zeit von der Gegenwart aus positiv in die Zukunft, negativ in die Vergangen- heit gezählt, gemessen mit einer Zeit- einheit, deren absolute Länge empirisch er- mittelt werden muss | Die auf das gegenwärtige Gradnetz der Erde sich beziehende geographische | | | |
|---|---|-----------|--------------|-----------|
| | Länge | Breite | Länge | Breite |
| | der jeweiligen Lage | | | |
| | des Nordpoles | | des Südpoles | |
| der Erde | | | | |
| —∞ | — 168° 8' | + 20° 2' | + 11° 52' | — 20° 2' |
| — 40 | — 167° 26' | + 20° 12' | + 12° 34' | — 20° 12' |
| — 30 | — 166° 10' | + 20° 34' | + 13° 50' | — 20° 34' |
| — 20 | — 162° 43' | + 21° 39' | + 17° 17' | — 21° 39' |
| — 15 | — 159° 21' | + 23° 36' | + 20° 39' | — 23° 36' |
| — 12 | — 156° 35' | + 26° 35' | + 23° 25' | — 26° 35' |
| — 10 | — 154° 56' | + 30° 5' | + 25° 4' | — 30° 5' |
| — 9 | — 153° 13' | + 32° 46' | + 26° 47' | — 32° 46' |
| — 8 | — 151° 59' | + 36° 10' | + 28° 1' | — 36° 10' |
| — 7 | — 150° 43' | + 40° 30' | + 29° 17' | — 40° 30' |
| — 6 | — 149° 24' | + 45° 55' | + 30° 36' | — 45° 55' |
| — 5 | — 148° 3' | + 52° 25' | + 31° 57' | — 52° 25' |
| — 4 | — 146° 42' | + 59° 54' | + 33° 18' | — 59° 54' |
| — 3 | — 145° 23' | + 67° 58' | + 34° 37' | — 67° 58' |
| — 2 | — 144° 3' | + 76° 1' | + 35° 57' | — 76° 1' |
| — 1 | — 142° 51' | + 83° 30' | + 37° 9' | — 83° 30' |
| 0 | — | + 90° | — | — 90° |
| + 1 | + 39° 43' | + 84° 38' | — 140° 17' | — 84° 38' |
| + 2 | + 40° 46' | + 80° 22' | — 139° 14' | — 80° 22' |
| + 3 | + 41° 49' | + 77° 0' | — 138° 11' | — 77° 0' |
| + 4 | + 42° 47' | + 74° 19' | — 137° 13' | — 74° 19' |
| + 6 | + 44° 25' | + 70° 44' | — 135° 35' | — 70° 44' |
| + 10 | + 46° 48' | + 67° 18' | — 133° 12' | — 67° 18' |
| + 15 | + 48° 24' | + 65° 53' | — 131° 36' | — 65° 53' |
| +∞ | + 49° 34' | + 65° 16' | — 130° 26' | — 65° 16' |

$$\sin \varphi = \cos \xi [\sin \varphi_1 + \operatorname{tang} \xi \cos \varphi_1 \cos(\alpha - \beta)]$$

und es wird, wenn man

$$(169) \quad \operatorname{tang} \xi \cos(\alpha - \beta) = \operatorname{tang} \gamma$$

setzt,

$$(168) \quad \sin \varphi = \frac{\cos \xi \sin(\varphi_1 + \gamma)}{\cos \gamma},$$

wodurch φ gegeben ist.

Es folgt aus dem sphärischen Dreieck APM mit Benützung des Sinussatzes:

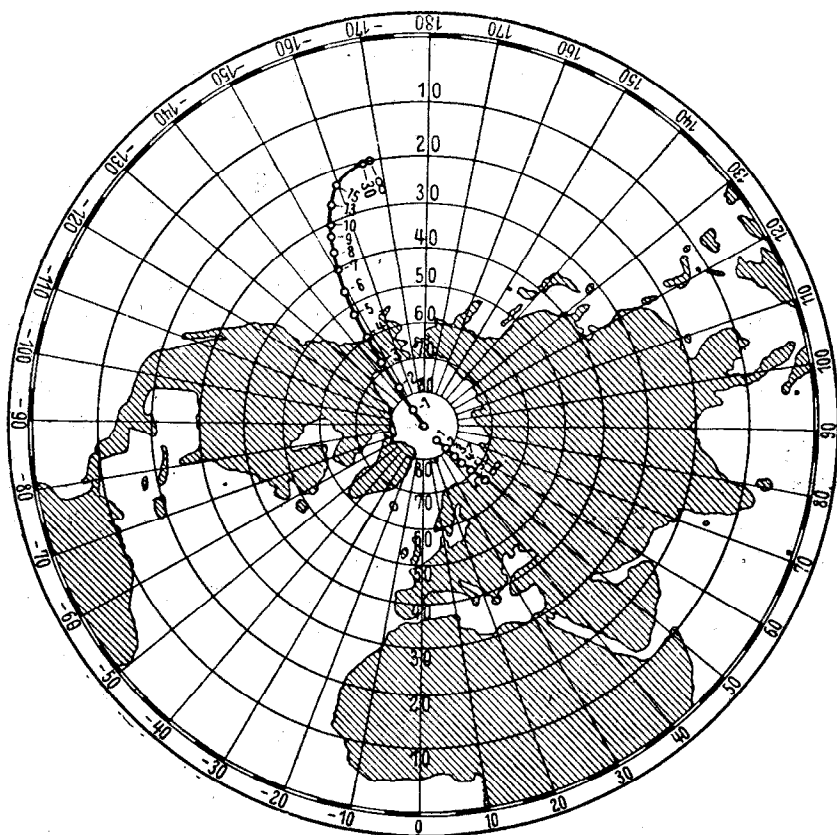
$$(169) \quad \sin(\psi - \psi_1) = \frac{\sin \xi \sin(\alpha - \beta)}{\cos \varphi},$$

wodurch ψ gegeben ist.

Mit Benützung der vorstehenden Formeln kann man für jeden beliebigen Punkt der mittels der Koordinaten Φ und Ψ dargestellten Polbahnkurve die dem gegenwärtigen Gradnetz der Erde entsprechenden Koordinaten φ und ψ berechnen.

Auf diese Weise ist die beiliegende Tabelle IV entstanden, die die endgültigen Resultate meiner Berechnung wiedergibt; dieselbe enthält die auf das gegenwärtige Gradnetz der Erde sich beziehenden Koordinaten von je 25 Punkten der säkularen Bahnkurve des nördlichen bzw. des südlichen Drehpoles der Erde. Je 16 dieser Punkte gehören der Vergangenheit, 8 der Zukunft an.

§ 66. Vergleich des durch die vorstehende Berechnung erhaltenen Ergebnisses mit den Dokumenten der Erdgeschichte. Die durch die vorstehende Berechnung erhaltene säkulare Bahnkurve des nördlichen Drehpoles der Erde ist in der Fig. 32 kartographisch dargestellt. Aus dieser Figur ist zu ersehen, dass sich dieser Pol vor unendlich langen Zeiträumen weit im Pazifischen Ozean, an der geographischen Breite von rund 20° nördlich und an der geographischen Länge von rund 168° westlich befunden hat. Es ist dies eine labile Lage des Gleichgewichts, die der Pol bei der geringsten Störung, und solcher gab es während der Vorzeit viele, hat verlassen müssen. Trotzdem hat es sehr langer Zeiten gebraucht, bis sich der Pol aus dieser Lage entfernen konnte, denn in der Umgebung dieser Stellung ist der Gradient des Trägheitsmomentfeldes Ω und dadurch auch die Geschwindigkeit der Polverlagerung ausserordentlich klein. Erst als sich der Pol um 1° bis 2° aus jener labilen Lage des Gleichgewichts entfernt hatte, erhielt seine Bewegung einen fühlbaren Schwung. Der Pol bewegte sich, seine Anfangslage verlassend, zuerst in östlicher Richtung, um dann, allmählich nach links umbiegend, den Weg gegen Norden einzuschlagen. Dabei wurde die Geschwindigkeit seiner



Die säkulare Bahn des nördlichen Drehpoles der Erde
Fig. 32

Bewegung immer grösser, um an der geographischen Breite von 64° ihr Maximum zu erreichen. Die Geschwindigkeit der Bewegung nahm dann fast unmerklich ab, so dass der Pol mit nur wenig verminderter Geschwindigkeit die Nordwestecke des amerikanischen Kontinents überquerte und mit weiter abnehmender Geschwindigkeit seine gegenwärtige Lage erreichte. Von da ab wird er sich mit ständig abnehmender Geschwindigkeit dem an der geographischen Breite von $65^{\circ} 16'$ nördlich und an der geographischen Länge von $49^{\circ} 34'$ östlich (unweit der Petschoramündung) liegenden Endpunkt seiner Bahn asymptotisch nähern, um ihn nach unendlich langer Zeit zu erreichen. Die Bewegung des südlichen Drehpoles der Erde erfolgte antipodisch der soeben beschriebenen.

Die aus dem im Kapitel XI beschriebenen Mechanismus sich ergebende Bewegung der Drehpole der Erde ist also eine aperiodische, d. h. eine ihrem Wesen nach grundverschiedene von jener, wie sie von Reibisch, Kreichgauer, Simroth¹⁾ und dem bereits erwähnten Loeffelholz von Colberg angenommen und gelehrt wurde. Nach dem hier entwickelten Mechanismus hat jeder der beiden Drehpole der Erde eine nicht umkehrbare Bewegung vollführt, wobei

¹⁾ Reibisch, Ein Gestaltungsprinzip der Erde, Jahresberichte d. Ver. f. Erdkunde zu Dresden. 1901, 1905. — Kreichgauer, Die Aequatorfrage in der Geologie, Steyl 1902; 2. Aufl. 1926. — Simroth, Die Pendulationstheorie. Leipzig 1907,

die durch diese Bewegung erzielbare maximale Entfernung zwischen der Anfangslage und der Endlage 90° Breiteregrade beträgt.

Auch zahlreiche geologische Zeugnisse sprechen unzweideutig dafür, dass sich die Lage der Klimazonen der Erde, also auch jene der beiden Pole, im Laufe der Vorzeit sehr beträchtlich geändert haben musste. Mit Benützung dieser Zeugnisse war es möglich, die Verlagerungen des Erdäquators und der zugehörigen Pole mit einiger Sicherheit durch die Vorzeit zu verfolgen. W. Köppen hat diese auf empirischem Wege gewonnene Polbahnen besprochen und mit der von mir berechneten Polbahn verglichen (Meteorologische Zeitschrift 1940). Ich will diesen Vergleich mit der von Reichgauer entworfenen Polbahn durchführen, die sich ohne Berücksichtigung der Kontinentalverschiebungen ergeben hat, was den hier gemachten Voraussetzungen vollkommen entspricht. Zu diesem Zwecke benütze ich eine von Reichgauer herrührende Erdkarte, die Wegener in seinem Werke veröffentlicht hat und die mit einer sogleich zu besprechenden Ergänzung in der beiliegenden Fig. 33 wiedergegeben ist. Man erblickt darin die Lagen der beiden Pole zur Zeit des Silurs, des Karbons und des Tertiärs samt den zugehörigen Äquatorkreisen. Ein dicker vermutlich von Wegener eingezeichneter Strich, der vom Karbon-Nordpol längs des Meridiankreises von 150° westlicher Länge gegen Norden führt, gibt die beiläufige mittlere Bahn des Nordpoles an. Diese Figur ist durch die Eintragung der hier berechneten Bahnkurve des nördlichen Drehpoles der Erde ergänzt worden. Dies geschah in der Weise, dass neun Punkte dieser Kurve, durch kleine Kreise umringelt und durch die der Fig. 32 entnommene Numerierung versehen, an den aus der Berechnung sich ergebenden Stellen eingezeichnet wurden. Der dadurch ermöglichte Vergleich der beiden Polbahnkurven, der empirisch bzw. der rechnerisch gefundenen, ist geradezu verblüffend: beide Kurven überdecken sich vom $40.$ Breiteregrad an fast vollständig.

Ohne diese ausgezeichnete Uebereinstimmung, die wohl auch auf einem wunderbaren Zufall beruht, zu überschätzen, kann gesagt werden, dass die hier aus der Konfiguration der Erdkruste berechnete Bahn der beiden Pole der Erde mit den bisherigen Ergebnissen der geologischen Forschung im Einklang steht. Diese Uebereinstimmung ermöglicht, die der Berechnung zugrunde gelegte Zeiteinheit im absolutem Masse auszudrücken, um auf diese Weise einen Einblick auch in den zeitlichen Verlauf der Polverlagerungen zu gewinnen.

§ 67. Der zeitliche Verlauf der Polverlagerungen. Alle Forscher, die sich bemüht hatten, die Klimazonen des Karbon-Zeitalters auf Grund der geologischen Dokumente zu rekonstruieren, sind darin einig, dass in jenem Zeitalter der Nordpol der Erde im Pazifischen Ozean lag. Reichgauer gibt, wie aus der Fig. 33 ersichtlich, die Lage an, die durch die geographische Breite von 35° nördlich und die geographische Länge von 147° gekennzeichnet ist; Köppen und Wegener weisen diesem Pole eine geographische Breite von 30° und eine geographische Länge von 150° zu. In beiden Fällen lag der Nordpol in der unmittelbaren Nähe der aus der Berechnung sich ergebenden Polbahnkurve. Im ersten Falle lag er bei dem mit -8 gekennzeichneten Punkt der Bahnkurve, im zweiten bei dem Punkt, der mit -10 bezeichnet ist.

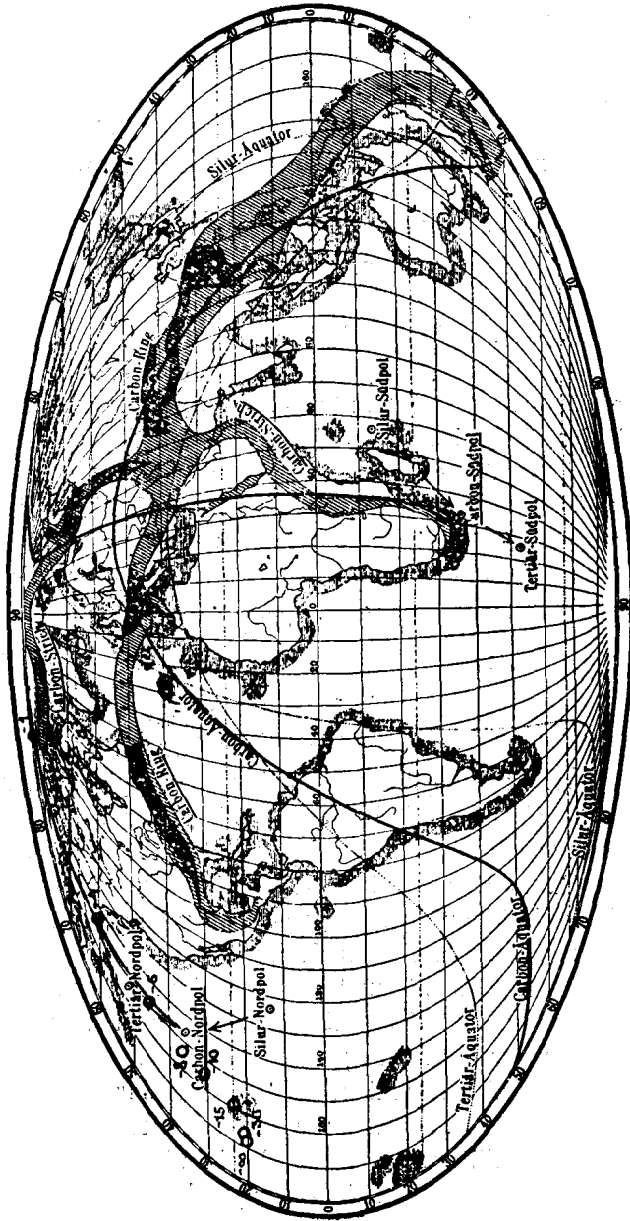


Fig. 33

Die auf Grund radioaktiver Substanzen durchgeführte absolute Zeitmessung hat mit ziemlicher Sicherheit ergeben, dass seit der Mitte des Karbonzeitalters rund 300 Millionen Jahre verflissen sind. Nimmt man also an, der Karbon-Pol sei bei dem mit -10 bezeichneten Punkt der Polbahnkurve zu suchen, so besagt dies, dass 10 Zeiteinheiten, die meiner Berechnung zugrunde gelegt werden, einer Zeitspanne von 300 Millionen Jahren entsprechen. Einer solchen Zeiteinheit entspricht also eine absolute Länge von 30 Millionen Jahren. Man hätte also die in der ersten Kolumne der auf der Seite 275 befindlichen Tabelle enthaltenen Zahlen mit 30 zu multiplizieren, um den zeitlichen Verlauf der Polwanderungen in Jahrmillionen auszudrücken.

Nimmt man dagegen an, dem Karbon-Pol entspreche der Punkt -8 der Polbahnkurve, so gelangt man zu einer absoluten Länge der obigen Zeiteinheit von 37,5 Jahrmillionen.

Die beiden obigen absoluten Werte der Zeiteinheit stellen wohl nur ihre obere Grenze dar. Die empirische Lagebestimmung des Karbon-Poles ist nicht derart zuverlässig, um diese Lage auf Grade genau angeben zu können; sie ist einem unvermeidlichen Fehler von mindestens $\pm 5^\circ$ behaftet. Auch die durch die Berechnung sich ergebende Lage der einzelnen Punkte der Polbahn kann nicht als absolut zuverlässig betrachtet werden, weil wir über die Konfiguration der Erdkruste nur unvollkommen unterrichtet sind. Aus diesem Grunde muss damit gerechnet werden, dass die berechneten Koordinaten der Trägheitspole dieser Kruste ebenfalls mit einem Fehler von $\pm 5^\circ$ behaftet sind. Deshalb ist es wohl möglich, dass die tatsächliche Lage des Karbon-Poles in unmittelbarer Nähe des Trägheitspoles, also des mit $-\infty$ gekennzeichneten Punktes der Polbahn gelegen war. In einem solchen Falle wäre die Ermittlung der absoluten Länge der benützten Zeiteinheit nicht gut möglich, denn in der Umgebung dieser Lage liegen die Punkte der Polbahn, die den einzelnen Vielfachen der Zeiteinheit entsprechen, so nahe aneinander, dass die erzielbare Genauigkeit bei der Bestimmung der Lage des Drehpoles bzw. jener des Trägheitspoles viel zu gering ist, um entscheiden zu können, bei welchem Punkte der Bahnkurve der Pol sich wirklich befunden hätte. In diesem kritischen Falle steht uns ein anderer Weg offen, um den unteren Grenzwert der absoluten Länge unserer Zeiteinheit festzulegen.

Die Beobachtungen des Internationalen Breitendienstes ergeben eine säkulare Polwanderung von etwa $1^\circ 20'$ pro Jahrmillion. Die beiden mit -1 bzw. mit $+1$ bezeichneten Punkte der in der Fig. 32 veranschaulichten Polbahnkurve liegen wie aus der Tabelle, Seite 275, ersichtlich, $11^\circ 52'$ voneinander entfernt. Die Zurücklegung dieser Strecke mit der soeben angegebenen Geschwindigkeit der Polwanderung würde rund 9 Jahrmillione erfordern. Weil dieser Zurücklegung zwei der Berechnung zugrunde gelegte Zeiteinheiten entsprechen, so würde die absolute Länge einer solchen Zeiteinheit 4,5 Jahrmillionen betragen.

Es folgt aus dem oben gesagten, dass mit Benützung der bisherigen empirischen Ermittlungen der Lage des Poles während der Vorzeit und der auf Grund radioaktiver Substanzen durchgeführten zugehörigen Zeitbestimmung die absolute Länge der oben benutzten Zeiteinheit nur ihrer Grössenordnung nach festlegen kann. Sie dürfte zwischen 5 und 30 Jahrmillionen liegen. Damit gewinnt man immerhin einen Einblick in den zeitlichen Verlauf der Polverlagerungen.

Diese Verlagerung verlief auf alle Fälle äusserst langsam, so dass sie sich während des Zeitintervalles der letztverflossenen 600 Jahrtausende nicht fühlbar gemacht hatte, weshalb man sie bei der Berechnungen des säkularen Ganges der Erdbestahlung nicht zu berücksichtigen braucht. Die Verlagerungen der Erdpole hatten keinen Einfluss auf den Verlauf des quartären Eiszeitalters.

§ 68. Der Einfluss der Polverlagerungen auf die Orientierung der Erdachse im Weltraume. Jede Verlagerung der Drehachse im Erdkörper ist mit einer Aenderung der Orientierung dieser Achse im Weltraume verknüpft, wie dies im zweiten Abschnitt dieses Buches ausführlich begründet erscheint. Beide Bewegungen hängen, wie im § 30 gezeigt, derart zusammen, dass die Drehachse der Erde im Erdkörper selbst den Polhodiekegel, im Raume aber den Herpolhodiekegel beschreibt, so dass die Drehbewegung der Erde derart vor sich geht, wie wenn der mit der Erde fest verbundene Polhodiekegel auf dem Herpolhodiekegel ohne zu gleiten rollen würde

Die vorstehend ermittelte und durch die Fig. 32 veranschaulichte säkulare Bahnkurve des nördlichen Drehpoles der Erde stellt den Schnitt des Polhodiekegel mit der Erdoberfläche dar. Dadurch ist dieser Kegel selbst eindeutig gegeben. Die Erdachse verlagert sich auf diesem Kegel mit einer Geschwindigkeit, deren Grenzen soeben festgestellt werden konnten. Dabei vollführt die Erde während eines Sterntages eine volle Drehung in bezug auf den Fixsternhimmel. Dies alles ermöglicht, auch jene Grenzen zu ermitteln innerhalb deren der Herpolhodiekegel eingeschlossen erscheint.

Die obere Grenze der Oeffnung des Herpolhodiekegels wird erhalten, wenn man der Polverlagerung die obere Grenze ihrer Geschwindigkeit zuweist. Mit seiner gegenwärtig möglichen maximalen Geschwindigkeit verlagert sich der Drehpol um $5^{\circ} 56'$ pro Zeitintervall von 4,5 Jahrillionen. Als der Drehpol einst an der geographischen Breite von 64° seine grösste Verlagerungsgeschwindigkeit erreicht hatte, hat er sich, wie aus der Tabelle, Seite 275 ersichtlich, während des obigen Zeitintervalles von 4,5 Jahrillionen um 8° verlagert. Die Geschwindigkeit seiner Verlagerung betrug also damals $0''000175$ pro Sterntag. Auf der Erdoberfläche ist $arc 1'' = 30,85 m$, so dass die schnellste Verlagerung des Drehpoles auf der Erdoberfläche 0,73 Millimeter pro Sterntag betrug. Diese sehr kleine Länge stellt als Folge des erwähnten Abrollens des Polhodiekegels auf dem Herpolhodiekegel den Umfang des Schnittes des Herpolhodiekegels mit der Erdoberfläche dar. Dies beweist, dass dieser Kegel ausserordentlich spitz ist und deshalb die räumliche Orientierung der Drehachse der Erde in bezug auf den Fixsternhimmel durch die säkularen Polverlagerungen fast gar nicht geändert wird. Diese Orientierung wird nur durch die im zweiten Abschnitt dieses Buches ausführlich behandelte Präzession und Nutation der Erdachse auf die dort beschriebene Weise geändert, was bei der Berechnung der säkularen Aenderungen der Erdbestahlung berücksichtigt werden muss.

Für einen ausserhalb der Erde befindlichen Beschauer verlaufen die Verlagerungen der Pole in der Weise, dass ihre Verbindungslinie, d. h. die Erdachse im Raume ihre Orientierung behält, aber die Erdkruste über ihrer Unterlage sich

derart verschiebt, dass der Nordpol der Erde die durch die Fig. 32 dargestellte Kurve auf der Erdoberfläche verzeichnet.

§ 69. Nebeneinflüsse. Die hier berechnete und in der Fig. 32 eingezeichnete Kurve stellt die ungestörte Bahn des nördlichen Drehpoles in bezug auf die Erdoberfläche dar. Die Bahn des Südpoles liegt antipodisch gelagert zu jener des Nordpoles. Beide Kurve haben während der Vorzeit mancherlei Veränderungen erfahren, denn jede Aenderung des vorstehend als permanent vorausgesetzten Trägheitsmomentfeldes Ω der Erdkruste beeinflusst, wie dies schon aus der Grundgleichung (45) der Polverlagerungen unmittelbar folgt, die Bewegung der Drehpole. Damit sich aber diese Einflüsse fühlbar machen, müssen die Veränderungen des Trägheitsmomentfeldes einen entsprechenden Schwellenwert erreichen. Es ist Aufgabe geophysikalischer Forschung, festzustellen, wie und wann solche Veränderungen des Antlitzes der Erde stattgefunden haben. Dann wird es mit Hilfe der Grundgleichung (45), in der Ω nicht mehr als konstant zu betrachten ist, möglich sein, die Störungen der Polbahnkurven zu ermitteln. Eine dieser Störungen kann schon jetzt besprochen werden. Sie fand während der quartären Eiszeit statt. Die damals über einen grossen Teil von Europa und Nordamerika lagernde mächtige Eisdecke hat, wie dies rechnerisch ermittelt werden kann, den Trägheitspol der Erde längs des Meridianes von $105^{\circ} 2'$ östlich, also in der Richtung gegen das Kap Tscheljuskin um $9'$ verlagert. Dies wäre also die Richtung und das Ausmass der Anomalie des Trägheitspoles, die, wie dies aus der Gleichung (43) folgt, dem Geschwindigkeitsvektor v der durch diese Anomalie hervorgerufenen Polverlagerung proportional ist. Die durch die Eisbedeckungen hervorgerufene Störung des Feldes Ω hatte also das Bestreben, die säkulare Bewegung des Nordpoles in der angegebenen Richtung, also gegen Osten abzulenken. Dieses Bestreben dauerte nicht lange, denn die von Eis bedeckten Teile der Kontinentalschollen tauchten, dem Isostasieprinzip gehorchend, allmählich tiefer in ihre fluidale Unterlage ein, wodurch sich jene Anomalie und dadurch auch der Geschwindigkeitsvektor der Polbewegung verminderten. Als aber nachher, mit dem Eintritt warmer Zeiten, die Eisdecke weggeräumt wurde, die entlasteten Kontinentalschollen aber noch nicht zu ihrer ursprünglichen Tauchtiefe emporgestiegen waren, änderte die Anomalie des Trägheitspoles und damit auch die störende Kraft ihr Vorzeichen, so dass sie in der Richtung des Meridianes von 75° westlich wirksam wurde. Dies ist, weil das Empor-tauchen der einst belasteten Kontinentalschollen noch nicht ganz beendet ist, auch gegenwärtig der Fall, so dass der Pol noch immer gegen Westen abgelenkt wird. Er kehrt dadurch zu seiner ursprünglichen Bahnkurve zurück, um bis zu der nächsten Störung in ihr zu verbleiben.

VIERTER ABSCHNITT

Die Bestrahlung der Erde durch die Sonne und die säkularen Aenderungen dieser Bestrahlung

KAPITEL XIII

Der gegenwärtige Bestrahlungszustand der Erde

§ 70. Die Solarkonstante. Die Sonne ist eine unerschöpflich scheinende Quelle der strahlenden Energie, die sich aus diesem Born mit Lichtgeschwindigkeit in den weiten Weltraum fortpflanzt. Um die Ergiebigkeit dieser Quelle zu definieren und mathematisch zum Ausdruck zu bringen, denke man sich um die Sonne eine ihr konzentrische Kugelfläche gelegt, deren Radius r genügend gross sein möge, um annehmen zu können, dass die von der Sonne ausströmende Strahlung radial durch die Flächenelemente dieser Kugel hindurchfliesse. Man verlängere die Rotationsachse der Sonne bis zu ihren Durchstosspunkten mit jener Kugelfläche, verbreite desgleichen die Aequatorebene der Sonne bis zum Schnitte mit jener Fläche. Auf diese Weise hat man auf jener gedachten Kugelfläche einen Aequatorkreis und die zugehörigen Pole festgelegt und ist in der Lage, jeden ihren Punkt durch zwei Koordinaten φ und ψ zu kennzeichnen, wobei φ die heliographische Breite und ψ die heliographische Länge, gezählt von einem hiezu gewählten Meridian, bedeuten möge.

Man grenze nun an einer beliebigen Stelle jener Kugel die Flächeneinheit ab, bezeichne mit dQ jene Energiemenge der Sonnenstrahlung, die während des Zeitelementes dt durch diese Flächeneinheit hindurchströmt, dann ergibt es sich, dass durch diese Flächeneinheit während der Zeiteinheit eine Energiemenge :

$$(1) \quad J = \frac{dQ}{dt}$$

durchfließt.

Diese Grösse wird der Energiefluss oder die Intensität der Sonnenstrahlung an der in Betracht gezogenen Stelle genannt.

Es wäre vielleicht zu erwarten, dass die Grösse J nicht nur eine Funktion von r , sondern auch eine solche der Koordinaten φ und ψ und der Zeit t sein werde, weist doch die Oberfläche der Sonne örtliche, zeitlich veränderliche Ungleichmässigkeiten auf, die die Ausstrahlung der Sonne beeinflussen dürften. Die bisherigen Beobachtungen, die sich, weil die Ebene der Erdbahn einen Winkel von $7^\circ 10'$ mit der Ebene des Sonnenäquators einschliesst, auf das Intervall $-7^\circ 10' < \varphi < +7^\circ 10'$ erstreckten, haben indessen eine Abhängigkeit der Grösse J von der heliographischen Breite nicht ergeben; auch die Veränderlichkeit dieser Grösse mit der heliographischen Länge ψ und der Zeit t schwankt um einen Mittelwert zwischen engen Grenzen. Eliminiert man diese Schwankungen durch die Ermittlung eines auf ein längeres Zeitintervall sich erstreckenden Mittelwertes, so kann die Intensität der Sonnenstrahlung auf der ganzen angegebenen Kugeloberfläche als räumlich und zeitlich unveränderlich betrachtet werden.

Man denke sich nun eine andere mit der Sonne konzentrische Kugeloberfläche mit dem Radius a , wobei a die mittlere Entfernung der Erde von der Sonne (der die grosse Halbachse der Erdbahn, bedeutet, so wird der nach dem obigen gleichmässige Energiefluss durch die Flächenelemente dieser Kugel die Solarkonstante genannt. Ich werde diese Grösse stets mit J_0 bezeichnen. Man drückt diese Grösse gewöhnlich in Wärmeeinheiten aus, so dass man sie wie folgt definieren kann: Die Solarkonstante ist jene, vollkommen in Wärme umgewandelt gedachte strahlende Energie der Sonne, die während der Zeiteinheit durch die in der mittleren Entfernung der Erde von der Sonne senkrecht zur Strahlungsrichtung orientierte Flächeneinheit ungehindert durchströmt, wobei die periodischen Schwankungen der Sonnenstrahlung zu eliminieren sind. Dabei wird als Zeiteinheit die Minute, als Flächeneinheit der Quadratzentimeter und als Wärmeeinheit die Grammkalorie gewählt.

Es hat lange gedauert, bis es der beobachtenden Forschung gelungen ist, den numerischen Wert der Solarkonstante mit befriedigender Genauigkeit zu ermitteln; er beträgt nach den neuesten Beobachtungen 1.946 Grammkalorien pro cm^2 und Minute, doch ist dieser Wert noch nicht als ein endgültiger zu betrachten. Ich werde deshalb bei meinen Berechnungen des säkularen Ganges der Erdbestrahlung die Solarkonstante zur Wärmeeinheit wählen, um die numerischen Daten dieser Berechnung von der obigen Zahl unabhängig zu machen.

§ 71. Das Bestrahlungsgesetz. Die Abhängigkeit der Intensität der Sonnenstrahlung von dem heliozentrischen Abstand r ergibt sich aus dem vorstehenden wie folgt. Durch die im vorigen Paragraphen angegebene Kugeloberfläche vom Radius r fliesst während der Zeiteinheit die Strahlungsmenge $4\pi r^2 J$ hindurch, durch die Kugeloberfläche vom Radius a die Strahlungsmenge $4\pi a^2 J_0$. Beide Mengen sind, unter der Voraussetzung, dass in dem Zwischenraume der beiden Kugeln keine Absorption der Strahlung stattfindet, einander gleich, so dass man bekommt:

$$(2) \quad J = \frac{a^2}{r^2} J_0$$

oder wegen (1)

$$(3) \quad \frac{dQ}{dt} = \frac{a^2}{r^2} J_0.$$

Wird, wie dies in Hinkunft geschehen soll, die Entfernung r mit dem Erdbahnhalmmesser a gemessen und das Ergebnis dieser Messung mit ρ bezeichnet, d. h. wird

$$(4) \quad \frac{r}{a} = \rho$$

gesetzt, so erhält man statt (3)

$$(5) \quad \frac{dQ}{dt} = \frac{J_0}{\rho^2}.$$

Bisher wurde angenommen, dass die Sonnenstrahlung auf die in Betracht gezogene Flächeneinheit senkrecht auffällt. Ist dies nicht der Fall, sondern schliesst die Normale BN (Fig. 34) der bestrahlten, gegen die Strahlungsrichtung schiefe

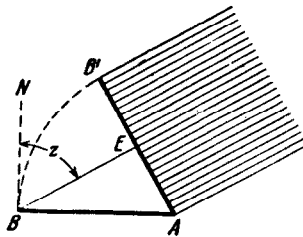


Fig. 34

gestellten Flächeneinheit AB mit dieser Richtung den Incidenzwinkel z ein, so wird diese Fläche während der Zeiteinheit nicht der durch (2) gegebenen Strahlung teilhaftig, sondern jener, die durch das Strahlenbündel mit der Basis AE zugeführt erscheint. Weil diese Basis gleich $AB \cos \angle BAE = \cos z$ ist, wird dem Flächenelement AB während der Zeiteinheit die Strahlungsmenge

$$(6) \quad \frac{dW}{dt} = J \cos z$$

oder wegen (2) und (4) die Strahlungsmenge

$$(7) \quad \frac{dW}{dt} = \frac{J_0}{\rho^2} \cos z$$

zugeführt.

Diese Grösse wird die Bestrahlung oder die Insolation des in Betracht gezogenen Flächenelements genannt.

Benützt man die vostehenden Gleichung zur mathematischen Beschreibung der Bestrahlung der Erde durch die Sonne, setzt die Erdoberfläche als vollkommen eingeebnet voraus, so dass sie aus lauter horizontalen Flächenelementen zusammengesetzt erscheint und zieht ein solches die Flächeneinheit messendes Element der Erdoberfläche in Betracht, so ist der Incidenzwinkel z der auf dieses Element auffallenden Sonnenstrahlen gleich der dem Orte dieses Elementes zukommenden augenblicklichen Zenitdistanz der Sonne, welche Distanz in Hinkunft ebenfalls mit z bezeichnet werden möge. Der Abstand des in Betracht gezogenen Flächenelementes von der Sonne ist, weil die Abmessungen der Erde verschwindend klein sind im Vergleich zur Entfernung der Erde von der Sonne, gleich dieser Entfernung, besser gesagt der Entfernung des Erdmittelpunktes vom Sonnenmittelpunkte. Ich werde diese Grösse, die dem Radiusvektor der Erdbahn gleich ist und die ich mit der mittleren Entfernung a der Erde von der Sonne messen will, ebenfalls mit ρ bezeichnen.

Zieht man also die an der geographischen Breite φ befindliche horizontale Flächeneinheit der Erdoberfläche in Betracht, so ist die Insolation derselben in einem gegebenen Augenblicke, dem die Zenitdistanz z und die Entfernung ρ der Sonne entspricht, durch die Formel (7) veranschaulicht. Bezeichnet ω den in Bogenmass gemessenen Stundenwinkel und δ die Deklination der Sonne, so besteht nach der Formel (200) des zweiten Abschnittes dieses Buches zwischen den Grössen z , φ , δ und ω die Gleichung:

$$(8) \quad \cos z = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos \omega.$$

Setzt man dies in (7) ein so bekommt man:

$$(9) \quad \frac{dW}{dt} = \frac{J_0}{\rho^2} (\sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos \omega).$$

Diese Formel drückt das Gesetz der Bestrahlung der Erde durch die Sonne aus.

Bei der Anwendung dieser Formel muss folgendes berücksichtigt werden. Sobald die Zenitdistanz z der Sonne den Wert von 90° erreicht, wird nach (8) die rechte Seite der Gleichung (9) gleich Null; die Sonne ist unter den Horizont des in Betracht gezogenen Ortes der Erde gesunken und dieser Ort bleibt unbestrahlt bis zum nächsten Sonnenaufgang. Man muss von dieser Diskontinuität der Bestrahlung eines in Betracht gezogenen Elementes der Erdoberfläche Rechnung tragen und darf die Integration der Gleichung (9) nicht auf ein beliebiges Zeitintervall t_0 bis t_1 erstrecken, also nicht etwa schreiben:

$$W = J_0 \sin \varphi \int_{t_0}^{t_1} \frac{\sin \delta}{\rho^2} dt + J_0 \cos \varphi \int_{t_0}^{t_1} \frac{\cos \delta \cos \omega}{\rho^2} dt$$

bevor man die Grenzen t_0 und t_1 derart ermittelt hat, dass sie dem Tagesintervall des in Betracht gezogenen Ortes angehören, oder dieses Tagesintervall begrenzen. Die Grenzen dieses Tagesintervalles hängen, wie man sehen wird, auch von der geographischen Breite φ des Ortes ab und sind von Breite zu Breite verschieden. Man darf deshalb nicht etwa wie folgt schliessen: Setzt man in der obigen Gleichung $\varphi = 0$, so bekommt man die am Aequator zugestrahlte Wärmemenge W_a ; setzt man $\varphi = \pm 90^\circ$, so erhält man die dem einen oder dem anderen Pole zugestrahlte Wärmemenge W_p also

$$(10) \quad W = W_a \cos \varphi \pm W_p \sin \varphi.$$

Diese Gleichung kann nie stimmen, weil an der geographischen Breite φ den Grenzen t_0 und t_1 ganz andere numerische Werte entsprechen als am Aequator bzw. an den Polen. Von diesem Umstand hat man in der Literatur nicht immer Rechnung getragen und hat mitunter die obige unrichtige Formel zur Grundlage der Berechnung der Erdbestrahlung gemacht, wodurch man natürlich zu ganz falschen Schlüssen gekommen ist, wie ich dies in meiner „Théorie mathématique“ berichtet habe. In meiner „Mathematischen Klimalehre“ und in meinen „Astronomischen Mitteln“, wo ich ebenfalls über die einschlägige Literatur berichtete, habe ich jene Arbeiten, die auf der obigen falschen Formel beruhen, nicht mehr berücksichtigt und sie in das Literaturverzeichnis nicht eingeordnet, weil sie, als falsch, keinen Bestandteil der Wissenschaft bilden.

Zur Berechnung der Erbestrahlung muss der bereits in einigen klassischen Abhandlungen von Meech, Wiener und Hargreaves¹⁾ betretene Weg eingeschlagen werden, der, von mir gründlicher ausgebaut, nachstehend beschrieben werden möge.

§ 72. Die Bestrahlung der Erde in einem gegebenen Zeitpunkte. Zu einem gegebenen Zeitpunkte, dem die Deklination δ der Sonne und die Entfernung ρ der Erde von der Sonne entspricht, ist die Bestrahlung der an dem Orte (φ, ψ) der Erdoberfläche befindlichen horizontalen Flächeneinheit durch die Formel (9) gegeben. Um die augenblickliche Verteilung der Bestrahlung der Erdoberfläche mathematisch zu veranschaulichen, hat man die Grosse $\frac{dW}{dt}$ als Funktion der geographischen Koordinaten φ und ψ darzustellen. Bezeichnet man zu diesem Zwecke den

¹⁾ Meech, On the relative intensity of the heat and light of the sun. Smithsonian contribution to knowledge. Vol. IX. Washington 1856. — Wiener, Ueber die Stärke der Bestrahlung der Erde durch die Sonne in den verschiedenen Breiten und Jahreszeiten. Zeitschr. f. Math. u. Phys. Bd. XXII. 1877. — Hargreaves, Distribution of solar radiation of the surface of the earth and its dependence on astronomical elements. Transactions of the Cambridge Philosoph. Society. Vol. XVI. 1896.

dem Zeitpunkte t entsprechenden Stundenwinkel der Sonne, beobachtet von einem Orte des Anfangsmeridianes, mit ω_0 und zählt die geographische Länge vom Westen gegen Osten, so wird

$$(11) \quad \omega = \omega_0 + \psi$$

und man erhält statt (9)

$$(12) \quad \frac{dW}{dt} = \frac{J_0}{\rho^2} [\sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos (\omega_0 + \psi)].$$

Diese Formel, in der man die geographischen Koordinaten φ und ψ als Veränderliche zu betrachten hat, drückt das Gesetz der Verteilung der Sonnenstrahlung auf der Erdoberfläche aus.

Setzt man

$$(13) \quad \omega_0 + \psi = \psi_1,$$

d. h. zählt man die Länge ψ_1 von jenem Meridiane, den die Sonne gerade durchschreitet, so wird:

$$(14) \quad \frac{dW}{dt} = \frac{J_0}{\rho^2} [\sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos \psi_1].$$

Diese Bestrahlung erreicht ihren Maximalwert $\frac{J_0}{\rho^2}$ in jenem Punkte der Erdoberfläche, für den die Gleichungen erfüllt sind:

$$\cos \psi_1 = 1$$

$$\sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta = \cos (\varphi - \delta) = 1.$$

Dieser Punkt weist also die Koordinaten $\psi_1 = 0$; $\varphi = \delta$ auf und ist jener Punkt der Erdoberfläche, in dessen Zenit die Sonne sich gerade befindet.

Die Bestrahlung ist gleich Null für alle Werte von φ und ψ_1 welche die Gleichung befriedigen:

$$(15) \quad \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos \psi_1 = 0.$$

Um zu ersehen, welcher Kurve der als kugelförmig vorausgesetzten Erdoberfläche diese Punkte angehören, berücksichtige man, dass der nach dem grössten Kreise gemessene Abstand zweier beliebigen Punkte $A(\varphi, \psi_1)$ und $B(\varphi', \psi_1')$ der Erdoberfläche auf folgende Weise ermittelt wird. Diese zwei Punkte bilden mit

dem nördlichen Erdpol ein sphärisches Dreieck, dessen Winkel am Pole gleich $(\psi_1' - \psi_1)$ und dessen anliegende Seiten gleich $(90^\circ - \varphi)$ bzw. $(90^\circ - \varphi')$ sind; die dritte Seite dieses sphärischen Dreiecks stellt die gesuchte Entfernung Δ der Punkte A und B dar. Es ist deshalb nach dem Kosinussatze der sphärischen Trigonometrie:

$$\cos \Delta = \cos (90^\circ - \varphi) \cos (90^\circ - \varphi') + \sin (90^\circ - \varphi) \sin (90^\circ - \varphi') \cos (\psi_1' - \psi_1)$$

d. h.

$$\cos \Delta = \sin \varphi \sin \varphi' + \cos \varphi \cos \varphi' \cos (\psi_1' - \psi_1).$$

Die Gleichung (15) besagt, dass die Punkte, in denen die Bestrahlung gleich Null ist, der Kurve angehören, deren Gleichung durch $\cos \Delta = 0$, d. h.

$$\Delta = 90^\circ$$

gegeben ist wofern der Punkt B , von dem die Entfernung Δ zu messen ist, die Koordinaten $\psi_1' = 0$; $\varphi' = \delta$ aufweist. Diese Kurve ist jener grösste Kreis der Erdkugel, dessen Pol der Punkt $\psi_1' = 0$; $\varphi = \delta$ ist. Dieser Kreis, längs dem die Sonnenstrahlen die Erdoberfläche berühren, wird der Grenzkreis der Bestrahlung genannt; er teilt die Erdkugel in die gänzlich bestrahlte und die unbestrahlte Halbkugel. Für alle Punkte der unbestrahlten Halbkugel würde die Formel (14) einen negativen Wert der Bestrahlung liefern und wird deshalb sinnlos. Diese Formel ist also nur für die bestrahlte Halbkugel anzuwenden; für alle Punkte der unbestrahlten Halbkugel ist die Bestrahlung gleich Null zu setzen.

Die Grenzkreisscheibe ist die orthogonale Projektion der gänzlich bestrahlten Halbkugel, es ist deshalb die dem Zeitpunkt t entsprechende totale Bestrahlung der Erde, die mit J_t bezeichnet werden möge, gleich der Fläche der Grenzkreisscheibe multipliziert mit dem Energiefluss J durch dieselbe. Bezeichnet also R den Halbmesser der Erdkugel, so ist:

$$(16) \quad J_t = \frac{J_o}{e^2} R^2 \pi.$$

Die durchschnittliche Bestrahlung der Erdoberfläche im Zeitpunkte t , die mit J_m bezeichnet sei, wird erhalten, wenn man die obige totale Bestrahlung mit der Oberfläche $4\pi R^2$ der Erdkugel dividiert. Es ist also:

$$(17) \quad J_m = \frac{1}{4} \frac{J_o}{e^2}.$$

Der Grenzkreis der Bestrahlung geht nur dann durch die beiden Pole der Erde hindurch, wenn sich die Sonne in deren Aequatorebene befindet, d. h. wenn

$\delta = 0$ ist. In diesem Falle sind die beiden Hemisphären der Erde, die nördliche und die südliche, gleich bestrahlt. Sonst sind ihre Bestrahlungen verschieden. Die totalen Bestrahlungen jeder dieser beiden Hemisphären, die in der obigen Reihenfolge mit J_n bzw. mit J_s bezeichnet werden mögen, können wie folgt ermittelt werden.

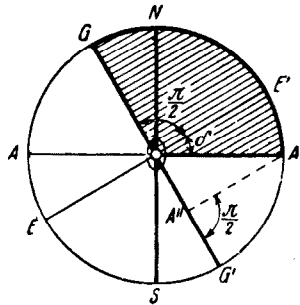


Fig. 35

Es stelle der Kreis $A'NAS$ (Fig. 35) jenen Meridiankreis der Erde dar, dessen Ebene durch den Mittelpunkt der Sonne hindurchgeht; N sei der Nordpol, S der Südpol der Erde, $A A'$ der Schnitt der Aequatorebene mit der Bildebene. Die Richtung der Sonnenstrahlen sei $E'E$, d. h. es ist der Winkel $A'O E'$ gleich der Deklination δ der Sonne. Der zu $E'E$ normale Durchmesser GG' stellt dann den Schnitt der Ebene des Grenzkreises der Bestrahlung mit der Bildebene dar. Der gestrichelte Sektor $GOA'E'NG$ ist die orthogonale Projektion des bestrahlten Teiles der nördlichen Hemisphäre in die Bildebene. Die orthogonale Projektion dieses Teiles der nördlichen Hemisphäre in die Grenzkreisscheibe setzt sich zusammen aus einer Halbkreisfläche, die sich mit der nördlichen Hälfte dieser Scheibe deckt, und der Fläche einer Halbellipse mit der grossen Halbachse R und der kleinen Halbachse $OA'' = R \sin \delta$. Die Oberfläche der erwähnten Projektion ist deshalb gleich

$$\frac{\pi}{2} R^2 + \frac{\pi}{2} R^2 \sin^2 \delta$$

und die Bestrahlung J_n wird erhalten, wenn man diese Fläche mit dem dieselbe normal durchströmenden Energiefluss J multipliziert. Es ist also:

$$(18) \quad J_n = \frac{J_0}{\varrho^2} \cdot \frac{\pi}{2} R^2 (1 + \sin \delta)$$

und, weil offenbar $J_n + J_s = J_t$ ist, so wird:

$$(19) \quad J_s = \frac{J_0}{\varrho^2} \cdot \frac{\pi}{2} R^2 (1 - \sin \delta).$$

Die Verteilung der Bestrahlung längs eines beliebigen Breitenkreises φ ist durch die Gleichung (14) gegeben, in der nur ψ_1 als variabel zu betrachten ist. Dabei stellt ψ_1 auch jenen Winkel dar, den der Breitenkreisradius OE des in Betracht gezogenen Punktes E mit dem Radius OM (Fig 36) einschliesst, wobei M jenen

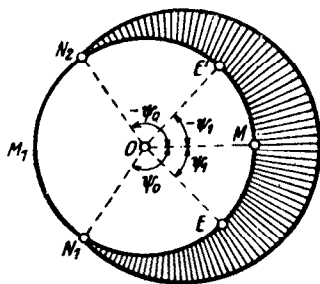


Fig. 36

Punkt bedeutet, dessen Meridianebene durch den Mittelpunkt der Sonne hindurch geht. Aus (14) folgt, dass die Bestrahlungen der zu M symmetrisch gelegenen Punkte des Breitenkreises einander gleich sind. Die Zenitwinkel ψ_0 und $-\psi_0$ der Punkte N_1 und N_2 , in denen die Bestrahlung gleich Null ist, sind nach (14) durch die Gleichung gegeben:

$$\sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos \psi_0 = 0,$$

d. h. durch:

$$(20) \quad \cos \psi_0 = -\tan \varphi \tan \delta.$$

Der Bogen $N_1 M_1 N_2$ des Breitenkreises ist unbestrahlt.

Als ein wichtiger Begriff wird sich in der Folge die mittlere Bestrahlung des Breitenkreises in einem gegebenen Augenblicke erweisen. Ich werde diese Grösse mit w bezeichnen; sie wird auf folgende Weise berechnet.

Die Oberfläche des unendlich dünnen, zwischen den Breitenkreisen φ und $(\varphi + d\varphi)$ eingeschlossenen ringförmigen Streifens der Erdoberfläche ist gleich:

$$df = 2\pi R^2 \cos \varphi d\varphi,$$

und die auf das zwischen den Meridianen ψ_1 und $(\psi_1 + d\psi_1)$ eingeschlossene Flächenelement dieses Streifens auffallende Sonnenstrahlung dargestellt durch

$$\frac{dW}{dt} R^2 \cos \varphi d\varphi d\psi_1.$$

Die totale Bestrahlung dieses Streifens ist deshalb dargestellt durch

$$R^2 \cos \varphi \, d\varphi \int_{-\psi_0}^{+\psi_0} \frac{dW}{dt} \, d\psi_1.$$

Die mittlere Bestrahlung w wird erhalten, wenn man die obige Grösse mit der Fläche df dividiert. Es ist also:

$$(21) \quad w = \frac{1}{2\pi} \int_{-\psi_0}^{+\psi_0} \frac{dW}{dt} \, d\psi_1.$$

Setzt man hier den Ausdruck (14) ein, und führt die Integration durch, so bekommt man:

$$(22) \quad w = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{J_0}{\varrho^2} (\psi_0 \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \sin \psi_0).$$

Der in der obigen Formel vorkommende Winkel ψ_0 ist durch (20) gegeben, so dass die mittlere Bestrahlung w von den zeitlich veränderlichen Grössen nur ϱ und δ enthält und deshalb nur durch die Revolution der Erde um die Sonne, nicht aber durch deren Umdrehung geändert wird. Dies gilt auch von den Bestrahlungen J_n und J_s .

§ 73. Der tägliche Bestrahlungsgang. Dem auf der geographischen Breite φ befindlichen Quadratcentimeter der Erdoberfläche wird, wie vorher entwickelt, während einer Minute die Wärmemenge zugestrahlt:

$$\frac{dW}{dt} = \frac{J_0}{\varrho^2} (\sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos \omega).$$

Frägt man nach der Aenderung dieser Grösse im Laufe des Tages, so kann man die darin enthaltenen Elemente ϱ und δ während dieses Zeitintervalles als konstant betrachten, weil ihre Aenderungen im Laufe des Tages nur unbedeutend sind. Setzt man also:

$$(23) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{J_0}{\varrho^2} \sin \varphi \sin \delta = A \\ \frac{J_0}{\varrho^2} \cos \varphi \cos \delta = B, \end{array} \right.$$

so können die Grössen A und B als Konstanten betrachtet werden und die Bestrahlung der Flächeneinheit ist jetzt durch den Ausdruck

$$(24) \quad \frac{dW}{dt} = A + B \cos \omega$$

veranschaulicht, in dem nur der Stundenwinkel ω als variabel zu betrachten ist.

Der tägliche Gang der Bestrahlung ist mittels (24) mathematisch dargestellt durch eine einfache trigonometrische Funktion des Stundenwinkels der Sonne, aber mit einer wichtigen Einschränkung. Die obige Formel gilt nämlich nur für jene Werte von ω , die einen positiven Betrag der Bestrahlung ergeben, d. h. für jene Werte, die zwischen dem Stundenwinkel des Sonnenaufganges und dem Stundenwinkel des Sonnenunterganges liegen. Diese beiden Winkel sind jene, für die die Zenitdistanz z der Sonne gleich 90° wird und sind deshalb wegen (8) durch die Gleichung:

$$(25) \quad \cos \omega_0 = \frac{A}{B} = -\text{tang } \varphi \text{ tang } \delta$$

gegeben; die negative Wurzel $-\omega_0$ entspricht dem Sonnenaufgang, die positive $+\omega_0$ dem Sonnenuntergang. Die Formel (24) gilt also nur für das Intervall $-\omega_0 < \omega < +\omega_0$; für alle übrigen Werte von ω ist die Bestrahlung gleich Null. Deshalb ist die geometrische Veranschaulichung des täglichen Ganges der Bestrahlung zusammengesetzt aus einer Kosinuslinie und einer Reihe von in die Abszissenachse fallenden geraden Strecken, welche letztere die Kosinuslinie überall dort ersetzt, wo diese negative Werte der Bestrahlung ergeben würde.

Der Mitte des Intervalles $-\omega_0$ bis $+\omega_0$ entspricht der Wert $\omega=0$, der den Meridiandurchgang der Sonne oder den wahren Mittag kennzeichnet. Die Mittelwerte der Grössen φ und δ während des erwähnten Intervalles werden deshalb jenen Werten gleichgesetzt werden können, die dem wahren Mittag entsprechen. Mit diesen Werten sollen die Grössen A und B berechnet werden.

Die astronomischen Ephemeriden enthalten neben den Grössen φ und δ für jeden mittleren Mittag der Sternwarte auch die stündlichen Aenderungen dieser Grössen im Laufe des Tages, so dass man in der Lage ist, im Bedarfsfalle auch die Veränderlichkeit der Grössen A und B während des Tages zu berücksichtigen.

Der im Zeitmasse gemessene Stundenwinkel der Sonne wird, wie im § 41 auseinandergesetzt, die wahre Sonnenzeit genannt. Bezeichnet man diese Zeit, die vom wahren Mittag des in Betracht gezogenen Ortes zu zählen ist; mit t_w , und das Zeitintervall von 24^h mit τ , so ist:

$$(26) \quad \omega = \frac{2\pi}{\tau} t_w,$$

so dass der tägliche Gang der Bestrahlung durch die Formel:

$$(27) \quad \frac{dW}{dt} = A + B \cos \frac{2\pi}{\tau} t_w$$

als Funktion der wahren Sonnenzeit dargestellt erscheint.

Will man den täglichen Gang der Bestrahlung als Funktion der mittleren Zeit darstellen, so hat man zu berücksichtigen, dass nach dem im § 51 gesagten zwischen der wahren und der mittleren Sonnenzeit die Beziehung besteht:

$$(28) \quad t_w = t - E$$

wo E die Zeitgleichung genannt wird und in den astronomischen Ephemeriden für jeden Tag gegeben ist.

§ 74. Die täglichen Strahlungsmengen. Die Strahlungsmenge, die im Laufe des Tages auf die in Betracht gezogene Flächeneinheit auffällt, wird die tägliche Strahlungsmenge genannt; ich werde sie mit W , bezeichnen. Sie wird auf folgende Weise berechnet.

Es ist wegen (28)

$$\frac{dt_w}{dt} = 1 - \frac{dE}{dt}$$

und, weil die zeitliche Aenderung der Zeitgleichung wegen ihrer Kleinheit neben der Einheit vernachlässigt werden kann, so wird:

$$\frac{dt_w}{dt} = 1.$$

Nun ist

$$\frac{dW}{dt} = \frac{dW}{dt_w} \cdot \frac{dt_w}{dt} = \frac{dW}{dt_w},$$

und wegen (26)

$$dt_w = \frac{\tau}{2\pi} d\omega.$$

Es ist also

$$\frac{dW}{dt} = \frac{2\pi}{\tau} \cdot \frac{dW}{d\omega},$$

d. h. wegen (24)

$$(29) \quad dW = \frac{\tau}{2\pi} (A + B \cos \omega) d\omega.$$

Die tägliche Strahlungsmenge W_τ wird erhalten, wenn man den obigen Ausdruck zwischen den Grenzen $-\omega_0$ und $+\omega_0$ integriert. Es ist also

$$(30) \quad W_\tau = \frac{\tau}{2\pi} \int_{-\omega_0}^{+\omega_0} (A + B \cos \omega) d\omega$$

und nach durchgeführter Integration mit Berücksichtigung von (23)

$$(31) \quad W_\tau = \frac{\tau}{\pi} \cdot \frac{J_0}{\rho^2} (\omega_0 \sin \varphi \sin \delta + \sin \omega_0 \cos \varphi \cos \delta).$$

Dabei ist wegen (25)

$$(32) \quad \cos \omega_0 = -\tan \varphi \tan \delta.$$

Für jene geographische Breiten, an denen wie im § 41 berechnet, die Sonne während des in Betracht gezogenen Tages nicht untergeht, ist $\omega_0 = \pi$ zu setzen und man hat in diesem Falle:

$$(33) \quad W_\tau = \tau \frac{J_0}{\rho^2} \sin \varphi \sin \delta.$$

Geht die Sonne während des in Betracht gezogenen Tages nicht auf, so ist:

$$(34) \quad W_\tau = 0.$$

Die vorstehenden Formeln stellen die tägliche Strahlungsmenge an der geographischen Breite φ als Funktion der zu einander gehörigen Elemente ρ und δ dar, welche letztere den astronomischen Ephemeriden zu entnehmen sind, so dass mit Benützung dieser Ephemeriden die täglichen Strahlungsmengen berechnet werden können. Eine diesbezügliche Berechnung hat Ch r. Wiener in seiner bereits angeführten Abhandlung für jeden zehnten Breitengrad und für 17 verschiedene voneinander um $22^\circ 30'$ abstehende Werte der Länge λ der Sonne für das vom Aequinoctium 1874 bis zum Aequinoctium 1875 reichende Zeitintervall durchgeführt.

Tabelle V
Die täglichen Strahlungsmengen (in Grammkalorien pro cm^2 , $J_0=2$ Grammkalorien pro cm^2 und Minute)

| Länge der Sonne | 0° | 22° 30' | 45° | 67° 30' | 90° | 112° 30' | 135° | 157° 30' | 180° |
|-----------------|----------|-----------|--------|---------|----------|----------|-----------|------------|-----------|
| + 90° | | 436 | 796 | 1030 | 1110 | 1025 | 789 | 431 | |
| + 80° | 160 | 436 | 784 | 1014 | 1093 | 1010 | 777 | 431 | 158 |
| + 70° | 316 | 541 | 772 | 968 | 1043 | 963 | 765 | 535 | 312 |
| + 60° | 461 | 655 | 834 | 963 | 1009 | 958 | 826 | 648 | 456 |
| + 50° | 593 | 755 | 894 | 988 | 1020 | 983 | 886 | 747 | 586 |
| + 40° | 707 | 832 | 938 | 1002 | 1022 | 997 | 929 | 823 | 698 |
| + 30° | 799 | 892 | 958 | 997 | 1005 | 990 | 949 | 882 | 789 |
| + 20° | 867 | 922 | 952 | 964 | 964 | 959 | 944 | 911 | 857 |
| + 10° | 909 | 925 | 921 | 908 | 900 | 904 | 913 | 914 | 898 |
| 0 | 923 | 900 | 863 | 829 | 814 | 825 | 856 | 890 | 912 |
| - 10° | 909 | 849 | 783 | 729 | 708 | 726 | 776 | 839 | 898 |
| - 20° | 867 | 773 | 680 | 611 | 585 | 608 | 674 | 764 | 857 |
| - 30° | 799 | 674 | 560 | 479 | 450 | 477 | 555 | 666 | 789 |
| - 40° | 707 | 555 | 426 | 339 | 306 | 338 | 422 | 549 | 698 |
| - 50° | 593 | 421 | 285 | 199 | 170 | 198 | 282 | 417 | 586 |
| - 60° | 461 | 277 | 144 | 70 | 48 | 70 | 143 | 274 | 456 |
| - 70° | 316 | 131 | 24 | | | | 24 | 130 | 312 |
| - 80° | 160 | 7 | | | | | | 7 | 158 |
| - 90° | | | | | | | | | |
| Datum | 21. März | 13. April | 6. Mai | 29. Mai | 22. Juni | 15. Juli | 8. August | 31. August | 23. Sept. |

Geographische Breite

Tabelle V
(Fortsetzung)

| Länge der Sonne | 180° | 202° 30' | 225° | 247° 30' | 270° | 292° 30' | 315° | 337° 30' | 360° |
|-----------------|----------------------|----------|-----------|----------|----------|------------|------------|-------------|----------|
| | Geographische Breite | | | | | | | | |
| + 90° | | | | | | | | | |
| + 80° | 158 | 7 | | | | | | 7 | 160 |
| + 70° | 312 | 133 | 25 | | | | 25 | 135 | 316 |
| + 60° | 456 | 281 | 150 | 74 | 51 | 75 | 151 | 285 | 461 |
| + 50° | 586 | 427 | 295 | 210 | 181 | 211 | 298 | 432 | 593 |
| + 40° | 698 | 552 | 442 | 359 | 327 | 361 | 447 | 570 | 707 |
| + 30° | 789 | 683 | 581 | 507 | 480 | 509 | 586 | 691 | 799 |
| + 20° | 857 | 783 | 706 | 646 | 624 | 649 | 712 | 793 | 867 |
| + 10° | 898 | 861 | 813 | 771 | 756 | 775 | 820 | 871 | 909 |
| 0 | 912 | 913 | 897 | 877 | 869 | 881 | 905 | 924 | 923 |
| - 10° | 898 | 938 | 956 | 960 | 962 | 965 | 965 | 949 | 909 |
| - 20° | 857 | 985 | 989 | 1019 | 1030 | 1024 | 998 | 946 | 867 |
| - 30° | 789 | 904 | 994 | 1052 | 1073 | 1057 | 1003 | 915 | 799 |
| - 40° | 698 | 844 | 973 | 1059 | 1092 | 1064 | 982 | 854 | 707 |
| - 50° | 586 | 766 | 929 | 1045 | 1089 | 1050 | 937 | 775 | 593 |
| - 60° | 456 | 664 | 866 | 1018 | 1078 | 1023 | 873 | 672 | 461 |
| - 70° | 312 | 548 | 802 | 1024 | 1114 | 1029 | 809 | 556 | 316 |
| - 80° | 158 | 442 | 814 | 1073 | 1167 | 1078 | 821 | 447 | 160 |
| - 90° | | 442 | 826 | 1089 | 1185 | 1095 | 834 | 447 | |
| Datum | 23. Sept. | 16. Okt. | 8. Novem. | 30. Nov. | 22. Dez. | 13. Januar | 4. Februar | 26. Februar | 21. März |

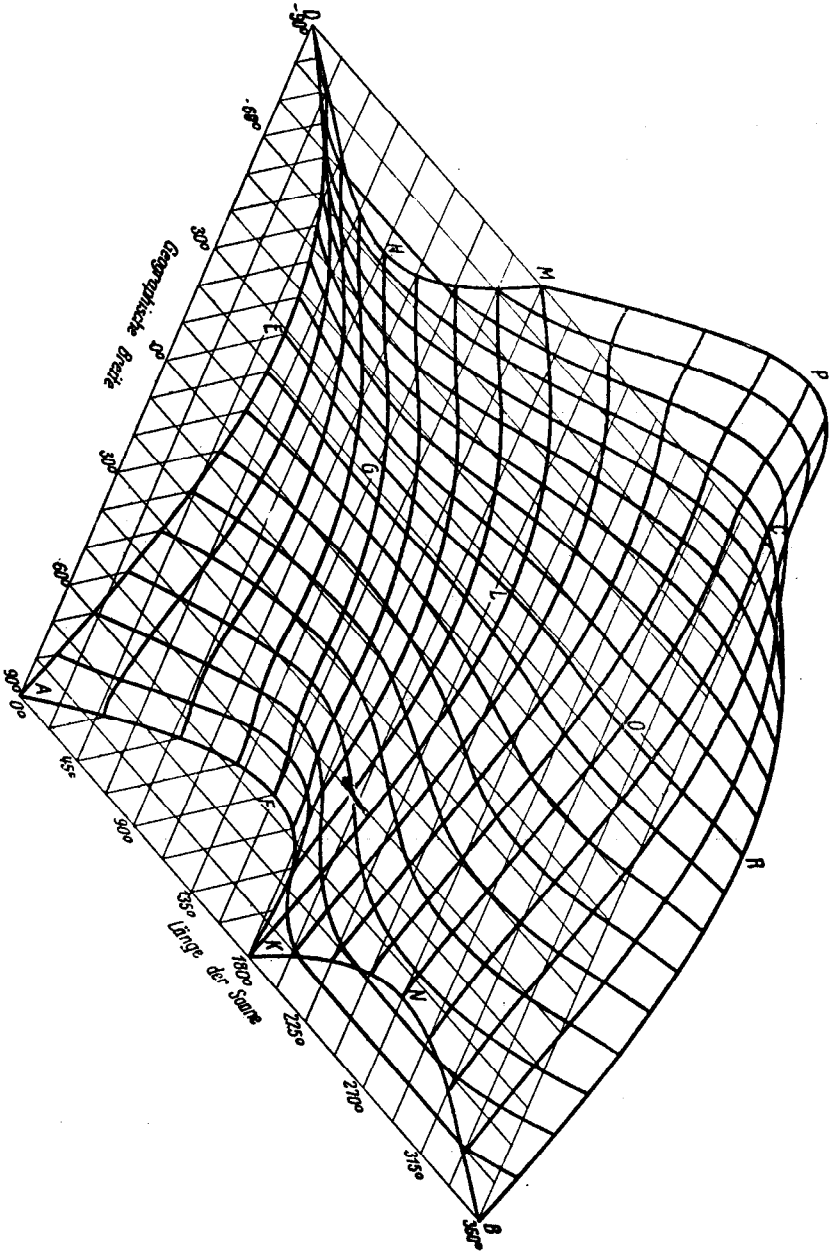


Fig. 37

Diesem Zeitintervall entsprachen die nachstehenden numerischen Werte der Exzentrizität e der Erdbahn, der Schiefe ε der Ekliptik und der Anomalie ν_0 des Frühlingspunktes: $e=0,0168$, $\varepsilon=23^\circ 27' 30''$; $\nu_0 = 79^\circ 38'$.

Seit dem dieser Berechnung zugrunde gelegten Zeitintervalles haben sich die numerischen Werte der obigen drei astronomischen Elemente säkular nur ganz unbedeutend geändert und die Wienerschen Berechnungen gelten mit dem hier einzuhaltenden Genauigkeitsgrade auch für die Gegenwart, weshalb ich die dabei gewonnenen Ergebnisse in der beiliegenden Tabelle V wiedergebe, nachdem ich sie auf Grammkalorien pro cm^2 umgerechnet und dieser Berechnung einen Wert der Solarkonstante von 2 Grammkalorien pro cm^2 und Minute zugrunde gelegt habe. Ausserdem habe ich die Daten der Tabelle V durch die Fig. 37 graphisch veranschaulicht, indem ich auf der Achse AB dieser axonometrischen Darstellung die Sonnenlängen, auf der Achse AD die geographischen Breiten und auf der zur Ebene des Vierecks $ABCD$ normalen dritten Achsenrichtung die entsprechenden Werte der täglichen Strahlungsmengen W_t aufgetragen habe. Die Endpunkte der derart aufgetragenen vertikalen Strecken bilden eine Fläche, welche die Aenderungen der täglichen Strahlungsmengen im Laufe des Jahres und von Breitenkreis zu Breitenkreis augenscheinlich veranschaulicht. Aus dieser graphischen Darstellung ist folgendes ersichtlich.

Nach der Formel (217) des zweiten Abschnittes dieses Buches besteht zwischen der Länge λ , der Deklination δ der Sonne und der Schiefe ε der Ekliptik der folgende Zusammenhang:

$$(35) \qquad \sin \delta = \sin \varepsilon \sin \lambda.$$

Für $\lambda=0$, d. h. im Zeitpunkte, in dem die Sonne im Frühlingspunkte steht, wird also $\delta=0$, so dass nach (32) $\omega_0=90^\circ$ wird und man erhält mittels (31)

$$W_t = \frac{\tau}{\pi} \cdot \frac{J_0}{\varrho^2} \cos \varphi.$$

Diese Formel stellt die dem Frühlingsäquinoktium entsprechenden täglichen Strahlungsmengen als Funktion der geographischen Breite analytisch dar. Die in der Fig. 37 sichtbare der Sonnenlänge von 0° entsprechende Linie AED ist also eine einfache Kosinuslinie. Zur Zeit des Frühlingsäquinoktiums befolgt die Verteilung der täglichen Strahlungsmengen auf der Erdoberfläche ein einfaches Gesetz. Diese Mengen sind proportional dem Kosinus der geographischen Breite, erreichen ihr Maximum am Aequator und sind gleich Null an den beiden Polen.

Mit zunehmender Sonnenlänge ändert sich diese einfache Gesetzmässigkeit: um den Südpol herum bildet sich eine unbestrahlte Polarkappe, deren Ausdehnung bis zum Zeitpunkt des nördlichen Sommersolstitiums ständig zunimmt, das Maximum der Bestrahlung wandert vom Aequator nordwärts, die Bestrahlung des Nord-

pols nimmt rasch zu. Hier ist die tägliche Bestrahlung innerhalb jener Zone der Erdoberfläche, an der die Sonne während des Tages nicht untergeht, nach (34) und (35) gegeben durch:

$$W_i = \tau \frac{J_0}{\varrho^2} \sin \varphi \sin \varepsilon \sin \lambda ,$$

d. h. in dieser Zone ist die Bestrahlung des Poles grösser als jene seiner Umgebung. Hier bildet sich also ein Nebenmaximum der Bestrahlung und die in der Fig. 37 dargestellte Fläche weist unmittelbar anschliessend an die Linie *AFK* eine sanfte Einsenkung auf, in der das Minimum der Bestrahlung wandert und sich vorläufig immer mehr von dem Pole entfernt. Am 25. Mai wird der Nordpol der meistbestrahlte Punkt der Erdoberfläche, d. h. über ihm bildet sich das absolute Maximum aus, während das bisherige vom Aequator bis zum 36. Breitengrad vorgerückte Hauptmaximum zu einem Nebenmaximum wird.

Für $\lambda=90^\circ$, d. h. zur Zeit des nördlichen Sommersolstitiums, ist die Verteilung der täglichen Strahlungsmengen durch die Linie *FGH* veranschaulicht. Der Nordpol hat seine grösste tägliche Bestrahlung von 1110 Grammkalorien erreicht, während sich das Nebenmaximum von 1023 Grammkalorien an der Breite von $43^\circ 33' 34''$ befindet. Das Minimum der nördlichen Hemisphäre ist bis zur Breite von $61^\circ 52' 16''$ vorgerückt und beträgt 1008 Grammkalorien. Auf der südlichen Hemisphäre nimmt die Bestrahlung südwärts rasch ab und verschwindet am Polarkreis; die ganze antarktische Zone ist unbestrahlt.

Von diesem Moment angefangen sinkt die Bestrahlung des Nordpols, das Minimum der täglichen Strahlungsmenge beginnt sich demselben zu nähern, um ihn zur Zeit der herbstlichen Tag- und Nachtgleiche zu erreichen. Am 19 Juli springt das absolute Maximum vom Nordpol auf den 36. Grad nördlicher Breite und wandert von hier mit zunehmender Sonnenlänge gegen den Aequator zurück, wo es zur Zeit der herbstlichen Tag und Nachtgleiche anlangt. In diesem Moment ist die unbestrahlte Kalotte der südlichen Halbkugel gänzlich verschwunden und die Verteilung der täglichen Strahlungsmengen ist durch die einfache Kosinuskurve *KLM* dargestellt. Diese Kurve ist der Linie *AED* nicht kongruent, weil die Werte des Radiusvektors ϱ für $\lambda=0^\circ$ und $\lambda=180^\circ$ einander nicht gleich sind.

Von nun an wandert das Maximum der täglichen Strahlungsmenge gegen den Süden; um den Nordpol herum bildet sich die unbestrahlte Polarkappe, die Bestrahlung des Südpoles nimmt rasch zu und hier bildet sich sofort ein Nebenmaximum aus, welches vom 25. November bis 17. Januar zu einem Hauptmaximum wird. An diesem letzteren Tage springt das Hauptmaximum auf den 36. Grad südlicher Breite und wandert gegen den Aequator hin, wo es zur Zeit des Frühlingsäquinoktiums wieder anlangt. Das Minimum der täglichen Strahlungsmenge auf der südlichen Hemisphäre wandert in der deutlich sichtbaren Rinne der dargestellten Fläche, erreicht seine nördlichste Lage von $61^\circ 52' 16''$ zur Zeit des nördlichen Wintersolstitiums und trifft zur Zeit des Frühlingsäquinoktiums wieder am Südpol ein.

Für $\lambda = 270^\circ$, d. h. zur Zeit des nördlichen Wintersolstitiums ist die Verteilung der täglichen Strahlungsmengen durch die Linie *NOP* dargestellt; diese Linie ist der Linie *HGF* ähnlich, hat aber merklich grössere Aplikaten. So beträgt die darin sichtbare tägliche Bestrahlung des Südpoles 1185 Grammkalorien und das an der Breite $43^\circ 33' 34''$ gelegene Nebenmaximum der täglichen Bestrahlung 1094 Grammkalorien. Die Ursache dieses Sachverhaltes liegt darin, dass sich die Erde während des südlichen Sommers in der Sonnennähe, und während des südlichen Winters in der Sonnenferne, befindet. Deshalb ist die sommerliche Bestrahlung der südlichen Halbkugel etwas verstärkt und die winterliche abgeschwächt.

Die Schnitte der in der Fig. 37 dargestellten Fläche mit den Ebenen $\varphi = \text{const.}$ sind gewellte Linien. Für $\varphi = 0$ ist nach (31) und (32)

$$W_\tau = \frac{\tau}{\pi} \cdot \frac{J_0}{q^2} \cos \delta.$$

Bei verschwindend kleiner Exzentrizität der Erdbahn, d. h. für $q = \text{const.}$ wäre die durch die obige Gleichung dargestellte Linie *EGLOR* eine doppelt gewellte Linie mit zwei gleichen Maxima für $\delta = 0$, d. h. zur Zeit der Solstitien. Die Exzentrizität der Erdbahn hat zur Folge, dass weder die beiden Maxima noch die beiden Minima einander gleich sind und nicht zu den soeben angegebenen Zeiten eintreten; so verschiebt sich beispielsweise das zweite Maximum vom 23. September auf den 14. Oktober.

An der Breite von rund 15° existiert die doppelte Periode nicht mehr, und von hier angefangen wird die einfache jährliche Schwankung der Bestrahlung mit nur einem Maximum und nur einem Minimum deutlich erkennbar. An den Polarkreisen sinkt das Minimum auf Null und behält diesen Wert naturgemäss auch für höhere Breiten, für welche die erwähnten Kurven während der Dauer der langen Nacht gerade in der Grundebene *ABCD* verlaufende zu *AB* parallele Linien sind. Für $\varphi = \pm 90^\circ$ ist wegen (33) und (35)

$$W_\tau = \tau \frac{J_0}{q^2} \sin \varepsilon \sin \lambda.$$

Wegen der geringen Veränderlichkeit der Grösse q unterscheiden sich die durch die obige Gleichung analytisch dargestellten Kurven *AFK* und *MPC* von einfachen Sinoiden nur wenig; es fehlt ihnen aber der unter der Grundebene *ABCD* zu liegende Teil, der durch die Geraden *KB* bzw. *DM* zu ersetzen ist.

§ 75. Die Diskontinuität des Bestrahlungsganges und deren Elimination. Aus der Gleichung (25) folgt, dass wenn die Ungleichheit

$$(36) \quad -1 \leq \tan \varphi \tan \delta \leq +1$$

erfüllt ist, ω_0 reell ist, d. h. die Sonne sinkt während des Zeitintervalles τ unter

den Horizont des in Betracht gezogenen Ortes der Erdoberfläche. Weil die Deklination δ der Sonne nicht grosser als $+\varepsilon$ und nicht kleiner als $-\varepsilon$ werden kann, ist die Ungleichheit (36) während des ganzen Jahres erfüllt für jene geographischen Breiten, die der Bedingung genügen:

$$(37) \quad -(90^\circ - \varepsilon) \leq \varphi \leq (90^\circ - \varepsilon).$$

Die Breitenkreise $\varphi = 90^\circ - \varepsilon$ und $\varphi = -(90^\circ - \varepsilon)$, wobei den südlichen Breiten das negative Vorzeichen zuzuweisen ist, heissen, wie bereits im § 41 angegeben, die Polarkreise. Den zwischen diesen Polarkreisen eingeschlossenen Gürtel der Erdoberfläche will ich die nichtarktische Zone nennen. In der nichtarktischen Zone geht also die Sonne täglich auf und unter.

Die beiden jenseits der Polarkreise die Pole umfassenden Kalotten der Erdoberfläche, für deren Punkte die Ungleichheiten

$$(38) \quad \varphi > 90^\circ - \varepsilon \quad \text{oder} \quad \varphi < -(90^\circ - \varepsilon)$$

erfüllt sind, sollen abweichend von dem üblichen Sprachgebrauch mit dem gemeinsamen Namen „arktische Zonen“ benannt werden. Der Gang der Bestrahlung eines beliebigen Ortes dieser Zonen unterscheidet sich grundsätzlich von jenem der nichtarktischen Zone. Stellt nämlich, wie im § 41 dargetan und durch die dort eingeschaltete Fig. 17 veranschaulicht, der Kreis HH' den Horizont eines Ortes der Erdoberfläche, dessen geographische Breite eine der Bedingungen (38) befriedigt, dar, so geht die Sonne, sobald sie auf ihrer jährlichen Bahn, der Ekliptik EE' , den Punkt S_1 erreicht hat, nicht mehr unter. Dies dauert während der ganzen Zurücklegung des Bahnintervalles $S_1E'S_2$, welches Intervall als jenes des ständigen Tages bezeichnet werden kann. Während der Zurücklegung des Bahnintervalles S_3ES_4 , erscheint die Sonne nicht über dem Horizont des in Betracht gezogenen Ortes; dort dauert während dieses Intervalles die ständige Nacht. Während der Zurücklegung der Bahnintervalle $S_4\Upsilon S_1$ und $S_2\Upsilon'S_3$ geht die Sonne täglich auf und unter. Die Längen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ der Punkte S_1, S_2, S_3, S_4 der Ekliptik sind, wie im § 41 abgeleitet, die vier zwischen 0° und 360° liegenden Wurzeln der Gleichung:

$$(39) \quad \sin^2 \lambda = \frac{\cos^2 \varphi}{\sin^2 \varepsilon},$$

wobei

$$0 < \lambda_1 < 90^\circ; \quad \lambda_2 = 180^\circ - \lambda_1; \quad \lambda_3 = 180^\circ + \lambda_1; \quad \lambda_4 = 360^\circ - \lambda_1$$

ist.

Die Gleichung (39) stellt die Schnitte *DHM* und *KNB* der in der Fig. 37 dargestellten Fläche mit der Grundebene dar.

Aus (20) und (25) folgt, dass für ein gegebenes φ die Werte von ψ_0 und ω_0 einander gleich sind, also zugleich den Wert von 180° erreichen und auf den Wert von 0° sinken. Deshalb ist ein in Betracht gezogener Breitenkreis der arktischen Zonen während der ständigen Nacht gänzlich unbestrahlt.

Die Bestrahlung eines jeden Ortes der Erdoberfläche weist also einen diskontinuierlichen Verlauf auf, denn sobald die Sonne unter den Horizont des Ortes sinkt, hört die Bestrahlung, die nicht negativ werden kann, ganz auf. Zieht man also den Verlauf der Bestrahlung eines gegebenen Elementes der Erdoberfläche während eines Zeitintervalles in Betracht, welches länger ist als das Verweilen der

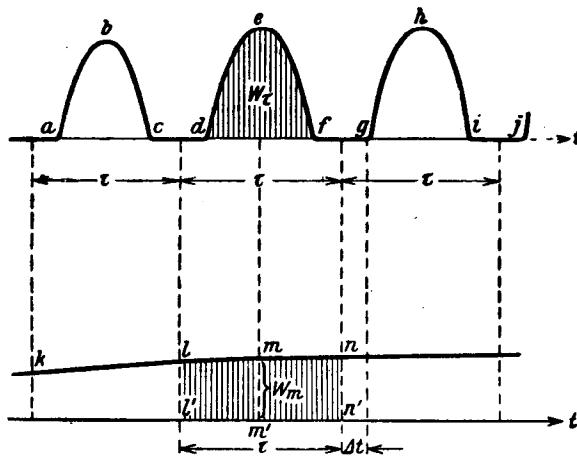


Fig. 38

Sonne über dem Horizont des Ortes dieses Elementes, so muss die Diskontinuität der Funktion $\frac{dW}{dt}$ berücksichtigt werden. Dies geschieht am besten auf folgende Weise.

Es sei die Bestrahlung $\frac{dW}{dt}$ einer gegebenen Stelle der Erdoberfläche als Funktion der Zeit durch den Linienzug *abcdefghij* (Fig. 38) graphisch dargestellt. Diese Linie setzt sich zusammen aus Wellenbergen, die den täglichen Bestrahlungsgang darstellen, und geraden Strecken, die in der Abszissenachse liegen, und den Nachtintervallen entsprechen. Sowohl die Höhe und Breite der Berge als auch die Länge der geraden Strecken ändern sich allmählich wegen der Variabilität der Grössen ϱ und δ im Laufe des Jahres.

Will man jene Strahlungsmenge ermitteln, die während eines längeren Zeitintervalles als ein Tag der in Betracht gezogenen Flächeneinheit der Erdoberfläche zugestrahlt wird, so hätte man, die Diskontinuität der Funktion $\frac{dW}{dt}$ berücksichtigend, eine Summe von Integralen zu bilden, deren Gliederzahl gleich ist der An-

zahl der Verweilungen der Sonne oberhalb des Horizontes der in Betracht gezogenen Stelle der Erdoberfläche.

Diese Summenbildung kann durch die Benützung der durch (21) dargestellten Grösse w vermieden werden. Diese Grösse wird nämlich nur dann gleich Null, wenn der in Betracht gezogene Breitenkreis gänzlich unbestrahlt ist. Dies ist an der arktischen Zonen nur einmal im Jahre, während der ständigen Nacht, der Fall. Infolgedessen wird die Grösse w als Funktion der Zeit durch eine Linie $klmn$ dargestellt sein, die nicht diskontinuierlich ist. Zwischen den beiden in der Fig. 38 dargestellten Linien besteht aber der folgende bemerkenswerte Zusammenhang.

Die Fläche des in der Fig. 38 schraffierten Berges def stellt offenbar jene Menge der Sonnenstrahlung dar, die der in Betracht gezogenen Flächeneinheit an der Breite φ während eines Tages zugestrahlt wird. Ich habe diese Grösse mit W_τ bezeichnet und durch die Formeln (31) und (32) dargestellt. Dabei ist angenommen worden, dass die in diesen Formeln vorkommenden Grössen ϱ und δ dem wahren Mittag des in Betracht gezogenen Tages und Ortes entsprechen. Vergleicht man nun diese beiden Formeln mit den Formeln (22) und (20), welche die mittlere Bestrahlung w des Breitenkreises φ definieren, so findet man, dass die Grösse W_τ gleich ist dem Zeitintervall τ multipliziert mit der mittleren Bestrahlung des Breitenkreises w im Momente des erwähnten wahren Mittags. Diese letztere Grösse ist durch die Ordinate $m'm$ der Linie $klmn$ dargestellt, die das Zeitintervall τ halbiert, das, von Mitternacht zu Mitternacht reichend, den in Betracht gezogenen Tag umfasst. Bezeichnet man diese Ordinate mit w_m , so ist:

$$(40) \quad W_\tau = \tau w_m.$$

Ich habe bereits gesagt, dass sich die Grössen ϱ und δ innerhalb eines Tages so wenig ändern, dass man die Strahlungsmenge W_τ mit den täglichen Mittelwerten der Grössen ϱ und δ berechnen konnte. Infolgedessen wird auch die Fläche $l'n'nl$ gleich τw_m oder nach (40) gleich W_τ gesetzt werden können. Zwischen den Linien $abcde fghij$ und $klmn$ besteht deshalb der Zusammenhang, dass die zwischen diesen Linien und den zugehörigen Abszissenachsen eingeschlossenen in der Fig. 38 durch Schraffierung gekennzeichneten Flächen einander gleich sind. Diese Flächen erstrecken sich über das Intervall von τ von Mitternacht bis Mitternacht.

Will man also jene Strahlungsmenge W_m ermitteln, die während einer ganzen Anzahl m von Tagen der in Betracht gezogenen Flächeneinheit zugestrahlt wird, so kann man, statt die diskontinuierliche Funktion $\frac{dW}{dt}$ zu integrieren, die Integration über das entsprechende Zeitintervall der Funktion w erstrecken. Es ist also:

$$(41) \quad W_m = \int_{t_1}^{t_1 + m\tau} w dt.$$

Dabei soll Zeitpunkt t_1 mit einer Mitternacht des in Betracht gezogenen Ortes koinzidieren.

Wenn m keine ganze Zahl ist oder das Zeitintervall $m\tau$ nicht von Mitternacht bis Mitternacht reicht, so ist die obige Gleichung nicht streng richtig, ja die Unterschiede zwischen den von jeder der beiden Linien $abcdef\dots$ und $klmn\dots$ eingeschlossenen Flächen können unter Umständen beträchtlich werden. Diese Unterschiede rühren davon her, dass die von der ersten Linie begrenzte Fläche jene Strahlungsmenge darstellt, die während des in Betracht gezogenen beliebigen Zeitintervalles t_1 bis t_2 einer bestimmten Flächeneinheit an der geographischen Breite φ zugestrahlt wird, während die von der zweiten Linie begrenzte Fläche jene Strahlungsmenge veranschaulicht, die während desselben Zeitintervalles allen Flächeneinheiten an der Breite φ durchschnittlich zugestrahlt wird. In dieser zweiten Fläche, die durch das Integral:

$$(42) \quad W = \int_{t_1}^{t_2} w dt$$

dargestellt ist, sind die Ungleichheiten der zugestrahlten Sonnenwärme längs desselben Breitenkreises und während des Zeitintervalles t_1 bis t_2 ausgeglichen.

Diese Ungleichheiten können während kurzer Zeitintervalle beträchtlich werden. So kann z. B. während des Zeitintervalles von einem halben Tag einer Stelle des Breitenkreises φ die ganze tägliche Strahlungsmenge zugestrahlt werden, während die diametral gelegene Stelle desselben Breitenkreises ganz unbestrahlt bleibt. Mit wachsendem Zeitintervalle t_1 bis t_2 werden diese Unterschiede in Bruchteilen der Strahlungsmenge immer geringer, aber selbst während eines Jahres werden nicht alle Punkte eines und desselben Breitenkreises gleicher Bestrahlung teilhaftig. Das Jahr umfasst nicht eine ganze Anzahl von Tagen und ist um rund einen Vierteltag länger. Dieser Ueberschuss fällt an einer Stelle des Breitenkreises mit dem Tag, an einer anderen mit der Nacht zusammen, weshalb die erstere etwas mehr bestrahlt wird als die andere. Ja, ein und dasselbe Flächenelement ist während der einzelnen Jahre verschieden bestrahlt, denn der überschüssige Vierteltag fällt eines Jahres mit dem Tag, eines anderen Jahres mit der Nacht zusammen.

In den Grössen w und W sind alle diese Unterschiede längs desselben Breitenkreises und während der verschiedenen Jahre ausgeglichen. Die erste dieser zwei Grössen stellt den durchschnittlichen jährlichen Bestrahlungsgang der Flächeneinheit an der Breite φ dar, in welchem der durch die Rotation der Erde hervorgerufene tägliche Bestrahlungsgang nicht zum Ausdruck gelangt. Die Grösse W stellt die während des Zeitintervalles t_1 bis t_2 dieser Fläche durchschnittlich zugestrahlte Menge der Sonnenstrahlung dar.

§ 76. Reihenentwicklungen. Will man das in (42) vorkommende Integral berechnen, so ist es zuerst notwendig, die Grössen w und t durch eine gemeinsame unabhängige Veränderliche auszudrücken. Um dies zu bewerkstelligen, werde ich mich einiger Reihenentwicklungen bedienen, die vorerst durchgeführt werden mögen.

Setzt man der kürzeren Schreibweise halber

$$(43) \quad \text{tang } \varphi = n$$

$$(44) \quad \sin \varepsilon = k,$$

so erhalten die Formeln (21) und (20) die Form:

$$(45) \quad w = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{J_0}{\rho^2} \cos \varphi (n \psi_0 \sin \delta + \cos \delta \sin \psi_0)$$

$$(46) \quad \cos \psi_0 = -n \text{ tang } \delta.$$

Es folgt aus den obigen Gleichungen:

$$\sin \psi_0 = \sqrt{1 - n^2 \text{ tang}^2 \delta} = \sqrt{\frac{1 - (1 + n^2) \sin^2 \delta}{\cos^2 \delta}},$$

d. h.

$$\cos \delta \sin \psi_0 = \sqrt{1 - (1 + n^2) \sin^2 \delta},$$

oder wegen (35) und (44)

$$(47) \quad \cos \delta \sin \psi_0 = \sqrt{1 - k^2 (1 + n^2) \sin^2 \lambda}.$$

Dieser Ausdruck kann für jedes λ mittels der Binomialformel in eine Reihe entwickelt werden, solange

$$k^2 (1 + n^2) \leq 1,$$

ist, d. h. die nachstehenden Gleichungen erfüllt sind:

$$\sin^2 \varepsilon (1 + \text{tang}^2 \varphi) \leq 1$$

$$\sin^2 \varepsilon \leq \cos^2 \varphi$$

$$-(90^\circ - \varepsilon) \leq \varphi \leq +(90^\circ - \varepsilon),$$

also der in Betracht gezogene Breitenkreis φ der nichtarktischen Zone angehört. Ich setze dies voraus und werde später auf den Fall zurückkommen, wo der in Betracht gezogene Breitenkreis der einen oder der anderen der arktischen Zone angehört.

Die angesagte Reihenentwicklung liefert:

$$\begin{aligned}
 (48) \quad \cos \delta \sin \psi_0 = & 1 - \frac{1}{2} (1+n^2) k^2 \sin^2 \lambda - \frac{1}{2^3} (1+n^2)^2 k^4 \sin^4 \lambda - \\
 & - \frac{1}{2^4} (1+n^2)^3 k^6 \sin^6 \lambda - \frac{5}{2^7} (1+n^2)^4 k^8 \sin^8 \lambda - \\
 & - \frac{7}{2^8} (1+n^2)^5 k^{10} \sin^{10} \lambda - \frac{3 \cdot 7}{2^{10}} (1+n^2)^6 k^{12} \sin^{12} \lambda - \\
 & - \frac{3 \cdot 11}{2^{11}} (1+n^2)^7 k^{14} \sin^{14} \lambda - \dots
 \end{aligned}$$

Aus (46) folgt:

$$(49) \quad \psi_0 = \frac{\pi}{2} + \arcsin (n \operatorname{tang} \delta).$$

Dieser Ausdruck kann in eine Maclaurinsche Reihe entwickelt werden, solange

$$-1 \leq n \operatorname{tang} \delta \leq +1$$

ist. Dies ist nach (36) und (37) dann der Fall, wenn der in Betracht gezogene Breitenkreis der nichtarktischen Zone angehört, was ich ja vorausgesetzt habe.

Die angesagte Reihenentwicklung liefert:

$$\begin{aligned}
 (50) \quad \psi_0 = & \frac{\pi}{2} + n \operatorname{tang} \delta + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} n^3 \operatorname{tang}^3 \delta + \frac{1}{2^3} \cdot \frac{3}{5} n^5 \operatorname{tang}^5 \delta + \\
 & + \frac{1}{2^4} \cdot \frac{5}{7} n^7 \operatorname{tang}^7 \delta + \frac{1}{2^7} \cdot \frac{5 \cdot 7}{9} n^9 \operatorname{tang}^9 \delta + \\
 & + \frac{1}{2^8} \cdot \frac{7 \cdot 9}{11} n^{11} \operatorname{tang}^{11} \delta + \frac{1}{2^{10}} \cdot \frac{3 \cdot 7 \cdot 11}{13} n^{13} \operatorname{tang}^{13} \delta + \dots
 \end{aligned}$$

Es folgt aus (35) und (44)

$$(51) \quad \operatorname{tang} \delta = \sqrt{\frac{\sin^2 \delta}{1 - \sin^2 \delta}} = k \sin \lambda (1 - k^2 \sin^2 \lambda)^{-\frac{1}{2}}$$

$$(52) \quad \psi_0 \sin \delta = \psi_0 k \sin \lambda .$$

Setzt man den Ausdruck für $\tan \delta$ aus (51) in (50) und den auf diese Weise gewonnenen Ausdruck für ψ_0 in (52) ein, so bekommt man die Reihenentwicklung:

$$(53) \quad \begin{aligned} \psi_0 \sin \delta = & \frac{\pi}{2} k \sin \lambda + nk^2 \sin^2 \lambda (1 - k^2 \sin^2 \lambda)^{-\frac{1}{2}} + \\ & + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} n^3 k^4 \sin^4 \lambda (1 - k^2 \sin^2 \lambda)^{-\frac{3}{2}} + \\ & + \frac{1}{2^3} \cdot \frac{3}{5} n^5 k^6 \sin^6 \lambda (1 - k^2 \sin^2 \lambda)^{-\frac{5}{2}} + \\ & + \frac{1}{2^4} \cdot \frac{5}{7} n^7 k^8 \sin^8 \lambda (1 - k^2 \sin^2 \lambda)^{-\frac{7}{2}} + \\ & + \frac{1}{2^7} \cdot \frac{5 \cdot 7}{9} n^9 k^{10} \sin^{10} \lambda (1 - k^2 \sin^2 \lambda)^{-\frac{9}{2}} + \\ & + \frac{1}{2^8} \cdot \frac{7 \cdot 9}{11} n^{11} k^{12} \sin^{12} \lambda (1 - k^2 \sin^2 \lambda)^{-\frac{11}{2}} + \\ & + \frac{1}{2^{10}} \cdot \frac{3 \cdot 7 \cdot 11}{13} n^{13} k^{14} \sin^{14} \lambda (1 - k^2 \sin^2 \lambda)^{-\frac{13}{2}} + \dots \end{aligned}$$

Entwickelt man die eingeklammerten Ausdrücke der vorstehenden Reihe nach der Binomialformel, bildet dann mit Heranziehung von (48) die Reihe für den Ausdruck

$$n \psi_0 \sin \delta + \cos \delta \sin \psi_0 ,$$

ordnet dieselbe nach Potenzen von $\sin \lambda$ und führt die Bezeichnungen ein:

$$(54) \quad \left\{ \begin{aligned} a_1 &= \frac{k^2}{2} (-1 + n^2) \\ a_2 &= \frac{k^4}{8} (-1 + 2n^2) + \frac{k^4}{24} n^4 \\ a_3 &= \frac{k^6}{16} (-1 + 3n^2 + n^4) + \frac{k^6}{80} n^6 \\ a_4 &= \frac{5k^8}{128} (-1 + 4n^2 + 2n^4) + \frac{k^8}{32} n^6 + \frac{5k^8}{896} n^8 \\ a_5 &= \frac{7k^{10}}{256} (-1 + 5n^2 + \frac{10}{3} n^4 + 2n^6) + \frac{5k^{10}}{256} n^8 + \frac{7k^{10}}{2304} n^{10} \\ a_6 &= \frac{21k^{12}}{1024} (-1 + 6n^2 + 5n^4 + 4n^6) + \frac{k^{12}}{1024} (45n^8 + 12n^{10}) + \frac{21k^{12}}{11264} n^{12} \\ a_7 &= \frac{33k^{14}}{2048} (-1 + 7n^2 + 7n^4 + 7n^6 + 5n^8) + \frac{7k^{14}}{2048} (11n^{10} + 3n^{12}) + \\ &+ \frac{33k^{14}}{26624} n^{14}, \end{aligned} \right.$$

so erhält man:

$$(55) \quad n\psi_0 \sin \delta + \cos \delta \sin \psi_0 = 1 + \frac{\pi}{2} nk \sin \lambda + \sum_m a_m \sin^{2m} \lambda.$$

Die obige Reihenentwicklung war auf die Bedingung geknüpft, dass der in Betracht gezogene Breitenkreis der nichtarktischen Zone angehört. Gehört dieser Breitenkreis einer der arktischen Zone an, so hat man bei der Berechnung des vorstehenden Ausdruckes zu unterscheiden, ob die Länge λ der Sonne dem Intervall des ständigen Tages, jenem der ständigen Nacht oder aber den Intervallen mit täglichem Aufgang und Untergang der Sonne angehört.

Während des Intervalles der ständigen Nacht, d. h. für

$$\lambda_3 \leq \lambda \leq \lambda_4$$

ist der in Betracht gezogene Breitenkreis gänzlich unbestrahlt, d. h. es ist $\psi_0 = 0$, so dass der obige Ausdruck gleich Null zu setzen ist.

Während des Intervalles des ständigen Tages, d. h. für

$$\lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2$$

ist der Breitenkreis seiner ganzen Länge nach vollständig bestrahlt, d. h. es ist $\psi_0 = \pi$ und deshalb:

$$(56) \quad n \psi_0 \sin \delta + \cos \delta \sin \psi_0 = \pi n \sin \delta = \pi n k \sin \lambda.$$

Die Intervalle mit täglichem Aufgang und Untergang der Sonne, d. h. die den Längen

$$0 < \lambda < \lambda_1; \quad \lambda_2 < \lambda < \lambda_3; \quad \lambda_4 < \lambda < 2\pi$$

entsprechenden Intervalle sind nach den früheren Darlegungen durch die Ungleichheit

$$(57) \quad -1 < n \operatorname{tang} \delta < +1$$

charakterisiert. Es lässt sich nun zeigen, dass solange (57) erfüllt ist, d. h. solange die Sonne das obige Intervall durchschreitet, die vorstehende Reihenentwicklung auch für die arktischen Zonen zulässig ist.

Es folgt nämlich aus (47) und (49), dass die vorstehende Reihenentwicklung zulässig ist, wenn

$$(58) \quad k^2(1 + n^2) \sin^2 \lambda < 1$$

und

$$n^2 \operatorname{tang}^2 \delta < 1$$

ist. Diese letztere Bedingung ist aber identisch mit (57) und ist deshalb tatsächlich erfüllt. Formt man sie folgenderweise um:

$$n^2 < \operatorname{cotg}^2 \delta$$

$$1 + n^2 < 1 + \operatorname{cotg}^2 \delta = \operatorname{cosec}^2 \delta$$

$$(1 + n^2) \sin^2 \delta < 1,$$

so sieht man, dass wegen (35) und (44) auch die Bedingung (58) erfüllt und die Reihenentwicklung zulässig ist. Auf diese Weise sind alle möglichen Fälle der Reihenentwicklung (55) erledigt.

Wegen der nachfolgenden Integration erweist es sich als notwendig, die in (55) vorkommenden Potenzen von $\sin \lambda$ mittels der Kosinuse des Vielfachen von λ auszudrücken, wozu sich die bekannte Formel:

$$(59) \quad (-1)^m 2^{2m-1} \sin^{2m} \lambda = \cos 2m \lambda - \binom{2m}{1} \cos(2m-2) \lambda + \\ + \binom{2m}{2} \cos(2m-4) \lambda - + \dots + \binom{2m}{m} \frac{1}{2}$$

eignet. Setzt man noch der kürzeren Schreibweise halber:

$$(60) \quad \left\{ \begin{aligned} b_0 &= \cos \varphi \left\{ 1 + \frac{1}{2^2} \binom{2}{1} a_1 + \frac{1}{2^4} \binom{4}{2} a_2 + \frac{1}{2^6} \binom{6}{3} a_3 + \frac{1}{2^8} \binom{8}{4} a_4 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2^{10}} \binom{10}{5} a_5 + \frac{1}{2^{12}} \binom{12}{6} a_6 + \frac{1}{2^{14}} \binom{14}{7} a_7 \right\} \\ b_1 &= \frac{\cos \varphi}{2} \left\{ a_1 + \frac{1}{2^2} \binom{4}{1} a_2 + \frac{1}{2^4} \binom{6}{2} a_3 + \frac{1}{2^6} \binom{8}{3} a_4 + \frac{1}{2^8} \binom{10}{4} a_5 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2^{10}} \binom{12}{5} a_6 + \frac{1}{2^{12}} \binom{14}{6} a_7 \right\} \\ b_2 &= \frac{\cos \varphi}{2^3} \left\{ a_2 + \frac{1}{2^2} \binom{6}{1} a_3 + \frac{1}{2^4} \binom{8}{2} a_4 + \frac{1}{2^6} \binom{10}{3} a_5 + \frac{1}{2^8} \binom{12}{4} a_6 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2^{10}} \binom{14}{5} a_7 \right\} \\ b_3 &= \frac{\cos \varphi}{2^5} \left\{ a_3 + \frac{1}{2^2} \binom{8}{1} a_4 + \frac{1}{2^4} \binom{10}{2} a_5 + \frac{1}{2^6} \binom{12}{3} a_6 + \frac{1}{2^8} \binom{14}{4} a_7 \right\} \\ b_4 &= \frac{\cos \varphi}{2^7} \left\{ a_4 + \frac{1}{2^2} \binom{10}{1} a_5 + \frac{1}{2^4} \binom{12}{2} a_6 + \frac{1}{2^6} \binom{14}{3} a_7 \right\} \\ b_5 &= \frac{\cos \varphi}{2^9} \left\{ a_5 + \frac{1}{2^2} \binom{12}{1} a_6 + \frac{1}{2^4} \binom{14}{2} a_7 \right\} \\ b_6 &= \frac{\cos \varphi}{2^{11}} \left\{ a_6 + \frac{1}{2^2} \binom{14}{1} a_7 \right\} \\ b_7 &= \frac{\cos \varphi}{2^{13}} a_7 \end{aligned} \right.$$

Tabelle VI
Numerische Werte der Koeffizienten $b_0, b_1, b_2, \dots, b_7$

| φ | b_0 | b_1 | b_2 | b_3 | b_4 | b_5 | b_6 | b_7 |
|-----------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 0° | +0,9591 | -0,0413 | -0,0004 | -0,0000 | | | | |
| 5° | +0,9558 | -0,0407 | -0,0004 | -0,0000 | | | | |
| 10° | +0,9458 | -0,0393 | -0,0004 | -0,0000 | | | | |
| 15° | +0,9293 | -0,0369 | -0,0004 | -0,0000 | | | | |
| 20° | +0,9065 | -0,0334 | -0,0003 | -0,0000 | | | | |
| 25° | +0,8777 | -0,0289 | -0,0002 | -0,0000 | | | | |
| 30° | +0,8429 | -0,0232 | -0,0001 | +0,0000 | | | | |
| 35° | +0,8028 | -0,0163 | +0,0001 | +0,0000 | | | | |
| 40° | +0,7577 | -0,0081 | +0,0002 | +0,0000 | | | | |
| 45° | +0,7084 | +0,0018 | +0,0005 | +0,0000 | | | | |
| 50° | +0,6558 | +0,0138 | +0,0009 | +0,0000 | | | | |
| 55° | +0,6014 | +0,0286 | +0,0014 | +0,0001 | +0,0000 | | | |
| 60° | +0,5455 | +0,0477 | +0,0024 | +0,0002 | +0,0000 | | | |
| 65° | +0,4932 | +0,0746 | +0,0045 | +0,0005 | +0,0001 | +0,0000 | | |
| 70° | +0,4540 | +0,1223 | +0,0123 | +0,0024 | +0,0005 | +0,0002 | +0,0000 | |
| 75° | +0,5161 | +0,3312 | +0,1029 | +0,0382 | +0,0111 | +0,0013 | +0,0003 | +0,0000 |

so bekommt man:

$$(61) \quad \cos \varphi (n \psi_0 \sin \delta + \cos \delta \sin \psi_0) = b_0 + \frac{\pi}{2} \sin \varphi \sin \varepsilon \sin \lambda - \\ - b_1 \cos 2\lambda + b_2 \cos 4\lambda - b_3 \cos 6\lambda + b_4 \cos 8\lambda - + \dots$$

Die numerischen Werte der Koeffizienten $b_0, b_1, b_2, \dots, b_7$ dieser Reihe habe ich, um Anschluss an die Berechnungen von Wiener zu erhalten, mit dem Werte $\varepsilon = 23^\circ 27' 30''$ der Ekliptikschiefe berechnet; sie sind in der beiliegenden Tabelle VI mitgeteilt, für jeden fünften Breitengrad bis inklusive den fünfundsiebzigsten. Wie aus dieser Tabelle zu ersehen, konvergiert die vorstehende Reihe sehr rasch.

Setzt man (61) in (45) ein, so erhält man

$$(62) \quad w = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{J_0}{\varrho^2} (b_0 + \frac{\pi}{2} \sin \varphi \sin \varepsilon \sin \lambda - b_1 \cos 2\lambda + b_2 \cos 4\lambda - b_3 \cos 6\lambda + \\ + b_4 \cos 8\lambda - + \dots).$$

Die Grösse w war auch durch die Formeln (22) und (20), d. h. durch:

$$(63) \quad w = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{J_0}{\varrho^2} (\psi_0 \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \sin \psi_0)$$

$$(64) \quad \cos \psi_0 = - \operatorname{tang} \varphi \operatorname{tang} \delta$$

veranschaulicht.

Die Formeln (62) und (64) gelten nur für reelle Wurzeln ψ_0 der Gleichung (63). Die vorstehende zweifache Veranschaulichung der Grösse w ermöglicht, einige bemerkenswerte Eigenschaften der in der Formel (62) vorkommenden Koeffizienten $b_0, b_1, b_2, b_3 \dots$ nachzuweisen. Dies geschieht auf folgende Weise.

Es ist nach (35)

$$(65) \quad \sin \delta = \sin \varepsilon \sin \lambda$$

Für $\lambda = 0$ wird also $\delta = 0$ und wegen (64) $\psi_0 = \frac{\pi}{2}$. Man bekommt also mittels (63)

$$w = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{J_0}{\varrho^2} \cos \varphi,$$

während die Formel (62) mit $\lambda = 0$

$$w = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{J_0}{\rho^2} (b_0 - b_1 + b_2 - b_3 + b_4 - + \dots)$$

ergibt.

Es folgt aus den vorstehenden zwei Gleichungen:

$$(66) \quad b_0 - b_1 + b_2 - b_3 + b_4 - + \dots = \cos \varphi.$$

Aehnliche Beziehungen lassen sich auch mit jedem anderen Wert von λ , λ_1 , $\lambda_2 \dots$, den man in die obigen Gleichungen einführt, ableiten. Diese Beziehungen werden besonders einfach für $\lambda_1 = 45^\circ$ und $\lambda_2 = 90^\circ$. Bezeichnet man nämlich den mit diesen zwei Werten vermittels (65) und (64) berechneten Klammerausdruck

$$\psi_0 \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \sin \psi_0 = K$$

mit K_1 bzw. mit K_2 , so wird für $\lambda = 45^\circ$

$$w = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{J_0}{\rho^2} K_1,$$

während die Formel (62) mit $\lambda = 45^\circ$

$$w = \frac{1}{\pi} \frac{J_0}{\rho^2} \left(b_0 + \frac{\pi}{4} \sqrt{2} \sin \varphi \sin \varepsilon - b_2 + b_4 - b_6 + \dots \right)$$

ergibt, so dass man bekommt:

$$(67) \quad b_0 - b_2 + b_4 - b_6 + \dots = K_1 - \frac{\pi}{4} \sqrt{2} \sin \varphi \sin \varepsilon.$$

Für $\lambda = 90^\circ$ wird

$$w = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{J_0}{\rho^2} K_2,$$

während man mit der Formel (62)

$$w = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{J_0}{Q^2} \left(b_0 + \frac{\pi}{2} \sin \varphi \sin \varepsilon + b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + \dots \right)$$

bekommt, so dass es wird:

$$(68) \quad b_0 + b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + \dots = K_2 - \frac{\pi}{2} \sin \varphi \sin \varepsilon.$$

Mit Hilfe der soeben gewonnenen drei Gleichungen (66), (67), (68) kann man also die in der Tabelle VI mitgeteilten numerischen Werte der Koeffizienten b_0, b_1, b_2 für die geographischen Breiten von 0° bis 55° ; für welche die Koeffizienten $b_4, b_5 \dots$, als sehr klein, nicht in Betracht kommen, leicht ausrechnen. Für die höheren Breiten, für die eine grössere Zahl als drei der Koeffizienten $b_0, b_1, b_2, b_3 \dots$ zu berechnen wäre, müsste eine grössere Anzahl der Gleichungen von der Form der vorstehenden gebildet werden, etwa durch Heranziehung der Werte $\lambda = 22^\circ 30'$; $\lambda = 57^\circ 30' \dots$

§ 77. Der jährliche Gang der Bestrahlung. Bei der mathematischen Beschreibung des täglichen Ganges der Bestrahlung habe ich mich, so wie es in der Sphärischen Astronomie üblich ist, des geozentrischen Standpunktes bedient; dies

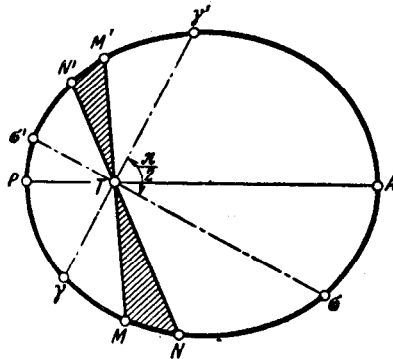


Fig. 39

soll bei der mathematischen Beschreibung des jährlichen Ganges der Bestrahlung ebenfalls geschehen. Es stelle also die Ellipse $PMAM'$ (Fig. 39) die relative Bahn der Sonne in bezug auf die Erde, der Brennpunkt T dieser Ellipse den Mittelpunkt der Erde dar. Der der Erde nächstliegende Punkt P dieser Sonnenbahn heisst das Perigeum, der entfernteste Punkt A das Apogeum. Die relative Bewegung der Sonne um die Erde ist ein getreues Spiegelbild der jährlichen Bewegung der Erde um die Sonne, so dass für diese Bewegung die im § 1 mitgeteilten Gesetze und Gleichungen gelten.

Stellt also M die augenblickliche Lage der Sonne auf ihrer Bahn dar, so wird der Winkel PTM , den der Radiusvektor $TM=r$ mit der gegen das Perigeum gerichteten Achse der Bahnellipse einschliesst die wahre Anomalie der Sonne genannt. Ich werde diesen Winkel mit ν bezeichnen. Bezeichnet man die grosse Halbachse der relativen Sonnenbahn, die offenbar gleich ist der grossen Halbachse der Erdbahn, mit a , und die numerische Exzentrizität dieser Bahn mit e , so ist die Polargleichung der Sonnenbahn nach den Gleichungen (4) und (5) des ersten Abschnittes dieses Buches dargestellt durch:

$$(69) \quad r = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos \nu},$$

während die Gleichungen (6), (7) und (2) jenes Abschnittes die Gleichung ergeben:

$$(70) \quad r^2 \frac{d\nu}{dt} = \frac{2\pi}{T} a^2 \sqrt{1-e^2},$$

worin T die Umlaufzeit des Erde um die Sonne bedeutet.

Hier will ich im Anschluss an die vorstehenden Erörterungen den Radiusvektor r in Erdbahnhalbmassern a messen, d. h. nach (4) setzen:

$$(71) \quad e = \frac{r}{a},$$

so dass man statt der Gleichungen (69) und (70) die nachstehenden bekommt:

$$(72) \quad e = \frac{1-e^2}{1+e \cos \nu}$$

$$(73) \quad e^2 \frac{d\nu}{dt} = \frac{2\pi}{T} \sqrt{1-e^2}.$$

Befindet sich die Sonne zur Zeit des Frühlingsäquinoktiums im Punkte γ (Fig. 39) ihrer relativen Bahn, dann stellt die Gerade $\gamma\gamma'$ die Aequinoktiallinie dar. Zieht man die Gerade $\sigma\sigma'$ senkrecht zur Aequinoktiallinie, so bekommt man die beiden Punkte σ und σ' , die die Sonne zur Zeit des Sommer- bzw. des Wintersolstitiums durchschreitet. Der Winkel $PT\gamma$ wird die Anomalie des Frühlingspunktes genannt; ich werde ihn mit ν_0 bezeichnen. Weil der Winkel γTM die wahre Länge λ der Sonne veranschaulicht, so ist:

$$(74) \quad \nu = \nu_0 + \lambda.$$

Setzt man dies in (72) ein, so wird:

$$(75) \quad \varrho = \frac{1 - e^2}{1 + e \cos(\nu_0 + \lambda)}.$$

Die Exzentrizität e der Erdbahn ist darart klein, dass ihr Quadrat vernachlässigt werden kann. Macht man davon in der vorstehenden Formel Gebrauch und setzt den derart gewonnenen Ausdruck für ϱ^2 in (62) ein, so erhält man:

$$(76) \quad w = \frac{J_0}{\pi} [1 + 2e \cos(\nu_0 + \lambda)] (b_0 + \frac{\pi}{2} \sin \varphi \sin \varepsilon \sin \lambda - b_1 \cos 2\lambda + \\ + b_2 \cos 4\lambda - b_3 \cos 6\lambda + b_4 \cos 8\lambda - + \dots).$$

Durch diese Formel ist die durchschnittliche Bestrahlung w der Flächeneinheit an der Breite φ als Funktion der Länge λ der Sonne analytisch dargestellt. Macht man von (40), d. h. von der Gleichung:

$$(77) \quad W_\tau = \tau w$$

Gebrauch, so erhält man die analytische Darstellung der durch die Fig. 37 veranschaulichten Fläche.

Die analytische Darstellung der Grössen w und W_τ als Funktionen der Zeit t ist komplizierter, weshalb ich sie hier nicht unternehmen will, zumal davon kein Gebrauch zu machen sein wird, und ich mit Hilfe der Gleichung (62) alle hier auftretenden Fragen zu beantworten in der Lage sein werde.

§ 78. Die während beliebiger Zeitabschnitte des Jahres zugestrahlten Wärmemengen. Wie im § 75 auseinandergesetzt, stellt das Integral

$$(78) \quad W = \int_{t_1}^{t_2} w dt$$

die der Flächeneinheit des Breitenkreises φ während des Zeitintervalles t_1 bis t_2 zugestrahlte Wärmemenge dar. Die Wärmemenge, die dieser Flächeneinheit zugestrahlt wird, während die Sonne auf ihrer relativen Bahn um die Erde das Längenintervall λ' bis λ'' zurücklegt, durch

$$(79) \quad W = \int_{\lambda'}^{\lambda''} w \frac{dt}{d\lambda} d\lambda$$

dargestellt ist.

Sieht man von der langsam verlaufenden Bewegung des Perigeums, d. h. der Apsidenlinie und der Präzession der Nachtgleichen ab, also zusammengenommen von der säkularen Aenderung der Länge des Perigeums in bezug auf den Frühlingspunkt, die im Vergleich zu den zeitlichen Aenderungen der Grössen ν und λ ganz und gar vernachlässigbar ist, so kann in der Gleichung (74) ν_0 als eine Konstante angesehen werden. Die Differentiation dieser Gleichung nach der Zeit t liefert dann:

$$\frac{d\nu}{dt} = \frac{d\lambda}{dt}.$$

Setzt man dies in (73) ein, so wird:

$$(80) \quad e^2 \frac{d\lambda}{dt} = \frac{2\pi}{T} \sqrt{1-e^2}.$$

Es ist nach (62)

$$(81) \quad w = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{J_0}{\varrho^2} \left(b_0 + \frac{\pi}{2} \sin \varphi \sin \varepsilon \sin \lambda - b_1 \cos 2\lambda + b_2 \cos 4\lambda - \right. \\ \left. - b_3 \cos 6\lambda + b_4 \cos 8\lambda - + \dots \right).$$

Dieser Ausdruck gilt für die nichtarktische Zone für alle Sonnenlängen, für die arktischen Zonen aber nur für die Intervalle des täglichen Aufganges und Unterganges der Sonne.

Für das Intervall des ständigen Tages, für welches $\psi_0 = \pi$ wird, ist für die arktischen Zonen der obige Ausdruck wegen (21) und (65) durch:

$$(82) \quad w = \frac{J_0}{\varrho^2} \sin \varphi \sin \varepsilon \sin \lambda$$

zu ersetzen.

Setzt man den Ausdruck (81) bzw. (82) in (79) ein, so erscheint in diesem Integrale in beiden Fällen der wegen (80) konstante Faktor

$$\frac{1}{q^2} \cdot \frac{dt}{d\lambda} = \frac{T}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{1-e^2}}$$

der vor das Integralzeichen gesetzt werden kann. Man bekommt also für W die folgenden zwei Formeln:

$$W = \frac{T}{2\pi^2} \cdot \frac{J_0}{\sqrt{1-e^2}} \int_{\lambda'}^{\lambda''} \left(b_0 + \frac{\pi}{2} \sin \varphi \sin \varepsilon \sin \lambda - b_1 \cos 2\lambda + b_2 \cos 4\lambda - \right. \\ \left. - b_3 \cos 6\lambda + b_4 \cos 8\lambda - + \dots \right) d\lambda$$

$$W = \frac{T}{2\pi} \cdot \frac{J_0}{\sqrt{1-e^2}} \sin \varphi \sin \varepsilon \int_{\lambda'}^{\lambda''} \sin \lambda \, d\lambda.$$

Führt man die obigen Integrationen durch, so bekommt man:

$$(83) \quad W = \frac{T}{2\pi^2} \cdot \frac{J_0}{\sqrt{1-e^2}} \left\{ b_0(\lambda'' - \lambda') - \frac{\pi}{2} \sin \varepsilon \sin \varphi (\cos \lambda'' - \cos \lambda') - \right. \\ \left. - \frac{b_1}{2} (\sin 2\lambda'' - \sin 2\lambda') + \frac{b_2}{4} (\sin 4\lambda'' - \sin 4\lambda') - \right. \\ \left. - \frac{b_3}{6} (\sin 6\lambda'' - \sin 6\lambda') + \frac{b_4}{8} (\sin 8\lambda'' - \sin 8\lambda') - + \dots \right\}$$

$$(84) \quad W = \frac{T}{2\pi} \cdot \frac{J_0}{\sqrt{1-e^2}} \sin \varphi \sin \varepsilon (\cos \lambda' - \cos \lambda'').$$

Die Gleichung (84) gilt für das Intervall des ständigen Tages, sonst gilt die Gleichung (83). Wie aus der Tabelle VI ersichtlich, konvergiert die Reihe (83) sehr rasch; nur für Breiten über 75° wäre eine grössere Zahl von Reihengliedern erforderlich. In diesem Falle wird aber das Intervall mit dem täglichen Aufgang der Sonne so kurz, dass man mittels (63) und (64) einige Werte von w und dann mittels mechanischer Quadratur die diesem Intervall zugehörige Quantität der Bestrahlung berechnen kann.

Die beiden Ausdrücke (83) und (84) werden nicht geändert, wenn man in ihnen die Substitution:

$$\varphi | -\varphi; \quad \lambda' | \lambda' + \pi; \quad \lambda'' | \lambda'' + \pi$$

durchführt. Daraus folgt der wichtige Satz:

Die Quantität der Bestrahlung, die der Flächeneinheit an der Breite φ zugestrahlt wird, während die Sonne den Bahnbogen λ' bis λ'' zurücklegt, ist gleich der Quantität der Bestrahlung, die der Flächeneinheit an der Breite $-\varphi$ zugestrahlt wird, während die Sonne den Bahnbogen $\lambda' + \pi$ bis $\lambda'' + \pi$ durchschreitet.

Stellt also (Fig. 39, Seite 315) MN den Bahnbogen λ' bis λ'' dar, so stellt der diametral gelegene Bogen $M'N'$ den Bogen $\lambda' + \pi$ bis $\lambda'' + \pi$ dar. Weil der obige Satz für alle Breiten gültig ist, so kann man sagen, dass die Quantität der Bestrahlung, die der einen der beiden Hemisphären der Erde zugestrahlt wird, während der Zurücklegung eines beliebigen Bogens MN der Sonnenbahn, gleich ist der Quantität der Bestrahlung, die der anderen Hemisphäre der Erde zugestrahlt wird, während die Sonne den diametral gelegenen Bogen $M'N'$ ihrer Bahn durchschreitet.

Ich will schon jetzt darauf aufmerksam machen, dass die Gleichheit der erwähnten Strahlungsmengen selbst bei gleichen übrigen Umständen nicht einen gleichen Temperaturverlauf auf den beiden Hemisphären der Erde zur Folge hat, weil die Zeiten, während welchen die Bogen MN bzw. $M'N'$ zurückgelegt werden, nach dem zweiten Keplerschen Gesetz ungleich sind.

§ 79. Die astronomischen Jahreszeiten. Wie im § 41 berichtet, werden die Zeiträume des Jahres, während welchen die Sonne die vom Frühlingspunkt gezählten Quadranten der Ekliptik durchschreitet, die astronomischen Jahreszeiten genannt. Es sind dies jene Zeitintervalle, während welchen die Sonne in ihrem relativen Lauf um die Erde die Bahnbogen $\gamma\sigma$; $\sigma\gamma'$; $\gamma'\sigma'$; $\sigma'\gamma$ (Fig. 39, Seite 315) zurücklegt. Weil die Flächen der zugehörigen Sektoren der durch die Sonnenbahn begrenzten Ellipse nicht einander gleich sind, der Radiusvektor der Sonne aber in gleichen Zeiträumen gleiche Flächen überstreicht, ist die Dauer der vier Jahreszeiten verschieden. Nur wenn die grosse Achse der Sonnenbahn mit der Aequinoktiallinie $\gamma\gamma'$ zusammenfällt, ist die Dauer des astronomischen Frühlings gleich jener des Winters, die Dauer des Sommers gleich jener des Herbstes; stehen diese beiden Linien senkrecht aufeinander, dann ist die Dauer des Frühlings gleich der Dauer des Sommers, die Dauer des Herbstes gleich jener des Winters. Die Zeit, während der die Sonne auf der scheinbaren Himmelskugel einen vollständigen Umlauf vollführt, heisst, wie im § 52 berichtet, das siderische Jahr; die Zeit, die die Sonne braucht, um vom Frühlingspunkt ausgehend, wieder zu demselben zurückzukehren, heisst das tropische Jahr. Die astronomischen Jahreszeiten sind, weil sie vom Frühlingspunkte gezählt werden, Bruchstücke des tropischen Jahres, was bei der Berechnung ihrer Dauer zu berücksichtigen wäre, will man den kleinen 20 Minuten betragenden Unterschied jener beiden Jahre nicht ausser Acht lassen.

Ich will hier die mathematischen Ausdrücke für die Längen des astronomischen Sommerhalbjahres (Frühling + Sommer) und des astronomischen Winterhalb-

jahres (Herbst+Winter) zwecks späteren Gebrauchs ableiten. Dabei will ich die Länge des nördlichen Sommerhalbjahres mit T_s , die Länge des nördlichen Winterhalbjahres mit T_w bezeichnen; das Sommerhalbjahr der südlichen Halbkugel möge mit \overline{T}_s , ihr Winterhalbjahr mit \overline{T}_w bezeichnet werden. Es ist dann:

$$(85) \quad T_s + T_w = T$$

$$(86) \quad \overline{T}_s = T_w \quad \overline{T}_w = T_s$$

worin T die Länge des tropischen Jahres bedeutet.

Bedeutet (Fig. 39, Seite 315) F_s die Fläche des Sektors $\gamma\sigma\gamma'$ und F die Fläche der ganzen Ellipse $PMAM'P$, so ist nach dem zweiten Keplerschen Gesetz, wenn man von der säkularen Veränderlichkeit der Punkte $\gamma, \sigma, \gamma', \sigma'$ absieht,

$$(87) \quad T_s = \frac{F_s}{F} T.$$

Es ist dabei:

$$F_s = \frac{1}{2} \int_{\nu_0}^{\nu_0+\pi} \varrho^2 d\nu \quad F = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \varrho^2 d\nu$$

und wegen (72), wenn man das Quadrat von e^2 vernachlässigt,

$$\varrho^2 = (1 + e \cos \nu)^{-2} = 1 - 2e \cos \nu.$$

Es wird deshalb:

$$T_s = T \int_{\nu_0}^{\nu_0+\pi} (1 - 2e \cos \nu) d\nu : \int_0^{2\pi} (1 - 2e \cos \nu) d\nu.$$

Führt man die obigen Quadraturen durch, so bekommt man mittels (85)

$$(88) \quad \begin{cases} T_s = \frac{1}{2} T \left(1 + \frac{4e}{\pi} \sin \nu_0 \right) \\ T_w = \frac{1}{2} T \left(1 - \frac{4e}{\pi} \sin \nu_0 \right) \end{cases}$$

$$(89) \quad T_s - T_w = T \frac{4e}{\pi} \sin \nu_0.$$

Gegenwärtig ist $e = 0,01675$; $\nu_0 = 77^\circ 38' 30''$, woraus sich mit $T = 365,2422^d$ für T_s und T_w die folgenden Werte ergeben:

$$T_s = 186 \text{ Tage } 10 \text{ Stunden}$$

$$T_w = 178 \text{ Tage } 20 \text{ Stunden.}$$

Die Nordhemisphäre hat also ein um 7 Tage 14 Stunden längeres Sommerhalbjahr als Winterhalbjahr; auf der Südhemisphäre ist das Umgekehrte der Fall.

§ 80. Quantitäten der Bestrahlung während der astronomischen Jahreszeiten. Von besonderem Interesse sind jene Strahlungsmengen, die während der astronomischen Jahreszeiten den einzelnen Breitenkreisen zugestrahlt werden. Bezeichnet man der Reihe nach mit

$$W_I, W_{II}, W_{III}, W_{IV}$$

jene Strahlungsmengen, die während des astronomischen Frühlings, Sommers, Herbstes bzw. Winters der Flächeneinheit an der Breite φ der nördlichen Hemisphäre zugestrahlt werden, und mit

$$\bar{W}_I, \bar{W}_{II}, \bar{W}_{III}, \bar{W}_{IV}$$

jene Strahlungsmengen, die derselben Breite, aber an der südlichen Hemisphäre während des nördlichen Frühlings bzw. Sommers, Herbstes und Winters zugestrahlt werden, so folgt aus dem im § 78 bewiesenen Satze:

$$(90) \quad \bar{W}_I = W_{III}; \quad \bar{W}_{II} = W_{IV}; \quad \bar{W}_{III} = W_I; \quad \bar{W}_{IV} = W_{II}.$$

Will man die Grösse W_I ermitteln, so hat man zu unterscheiden, ob die in Betracht gezogene Breite der nichtarktischen Zone oder der arktischen Zone angehört. Im ersten Falle ist in (83) $\lambda' = 0$; $\lambda'' = \frac{\pi}{2}$ zu setzen. Man bekommt also:

$$(91) \quad W_I = \frac{T}{4\pi} \cdot \frac{J_0}{\sqrt{1-e^2}} (b_0 + \sin \varphi \sin \varepsilon).$$

Im zweiten Falle muss die in Betracht gezogene Jahreszeit in die durch die Wurzeln der Gleichung (39) begrenzten Intervalle geteilt werden; für das Intervall des täglichen Aufganges und Unterganges der Sonne ist dann die Formel (83) und für das Intervall des ständigen Tages die Formel (84) anzuwenden. Während der ständigen Nacht ist die Bestrahlung gleich Null. Man bekommt auf diese Weise:

$$(92) \quad W_I = \frac{T}{2\pi^2} \cdot \frac{J_0}{\sqrt{1-e^2}} \left\{ b_0 \lambda_1 + \frac{\pi}{2} \sin \varphi \sin \varepsilon + \frac{\pi}{2} \sin \varphi \sin \varepsilon \cos \lambda_1 - \right. \\ \left. - \frac{b_1}{2} \sin 2\lambda_1 + \frac{b_2}{4} \sin 4\lambda_1 - \frac{b_3}{6} \sin 6\lambda_1 + \dots \right\}.$$

Dieselben zwei Ausdrücke, wie die zwei vorstehenden, bekommt man bei der Berechnung der Grösse W_{II} , für die $\lambda' = \frac{\pi}{2}$; $\lambda'' = \pi$ zu setzen ist. Es wird also:

$$(93) \quad W_{II} = W_I.$$

Für W_{III} bekommt man, indem man $\lambda' = \pi$; $\lambda'' = \frac{3}{2}\pi$ setzt, für die nicht-arktische Zone:

$$(94) \quad W_{III} = \frac{T}{4\pi} \cdot \frac{J_0}{\sqrt{1-e^2}} (b_0 - \sin \varphi \sin \varepsilon),$$

und für die arktische:

$$(95) \quad W_{III} = \frac{T}{2\pi^2} \cdot \frac{J_0}{\sqrt{1-e^2}} \left\{ b_0 \lambda_1 - \frac{\pi}{2} \sin \varphi \sin \varepsilon + \frac{\pi}{2} \sin \varphi \sin \varepsilon \cos \lambda_1 - \right. \\ \left. - \frac{b_1}{2} \sin 2\lambda_1 + \frac{b_2}{4} \sin 4\lambda_1 - \frac{b_3}{6} \sin 6\lambda_1 + \dots \right\}.$$

Dieselben Ausdrücke wie die zwei vorstehenden bekommt man bei der Berechnung der Grösse W_{IV} , für die $\lambda' = \frac{3}{2}\pi$; $\lambda'' = 2\pi$ zu setzen ist. Es ist also:

$$(96) \quad W_{IV} = W_{III}$$

und wie leicht einzusehen:

$$(97) \quad \overline{W}_{II} = \overline{W}_I \quad \overline{W}_{IV} = \overline{W}_{III}$$

Die Gleichungen (93), (96), (97) besagen, dass die dem astronomischen Sommer zugehörige Quantität der Bestrahlung gleich ist jener des Frühlings, und jene des Winters gleich jener des Herbstes

Mittels der Gleichungen (90), (93), (96), (97) können alle acht Grössen $W_I, W_{II}, W_{III}, W_{IV}, \overline{W}_I, \overline{W}_{II}, \overline{W}_{III}, \overline{W}_{IV}$ mittels zweier derselben ausgedrückt werden. Als diese zwei Grössen seien die nachstehenden gewählt

$$(98) \quad \begin{cases} W_s = 2W_I \\ W_w = 2W_{III}. \end{cases}$$

Die erste derselben stellt die einer nördlichen Breite φ während des Sommerhalbjahres, d. h. während des Frühlings und des Sommers zugestrahlte Quantität der Bestrahlung, die zweite die dem Winterhalbjahre, d. h. dem Herbst und dem Winter zugehörige Strahlungsmenge dar.

Bezeichnet man die einer beliebigen Breite φ der südlichen Hemisphäre während des südlichen Sommerhalbjahres bzw. des südlichen Winterhalbjahres zugestrahlte Strahlungsmenge mit \overline{W}_s bzw mit \overline{W}_w , so ist

$$\overline{W}_s = 2\overline{W}_{III} \quad \overline{W}_w = 2\overline{W}_I$$

d. h. wegen (90) und (98)

$$(99) \quad \overline{W}_s = W_s \quad \overline{W}_w = W_w.$$

Jede Breite der südlichen Hemisphäre empfängt also während des südlichen Sommerhalbjahres dieselbe Quantität der Bestrahlung wie dieselbe Breite der nördlichen Hemisphäre während des nördlicher Sommerhalbjahres und während des südlichen Winterhalbjahres dieselbe Quantität wie dieselbe Breite der nördlichen Hemisphäre während des nördlichen Winterhalbjahres. Dies folgt auch aus dem im § 78 bewiesenen Satze.

Die Berechnung der Grössen W_s und W_w geschieht auf folgende Weise. Es folgt aus (91) bis (99)

$$(100) \quad W_s - W_w = \frac{T}{\pi} \cdot \frac{J_0}{\sqrt{1-e^2}} \sin \varphi \sin \epsilon,$$

welche Gleichung für alle Breiten gültig ist. Aus jenen Gleichungen folgt auch:

$$(101) \quad W_s + W_w = \frac{T}{\pi} \cdot \frac{J_0}{\sqrt{1-e^2}} b_0$$

$$(102) \quad W_s + W_w = \frac{T}{\pi^2} \cdot \frac{J_0}{\sqrt{1-e^2}} \left\{ 2b_0 \lambda_1 + \pi \sin \varphi \sin \varepsilon \cos \lambda_1 - \right. \\ \left. - b_1 \sin 2\lambda_1 + \frac{b_2}{2} \sin 4\lambda_1 - \frac{b_3}{3} \sin 6\lambda_1 + \dots \right\},$$

von welchen Gleichungen die erste für die nichtarktische und die zweite für die arktische Zone gültig ist.

Die Grösse

$$(103) \quad W_T = W_s + W_w$$

stellt die während des ganzen Jahres zugestrahlte Menge dar.

Für die beiden Pole erhält man aus (39) $\lambda_1 = 0$, so dass es wird:

$$(104) \quad \begin{cases} W_w = 0 \\ W_s = W_T = \frac{T}{\pi} \cdot \frac{J_0}{\sqrt{1-e^2}} \sin \varepsilon. \end{cases}$$

In der beiliegenden Tabelle VII sind die Grössen W_s , W_w und W_T für verschiedene geographische Breiten angegeben, wobei der Berechnung ein numerischer Wert der Solarkonstante $J_0 = 2$ Gramm-Kalorien pro cm^2 und Minute zugrunde gelegt wurde.

Einer graphischen Darstellung der Ergebnisse dieser Tabelle wird man im nächsten Abschnitt dieses Buches, Fig. 45, begegnen.

§ 81. Die den beiden Hemisphären während beliebiger Intervalle des Jahres zugestrahlten Wärmemengen. Bezeichnet man mit dN bzw. mit dS jene Wärmemengen, die während des Zeitelementes dt der nördlichen bzw. der südlichen der Hemisphäre Erde zugestrahlt werden, so ist mit Rücksicht auf (18) und (19)

$$(105) \quad \begin{cases} \frac{dN}{dt} = \frac{J_0}{\varrho^2} \cdot \frac{\pi}{2} R^2 (1 + \sin \delta) \\ \frac{dS}{dt} = \frac{J_0}{\varrho^2} \cdot \frac{\pi}{2} R^2 (1 - \sin \delta). \end{cases}$$

Tabelle VII

Die während der astronomischen Halbjahre zugestrahlten Wärmemengen in Gramm-kalorien pro cm^2 . $J_0 = 2$ Gr.-Kal. pro cm^2 und Minute

| Geographi- sche Breite | Astronomisches | | Ganzes Jahr |
|---------------------------|---------------------|---------------------|----------------|
| | Sommer- halbjahr | Winter- halbjahr | |
| | W_s | W_w | W_T |
| 0° | 160.580 | 160.580 | 321.160 |
| 5° | 165.860 | 154.240 | 320.100 |
| 10° | 169.950 | 146.800 | 316.750 |
| 15° | 172.860 | 138.360 | 311.220 |
| 20° | 174.570 | 128.980 | 303.550 |
| 25° | 175.130 | 118.780 | 293.910 |
| 30° | 174.450 | 107.800 | 282.250 |
| 35° | 172.650 | 96.190 | 268.840 |
| 40° | 169.710 | 84.030 | 253.740 |
| 45° | 165.760 | 71.500 | 237.260 |
| 50° | 160.860 | 58.740 | 219.600 |
| 55° | 155.300 | 46.100 | 201.400 |
| 60° | 149.080 | 33.620 | 182.700 |
| 65° | 143.000 | 22.180 | 165.180 |
| 70° | 138.700 | 13.440 | 152.140 |
| 75° | 136.150 | 7.380 | 143.530 |
| 80° | 134.520 | 3.240 | 137.760 |
| 85° | 133.590 | 740 | 134.330 |
| 90° | 133.300 | 0 | 133.300 |

Während also die Sonne den zwischen den Längen λ' und λ'' gelegenen Bogen ihrer scheinbaren Bahn zurücklegt, werden den beiden Hemisphären folgende Mengen N und S zugestrahlt:

$$N = \int_{\lambda'}^{\lambda''} \frac{dN}{dt} \cdot \frac{dt}{d\lambda} d\lambda \qquad S = \int_{\lambda'}^{\lambda''} \frac{dS}{dt} \cdot \frac{dt}{d\lambda} d\lambda.$$

Berücksichtigt man (105), (35), (80), so erhalten die vorstehenden Ausdrücke die Form:

$$N = \frac{T}{4} \cdot \frac{J_0 R^2}{\sqrt{1-e^2}} \int_{\lambda'}^{\lambda''} (1 + \sin \varepsilon \sin \lambda) d\lambda \qquad S = \frac{T}{4} \cdot \frac{J_0 R^2}{\sqrt{1-e^2}} \int_{\lambda'}^{\lambda''} (1 - \sin \varepsilon \sin \lambda) d\lambda.$$

Führt man die obigen Integrationen durch, so wird:

$$(106) \quad \left\{ \begin{array}{l} N = \frac{T}{4} \cdot \frac{J_0 R^2}{\sqrt{1-e^2}} \{(\lambda'' - \lambda') - \sin \varepsilon (\cos \lambda'' - \cos \lambda')\} \\ S = \frac{T}{4} \cdot \frac{J_0 R^2}{\sqrt{1-e^2}} \{(\lambda'' - \lambda') + \sin \varepsilon (\cos \lambda'' - \cos \lambda')\}. \end{array} \right.$$

Die der ganzen Erdkugel während der Zurücklegung des Bahnintervalles λ' bis λ'' zugestrahlte Wärmemenge ist gleich:

$$(107) \qquad N + S = \frac{T}{2} \cdot \frac{J_0 R^2}{\sqrt{1-e^2}} (\lambda'' - \lambda').$$

Diese Menge ist der Zunahme der Sonnenlänge proportional und für alle vier astronomischen Jahreszeiten eine und dieselbe.

Bezeichnet man mit N_s bzw. N_w jene Wärmemengen, die der nördlichen Hemisphäre während des nördlichen Sommerhalbjahres ($\lambda = 0$ bis $\lambda = \pi$) bzw. Winterhalbjahres ($\lambda = \pi$ bis $\lambda = 2\pi$) zugestrahlt werden, und mit S_s und S_w die während des südlichen Sommer- bzw. Winterhalbjahres der Südhalbkugel zugestrahelten Wärmemengen, so ist nach (106):

$$(108) \quad \left\{ \begin{array}{l} N_s = S_s = \frac{T}{4} \cdot \frac{J_0 R^2}{\sqrt{1-e^2}} (\pi + 2 \sin \varepsilon) \\ N_w = S_w = \frac{T}{4} \cdot \frac{J_0 R^2}{\sqrt{1-e^2}} (\pi - 2 \sin \varepsilon). \end{array} \right.$$

Diese beiden Mengen stehen in der bemerkenswerten von Wiener entdeckten Proportion:

$$(109) \quad \frac{N_s}{N_w} = \frac{S_s}{S_w} = \frac{\pi + 2 \sin \varepsilon}{\pi - 2 \sin \varepsilon}.$$

Aus (107) folgt, dass während des ganzen Jahres der ganzen Erdkugel zugestrahlte Wärmemenge gleich ist

$$\frac{T J_0 R^2 \pi}{\sqrt{1-e^2}}.$$

Die durchschnittliche Bestrahlung der Erdoberfläche pro Flächen- und Zeiteinheit im Verlauf des Jahres wird erhalten, wenn man die obige Menge mit der Zeit T und mit der Erdoberfläche $4\pi R^2$ dividiert; sie ist also gleich:

$$(110) \quad J_m^T = \frac{J_0}{4\sqrt{1-e^2}}.$$

Sehr oft wird als selbstverständlich angenommen, dass die durchschnittliche Bestrahlung der Erdoberfläche pro Zeiteinheit gleich ist ihrer durchschnittlichen Bestrahlung J_m aus der mittleren jährlichen Entfernung $\varrho = 1$. Diese letztere Bestrahlung ist aber nach (17) dargestellt durch $\frac{1}{4} J_0$ und sie wäre nur bei verschwindend kleiner Exzentrizität e der Erdbahn gleich der Bestrahlung J_m^T .

KAPITEL XIV

Säkulare Änderungen der den Bestrahlungszustand der Erde bestimmenden astronomischen Elemente

§ 82. Mechanismus der säkularen Änderungen der den Bestrahlungszustand der Erde bestimmenden astronomischen Elemente. Es stelle in der beiliegenden Fig. 40 der Punkt S den Mittelpunkt der Sonne und die Ellipse $PIAIII P$ die jährliche Bahn der Erde um die Sonne dar. Denkt man sich in S eine gegen die Nordseite der Himmelskugel gerichtete Senkrechte SV zur Ebene der Erdbahn errichtet und die Parallele SN zur Rotationsachse der Erde gezogen, dann stellt der Winkel VSN die Neigung der Rotationsachse der Erde oder die Schiefe ϵ der Ekliptik dar. Die durch die Geraden SV und SN gelegte gedachte

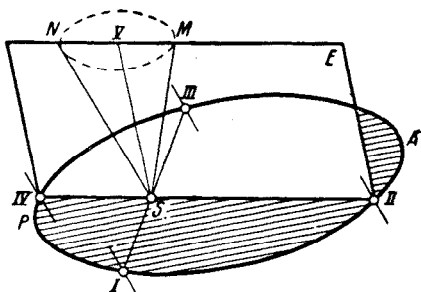


Fig. 40

Ebene E steht senkrecht auf der Ebene der Erdbahn und schneidet diese längs der Geraden $II IV$. Die Punkte II und IV stellen, wie leicht einzusehen, die Solstiziallagen der Erde in ihrer Bahn dar, und wenn in der Ebene der Erdbahn durch S eine Senkrechte zur Geraden $II IV$ gezogen wird, so trifft diese die Erdbahn in den Punkten I und III , welche die beiden Aequinoktiallagen der Erde veranschaulichen. Die Zeitintervalle, welche zwischen den Durchgängen der Erde durch die vier Kardinalpunkte I, II, III, IV verfließen, stellen die astronomischen Jahreszeiten dar; dabei entspricht das Bahnintervall $I II III$ dem nördlichen Sommerhalbjahr T_s , das Bahnintervall

III IV I dem nördlichen Winterhalbjahr T_w . Die Ungleichheit der Sektoren *I II III* und *III IV I* hat die Ungleichheit dieser Halbjahre zur Folge. Die Lage dieser vier Punkte der Erdbahn wird durch den Winkel *III SP* festgelegt, wobei *P* den der Sonne am nächsten gelegenen Punkt der Erdbahn, das sogenannte Perihel, darstellt. Der Winkel *III SP*, der mit Π_7 bezeichnet werden möge, wird die Länge des Perihels zum Frühlingspunkt genannt, weil die Sonne zur Zeit des Frühlingsäquinoktiums in der Richtung *IS* auf der Himmelskugel projiziert erscheint und der Durchstoss-punkt der Geraden *IS* mit der scheinbaren Himmelskugel der Frühlingspunkt genannt wird. Befindet sich dagegen die Erde im Punkte *P* ihrer Bahn, so befindet sich die Sonne im Perigeum ihrer relativen Bahn zur Erde. Es stellt deshalb der Winkel *AS III*, den die Richtungen *PS* und *IP* mit einander einschliessen, die Anomalie ν_0 des Frühlingspunktes dar. Weil die Punkte *P* und *A* diametral, d. h. auf einer durch *S* hindurchgehenden Geraden gelegen sind, so folgt aus der Fig. 40

$$(111) \quad \nu_0 = 180^\circ - \Pi_7.$$

Wenn die Planeten in ihrem Lauf sich nicht gegenseitig stören würden und wenn auch die Rotationsachse der Erde ihre Orientierung im Weltraume beibehielte, würde die in der Fig. 40 veranschaulichte Bahnkurve der Erde unwandelbar und die Kardinalpunkte *I, II, III, IV* derselben unverrückbar sein. Der im vorhergehenden Kapitel geschilderte jährliche Bestrahlungsgang der Erde würde sich ohne Aenderung Jahr für Jahr wiederholen. Dies ist aber nicht der Fall. Die im Kapitel VI dieses Buches geschilderte Präzession der Drehachse der Erde würde, wenn sie allein wirksam wäre, die zu dieser Drehachse parallel gezogene Gerade *SN* derart verlagern, dass sie während eines Zeitintervalles von rund 26 000 Jahren den Kreiskegel *NSM* beschreiben würde. Die Achse dieses Kegels ist *SV*, sein Oeffnungswinkel ε . Infolge dieser Drehung der Erdachse dreht sich die Ebene *E* um die Gerade *SV* als Achse, und die Kardinalpunkte *I, II, III, IV* wandern im Sinne des Uhrzeigers längs der Erdbahn. Sie würden auch während des erwähnten Zeitintervalles von 26.000 Jahren einen ganzen Umlauf um diese Bahn vollführen, wenn diese Bahn unveränderlich wäre. Infolge der gegenseitigen Störungen der Planeten eilt aber die grosse Achse der Erdbahnellipse den Kardinalpunkten entgegen, weshalb diese Punkte einen vollständigen Umlauf um diese Bahn (vom Perihel bis Perihel) in rund 22.000 Jahren vollführen. Während dieser Zeit, die nur als ein Durchschnittswert zu betrachten ist, nimmt die Grösse Π_7 um 360° zu.

Durch die gegenseitigen Störungen der Planeten ändert die Erdbahn allmählich ihre Form; ihre grosse Halbachse bleibt dabei, wie im § 19 berichtet, ihrer Grösse nach ungeändert, aber die Exzentrizität e dieser Bahn ist nicht unbedeutenden säkularen Aenderungen unterworfen. Auch die Ebene dieser Bahn schwankt im Raume, weil die astronomischen Elemente Ω und i , die die Lage dieser Ebene im Raume festlegen, säkular veränderlich sind, wodurch auch die Schiefstellung ε der Drehachse *SN* der Erde zur Erdbahn in Mitleidenschaft gezogen wird. Eine weitere Folge der Schwankungen der Erdbahnebene ist, dass die bisher als unveränderlich angenommene Gerade *SV* ihre Orientierung im Raume allmählich ändert, wodurch der Kegel *NSM* seine Unbeweglichkeit und Regelmässigkeit verliert.

Die soeben kurz geschilderten Aenderungen der astronomischen Elemente lassen sich mit Benützung der im ersten und zweiten Abschnitt dieses Buches mitgetheilten Lehren der Himmelsmechanik mathematisch exakt erfassen und in Vergangenheit und Zukunft während langer Zeitintervalle Schritt für Schritt verfolgen. Aus diesen Aenderungen lassen sich mit Hilfe des Bestrahlungsgesetzes und mit derselben Genauigkeit die daraus resultierenden Veränderungen der Erdbestrahlung, also der von mir so benannte säkulare Bestrahlungsgang der Erde berechnen. Dieser säkulare Bestrahlungsgang, die Ursachse der wichtigsten vorzeitlichen Aenderungen des Erklimas, wird den Gegenstand meiner nachfolgenden Untersuchungen bilden. Dabei wird folgendes zu berücksichtigen sein.

Die Bestrahlung der Erde durch die Sonne hängt nur von der Form der Erdbahn und der Orientierung der Erdachse in bezug auf diese Bahn ab, nicht aber von der Lage dieser Bahn im Weltraume. Diese gegenseitige Lage der Sonne, Erde und ihrer Achse ist durch die astronomischen Elemente Π_γ , e und ε eindeutig gegeben, so dass bloss die säkularen Aenderungen dieser drei Elemente von Einfluss auf den Bestrahlungszustand der Erde sind. Dies folgt auch daraus, dass in den im vorstehenden Kapitel abgeleiteten Formeln, mittels denen alle auf die Bestrahlung der Erde durch die Sonne bezughabenden Fragen beantwortet werden können, von den astronomischen Elementen nur die drei: e , ε , ν_0 vorkommen, das geozentrische Element ν_0 aber mittels der Gleichung (111) durch das heliozentrische Element Π_γ ersetzt werden kann.

§ 83. Analytische Darstellung der säkularen Aenderungen der Elemente e , Π_γ , ε . Die analytische Darstellung der säkularen Aenderungen der Elemente e , Π_γ , ε ist eine Kombination der Formeln der Störungsrechnung und jener der Präzession der Erdachse. Die Grundzüge dieser Analysis sind die folgenden.

In der beiliegenden Fig 41 stelle $X - Y - Z$ das im § 11 gekennzeichnete ruhende Koordinatensystem dar, dessen Ursprung O in der Sonne gelegen ist, dessen $X - Y$ -Ebene mit der zum Ausgangspunkt der Betrachtungen gewählten Epoche t_0 zugehörigen Ebene der Erdbahn zusammenfällt und dessen X -Achse gegen den Frühlingspunkt dieser Epoche gerichtet ist. $E_0 E_0'$ sei der Schnittkreis der Himmelskugel mit der $X - Y$ -Ebene, d. h. mit der dem Zeitpunkt t_0 zugehörigen Ebene der Erdbahn, und Υ_0 der dem Zeitpunkt t_0 zugehörige Frühlingspunkt. Die positive Richtung der X -Achse des hier benützten Koordinatensystems stimmt also mit der Richtung *S III* der Fig. 40 überein. Zieht man durch O eine zur Erdachse parallele gegen Norden gerichtete Gerade SN_0 , so wird diese in der zu O senkrechten Ebene, also in der $Y - Z$ -Ebene des Koordinatensystems liegen und mit der Z -Achse den Winkel ε_0 einschliessen, der der Epoche t_0 entsprechenden Schiefe der Ekliptik gleich ist. Die durch O gelegt gedachte Ebene, die der Ebene des Erdäquators parallel ist, also auf ON_0 senkrecht steht, wird die Himmelskugel nach dem durch Υ_0 hindurchgehenden grössten Kreise $A_0 A_0'$ schneiden, der mit dem Kreise $E_0 E_0'$ ebenfalls den Winkel ε einschliessen wird. Nach Ablauf eines beliebigen Zeitintervalles, gerechnet vom Zeitpunkt t_0 , wird die Ebene der Erdbahn, durch die gegenseitigen Störungen der Planeten um den Punkt O gedreht, eine andere Lage als die ursprüngliche einnehmen und die Himmelskugel nach dem grössten

Kreise EE' , die $X—Y$ -Ebene nach der Geraden $O\Omega$ schneiden, die, wie bereits im § 11 angegeben, die Knotenlinie genannt wird. Der Bogen $\Upsilon_0\Omega$ stellt die Länge Ω des aufsteigenden Knotens, und der Winkel $E'_0\Omega E'$ die Neigung i der Erdbahn zur Zeit t dar. Auch das Perihel der Erdbahn wird eine andere Lage einnehmen, und während zur Zeit t_0 der von der Sonne gegen das Perihel gerichtete Halbstrahl die Himmelskugel im Punkte P_0 getroffen hat, wird dies zur Zeit t im Punkte P geschehen. Der Bogen ΩP stellt die Länge ω des Perihels in bezug auf den aufsteigenden Knoten und die Summe $\Pi = \Omega + \omega$ die Länge des Perihels in

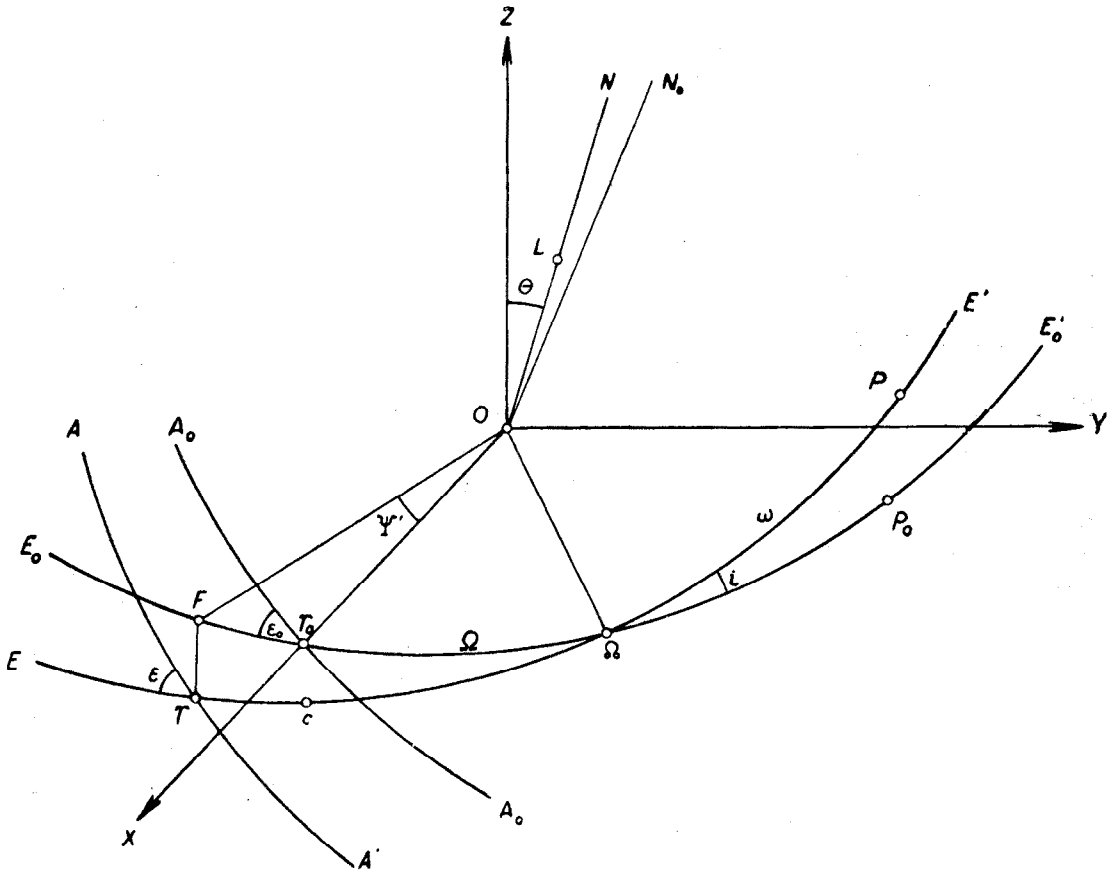


Fig. 41

bezug auf den Punkt Υ_0 , den man auch den fixen Frühlingspunkt nennt, dar. Infolge der Präzession der Erdachse wird die zu dieser Achse durch O parallele Gerade die Lage ON einnehmen und die durch O zum Erdäquator parallel gedachte Ebene die neue Ebene der Erdbahn nach der zu ON senkrechten Geraden OY schneiden. Der Punkt Υ der Himmelskugel veranschaulicht die Lage des Frühlingspunktes zur Zeit t ; durch diesen Punkt geht der grösste Kreis AA' der Himmelskugel, nach dem die Ebene des Erdäquators diese Kugel schneidet. Der Winkel EYA stellt die dem Zeitpunkt t entsprechende Schiefe ϵ der Ekliptik dar. Macht man den Bogen Ωc gleich dem Bogen $\Omega \Upsilon_0$, so stellt der Bogen $c\Upsilon$ die sogenannte allgemeine Präzession

dar, die mit Ψ' bezeichnet werden möge. Denkt man sich durch den Punkt Υ und die Z -Achse eine Ebene gelegt, so schneidet diese die X — Y -Ebene nach der Geraden OF . Wegen der Kleinheit des Winkels i ist der Bogen $\Upsilon_0 F$ dem Bogen $c\Upsilon$ gleichzusetzen, so dass der Bogen $\Upsilon_0 F$ oder der zugehörige Winkel $\Upsilon_0 OF$ ebenfalls die allgemeine Präzession Ψ' veranschaulicht. Dieser Winkel wird, entgegengesetzt den durch die Fig. 7 getroffenen Vereinbarungen, im Sinne des Umlaufs des Uhrzeigers gezählt, ist also entsprechend dem im § 57 geschilderten Verlauf der Präzession der Nachtgleichen mit dem positiven Vorzeichen zu versehen. Die Summe der Bogen $\Upsilon_0 P$ und $\Upsilon_0 F$, also die Summe:

$$(112) \quad \Pi_\gamma = \Pi + \Psi'$$

stellt die Länge des Perihels in bezug auf den jeweiligen oder beweglichen Frühlingspunkt dar. Der Winkel θ , den die zur Erdachse parallele Gerade ON mit der Z -Achse des ruhenden Koordinatensystems einschliesst, veranschaulicht nach den im § 29 getroffenen Vereinbarungen die zweite Koordinate der Präzession, den Nutationswinkel.

Die analytische Darstellung der säkularen Aenderungen der Elemente $e, \Pi_\gamma, \varepsilon$ geschieht auf folgende Weise.

Mit Benützung der Gleichungen (242) und (279) des ersten Abschnittes dieses Buches, d. h. der Gleichungen:

$$(113) \quad \begin{cases} h = e \sin \Pi = \sum_i N_i \sin (g_i t + \beta_i) \\ l = e \cos \Pi = \sum_i N_i \cos (g_i t + \beta_i) \end{cases}$$

lassen sich bei gegebenen Massen der Hauptplaneten und gegebenen dem Zeitpunkt $t = 0$ entsprechenden Anfangsbedingungen die säkularen Aenderungen der Exzentrizität e der Erdbahn und der Länge des Perihels Π in bezug auf den fixen Frühlingspunkt analytisch darstellen. Diese Aenderungen hängen nur von der gegenseitigen Lage der Planeten und nicht von der Präzession der Erdachse ab.

Auf dieselbe Weise und mittels der Gleichungen (243) und (284) des ersten Abschnittes dieses Buches, d. h. der Gleichungen:

$$(114) \quad \begin{cases} p = \tan g i \sin \Omega = \sum_i N_i \sin (g_i t + \beta_i) \\ q = \tan g i \cos \Omega = \sum_i N_i \cos (g_i t + \beta_i), \end{cases}$$

worin die numerischen Werte der Grössen N_i, g_i, β_i verschieden sind von jenen der Ausdrücke (113), erfolgt die analytische Darstellung der säkularen Aenderungen der Neigung i und der Länge Ω des aufsteigenden Knotens der Erdbahn.

Die analytische Darstellung der säkularen Aenderungen der Grössen Ψ' und θ erfolgt mit Berücksichtigung der ermittelten säkularen Aenderungen der Erdbahn durch Integration der im § 45 mitgeteilten Bewegungsgleichungen. Dabei ist, weil,

wie im § 47 mitgeteilt, der Polhodiekegel der Erdachse einen Oeffnungswinkel von nur 0"0087 aufweist, die Drehachse der Erde mit ihrer Trägheitshauptachse zusammenfallend anzunehmen und nur der permanente, aber wegen der säkularen Aenderungen der Erdbahnelemente säkular veränderliche Bestandteil des Drehmoments in Rechnung zu stellen. Hat man dadurch die Winkel Ψ' und θ als Funktionen der Zeit dargestellt, so liefert die Gleichung (112) die säkularen Aenderungen der der Grösse Π_γ .

Um die säkularen Aenderungen der Ekliptikschiefe ε analytisch darzustellen, ist zu berücksichtigen, dass dieser Winkel jener ist, den die Drehachse der Erde mit der auf der Ebene der Erdbahn errichteten Normalen einschliesst. Bezeichnet also n_0 den in die Richtung der Erdachse fallenden Einheitsvektor und \mathfrak{C}_0 den auf der Ebene der Erdbahn senkrecht stehenden Einheitsvektor, so ist:

$$(115) \quad \cos \varepsilon = (\mathfrak{C}_0, n_0).$$

Die Koordinaten n_1, n_2, n_3 und c_1, c_2, c_3 der Vektoren n_0 bzw. \mathfrak{C}_0 lassen sich wie folgt analytisch darstellen. Trägt man auf die Achse ON die Strecke $\overline{OL} = 1$ auf, so ist ihre in die Z -Achse fallende Projektion, also die Koordinate n_3 , gleich:

$$n_3 = \cos \theta.$$

Die Projektion der Strecke \overline{OL} in die $X-Y$ -Ebene ist gleich $\sin \theta$; sie steht auf der Geraden OF senkrecht, schliesst also mit der X -Achse den Winkel $(90^\circ - \Psi')$ ein, weshalb ihre Projektionen in die X -Achse bzw. in die Y -Achse, also die Koordinaten n_1 und n_2 die folgenden sind:

$$n_1 = \sin \theta \sin \Psi'$$

$$n_2 = \sin \theta \cos \Psi'.$$

Bezeichnet man also die Einheitsvektoren der Achsenrichtungen X, Y, Z mit i, j, k , so ist:

$$(116) \quad n_0 = \sin \theta \sin \Psi' i + \sin \theta \cos \Psi' j + \cos \theta k.$$

Die Koordinaten c_1, c_2, c_3 des auf der Bahnebene der Erde senkrecht stehenden Einheitsvektors \mathfrak{C}_0 sind nach den Gleichungen (238) und (244) des ersten Abschnittes dieses Buches gleich:

$$c_1 = \frac{C_1}{C} = p \quad c_2 = \frac{C_2}{C} = -q \quad c_3 = \frac{C_3}{C} = 1$$

und es ist deshalb:

$$(117) \quad \mathfrak{C}_0 = p i - q j + k.$$

Setzt man (116) und (117) in (115) ein, so bekommt man:

$$(118) \quad \cos \varepsilon = p \sin \theta \sin \Psi' - q \sin \theta \cos \Psi' + \cos \theta.$$

§ 84. Numerische Ausrechnungen der säkularen Aenderungen der astronomischen Elemente. Die numerische Ausführung der vorstehend gekennzeichneten Rechnung ist eine riesige Arbeit. Weil sich alle Planeten gegenseitig stören, müssen sie alle in Rechnung gestellt werden, wie dies im § 20 auseinandergesetzt worden ist. Man hat also vor allem aus den gegebenen Massen der Planeten und den grossen Halbachsen ihrer Bahnen mittels der Formeln (250) bis (252) des ersten Abschnittes dieses Buches die in den Differentialgleichungen (277) und (282) auftretenden Koeffizienten (a_i, a_j) , $[a_i, a_j]$ zu ermitteln, was bei Berücksichtigung von acht Planeten die Berechnung von 80640 verschiedener numerischer Werte erfordert. Dann sind die Säkulardeterminanten (281) und (286) zu bilden und diese algebraischen Gleichungen achten Grades aufzulösen, um mit ihren Wurzeln und Subdeterminanten und mittels den Anfangsbedingungen die numerischen Werte der in den Integralen (279) und (284) auftretenden Grössen N_i, g_i, β_i zu berechnen. Um zu diesen Integralen zu gelangen, ist eine Arbeit zu leisten, die Jahre erfordert. Es ist deshalb nicht zu verwundern, dass diese mühselige Arbeit bisher nur einige Male geleistet worden ist.

Der erste, der diese Rechnung durchgeführt hat, war *L a g r a n g e*. In seiner klassischen Abhandlung „Théorie des variations séculaires des éléments des planètes“ (Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles Lettres de Berlin, années 1781 et 1782, abgedruckt in „Oeuvres de Lagrange“. Tome V. Paris 1870) hat er im zweiten Teile dieser Arbeit, „contenant la détermination de ces variations pour chacune des planètes principales“, die numerische Ausrechnung der säkularen Aenderungen der damals bekannten sechs grossen Planeten durchgeführt. Der Planet Uranus, damals noch der neue Planet genannt, ist während der Abfassung der Abhandlung eben entdeckt worden, seine Elemente waren noch nicht festgelegt, seine Masse war in Unkenntnis seiner erst später entdeckten Satelliten noch unbekannt. Vom Planeten Neptun hatte man damals noch keine Kunde, und Mars galt als satellitlos. Berücksichtigt man, dass, wie im § 10 angegeben, die Masse eines Planeten nur aus der Umlaufzeit seiner Satelliten zuverlässig ermittelt werden kann, so ersieht man, dass *L a g r a n g e* hinsichtlich der Massenwerte dreier der Erde zunächst liegenden Planeten nur auf rohe Schätzungen angewiesen war. In richtiger Erkenntnis dieses Umstandes hat er auch den Einfluss etwaiger Korrekturen der Massenwerte der Planeten in den Bereich seiner Untersuchungen einbezogen.

Nachdem der erste monumentale Ausbau der Himmelsmechanik durch *L a p l a c e* vollführt war und nachdem *P o n t é c o u l a n t* im dritten Bande seiner „Théorie analytique du Système du Monde. Paris 1834.“ eine mit nur wenig Dezimalen durchgeführte Berechnung der Säkulärstörungen der grossen Planeten bewerkstelligt hat, wurde diese Arbeit Ende des vierten Dezeniums des vorigen Jahrhunderts

durch Leverrier in vollem Umfang wieder aufgenommen. Die Ergebnisse dieser mehrjährigen Arbeit wurden zuerst im Liouville'schen Journal, Tome V und in der „Connaissance des Temps, 1843“ und nachdem Leverrier durch seine auf rechnerischem Wege erfolgte Entdeckung des Planeten Neptun weltberühmt und Leiter des Pariser Observatoriums geworden ist, in den neugegründeten „Annales de l'Observatoire Impérial de Paris. Tome I, 1855; Tome II, 1856.“ veröffentlicht. Im ersten Bande dieser Annalen wurde die Theorie der Planetenbewegung neu durchgearbeitet, im zweiten zur numerischen Berechnung der Säkularstörungen geschritten. Diese in jeder Hinsicht mustergültig angelegten Berechnungen wurden bereits früher, vor der Entdeckung des Neptuns, durchgeführt und weisen nur die eine Unvollkommenheit auf, dass in denselben die störende Wirkung dieses Planeten, die hinsichtlich der Erde allerdings sehr gering ist, nur nachträglich und meritorisch behandelt werden konnte. Dies war wohl die Ursache, dass kurze Zeit nach der Veröffentlichung der Leverrierschen Arbeit Stockwell daran ging, eine Neuberechnung der Säkularstörungen aller damals bekannten acht grossen Planeten durchzuführen. Nach fast zehnjähriger Arbeit wurde diese Berechnung 1870 beendet und nachher veröffentlicht: J. N. Stockwell, Memoir of the secular variations of the orbits of the eight principal planets, Mercury, Venus, the Earth, Mars, Jupiter, Saturn, Uranus and Neptune. Smithsonian Contributions to knowledge. 232. Washington 1873.

Seit dieser Zeit wurde keine brauchbare neue Durchrechnung der Säkularstörungen der grossen Planeten, zu denen unlängst ein neuer, Pluton, hinzugekommen ist, durchgeführt. Wohl unternahm es Harzer, angeregt durch eine Preisauflage der fürstlich Jablonowskischen Gesellschaft, in seiner grossen und preisgekrönten Schrift „Die säkularen Veränderungen der Bahnen der grossen Planeten. Leipzig 1895“ die in der Ueberschrift dieser Arbeit angegebene Frage zu beantworten, doch wurde, nachdem diese Schrift vollständig gedruckt und ein Teil der Exemplare bereits versandt war, in derselben ein Ansatzfehler entdeckt. Dieser tief bedauerliche im Nachtrag mitgeteilte Umstand entwertete arg die numerischen Ergebnisse der grossangelegten Arbeit.

Von den bisher durchgeführten Berechnungen der säkularen Aenderungen der Erdbahnelemente sind also nur deren zwei für die weitere Verwendung geeignet, jene von Leverrier und jene von Stockwell. Doch sind durch die Arbeiten dieser zwei Astronomen nicht alle erforderlichen Arbeiten geleistet, um zur Berechnung des säkularen Bestrahlungsganges der Erde schreiten zu können. Es blieb noch übrig, die durch die Ermittlung der numerischen Werte der Grössen N_i , g_i , β_i gewonnenen Integrale (279) und (284) für eine genügende Anzahl der Zeitpunkte des in Betracht zu ziehenden Zeitraumes der geologischen Vorzeit auszuwerten und auch die diesen Zeitpunkten zugehörigen Werte von ε und Π_1 zu berechnen.

Ich werde bei meiner Berechnung des säkularen Ganges der Erdbestrahlung deren Ergebnisse in kanonischen Einheiten oder in Metern der Schneegrenzverschiebung ausdrücken. Um selbst für den Anfang des Quartärs und für die höheren geographischen Breiten diese Ergebnisse auf etwa 10 m der Schneegrenzverschiebung genau zu erhalten, ist es erforderlich die Ekliptikschiefe ε auf 140", die Exzentrizität e der Erdbahn auf 0,001 und die Länge Π_1 des Perihels auf 45' genau zu haben. Die Genauigkeit der Ergebnisse der astronomischen Berechnung der säkularen

Aenderungen der Elemente ε , e , Π , welche diese Angaben zu liefern hat, hängt in erster Linie von der Genauigkeit der numerischen Werte der Planetenmassen, die den Ausgangspunkt dieser Berechnung bilden. Obwohl seit der Zeit der Leverrierschen Berechnung sich unsere Kenntnisse über diese Massenwerte nicht unwesentlich vervollständigt haben, bleibt noch die Frage offen, wie die noch ausstehenden Korrekturen dieser Werte die Ergebnisse der astronomischen Berechnung und meiner darauf fussenden beeinflussen könnten. Eine analytische Behandlung dieser Frage stösst auf unüberwindliche Schwierigkeiten, weil der analytische Zusammenhang zwischen den Massenwerten und den numerischen Werten der in den Integralen (279) und (284) auftretenden Grössen N_i , g_i , β_i , der durch die beiden Säkular determinanten (281) und (286) führt, ein überaus komplizierter ist. Zur Beantwortung der gestellten Frage stehen uns zwei andere Wege offen. Der eine derselben ist, sich diesbezüglich auf das Urteil eines so erfahrenen Rechners, wie es Leverrier war, zu stützen. Leverrier hat in der Addition III seiner erwähnten Arbeit die numerischen Werte der Elemente e , Ω , i , Π der Erdbahn für jedes zehnte Jahrtausend und für das Zeitintervall von 100.000 Jahren vor und nach 1800 n. Chr. mitgeteilt, wobei er e auf 0,0001, i auf Bogensekunden und Π auf Bogenminuten genau angegeben betrachtet. Diese Genauigkeit ist mindestens zehnmal so gross als die oben geforderte, woraus sich der Schluss ergeben würde, dass, wenn man sich mit der für geologische Zwecke hinreichender Genauigkeit zufriedenstellt, der Anwendungsbereich der Leverrierschen Berechnungen auf eine Million von Jahren vor und nach der Gegenwart bewertet werden kann.

Der andere Weg, diesen Bereich einzuschätzen, gelangt später zur Sprache, da es vorher notwendig ist, die an die Leverrier'schen bzw. die Stockwell'schen Arbeiten anschliessenden numerischen Berechnungen der zeitlichen Aenderungen der Elemente ε , e , Π , zu besprechen.

Die erste auf einen langen Zeitraum sich erstreckende Berechnung der zeitlichen Aenderungen der Elemente ε , e , Π , hat Ludwig Pilgrim in seiner Abhandlung „Versuch einer rechnerischen Behandlung des Eiszeitenproblems. Jahreshefte für vaterländische Naturkunde in Württemberg. Jahrg. 1904. Band 60.“ geliefert. Diese Arbeit, deren klimatologischer Teil als misslungen zu betrachten ist, zeichnet sich von den vielen damaligen Arbeiten, die sich mit dem Eiszeitenproblem befassten, schon dadurch vorteilhaft aus, dass Pilgrim dieses Problem mit Hilfe der Himmelsmechanik zu lösen versuchte. In dieser Wissenschaft war er gut bewandert, auch habe ich ihn bei der Abfassung meiner Doktorsdissertation als einen guten Rechner kennen gelernt. In seiner oben erwähnten Abhandlung hat er die säkularen Aenderungen der Elemente Π , e , ε für jedes fünfte Jahrtausend und für alle jene Zeitpunkte, zu welchen Π , gleich 90° oder gleich 270° ist, für den Zeitraum von 1,010.000 Jahren vor und 40.000 Jahren nach 1850 n. Chr. mit Benützung der Stockwellschen Integrale berechnet. Die Ergebnisse dieser mühsamen Arbeit, die ich anlässlich meiner ersten Berechnungen des säkularen Ganges der Erdbestrahlung benützt habe, gebe ich, soweit sie sich auf die letztverflossenen 1000 Jahrtausende beziehen, in der nachstehenden Tabelle VIII wieder, weil die Originalarbeit Pilgrims heute schwer aufzutreiben ist.

Meine auf Grund der in der Tabelle VIII mitgeteilten Zahlen durchgeführte und im Köppen-Wegenerschen Werke „Die Klimate der geologischen Vorzeit“ ver-

Tabelle VIII
Säkulare Aenderungen der Elemente Π_γ , e , ε nach Stockwell-Pilgrim

| Jahrtausende vor 1850 | Π_γ | e | ε | Jahrtausende vor 1850 | Π_γ | e | ε |
|-----------------------|--------------|--------|---------------|-----------------------|--------------|--------|---------------|
| 1000 | 145°36' | 0,0150 | 22°37' | 905 | 131°48' | 0,0378 | 23°41' |
| 995 | 248°6' | 0,0695 | 23°3' | 900 | 214°12' | 0,0291 | 24°7' |
| 994,2 | 270° | 0,0084 | 23°9' | 896,5 | 270° | 0,0226 | 24°3' |
| 990 | 21°36' | 0,0059 | 23°36' | 895 | 294°48' | 0,0196 | 23°54' |
| 987,2 | 90° | 0,0069 | 23°46' | 890 | 7°30' | 0,0099 | 23°28' |
| 985 | 145°36' | 0,0093 | 23°53' | 885 | 8°12' | 0,0043 | 23°3' |
| 980 | 263° | 0,0156 | 23°55' | 880 | 44°24' | 0,0127 | 22°40' |
| 979,6 | 270° | 0,0161 | 23°53' | 876,9 | 90° | 0,0182 | 22°42' |
| 975 | 358°12' | 0,0228 | 23°30' | 875 | 117°30' | 0,0216 | 22°49' |
| 970 | 85°24' | 0,0305 | 23°0' | 870 | 206°54' | 0,0321 | 23°8' |
| 969,7 | 90° | 0,0308 | 22°59' | 866,2 | 270° | 0,0387 | 23°22' |
| 965 | 174°54' | 0,0377 | 22°43' | 865 | 290°54' | 0,0409 | 23°27' |
| 960 | 263°30' | 0,0444 | 22°39' | 860 | 15°42' | 0,0486 | 23°40' |
| 959,6 | 270° | 0,0448 | 22°40' | 855,6 | 90° | 0,0542 | 23°39' |
| 955 | 351°30' | 0,0504 | 22°59' | 855 | 100°18' | 0,0550 | 23°38' |
| 950 | 78°18' | 0,0554 | 23°25' | 850 | 185°18' | 0,0600 | 23°28' |
| 949,3 | 90° | 0,0559 | 23°29' | 845,1 | 270° | 0,0634 | 23°11' |
| 945 | 162°48' | 0,0592 | 23°49' | 845 | 271° | 0,0635 | 23°11' |
| 940 | 247° | 0,0617 | 24°2' | 840 | 357°18' | 0,0653 | 22°57' |
| 938,6 | 270° | 0,0621 | 24°1' | 835 | 84°6' | 0,0654 | 22°57' |
| 935 | 333°18' | 0,0629 | 23°49' | 834,7 | 90° | 0,0653 | 22°58' |
| 930 | 58°42' | 0,0626 | 23°23' | 830 | 170°48' | 0,0641 | 23°6' |
| 928,2 | 90° | 0,0619 | 23°11' | 825 | 257°30' | 0,0611 | 23°28' |
| 925 | 145°30' | 0,0607 | 22°50' | 824,3 | 270° | 0,0605 | 23°31' |
| 920 | 232°36' | 0,0572 | 22°26' | 820 | 343°36' | 0,0568 | 23°46' |
| 917,9 | 270° | 0,0550 | 22°26' | 815 | 67°54' | 0,0517 | 23°41' |
| 915 | 320°6' | 0,0521 | 22°38' | 813,7 | 90° | 0,0501 | 23°37' |
| 910 | 46°48' | 0,0456 | 23°5' | 810 | 152°18' | 0,0455 | 23°25' |
| 907,5 | 90° | 0,0417 | 23°24' | 805 | 238°42' | 0,0378 | 22°58' |

Tabelle VIII
(Fortsetzung)

| Jahrtausende vor 1850 | Π_y | e | ϵ | Jahrtausende vor 1850 | Π_y | e | ϵ |
|-----------------------|---------|--------|------------|-----------------------|---------|--------|------------|
| 803,2 | 270° | 0,0348 | 22°50' | 700,7 | 90° | 0,0256 | 23°35' |
| 800 | 326°24' | 0,0295 | 22 38' | 700 | 104°18' | 0,0252 | 23°39' |
| 795 | 47°42' | 0,0206 | 22°49' | 695 | 203°42' | 0,0241 | 23°49' |
| 792,8 | 90° | 0,0173 | 22°59' | 691,7 | 270° | 0,0242 | 23°49' |
| 790 | 145°54' | 0,0128 | 23°12' | 690 | 303°36' | 0,0244 | 23°47' |
| 785 | 248°42' | 0,0048 | 23°39' | 685 | 41°24' | 0,0259 | 23°25' |
| 784,5 | 270° | 0,0023 | 23°41' | 682,5 | 90° | 0,0270 | 23°13' |
| 780,1 | 90° | 0,0043 | 23°58' | 680 | 138° | 0,0281 | 23°1' |
| 780 | 96° | 0,0044 | 23°59' | 675 | 235°36' | 0,0312 | 22°52' |
| 775 | 200°24' | 0,0103 | 23°50' | 673,1 | 270° | 0,0322 | 22°51' |
| 771 | 270° | 0,0169 | 23 33' | 670 | 327°42' | 0,0340 | 22°54' |
| 770 | 288 | 0,0186 | 23°29' | 665 | 59°36' | 0,0354 | 23°13' |
| 765 | 17° | 0,0247 | 23°1' | 663,9 | 90° | 0,0356 | 23°20' |
| 760,8 | 90° | 0,0292 | 22 43' | 660 | 150° | 0,0361 | 23°34' |
| 760 | 103°48' | 0,0300 | 22°40' | 655 | 239°18' | 0,0363 | 23°42' |
| 755 | 190°54' | 0,0343 | 22°40' | 653,3 | 270° | 0,0362 | 23°43' |
| 750,5 | 270° | 0,0373 | 22°52' | 650 | 328°24' | 0,0356 | 23°39' |
| 750 | 278°6' | 0,0376 | 22°53' | 645 | 57°48' | 0,0343 | 23°18' |
| 745 | 5 54' | 0,0398 | 23°28' | 643,2 | 90° | 0,0335 | 23°10' |
| 740,2 | 90° | 0,0409 | 23°49' | 640 | 148°36' | 0,0320 | 22°55' |
| 740 | 93°36' | 0,0409 | 23°49' | 635 | 241°36' | 0,0278 | 22°47' |
| 735 | 179°36' | 0,0411 | 23°58' | 633,5 | 270° | 0,0263 | 22°47' |
| 730 | 266°6' | 0,0402 | 23°52' | 630 | 337°54' | 0,0229 | 22°52' |
| 729,8 | 270° | 0,0402 | 23°51' | 625 | 78°18' | 0,0181 | 23°19' |
| 725 | 354°6' | 0,0385 | 23°22' | 624,4 | 90° | 0,0177 | 23°22' |
| 720 | 83°54' | 0,0362 | 22°50' | 620 | 183°36' | 0,0146 | 23°47' |
| 719,7 | 90° | 0,0360 | 22°49' | 616,2 | 270° | 0,0134 | 23°54' |
| 715 | 176°24' | 0,0335 | 22°37' | 615 | 298°30' | 0,0135 | 23°55' |
| 710 | 270° | 0,0306 | 22°42' | 610 | 51°18' | 0,0159 | 23°48' |
| 705 | 6°48' | 0,0276 | 23°9' | 608,1 | 90° | 0,0177 | 23°37' |

Tabelle VIII
(Fortsetzung)

| Jahrtausende vor 1850 | Π_y | e | ε | Jahrtausende vor 1850 | Π_y | e | ε |
|-----------------------|---------|--------|---------------|-----------------------|---------|--------|---------------|
| 605 | 154°36' | 0,0208 | 23°18' | 500 | 27°18' | 0,0207 | 23°25' |
| 600 | 252°42' | 0,0270 | 22°46' | 496,2 | 90° | 0,0250 | 23°39' |
| 599,1 | 270° | 0,0280 | 22°44' | 495 | 110°36' | 0,0264 | 23°44' |
| 595 | 347°24' | 0,0328 | 22°34' | 490 | 194°18' | 0,0314 | 23°53' |
| 590 | 79°18' | 0,0385 | 22°38' | 485,5 | 270° | 0,0351 | 23°36' |
| 589,4 | 90° | 0,0392 | 22°41' | 485 | 278°36' | 0,0356 | 23°34' |
| 585 | 169°24' | 0,0440 | 23°9' | 480 | 3°36' | 0,0389 | 23°8' |
| 580 | 257°42' | 0,0485 | 23°43' | 475 | 90° | 0,0413 | 22°48' |
| 579,3 | 270° | 0,0488 | 23°46' | 470 | 177°12' | 0,0428 | 22°38' |
| 575 | 344°18' | 0,0508 | 24°3' | 465 | 263°48' | 0,0433 | 22°56' |
| 570 | 69°48' | 0,0518 | 24°6' | 464,7 | 270° | 0,0432 | 22°57' |
| 568,8 | 90° | 0,0520 | 23°59' | 460 | 349°48' | 0,0428 | 23°22' |
| 565 | 156°42' | 0,0522 | 23°36' | 455 | 74°24' | 0,0415 | 23°51' |
| 560 | 242°24' | 0,0512 | 22°59' | 454,1 | 90° | 0,0411 | 23°57' |
| 558,4 | 270° | 0,0505 | 22°51' | 450 | 159°6' | 0,0394 | 24°5' |
| 555 | 330°30' | 0,0489 | 22°34' | 445 | 244°42' | 0,0366 | 23°34' |
| 550 | 58°48' | 0,0455 | 22°25' | 443,5 | 270° | 0,0356 | 23°23' |
| 548,2 | 90° | 0,0439 | 22°35' | 440 | 331°54' | 0,0331 | 22°55' |
| 545 | 146°18' | 0,0409 | 22°53' | 435 | 61°48' | 0,0290 | 22°29' |
| 540 | 232°48' | 0,0355 | 23°29' | 433,5 | 90° | 0,0278 | 22°22' |
| 537,8 | 270° | 0,0327 | 23°41' | 430 | 153°36' | 0,0249 | 22°22' |
| 535 | 317°18' | 0,0292 | 23°55' | 425 | 246°6' | 0,0215 | 22°57' |
| 530 | 40°24' | 0,0224 | 24°6' | 423,8 | 270° | 0,0202 | 23°8' |
| 527,2 | 90° | 0,0179 | 23°52' | 420 | 341°54' | 0,0164 | 23°40' |
| 525 | 130°24' | 0,0143 | 23°41' | 415 | 83°54' | 0,0129 | 24°7' |
| 520 | 202°6' | 0,0078 | 23°9' | 414,7 | 90° | 0,0128 | 24°9' |
| 515 | 214°36' | 0,0018 | 22°47' | 410 | 189°42' | 0,0105 | 24°15' |
| 510 | 223°48' | 0,0075 | 22°37' | 406,3 | 270° | 0,0104 | 23°53' |
| 507,1 | 270° | 0,0114 | 22°49' | 405 | 299°36' | 0,0106 | 23°44' |
| 505 | 303°36' | 0,0142 | 22°57' | 400 | 48°30' | 0,0122 | 23°4' |

Tabelle VIII
(Fortsetzung)

| Jahrtausende vor 1850 | Π_γ | e | ε | Jahrtausende vor 1850 | Π_γ | e | ε |
|-----------------------|--------------|--------|---------------|-----------------------|--------------|--------|---------------|
| 398 | 90° | 0,0133 | 22°51' | 300 | 139°6' | 0,0360 | 23°30' |
| 395 | 150°24' | 0,0150 | 22°33' | 295 | 255°6' | 0,0352 | 23°53' |
| 390 | 248°30' | 0,0181 | 22°18' | 292,4 | 270° | 0,0343 | 24°2' |
| 388,9 | 270° | 0,0185 | 22°21' | 290 | 309°42' | 0,0335 | 24°2' |
| 385 | 343°42' | 0,0198 | 22°42' | 285 | 33°48' | 0,0308 | 23°40' |
| 380 | 76°42' | 0,0209 | 23°18' | 281,6 | 90° | 0,0285 | 23°18' |
| 379,3 | 90° | 0,0210 | 23°23' | 280 | 117°18' | 0,0274 | 23°8' |
| 375 | 167°48' | 0,0217 | 23°54' | 275 | 201°24' | 0,0232 | 22°38' |
| 370 | 258°30' | 0,0221 | 24°16' | 270,7 | 270° | 0,0198 | 22°22' |
| 369,4 | 270° | 0,0221 | 24°16' | 270 | 281°36' | 0,0186 | 22°22' |
| 365 | 349°48' | 0,0219 | 23°58' | 265 | 356°30' | 0,0139 | 22°39' |
| 360 | 83° | 0,0212 | 23°25' | 260 | 58°42' | 0,0103 | 23°21' |
| 359,6 | 90° | 0,0211 | 23°22' | 256,9 | 90° | 0,0099 | 23°47' |
| 355 | 180°24' | 0,0204 | 22°45' | 255 | 109°30' | 0,0106 | 24°3' |
| 350,5 | 270° | 0,0200 | 22°19' | 250 | 161°24' | 0,0132 | 24°28' |
| 350 | 280°12' | 0,0199 | 22°18' | 245 | 229°24' | 0,0179 | 24°0' |
| 345 | 22°18' | 0,0207 | 22°39' | 242,3 | 270° | 0,0209 | 23°36' |
| 341,7 | 90° | 0,0207 | 23°2' | 240 | 305°6' | 0,0234 | 23°15' |
| 340 | 123°36' | 0,0209 | 23°14' | 235 | 25°18' | 0,0285 | 22°27' |
| 335 | 220°6' | 0,0228 | 23°50' | 231,1 | 90° | 0,0322 | 22°2' |
| 332,4 | 270° | 0,0240 | 24°7' | 230 | 108°42' | 0,0333 | 22°0' |
| 330 | 314°12' | 0,0252 | 24°11' | 225 | 193°48' | 0,0374 | 22°31' |
| 325 | 48°36' | 0,0279 | 23°46' | 220,5 | 270° | 0,0404 | 23°15' |
| 322,6 | 90° | 0,0292 | 23°29' | 220 | 278°36' | 0,0407 | 23°20' |
| 320 | 138°12' | 0,0306 | 23°9' | 215 | 359°42' | 0,0432 | 24°1' |
| 315 | 230°12' | 0,0329 | 22°43' | 210 | 79°48' | 0,0449 | 24°25' |
| 312,8 | 270° | 0,0337 | 22°32' | 209,4 | 90° | 0,0451 | 24°24' |
| 310 | 321°18' | 0,0347 | 23°31' | 205 | 160°12' | 0,0459 | 24°0' |
| 305 | 51° | 0,0358 | 22°56' | 200 | 241°6' | 0,0462 | 23°20' |
| 302,8 | 90° | 0,0360 | 23°11' | 198,3 | 270° | 0,0460 | 23°8' |

Tabelle VIII
(Fortsetzung)

| Jahrtausende vor 1850 | Π_γ | e | ε | Jahrtausende vor 1850 | Π_γ | e | ε |
|-----------------------|--------------|--------|---------------|-----------------------|--------------|--------|---------------|
| 195 | 323°48' | 0,0456 | 22°45' | 94,1 | 90° | 0,0403 | 24°8' |
| 190 | 46°54' | 0,0444 | 22°23' | 90 | 155°6' | 0,0394 | 24°18' |
| 187,4 | 90° | 0,0435 | 22°30' | 85 | 235°42' | 0,0376 | 23°55' |
| 185 | 129°24' | 0,0426 | 22°36' | 82,9 | 270° | 0,0364 | 23°39' |
| 180 | 210°42' | 0,0404 | 23°5' | 80 | 317° | 0,0349 | 23°17' |
| 176,2 | 270° | 0,0384 | 23°31' | 75 | 49°6' | 0,0315 | 22°39' |
| 175 | 289°42' | 0,0378 | 23°40' | 72 | 90° | 0,0292 | 22°20' |
| 170 | 6°54' | 0,0350 | 24°6' | 70 | 123°6' | 0,0276 | 22°14' |
| 165 | 82°6' | 0,0321 | 23°58' | 65 | 205°24' | 0,0231 | 22°29' |
| 164,5 | 90° | 0,0319 | 23°54' | 60,9 | 270° | 0,0194 | 22°56' |
| 160 | 156°24' | 0,0296 | 23°32' | 60 | 284°12' | 0,0186 | 23°2' |
| 155 | 230°36' | 0,0274 | 22°53' | 55 | 356°12' | 0,0145 | 23°49' |
| 152,3 | 270° | 0,0265 | 22°37' | 50 | 62°18' | 0,0115 | 24°25' |
| 150 | 304°24' | 0,0258 | 22°24' | 47,6 | 90° | 0,0110 | 24°25' |
| 145 | 17°18' | 0,0254 | 22°39' | 45 | 119° | 0,0105 | 24°13' |
| 140 | 90° | 0,0259 | 23°12' | 40 | 176°36' | 0,0110 | 23°39' |
| 135 | 161°54' | 0,0275 | 23°52' | 35 | 246°30' | 0,0130 | 22°49' |
| 130 | 234°36' | 0,0297 | 24°18' | 33,5 | 270° | 0,0138 | 22°37' |
| 127,6 | 270° | 0,0308 | 24°8' | 30 | 322°48' | 0,0156 | 22°10' |
| 125 | 308°54' | 0,0320 | 23°41' | 25 | 44°18' | 0,0175 | 22°25' |
| 120 | 25°30' | 0,0344 | 23°9' | 22,3 | 90° | 0,0182 | 22°44' |
| 116 | 90° | 0,0363 | 22°41' | 20 | 128°6' | 0,0189 | 23°0' |
| 115 | 106°12' | 0,0368 | 22°33' | 15 | 210°18' | 0,0196 | 23°43' |
| 110 | 188°48' | 0,0388 | 22°15' | 11,4 | 270° | 0,0195 | 24°5' |
| 105,1 | 270° | 0,0401 | 22°42' | 10 | 292°48' | 0,0195 | 24°14' |
| 105 | 271°36' | 0,0401 | 22°42' | 5 | 15°30' | 0,0185 | 23°59' |
| 100 | 354° | 0,0407 | 23°28' | 0,6 | 90° | 0,0170 | 23°31' |
| 95 | 74°48' | 0,0405 | 24°2' | 0 | 100°24' | 0,0168 | 23°28' |

öffentliche Berechnung des säkularen Bestrahlungsganges der geographischen Breiten von 55°, 60° und 65° nördlich hat, wie noch berichtet werden wird, ausgiebige Anwendung gefunden, weshalb ich mich bei der Abfassung meiner „Mathematischen Klimalehre“ entschloss, diese Berechnung auch auf die übrigen geographischen Breiten auszudehnen. Vor Inangriffnahme dieser Arbeit besprach ich diese Angelegenheit mit meinem Kollegen Professor V. Michkovitch, dem vortrefflichen Direktor des astronomischen Observatoriums der Universität in Belgrad. Ich wünschte meine Rechnung des säkularen Ganges der Erdbestrahlung auf solche Berechnungen der säkularen Aenderungen der astronomischen Elemente anschliessen, denen die gegenwärtig als die zuverlässigst anerkannten Werte der Massen der Planeten zugrunde gelegt wären. Die Berechnungen von Leverrier und Stockwell entsprachen nicht dieser Forderung, wie dies aus der nachstehenden Zusammenstellung folgt, in der die reziproken Werte der mit der Sonnenmasse gemessenen Massen der Planeten veranschaulicht sind, wie sie von Leverrier bzw. Stockwell bei ihren Berechnungen Verwendung fanden und wie sie gegenwärtig in den neuesten Jahrgängen der „Connaissance des Temps“ angegeben werden.

| | Leverrier | Stockwell | Conn. d. Temps |
|-------------|-----------|-----------|----------------|
| Merkur | 1,909.706 | 4,865.751 | 6,000.000 |
| Venus | 401.839 | 390 000 | 408.000 |
| Erde + Mond | 356.354 | 368 689 | 329.390 |
| Mars | 2,680.337 | 2,680.637 | 3,093.500 |
| Jupiter | 1 050 | 1.047,88 | 1.047 |
| Saturn | 3.512 | 3.501,6 | 3.501 |
| Uranus | 17.918 | 24.905 | 22.869 |
| Neptun | 14.400 | 18.780 | 19.380 |

Sowohl Leverrier als Stockwell haben in ihren Arbeiten die Möglichkeit einer Korrektur ihrer Berechnungen mittels besserer Massenwerte geschaffen und Formeln mitgeteilt, mittels welcher diese Korrektur zu bewerkstelligen wäre. Mein Kollege und ich standen also vor der Frage, an wessen Berechnungen diese Korrekturen durchzuführen wären, an den Leverrierschen oder den Stockwellschen. Unsere Wahl fiel auf Leverrier; die Gründe dafür waren die folgenden. Ein Vergleich der Arbeiten dieser beiden Astronomen ergab, dass die Leverriersche Arbeit jener von Stockwell, in der viele Druckfehler bemerkt und manche kleinere Rechenfehler entdeckt wurden, an Güte überlegen ist. Dies hat bereits Harzer erkannt. Ein weiterer und ausschlaggebender Grund sprach für die Benützung der Leverrierschen Arbeit. Ich habe, wie bereits erwähnt, meine ersten Berechnungen des säkularen Ganges der Erdbestrahlung an die Stockwellsche Arbeit angeschlossen, weil die

Rechnungen von Pilgrim mir dies ermöglichten. Eine neue Berechnung dieses Bestrahlungsganges, die in Anschluss an die Leverriersche Arbeit, an der man die Massenkorekturen vornehmen würde, durchgeführt worden wäre, böte eine willkommene Kontrolle der Rechnungsergebnisse von Leverrier und Stockwell und gäbe die Möglichkeit den Einfluss der diesen zwei Arbeiten zugrunde gelegten verschiedenen numerischen Werte der Planetmassen auf den Gang der Erdbestrahlung zu erkennen und dadurch den Anwendungsbereich dieser Rechnungen abzuschätzen.

Kollege Michkovitch übernahm es in dankenswerter Weise, an den Leverrierschen Integralen die erforderlichen Massenkorekturen vorzunehmen und den zeitlichen Verlauf der säkularen Aenderungen der Elemente ϵ , e , Π , für das Zeitintervall der letztverflossenen 600 Jahrtausende zu berechnen. Die Ergebnisse dieser Berechnungen von Michkovitch habe ich in meiner „Mathematischen Klimalehre“ und in meinen „Astronomischen Mitteln“ veröffentlicht und teile sie auch hier in der beiliegenden Tabelle IX mit. Weil, wie noch gezeigt werden wird, in den von mir abgeleiteten Formeln, die der Berechnung des säkularen Verlaufes der Erdbestrahlung dienen, die Elemente e und Π , immer zusammen und nur in der Kombination $e \sin \Pi$, vorkommen, sind in der Tabelle IX die Aenderungen der Grössen ϵ und $e \sin \Pi$, gegenüber ihrem Initialwert angegeben. Als Initialmoment ist dabei der Zeitpunkt 1800,0 zu betrachten, dem die folgenden Werte entsprechen:

$$\epsilon_0 = 23^\circ 27' 55''; \quad e_0 = 0,0168; \quad \Pi_0 = 99^\circ 30'$$

Die Tabelle IX habe ich zur Berechnung der in meinen erwähnten beiden Schriften mitgeteilten Aenderungen der Bestrahlung benützt. Unlängst hat mich Dr. v o n B a c s a k, der diese Tabelle noch einmal überprüfte, auf zwei auf das Glied $\Delta (e \sin \Pi)$ und die Zeitpunkte 500 und 465, von welchen der erste in die Interglazialzeit Günz — Mindel, der zweite in die Interstadialzeit Mindel I — Mindel II fällt, sich beziehende Rechen- oder Schreibfehler aufmerksam gemacht; ich habe sie hier ausgemerzt. Eine Korrektur der hier aus meinen früheren Veröffentlichungen übernommenen graphischen Veranschaulichungen des säkularen Bestrahlungsganges erschien mir nicht notwendig, es genügt der Hinweis auf die zugehörigen Tabellen, in denen diese sonst belanglosen Fehler beseitigt sind.

Meine beiden Berechnungen des säkularen Ganges der Erdbestrahlung, jene mit Benützung der von Stockwell-Pilgrim und jene mit Benützung der von Leverrier-Michkovitch ermittelten Zahlen, ergaben gut übereinstimmende Resultate. Dies ist ein Beweis, dass in den Rechnungen der erwähnten vier Gelehrten gröbere Rechnungsfehler nicht vorkommen; die gegenseitigen Abweichungen rühren von den verschiedenen Massenwerten der Planeten her, die diesen Rechnungen zugrunde lagen. Das Ausmass dieser Abweichungen bezeugt, dass auch weitere durch fernere, bessere Ermittlungen der Planetenmassen sich als notwendig erweisende Korrekturen die wesentlichen Züge des von mir berechneten säkularen Ganges der Erdbestrahlung nicht verändern werden. Um diesbezüglich sicher zu sein, habe ich meine endgültigen Berechnungen des säkularen Ganges der Erd-

Tabelle IX

Säkulare Aenderungen der Elemente $\Delta\varepsilon = \varepsilon - \varepsilon_0$; $\Delta(e \sin \Pi_\gamma) = e \sin \Pi_\gamma - e_0 \sin \Pi_\gamma^0$
nach Leverrier - Michkovitch

| Jahrtausende vor 1800 | $\Delta\varepsilon$ | $\Delta(e \sin \Pi_\gamma)$ | Jahrtausende vor 1800 | $\Delta\varepsilon$ | $\Delta(e \sin \Pi_\gamma)$ |
|-----------------------------|---------------------|-----------------------------|-----------------------------|---------------------|-----------------------------|
| | 0 | | | 0 | |
| 600 | -1,065 | -0,0431 | 497,1 | +0,405 | +0,0071 |
| 595 | -1,108 | -0,0145 | 495 | +0,347 | +0,0054 |
| 590,3 | -0,718 | +0,0202 | 490 | -0,095 | -0,0294 |
| 590 | -0,693 | +0,0204 | 486,1 | -0,480 | -0,0514 |
| 585 | +0,252 | +0,0165 | 485 | -0,588 | -0,0516 |
| 580 | +0,637 | -0,0598 | 480 | -0,902 | -0,0078 |
| 579,7 | +0,627 | -0,0601 | 475,6 | -0,792 | +0,0228 |
| 575 | +0,483 | -0,0231 | 475 | -0,773 | +0,0223 |
| 570 | +0,060 | +0,0301 | 470 | -0,468 | -0,0198 |
| 569,4 | -0,007 | +0,0308 | 465,4 | -0,177 | -0,0571 |
| 565 | -0,495 | -0,0053 | 465 | -0,152 | -0,0567 |
| 560 | -0,842 | -0,0605 | 460 | +0,422 | -0,0080 |
| 559,0 | -0,835 | -0,0615 | 455 | +0,682 | +0,0208 |
| 555 | -0,812 | -0,0314 | 454,8 | +0,658 | +0,0208 |
| 550 | -0,472 | +0,0192 | 450 | +0,083 | -0,0053 |
| 548,6 | -0,368 | +0,0212 | 445 | -0,572 | -0,0458 |
| 545 | -0,170 | -0,0001 | 444,0 | -0,772 | -0,0465 |
| 540 | +0,187 | -0,0403 | 440 | -1,072 | -0,0282 |
| 537,8 | +0,298 | -0,0426 | 435 | -1,332 | +0,0049 |
| 535 | +0,442 | -0,0324 | 433,6 | -1,275 | +0,0052 |
| 530 | -0,083 | -0,0072 | 430 | -0,915 | -0,0089 |
| 525,3 | -0,553 | -0,0056 | 425 | -0,038 | -0,0301 |
| 525 | -0,582 | -0,0060 | 424,0 | +0,100 | -0,0300 |
| 520 | -0,807 | -0,0143 | 420 | +0,657 | -0,0192 |
| 515 | -0,988 | -0,0192 | 415,5 | +0,822 | -0,0082 |
| 510 | -0,550 | -0,0278 | 415 | +0,840 | -0,0085 |
| 508,2 | -0,273 | -0,0307 | 410 | +0,455 | -0,0207 |
| 505 | +0,218 | -0,0266 | 407,7 | +0,083 | -0,0243 |
| 500 | +0,487 | -0,0017 | 405 | -0,350 | -0,0216 |

Tabelle IX
(Fortsetzung)

| Jahrtausende vor 1800 | $\Delta\varepsilon$ | $\Delta(e \sin \Pi_\gamma)$ | Jahrtausende vor 1800 | $\Delta\varepsilon$ | $\Delta(e \sin \Pi_\gamma)$ |
|-----------------------------|---------------------|-----------------------------|-----------------------------|---------------------|-----------------------------|
| | 0 | | | 0 | |
| 400 | -0,947 | -0,0051 | 305 | -0,465 | +0,0114 |
| 399,2 | -0,967 | -0,0043 | 303,1 | -0,007 | +0,0167 |
| 395 | -1,072 | -0,0138 | 300 | +0,542 | +0,0018 |
| 390 | -1,037 | -0,0337 | 295 | +0,680 | -0,0413 |
| 389,6 | -0,992 | -0,0340 | 292,7 | +0,542 | -0,0481 |
| 385 | -0,592 | -0,0188 | 290 | +0,378 | -0,0390 |
| 380 | +0,227 | +0,0035 | 285 | -0,193 | +0,0002 |
| 379,7 | +0,250 | +0,0036 | 281,8 | -0,577 | +0,0095 |
| 375 | +0,605 | -0,0143 | 280 | -0,792 | +0,0050 |
| 370 | +0,472 | -0,0367 | 275 | -1,073 | -0,0241 |
| 369,6 | +0,437 | -0,0368 | 270,7 | -0,930 | -0,0342 |
| 365 | +0,038 | -0,0182 | 270 | -0,907 | -0,0332 |
| 360 | -0,537 | +0,0016 | 265 | -0,493 | -0,0200 |
| 359,9 | -0,543 | +0,0015 | 260 | -0,113 | -0,0081 |
| 355 | -0,910 | -0,0191 | 256,5 | +0,345 | -0,0041 |
| 350,9 | -0,843 | -0,0328 | 255 | +0,542 | -0,0040 |
| 350 | -0,828 | -0,0317 | 250 | +0,873 | -0,0125 |
| 345 | -0,408 | -0,0081 | 245 | +0,035 | -0,0336 |
| 342,1 | -0,173 | +0,0002 | 242,2 | -0,313 | -0,0385 |
| 340 | -0,007 | -0,0042 | 240 | -0,795 | -0,0346 |
| 335 | +0,433 | -0,0314 | 235 | -1,237 | -0,0001 |
| 332,8 | +0,488 | -0,0372 | 232,4 | -1,453 | +0,0148 |
| 330 | +0,468 | -0,0041 | 230 | -1,538 | +0,0132 |
| 325 | -0,402 | +0,0046 | 225 | -1,043 | -0,0292 |
| 323,3 | -0,582 | +0,0093 | 220,8 | -0,097 | -0,0557 |
| 320 | -0,928 | -0,0031 | 220 | +0,083 | -0,0551 |
| 315 | -1,090 | -0,0429 | 215 | +0,842 | -0,0070 |
| 313,4 | -1,123 | -0,0473 | 210 | +0,853 | +0,0261 |
| 310 | -1,197 | -0,0321 | 209,6 | +0,807 | +0,0264 |

Tabelle IX
(Fortsetzung)

| Jahrtausende vor 1800 | $\Delta\varepsilon$ | $\Delta(e \sin \Pi_\gamma)$ | Jahrtausende vor 1800 | $\Delta\varepsilon$ | $\Delta(e \sin \Pi_\gamma)$ |
|-----------------------------|---------------------|-----------------------------|-----------------------------|---------------------|-----------------------------|
| | 0 | | | 0 | |
| 205 | +0,280 | -0,0045 | 100 | -0,180 | -0,0195 |
| 200 | -0,480 | -0,0559 | 95 | +0,790 | +0,0199 |
| 198,5 | -0,623 | -0,0598 | 94,0 | +0,782 | +0,0211 |
| 195 | -0,957 | -0,0398 | 90 | +0,745 | -0,0003 |
| 190 | -0,977 | +0,0149 | 85 | +0,336 | -0,0451 |
| 187,5 | -0,898 | +0,0241 | 82,8 | +0,052 | -0,0505 |
| 185 | -0,780 | +0,0137 | 80 | -0,312 | -0,0393 |
| 180 | -0,308 | -0,0361 | 75 | -0,938 | +0,0016 |
| 176,3 | +0,167 | -0,0526 | 71,9 | -1,145 | +0,0105 |
| 175 | +0,333 | -0,0503 | 70 | -1,178 | +0,0052 |
| 170 | +0,542 | -0,0139 | 65 | -0,917 | -0,0242 |
| 165 | +0,275 | +0,0136 | 60,6 | -0,503 | -0,0345 |
| 164,3 | +0,205 | +0,0138 | 60 | -0,463 | -0,0338 |
| 160 | -0,222 | -0,0044 | 55 | -0,040 | -0,0195 |
| 155 | -0,760 | -0,0370 | 50 | +0,660 | -0,0074 |
| 152,2 | -0,885 | -0,0429 | 47,1 | +0,730 | -0,0055 |
| 150 | -0,983 | -0,0380 | 45 | +0,782 | -0,0065 |
| 145 | -0,715 | -0,0092 | 40 | -0,255 | -0,0150 |
| 140 | -0,133 | +0,0094 | 35 | -0,912 | -0,0282 |
| 135 | +0,387 | -0,0084 | 32,7 | -1,077 | -0,0312 |
| 130 | +0,710 | -0,0408 | 30 | -1,270 | -0,0295 |
| 127,7 | +0,498 | -0,0469 | 25 | -1,472 | -0,0066 |
| 125 | +0,250 | -0,0402 | 22,1 | -1,235 | +0,0007 |
| 120 | -0,802 | -0,0012 | 20 | -0,748 | -0,0013 |
| 116,1 | -1,160 | +0,0186 | 15 | +0,335 | -0,0250 |
| 115 | -1,200 | +0,0170 | 11,1 | +0,666 | -0,0354 |
| 110 | -1,298 | -0,0225 | 10 | +0,760 | -0,0344 |
| 105,1 | -1,225 | -0,0545 | 5 | +0,539 | -0,0123 |
| 105 | -1,223 | -0,0545 | 0,6 | +0,062 | +0,0003 |

bestrahlung auf das Zeitintervall der letztverflossenen 600 Jahrtausende beschränkt, obwohl man mit einer für geologische Zwecke hinreichenden Genauigkeit wahrscheinlich bis nahe an 1000 Jahrtausende gehen könnte. Die von Jeffreys (Nature, Vol. 130, 1932) geäußerte Ansicht, der Anwendungsbereich der astronomischen Rechnung reiche über das Zeitintervall von 10 Millionen von Jahren, ist bei dem gegenwärtigen Stande der Wissenschaft leider nicht zutreffend, schon aus dem folgenden Grunde nicht.

Die Störungsrechnung ist auf den Grundmauern der klassischen Mechanik aufgebaut. Diese war trotz aller Bemühungen, an denen sich auch Harzer mit seiner erwähnten Arbeit beteiligt hat, nicht in der Lage, ein Restglied in der Perihelbewegung des Merkurs zu erklären. Dies ist erst der Gravitationstheorie Einstein's geglückt, nach der nicht nur das Perihel von Merkur, sondern auch die Perihelie der übrigen Planeten fortschreitende über die Ergebnisse der klassischen Störungsrechnung reichende Bewegungen vollführen, die in 100 Julianischen Jahren folgende Beträge erreichen:

Merkur 42"89, Venus 8"607, Erde 3"831, Mars 1"348.

Berücksichtigt man dies, so ergibt es sich, dass nach Verlauf von einer Million von Jahren sich das Perihel der Erde gegenüber dem Rechnungsergebnis der klassischen Störungsrechnung um $10^{\circ}39'$ verschiebt. Diese Verschiebung des Perihels der Erde könnte bei der Berechnung des säkularen Ganges der Erdbestrahlung noch hingegenommen werden und zwar aus folgendem Grunde. Die grossen Ausschläge der Erdbestrahlung, jene die die Eiszeiten verursacht hatten, traten, wie noch gezeigt werden wird, in den Zeiten, zu welchen die Länge Π , des Erdperihels den Betrag von 90° bzw. 270° erreichte. Ist aber Π , so gross, dann ändert sich $\sin \Pi$, bei einer Veränderung von Π , nur sehr wenig. Ein Fehler in der Länge des Perihels von 10° verursacht dabei in der Rechnung der Erdbestrahlung einen Fehler von 11 kanonischen Einheiten, und dies ist, wie dies aus den noch mitzuteilenden Tabellen der Erdbestrahlung folgt, eine recht kleine Zahl. Bedenklicher sind aber die mit den Perihelbewegungen der Planeten vermittle der Gleichungen (113), (112) und (118) in Zusammenhang stehenden säkularen Aenderungen der Exzentrizität e der Erdbahn und der Schiefe ϵ der Ekliptik. Ihr Einfluss muss sich bei weiterem Vordringen in die Vergangenheit immer mehr fühlbar machen, um schliesslich die diesbezüglichen Rechnungsergebnisse der klassischen Störungsrechnung über den Haufen zu werfen.

KAPITEL XV

Analytische Darstellung des säkularen Ganges der Erdbestahlung

§ 85. Hilfstabellen zur Berechnung der säkularen Aenderungen der Erdbestahlung. Will man darangehen, die Aenderungen der Erdbestahlung zu berechnen, die durch die Variabilität der astronomischen Elemente Π , e , ε hervorgerufen werden, so ist zu berücksichtigen, dass durch die im Kapitel XIII entwickelten Formeln, welche die Erdbestahlung mathematisch zum Ausdruck bringen, veranschaulichten Grössen W_s , W_w , W_T , T_s , T_w einfache Funktionen der säkular Veränderlichen Π , und e sind, so dass sich der Einfluss dieser Veränderlichen auf den Bestrahlungszustand der Erde ohne weiters berechnen lässt. Etwas komplizierter wäre die Berechnung der Aenderungen der Erdbestahlung, die durch die Variabilität der Ekliptikschiefe ε verursacht werden, weil nach (44) und (54) die Grösse ε in die Koeffizienten b_0 , b_1 , $b_2 \dots$ durch Reihenentwicklungen eingeführt wurde. Berücksichtigt man aber, dass, wie dies aus den vorstehend gegebenen Tabellen VIII und IX ersichtlich, die Grösse ε zwischen äusserst engen Grenzen schwankt, so ist es gestattet, die durch dieselbe hervorgerufenen Aenderungen der Grössen b_0 , b_1 , $b_2 \dots$ W_s , W_w proportional den Differentialquotienten $\frac{\partial b_0}{\partial \varepsilon}$, $\frac{\partial b_1}{\partial \varepsilon}$, $\frac{\partial b_2}{\partial \varepsilon} \dots$ $\frac{\partial W_s}{\partial \varepsilon}$, $\frac{\partial W_w}{\partial \varepsilon}$ zu setzen. Bezeichnet man also die Aenderungen der Grössen b_0 , b_1 , $b_2 \dots$ W_s , W_w , die durch einen Zuwachs der Ekliptikschiefe ε von einem Bogengrad hervorgerufen werden, mit Δb_0 , Δb_1 , $\Delta b_2 \dots \Delta W_s$, ΔW_w , so kann gesetzt werden:

$$(119) \quad \Delta b_0 = \frac{\pi}{180} \cdot \frac{\partial b_0}{\partial \varepsilon}; \quad \Delta b_1 = \frac{\pi}{180} \cdot \frac{\partial b_1}{\partial \varepsilon}; \quad \Delta b_2 = \frac{\pi}{180} \cdot \frac{\partial b_2}{\partial \varepsilon} \dots$$

$$(120) \quad \Delta W_s = \frac{\pi}{180} \cdot \frac{\partial W_s}{\partial \varepsilon}, \quad \Delta W_w = \frac{\pi}{180} \cdot \frac{\partial W_w}{\partial \varepsilon}.$$

Will man also die Grössen $b_0, b_1, b_2 \dots W_s, W_w$ für einen bestimmten Wert $\varepsilon = \varepsilon_0 + \Delta\varepsilon$ der Ekliptikschiefe berechnen, der sich um $\Delta\varepsilon$ (ausgedrückt in Bogengraden) von dem den Tabellen VI und VII zugrunde gelegten Wert $\varepsilon_0 = 23^\circ 27' 30''$ unterscheidet, so hat man nur den Werten $b_0, b_1, b_2 \dots W_s, W_w$ der Tabelle VI bzw. VII die Produkte $\Delta b_0 \Delta\varepsilon; \Delta b_1 \Delta\varepsilon; \Delta b_2 \Delta\varepsilon \dots \Delta W_s \Delta\varepsilon; \Delta W_w \Delta\varepsilon$ hinzuzufügen.

Die Berechnung der Aenderungen $\Delta b_0, \Delta b_1, \Delta b_2 \dots \Delta W_s, \Delta W_w$ geschieht auf folgende Weise.

Differentiert man die Gleichungen (60) nach ε , multipliziert dabei alle Glieder in der Klammer mit k , dividiert deshalb vor der Klammer mit $\sin \varepsilon = k$ und berücksichtigt, dass wegen (55)

$$\frac{\partial a_1}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial a_1}{\partial k} \cdot \frac{\partial k}{\partial \varepsilon} = 2 \frac{a_1}{k} \cos \varepsilon; \quad \frac{\partial a_2}{\partial \varepsilon} = 4 \frac{a_2}{k} \cos \varepsilon; \quad \frac{\partial a_3}{\partial \varepsilon} = 6 \frac{a_3}{k} \cos \varepsilon \dots$$

ist, so bekommt man:

$$(121) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial b_0}{\partial \varepsilon} &= \frac{\cos \varphi}{\tan \varepsilon} \left\{ a_1 + \frac{4}{2^4} \binom{4}{2} a_2 + \frac{6}{2^6} \binom{6}{3} a_3 + \frac{8}{2^8} \binom{8}{4} a_4 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{10}{2^{10}} \binom{10}{5} a_5 + \frac{12}{2^{12}} \binom{12}{6} a_6 + \frac{14}{2^{14}} \binom{14}{7} a_7 + \dots \right\} \\ \frac{\partial b_1}{\partial \varepsilon} &= \frac{\cos \varphi}{2 \tan \varepsilon} \left\{ 2a_1 + \frac{4}{2^2} \binom{4}{1} a_2 + \frac{6}{2^4} \binom{6}{2} a_3 + \frac{8}{2^6} \binom{8}{3} a_4 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{10}{2^8} \binom{10}{4} a_5 + \frac{12}{2^{10}} \binom{12}{5} a_6 + \frac{14}{2^{12}} \binom{14}{6} a_7 + \dots \right\} \\ \frac{\partial b_2}{\partial \varepsilon} &= \frac{\cos \varphi}{2^3 \tan \varepsilon} \left\{ 4a_2 + \frac{6}{2^2} \binom{6}{1} a_3 + \frac{8}{2^4} \binom{8}{2} a_4 + \frac{10}{2^6} \binom{10}{3} a_5 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{12}{2^8} \binom{12}{4} a_6 + \frac{14}{2^{10}} \binom{14}{5} a_7 + \dots \right\} \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right.$$

Die Grössen $\frac{\partial W_s}{\partial \varepsilon}$ und $\frac{\partial W_w}{\partial \varepsilon}$ folgen durch Differentiation der Gleichungen (100) bis (103) nach ε . Es ist also:

$$(122) \quad \frac{\partial W_s}{\partial \varepsilon} - \frac{\partial W_w}{\partial \varepsilon} = \frac{T}{\pi} \cdot \frac{J_0}{\sqrt{1-e^2}} \sin \varphi \cos \varepsilon,$$

welche Gleichung für alle Breiten gültig ist.

Es ist ferner:

$$(123) \quad \frac{\partial W_s}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial W_w}{\partial \varepsilon} = \frac{T}{\pi} \cdot \frac{J_0}{\sqrt{1-e^2}} \cdot \frac{\partial b_0}{\partial \varepsilon}$$

$$(124) \quad \frac{\partial W_s}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial W_w}{\partial \varepsilon} = \frac{T}{\pi^2} \cdot \frac{J_0}{\sqrt{1-e^2}} \left\{ 2 \frac{\partial b_0}{\partial \varepsilon} \lambda_1 + 2b_0 \frac{\partial \lambda_1}{\partial \varepsilon} + \right. \\ \left. + \pi \sin \varphi \cos \varepsilon \cos \lambda_1 - \pi \sin \varphi \sin \varepsilon \sin \lambda_1 \frac{\partial \lambda_1}{\partial \varepsilon} + \right. \\ \left. + \left[-\frac{\partial b_1}{\partial \varepsilon} \sin 2\lambda_1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial b_2}{\partial \varepsilon} \sin 4\lambda_1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{\partial b_3}{\partial \varepsilon} \sin 6\lambda_1 + \dots \right] + \right. \\ \left. + 2 \frac{\partial \lambda_1}{\partial \varepsilon} [-b_1 \cos 2\lambda_1 + b_2 \cos 4\lambda_1 - b_3 \cos 6\lambda_1 + \dots] \right\}$$

Von den zwei vorstehenden Gleichungen ist (123) für die nichtarktische Zone und (124) für die arktischen Zonen zu verwenden. Dabei ist λ_1 durch (39), d. h. durch:

$$\sin \lambda_1 = \frac{\cos \varphi}{\sin \varepsilon}$$

und $\frac{\partial \lambda_1}{\partial \varepsilon}$ durch:

$$\cos \lambda_1 \frac{\partial \lambda_1}{\partial \varepsilon} = -\cos \varphi \frac{\cos \varepsilon}{\sin^2 \varepsilon}.$$

gegeben.

Auf diese Weise sind die in der beiliegenden Tabelle X enthaltenen Aenderungen der Koeffizienten $b_0, b_1, b_2, \dots, b_7$ bei einem Zuwachs der Ekliptikschiefe von einem Grad berechnet worden.

Bei der Untersuchung der säkularen Aenderungen der Grössen W_s, W_w, W_T und des säkularen Ganges der Erdbestrahlung wird es sich, wie man sehen wird, von besonderem Vorteil erweisen, die in Betracht zu ziehenden Strahlungsmengen in den, so von mir benannten kanonischen Einheiten auszudrücken. Es sind dies jene Einheiten, die man erhält, wenn man die Solarkonstante zur Strahlungseinheit, und den hunderttausendsten Teil des Jahres zur Zeiteinheit wählt, also setzt:

$$J_0 = 1; \quad T = 100.000$$

Tabelle X

| Geograph. Breite | Die in der Tabelle VI enthaltenen Koeffizienten | | | | | | |
|---|---|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| | b_0 | b_1 | b_2 | b_3 | b_4 | b_5 | b_7 |
| werden bei einem Zuwachs der Ekliptikschiefe von einem Grad geändert um | | | | | | | |
| 0° | -0,00339 | -0,00346 | -0,00007 | | | | |
| 5° | -0,00335 | -0,00341 | -0,00007 | | | | |
| 10° | -0,00323 | -0,00330 | -0,00007 | | | | |
| 15° | -0,00302 | -0,00308 | -0,00006 | | | | |
| 20° | -0,00274 | -0,00278 | -0,00005 | | | | |
| 25° | -0,00236 | -0,00239 | -0,00004 | | | | |
| 30° | -0,00189 | -0,00191 | -0,00002 | | | | |
| 35° | -0,00129 | -0,00128 | +0,00002 | | | | |
| 40° | -0,00060 | -0,00056 | +0,00005 | | | | |
| 45° | +0,00023 | +0,00031 | +0,00009 | +0,00001 | | | |
| 50° | +0,00127 | +0,00142 | +0,00017 | +0,00001 | | | |
| 55° | +0,00255 | +0,00280 | +0,00027 | +0,00003 | | | |
| 60° | +0,00426 | +0,00469 | +0,00047 | +0,00005 | +0,00001 | | |
| 65° | +0,00687 | +0,00772 | +0,00100 | +0,00017 | +0,00003 | | |
| 70° | +0,01260 | +0,01538 | +0,00357 | +0,00100 | +0,00024 | +0,00004 | +0,00001 |
| 75° | +0,05705 | +0,08748 | +0,04429 | +0,01851 | +0,00571 | +0,00122 | +0,00016 |
| | | | | | | | +0,00001 |

Tabelle XI

Die während der astronomischen Halbjahre
zugestrahelten Mengen; kanonische Einheiten

| Geographi- sche Breite | Astronomisches | | Ganzes Jahr |
|---------------------------|---------------------|---------------------|----------------|
| | Sommer- halbjahr | Winter- halbjahr | |
| | W_s | W_w | W_T |
| 0° | 15.266 | 15.266 | 30.532 |
| 5° | 15.768 | 14.663 | 30.431 |
| 10° | 16.156 | 13.956 | 30.112 |
| 15° | 16.433 | 13.153 | 29.586 |
| 20° | 16.596 | 12.262 | 28.858 |
| 25° | 16.649 | 11.292 | 27.941 |
| 30° | 16.584 | 10.248 | 26.832 |
| 35° | 16.413 | 9.144 | 25.557 |
| 40° | 16.134 | 7.988 | 24.122 |
| 45° | 15.758 | 6.797 | 22.555 |
| 50° | 15.292 | 5.584 | 20.876 |
| 55° | 14.764 | 4.383 | 19.147 |
| 60° | 14.172 | 3.196 | 17.368 |
| 65° | 13.594 | 2.109 | 15.703 |
| 70° | 13.186 | 1.278 | 14.464 |
| 75° | 12.943 | 702 | 13.645 |
| 80° | 12.788 | 308 | 13.096 |
| 85° | 12.700 | 70 | 12.770 |
| 90° | 12.672 | 0 | 12.672 |

Tabelle XII

Die Aenderungen der in der Tabelle XI mitgeteilten Strahlungsmengen bei einem Zuwachs der Ekliptikschiefe von einem Grad

| Geograph. Breite | ΔW_s | ΔW_w | ΔW_T |
|---------------------|----------------------|--------------|--------------|
| | Kanonische Einheiten | | |
| 0° | —54 | —54 | —108 |
| 5° | —31 | —75 | —106 |
| 10° | —7 | —96 | —103 |
| 15° | +18 | —114 | —96 |
| 20° | +44 | —131 | —87 |
| 25° | +70 | —145 | —75 |
| 30° | +97 | —157 | —60 |
| 35° | +125 | —167 | —41 |
| 40° | +154 | —173 | —19 |
| 45° | +184 | —177 | +7 |
| 50° | +215 | —175 | +40 |
| 55° | +249 | —168 | +81 |
| 60° | +288 | —153 | +136 |
| 65° | +340 | —121 | +219 |
| 70° | +420 | —59 | +361 |
| 75° | +461 | —30 | +431 |
| 90° | +509 | | +509 |

Tabelle XIII

Die prozentuellen Aenderungen der in der
Tabelle XI mitgeteilten Strahlungsmengen
bei einem Zuwachs der Ekliptikschiefe von
einem Grad

| Geograph. Breite | ΔW_s | ΔW_w | ΔW_T |
|---------------------|--------------|--------------|--------------|
| | Prozente | | |
| 0° | —0,35 | —0,35 | —0,35 |
| 5° | —0,20 | —0,52 | —0,35 |
| 10° | —0,04 | —0,69 | —0,34 |
| 15° | +0,11 | —0,87 | —0,33 |
| 20° | +0,26 | —1,07 | —0,30 |
| 25° | +0,42 | —1,29 | —0,27 |
| 30° | +0,59 | —1,54 | —0,22 |
| 35° | +0,76 | —1,83 | —0,16 |
| 40° | +0,96 | —2,17 | —0,08 |
| 45° | +1,17 | —2,60 | +0,03 |
| 50° | +1,41 | —3,14 | +0,19 |
| 55° | +1,69 | —3,84 | +0,42 |
| 60° | +2,04 | —4,78 | +0,78 |
| 65° | +2,51 | —5,77 | +1,39 |
| 70° | +3,18 | —4,62 | +2,49 |
| 75° | +3,57 | —4,31 | +3,17 |
| 90° | +4,02 | | +4,02 |

Setzt man dies und, wie es bei der Berechnung der Tabellen V und VII geschehen ist, $e=0,0168$; $\varepsilon=23^{\circ}27'30''$ in die Formeln (100) bis (104) ein, so erhält man die in der beiliegenden Tabelle XI mitgeteilten während der astronomischen Halbjahre T_s , T_w und während des ganzen Jahres zugestrahlten Mengen.

Wiener hat in seiner bereits erwähnten Abhandlung $J_0=1$; $T=1$ gesetzt, so dass die seinen Berechnungen zugrunde liegende Einheit 100.000 mal so gross ist als die von mir benützte. Seine Rechnungsergebnisse stimmen auch ganz genau mit den meinigen überein, obwohl der Rechnungsweg ein anderer gewesen ist. Dies gilt auch von den Rechnungsergebnissen, die von Lambert, Meech, Angot und Hargreaves gewonnen wurden.

Der Zusammenhang zwischen den der Tabelle VII bzw. der Tabelle XI zugrunde gelegten Einheiten ist der folgende. Weil das tropische Jahr, wie im § 52 angegeben, 365,2422 Tage, d. h. 525942 Minuten umfasst und weil bei der Berechnung der Tabelle VII $J_0=2$ gesetzt wurde, war in diesem Falle der in den Formeln (100) bis (104) auftretende Koeffizient TJ_0 gleich 1051898, während bei der Berechnung der Tabelle XI $TJ_0=100\,000$ war. Man erhält also die Zahlen der Tabelle VII, wenn man die Zahlen der Tabelle XI mit 10,519 multipliziert.

Setzt man $J_0=1$, $T=100\,000$, $\varepsilon=23^{\circ}27'30''$, $e=0,0168$ in die vorstehenden Formeln ein, so erhält man die Aenderungen ΔW_s , ΔW_w , ΔW_T , welche die in der Tabelle XI mitgeteilten Strahlungsmengen bei einem Zuwachs der Ekliptikschiefe von einem Bogengrad erleiden. Diese Aenderungen sind in der beiliegenden Tabelle XII enthalten.

Es wird sich bald die Notwendigkeit ergeben, die Einflüsse der Veränderlichkeit der astronomischen Elemente e , ε und I , auf den Bestrahlungszustand der Erde untereinander zu vergleichen, wozu es erforderlich ist, die prozentuellen Aenderungen der Grössen W_s , W_w , W_T bei einem Zuwachs der Ekliptikschiefe von einem Bogengrad zu kennen. Die diesbezüglichen Angaben sind in der beiliegenden Tabelle XIII enthalten.

§ 86. Allgemeines über den säkularen Gang der Erdbestrahlung. Die Ergebnisse der Tabellen XII und XIII, die ich bereits im Jahre 1914 veröffentlichte, sind von grundlegender Bedeutung, weil durch dieselben zum ersten Male der Einfluss einer Aenderung der Ekliptikschiefe auf den Bestrahlungszustand der Erde in allen seinen Einzelheiten klargelegt wurde. Diese Tabellen zeigen, dass sich die Aenderungen der Ekliptikschiefe an verschiedenen geographischen Breiten verschieden fühlbar machen. Durch einen Zuwachs der Ekliptikschiefe werden die jährlichen Bestrahlungen W_T der äquatorialen Zone etwas vermindert, jene der polaren Zonen nicht unwesentlich vergrössert. Die Grenze zwischen diesen Gebieten der jährlichen Bestrahlungszunahme bzw. Abnahme liegt bei $43^{\circ}39'$. Die halbjährigen Strahlungsmengen W_s und W_w zeigen ein anderes Verhalten. Die sommerlichen Strahlungsmengen W_s werden bei einer Zunahme der Ekliptikschiefe nur bis zur Breite von $11^{\circ}23'$ vermindert, sonst vergrössert; die winterlichen Strahlungsmengen W_w werden durch einen Zuwachs der Ekliptikschiefe an allen Breiten vermindert. Die prozentuelle Aenderung der sommerlichen Bestrahlung

erreicht ihr Maximum an den Polen, jene der winterlichen an der Breite von 66° , wo ein Zuwachs der Ekliptikschiefe von einem Bogengrad eine Verminderung der Grösse W_w von 5,86 Prozent zur Folge hat.

Die in der Tabelle XIII mitgeteilten Aenderungen ΔW_s , ΔW_w , ΔW_T stellen die in Prozenten ausgedrückten Bruchteile der an der obere Grenze der Atmosphäre anlangende Strahlungsmengen W_s , W_w , W_T dar. Wie im nächsten Abschnitt dieses Buches gezeigt werden wird, werden durch Reflexion in der Atmosphäre und an der Erdoberfläche fast 40 Prozent dieser Strahlungsmengen in den Weltraum unbenützt zurückgewiesen und gehen für den Wärmehaushalt der Erde verloren, so dass bloss 60 Prozent, d. h. drei Fünftel dieser Strahlungsmengen den Temperaturzustand der Erdoberfläche und der Erdatmosphäre bestimmen. Weil die durch die astronomischen Ursachen zustande kommenden Bruchteile ΔW_s , ΔW_w , ΔW_T der Strahlungsmengen W_s , W_w , W_T vor dem Eintritt der Sonnenstrahlung in die Atmosphäre in Abzug zu bringen sind, hat man, wenn man die Grössen ΔW_s , ΔW_w , ΔW_T in Prozenten der für den Wärmehaushalt der Erde zur Verwendung gelangenden Strahlung ausdrücken will, die in Tabelle XIII mitgeteilten Zahlen mit $\frac{5}{3}$ zu multiplizieren, wodurch die Aenderungen der Ekliptikschiefe zu einer höheren Bedeutung gelangen. Diese Aenderungen machen sich, wie aus der Tabelle XIII ersichtlich, besonders fühlbar an den hohen Breiten der Erde. Hier liegt aber der erwähnte durch Reflexionen erlittene Verlust der in die Atmosphäre eindringenden Strahlung wegen des schiefen Auffallen derselben über dem oben angegebenen Durchschnittswert von 40 Prozent, wodurch die Wirkung der Aenderungen der Ekliptikschiefe noch deutlicher zum Ausdruck gelangt.

Die bisherigen Ergebnisse ermöglichen, einen allgemeinen Ueberblick über den Verlauf des säkularen Ganges der Erdbestrahlung zu gewinnen. Ziehen wir zu diesem Zwecke zuerst die säkularen Aenderungen der Strahlungsmengen W_s , W_w , W_T in Betracht. In den Formeln (100) bis (104), durch welche diese Grössen mathematisch veranschaulicht sind, sind von den säkular veränderlichen astronomischen Elementen e , ϵ , Π , nur die ersten zwei enthalten. Dabei kommt die Exzentrizität e der Erdbahn nur im Faktor $\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}$ vor. Berücksichtigt man, dass e während des Zeitraumes der geologischen Vorzeit, auf den sich meine Untersuchungen beziehen werden, zwischen den Grenzen 0,0051 und 0,0475 schwankt, so findet man, dass sich die Grössen W_s , W_w , W_T durch die Veränderlichkeit von e gegenüber ihrem gegenwärtigen Wert nur um 0,013 Prozent vermindern und um 0,099 Prozent erhöhen können. Diese Aenderungen sind derart geringfügig, dass man sagen kann: Die halbjährigen und die ganzjährigen Strahlungsmengen W_s , W_w , W_T werden nur durch die Aenderungen der Ekliptikschiefe merklich getroffen.

Wie die Aenderungen der Ekliptikschiefe ϵ in den Grössen W_s , W_w , W_T und an den verschiedenen Breiten zum Ausdruck gelangen, ist, wie bereits gesagt, aus den Tabellen XII und XIII zu ersehen. Eine Zunahme der Ekliptikschiefe vermindert die jährlichen Bestrahlungen W_T der äquatorialen Gegenden und vergrössert jene der polaren, d. h. sie vermindert die geographischen Gegensätze zwischen dem Aequator und den Polen. Es lässt sich berechnen, dass bei einer Schiefe von 54° diese Gegensätze vollständig verschwinden in dem Sinne, dass die jährliche Be-

strahlung der Pole gleich derjenigen des Aequators wird. Eine Abnahme der Ekliptikschiefe hat die entgegengesetzte Wirkung, sie verschärft die geographischen Gegensätze, die bei verschwindender Ekliptikschiefe ihr Maximum erreichen, weil dann die beiden Pole während des ganzen Jahres unbestrahlt bleiben.

Hinsichtlich der Grössen W_s und W_w ist noch folgendes zu sagen. Sieht man von dem tropischen Gürtel zwischen $11^{\circ}23'$ nördlich und südlich ab, an dem auch keine ausgeprägten Gegensätze zwischen Sommer und Winter existieren, so ist die Zunahme der Ekliptikschiefe mit einer Vergrösserung der sommerlichen Strahlungsmengen W_s und mit einer Verminderung der winterlichen Strahlungsmengen W_w verbunden. Anders gesprochen: die Zunahme der Ekliptikschiefe verschärft die Gegensätze zwischen Sommer und Winter, die Abnahme der Ekliptikschiefe mildert sie ab. Bei verschwindender Ekliptikschiefe hätte man überhaupt keine Jahreszeiten mehr.

Das bisherige in einem Satz zusammenfassend, kann behauptet werden: Eine Zunahme der Ekliptikschiefe vermindert die geographischen und verschärft die jahreszeitlichen Gegensätze der Erdbestrahlung.

Aus (99) folgt, dass sich die Aenderungen der Ekliptikschiefe auf beiden Hemisphären der Erde in ganz gleicher Weise fühlbar machen, d. h. die obigen Gegensätze werden auf beiden Hemisphären zu gleicher Zeit vermindert bzw. verstärkt.

Wie die Aenderungen der Ekliptikschiefe während der letzverflossenen Million von Jahren verlaufen sind, ist aus der Tabelle VIII deutlich ersichtlich. Nach dem darin vorkommenden ersten Maximum der Ekliptikschiefe, das im Jahrtausend 980 stattfand, bis inklusive dem letzten, das im Jahrtausend 10 vor der Gegenwart erreicht wurde, hat die Schiefe der Ekliptik 24 solcher Maxima und ebensoviel Minima erreicht. Der zeitliche Abstand zwischen zwei aufeinander folgenden Maxima betrug fast durchwegs rund 40 Jahrtausende, sank einmal auf fast 38 und erreichte zweimal die Länge von 45 Jahrtausenden. Der Rhythmus der Schwankungen der Ekliptikschiefe war also ein ziemlich regelmässiger, nicht so die Amplitude der Schwankungen. Das grösste der Maxima betrug $24^{\circ}28'$, das kleinste $23^{\circ}40'$; das kleinste der Minima $22^{\circ}0'$, das grösste $22^{\circ}57'$. Der deutlich oszillatorische Charakter der Aenderungen der Ekliptikschiefe blieb dabei unverkennbar.

Wenn bloss diese Aenderungen der Ekliptikschiefe im Spiele wären, würden bei jedem Maximum der Ekliptikschiefe die geographischen Gegensätze auf beiden Hemisphären ihr Minimum, die jahreszeitlichen ihr Maximum erreicht haben, das entgegengesetzte bei jedem Minimum der Ekliptikschiefe stattfinden. Diese Erscheinungen würden sich im verschieden starken Ausmasse alle 20 Jahrtausende abwechselnd wiederholen, wenn nicht die Veränderlichkeit der übrigen zwei astronomischen Elemente dazwischenträte.

Die wichtigsten Merkmale des Bestrahlungszustandes der Erde sind durch die den einzelnen Breiten zugestrahlten Wärmemengen W_s und W_w nicht erschöpft, es kommt auch darauf an, während welcher Zeitintervalle diese Mengen zugestrahlt werden. Diese Zeitintervalle, das astronomische Sommerhalbjahr und das astronomische Winterhalbjahr, sind, wie dies aus den Gleichungen (88), (89), (111) folgt, Funktionen der zwei übrigen astronomischen Elemente, der Exzentrizität e der

Erdbahn und der Länge Π_γ des Perihels. Aus den erwähnten Gleichungen folgt die Formel:

$$(125) \quad T_s - T_w = \frac{4T}{\pi} e \sin \Pi_\gamma,$$

durch die die Differenz der astronomischen Jahreszeiten T_s und T_w veranschaulicht erscheint. Um einen ersten Einblick in die säkularen Aenderungen dieser Grösse zu gewinnen, ziehen wir abermals die Tabelle VIII zu Rate. Aus derselben ist vor allem ersichtlich, dass während des durch die Jahrtausende 986,2 und 06 vor der Gegenwart gekennzeichneten Zeitintervalles die Länge Π_γ des Perihels um $47 \times 360^\circ$, d. h. während einer Zeitspanne von durchschnittlich 21.00 Jahren um 360° zugenommen hat. Diese Zunahme war aber nicht gleichmässig, die Perihellänge nahm manchmal schon während der Zeitspanne von 16,3 Jahrtausenden, mitunter erst während einer solchen von 258 Jahrtausenden um 360° zu. Diese Unregelmässigkeiten in der Zunahme der Perihellänge haben ihren Ursprung im folgenden.

Die Gleichung (112) lehrt, dass die Länge Π_γ des Perihels in bezug auf den jeweiligen Frühlingspunkt gleich ist der Länge Π des Perihels in bezug auf den fixen Frühlingspunkt und der allgemeinen Präzession Ψ' .

Die allgemeine Präzession unterscheidet sich von dem permanenten Bestandteil der lunisolaren Präzession durch die periodischen Glieder, die von den Schwankungen der Erdbahnebene und der Erdachse herrühren. Diese periodischen Glieder sind recht klein, so dass man, ohne die Genauigkeit der Rechnung des säkularen Ganges der Erdbestrahlung wesentlich einzuschränken, die allgemeine Präzession als der Zeit proportional annehmen könnte. Die erwähnten und aus der Tabelle VIII ersichtlichen Unregelmässigkeiten in der Zunahme der Grösse Π_γ rühren von dem Gliede Π der Gleichung (112) her. Die säkularen Aenderungen der Grösse Π , die durch die Gleichungen (113) gegeben sind, weisen einen ziemlich unregelmässigen Verlauf auf, wie dies aus den Berechnungen von Leverrier-Michkovitch bzw. Stockwell-Pilgrim folgt und auch aus einer graphischen Veranschaulichung dieser Aenderungen, die Charlier¹⁾ geliefert hat, ersichtlich ist. Wie bereits im § 82 erwähnt, eilt die grosse Achse der Erdbahnellipse der Frühlingslage der Erde entgegen, weshalb der Umlauf derselben um die Erdbahn nicht 26.000 Jahre, sondern weniger erfordert. Dies gilt mit kurzen Unterbrechungen für das Zeitintervall, auf das sich die bisherigen Berechnungen der säkularen Aenderungen der Grösse Π erstrecken. Ob dies auch für alle Zeiten gültig ist, d. h. ob das Perihel der Erdbahn die im § 22 besprochene mittlere Bewegung besitze, ist eine offene Frage, weil keiner der Koeffizienten N_1, N_2, \dots, N_n der Gleichungen (113) seinem absoluten Werte nach die Summe der absoluten Werte der übrigen Koeffizienten übersteigt.

Auch die säkularen Aenderungen der Exzentrizität e der Erdbahn sind bei weitem nicht so regelmässig wie jene der Schiefe der Ekliptik. Sie weisen zwar, wie dies aus der Tabelle VIII und dem der Pilgrimschen Abhandlung beigefügten

1) Charlier C. V. L., Contributions to the astronomical theory of an ice age. Meddelanden fran Lunds Astronomiska Observatorium, Serie II. Nr. 3. 1901.

Graphikon folgt, ebenfalls einen oszillatorischen Charakter auf, doch sind die Perioden und Amplituden der einzelnen Oszillationen recht verschieden. Nach dem ersten in der Tabelle VIII vorkommenden Maximum der Exzentrizität der Erdbahn, das im Jahrtausend 935 stattfand, folgten bis zum Jahrtausend 15 vor der Gegenwart 10 weitere Maxima, so dass die durchschnittliche Periode dieser Oszillationen 92 Jahrtausende betrug; die tatsächlichen Periode variierten zwischen 77 und 103 Jahrtausenden. Das grösste der erreichten Maxima betrug 0,0655, das kleinste 0,0221; das kleinste der Minima betrug 0,0018, das grösste 0,0199. Die mit der Formel (239) des ersten Abschnittes dieses Buches ermittelte obere Grenze der Exzentrizität der Erdbahn liegt nach den Berechnungen von Stockwell bei 0,067735, nach jenen von Michkovitch bei 0,063865.

Die soeben geschilderten säkularen Aenderungen der Elemente Π , und e machen sich im säkularen Gange der Erdbestrahlung folgenderweise geltend.

Schliesst man den Fall $e=0$ aus, weil er während der in Betracht zu ziehenden Spanne der geologischen Vorzeit nicht vorgekommen ist, dann verschwindet die Differenz $T_s - T_w$ nur wenn Π , gleich 0° oder 180° wird. Nimmt Π , von 0° bis 90° zu, so wird das Sommerhalbjahr der nördlichen Hemisphäre auf Kosten des Winterhalbjahres immer länger und länger, so dass, wenn man die Aenderungen der Ekliptikschiefe vorläufig ausser Acht lässt, die unveränderte Strahlungsmenge W_s auf immer längere und längere Zeitintervalle aufgeteilt wird und die durchschnittliche, pro Zeiteinheit berechnete, sommerliche Bestrahlung von Jahr zu Jahr abnimmt. Das umgekehrte gilt für den Winter; derselbe wird kürzer, seine durchschnittliche Bestrahlung intensiver. Dies gilt im gleichen Masse für alle Breiten der Hemisphäre.

Hat Π , den Wert von 90° erreicht, so ist die Länge des Sommerhalbjahres sehr nahe ihrem Maximum, das wegen der Veränderlichkeit von e nicht ganz genau mit Π , = 90° zusammenfällt, d. h. die durchschnittliche sommerliche Bestrahlung ist bis zu ihrem Minimum gesunken, die winterliche bis zu ihrem Maximum gestiegen. Die jahreszeitlichen Gegensätze sind auf ein Minimum gesunken.

Dies gilt aber nur für die nördliche Hemisphäre. Auf der südlichen Hemisphäre hat das Sommerhalbjahr, das mit dem Winterhalbjahr der nördlichen Hemisphäre zusammenfällt, sein Maximum erreicht, während die Quantitäten der Sonnenstrahlung \bar{W}_s , die den südlichen Breiten während dieses kurzen Sommers zugestrahlt werden, gleich jenen sind, welche die nördlichen Breiten während des langen nördlichen Sommers empfangen. Auf der südlichen Hemisphäre wird also der Sommer kurz und warm, der Winter lang und kalt. Zu den Zeiten, in welchen die jahreszeitlichen Gegensätze auf der nördlichen Hemisphäre ihre grösste Abmilderung erfahren, erreichen sie auf der südlichen ihre grösste Verschärfung.

Hat Π , den Wert von 180° erreicht, so sind die Jahreszeiten T_s und T_w einander gleich und die beiden Hemisphären sind gleichgestellt.

Bei Π , = 270° ist die Länge des nördlichen Sommerhalbjahres auf ein Minimum gesunken, jene des Winterhalbjahres hat ein Maximum erreicht; die jahreszeitlichen Gegensätze haben ihre grösste Verschärfung erfahren. Auf der südlichen Hemisphäre sind diese Gegensätze, bei einem langen, kühlen Sommer und kurzem, milden Winter, möglichst abgeschwächt.

Bei $\Pi_y = 360^\circ$ sind beide Hemisphären, bei gleichen Jahreszeiten T_s und T_w , vollkommen gleichgestellt und das Spiel beginnt in der oben beschriebenen Weise von neuem, mit dem Unterschied, dass wegen der Veränderlichkeit von e die jahreszeitlichen Gegensätze der nachfolgenden Periode, während welcher Π_y wieder von 0 bis 360° zumimmt, nicht jenen der vorhergehenden Periode gleich sein werden, sondern während des Zeitintervalles, während welchem e zunimmt, sich noch ausgesprochener verschärfen bzw. abmildern werden, um während der nachfolgender Zeitdauer, bei abnehmendem e etwas zu erlassen.

Die soeben geschilderten, von den Grössen e und Π_y herrührenden Aenderungen des jährlichen Bestrahlungsganges werden sich mit jenen durch die Variabilität der Grösse ε hervorgerufenen überlagern. Diese letzteren haben, wie gezeigt, eine andere Periode und machen sich auf beiden Hemisphären im gleichen Sinne, aber an verschiedenen Breiten in verschiedenem Masse fühlbar.

Durch die Ueberlagerung dieser beiden Arten der säkularen Aenderungen des jährlichen Bestrahlungsganges geht die einfache Gesetzmässigkeit verloren, die jeder dieser Arten eigen ist.

§ 87. Die kalorischen Jahreszeiten. Wie bereits aus den vorstehenden Ausführungen ersichtlich, ist der säkulare Gang der Erdbestrahlung ein überaus komplizierter, für jede geographische Breite ein anderer, und jener der südlichen Hemisphäre verschieden von jenem der nördlichen. Um diesen Gang mathematisch zu erfassen, hat man in der Sprache der Analysis zu beschreiben, wie die Variabilität der astronomischen Elemente ε , e , Π_y , die charakteristischen Züge des jährlichen Ganges der Bestrahlung der einzelnen Breiten im Laufe der Jahrtausende nach und nach verändert hat. Ziehen wir zu diesem Zwecke den gegenwärtigen jährlichen Gang der Bestrahlung einer beliebigen, sagen wir nördlichen, geographischen Breite φ in Betracht. Eine augenscheinliche graphische Veranschaulichung des jährlichen Bestrahlungsganges dieser Breite wird erhalten, wenn man die durchschnittliche Bestrahlung w der Flächeneinheit an dieser Breite als Funktion der Zeit darstellt. Dies sei durch die beiliegende Fig. 42 geschehen.

In dieser Figur ist die Abszissenachse als Zeitskala benützt, während man die den einzelnen Zeitpunkten zugehörigen Bestrahlungen w als Ordinaten aufgetragen hat. Die Endpunkte dieser Ordinaten liegen auf der wellenförmigen Linie $PF G H K S F'$, die den jährlichen Gang der Bestrahlung der Breite φ veranschaulicht. Die Zeitpunkte des Frühlingsäquinoktiums, des Sommersolstitiums, des Herbstäquinoktiums, des Wintersolstitiums und des nachfolgenden Frühlingsäquinoktiums seien der Reihe nach mit I, II, III, IV und I' gekennzeichnet. Es stellt also die Strecke I III die Länge T_s des astronomischen Sommerhalbjahres, die Strecke III I' die Länge T_w des astronomischen Winterhalbjahres dar. Die auf diese Strecken sich beziehenden Integrale der Funktion $w(t)$, d. h. die Flächen $IIIIHQGF I$ und $III I' F' S K H III$ stellen die dem Sommerhalbjahr bzw. dem Winterhalbjahr zugehörigen Strahlungsmengen W_s und W_w dar.

In einem beliebigen Jahre der geologischen Vorzeit war der jährliche Bestrahlungsgang der in Betracht gezogenen Breite der Erdoberfläche wegen der Veränderlichkeit der astronomischen Elemente ein anderer als gegenwärtig. Die Strah-

lungsextreme erreichten damals andere Werte als jetzt, auch waren sowohl die Strahlungsmengen W_s und W_w als auch die Längen T_s und T_w der Jahreszeiten andere

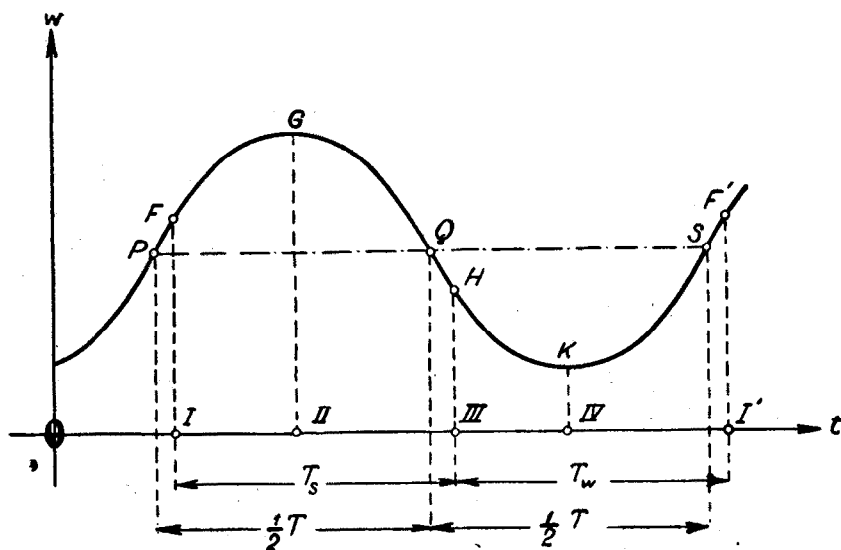


Fig. 42

als heutzutage. Es bereitet keine Schwierigkeit, die Grössen W_s , W_w , T_s , T_w für ein beliebiges Jahr der geologischen Vorzeit, auf die sich die vorstehend mitgeteilten Tabellen VIII und IX beziehen, für jede geographische Breite exakt zu berechnen. Bezeichnen W_s^0 und W_w^0 die der Gegenwart entsprechenden Werte der Grössen W_s und W_w , so ist nach dem im § 85 mitgeteilten:

$$(126) \quad \begin{cases} W_s = W_s^0 + \Delta W_s \cdot \Delta \varepsilon \\ W_w = W_w^0 + \Delta W_w \cdot \Delta \varepsilon. \end{cases}$$

Dabei ist

$$(127) \quad \Delta \varepsilon = \varepsilon - \varepsilon_0,$$

worin ε_0 den gegenwärtigen Wert der Ekliptikschiefe bedeutet und ε jenen, der dem in Betracht gezogenen Zeitpunkte der geologischen Vorzeit entspricht. Die Grössen W_s^0 , W_w^0 sind der Tabelle XI, die Grössen ΔW_s , ΔW_w der Tabelle XII, die Grösse $\Delta \varepsilon$ der Tabelle VIII oder IX zu entnehmen.

Setzt man (111) in (88) ein, so bekommt man:

$$(128) \quad \begin{cases} T_s = \frac{1}{2} T \left(1 + \frac{4e}{\pi} \sin \Pi_\gamma \right) \\ T_w = \frac{1}{2} T \left(1 - \frac{4e}{\pi} \sin \Pi_\gamma \right), \end{cases}$$

mittels welcher Formeln man mit Benützung der Tabelle VIII oder IX die dem in Betracht gezogenen Jahre der geologischen Vorzeit zugehörigen Längen T_s und T_w des astronomischen Sommer- bzw. Winterhalbjahres berechnen kann.

Eine Gegenüberstellung der auf die Gegenwart und das in Betracht gezogene Jahr der geologischen Vorzeit sich beziehenden Grössen W_s , W_w , T_s , T_w lässt zwar die säkularen Veränderungen dieser Grössen erkennen, aber ein rationeller Vergleich derselben ist nicht möglich, weil die dabei auftretenden vier Strahlungsmengen vier verschiedenen Zeitintervallen zugehörig sind. Der einst von mir in meiner „Théorie mathématique“ unternommene Versuch, diesen Vergleich durch die Berechnung der Ausdrücke:

$$(129) \quad w_s = \frac{W_s}{T_s} \quad w_w = \frac{W_w}{T_w}$$

durchzuführen, führte nur halbwegs dem Ziele entgegen und zwar aus folgendem Grunde.

Die Grössen w_s und w_w stellen, wie sofort ersichtlich, jene Strahlungsmengen dar, die während des astronomischen Sommer- bzw. Winterhalbjahres der in Betracht gezogenen Breite durchschnittlich pro Zeit- und Flächeneinheit zugestrahlt werden. Hat man die numerischen Werte dieser durchschnittlichen Bestrahlungen sowohl für die Gegenwart als auch für die Vorzeit ermittelt, so kann der Schluss gezogen werden, ob während des in Betracht gezogenen Jahres der Vorzeit die astronomischen Halbjahre sich einer stärkeren oder schwächeren durchschnittlichen Bestrahlung erfreuten als gegenwärtig: dabei wird, wohlgemerkt, von der Dauer dieser Halbjahre nicht gesprochen, sie kommt in den Werten w_s und w_w nicht zum entsprechenden Ausdruck. Ein Beispiel möge dies deutlicher erklären. Für die beiden nachfolgenden, im Bereich der Möglichkeit liegenden Kombinationen der astronomischen Elemente und zwar für

$$\varepsilon = 21^\circ 58' \quad \Pi_\gamma = 270^\circ \quad e = 0,0606$$

$$\varepsilon = 24^\circ 34' \quad \Pi_\gamma = 90^\circ \quad e = 0,0606$$

bekommt man für 66° nördlichen Breite gleiche durchschnittliche winterliche Bestrahlungen w_w , aber bei der ersten Kombination ein um volle 28 Tage längeres Winterhalbjahr als bei der zweiten. Es ist klar, dass diese beiden Bestrahlungszustände, trotzdem sie dasselbe w_w aufweisen, verschieden sind.

Um die während der einzelnen Jahre der Vorzeit vor sich gehenden Bestrahlungen der verschiedenen Breiten der Erde untereinander exakt vergleichen zu können, musste ein anderer Weg gesucht werden, den ich erst nach der Veröffentlichung meiner „Théorie mathématique“ gefunden, anlässlich der Berechnungen für das Köppen-Wegenersche Werk zuerst benützt und in meinen späteren Veröffentlichungen weiter ausgebaut habe. Um diesen Weg zu zeigen, besichtigen wir die Tabelle V und kehren wir zur Fig. 42 zurück. Aus jener Tabelle ist vor allem ersichtlich, dass die Äquinoktialbestrahlungen, d. h. die den Sonnenlängen 0° und 180° entsprechenden täglichen Strahlungsmengen, also wegen (77) auch die durchschnittlichen Bestrahlungen einer beliebigen geographischen Breite φ nicht einander gleich sind, wie dies auch durch die den Punkten I und III der Zeitskala zugehörigen Ordinaten IF und $IIIH$ der Fig. 42 sinnfällig veranschaulicht erscheint. Die täglichen Strahlungsmengen zur Zeit des Frühlingsäquinoktiums sind gegenwärtig um 1,4 Prozent grösser als jene zur Zeit des Herbstäquinoktiums. Dies rührt davon her, dass die Quadrate der Entfernungen der Erde von der Sonne zu diesen zwei Zeiten im Verhältnis 1:1,014 zueinander stehen, und in diesem Verhältnis nimmt die Intensität der Sonnenstrahlung mit der Entfernung ab. Dieser gegenwärtig geringe Unterschied kann durch die Veränderlichkeit der astronomischen Elemente gross werden. Fällt die Lage der Erde zur Zeit des Frühlingsäquinoktiums bei maximaler Exzentrizität der Erdbahn $e = 0,0677$ mit der Perihellage zusammen, so wird jenes Verhältnis gleich 1:1,312, d. h. in einem solchen Falle sind die täglichen Bestrahlungen zur Zeit des Frühlingsäquinoktiums um 31,2 Prozent grösser als zur Zeit des Herbstäquinoktiums. Diese Ungleichheit hat zur Folge, dass sich die letzten Tage des astronomischen Winters einer stärkeren Bestrahlung erfreuen als die letzten Tage des astronomischen Sommers.

Es ist bereits im § 79 mitgeteilt, dass der Unterschied zwischen dem astronomischen Sommerhalbjahr und dem astronomischen Winterhalbjahr gegenwärtig 7 Tage 14 Stunden beträgt. Dieser Unterschied kann infolge der Variabilität der astronomischen Elemente den Betrag von ± 31 Tagen 20 Stunden erreichen. Dies alles muss berücksichtigt werden, wenn man einen früheren Bestrahlungszustand der Erde mit dem gegenwärtigen vergleichen will.

Aus dem soeben gesagten und aus der Fig. 42 folgt, dass die astronomischen Halbjahre T_s und T_w das Jahr keinesfalls in ein Intervall der stärkeren Bestrahlung und in ein solches der schwächeren Bestrahlung gliedern, weil, wie die angeführten Beispiele lehrten, die Bestrahlung im Endintervalle des Sommerhalbjahres geringen war als jene zu Ende des Winterhalbjahres. Dies rührt davon her, dass die Gliederung des Jahres in astronomische Jahreszeiten nach dem alleinigen Kriterium der Dauer des Tages durchgeführt erscheint, aber nicht nach dem Kriterium der Stärke der Bestrahlung. Während beim ersten Kriterium nur die Deklination der Sonne massgebend ist, hängt die Stärke der Bestrahlung auch von der augenblicklichen Entfernung der Erde von der Sonne ab. Aus diesem Grunde weisen die astronomischen Jahreszeiten, die überdies eine ungleiche Dauer besitzen, keinen innigen Zusammenhang mit der Erdbestrahlung auf. Die Längen dieser Intervalle, als auch die Ungleichheiten der Erdbestrahlung an den Enden derselben ändern sich fortwährend. Dies ist die Ursache, warum man mit Hilfe der astrono-

mischen Jahreszeiten keinen tieferen Einblick in den vorzeitlichen Gang der Erdbestrahlung gewinnen kann.

Alle soeben geschilderten Schwierigkeiten werden mit einem Schlage beseitigt, wenn man das Jahr in zwei gleich lange, also wirkliche Halbjahre zergliedert, von denen das eine alle jene Tage des Jahres umfasst, während welcher die Bestrahlung der in Betracht gezogenen Breite stärker ist als an irgend einem Tage des anderen Halbjahres. Durch die vorstehende Forderung ist das Problem, wie die Zergliederung des Jahres in solche Halbjahre zu erfolgen hat, eindeutig formuliert. Ich werde im nächsten Paragraphen die analytische Lösung dieses Problems liefern, eine geometrische Lösung liefert die folgende, an die Fig. 42 sich anschließende Ueberlegung. Es ist jene zur Abszissenachse parallele Gerade PQS zu ermitteln, welche die Kurve der Bestrahlung derart schneidet, dass die Abschnitte PQ und QS einander gleich werden. Diese beiden Abschnitte stellen dann offenbar jene beiden Abschnitte des Jahres dar, die der soeben gestellten Forderung genügen.

Diese beiden Zeitintervalle habe ich die „kalorischen Halbjahre“ benannt; jenes Halbjahr, das alle Tage der stärkeren Bestrahlung umfasst, sich also der grösstmöglichen Strahlungsmenge erfreut, heisst das kalorische Sommerhalbjahr, das andere das kalorische Winterhalbjahr.

Es ist bereits im ersten Abschnitt dieses Buches bewiesen worden, dass weder die grosse Halbachse der Erdbahn noch die Umlaufzeit der Erde um die Sonne säkularen Aenderungen unterliegen, so dass das siderische Jahr und — wenn man vernachlässigbare, das Ausmass von einigen Sekunden nicht überschreitende Variationen ausser Acht lässt — das tropische Jahr ihre Längen im Laufe der Zeiten unverändert bewahren. Deshalb haben auch die kalorischen Halbjahre stets dieselbe Dauer von 182 Tagen, 14 Stunden und 54 Minuten.

Die kalorischen Halbjahre geben uns das Mittel in die Hand, den säkularen Gang der Erdbestrahlung exakt zu verfolgen. Denn hat man den Beginn und das Ende der kalorischen Halbjahre ermittelt, so kann man auch die Strahlungsmengen berechnen, die während dieser Halbjahre der in Betracht gezogenen geographischen Breite zugestrahlt werden. Hat man diese Berechnung sowohl für die Gegenwart als auch für das in Betracht gezogene Jahr der Vorzeit durchgeführt, dann können die erhaltenen Resultate direkt untereinander verglichen werden, weil sie sich alle auf gleiche und unveränderliche Zeitintervalle beziehen.

Diese durch Einführung der kalorischen Jahreszeiten gefundene Lösung bringt, wie es bei vollständigen Lösungen neuer Probleme oft der Fall ist, mehr als man anfangs erwartet hatte, sie liefert nicht nur eine exakte mathematische Darstellung des säkularen Ganges der Erdbestrahlung, sondern ermöglicht, wie noch gezeigt werden wird, die mathematische Erfassung des wichtigsten Effektes dieses Bestrahlungsganges, der säkularen Verschiebungen der Schneegrenze.

§ 88. Die den kalorischen Jahreszeiten der einzelnen Breiten zugehörigen Zeitintervalle. Bezeichnet t_1 den Zeitpunkt des Beginnes des kalorischen Sommerhalbjahres, t_2 den Zeitpunkt des Beginnes des kalorischen Winterhalbjahres und T die Länge des tropischen Jahres, so ist das im vorstehenden Paragraphen geometrisch formulierte Kriterium der kalorischen Jahreszeiten durch die folgenden zwei Gleichungen analytisch ausgedrückt:

$$(130) \quad t_2 = t_1 + \frac{T}{2}$$

$$(131) \quad w(t_2) = w(t_1),$$

worin w die mittlere, pro Zeiteinheit und Flächeneinheit berechnete Bestrahlung der in Betracht gezogenen geographischen Breite bedeutet.

Dieses Kriterium ist noch einer weiteren Deutung zugänglich. Sind Q_s und Q_w die der in Betracht gezogenen geographischen Breite während des kalorischen Sommerhalbjahres bzw. während des kalorischen Winterhalbjahres zugestrahlten Wärmemengen, so ist:

$$(132) \quad Q_1 = \int_{t_1}^{t_2} w(t) dt \quad Q_w = \int_{t_2}^{t_1+T} w(t) dt$$

oder wegen (130)

$$(133) \quad Q_s = \int_{t_1}^{t_1 + \frac{T}{2}} w(t) dt \quad Q_w = \int_{t_1 + \frac{T}{2}}^{t_1 + T} w(t) dt.$$

Bildet man die Ableitungen der vorstehenden Ausdrücke nach t_1 , so erhält man:

$$(134) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dQ_s}{dt_1} = w\left(t_1 + \frac{T}{2}\right) - w(t_1) \\ \frac{dQ_w}{dt_1} = w(t_1 + T) - w\left(t_1 + \frac{T}{2}\right). \end{array} \right.$$

Die im Verlauf von einem Jahre stattgefundenen säkularen Aenderungen der Grösse $w(t)$ sind verschwindend klein, und es ist deshalb:

$$(135) \quad w(t_1 + T) = w(t_1).$$

Setzt man dies und (130) in (134) ein, so bekommt man:

$$(136) \quad \begin{cases} \frac{dQ_s}{dt_1} = w(t_2) - w(t_1) \\ \frac{dQ_w}{dt_1} = w(t_1) - w(t_2), \end{cases}$$

d. h. wegen (131)

$$(137) \quad \frac{dQ_s}{dt_1} = 0 \quad \frac{dQ_w}{dt_1} = 0.$$

Differenziert man die Ausdrücke (136) nach t_1 und berücksichtigt, dass wegen (130), worin T eine Konstante bedeutet, $dt_1 = dt_2$ ist, so erhält man:

$$(138) \quad \begin{cases} \frac{d^2 Q_s}{dt_1^2} = \frac{d}{dt_2} w(t_2) - \frac{d}{dt_1} w(t_1) \\ \frac{d^2 Q_w}{dt_1^2} = \frac{d}{dt_1} w(t_1) - \frac{d}{dt_2} w(t_2). \end{cases}$$

Aus der Tabelle V und der Fig. 37 ist ersichtlich, dass mit Ausnahme eines um den Aequator liegenden schmalen Streifens, über den später die Rede sein wird, zu Beginn des zugehörigen astronomischen Halbjahres die Bestrahlung $w(t)$ im Aufstieg, und zu Beginn des astronomischen Winterhalbjahres im Abstieg ist. Es wird sich aus den nachfolgenden Untersuchungen ferner ergeben, dass der Beginn t_1 des kalorischen Sommerhalbjahres dem Frühlingsäquinoktium, der Beginn t_2 des kalorischen Winterhalbjahres dem Herbstäquinoktium benachbart ist. Es ist deshalb für die in Rede stehenden Breiten:

$$\frac{d}{dt_1} w(t_1) > 0 \quad \frac{d}{dt_2} w(t_2) < 0,$$

d. h. wegen (138)

$$(139) \quad \frac{d^2 Q_s}{dt_1^2} < 0 \quad \frac{d^2 Q_w}{dt_1^2} > 0.$$

Die Gleichungen (137) und die Ungleichungen (139) besagen folgendes. Die Zeitgrenzen t_1 , t_2 der kalorischen Jahreszeiten erfüllen die Forderung, dass die dem kalorischen Sommerhalbjahr zugehörige Strahlungsmenge Q_s ihr Maximum,

die dem kalorischen Winterhalbjahr zugehörige Strahlungsmenge Q_w ihr Minimum erreiche.

Um Beginn und Ende der kalorischen Jahreszeiten zu ermitteln, kann man, wie es sich erweisen wird, mit Vorteil statt der Zeitpunkte t_1 und t_2 die denselben zugehörigen Längen der Sonne in Rechnung setzen. Ist also λ_1 die Länge der Sonne zu Beginn des kalorischen Sommerhalbjahres und λ_2 jene zu Beginn des kalorischen Winterhalbjahres und stellt man die Grösse w als Funktion der Länge λ der Sonne dar, was wegen (76) und (111) durch den Ausdruck:

$$(140) \quad w(\lambda) = \frac{J_0}{\pi} [1 - 2e \cos(\Pi_\gamma - \lambda)] (b_0 + \frac{\pi}{2} \sin \varphi \sin \varepsilon \sin \lambda - \\ - b_1 \cos 2\lambda + b_2 \cos 4\lambda - b_3 \cos 6\lambda + \dots)$$

bewerkstelligt erscheint, so ist wegen (131)

$$(141) \quad w(\lambda_1) = w(\lambda_2).$$

Es folgt aus den vorstehenden zwei Gleichungen:

$$(142) \quad [1 - 2e \cos(\Pi_\gamma - \lambda_1)] (b_0 + \frac{\pi}{2} \sin \varphi \sin \varepsilon \sin \lambda_1 - b_1 \cos 2\lambda_1 + b_2 \cos 4\lambda_1 - \\ - b_3 \cos 6\lambda_1 + \dots) = [1 - 2e \cos(\Pi_\gamma - \lambda_2)] (b_0 + \frac{\pi}{2} \sin \varphi \sin \varepsilon \sin \lambda_2 - \\ - b_1 \cos 2\lambda_2 + b_2 \cos 4\lambda_2 - b_3 \cos 6\lambda_2 + \dots),$$

welcher Gleichung die Längen λ_1 und λ_2 zu genügen haben.

Die zweite Bedingung, welche die Grössen λ_1 und λ_2 erfüllen müssen, liefert die Gleichung (130), in der statt t_1 und t_2 die zugehörigen Längen λ_1 und λ_2 einzuführen sind. Um dies zu bewerkstelligen, ist zu berücksichtigen, dass wegen der ständig kleinen Exzentrizität e der Erdbahn ihr Quadrat neben der Einheit vernachlässigt werden kann, so dass die Gleichungen (80), (75) und (111) die folgenden Gleichungen liefern:

$$(143) \quad dt = \frac{T}{2\pi} e^2 d\lambda$$

$$(144) \quad \varrho = \frac{1}{1 - e \cos (\Pi_\gamma - \lambda)}.$$

Setzt man (144) in (143) ein und vernachlässigt wieder das Quadrat von e , so bekommt man:

$$dt = \frac{T}{2\pi} [1 + 2e \cos (\Pi_\gamma - \lambda)] d\lambda.$$

Die Zeit, welche verfließt, während die Sonne das Intervall λ_1 bis λ_2 ihrer scheinbaren Bahn zurücklegt, muss nach (130) gleich $\frac{1}{2} T$ sein. Es ist also:

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} dt = \frac{T}{2\pi} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} [1 + 2e \cos (\Pi_\gamma - \lambda)] d\lambda = \frac{T}{2}.$$

Führt man die obige Integration durch, so erhält man:

$$(145) \quad \lambda_2 - \lambda_1 - 2e \sin (\Pi_\gamma - \lambda_2) + 2e \sin (\Pi_\gamma - \lambda_1) = \pi.$$

Aus den Gleichungen (142) und (145) können die Grössen λ_1 und λ_2 mit der erforderlichen Genauigkeit ermittelt werden.

§ 89. Die während der kalorischen Jahreszeiten den einzelnen Breiten zugestrahlten Wärmemengen. Im § 78 sind Formeln abgeleitet worden, durch welche die den einzelnen Breiten während beliebiger Zeitabschnitte des Jahres zugestrahlten Wärmemengen veranschaulicht sind. Es sind dies die Formeln (83) und (84), von denen die zweite für das Intervall des ständigen Tages, sonst aber die erste anzuwenden ist. Durch diese Formeln ist die während der Zurücklegung des Bahnintervalles λ' bis λ'' durch die Sonne der in Betracht gezogenen geographischen Breite zugestrahlte Wärmemenge als Funktion von λ' und λ'' gegeben, so dass sie durch den Ausdruck

$$(146) \quad W = W(\lambda', \lambda'')$$

dargestellt erscheint. Weil dem kalorischen Sommerhalbjahr die Grenzen $\lambda' = \lambda_1$; $\lambda'' = \lambda_2$, dem kalorischen Winterhalbjahr die Grenzen $\lambda' = \lambda_2$; $\lambda'' = 2\pi + \lambda_1$ entsprechen, sind die während dieser kalorischen Halbjahre zugestrahlten Wärmemengen durch die Ausdrücke veranschaulicht:

$$(147) \quad \begin{cases} Q_s = W(\lambda_1, \lambda_2) \\ Q_w = W(\lambda_2, 2\pi + \lambda_1). \end{cases}$$

Weil durch die Gleichungen (142) und (145) die Grössen λ_1 und λ_2 gegeben sind und W eine bereits ermittelte Funktion ist, so sind dadurch auch die Grössen Q_s und Q_w , analytisch gegeben. Die numerische Ausrechnung der Grössen Q_s und Q_w , die ich im sechsten Abschnitt dieses Buches für 173 Zeitpunkte der geologischen Vorzeit und für 16 verschiedene geographische Breiten durchzuführen haben werde, würde bei Benützung der soeben angegebenen Formeln auf riesige Schwierigkeiten stossen, weil man 2768 Gleichungspaare von der Form (142) und (145) aufzulösen hätte, um zuerst die Grenzen λ_1 und λ_2 zu ermitteln und sie dann in die Formeln (83) und (84) zu stellen, wobei noch die säkularen Aenderungen der Grössen e , ε , Π_γ und b_0 , b_1 , $b_2 \dots$ zu berücksichtigen wären. Diese kaum zu bewältigende Arbeit kann jedoch durch einige mit dem geforderten Genauigkeitsgrad der Rechnung verträgliche Vereinfachungen wesentlich erleichtert werden; diese bestehen in folgendem.

Führt man die Substitution durch:

$$(148) \quad \lambda_1 = \lambda' \quad \lambda_2 = \pi - \lambda'',$$

so erhält man statt (147)

$$(149) \quad \begin{cases} Q_s = W(\lambda', \pi - \lambda'') \\ Q_w = W(\pi - \lambda'', 2\pi + \lambda') \end{cases}$$

und statt (142) und (145)

$$(150) \quad [1 - 2e \cos(\Pi_\gamma - \lambda')] (b_0 + \frac{\pi}{2} \sin \varphi \sin \varepsilon \sin \lambda' - b_1 \cos 2\lambda' + b_2 \cos 4\lambda' - b_3 \cos 6\lambda' + \dots) = [1 + 2e \cos(\Pi_\gamma + \lambda'')] (b_0 + \frac{\pi}{2} \sin \varphi \sin \varepsilon \sin \lambda'' - b_1 \cos 2\lambda'' + b_2 \cos 4\lambda'' - b_3 \cos 6\lambda'' + \dots)$$

$$(151) \quad \lambda' + \lambda'' = 2e [\sin(\Pi_\gamma - \lambda') + \sin(\Pi_\gamma + \lambda'')].$$

Für $e = 0$ würde die Gleichung (150) $\lambda' = \lambda''$, und die Gleichung (151) $\lambda' + \lambda'' = 0$ ergeben. Es ist also:

$$(152) \quad \lim_{e=0} \lambda' = 0 \quad \lim_{e=0} \lambda'' = 0.$$

Weil nach (148)

$$(153) \quad \lambda' = \lambda_1 \quad \lambda'' = \pi - \lambda_2$$

ist, so bedeutet λ' die dem Beginn des kalorischen Sommerhalbjahres entsprechende, in der Richtung der jährlichen Bewegung und in Bogenmass gemessene Entfernung der Sonne vom Frühlingspunkte, λ'' aber die dem Beginn des kalorischen Winterhalbjahres entsprechende, in der entgegengesetzten Richtung gemessene Entfernung der Sonne vom Herbstpunkte. Die Gleichungen (152) besagen also, dass für $e=0$ der Beginn des kalorischen Sommerhalbjahres mit dem Frühlingsäquinoktium, der Beginn des kalorischen Winterhalbjahres mit dem Herbstäquinoktium zusammenfallen würde; das kalorische Sommerhalbjahr würde also mit dem astronomischen Sommerhalbjahr, das kalorische Winterhalbjahr mit dem astronomischen Winterhalbjahr sich decken. Dies folgt auch aus der Fig. 39. Wird $e=0$, dann degeneriert die durch diese Figur veranschaulichte Ellipse zu einem Kreis, die Sektoren $\gamma'A\gamma$ und $\gamma'P\gamma$ werden einander gleich, die Länge des astronomischen Sommerhalbjahres wird gleich jener des Winterhalbjahres und diese Halbjahre koinzidieren mit den kalorischen, weil jetzt in (31) und (32) nur die Deklination δ der Sonne als veränderlich zu betrachten ist.

Die Exzentrizität e der Erdbahn ist zwar nicht gleich Null, aber sie ist und bleibt, wie gezeigt worden ist, stets eine kleine Grösse. Es folgt deshalb aus (152), dass auch λ' und λ'' stets kleine Grössen sein werden. Dies ermöglicht uns, die zur Berechnung der Strahlungsmengen Q_s und Q_w erforderlichen Gleichungen wesentlich zu vereinfachen.

Die erste der Gleichungen (149) stellt nach (79) das auf das Intervall von λ' bis $\pi - \lambda''$ sich erstreckende Integral

$$(154) \quad Q_s = \int_{\lambda'}^{\pi - \lambda''} w \frac{dt}{d\lambda} d\lambda$$

dar.

Weil

$$(\pi - \lambda'') - \lambda' = (\pi - 0) - (\lambda' - 0) - [\pi - (\pi - \lambda'')]$$

ist, kann das Integrationsintervall von (154) in drei Teilintervalle:

$$(\lambda', \pi - \lambda'') = (0, \pi) - (0, \lambda') - (\pi - \lambda'', \pi),$$

also das Integral (154) in drei Integrale zergliedert werden:

$$Q_s = \int_0^{\pi} w \frac{dt}{d\lambda} d\lambda - \int_0^{\lambda'} w \frac{dt}{d\lambda} d\lambda - \int_{\pi-\lambda''}^{\pi} w \frac{dt}{d\lambda} d\lambda.$$

Es wird also mit Benützung der Schreibweise (149)

$$(155) \quad Q_s = W(0, \pi) - W(0, \lambda') - W(\pi - \lambda'', \pi).$$

Auf dieselbe Weise folgt, weil

$$(2\pi + \lambda') - (\pi - \lambda'') = (2\pi - \pi) + (\lambda' - 0) + [\pi - (\pi - \lambda'')]$$

ist, aus der zweiten der Gleichungen (149), die Gleichung:

$$(156) \quad Q_w = W(\pi, 2\pi) + W(0, \lambda') + W(\pi - \lambda'', \pi).$$

Nun bedeutet $W(0, \pi)$ nichts anderes als die der in Betracht gezogenen geographischen Breite während des astronomischen Sommerhalbjahres zugestrahlte Wärmemenge W_s , und $W(\pi, 2\pi)$ die während des astronomischen Winterhalbjahres zugestrahlte Wärmemenge W_w . Man erhält also statt (155) und (156)

$$(157) \quad \begin{cases} Q_s = W_s - W(0, \lambda') - W(\pi - \lambda'', \pi) \\ Q_w = W_w + W(0, \lambda') + W(\pi - \lambda'', \pi). \end{cases}$$

Führt man die Bezeichnung ein:

$$(158) \quad K = W(0, \lambda') + W(\pi - \lambda'', \pi),$$

so wird

$$(159) \quad \begin{cases} Q_s = W_s - K \\ Q_w = W_w + K. \end{cases}$$

Um die hier vorkommende Grösse K zu berechnen, hat man zu berücksichtigen, dass wegen der Kleinheit von λ' und λ'' die Intervalle $(0, \lambda')$ und $(\pi - \lambda'', \pi)$ ebenfalls klein und an den Frühlingspunkt bzw. Herbstpunkt anschliessend sind. Während dieser Intervalle ist also die Deklination δ der Sonne sehr klein und die Ungleichheit (57) erscheint wegen (43) bis in die ganz hohen geographischen Breiten befriedigt, d.h. die beiden Intervalle gehören für alle Breiten,

auf die ich meine Berechnung des säkularen Ganges der Erdbestrahlung erstrecken werde, dem Intervall des täglichen Aufganges und Unterganges der Sonne an. Deshalb ist bei der Berechnung von K die Formel (83) anzuwenden.

Weil nach dieser Formel

$$W(0, \lambda') = \frac{T}{2\pi^2} \cdot \frac{J_0}{\sqrt{1-e^2}} \left\{ b_0 \lambda' + \frac{\pi}{2} \sin \varepsilon \sin \varphi - \frac{\pi}{2} \sin \varepsilon \sin \varphi \cos \lambda' - \right. \\ \left. - \frac{b_1}{2} \sin 2\lambda' + \frac{b_2}{4} \sin 4\lambda' - \frac{b_3}{6} \sin 6\lambda' + \dots \right\}$$

$$W(\pi - \lambda'', \pi) = \frac{T}{2\pi^2} \cdot \frac{J_0}{\sqrt{1-e^2}} \left\{ b_0 \lambda'' + \frac{\pi}{2} \sin \varepsilon \sin \varphi - \frac{\pi}{2} \sin \varepsilon \sin \varphi \cos \lambda'' - \right. \\ \left. - \frac{b_1}{2} \sin 2\lambda'' + \frac{b_2}{4} \sin 4\lambda'' - \frac{b_3}{6} \sin 6\lambda'' + \dots \right\}$$

ist, so wird:

$$(160) \quad K = \frac{T}{2\pi^2} \cdot \frac{J_0}{\sqrt{1-e^2}} \left\{ b_0 (\lambda' + \lambda'') + \pi \sin \varepsilon \sin \varphi - \right. \\ \left. - \frac{\pi}{2} \sin \varepsilon \sin \varphi (\cos \lambda' + \cos \lambda'') - \frac{b_1}{2} (\sin 2\lambda' + \sin 2\lambda'') + \right. \\ \left. + \frac{b_2}{4} (\sin 4\lambda' + \sin 4\lambda'') - \frac{b_3}{6} (\sin 6\lambda' + \sin 6\lambda'') + \dots \right\}.$$

Weil, wie gesagt, λ' und λ'' sehr kleine Grössen sind, und weil, wie aus der Tabelle VI ersichtlich, die numerischen Werte der Koeffizienten $b_0, b_1, b_2, b_3 \dots$ sehr rasch abnehmen und sie in dieser Reihenfolge mit 1, 2, 4, 6... zu teilen sind, kann der Sinus von λ' und λ'' bzw. jener von ihren Vielfachen durch das Argument, der Kosinus von λ' bzw. von λ'' durch die Einheit ersetzt werden. Man kann sich durch Ausrechnung überzeugen, dass die dadurch vorgenommene Vereinfachung die von mir geforderte Genauigkeit der Rechnung nicht beeinträchtigt. Auf diese Weise bekommt man:

$$(161) \quad K = \frac{T}{2\pi^2} \cdot \frac{J_0}{\sqrt{1-e^2}} (b_0 - b_1 + b_2 - b_3 + \dots) (\lambda' + \lambda'').$$

Nun ist nach der im § 76 abgeleiteten Gleichung (66)

$$(162) \quad b_0 - b_1 + b_2 - b_3 + \dots = \cos \varphi$$

und man bekommt:

$$(163) \quad K = \frac{T J_0 \cos \varphi}{2 \pi^2 \sqrt{1 - e^2}} (\lambda' + \lambda'').$$

Wie ersichtlich, kommt bei der Berechnung der Strahlungsmengen Q_s und Q_w nur die Summe der Grössen λ' und λ'' in Betracht. Diese Summe ist durch die Formel (151) gegeben, welche auch wie folgt geschrieben werden kann:

$$(164) \quad \lambda' + \lambda'' = 2e[(\cos \lambda' + \cos \lambda'') \sin \Pi_\gamma - (\sin \lambda' - \sin \lambda'') \cos \Pi_\gamma].$$

Ersetzt man hier, wie es auch vorstehend geschehen ist, den Sinus von λ' und λ'' durch den Bogen selbst, und den Kosinus durch die Einheit, so bekommt man:

$$(165) \quad \lambda' + \lambda'' = 2e[2 \sin \Pi_\gamma - (\lambda' - \lambda'') \cos \Pi_\gamma].$$

Es wird sich zeigen, dass im säkularen Bestrahlungsgange der Erde die wichtigsten aller Zeitpunkte diejenigen sind, zu welchen Π_γ den Wert von 90° oder jenen von 270° erreicht. Weil zu diesen Zeiten $\cos \Pi_\gamma = 0$ ist, so wird:

$$(166) \quad \lambda' + \lambda'' = 4e \sin \Pi_\gamma.$$

Diese Formel gilt auch für das ganze in Betracht zu ziehende Intervall der geologischen Vorzeit, sofern man in (165) das Glied $2e(\lambda' - \lambda'') \cos \Pi_\gamma$, worin sowohl e als λ' und λ'' sehr klein sind, als von höherer Kleinheitsordnung vernachlässigt.

Setzt man (166) in (163) ein, so bekommt man:

$$(167) \quad K = \frac{2 T J_0 \cos \varphi}{\pi^2 \sqrt{1 - e^2}} e \sin \Pi_\gamma.$$

Setzt man der einfacheren Schreibweise halber

$$(168) \quad \frac{2 T J_0}{\pi^2 \sqrt{1 - e^2}} \cos \varphi = m$$

oder, weil e^2 neben der Einheit vernachlässigt werden kann,

$$(169) \quad m = \frac{2 T J_0}{\pi^2} \cos \varphi,$$

so wird

$$(170) \quad K = m e \sin \Pi_\gamma.$$

Es folgt aus (159) und (170)

$$(171) \quad \begin{cases} Q_s = W_s - m e \sin \Pi_\gamma \\ Q_w = W_w + m e \sin \Pi_\gamma. \end{cases}$$

Die vorstehenden Ausführungen galten der nördlichen Halbkugel der Erde; zieht man die südliche in Betracht, so wird:

$$(172) \quad \begin{cases} \bar{Q}_s = W_s + m e \sin \Pi_\gamma \\ \bar{Q}_w = W_w - m e \sin \Pi_\gamma. \end{cases}$$

Mit Hilfe der vorstehenden Formeln können die den kalorischen Jahreszeiten zugehörigen Strahlungsmengen berechnet werden.

§ 90. Der kalorische Aequator. Die in den vorhergehenden Gleichungen auftretenden Grössen λ' und λ'' stellen, wie bereits erklärt, die längs der Ekliptik gemessene Entfernung der Sonne zu Beginn des kalorischen Sommerhalbjahres vom Frühlingspunkt bzw. jene zu Beginn des kalorischen Winterhalbjahres vom Herbstpunkt dar. Weil λ' und λ'' kleine Grössen sind, liegt der Beginn des kalorischen Sommerhalbjahres nahe dem Beginn des astronomischen Sommerhalbjahres, und der Beginn des kalorischen Winterhalbjahres nahe dem Beginn des astronomischen Winterhalbjahres. Deshalb werden sich die den kalorischen Halbjahren zugehörigen Strahlungsmengen Q_s und Q_w von den den astronomischen Halbjahren zugehörigen Strahlungsmengen W_s und W_w nicht viel unterscheiden. Die Grösse Q_s stellt dabei die grösstmögliche Strahlungsmenge dar, der die in Betracht gezogene geographische Breite während des Zeitintervalles von einem halben Jahre teilhaftig werden kann, die Grösse Q_w die minimalste.

An den nahe dem Aequator gelegenen Breiten muss, weil hier der durch (140) veranschaulichte jährliche Bestrahlungsgang zwei Maxima und zwei Minima aufweist, das obige Kriterium nicht notwendigerweise erfüllt sein. Hier kann der Fall eintreten, dass die während der Zurücklegung des Bahnintervalles λ_1 bis λ_2 von der Sonne zugestrahelte Wärmemenge Q_s zu einem Minimum, und die dem Bahn-

intervall λ_2 bis $\lambda_1 + 2\pi$ zugehörige Menge Q_w zu einem Maximum wird. In einem solchen Falle findet an der in Betracht gezogenen Breite eine Inversion der Jahreszeiten statt, das kalorische Sommerhalbjahr dieser Breite fällt in das Winterhalbjahr der Hemisphäre, der diese Breite angehört, und das kalorische Winterhalbjahr in das Sommerhalbjahr der zugehörigen Hemisphäre. Eine solche Breite gehört, weil hier $Q_s < Q_w$ ist, thermisch nicht der Hemisphäre, an der sie liegt, sondern der anderen Hemisphäre an. Jene geographische Breite φ , an der die Strahlungsmengen Q_s und Q_w einander gleich sind, nenne ich den kalorischen Aequator.

Die Lage des kalorischen Aequators kann wie folgt ermittelt werden. Hier ist:

$$(173) \quad Q_s = Q_w.$$

Setzt man in die obige Gleichung die Ausdrücke (171) ein, so erhält man:

$$(174) \quad W_s - W_w = 2m e \sin \Pi_\gamma,$$

d. h. wegen (168)

$$(175) \quad W_s - W_w = \frac{4TJ_0}{\pi^2 \sqrt{1-e^2}} e \cos \varphi \sin \Pi_\gamma.$$

Zieht man die Gleichung (100) heran, d. h. die Gleichung:

$$(176) \quad W_s - W_w = \frac{T}{\pi} \cdot \frac{J_0}{\sqrt{1-e^2}} \sin \varphi \sin \varepsilon,$$

so folgt aus den zwei vorstehenden Gleichungen:

$$\pi \sin \varphi \sin \varepsilon = 4e \cos \varphi \sin \Pi_\gamma,$$

d. h.

$$(177) \quad \text{tang } \varphi = \frac{4e}{\pi} \cdot \frac{\sin \Pi_\gamma}{\sin \varepsilon},$$

wodurch die Lage φ des kalorischen Aequators eindeutig gegeben ist.

Es möge hier die gegenwärtige Lage des kalorischen Aequators ermittelt werden. Zu diesem Zwecke bediene ich mich der auch später zu verwendenden, in den astronomischen Jahrbüchern mitgeteilten Formeln, durch welche die numerischen Werte der Exzentrizität e der Erdbahn, der Länge Π_γ des Perihels und der

Schiefe ε der Ekliptik für das Jahr 1900,0 und die vor und nach diesem Zeitpunkt anschliessenden Jahrhunderte gegeben sind. Diese Formeln sind :

$$(178) \quad \left\{ \begin{array}{l} e = 0,0167498 - 0,00004258 t - 0,000000137 t^2 \\ \Pi_{\gamma} = 101^{\circ}13'7''32 + 6171''77 t + 1''823 t^2 \\ \varepsilon = 23^{\circ}27'8''26 - 46''84 t - 0''006 t^2, \end{array} \right.$$

worin t die nach dem Beginn des Jahres 1900 verflossene, in Jahrhunderten zu messende Zeit bedeutet.

Es ist gegenwärtig (1940), weil oben $t=0,4$ zu setzen ist,

$$e = 0,016733; \quad \Pi_{\gamma} = 101^{\circ}54'16''; \quad \varepsilon = 23^{\circ}26'50''.$$

Setzt man diese Werte in (177) ein, so bekommt man

$$q = 2^{\circ}59'57''.$$

Der gegenwärtige kalorische Aequator liegt also hart am dritten Breitengrade nördlich.

Ueber die säkularen Verschiebungen des kalorischen Aequators, die mittels der Gleichung (177) zu berechnen sind, wird noch im sechsten Abschnitt dieses Buches die Rede sein.

Es ist hier am Platze, noch eine Bemerkung hinzuzufügen.

An den niederen geographischen Breite, wo der jährliche Bestrahlungsgang zwei Minima und zwei Maxima aufweist, stellt, wenn man den zwischen dem geographischen Aequator und dem kalorischen Aequator liegenden Gürtel der Erdoberfläche der anderen Hemisphäre hinzufügt, Q_s wohl die grösstmögliche Wärmemenge dar, die der in Betracht gezogenen Breite während eines halben Jahres zugestrahlt werden kann, aber hier ist das im § 87 gegebene Kriterium, dass das kalorische Sommerhalbjahr alle jene Tage des Jahres umfasst, während welcher die Bestrahlung stärker ist als an irgend einem Tage des kalorischen Winterhalbjahres nicht mehr erfüllt; dies kann nur an jenen Breiten stattfinden, an denen der jährliche Bestrahlungsgang seine normale Form, mit einem Maximum und einem Minimum, aufweist.

§ 91. Analytische Darstellung des säkularen Bestrahlungsganges der einzelnen Breiten der Erde. Wie bereits im § 87 auseinandergesetzt, liefern die kalorischen Jahreszeiten und die denselben zugehörigen Strahlungsmengen Q_s und Q_w das Mittel, den säkularen Bestrahlungsgang der in Betracht gezogenen geo-

graphischen Breite exakt zu verfolgen. Es handelt sich dabei darum, die Grössen Q_s und Q_w als Funktionen der säkular veränderlichen astronomischen Elemente e , Π_γ und ε analytisch darzustellen. Alle hiezu erforderlichen Vorarbeiten sind in den vorstehenden Paragraphen bereits geleistet worden.

Die säkularen Aenderungen der Grössen e , Π_γ und ε erfolgen sehr langsam und machen sich erst nach einer genügenden Anzahl von Jahren geltend. Deshalb können die Strahlungstabellen XI, XII und XIII, die mit den numerischen Werten

$$e = 0,0168 \qquad \varepsilon = 23^\circ 27' 30''$$

berechnet worden sind, als für viele Jahre, die ich mit dem Worte Gegenwart zu bezeichnen pflege, geltend betrachtet werden. Trotz alledem muss bei der analytischen und numerischen Darstellung des säkularen Ganges der Erdbestahlung ein exakt gekennzeichnete Zeitpunkt $t=t_0$ angegeben werden, auf den sich, als auf den Initialmoment oder Anfangspunkt der Zeitskala, die Berechnungen beziehen. Leverrier hat als diesen Zeitpunkt den Anfang des Jahres 1800, Stockwell jenen des Jahres 1850 gewählt. Den im sechsten Abschnitt dieses Buches mitgeteilten Ergebnisse meiner Berechnungen des säkularen Bestahlungsganges der Erde ist der Zeitählung der Zeitpunkt 1800,0 zugrunde gelegt worden. Weil nach (178) für diesen Zeitpunkt nach (178)

$$(179) \qquad e = 0,0168 \qquad \varepsilon_0 = 23^\circ 27' 55'' \qquad \Pi_\gamma^0 = 99^\circ 30'$$

ist und bei der Berechnung der Tabelle XI nur die Elemente e und ε in Betracht zu ziehen waren, und $\Delta\varepsilon = \varepsilon - \varepsilon_0$ gesetzt wurde, hat man, um die Tabelle XI auf den Zeitpunkt $t_0 = 1800,0$ zu reduzieren, die in dieser Tabelle enthaltenen Beträge mit den Zusätzen $\Delta W_s \Delta\varepsilon$ bzw. $\Delta W_w \Delta\varepsilon$ zu behaften, wobei die Grössen ΔW_s und ΔW_w der Tabelle XII zu entnehmen sind und $\Delta\varepsilon = 23^\circ 27' 55'' - 23^\circ 27' 30'' = 25'' = 0^\circ 00694$ zu setzen ist. Auf diese Weise erhält man die dem Zeitpunkt t_0 entsprechenden Werte der Grössen W_s und W_w , die ich mit W_s^0 und W_w^0 bezeichnen will.

Die dem Zeitpunkt $t=t_0$ entsprechenden, den kalorischen Halbjahren zugehörigen Strahlungsmengen Q_s^0 und Q_w^0 sind nach (171) durch die Ausdrücke gegeben:

$$(180) \qquad \begin{cases} Q_s^0 = W_s^0 - m e_0 \sin \Pi_\gamma^0 \\ Q_w^0 = W_w^0 + m e_0 \sin \Pi_\gamma^0 \end{cases}$$

Zieht man nun einen beliebigen Zeitpunkt t der geologischen Vorzeit in Betracht, dem der Wert e der Exzentrizität der Erdbahn, der Wert ε der Schiefe der Ekliptik und der Wert Π_γ^0 der Länge des Perihels entspricht, und setzt man:

$$(181) \quad \Delta\varepsilon = \varepsilon - \varepsilon_0,$$

wobei $\Delta\varepsilon$ in Bogengraden zu messen ist, so sind die dem Zeitpunkt t entsprechenden, den astronomischen Halbjahren zugehörigen Strahlungsmengen nach (126) durch die Ausdrücke:

$$(182) \quad \begin{cases} W_s = W_s^0 + \Delta W_s \Delta\varepsilon \\ W_w = W_w^0 + \Delta W_w \Delta\varepsilon \end{cases}$$

veranschaulicht, während die dem Zeitpunkt t entsprechenden, den kalorischen Halbjahren zugehörigen Strahlungsmengen nach (171) durch die Ausdrücke:

$$(183) \quad \begin{cases} Q_s = W_s - me \sin \Pi_\gamma = W_s^0 + \Delta W_s \Delta\varepsilon - me \sin \Pi_\gamma \\ Q_w = W_w + me \sin \Pi_\gamma = W_w^0 + \Delta W_w \Delta\varepsilon + me \sin \Pi_\gamma \end{cases}$$

gegeben sind.

Die Grössen:

$$(184) \quad \begin{cases} \Delta Q_s = Q_s - Q_s^0 \\ \Delta Q_w = Q_w - Q_w^0 \end{cases}$$

stellen die dem Zeitpunkt t entsprechenden, in bezug auf den Zeitpunkt t_0 berechneten säkularen Aenderungen der Strahlungsmengen Q_s und Q_w dar.

Es ist also:

$$(185) \quad \begin{cases} \Delta Q_s = \Delta W_s \Delta\varepsilon - me \sin \Pi_\gamma + me_0 \sin \Pi_\gamma^0 \\ \Delta Q_w = \Delta W_w \Delta\varepsilon + me \sin \Pi_\gamma - me_0 \sin \Pi_\gamma^0. \end{cases}$$

Führt man die Bezeichnung ein:

$$(186) \quad e \sin \Pi_\gamma - e_0 \sin \Pi_\gamma^0 = \Delta(e \sin \Pi_\gamma),$$

so wird:

$$(187) \quad \begin{cases} \Delta Q_s = \Delta W_s \Delta \varepsilon - m \Delta (e \sin \Pi_\gamma) \\ \Delta Q_w = \Delta W_w \Delta \varepsilon + m \Delta (e \sin \Pi_\gamma). \end{cases}$$

Diese Formeln gelten nur für die nördliche Hemisphäre der Erde; die südliche sind sie durch die Formeln zu ersetzen:

$$(188) \quad \begin{cases} \Delta \bar{Q}_s = \Delta W_s \Delta \varepsilon + m \Delta (e \sin \Pi_\gamma) \\ \Delta \bar{Q}_w = \Delta W_w \Delta \varepsilon - m \Delta (e \sin \Pi_\gamma). \end{cases}$$

Dabei ist, weil diese Strahlungsmengen in kanonischen Einheiten auszudrücken sind, also $J_0=1$; $T=100\,000$ zu setzen ist, der durch (169) gekennzeichnete Koeffizient m durch die Formel gegeben:

$$(189) \quad m = \frac{200\,000}{\pi^2} \cos \varphi.$$

In der beiliegenden Tabelle XIV sind die den einzelnen geographischen Breiten φ zugehörigen numerischen Werte des Koeffizienten m gegeben.

Tabelle XIV
Numerische Werte des Koeffizienten m

| | | | | | | | | | |
|-----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| φ | 0° | 5° | 10° | 15° | 20° | 25° | 30° | 35° | 40° |
| m | 20260 | 20190 | 19960 | 19570 | 19040 | 18370 | 17550 | 16600 | 15520 |
| φ | 45° | 50° | 55° | 60° | 65° | 70° | 75° | 80° | 85° |
| m | 14330 | 13030 | 11620 | 10130 | 8560 | 6930 | 5240 | 3520 | 1770 |

Die numerischen Werte der in den Formeln (187) und (188) vorkommenden Grössen ΔW_s und W_w sind der Tabelle XII, jene der Grössen $\Delta \varepsilon$ und $\Delta (e \sin \Pi_\gamma)$ der Tabelle IX zu entnehmen. Jetzt ist es verständlich, warum man dieser letzteren Tabelle ihre Form gegeben hat.

In den Tabellen IX, XII und XIV ist also das erforderliche Material zusammengetragen, um den säkularen Gang der Bestrahlung der einzelnen geographischen Breiten für das Intervall der letzverflossenen 600 Jahrtausende mittels der Formeln (187) und (188) berechnen zu können.

Aus diesen Formeln folgen auch, deutlicher und exakter als dies mit Worten ausgesprochen werden kann, alle im § 86 besprochenen Eigentümlichkeiten des säkularen Ganges der Erdbestrahlung. Man ersieht aus diesen Formeln, dass sich die Aenderungen der Ekliptikschiefe $\Delta\epsilon$ auf beiden Hemisphären im gleichen Sinne, jene der Elemente e und Π_γ aber im entgegengesetzten Sinne fühlbar machen. Der Vergleich der Tabellen XII und XIV lehrt, dass an den hohen Breiten der Einfluss von $\Delta\epsilon$, an den niederen Breiten der Einfluss von $\Delta(e \sin \Pi_\gamma)$ sein höchstes Ausmass erreicht. An den Breiten um 60° kommen die Wirkungen aller drei astronomischen Elemente am deutlichsten zum Vorschein.

Die Ergebnisse der Berechnung des säkularen Ganges der Erdbestrahlung werden im sechsten Abschnitt dieses Buches mitgeteilt werden.

§ 92. Analytische Darstellung des säkularen Bestrahlungsganges einzelner Zonen der Erdoberfläche. Es wird sich bei den nachstehenden Untersuchungen die Notwendigkeit ergeben, nicht nur den säkularen Bestrahlungsgang einzelner geographischer Breitenkreise, sondern auch endlicher zwischen zwei beliebigen Breitenkreisen eingeschlossenen Zonen der Erdoberfläche rechnerisch zu verfolgen. Dies geschieht auf folgende Weise.

Die in Betracht zu ziehende Zone der Erdoberfläche sei durch die Breitenkreise φ_1 und φ_2 begrenzt. Das zwischen den Breitenkreisen φ und $(\varphi + d\varphi)$ eingeschlossene ringförmige Element dieser Zone hat die Fläche

$$(190) \quad dF = 2\pi R^2 \cos \varphi \, d\varphi,$$

worin R den Radius der Erdkugel bedeutet.

Dieses Element wird zur Zeit t der geologischen Vorzeit während des kalorischen Sommerhalbjahres bzw. während des kalorischen Winterhalbjahres folgender Strahlungsmengen teilhaftig:

$$(191) \quad dQ_s = Q_s \, dF \quad dQ_w = Q_w \, dF.$$

Es ist wegen (171), (169) und (190)

$$(192) \quad \left\{ \begin{array}{l} dQ_s = 2\pi R^2 \left\{ W_s \cos \varphi \, d\varphi - \frac{2TJ_0}{\pi^2} e \sin \Pi_\gamma \cos^2 \varphi \, d\varphi \right\} \\ dQ_w = 2\pi R^2 \left\{ W_w \cos \varphi \, d\varphi + \frac{2TJ_0}{\pi^2} e \sin \Pi_\gamma \cos^2 \varphi \, d\varphi \right\}. \end{array} \right.$$

Die zwischen den Breitenkreisen φ_1 und φ_2 eingeschlossene Zone erhält also während der kalorischen Halbjahre folgende Gesamtbestrahlungen:

$$(193) \quad \left\{ \begin{aligned} G_s &= 2\pi R^2 \left\{ \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} W_s \cos \varphi d\varphi - \frac{2TJ_0}{\pi^2} e \sin \Pi_\gamma \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \cos^2 \varphi d\varphi \right\} \\ G_w &= 2\pi R^2 \left\{ \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} W_w \cos \varphi d\varphi + \frac{2TJ_0}{\pi^2} e \sin \Pi_\gamma \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \cos^2 \varphi d\varphi \right\}. \end{aligned} \right.$$

Die Flächeneinheit dieser Zone wird während der kalorischen Halbjahre folgender Strahlungsmengen teilhaftig:

$$(194) \quad Q_s = \frac{G_s}{F} \quad Q_w = \frac{G_w}{F},$$

worin F die Oberfläche dieser Zone bedeutet. Diese Fläche ist gleich:

$$(195) \quad F = 2\pi R^2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \cos \varphi d\varphi = 2\pi R^2 (\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1).$$

Berücksichtigt man, dass

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \cos^2 \varphi d\varphi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} d\varphi = \frac{1}{2} (\varphi_2 - \varphi_1) + \frac{1}{4} (\sin 2\varphi_2 - \sin 2\varphi_1)$$

ist, so folgt aus den vorstehenden Gleichungen:

$$(196) \quad \left\{ \begin{aligned} Q_s &= \frac{1}{\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1} \left\{ \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} W_s \cos \varphi d\varphi - \frac{TJ_0}{\pi^2} \left[\varphi_2 - \varphi_1 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{2} (\sin 2\varphi_2 - \sin 2\varphi_1) \right] e \sin \Pi_\gamma \right\} \\ Q_w &= \frac{1}{\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1} \left\{ \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} W_w \cos \varphi d\varphi + \frac{TJ_0}{\pi^2} \left[\varphi_2 - \varphi_1 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{2} (\sin 2\varphi_2 - \sin 2\varphi_1) \right] e \sin \Pi_\gamma \right\}. \end{aligned} \right.$$

Der Gegenwart entsprechen folgende Strahlungsmengen:

$$(197) \quad \left\{ \begin{aligned} Q_s^0 &= \frac{1}{\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1} \left\{ \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} W_s^0 \cos \varphi \, d\varphi - \frac{TJ_0}{\pi^2} \left[\varphi_2 - \varphi_1 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{2} (\sin 2\varphi_2 - \sin 2\varphi_1) \right] e_0 \sin \Pi\gamma^0 \right\} \\ Q_w^0 &= \frac{1}{\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1} \left\{ \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} W_w^0 \cos \varphi \, d\varphi + \frac{TJ_0}{\pi^2} \left[\varphi_2 - \varphi_1 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{2} (\sin 2\varphi_2 - \sin 2\varphi_1) \right] e_0 \sin \Pi\gamma^0 \right\}. \end{aligned} \right.$$

Es ist nach (126)

$$(198) \quad \left\{ \begin{aligned} W_s &= W_s^0 + \Delta W_s \Delta \varepsilon \\ W_w &= W_w^0 + \Delta W_w \Delta \varepsilon, \end{aligned} \right.$$

so dass wegen (184) und (186) die säkularen Aenderungen der Strahlungsmengen Q_s und Q_w durch die nachstehenden Ausdrücke veranschaulicht sind:

$$(199) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta Q_s &= \frac{1}{\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1} \left\{ \Delta \varepsilon \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \Delta W_s \cos \varphi \, d\varphi - \frac{TJ_0}{\pi^2} \left[\varphi_2 - \varphi_1 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{2} (\sin 2\varphi_2 - \sin 2\varphi_1) \right] \Delta (e \sin \Pi\gamma) \right\} \\ \Delta Q_w &= \frac{1}{\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1} \left\{ \Delta \varepsilon \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \Delta W_w \cos \varphi \, d\varphi + \frac{TJ_0}{\pi^2} \left[\varphi_2 - \varphi_1 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{2} (\sin 2\varphi_2 - \sin 2\varphi_1) \right] \Delta (e \sin \Pi\gamma) \right\}. \end{aligned} \right.$$

Die dem ganzen Jahre zugehörige Strahlungsmenge:

$$Q_T = Q_s + Q_w = W_T$$

unterliegt, weil

$$\Delta Q_T = \Delta Q_s + \Delta Q_w = \Delta W_T$$

ist, folgender säkularen Aenderung:

$$(200) \quad \Delta Q_T = \frac{1}{\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \Delta W_T \cos \varphi \, d\varphi.$$

Die in den vorstehenden Formeln vorkommenden bestimmten Integrale

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \Delta W_s \cos \varphi \, d\varphi; \quad \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \Delta W_w \cos \varphi \, d\varphi; \quad \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \Delta W_T \cos \varphi \, d\varphi$$

können mittels der Tabelle XII durch mechanische Quadratur ausgewertet werden. Hat man dies getan, und setzt zwecks einfacherer Schreibweise

$$(201) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \Delta W_s \cos \varphi \, d\varphi = \Delta H_s \\ \frac{1}{\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \Delta W_w \cos \varphi \, d\varphi = \Delta H_w \\ \frac{1}{\sin \varphi_1 - \sin \varphi_2} \cdot \frac{TJ_0}{\pi^2} \left[\varphi_2 - \varphi_1 + \frac{1}{2} (\sin 2\varphi_2 - \sin 2\varphi_1) \right] = M, \end{array} \right.$$

wo ΔH_s , ΔH_w und M konstante durch die Begrenzungen φ_1 und φ_2 der in Betracht gezogenen Zone der Erdoberfläche eindeutig gegebene Grössen sind, so wird:

$$(202) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta Q_s = \Delta H_s \Delta \varepsilon - M \Delta (e \sin \Pi_\gamma) \\ \Delta Q_w = \Delta H_w \Delta \varepsilon + M \Delta (e \sin \Pi_\gamma) \end{array} \right.$$

Diese für die Zonen der nördlichen Hemisphäre geltende Formeln sind von demselben Bau wie die Formeln (187). Für die Zonen der südlichen Hemisphäre sind sie durch die nachstehenden Formeln zu ersetzen:

$$(203) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta \bar{Q}_s = \Delta H_s \Delta \varepsilon + M \Delta (e \sin \Pi_\gamma) \\ \Delta \bar{Q}_w = \Delta H_w \Delta \varepsilon - M \Delta (e \sin \Pi_\gamma) . \end{array} \right.$$

Setzt man in die vorstehenden Formeln für $\Delta \varepsilon$ und $\Delta (e \sin \Pi_\gamma)$ die in der Tabelle IX mitgeteilten numerischen Werte ein, so erhält man die während der letztverflossenen 600 Jahrtausende stattgefundenen säkularen Aenderungen der Grössen Q_s und Q_w .

§ 93. Analytische Darstellung des säkularen Ganges der durchschnittlichen Bestrahlung der nördlichen bzw. der südlichen Hemisphäre der Erde. Zu einem gegebenen Zeitpunkte, zu welchem die Deklination der Sonne den Wert δ , und deren Entfernung von der Erde den Wert ϱ aufweist, sind die totalen, pro Zeiteinheit berechneten Bestrahlungen J_n und J_s der nördlichen bzw. der südlichen Hemisphäre der Erde durch (18) und (19), also durch die Formeln:

$$(204) \quad \left\{ \begin{array}{l} J_n = \frac{J_0}{\varrho^2} \cdot \frac{\pi}{2} R^2 (1 + \sin \delta) \\ J_s = \frac{J_0}{\varrho^2} \cdot \frac{\pi}{2} R^2 (1 - \sin \delta) \end{array} \right.$$

gegeben, worin R den Halbmesser der Erdkugel bedeutet.

Die augenblickliche, pro Flächeneinheit berechnete Bestrahlung der nördlichen Hemisphäre sei mit w , jene der südlichen mit \bar{w} bezeichnet. Diese Bestrahlungen werden erhalten, wenn man die obigen Ausdrücke mit der Oberfläche $2\pi R^2$ der Hemisphäre dividiert. Es ist also:

$$(205) \quad \left\{ \begin{array}{l} w = \frac{1}{4} \cdot \frac{J_0}{\varrho^2} (1 + \sin \delta) \\ \bar{w} = \frac{1}{4} \cdot \frac{J_0}{\varrho^2} (1 - \sin \delta) . \end{array} \right.$$

Diese Bestrahlungen weisen infolge der Veränderlichkeit der Grössen δ und ϱ einen jährlichen Gang auf, der sich wegen der geringen Veränderlichkeit der Grösse ϱ und der grossen Veränderlichkeit der Grösse $\sin \delta$ nicht viel von einer Sinusfunktion unterscheiden wird. Die Bestrahlungen w und \bar{w} werden zu den

Zeiten, zu welchen $\delta = \pm \varepsilon$ wird, also zur Zeit der Solstitien, ihre extremen Werte erreichen, während sie zur Zeit der Aequinoktien, wo $\delta = 0$ ist, nahezu ihren Mittelwerten gleich sein werden.

Dieser jährliche Bestrahlungsgang der einen und der anderen Hemisphäre der Erde kann wie folgt als Funktion der Länge λ der Sonne dargestellt werden.

Es folgt aus (75) und (111)

$$q = \frac{1 - e^2}{1 - e \cos (\Pi\gamma - \lambda)}.$$

Weil die Exzentrizität e der Erdbahn stets sehr klein ist, kann oben e^2 neben der Einheit vernachlässigt werden; auch kann bei der Bildung des nachstehenden Ausdruckes $e^2 \cos^2 (\Pi\gamma - \lambda)$ neben der Einheit unterdrückt werden. Man bekommt auf diese Weise :

$$\frac{1}{q^2} = 1 - 2e \cos (\Pi\gamma - \lambda).$$

Setzt man dies und (35) in (205) ein, so bekommt man:

$$(206) \quad \left\{ \begin{array}{l} w = \frac{J_0}{4} [1 - 2e \cos (\Pi\gamma - \lambda)] (1 + \sin \varepsilon \sin \lambda) \\ \bar{w} = \frac{J_0}{4} [1 - 2e \cos (\Pi\gamma - \lambda)] (1 - \sin \varepsilon \sin \lambda). \end{array} \right.$$

Um die säkularen Aenderungen dieses Bestrahlungsganges analytisch darzustellen, hat man, so wie es auch in den vorhergehenden Paragraphen geschehen ist, von den kalorischen Jahreszeiten Gebrauch zu machen. Es folgt aus den Ausführungen des § 88, dass, falls man die Bestrahlungen der einzelnen geographischen Breiten in Betracht zieht, die kalorischen Jahreszeiten an den verschiedenen Breiten verschiedenen Beginn und Ende aufweisen, weil in den Gleichungen (142) und (145), durch die die Längen λ_1 und λ_2 der Sonne zu Beginn des kalorischen Sommerhalbjahres bzw. Winterhalbjahres gegeben sind, in der ersten dieser zwei Gleichungen die geographische Breite φ und die zugehörigen Koeffizienten b_0 , b_1 , $b_2 \dots$ vorkommen. Die daraus für die verschiedenen Breiten sich ergebenden Unterschiede für λ_1 und für λ_2 sind klein und kommen bei der im § 89 durchgeführten Berechnung der während der kalorischen Jahreszeiten den einzelnen Breitenkreisen zugestrahlten Wärmemengen wegen der dabei allein zu benützendes Formel (166), in der die Breite φ nicht vorkommt, überhaupt nicht in Betracht.

Im vorliegenden Falle, wo die totale Bestrahlung der einen oder der anderen Hemisphäre in Betracht zu ziehen ist, sind die Längen λ_1 und λ_2 aus der Forderung :

$$(207) \quad w(\lambda_1) = w(\lambda_2)$$

zu ermitteln, wobei die Gleichungen (206) zu benützen sind, so dass es wird:

$$(208) \quad [1 - 2e \cos(\Pi\gamma - \lambda_1)](1 + \sin \epsilon \sin \lambda_1) = [1 - 2e \cos(\Pi\gamma - \lambda_2)](1 + \sin \epsilon \sin \lambda_2).$$

Die Gleichung (145), die aus der Forderung (130) gewonnen wurde, bleibt unberührt, so dass auch im vorliegenden Falle

$$(209) \quad \lambda_2 - \lambda_1 - 2e \sin(\Pi\gamma - \lambda_2) + 2e \sin(\Pi\gamma - \lambda_1) = \pi$$

ist.

In den vorstehenden Gleichungen kommt φ weder explizit noch implizit vor, so dass für die ganze in Betracht gezogene Hemisphäre ein bestimmter Zeitpunkt t_1 als Beginn, und der Zeitpunkt $t_1 + \frac{T}{2}$ als Ende des kalorischen Sommerhalbjahres anzusehen ist; ähnliches gilt auch für das kalorische Winterhalbjahr. Weil, wie vorstehend auseinandergesetzt, der jährliche Bestrahlungsgang w nur ein Maximum und nur ein Minimum aufweist und zu Beginn des Sommerhalbjahres die Bestrahlung w im Aufstieg, zu Ende dieses Halbjahres im Abstieg ist, stellt die Strahlungsmenge, die während dieses Halbjahres der nördlichen Hemisphäre zugestrahlt wird, den grösstmöglichen Betrag dar, der dieser Hemisphäre während eines halben Jahres zugewiesen werden kann. Die während des kalorischen Winterhalbjahres zugestrahelte Wärmemenge wird dagegen zu einem Minimum. Das kalorische Sommerhalbjahr der Hemisphäre umfasst alle jene Tage des Jahres, während welcher die Bestrahlung w stärker ist als an irgend einem Tage des kalorischen Winterhalbjahres.

Um die während der kalorischen Halbjahre pro Flächeneinheit berechneten den beiden Hemisphären zugestrahelten Mengen, die, wie früher, mit Q_s , Q_w bzw. \overline{Q}_s , \overline{Q}_w bezeichnet werden mögen, zu ermitteln, ist auch hier der im § 89 angegebene Weg sinngemäss einzuhalten.

Führt man die Substitution durch:

$$(210) \quad \lambda_1 = \lambda' \quad \lambda_2 = \pi - \lambda'',$$

so erhält man statt (208) und (209) die Gleichungen:

$$(211) \quad 1 - 2e \cos(\Pi\gamma - \lambda')](1 + \sin \epsilon \sin \lambda') = [1 + 2e \cos(\Pi\gamma + \lambda'')](1 + \sin \epsilon \sin \lambda'')$$

$$(212) \quad \lambda' + \lambda'' = 2e [\sin(\Pi\gamma - \lambda') + \sin(\Pi\gamma + \lambda'')].$$

Auch diese Gleichungen ergeben, wie die Gleichungen (150) und (151), für $e = 0$, $\lambda' = 0$, $\lambda'' = 0$. Deshalb werden, weil e immer sehr klein bleibt, auch λ' und λ'' sehr kleine Bogen sein. Aus diesem Grunde kann ihr Sinus durch den Bogen selbst, ihr Kosinus durch die Einheit ersetzt werden. Auf diese Weise erhält man statt (211) und (212):

$$\begin{aligned} & [1 - 2e \cos \Pi_\gamma - 2e \lambda' \sin \Pi_\gamma] (1 + \lambda' \sin \epsilon) = \\ & = [1 + 2e \cos \Pi_\gamma - 2e \lambda'' \sin \Pi_\gamma] (1 + \lambda'' \sin \epsilon) \\ & \lambda' + \lambda'' = 2e [2 \sin \Pi_\gamma - (\lambda' - \lambda'') \cos \Pi_\gamma]. \end{aligned}$$

In den vorstehenden Gleichungen können alle Glieder mit $e\lambda'$ oder $e\lambda''$ als von höherer Kleinheitsordnung unterdrückt werden, so dass man erhält:

$$(213) \quad \lambda' - \lambda'' = 4e \frac{\cos \Pi_\gamma}{\sin \epsilon}$$

$$(214) \quad \lambda' + \lambda'' = 4e \sin \Pi_\gamma,$$

wodurch die Grössen λ' und λ'' gegeben sind.

Die während des kalorischen Sommerhalbjahres bzw. während des kalorischen Winterhalbjahres der nördlichen Hemisphäre pro Flächeneinheit zugestrahlten Wärmemengen Q_s und Q_w sind durch die Integrale veranschaulicht:

$$(215) \quad Q_s = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} w \frac{dt}{d\lambda} d\lambda \quad Q_w = \int_{\lambda_2}^{2\pi + \lambda_1} w \frac{dt}{d\lambda} d\lambda.$$

Es ist wegen (205) und (80)

$$w \frac{dt}{d\lambda} = \frac{T}{8\pi} \cdot \frac{J_0}{\sqrt{1-e^2}} (1 + \sin \delta).$$

Setzt man dies, (210) und (35) in (215) ein, so wird:

$$(216) \quad \left\{ \begin{array}{l} Q_s = \frac{T}{8\pi} \cdot \frac{J_0}{\sqrt{1-e^2}} \int_{\lambda'}^{\pi-\lambda''} (1 + \sin \varepsilon \sin \lambda) d\lambda \\ Q_w = \frac{T}{8\pi} \cdot \frac{J_0}{\sqrt{1-e^2}} \int_{\pi-\lambda''}^{2\pi+\lambda'} (1 + \sin \varepsilon \sin \lambda) d\lambda. \end{array} \right.$$

Führt man die vorstehenden Integrationen durch, so wird:

$$Q_s = \frac{T}{8\pi} \cdot \frac{J_0}{\sqrt{1-e^2}} \{ \pi - (\lambda' + \lambda'') + \sin \varepsilon (\cos \lambda' + \cos \lambda'') \}$$

$$Q_w = \frac{T}{8\pi} \cdot \frac{J_0}{\sqrt{1-e^2}} \{ \pi + (\lambda' + \lambda'') - \sin \varepsilon (\cos \lambda' + \cos \lambda'') \}.$$

Wegen der Kleinheit von λ' und λ'' kann hier $\cos \lambda' = 1$; $\cos \lambda'' = 1$ gesetzt werden, und man bekommt:

$$(217) \quad \left\{ \begin{array}{l} Q_s = \frac{T}{8\pi} \cdot \frac{J_0}{\sqrt{1-e^2}} \{ \pi - (\lambda' + \lambda'') + 2 \sin \varepsilon \} \\ Q_w = \frac{T}{8\pi} \cdot \frac{J_0}{\sqrt{1-e^2}} \{ \pi + (\lambda' + \lambda'') - 2 \sin \varepsilon \}. \end{array} \right.$$

Setzt man hier für $(\lambda' + \lambda'')$ den Ausdruck (214) ein, so wird:

$$(218) \quad \left\{ \begin{array}{l} Q_s = \frac{T}{8\pi} \cdot \frac{J_0}{\sqrt{1-e^2}} \{ \pi - 4e \sin \Pi_\gamma + 2 \sin \varepsilon \} \\ Q_w = \frac{T}{8\pi} \cdot \frac{J_0}{\sqrt{1-e^2}} \{ \pi + 4e \sin \Pi_\gamma - 2 \sin \varepsilon \} \end{array} \right.$$

Diese Formeln gelten für jene Epoche der geologischen Vorzeit, zu der die astronomischen Elemente die Werte e , Π_γ , ε aufweisen. Auch hier kann, weil das Element e zwischen engen Grenzen schwankt, sein Quadrat neben der Einheit vernachlässigt werden, so dass es wird:

$$(219) \quad \begin{cases} Q_s = \frac{TJ_0}{8\pi} \{ \pi - 4e \sin \Pi_\gamma + 2 \sin \varepsilon \} \\ Q_w = \frac{TJ_0}{8\pi} \{ \pi + 4e \sin \Pi_\gamma - 2 \sin \varepsilon \} . \end{cases}$$

Entsprechen dem Zeitpunkt $t=t_0$, den wir als den Anfang der Zeitzählung wählen, die Werte $e_0, \Pi_\gamma^0; \varepsilon_0$ der astronomischen Elemente, so ist für diesen Zeitpunkt:

$$(220) \quad \begin{cases} Q_s^0 = \frac{TJ_0}{8\pi} \{ \pi - 4e_0 \sin \Pi_\gamma^0 + 2 \sin \varepsilon_0 \} \\ Q_w^0 = \frac{TJ_0}{8\pi} \{ \pi + 4e_0 \sin \Pi_\gamma^0 - 2 \sin \varepsilon_0 \} . \end{cases}$$

Die Grössen

$$\Delta Q_s = Q_s - Q_s^0$$

$$\Delta Q_w = Q_w - Q_w^0$$

stellen die dem Zeitpunkt t entsprechenden in bezug auf den Zeitpunkt t_0 berechneten säkularen Aenderungen der Strahlungsmengen Q_s und Q_w dar. Es ist also

$$(221) \quad \begin{cases} \Delta Q_s = \frac{TJ_0}{4\pi} \{ (\sin \varepsilon - \sin \varepsilon_0) - 2(e \sin \Pi_\gamma - e_0 \sin \Pi_\gamma^0) \} \\ \Delta Q_w = \frac{TJ_0}{4\pi} \{ -(\sin \varepsilon - \sin \varepsilon_0) + 2(e \sin \Pi_\gamma - e_0 \sin \Pi_\gamma^0) \} . \end{cases}$$

Setzt man, wie es in (186) und (181) geschehen ist,

$$(222) \quad e \sin \Pi_\gamma - e_0 \sin \Pi_\gamma^0 = \Delta(e \sin \Pi_\gamma)$$

$$(223) \quad \varepsilon = \varepsilon_0 + \Delta\varepsilon,$$

so ist, weil $\Delta\varepsilon$ eine kleine Grösse ist,

$$\sin \varepsilon = \sin(\varepsilon_0 + \Delta\varepsilon) = \sin \varepsilon_0 + \Delta\varepsilon \cos \varepsilon_0,$$

d. h.

$$(224) \quad \sin \varepsilon - \sin \varepsilon_0 = \Delta\varepsilon \cos \varepsilon_0 .$$

Setzt man (222) und (224) in (221) ein, so wird:

$$(225) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta Q_s = \frac{TJ_0}{4\pi} \{ \Delta\epsilon \cos \epsilon_0 - 2\Delta (e \sin II\gamma) \} \\ \Delta Q_w = \frac{TJ_0}{4\pi} \{ -\Delta\epsilon \cos \epsilon_0 + 2\Delta (e \sin II\gamma) \} . \end{array} \right.$$

Drückt man die vorstehenden Grössen in kanonischen Einheiten aus, so ist

$$J_0 = 1 \quad T = 100.000$$

zu setzen. Drückt man, so wie es in der Tabelle IX geschehen ist, $\Delta\epsilon$ in Bogengraden aus, so ist oben für $\Delta\epsilon$ $\frac{\pi}{180} \Delta\epsilon$ zu setzen. Bei meinen Berechnungen des säkularen Ganges der Erdbestrahlung ist als Anfang der Zeitzählung der Zeitpunkt 1800,0 gewählt, für den $\epsilon_0 = 23^\circ 27' 55''$ ist. Berücksichtigt man dies, so erhält man statt den vorstehenden Formeln:

$$(226) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta Q_s = 127 \Delta\epsilon - 15.916 \Delta (e \sin II\gamma) \\ \Delta Q_w = -127 \Delta\epsilon + 15.916 \Delta (e \sin II\gamma) . \end{array} \right.$$

Diese Formeln gelten für die nördliche Hemisphäre der Erde, für die südliche sind sie durch die nachstehenden zu ersetzen:

$$(227) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta \bar{Q}_s = 127 \Delta\epsilon + 15.916 \Delta (e \sin II\gamma) \\ \Delta \bar{Q}_w = -127 \Delta\epsilon - 15.916 \Delta (e \sin II\gamma) . \end{array} \right.$$

Mit Benützung der in der Tabelle IX angegebenen numerischen Werte für $\Delta\epsilon$ und $\Delta (e \sin II\gamma)$ können die während der letztverflossenen 600 Jahrtausende stattgefundenen säkularen Aenderungen der Grössen Q_s und Q_w berechnet werden.

FÜNFTER ABSCHNITT

Zusammenhang zwischen Einstrahlung und Temperatur der Erde und ihrer Atmosphäre Das mathematische Klima der Erde

KAPITEL XVI

Einleitung. Grundlegende Tatsachen und Gesetze

§ 94. Das mathematische Klima der Erde. Das, was man unter Klimatologie allgemein versteht, ist die Erforschung und Beschreibung des mittleren Zustandes und gewöhnlichen Verlaufes der Witterung an den verschiedenen Orten der Erdoberfläche. Die erforderlichen Daten zu dieser Beschreibung werden durch langjährige direkte Beobachtungen gewonnen, die nach statistischen Methoden verarbeitet werden. Deshalb ist die Klimatologie nach ihrem gegenwärtigen Stand eine empirische beschreibende Wissenschaft. Die Meteorologie ist bestrebt, die beobachteten Witterungserscheinungen durch physikalische Gesetze zu erklären, um auf diese Weise den Zusammenhang zwischen den klimatischen Erscheinungen und ihren Ursachen aufzudecken. Der dabei betretene Weg ist ein induktiver: man geht von der Erforschung der einzelnen örtlich und zeitlich begrenzten Tatsachen aus, versucht diese zu systematisieren und zu einem Ganzen zusammenzufügen. Es ist dies das natürliche Anfangsstadium im Werdegange einer Wissenschaft. Die exakten Naturwissenschaften haben dieses Anfangsstadium schon längst überschritten und sind imstande, durch allgemein geltende Gesetze auch alles einzelne zu erfassen. Weil die Meteorologie dieses Stadium noch nicht erreicht hat, sträuben sich manche Systematiker noch immer, sie als eine ausgebildete Wissenschaft anzuerkennen.

Man kann jedoch, wie ich dies im Vorwort dieses Buches ausführlich auseinandergesetzt habe und wie dies aus den nachstehenden Ausführungen folgen wird, auch in der Klimalehre den deduktiven Weg betreten, um aus der Intensität der Sonnenstrahlen und aus allgemeinen das Weltall beherrschenden Gesetzen die Grundzüge der thermischen Erscheinungen auf der Erdoberfläche und in der Atmosphäre abzuleiten. Dieses theoretisch errechnete Klima der Erde wird das „mathematische Klima“ genannt. Diesen theoretisierenden Teil der Klimatologie habe ich in meiner „Mathematischen Klimalehre“, die den einleitenden Hauptartikel des Köppen-Geigerschen Handbuches der Klimatologie bildet, zu einem vorläufigen Abschluss gebracht. Die dort niedergelegte Theorie ist wohl eines weiteren Ausbaues fähig, wie dies sogleich dargelegt werden soll.

In meiner „Mathematischen Klimalehre“ mussten, wie es beim Aufbau jeder mathematischen Theorie der Fall ist, gewisse vereinfachende Voraussetzungen gemacht werden, um die zu beschreibenden Naturerscheinungen durch Differentialgleichungen zu erfassen und diese integrieren zu können. Die wichtigsten dieser Annahmen sind die folgenden. Die Erdoberfläche wird als vollkommen eingebnet, das Material der äussersten am Wärmeaustausch teilnehmenden Schicht der Erdkruste als homogen vorausgesetzt. Die der Schwerkraft und den Gesetzen für vollkommene Gase unterworfenen Atmosphäre befindet sich in einem mittleren Bewölkungszustand, ihre Konstitution ist nur eine Funktion der Höhe über der Erdoberfläche. Die in die Atmosphäre eindringende Sonnenstrahlung, die Ausstrahlung der Erdoberfläche und die dunkle Strahlung der Atmosphäre gehorchen dem kombinierten Kirchhoff-Stefanschen Gesetz. Der Wärmeaustausch zwischen der Erdoberfläche und der Atmosphäre erfolgt nur durch Strahlung. Die durch die Störung des mechanischen Gleichgewichts in der Atmosphäre und in der Hydrosphäre entstehenden Strömungen werden nicht berücksichtigt.

Von allen diesen Annahmen ist die zuletzt angeführte die schwerwiegendste, weil durch dieselbe ein ganzer Komplex meteorologischer Erscheinungen aus dem Bereich meiner Untersuchungen ausgeschieden erscheint und das von mir berechnete Klima, im Grunde genommen, dem sogenannten „solaren Klima“ entspricht, worunter jenes Klima zu verstehen ist, welches nur von der Quantität der Sonnenstrahlung abhängt, die einem Ort nach seiner geographischen Breite zukommt.

Trotz dem sollen das mathematische Klima und das solare Klima auseinandergehalten werden. Sie decken sich in vorliegendem Falle wegen der Annahmen, die der Theorie zugrunde lagen. Es ist wohl nur eine Frage der Ueberwindung analytischer Schwierigkeiten die durch die Strahlungserscheinungen auf die Meridianebenen sich beschränkenden Störungen des mechanischen Gleichgewichts zu berücksichtigen und die vorliegende Theorie in dem Sinne zu erweitern, dass in derselben die durch jene Störungen und die ablenkende Kraft der Erdrotation hervorgerufenen Zirkulationen der Atmosphäre zum Ausdruck gelangen, wobei man anfangs den durchschnittlichen jährlichen Bestrahlungszustand der einzelnen Breiten der Rechnung zugrunde legen wird, um einen stationären Bewegungszustand vor sich zu haben, und um erst nachher auf den periodischen Bestrahlungszustand zu übergehen. Ein solcher Vorgang wird auch nachstehend beim statischen Zustand der Atmosphäre zur Anwendung gelangen.

In den ersten vier Abschnitten dieses Buches wurden die für die Ziele desselben aus dem Newtonschen Gravitationsgesetz und aus dem Bestrahlungsgesetz sich ergebenden Schlussfolgerungen gezogen. Diese Abschnitte bilden den astronomischen Teil des Werkes. Im vorliegenden Abschnitt müssen auch einige physikalische Gesetze herangezogen werden, weshalb derselbe als der physikalische Teil des Werkes bezeichnet werden kann. Mit diesen Gesetzen müssen wir uns vorerst vertraut machen.

§ 95. Die Schichtung der Atmosphäre. Die Atmosphäre der Erde ist ein Gemisch von verschiedenen vollkommenen Gasen und Wasserdampf. Diese Gase, dem Gravitationsfelde der Erde unterjocht, gehorchen überdies dem Dalton'schen Gesetz, nach dem der Partialdruck jedes einzelnen Gases in der Atmosphäre von der Anwesenheit der übrigen Gase unabhängig ist. Man kann deshalb jedes dieser Gase für sich behandeln; die Sonderstellung des Wasserdampfes soll später berücksichtigt werden.

Man nehme also vorläufig an, die zirkulationslos gedachte Atmosphäre der Erde bestehe nur aus einem einzigen Gas, für das die Zustandsgleichung

$$(1) \quad vp = R\theta,$$

genannt das Boyle-Charles'sche oder das Mariotte-Gay Lussac'sche Gesetz, gilt. In derselben bedeutet v das Volumen der Masseneinheit, p den Gasdruck, θ die absolut gemessene Gastemperatur und R die sogenannte Gaskonstante, die von der Natur des Gases abhängig, ist. Bezeichnet ϱ die Dichte der Atmosphäre, d. h. die Masse der Volumseinheit, so ist

$$\varrho = \frac{1}{v},$$

so dass es wird:

$$(2) \quad p = R\theta\varrho.$$

In einer vertikalen an der in Betracht gezogenen Stelle der Erdoberfläche sich erhebenden Luftsäule sind die Grössen p , θ , ϱ Funktionen der von der Erdoberfläche gemessenen Entfernung x , so dass die vorstehende Gleichung die Form erhält:

$$(3) \quad p(x) = R\theta(x)\varrho(x).$$

Das spezifische Gewicht der Atmosphäre an der Stelle x ist gleich :

$$(4) \quad \sigma(x) = g(x)\varrho(x),$$

worin $g(x)$ die Beschleunigung der Schwere an der Stelle x bedeutet. Bezeichnet man die Beschleunigung der Schwere an der in Betracht gezogenen Stelle der Erdoberfläche mit g und nimmt man auf die unbedeutende innere Gravitation der Atmosphäre keine Rücksicht, so ist nach dem Newtonschen Gravitationsgesetz.

$$\frac{g(x)}{g} = \frac{r^2}{(r+x)^2},$$

worin r den Radius der Erdkugel bedeutet. Es ist also :

$$(5) \quad \sigma(x) = \frac{r^2}{(r+x)^2} g \varrho(x).$$

Erhebt man sich längs der Vertikalen um die Strecke dx , so nimmt der Gasdruck um

$$(6) \quad dp(x) = -\sigma(x) dx$$

zu, weil mit zunehmender Höhe der auf die Flächeneinheit wirkende Druck in dem Masse abnimmt, in dem sich das über dieser Flächeneinheit lastende Gewicht verringert.

Die Differentiation von (3) ergibt :

$$dp(x) = R\varrho(x) d\theta(x) + R\theta(x) d\varrho(x),$$

d. h. wegen (6) und (5)

$$R\varrho(x) d\theta(x) + R\theta(x) d\varrho(x) = -\frac{r^2}{(r+x)^2} g \varrho(x) dx.$$

Diese Gleichung veranschaulicht den Zusammenhang zwischen Dichte, Temperatur und Höhe x . Man kann derselben, wenn man berücksichtigt, dass die praktisch fühlbare Höhe der Atmosphäre im Vergleich zum Radius r der Erdkugel sehr klein ist, also x neben r vernachlässigt werden kann, die einfachere Form geben:

$$(7) \quad R \varrho(x) d\theta(x) + R\theta(x) d\varrho(x) = -g \varrho(x) dx.$$

Hätte man noch eine Gleichung zwischen den Grössen θ , ϱ und x , so wäre man in der Lage, die analytischen Ausdrücke der Funktionen $\varrho(x)$ und $\theta(x)$ abzuleiten. Diese hier noch fehlende Gleichung wird später aus den Strahlungsgesetzen gewonnen werden. Vorläufig kann die Funktion $\varrho(x)$ dadurch ermittelt werden, dass man auf die Aenderung der Temperatur $\theta(x)$ mit der Höhe x keine Rücksicht nimmt, also $\theta(x)$ als konstant betrachtet und setzt

$$\theta(x) = \theta_0,$$

wobei θ_0 eine von x unabhängige Grösse bedeutet. In einem solchen Falle erhält man statt (7)

$$(8) \quad R\theta_0 d\varrho(x) = -g \varrho(x) dx.$$

Setzt man der kürzeren Schreibweise halber

$$(9) \quad \frac{R\theta_0}{g} = H,$$

so wird

$$\frac{d\varrho(x)}{\varrho(x)} = -\frac{dx}{H}.$$

Die Integration dieser Differentialgleichung liefert, wenn man die Dichte der Atmosphäre an der Erdoberfläche, d. h. für $x=0$, mit ϱ_0 bezeichnet,

$$(10) \quad \varrho(x) = \varrho_0 e^{-\frac{x}{H}}.$$

Diese Formel gibt die Dichteabnahme der isotherm vorausgesetzten Atmosphäre mit der Höhe x an. Eine solche Atmosphäre erstreckt sich theoretisch bis in die Unendlichkeit, praktisch bis zu jener Höhe, in der $\varrho(x)$ vernachlässigbar klein wird.

Wendet man die obige Formel für solche Höhenintervalle an, für welche die Temperatur nicht mehr als konstant zu betrachten ist, so kann der aus der Anwendung dieser Formel sich ergebende Fehler teilweise kompensiert werden, wenn man in (9) den Mittelwert der Temperatur der in Betracht gezogenen Luftsäule einsetzt.

Interessant ist die Bedeutung der Grösse H . Um diese zu ersehen, berechne man die Luftmasse der über der Flächeneinheit der Erdoberfläche sich erhebenden Säule der Atmosphäre. Diese ist dargestellt durch:

$$M = \int_0^{\infty} \varrho(x) dx = \varrho_0 \int_0^{\infty} e^{-\frac{x}{H}} dx,$$

d. h. durch:

$$(11) \quad M = \varrho_0 H.$$

Es stellt also H jene Höhe dar, die die Atmosphäre aufweisen würde, wenn sie auf die Dichte ϱ_0 komprimiert wäre. Diese Grösse wird die virtuelle Höhe der Atmosphäre genannt.

Wird der Atmosphärendruck $p(0)$ an der Erdoberfläche und die Gaskonstante R mit der terrestrischen Kräfteinheit, d. h. mit dem Gewicht g der Masseneinheit gemessen und mit p_0 bzw. mit R_0 bezeichnet, wird also gesetzt:

$$(12) \quad p(0) = p_0 g \quad R = R_0 g,$$

so ist nach (3)

$$(13) \quad p_0 = R_0 \theta_0 \varrho_0$$

und nach (9)

$$(14) \quad H = R_0 \theta_0,$$

in welcher Form man die virtuelle Höhe der Atmosphäre gewöhnlich zum Ausdruck bringt.

Die soeben abgeleiteten Beziehungen gelten für jedes vollkommene Gas der Atmosphäre. Bezeichnet man die Dichten dieser einzelnen Gase an der Erdoberfläche mit $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3 \dots$ und die ihnen entsprechenden virtuellen Höhen mit $H_1, H_2, H_3 \dots$, so ist die Dichte $\varrho(x)$ der aus diesen Gasen gebildeten Atmosphäre durch den Ausdruck dargestellt:

$$(15) \quad \varrho(x) = \varrho_1 e^{-\frac{x}{H_1}} + \varrho_2 e^{-\frac{x}{H_2}} + \varrho_3 e^{-\frac{x}{H_3}} + \dots$$

Wegen der Verschiedenheit der Grössen $H_1, H_2, H_3 \dots$ werden die Dichten der einzelnen Gase mit der Höhe x in verschiedenem Masse mit der Höhe abneh-

men, so dass jedem x ein anderes Mischungsverhältnis der Gase entsprechen wird.

Die Atmosphäre der Erde besteht in ihren unteren Schichten vorwiegend aus Stickstoff und Sauerstoff. Die Konstanten R_0 dieser beiden Gase unterscheiden sich wenig voneinander, so dass man nach (14) auch ihre virtuellen Höhen als einander gleich setzen kann. Es wird also $H_1 = H_2 = H$, während die Dichte ϱ_0 der trockenen Luft an der Erdoberfläche durch $\varrho_0 = \varrho_1 + \varrho_2$ dargestellt ist. Für trockene Luft gilt also die Formel (10) genügend genau.

Bei konstant angenommenem θ ist nach (3) und (14)

$$p(x) = H \varrho(x) \quad p(0) = H \varrho_0,$$

d. h. wegen (10)

$$(16) \quad p(x) = p(0) e^{-\frac{x}{H}}$$

wodurch man zu der für die isotherm vorausgesetzte Atmosphäre giltigen barometrischen Formel gelangt, die die Grundlage für das barometrische Höhenmessen bildet und in der für Mitteleuropa $H=8000 m$ zu setzen ist.

Vorstehend ist die Anwesenheit des Wasserdampfes in der Atmosphäre nicht in Betracht gezogen worden. Der Gehalt desselben ist fortwährenden Änderungen unterworfen, doch gehorcht sein durchschnittlicher Druck genügend genau der von Hann empirisch gefundenen Formel:

$$(17) \quad \frac{e(x)}{e(0)} = \left\{ \frac{p(x)}{p(0)} \right\}^3$$

in der e den Dampfdruck und p den Luftdruck bedeutet. Weil in einer isothermen Atmosphäre der Druck des ungesättigten Wasserdampfes genügend genau seiner Dichte ϱ' proportional ist, so folgt aus der obigen Formel

$$\varrho'(x) = \varrho_0' \left\{ \frac{p(x)}{p(0)} \right\}^3,$$

d. h. wegen (16)

$$(18) \quad \varrho'(x) = \varrho_0' e^{-\frac{3x}{H}},$$

welche Formel die Dichteabnahme des Wasserdampfes mit der Höhe H zum Ausdruck bringt. Dabei bedeutet H die virtuelle Höhe der Luftatmosphäre.

Setzt man

$$(19) \quad H' = \frac{H}{3},$$

so bekommt man

$$(20) \quad \varrho'(x) = \varrho_0' e^{-\frac{x}{H'}}.$$

also eine Gleichung von derselben Form wie (10). Dabei ist zu beachten, dass in (20) H' nicht die virtuelle Höhe einer Wasserdampf-atmosphäre bedeutet; diese ist viel grösser als H' , so dass der Wasserdampf mit der Höhe viel rascher abnimmt als dies aus der Theorie für vollkommene Gase folgen würde.

Aus (20) und (15) folgt, dass diese letztere Gleichung bei Beachtung der vorstehenden Bemerkung für alle Gase der Atmosphäre inklusive Wasserdampf als geltend zu betrachten ist.

§ 96. Das Bouguer-Lambertsche Gesetz. Lange Zeit, bevor man den Einfluss der Erdatmosphäre auf die Wärmestrahlung der Sonne einer theoretischen Behandlung unterzog, hat man dies hinsichtlich des Sonnenlichtes getan. Weil zwischen dem sichtbaren und dem unsichtbaren Teil der Sonnenstrahlung kein prinzipieller physikalischer Unterschied vorhanden ist, kann man die für das Sonnenlicht gewonnenen Gesetze, die die Grundlage der Extinktionstheorie bildeten, auch für die gesamte Sonnenstrahlung sinngemäss anwenden. Zu diesen gehört das Bouguer-Lambertsche Gesetz. Nach demselben ist die Schwächung, die das Licht beim Durchgange durch eine unendlich dünne Atmosphärenschicht erleidet, proportional der Intensität des Lichts und dem zurückgelegten Elementarweg. Dieses Gesetz, für die gesamte Sonnenstrahlung angewendet, kann mathematisch wie folgt zum Ausdruck gebracht werden. Bezeichnet J' die Intensität der Sonnenstrahlung am Beginn, und $(J' + dJ')$ am Ende ihres Elementarweges ds durch die Atmosphärenschicht, so ist:

$$dJ' = i \cdot J' \cdot ds,$$

worin i einen Proportionalitätsfaktor bedeutet.

Nach dem, was in vorhergehenden Paragraphen über die Schichtung der Atmosphäre gesagt wurde, ist der Faktor i eine später noch zu ermittelnde Funktion der Entfernung x von der Erdoberfläche. Nimmt man auf die im § 42 besprochene Refraktion der Sonnenstrahlung keine Rücksicht, da sie für die Berechnung der durch die Atmosphäre durchgelassenen Strahlungsmengen von untergeordneter Be-

deutung ist, so ist der Elementarweg ds gleich $\sec z \, dx$, worin z die Zenitdistanz der Sonne bedeutet. Man bekommt also statt der vorstehenden die Gleichung:

$$(21) \quad dJ'(x) = i(x) J'(x) \sec z \, dx.$$

Diese Gleichung drückt das Bouguer-Lambertsche Gesetz in Differentialform aus. Es folgt aus derselben:

$$(22) \quad \frac{d J'(x)}{J'(x)} = i(x) \sec z \, dx,$$

welche Differentialgleichung sofort integriert werden kann. Erstreckt sich die praktisch fühlbare Atmosphärenhülle der Erde bis zu einer Höhe $x = h$ und bezeichnet man die Intensität der Sonnenstrahlung in dieser Höhe mit $J'(h)$, so bekommt man durch Integration der vorstehenden Differentialgleichung:

$$\log_{\text{nat}} \frac{J'(x)}{J'(h)} = \sec z \int_h^x i(x) \, dx$$

oder

$$(23) \quad J'(x) = J'(h) e^{-\sec z \int_x^h i(x) \, dx}.$$

Die Intensität der die Erdoberfläche erreichenden Sonnenstrahlung ist gleich:

$$(24) \quad J'(0) = J'(h) e^{-\sec z \int_0^h i(x) \, dx}.$$

Die Grösse

$$(25) \quad p = e^{-\int_0^h i(x) \, dx}$$

wird der Transmissionskoeffizient der Atmosphäre genannt. Es ist also:

$$(26) \quad J'(0) = J'(h) p^{\sec z},$$

aus welcher Gleichung die physikalische Bedeutung der Grösse p ersichtlich ist. Bei zenitalem Stand der Sonne, d. h. für $z=0$, gelangt zur Erdoberfläche der Betrag $J'(h)p$ der in die Atmosphäre eindringenden Sonnenstrahlung, es stellt also p jenen Bruchteil dieser Sonnenstrahlung dar, der bei senkrechtem Durchgang durch die Atmosphäre bis zur Erdoberfläche gelangt.

Die Gleichung (26) ermöglicht die Berechnung der mittleren Bestrahlung der Erde, der täglichen und der den astronomischen Jahreszeiten zugehörigen Strahlungsmengen bei Berücksichtigung der Schwächung der Sonnenstrahlung durch die wolkenlos gedachte Atmosphäre. Dies geschieht auf folgende Weise.

Die praktisch fühlbare Mächtigkeit h der Atmosphäre ist im Vergleich zur Entfernung ϱ der Sonne von der Erde sehr klein, weshalb die Intensität $J'(h)$ der Sonnenstrahlung an der oberen Grenze der Atmosphäre durch den Ausdruck

$$(27) \quad J'(h) = \frac{J_0}{\varrho^2}$$

veranschaulicht ist, worin J_0 die Solarkonstante bedeutet und ϱ in Erdbahnhalfmessern zu messen ist.

Beim Auffallen der Sonnenstrahlung auf die Erdoberfläche ist ihre Intensität nach (26) und (27) gleich:

$$(28) \quad J'(0) = \frac{J_0}{\varrho^2} p^{\sec z}.$$

Diese Strahlung schliesst mit der Normalen der vollkommen horizontal gedachten Erdoberfläche einen Winkel ein, der der Zenitdistanz z der Sonne gleich ist. Infolgedessen erhält die Flächeneinheit der Erdoberfläche während der Zeiteinheit eine Strahlungsmenge, die ich mit $\frac{dW'}{dt}$ bezeichnen will, und die nach dem im § 71 gesagten durch die Formel

$$(29) \quad \frac{dW'}{dt} = \frac{J_0}{\varrho^2} p^{\sec z} \cos z$$

dargestellt ist.

Diese Formel wird mit $p=1$, d. h. bei Abwesenheit oder vollständiger Durchlässigkeit der Atmosphäre, identisch mit der Formel (7) des vierten Abschnittes dieses Buches.

Es soll vorerst die nicht unwichtige Frage beantwortet werden, wie die Schwächung der Sonnenstrahlung durch die Atmosphäre im durchschnittlichen Bestrahlungszustand der ganzen Erdoberfläche zur Auswirkung gelangt. Zieht man zu

diesem Zwecke die Gleichungen (8), (11) und (13) des vierten Abschnittes heran, so wird:

$$(30) \quad \cos z = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos \psi_1,$$

worin δ die Deklination der Sonne, φ die geographische Breite und ψ_1 die geographische Länge bedeutet, welch letztere von jenem Meridiane der Erdoberfläche zu zählen ist, über dem sich die Sonne gerade befindet.

Die Gleichungen (29) und (30) drücken das Gesetz der Verteilung der Sonnenstrahlung auf der Oberfläche der Erde in einem bestimmten Augenblicke aus, bei Berücksichtigung des Einflusses der Atmosphäre. Weil $p < 1$ ist, und z nur im ersten Quadrant liegen kann, erreicht die Bestrahlung (29) ihren Maximalwert $\frac{J_0}{\rho^2} p$ in jenem Punkte der Erdoberfläche, für den $z=0$ ist, d. h. in dessen Zenit die Sonne gerade sich befindet. Die Bestrahlung wird gleich Null für alle Punkte der Erdoberfläche, für die $z=90^\circ$ ist, d. h. für welche die Gleichung (15) des vierten Abschnittes befriedigt ist.

Das soeben gesagte gilt solange auf die Refraktion der Sonnenstrahlen keine Rücksicht genommen wird. Infolge dieser verschiebt sich, wie im § 42 angegeben, der Grenzkreis der Bestrahlung um $34' 54''$ gegen die unbestrahlte Halbkugel, so dass tatsächlich 50,5 Prozent der Erdoberfläche bestrahlt erscheinen.

Will man ohne Berücksichtigung der Refraktion die totale Bestrahlung der Erdoberfläche ermitteln, die ich mit J'_t bezeichnen will, so ist folgendes zu berücksichtigen.

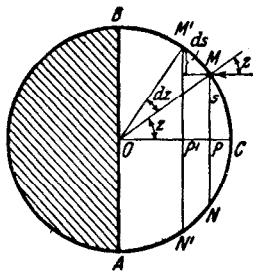


Fig. 43

Stellt ACB (Fig. 43) die bestrahlte Halbkugel der Erde dar, so treffen im Punkte C die Sonnenstrahlen die Erdoberfläche senkrecht. Verbindet man den Punkt M der bestrahlten Halbkugel mit ihrem Mittelpunkt O , so schliesst der Radius $OM=R$ mit OC den Winkel z ein, der gleich ist der Zenitdistanz der Sonne für den Punkt M als Standpunkt. Lässt man den Radius OM um OC rotieren, so beschreibt der Punkt M einen Kreis der Erdkugel, von dessen Punkten aus man

die Sonne in der Zenitdistanz z erblickt. Lässt man den Winkel z um dz anwachsen, so gelangt man zu einem anderen unendlich benachbarten Kreise der Erdkugel. Alle Punkte des zwischen diesen zwei Kreisen eingeschlossenen Flächenelementes df werden von einer durch die Atmosphäre geschwächten Strahlung getroffen, deren Intensität durch (28) gegeben ist. Die auf dieses Element während der Zeiteinheit auffallende Strahlungsmenge wird erhalten, wenn man jene Intensität mit der senkrecht zur Strahlungsrichtung orientierten Projektion df_1 des erwähnten Flächenelementes multipliziert. Setzt man $PM=s$; $P'M'=s+ds$, so ist $df_1=2\pi s ds$, so dass auf das Element df während der Zeiteinheit die Strahlung $J'(0) 2\pi s ds$ auffällt. Nun ist $s=R \sin z$; $ds=R \cos z dz$ und es ist deshalb die auf die ganze bestrahlte Erdhalbkugel während der Zeiteinheit auffallende Strahlung durch die Formel gegeben:

$$(31) \quad J_t' = 2\pi R^2 \frac{J_0}{\varrho^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} p^{\sec z} \sin z \cos z dz.$$

Vergleicht man die durch die vorstehende Formel gegebene Strahlung mit jener, die sich ohne Berücksichtigung der Atmosphäre ergibt und die durch die Formel (16) des vierten Abschnittes veranschaulicht ist, so findet man, dass das Verhältnis dieser beiden Bestrahlungen durch die Zahl

$$(32) \quad \kappa = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} p^{\sec z} \sin z \cos z dz$$

gegeben ist.

In der beiliegenden Tabelle XV sind die Werte dieser Verhältniszahl für verschiedene Transmissionskoeffizienten p gegeben.

Tabelle XV
Numerische Werte von κ

| | | | | | |
|----------|-------|-------|-------|-------|-------|
| p | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 | 1,0 |
| κ | 0,435 | 0,550 | 0,680 | 0,830 | 1,000 |

Die tägliche Strahlungsmenge an der Breite φ , die ich bei Berücksichtigung der Schwächung durch die Atmosphäre mit W_t' bezeichnen will, ist nach dem im § 74 gesagten dargestellt durch:

$$(33) \quad W'_t = \frac{\tau}{2\pi} \int_{-\omega_0}^{+\omega_0} \frac{dW'}{dt} d\omega$$

d. h. wegen (29) durch die Formel:

$$(34) \quad W'_t = \frac{\tau}{2\pi} \cdot \frac{J_0}{\rho^2} \int_{-\omega_0}^{+\omega_0} p^{\sec z} \cos z d\omega$$

veranschaulicht. Dabei sind z und ω_0 durch die Formeln (8) und (32) des vierten Abschnittes gegeben. Für ρ und δ sind die dem wahren Mittag entsprechenden Grössen einzusetzen. Die numerische Auswertung des vorstehenden Integrales wird mittels mechanischer Quadratur bewerkstelligt.

Die mittlere Bestrahlung der Breite φ , die bei Berücksichtigung der Atmosphäre mit w' bezeichnet werden möge, ist gleich:

$$(35) \quad w' = \frac{1}{2\pi} \int_{-\psi_0}^{+\psi_0} \frac{dW'}{dt} d\psi_1,$$

wobei ψ_0 durch die Gleichung (20) des vierten Abschnittes gegeben ist.

Die während der Zurücklegung des Intervalles λ' bis λ'' der scheinbaren Sonnenbahn der Breite φ zugestrahelte Menge ist nach den Gleichungen (79) und (80) des vierten Abschnittes und der vorstehenden Gleichung (29) durch

$$(36) \quad W' = \frac{T}{4\pi^2} \cdot \frac{J_0}{\sqrt{1-e^2}} \int_{\lambda'}^{\lambda''} d\lambda \int_{-\psi_0}^{+\psi_0} p^{\sec z} \cos z d\psi_1$$

gegeben. Mit Benützung dieser Formel kann man die den astronomischen Jahreszeiten zugehörigen Quantitäten der durch die Atmosphäre geschwächten Bestrahlung berechnen, wobei man bei der numerischen Auswertung des vorstehenden Integrales zur mechanischen Quadratur greifen muss.

§ 97. Numerische Ergebnisse. Wie aus dem vorstehenden ersichtlich, ist die numerische Berechnung der täglichen und der jahreszeitlichen Strahlungsmengen äusserst umständlich; sie wurde zuerst von Angot¹⁾, für die numerischen

1) Angot, Recherches théoriques sur la distribution de la chaleur à la surface du globe. Annales du Bureau Météorologique de France. Mémoires de 1883. Paris 1885.

Tabelle XVI
(Fortsetzung)
Transmissionskoeffizient $p=0.7$

| Datum | Geographische Breite | | | | | | | | | | |
|-------------|----------------------|-----|-----|-----|------|------|------|------|------|------|-----|
| | Länge der Sonne | 0° | 45° | 90° | 135° | 180° | 225° | 270° | 315° | 360° | |
| | + 90° | | 224 | 454 | 222 | | | | | | |
| | + 80° | 13 | 251 | 456 | 249 | 13 | | | | | 13 |
| | + 70° | 82 | 334 | 481 | 331 | 81 | | | | | 82 |
| | + 60° | 179 | 421 | 536 | 416 | 177 | 23 | 1 | 24 | 179 | 179 |
| | + 50° | 280 | 492 | 580 | 487 | 276 | 94 | 38 | 95 | 280 | 280 |
| | + 40° | 374 | 545 | 605 | 540 | 369 | 188 | 114 | 190 | 374 | 374 |
| | + 30° | 454 | 573 | 606 | 567 | 447 | 290 | 216 | 292 | 454 | 454 |
| | + 20° | 514 | 578 | 586 | 573 | 506 | 386 | 319 | 390 | 514 | 514 |
| | + 10° | 550 | 559 | 540 | 554 | 543 | 470 | 421 | 474 | 550 | 550 |
| | 0 | 563 | 516 | 476 | 511 | 555 | 535 | 508 | 540 | 563 | 563 |
| | - 10° | 550 | 453 | 394 | 449 | 543 | 580 | 577 | 586 | 550 | 550 |
| | - 20° | 514 | 372 | 299 | 368 | 506 | 600 | 625 | 606 | 514 | 514 |
| | - 30° | 454 | 279 | 202 | 276 | 447 | 594 | 647 | 600 | 454 | 454 |
| | - 40° | 374 | 181 | 106 | 179 | 369 | 565 | 646 | 571 | 374 | 374 |
| | - 50° | 280 | 91 | 35 | 90 | 276 | 510 | 620 | 515 | 280 | 280 |
| | - 60° | 179 | 23 | 1 | 22 | 177 | 436 | 572 | 440 | 179 | 179 |
| | - 70° | 82 | | | | 81 | 347 | 514 | 350 | 82 | 82 |
| | - 80° | 13 | | | | 18 | 261 | 487 | 263 | 13 | 13 |
| | - 90° | | | | | | 233 | 484 | 235 | | |
| 21. März | | | | | | | | | | | |
| 6. Mai | | | | | | | | | | | |
| 22. Juni | | | | | | | | | | | |
| 8. August | | | | | | | | | | | |
| 23. Septem. | | | | | | | | | | | |
| 8. Novem. | | | | | | | | | | | |
| 22. Dezem. | | | | | | | | | | | |
| 4. Februar | | | | | | | | | | | |
| 21. März | | | | | | | | | | | |

Tabelle XVI
(Fortsetzung)

Transmissionskoeffizient $p=0,8$

| Datum | Geographische Breite | | | | | | | | | | |
|-------------|----------------------|-----|-----|-----|------|------|------|------|------|------|--|
| | Länge der Somme | 0° | 45° | 90° | 135° | 180° | 225° | 270° | 315° | 360° | |
| | + 90° | 360 | 634 | 357 | 30 | 30 | 1 | 5 | 1 | 30 | |
| | + 80° | 376 | 627 | 372 | 30 | 30 | 1 | 5 | 1 | 132 | |
| | + 70° | 447 | 624 | 442 | 130 | 247 | 45 | 5 | 45 | 250 | |
| | + 60° | 250 | 670 | 531 | 531 | 247 | 45 | 5 | 45 | 250 | |
| | + 50° | 367 | 707 | 603 | 361 | 361 | 140 | 66 | 141 | 367 | |
| | + 40° | 470 | 730 | 655 | 463 | 463 | 255 | 169 | 257 | 470 | |
| | + 30° | 556 | 728 | 682 | 548 | 548 | 371 | 286 | 374 | 556 | |
| | + 20° | 620 | 699 | 683 | 611 | 611 | 477 | 405 | 482 | 620 | |
| | + 10° | 659 | 649 | 663 | 650 | 650 | 572 | 519 | 577 | 659 | |
| | 0 | 672 | 621 | 577 | 615 | 663 | 645 | 616 | 651 | 672 | |
| | — 10° | 659 | 551 | 486 | 546 | 650 | 694 | 693 | 701 | 659 | |
| | — 20° | 620 | 460 | 380 | 456 | 611 | 716 | 747 | 722 | 620 | |
| | — 30° | 556 | 358 | 268 | 354 | 548 | 715 | 777 | 722 | 556 | |
| | — 40° | 470 | 246 | 158 | 243 | 463 | 686 | 779 | 692 | 470 | |
| | — 50° | 367 | 135 | 62 | 134 | 361 | 631 | 755 | 638 | 367 | |
| | — 60° | 250 | 43 | 4 | 43 | 247 | 556 | 715 | 561 | 250 | |
| | — 70° | 132 | 1 | | 1 | 130 | 463 | 666 | 468 | 132 | |
| | — 80° | 30 | | | | 30 | 390 | 669 | 393 | 30 | |
| | — 90° | | | | | | 374 | 676 | 377 | | |
| 21. März | | | | | | | | | | | |
| 6. Mai | | | | | | | | | | | |
| 22. Juni | | | | | | | | | | | |
| 8. August | | | | | | | | | | | |
| 23. Septem. | | | | | | | | | | | |
| 8. Novem. | | | | | | | | | | | |
| 22. Dezem. | | | | | | | | | | | |
| 4. Februar | | | | | | | | | | | |
| 21. März | | | | | | | | | | | |

Tabelle XVI
(Fortsetzung)
Transmissionskoeffizient $p = 0,9$

| Datum | Geographische Breite | | | | | | | | | | |
|----------|----------------------|-----|-----|-----|------|------|------|------|------|------|--|
| | Länge der Sonne | 0° | 45° | 90° | 135° | 180° | 235° | 270° | 315° | 360° | |
| 21. März | + 90° | 69 | 548 | 852 | 542 | 68 | 5 | 16 | 83 | 69 | |
| | + 80° | 205 | 544 | 838 | 539 | 68 | 5 | 110 | 207 | 205 | |
| | + 70° | 205 | 589 | 798 | 583 | 202 | 5 | 236 | 341 | 205 | |
| | + 60° | 343 | 670 | 824 | 663 | 338 | 82 | 16 | 83 | 343 | |
| | + 50° | 469 | 740 | 854 | 733 | 463 | 206 | 110 | 207 | 469 | |
| | + 40° | 579 | 790 | 867 | 782 | 571 | 338 | 236 | 341 | 579 | |
| | + 30° | 671 | 815 | 857 | 807 | 661 | 467 | 373 | 472 | 671 | |
| | + 20° | 737 | 813 | 824 | 805 | 727 | 583 | 506 | 589 | 737 | |
| | + 10° | 778 | 787 | 767 | 779 | 767 | 685 | 629 | 691 | 778 | |
| | 0 | 792 | 736 | 689 | 729 | 780 | 763 | 735 | 771 | 792 | |
| | - 10° | 778 | 660 | 589 | 654 | 767 | 816 | 819 | 824 | 778 | |
| - 20° | 737 | 562 | 474 | 556 | 727 | 844 | 879 | 852 | 737 | | |
| - 30° | 671 | 450 | 350 | 446 | 661 | 845 | 915 | 854 | 671 | | |
| - 40° | 579 | 326 | 221 | 323 | 571 | 819 | 926 | 827 | 579 | | |
| - 50° | 469 | 198 | 103 | 196 | 463 | 768 | 911 | 775 | 469 | | |
| - 60° | 343 | 79 | 15 | 78 | 338 | 695 | 880 | 702 | 343 | | |
| - 70° | 205 | 5 | | 4 | 202 | 611 | 852 | 617 | 205 | | |
| - 80° | 69 | | | | 68 | 564 | 894 | 570 | 69 | | |
| - 90° | | | | | | 568 | 910 | 573 | | | |

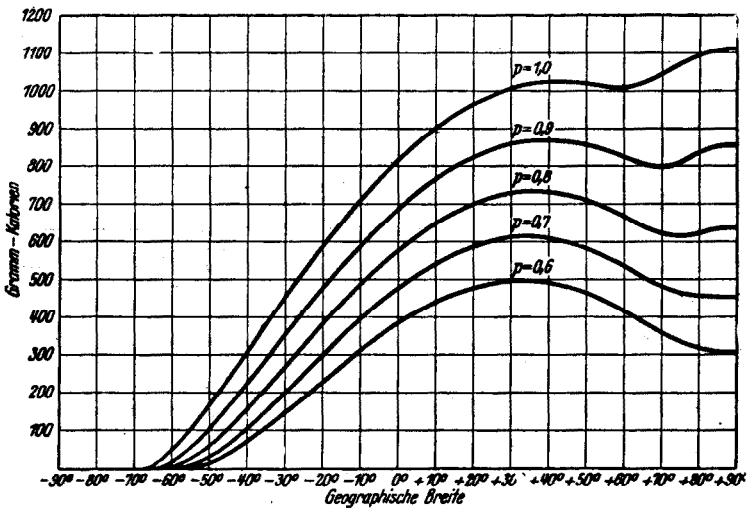
Tabelle XVII

Die während der astronomischen Jahreszeiten bis zur Erdoberfläche durchgelassenen Strahlungsmengen bei verschiedenem Transmissionskoeffizienten p der Atmosphäre in Gramm-Kalorien pro cm^2 für $J_0 = 2$ Gr.-Kal. pro cm^2 und Minute

| Geograph. Breite | $p = 0,6$ | | | $p = 0,7$ | | | $p = 0,8$ | | | $p = 0,9$ | | | Geograph. Breite |
|---------------------|---------------------|---------------------|----------------|---------------------|---------------------|----------------|---------------------|---------------------|----------------|---------------------|---------------------|----------------|---------------------|
| | Sommer- halbjahr | Winter- halbjahr | Ganzes Jahr | Sommer- halbjahr | Winter- halbjahr | Ganzes Jahr | Sommer- halbjahr | Winter- halbjahr | Ganzes Jahr | Sommer- halbjahr | Winter- halbjahr | Ganzes Jahr | |
| 0° | 78.050 | 78.050 | 156.100 | 95.930 | 95.930 | 191.860 | 115.500 | 115.500 | 231.000 | 136.750 | 136.750 | 273.500 | 0° |
| 10° | 84.150 | 68.480 | 152.630 | 102.880 | 85.200 | 188.080 | 123.070 | 103.610 | 226.680 | 145.060 | 123.910 | 268.970 | 10° |
| 20° | 86.150 | 55.960 | 142.110 | 105.510 | 71.000 | 176.510 | 126.230 | 87.940 | 214.170 | 149.050 | 106.870 | 255.920 | 20° |
| 30° | 84.360 | 41.760 | 126.120 | 103.720 | 54.800 | 158.520 | 125.070 | 69.530 | 194.600 | 148.320 | 87.100 | 235.420 | 30° |
| 40° | 78.470 | 27.140 | 105.610 | 97.720 | 37.240 | 134.960 | 118.970 | 49.750 | 168.720 | 142.640 | 64.900 | 207.540 | 40° |
| 50° | 68.900 | 14.100 | 83.000 | 87.620 | 21.040 | 108.660 | 108.660 | 29.980 | 138.684 | 132.640 | 42.080 | 174.720 | 50° |
| 60° | 56.700 | 5.150 | 61.850 | 74.260 | 8.420 | 82.680 | 94.990 | 13.360 | 108.350 | 119.390 | 20.830 | 140.220 | 60° |
| 70° | 42.600 | 1.050 | 43.650 | 59.010 | 2.210 | 61.220 | 79.000 | 4.000 | 83.000 | 104.350 | 7.150 | 111.500 | 70° |
| 80° | 30.720 | 0 | 30.720 | 46.180 | 110 | 46.290 | 67.110 | 320 | 67.430 | 95.300 | 1.050 | 96.350 | 80° |
| 90° | 25.980 | | 25.980 | 41.230 | | 41.230 | 62.480 | | 62.480 | 92.670 | | 92.670 | 90° |

Werte des Transmissionskoeffizienten von 0,6; 0,7; 0,8; 0,9 durchgeführt. Bei der Berechnung der täglichen Strahlungsmengen setzte Angot die Erdbahn als kreisförmig voraus und wählte als Einheit der Strahlung den tausendsten Teil der dem Aequator ohne Berücksichtigung des Einflusses der Atmosphäre zur Zeit des Aequinoktiums zugestrahlten täglichen Menge; er setzte also für $\varphi=0$; $\delta=0$; $\varrho=1$; $p=1$; $W_i=1000$. Bei der Berechnung der jahreszeitlichen Strahlungsmengen wurde als Einheit eine tausendmal grössere als die vorhergehende gewählt.

Ich habe die Angot'schen Rechnungsergebnisse mit den erforderlichen aus der Elliptizität der Erdbahn sich ergebenden Korrekturen versehen und sie auf die von mir bei der Berechnung der Tabellen V und VII benützten Einheiten und Sonnenlängen umgerechnet. Die Ergebnisse dieser Rechnung sind in den beiden Tabellen XVI und XVII wiedergegeben.



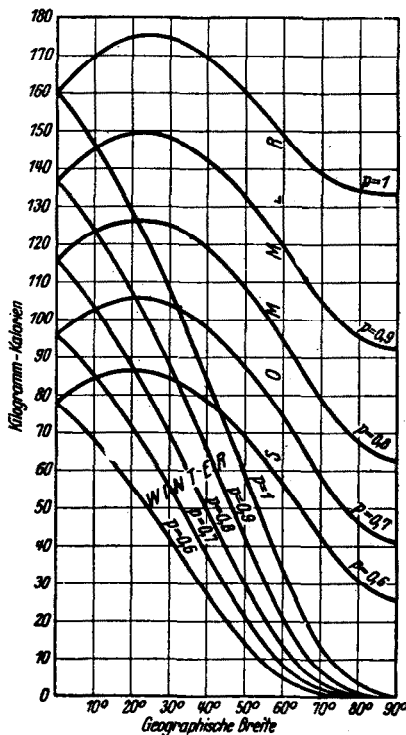
Die Solstitialbestrahlungen bei verschiedenen Werten des Transmissionskoeffizienten p
Fig. 44

Mittels der Tabellen V, VII, XVI und XVII kann man durch Interpolation die Strahlungsmengen für jeden Tag des Jahres, für jede Jahreszeit, für jede beliebige Breite und für alle noch in Betracht kommenden Werte des Transmissionskoeffizienten berechnen. Ein Teil der in diesen vier Tabellen enthaltenen Daten ist in den beiden beiliegenden Figuren graphisch veranschaulicht.

In der Fig. 44 sind jene täglichen Strahlungsmengen dargestellt, die am Tage des Sommersolstitiums der nördlichen Hemisphäre den verschiedenen Breiten der Erde zugestrahlt werden. Aus dieser Darstellung ist zu ersehen, wie sich bei einem gegebenen p der Einfluss der Atmosphäre fühlbar macht. Mit abnehmendem p macht sich dieser Einfluss in dem Sinne geltend, dass die höheren Breiten in ein ungünstigeres Verhältniss kommen. Während z. B. bei Abwesenheit oder vollständiger Durchlässigkeit der Atmosphäre der Pol zur Zeit des zugehörigen Sommer-

solstitiums der meistbestrahlte Punkt der Hemisphäre ist, ist dies nicht mehr der Fall bei einem Transmissionskoeffizient von 0,9. Bei einem Transmissionskoeffizient von 0,7 erhält der Pol, selbst zur Zeit der Sonnenwende, weniger direkte Strahlung als jede andere Breite der Hemisphäre. Für $0,7 < p < 0,9$ bildet sich noch über dem Pole zur Zeit der Sonnenwende ein Nebenmaximum aus, für $p < 0,7$ rückt das Minimum der Bestrahlung vom Pole nicht weg.

In der Fig. 45 sind sämtliche Daten der Tabelle XVII graphisch veranschaulicht, auch wurde dieses Graphikon durch die der Tabelle VII entnommenen Werte für $p = 1$ vervollständigt. Die Schwächung der Sonnenstrahlung durch die Atmosphäre



Die den astronomischen Halbjahren entsprechenden Strahlungsmengen bei verschiedenen Werten von p

Fig. 45

ist auch hier deutlich sichtbar. Die von der Atmosphäre durchgelassenen Strahlungsmengen nehmen mit der Verminderung des Transmissionskoeffizienten gegen die Pole rasch ab. Für $p = 0,6$ würden die Pole nur den fünften Teil der Jahresbestrahlung erhalten, die an diesen Stellen die obere Grenze der Atmosphäre erreicht.

Es wäre falsch anzunehmen, dass mit dieser starken Abnahme der direkten Sonnenstrahlung mit zunehmender Breite eine ebensolche Abnahme der Temperatur Hand in Hand gehe. Je mehr die Atmosphäre die eindringende Sonnenstrahlung auf

ihrem Wege schwächt, um so grössere Beträge der strahlenden Energie speichert sie in ihrem Innern durch Absorption auf und führt sie der Erdoberfläche als dunkle Strahlung zu.

§ 98. Die Strahlungsbilanz der Erde. Beim Eintritt der Sonnenstrahlen in die Erdatmosphäre erfährt die Energie, die in diesen Strahlen enthalten ist, mannigfaltige Umwandlungen. Die im § 95 besprochene Zunahme der Dichte der Atmosphäre gegen die Erdoberfläche zu hat zur Folge, dass die Sonnenstrahlen von ihrer ursprünglichen Richtung schwach abgelenkt und zum Lot gebrochen werden. Diese Erscheinung, Refraktion genannt und im § 42 besprochen, übt keinen nennenswerten Einfluss auf den Bestrahlungszustand der Erde aus und muss hier nicht berücksichtigt werden.

Eine ungleich wichtigere Beeinflussung der Sonnenstrahlung durch die Atmosphäre besteht darin, dass an den Molekülen der Atmosphäre ein Bruchteil der Sonnenstrahlung nach allen Richtungen reflektiert, ein anderer Bruchteil in die Energie der Moleküle umgewandelt wird, während der Rest als direkte Sonnenstrahlung bis zur Erdoberfläche gelangt. Durch diese Beeinflussungen der Sonnenstrahlung, von denen die erste die diffuse Reflexion, die zweite die Absorption genannt wird, wird jedes Molekül der Atmosphäre zum Ausgangspunkt zweier Strahlungen: der diffusen Sonnenstrahlung und der durch den Temperaturzustand des Moleküls bedingten dunklen Strahlung der Atmosphäre. Diese beiden Strahlungen breiten sich von ihrem Ursprünge nach allen Richtungen aus, um schliesslich entweder an die Erdoberfläche oder in den Weltraum zu gelangen. Dabei werden sie auf ihrem Wege durch die Atmosphäre ähnlich wie die direkten Sonnenstrahlen beeinflusst.

Die Oberfläche der Erde wird nach dem soeben gesagten von einer strahlenden Energie getroffen, die aus drei verschiedenen Arten von Strahlungen zusammengesetzt ist: der direkten Sonnenstrahlung, der diffusen Sonnenstrahlung und der dunklen Strahlung der Atmosphäre. Von dieser strahlenden Energie wird ein Teil von der Erdoberfläche zurückreflektiert, um seinen Rückweg durch die Atmosphäre zu nehmen und von derselben, wie bereits geschildert, beeinflusst zu werden; der verbleibende Teil wird von der festen Oberfläche der Erde oder von den dieselbe überlagernden Flüssigkeitsmassen aufgenommen und zu deren Temperaturerhöhung verbraucht. Der Temperaturzustand der Erdoberfläche ruft seinerseits eine dunkle Ausstrahlung der Erdoberfläche hervor, die sich gegen den Weltraum ausbreitet und von der Atmosphäre ähnlich wie die übrigen Strahlungen beeinflusst wird.

Sind in der Atmosphäre Wolkenbildungen enthalten, so werden alle Strahlen, die auf diese Bildungen auffallen, teilweise reflektiert, teilweise durchgelassen und teilweise absorbiert, um die Ursache einer von diesen Wolken ausgehenden Strahlung zu werden.

Es liegt in der Natur der Sache, dass es ungemein schwer ist, die Beeinflussungen, die die Sonnenstrahlung und die dunkle Ausstrahlung der Erdoberfläche durch die Atmosphäre erleiden, quantitativ zu erfassen. Seit der ersten durch die Smithsonianische Institution zu Washington erzielten zuverlässigen Ermittlungen der Solarkonstante hat es noch drei Jahrzehnte gedauert, bis man die einzelnen, nach den vor-

stehend mitgeteilten Gesichtspunkten kategorisierten prozentuellen Bestandteile der Sonnenstrahlung und der Erdausstrahlung, also die Strahlungsbilanz der Erde, mit zufriedenstellender Genauigkeit ermitteln konnte. Als gegenwärtiges Endergebnis dieser langjährigen Bemühungen ist die Strahlungsbilanz von F. Baur und H. Philipps zu betrachten, die eine wohldurchdachte Synthese von Theorie und Erfahrung darstellt¹⁾. Nachdem diese Forscher vorerst eine in die Einzelheiten reichende theoretische Untersuchung über den jährlichen Gang der Bestrahlung der einzelnen Zonen der nördlichen Hemisphäre und über den Zusammenhang zwischen Einstrahlung und Temperatur durchgeführt hatten, gingen sie daran, aus dem durch die Beobachtungen gegebenen tatsächlichen Temperaturfeld der Atmosphäre die beiden in derselben vor sich gehenden, nach oben und unten gerichteten Strahlungsströme zu ermitteln und zu zergliedern.

Die Ergebnisse der Arbeit von Baur und Philipps sind in der nachstehenden Strahlungsbilanz der nördlichen Hemisphäre zusammengefasst, wobei die einzelnen Strahlungen in Prozenten der an der oberen Grenze der Atmosphäre anlangenden Sonnenstrahlung angegeben sind.

Kurzwellige Strahlung

| | |
|--|-----|
| 1. Ausseratmosphärische Sonnenstrahlung | 100 |
| 2. Vom Erdboden absorbierte direkte Sonnenstrahlung | 27 |
| 3. Vom Erdboden absorbierte indirekte Sonnenstrahlung | 16 |
| 4. Von den Wolken reflektierte direkte Strahlung | 30 |
| 5. Von der Erdoberfläche reflektierte direkte Strahlung | 3 |
| 6. Von der Lufthülle diffus nach dem Weltraum reflektierte Strahlung | 8 |
| 7. Von der Erdoberfläche reflektierte indirekte Strahlung | 1 |
| 8. Von der Lufthülle (einschliesslich Wolken) absorbierte Strahlung | 15 |

Langwellige Strahlung

| | |
|---|-----|
| 9. Temperaturstrahlung von der Erdoberfläche ausgehend | 120 |
| 10. Durchgelassener Teil der Erdoberflächenstrahlung | 8 |
| 11. Von der Lufthülle absorbierte langwellige Strahlung | 112 |
| 12. Von der Lufthülle abgegebene langwellige Strahlung | 146 |

¹⁾ Baur F. und Philipps H. Der Wärmehaushalt der Lufthülle der Nordhalbkugel im Januar und Juli und zur Zeit der Aequinoctien und Solstittien. Gerlands Beiträge zur Geophysik. 1. Mitteilung Bd. 42 (1934), 2. Mitteilung. Bd. 45 (1935). — Der Wärmehaushalt der Lufthülle der Nordhalbkugel. Ebenda, Bd. 47 (1936).

Von derselben entfallen auf

| | |
|--------------------|----|
| 13. Ausstrahlung | 50 |
| 14. Gegenstrahlung | 96 |

Vertikal transportierte Wärme

| | |
|--|----|
| 15. Von der Lufthülle durch vertikalen Austausch abgegebene und vom Erdboden aufgenommene Wärmemenge | 4 |
| 16. Vom Erdboden durch Verdunstung abgegebene und von der Lufthülle durch Kondensation aufgenommene Wärmemenge | 23 |

In der obigen Zusammenstellung gibt Post 1 die an der oberen Grenze der Atmosphäre von aussen anlangende Strahlung an; Post 4 (30%), Post 5 (3%), Post 6 (8%), Post 7 (1%), Post 10 (8%) Post 13 (50%) geben die von unten an die obere Grenze der Atmosphäre anlangenden Strahlungen an; ihre Summe ist gleich 100%, so dass an der oberen Grenze der Atmosphäre Einnahme und Ausgabe sich die Wage halten.

Post 2 (27%), Post 3 (16%), Post 14 (96%), Post 15 (4%) geben die dem Erdboden zugeführten, Post 9 (120%), Post 16 (23%) die von demselben abgegebenen Strahlungs- bzw. Wärmemengen an. Auch hier sind Einnahme (143%) und Ausgabe einander gleich.

Post 8 (15%), Post 11 (112%), Post 16 (23%) geben die von der Atmosphäre aufgenommenen, Post 12 (146%), Post 15 (4%) die von der Atmosphäre abgegebenen Wärmemengen an. Auch hier ist Einnahme (150%) gleich der Ausgabe.

Von der in die Erdatmosphäre eindringenden Sonnenstrahlung werden Post 4 (30%), Post 5 (3%), Post 6 (8%), Post 7 (1%), also zusammen 42 Prozent unbenützt in den Weltraum zurückgewiesen. Dieser Bruchteil der Sonnenstrahlung wird die Energiealbedo der Erde genannt. Ich will ihn lieber das Reflexionsvermögen der Erde samt ihrer Atmosphäre nennen und mit A bezeichnen. Nach der vorstehenden Strahlungsbilanz wäre also $A = 0,42$ zu setzen.

Hinsichtlich des numerischen Wertes des durchschnittlichen Transmissionskoeffizienten der Erdatmosphäre für die direkte und indirekte Sonnenstrahlung ergibt sich aus dem vorstehenden folgendes.

Von der nicht in den Weltraum zurückreflektierten Strahlung, also von den 58 Prozent der an der oberen Grenze der Atmosphäre anlangenden Strahlungsmenge, werden nach Post 8 der vorstehenden Zusammenstellung von der soeben angegebenen Strahlungsmenge 15 Prozent von der Lufthülle absorbiert und 43 Prozent durchgelassen. Dies ist gleich dem Bruchteil $x = \frac{43}{58} = 0,74$ der der Nordhalbkugel zugewiesenen und nicht zurückreflektierten Strahlung. Diesem Bruchteil entspricht nach der vorstehend mitgeteilten Tabelle XV ein für den senkrechten

Durchgang durch die Atmosphäre sich ergebende Transmissionskoeffizient $p_a = 0,84$.

Die dunkle Austrahlung der Erdoberfläche ist von der Zenitdistanz der Sonne unabhängig. Weil nach Post 9 und 10 der vorstehenden Zusammenstellung 8 von 120 Einheiten in den Weltraum durchgelassen werden, beträgt der Transmissionskoeffizient der Atmosphäre für die dunkle Strahlung der Erdoberfläche

$$p_a' = \frac{8}{120} = 0,067.$$

Man hätte also, die vorstehenden Zahlen zusammenfassend, für die nördliche Hemisphäre der Erde zu setzen:

$$(37) \quad A = 0,42 \quad p_a = 0,84 \quad p_a' = 0,067.$$

Ob und wie diese Zahlen abgeändert werden müssten, wenn man die ganze Erdkugel in Betracht ziehen würde, ist in der Abhandlung von Baur und Philipps nicht angegeben.

Zur Zeit, als ich in meiner „Théorie mathématique“ nach den damals vorhandenen Beobachtungsergebnissen die Strahlungsbilanz der Erde aufzustellen mich bemühte, ergaben sich aus denselben folgende numerische Werte der Grössen A , p_a und p_a'

$$(38) \quad A = 0,40 \quad p_a = 0,80 \quad p_a' = 0,05.$$

Dies sind, wie man sieht, abgerundete Zahlen, weil damals ein höherer Grad der Genauigkeit nicht zu erreichen gewesen wäre. Trotzdem entsprachen diese Werte recht gut den Anforderungen meiner Berechnungen. Sie bildeten mit dem Kurlbaumschen numerischen Wert der Konstante σ des Stefanschen Gesetzes, von dem nachstehend noch die Rede sein und Gebrauch gemacht werden wird, ein zusammenhängendes System von Konstanten, mit dem sich, wie nachfolgend gezeigt werden wird, aus dem der Tabelle VII zugrunde gelegten numerischen Wert der Solarkonstante eine mittlere Temperatur der untersten Luftschicht der Erdatmosphäre ergab, die nur um $0,1^\circ C$ von der beobachteten abwich.

Dieses Ergebnis kann wie folgt gedeutet werden. Fasst man unsere Erde als ein Pyrheliometer auf, so sind die Grössen A , p_a , p_a' und σ als Konstanten dieses riesigen Instrumentes zu betrachten. Die durch unzählige Beobachtungen ermittelte Temperatur der untersten Luftschicht der Erdatmosphäre stellt die an diesem Instrument zwecks Ermittlung der Intensität der Sonnenstrahlen abgelesene Temperatur dar. Aus dieser Temperatur ergab sich mit den erwähnten Instrumentkonstanten eine Solarkonstante von rund 2 Grammkalorien.

Weist dieses Instrument andere Konstanten A , p_a , p_a' , σ auf, so müssen auch diese denselben richtigen Zusammenhang zwischen der Solarkonstante und der mittleren Temperatur an der Erdoberfläche ergeben. Benützt man also für A , p_a , p_a' die numerischen Werte (37), so muss, um den obigen richtigen Zusammenhang zu erhalten, der vierten Konstante σ ein entsprechender numerischer

Wert zugewiesen werden, mit Rücksicht darauf, dass die Erde nicht als ein vollkommener Strahler zu betrachten ist, wie dies noch nachträglich erörtert werden wird.

Ich werde meinen Berechnungen des Temperaturfeldes der Erde das von mir in meiner „Théorie mathématique“ und in der „Mathematischen Klimalehre“ benützte System der Konstanten A , p_a , p_a' , σ zugrunde legen, d. h. diese Berechnungen in ihrer ursprünglichen Form hier wiedergeben. Bei Benützung anderer numerischer Werte dieser Konstanten sind, ohne die Grundlagen der nachstehenden theoretischen Erörterungen anzutasten, keine abweichenden Hauptergebnisse der numerischen Ausrechnung zu erwarten.

KAPITEL XVII

Zusammenhang zwischen Einstrahlung und Temperatur im Falle eines stationären Bestrahlungszustandes

§ 99. Differentialgleichungen der Strahlungsvorgänge in der Atmosphäre. Schwarzschild war wohl der erste, der die Strahlungsvorgänge in der Atmosphäre durch Differentialgleichungen mathematisch erfasst hat¹⁾. Sie wurden im Jahre 1913 von Emden auf die Erdatmosphäre angewendet²⁾. Die Abhandlungen von Schwarzschild und Emden beziehen sich, wie aus ihren Titeln ersichtlich, auf das Strahlungsgleichgewicht, d. h. auf den stationären Strahlungszustand. Ich habe bereits im Jahre 1913 Untersuchungen über den variablen Bestrahlungszustand der Erde und der Planeten, wie er der Wirklichkeit entspricht, und den zugehörigen Temperaturzustand in Angriff genommen, diese Untersuchungen in meiner „Théorie mathématique“ fortgesetzt und, soweit sie die Erde betrafen, in der „Mathematischen Klimalehre“ zum Abschluss gebracht, wobei auch die Wärmeleitungsvorgänge im Erdboden mitberücksichtigt worden sind. Ich werde hier nach Ableitung der Differentialgleichungen für die variable Bestrahlung zuerst den einfacheren Fall des stationären Bestrahlungszustandes behandeln, um später auf den komplizierteren Fall der variablen Bestrahlung zu übergehen. Um die erwähnten Differentialgleichungen abzuleiten, müssen die im § 94 angeführten Annahmen gemacht werden. Es sollen ferner die durch Reflexionen an den Molekülen der Atmosphäre, an den Wolken und an der Erdoberfläche im Wärmehaushalt der Erde sich ergebenden Verluste der Sonnenstrahlung mathematisch derart ihre Berücksichtigung finden, dass man diese Verluste von der in die Atmosphäre eindringenden Sonnenstrahlung einfach in Abzug bringt, d. h. die an der oberen Grenze der Atmosphäre eindringende Sonnenstrahlung gleich

¹⁾ Schwarzschild, Ueber das Gleichgewicht der Sonnenatmosphäre. Nachrichten der königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. 1906.

²⁾ Emden, Ueber das Strahlungsgleichgewicht und die atmosphärische Strahlung. Münchener Sitzungsberichte. 1913.

$$(39) \quad J''(h) = (1-A) \frac{J_0}{\varrho^2}$$

setzt, worin h die Höhe der Atmosphäre und A das bereits gekennzeichnete Reflexionsvermögen der Erde samt ihrer Atmosphäre bedeutet.

Im Wärmehaushalt der Erde muss neben der direkten auch die diffuse Sonnenstrahlung berücksichtigt werden. Es soll dabei angenommen werden, dass für diese beiden Strahlungen das Bouguer-Lambert'sche Gesetz gültig ist. Bezeichnet also $J''(x)$ die Intensität der direkten und der diffusen Sonnenstrahlung in der Höhe x , so gilt analog der Gleichung (21) die Differentialgleichung:

$$(40) \quad dJ''(x) = a_1(x) J''(x) \sec z \, dx,$$

wobei $a_1(x) \, dx$ das Absorptionsvermögen der zwischen den Höhen x und $(x+dx)$ gelegenen Elementarschicht der Atmosphäre bei senkrechtem Durchgang der Strahlen bedeutet. Ueber die analytische Form der Funktion $a_1(x)$ wird später das notwendige gesagt werden.

Integriert man die Differentialgleichung (40) zwischen den Grenzen $x=h$ und $x=0$, so bekommt man:

$$(41) \quad J''(0) = J''(h) e^{-\sec z \int_0^h a_1(x) \, dx}$$

als die Intensität der auf die Erdoberfläche auffallenden und von derselben absorbierten direkten und diffusen Sonnenstrahlung.

Die Grösse:

$$(42) \quad p_a = e^{-\int_0^h a_1(x) \, dx}$$

wird der Transmissionskoeffizient der Atmosphäre für die direkte und diffuse Sonnenstrahlung genannt. Es ist also:

$$(43) \quad J''(0) = J''(h) p_a^{\sec z},$$

d. h. wegen (39)

$$(44) \quad J''(0) = (1-A) \frac{J_0}{\varrho^2} p_a^{\sec z}$$

Diese Strahlung schliesst, weil die Refraktion nicht zu berücksichtigen ist, mit der Normalen der Erdoberfläche den Winkel z ein, der gleich ist der Zenitdistanz der Sonne und der für den diffusen Teil der Strahlung nur als ein Durchschnittswert zu betrachten ist.

Auf die Flächeneinheit des Erdbodens fällt während der Zeiteinheit die Strahlungsmenge:

$$W(0, t) = (1-A) \frac{J_0}{\varrho^2} p_a^{\sec z} \cos z.$$

Es stellt

$$W_1(t) = \frac{J_0}{\varrho^2} \cos z$$

jene Strahlung dar, die bei Abwesenheit der Atmosphäre den Erdboden treffen würde. Es ist also

$$(45) \quad W(0, t) = (1-A) W_1(t) p_a^{\sec z}.$$

Diese Strahlung wird, weil in A alle Reflexionen bereits inbegriffen sind, von der Erdoberfläche vollkommen absorbiert.

Auf die in der Höhe x befindliche horizontale Elementarschicht der Atmosphäre fällt während der Zeiteinheit eine Strahlungsmenge auf, die mit $W(x, t)$ bezeichnet werden möge und die durch den Ausdruck:

$$(46) \quad W(x, t) = J''(x) \cos z$$

veranschaulicht ist.

Von dieser Strahlungsmenge wird von der Schicht der Betrag

$$(47) \quad dW(x, t) = dJ''(x) \cos z,$$

d. h. wegen (40) der Betrag

$$(48) \quad dW(x, t) = a_1(x) J''(x) dx$$

absorbiert.

Es ist wegen (46) und (48)

$$(49) \quad dW(x, t) = a_1(x) W(x, t) \sec z dx.$$

Ausser der Strahlung $W(x, t)$ durchsetzen die Atmosphäre dunkle Strahlungen, die von der Erdoberfläche gegen den Weltraum, d. h. von unten nach oben und solche, die von oben nach unten gerichtet sind. Zu diesen Strahlungen gehören die von der Erdoberfläche nach oben emittierte dunkle Strahlung und die von der Atmosphäre nach beiden Richtungen emittierten Strahlungen. Die von oben nach unten gerichtete Strahlung in der Höhe x und zur Zeit t soll mit $O(x, t)$ und jene von unten nach oben gerichtete mit $U(x, t)$ bezeichnet werden.

An der oberen Grenze der Atmosphäre, d. h. in der Höhe $x = h$, ist die Strahlung $O(x, t)$ gleich Null, d. h. es ist

$$(50) \quad O(h, t) = 0.$$

Zur Erdoberfläche gelangt von der Sonnenstrahlung der durch (45) dargestellte Betrag $W(0, t)$, und von der dunklen Ausstrahlung der Atmosphäre der Betrag $O(0, t)$, welche beide Strahlungen, weil in A bereits alle Reflexionen inbegriffen sind, von der Erdoberfläche vollständig absorbiert werden.

Ausser den durch die Strahlungen $W(0, t)$ und $O(0, t)$ zugeführten Wärmemengen gelangt zur Erdoberfläche noch jene, die derselben durch Wärmeleitung oder Konduktion aus dem Boden zugeführt wird. Diese in der Zeiteinheit und pro Flächeneinheit der Erdoberfläche zugeführte Wärmemenge sei mit Q_p bezeichnet. Alles in allem werden der Erdoberfläche während der Zeiteinheit die Wärmemengen $W(0, t)$, $O(0, t)$ und Q_p zugeführt und es wird sich auf derselben jene Temperatur einstellen, bei welcher der Zufluss der Wärme gleich dem Abfluss ist, d. h. bei welcher die Emission der Erdoberfläche, die mit E bezeichnet werden möge, gleich der Summe der drei erwähnten Wärmemengen ist. Hieraus folgt:

$$(51) \quad E = W(0, t) + O(0, t) + Q_p.$$

Von der in der Höhe x befindlichen Elementarschicht der Atmosphäre wird während der Zeiteinheit der durch (49) dargestellte Betrag der Sonnenstrahlung absorbiert, und von den Strahlungen $O(x, t)$ und $U(x, t)$ die Beträge $a_2(x) O(x, t) dx$ und $a_2(x) U(x, t) dx$, wobei $a_2(x) dx$ das Absorptionsvermögen der Elementarschicht für die dunklen Strahlungen bedeutet. Dieses Absorptionsvermögen ist, wie später auseinandergesetzt werden wird, verschieden von dem Absorptionsvermögen $a_1(x) dx$

der Schicht für die Sonnenstrahlung. Die Strahlungen, die die Elementarschicht durch jede ihrer beiden Begrenzungsebenen emittiert, mögen mit $\varepsilon(x, t) dx$ bezeichnet werden.

Aus dem vorstehenden folgt, dass in der Elementarschicht während der Zeiteinheit und pro Querschnittseinheit eine Wärmemenge aufgespeichert wird, die durch den Ausdruck:

$$(52) \quad dQ = [a_1(x) W(x, t) \sec z + a_2(x) O(x, t) + a_2(x) U(x, t) - 2\varepsilon(x, t)] dx$$

veranschaulicht ist.

Diese Wärmemenge wird zur Erhöhung der Temperatur der Elementarschicht verwendet. Bezeichnet $u(x, t)$ die in Celsiusgraden gemessene Temperatur der Elementarschicht zur Zeit t , so ist die pro Zeiteinheit stattgefundene Temperaturerhöhung durch $\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}$ veranschaulicht. Zwischen der zugeführten Wärmemenge dQ und der daraus sich ergebenden Temperaturerhöhung besteht die bekannte Relation:

$$(53) \quad dQ = c \varrho(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} dx,$$

worin $\varrho(x)$ die Dichte der Atmosphäre in der Höhe x und c , weil mechanische Arbeitsleistungen aus den vorliegenden Betrachtungen ausgeschlossen sein mögen, die spezifische Wärme der Atmosphäre pro Masseneinheit bei unverändertem Volumen bedeutet.

Es folgt aus (52) und (53)

$$(54) \quad 2\varepsilon(x, t) + c \varrho(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = a_1(x) W(x, t) \sec z + a_2(x) O(x, t) + a_2(x) U(x, t).$$

Weitere zwei Differentialgleichungen werden auf folgende Weise erhalten. Beim Durchgang der von oben, also in der Richtung des abnehmenden x kommenden Strahlung $O(x, t)$ durch die Elementarschicht wird diese Bestrahlung um den Betrag $a_2(x) O(x, t) dx$ geschwächt, d. h. in der Richtung $+x$ um diesen Betrag verstärkt. Ausserdem wird diese Strahlung durch die Austrahlung der Schicht gegen die Erdoberfläche um den Betrag $\varepsilon(x, t) dx$ verstärkt, d. h. in der Richtung $+x$ um diesen Betrag geschwächt. Es ist also:

$$(55) \quad \frac{\partial O(x, t)}{\partial x} = a_2(x) O(x, t) - \varepsilon(x, t).$$

Beim Durchgang der von unten kommenden Strahlung $U(x, t)$ durch die Elementarschicht wird diese Strahlung um den Betrag $a_2(x) U(x, t) dx$ geschwächt und um den Betrag $\varepsilon(x, t) dx$ verstärkt. Es ist also:

$$(56) \quad \frac{\partial U(x, t)}{\partial x} = -a_2(x) U(x, t) + \varepsilon(x, t)$$

Im Falle eines stationären Strahlungs- und Temperaturzustandes, d. h. eines solchen, in dem die Grössen u , O , U und ε nur Funktionen von x , aber nicht von t sind, erhält man statt den vorstehenden partiellen Differentialgleichungen zwei gewöhnliche lineare Differentialgleichungen, die mit jenen von Schwarzschild abgeleiteten und von Emden, Baur und Philipps verwendeten identisch sind.

Den Gleichungen (55) und (56) kann man durch die Substitution:

$$(57) \quad \begin{cases} O(x, t) + U(x, t) = Y(x, t) \\ O(x, t) - U(x, t) = Z(x, t) \end{cases}$$

eine für die späteren Anwendungen zweckmässiger Form geben. Die Addition bzw. die Subtraktion von (55) und (56) ergibt nämlich mit Berücksichtigung von (57)

$$(58) \quad \frac{\partial Y(x, t)}{\partial x} = a_2(x) Z(x, t)$$

$$(59) \quad \frac{\partial Z(x, t)}{\partial x} = a_2(x) Y(x, t) - 2\varepsilon(x, t).$$

Es folgt weiter aus (54), (49) und (57)

$$(60) \quad 2\varepsilon(x, t) + c \varrho(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial W(x, t)}{\partial x} + a_2(x) Y(x, t).$$

Die vorstehenden drei Gleichungen sind die drei Differentialgleichungen des Strahlungsvorganges in der Erdatmosphäre; dabei kann die Gleichung (59) durch die nachfolgende ersetzt werden, die aus (59) und (60) ohne weiters folgt,

$$(61) \quad \frac{\partial Z(x, t)}{\partial x} = c \varrho(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial W(x, t)}{\partial x}.$$

Bei der Integration der vorstehenden partiellen Differentialgleichungen sind folgende Grenzbedingungen zu berücksichtigen.

Für $x=0$, d. h. unmittelbar an der Erdoberfläche, ist die von unten kommende dunkle Strahlung der Atmosphäre gleich Null, so dass die mit $U(0, t)$ bezeichnete Strahlung der Emmission E der Erdoberfläche gleich ist. Es ist also:

$$(62) \quad U(0, t) = E.$$

Setzt man dies in (57) ein, so wird:

$$O(0, t) - E = Z(0, t)$$

d. h. wegen (51)

$$(63) \quad Z(0, t) = -Q_p - W(0, t).$$

Es folgt aus (50) und (57)

$$(64) \quad Y(h, t) + Z(h, t) = 0.$$

§ 100. Integration der vorstehenden Differentialgleichungen für den Fall einer stationären Bestrahlung. Die Integration der vorstehenden Differentialgleichungen wird besonders einfach, wenn die Bestrahlung eine unveränderliche, d. h. der Bestrahlungszustand ein stationärer ist. Ein solcher Fall der Erdbestrahlung kommt, streng genommen, nie vor, weil wegen der Drehung der Erde und wegen ihres Umlaufes um die Sonne deren Bestrahlung fortwährenden Aenderungen unterworfen ist. Wenn es sich aber darum handelt, die mittlere Temperatur der Erde oder die mittleren jährlichen Temperaturen ihrer einzelnen Breiten zu berechnen, ist es gestattet anzunehmen, dass diese einer konstanten Bestrahlung ausgesetzt sind, die der mittleren jährlichen Bestrahlung gleich ist. Diese mittlere, an der oberen Grenze der Erdatmosphäre anliegende Bestrahlung sei mit W_m bezeichnet. Von derselben ist wegen den bereits besprochenen Reflexionen an den Luftteilchen, an den Wolken und an der Erdoberfläche nur der Betrag:

$$(65) \quad W(h) = (1-A)W_m$$

als für den Wärmehaushalt verwendbar zu betrachten. Von dieser Strahlung gelangt zur Erdoberfläche der durch den Transmissionskoeffizient

$$(66) \quad p_a = \frac{W''_m}{W_m}$$

dargestellte Bruchteil, der das Verhältnis der tatsächlich durchgelassenen Strahlung $(1-A)W_m''$ zur Strahlung $(1-A)W_m$, die in die Atmosphäre eindringt, veranschaulicht. Führt man diesen Transmissionskoeffizienten ein, dann kann $z=0$ gesetzt werden.

Unter dem Einfluss der unveränderlichen Bestrahlung wird sich in der Atmosphäre ein stationärer Temperaturzustand ausbilden, weshalb zu setzen ist:

$$(67) \quad \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = 0.$$

Es werden also in den vorstehend abgeleiteten Differentialgleichungen die Grössen u , X , Y , ε bloss Funktionen von x sein; dasselbe gilt auch von der Grösse $W(x, t)$. Es folgt aus (49) mit $z=0$

$$(68) \quad dW(x) = a_1(x) W(x) dx,$$

d. h. nach Integration zwischen den Grenzen h und x und mit Berücksichtigung von (65)

$$(69) \quad W(x) = (1-A) W_m e^{-\int_x^h a_1(x) dx}$$

Es ist also wegen (40)

$$(70) \quad W(0) = (1-A) p_a W_m.$$

Die Gleichungen (58), (61) und (60) erhalten wegen (67) die Form:

$$(71) \quad \frac{dY(x)}{dx} = a_2(x) Z(x)$$

$$(72) \quad \frac{dZ(x)}{dx} = -\frac{dW(x)}{dx}$$

$$(73) \quad 2\varepsilon(x) = \frac{dW(x)}{dx} + a_2(x) Y(x).$$

Hinsichtlich der Grenzbedingungen ist folgendes zu bemerken. Der jährliche Wärmefluss, der aus dem Erdinnern bis zur Erdoberfläche gelangt, ist, wie noch gezeigt werden wird, verschwindend klein im Vergleich zu den Wärmemengen, die die Sonnenstrahlung der Erdoberfläche zuführt. Es ist also $Q_p=0$ zu setzen und man bekommt statt (63) und (64)

$$(74) \quad Z(0) = -(1-A) p_a W_m$$

$$(75) \quad Y(h) + Z(h) = 0.$$

Es folgt durch Integration von (72) mit Berücksichtigung von (74) und (70)

$$(76) \quad Z(x) = -W(x),$$

d. h. wegen (75) und (65)

$$(77) \quad Y(h) = -Z(h) = (1-A) W_m.$$

Die Gleichungen (57), deren Subtraktion

$$(78) \quad 2U(x) = Y(x) - Z(x)$$

liefert, ergeben mit Berücksichtigung von (77)

$$(79) \quad U(h) = (1-A) W_m.$$

Dies besagt, dass die in die Atmosphäre eindringende Sonnenstrahlung $(1-A) W_m$ als umgewandelte dunkle Strahlung $U(h)$ dem Weltraum zurückgegeben wird.

Es folgt aus (71) und (76)

$$dY(x) = -a_2(x) W(x) dx,$$

d. h. durch Integration zwischen den Grenzen h und x mit Berücksichtigung von (77)

$$(80) \quad Y(x) = (1-A) W_m + \int_x^h a_2(x) W(x) dx .$$

Die Gleichungen (73) und (68) ergeben:

$$(81) \quad 2\varepsilon(x) = a_1(x) W(x) + (1-A) W_m a_2(x) + a_2(x) \int_x^h a_2(x) W(x) dx .$$

Es folgt aus (78)

$$2U(0) = Y(0) - Z(0),$$

d. h. wegen (80) und (74)

$$2U(0) = (1-A) W_m + (1-A) p_a W_m + \int_0^h a_2(x) W(x) dx ,$$

d. h. wegen (62)

$$(82) \quad E = \frac{1}{2} (1-A)(1 + p_a) W_m + \frac{1}{2} \int_0^h a_2(x) W(x) dx .$$

Durch die vorstehenden Ergebnisse erscheinen die Differentialgleichungen (71), (72), (73) integriert, d. h. auf Quadraturen zurückgeführt. Um auch diese Quadraturen durchführen zu können und die Temperatur der Erdoberfläche und der einzelnen Schichten der Atmosphäre zu ermitteln, ist die Kenntnis des funktionalen Zusammenhanges zwischen x und $a_1(x)$ bzw. $a_2(x)$ und jenes zwischen der Emission E bzw. ε und der zugehörigen Temperatur erforderlich. Diesen funktionalen Zusammenhang vermitteln einige physikalische Gesetze, die jetzt herangezogen werden müssen.

§ 101. Gesetze von Beer, Kirchhoff und Stefan. Nach den Grundannahmen der Extinktionstheorie ist die Absorption des Sonnenlichts in der Atmosphäre um so grösser, je grösser die Anzahl der im Wege stehenden Luftpartikelchen ist, d. h. je dichter das Medium ist. Wird diese Annahme auch hinsichtlich der gesamten Sonnenstrahlung und hinsichtlich der dunklen Ausstrahlung der Atmosphäre und

der Erdoberfläche gemacht, so gelangt man zu den das sogenannte Beersche Gesetz zum Ausdruck bringenden Gleichungen:

$$(83) \quad \begin{cases} a_1(x) = k_1 \varrho(x) \\ a_2(x) = k_2 \varrho(x), \end{cases}$$

worin k_1 und k_2 Konstanten sind, von denen k_1 der Absorptionskoeffizient der Atmosphäre für die Sonnenstrahlung, k_2 jener für die dunklen Strahlungen genannt wird; $\varrho(x)$ bedeutet die Dichte der Atmosphäre in der Höhe x .

Den Zusammenhang zwischen Einstrahlung und Temperatur vermitteln die sogenannten Strahlungsgesetze, von denen sich das Planck'sche Gesetz auf Strahlungen bestimmter Wellenlänge bezieht. Die Sonnenstrahlung als auch die dunklen Strahlungen der Erdoberfläche und der Atmosphäre sind aus den verschiedensten Wellenlängen zusammengesetzt. Wollte man auf alle diese Wellenlängen das Plancksche Gesetz anwenden, so müsste eine umfangreiche Arbeit geleistet werden, die kaum zu bewältigen wäre und sich für die Zwecke der hier niedergelegten Theorie nicht lohnen würde. Denn es handelt sich hier vornehmlich darum, einfache, genügend genaue, auch für das paläoklimale Problem verwendbare Formeln zu gewinnen. Aus diesem Grunde soll das kombinierte Strahlungsgesetz von Stefan und Kirchhoff zur Anwendung gelangen.

Nach dem Stefanschen Strahlungsgesetz emittiert ein vollkommen schwarzer Körper, der sich auf der absoluten Temperatur θ befindet, durch die Einheit seiner Oberfläche während der Zeiteinheit eine Strahlungsmenge, die durch den Ausdruck:

$$E = \sigma \theta^4$$

dargestellt ist, worin σ eine Konstante bedeutet.

Die bisherigen experimentellen Ermittlungen dieser Konstante lieferten etwas divergierende Resultate. Ich habe allen meinen Berechnungen den Wert:

$$(84) \quad \sigma = 0,76 \times 10^{-10},$$

gemessen in Grammkalorien pro cm^2 und Minute, zugrunde gelegt, der von Kurlbaum herrührt und auch von Emden benutzt wurde und der, obwohl um 7% kleiner als der zuletzt gefundene Wert dieser Konstante, sich durchaus bewährt hat, wahrscheinlich deshalb, weil weder die Erdoberfläche noch die Erdatmosphäre als vollkommene Strahler zu betrachten sind.

Das Stefansche Gesetz gilt, wie bereits gesagt, nur für einen absolut schwarzen Körper, worunter ein solcher zu verstehen ist, dessen Absorptionsvermögen gleich eins ist. Ist dies nicht der Fall, ist also der in Betracht gezogene Körper ein sogenannter grauer, dessen Absorptionsvermögen kleiner als eins ist,

so bedient man sich zur Berechnung der Emission eines solchen Körpers des Kirchhoffschen Strahlungsgesetzes.

Nach dem Strahlungsgesetz von Kirchhoff ist das Emissionsvermögen eines beliebigen Körpers für eine Strahlenart bestimmter Wellenlänge gleich seinem Absorptionsvermögen für diese Strahlenart multipliziert mit dem Emissionsvermögen des vollkommen schwarzen Körpers. Nimmt man an, dass dieses Gesetz auch für zusammengesetzte Strahlungen als gültig betrachten werden kann, was sich in der Folge als zulässig erweisen wird, so erscheint die Ausstrahlung des grauen Körpers durch den Ausdruck:

$$E = a \sigma \theta^4$$

dargestellt, worin a das Absorptionsvermögen des Körpers für die emittierte Strahlungsart bedeutet.

Die Erdoberfläche und die Atmosphäre emittieren nur dunkle Strahlungen. Bezeichnet man das Absorptionsvermögen der Erdoberfläche für solche Strahlungen mit a_p' und jenes der in der Höhe x befindlichen Einheitsschicht, wie dies bereits geschehen ist, mit $a_2(x)$, so ergibt es sich, dass die Ausstrahlung E der Erdoberfläche gleich ist:

$$(85) \quad E = a_p' \sigma \theta_p^4,$$

worin θ_p die absolut gemessene Temperatur der Erdoberfläche bedeutet. Die Ausstrahlung $\varepsilon(x)$ der in der Höhe befindlichen Einheitsschicht der Atmosphäre ist dagegen gleich:

$$(86) \quad \varepsilon(x) = a_2(x) \sigma \theta^4(x),$$

worin $\theta(x)$ die absolut gemessene Temperatur dieser Schicht bedeutet.

Setzt man den Ausdruck (86) in die Gleichung (81) ein, so bekommt man

$$(87) \quad 2\sigma \theta^4(x) = \frac{a_1(x)}{a_2(x)} W(x) + (1 - A) W_m + \int_x^h a_2(x) W(x) dx.$$

Setzt man den Ausdruck (85) in die Gleichung (82) ein, so wird

$$(88) \quad a_p' \sigma \theta_p^4 = \frac{1}{2} (1 - A) (1 + p_a) W_m + \frac{1}{2} \int_0^h a_2(x) W(x) dx.$$

Dabei ist nach (40)

$$(89) \quad p_a = e^{-\int_0^h a_1(x) dx}$$

und nach (69)

$$(90) \quad W(x) = (1-A) W_m e^{-\int_x^h a_1(x) dx}$$

§ 102. Das solare Temperaturfeld der Erde. Zur Durchführung der in vorstehenden Gleichungen vorkommenden Quadraturen ist die Kenntnis der analytischen Form der Funktionen $a_1(x)$ und $a_2(x)$ erforderlich. Dieser funktionale Zusammenhang ist durch die Gleichungen (10) und (83) gegeben, denn es ist vermöge dieser Gleichungen:

$$(91) \quad \begin{cases} a_1(x) = k_1 \varrho_0 e^{-\frac{x}{H}} \\ a_2(x) = k_2 \varrho_0 e^{-\frac{x}{H}}. \end{cases}$$

Für $x=0$ erhält man aus den vorstehenden Gleichungen das Absorptionsvermögen der untersten Einheitsschicht der Atmosphäre für die in Rede stehenden Strahlungen, das mit a_1 bzw. a_1' bezeichnet werden möge. Es ist also:

$$(92) \quad a_1 = k_1 \varrho_0 \quad a_2 = k_2 \varrho_0$$

$$(93) \quad \begin{cases} a_1(x) = a_1 e^{-\frac{x}{H}} \\ a_2(x) = a_2 e^{-\frac{x}{H}}. \end{cases}$$

Bei der Anwendung der vorstehenden Formeln ist folgendes zu berücksichtigen. Es folgt aus der Formel (10), dass erst für $x = \infty$ $\varrho(x) = 0$ wird, d. h. die durch diese Formel dargestellte Atmosphäre erstreckt sich, mit zunehmender Höhe immer dünner werdend, theoretisch in's Unendliche. Es ist deshalb in den Gleichungen (87), (88), (89), (90) die Integrationsgrenze $h = \infty$ zu setzen. Es ist also wegen (93)

$$\int_x^h a_1(x) dx = a_1 \int_x^\infty e^{-\frac{x}{H}} dx = a_1 H e^{-\frac{x}{H}}$$

$$\int_0^h a_1(x) dx = a_1 H.$$

Man bekommt also statt (89)

$$(94) \quad p_a = e^{-a_1 H}$$

und statt (90)

$$(95) \quad W(x) = (1-A) W_m e^{-a_1 H} e^{-\frac{x}{H}}$$

$$(96) \quad W(x) = (1-A) W_m p_a e^{-\frac{x}{H}}.$$

Die dunkle Ausstrahlung der Erdoberfläche, deren Intensität in der Höhe x mit $E(x)$ bezeichnet werden möge, wird analog der Gleichung (68) nach dem Gesetz

$$dE(x) = -a_2(x) E(x) dx$$

mit der Höhe abgeschwächt, weshalb oben rechts das Zeichen Minus gesetzt werden musste, wobei $a_2(x) dx$ das Absorptionsvermögen der Elementarschicht für die dunkle Strahlung bedeutet. Weil für $x=0$ $E(x) = E$ ist, ergibt die Integration der obigen Gleichung zwischen den Grenzen $x=0$ und $x=h$ die Formel:

$$\frac{E(h)}{E} = e^{-\int_0^h a_2(x) dx},$$

die das Verhältnis der durch die Atmosphäre durchgelassenen dunklen Strahlung der Erdoberfläche zur emittierten Strahlung veranschaulicht. Dieses Verhältnis, der Transmissionskoeffizient der Atmosphäre für die Erdausstrahlung genannt, sei mit p_a' bezeichnet. Es ist also

$$(97) \quad p_{a'} = e^{-\int_0^h a_2(x) dx}$$

Zieht man die Formeln (93) heran, so bekommt man, ähnlich wie bei (94),

$$(98) \quad p_{a'} = e^{-a_1' H}$$

Es folgt aus (93) und (95)

$$\int_x^h a_2(x) W(x) dx = (1-A) W_m a_1' \int_x^\infty e^{-a_1 H e^{-\frac{x}{H}}} e^{-\frac{x}{H}} dx.$$

Um dieses Integral zu berechnen, führe man die Substitution

$$a_1 H e^{-\frac{x}{H}} = y$$

d. h.

$$-a_1 e^{-\frac{x}{H}} dx = dy$$

durch. Es wird also

$$\int_x^\infty e^{-a_1 H e^{-\frac{x}{H}}} e^{-\frac{x}{H}} dx = -\frac{1}{a_1} \int_y^0 e^{-y} dy = \frac{1}{a_1} [1 - e^{-y}] = \frac{1}{a_1} \left\{ 1 - e^{-a_1 H e^{-\frac{x}{H}}} \right\},$$

d. h. wegen (94)

$$\int_x^\infty e^{-a_1 H e^{-\frac{x}{H}}} e^{-\frac{x}{H}} dx = \frac{1}{a_1} \left\{ 1 - p_a e^{-\frac{x}{H}} \right\}.$$

Es ist also

$$(99) \quad \int_x^h a_2(x) W(x) dx = (1 - A) W_m \frac{a_1'}{a_1} \left\{ 1 - p_a e^{-\frac{x}{H}} \right\}$$

$$(100) \quad \int_0^h a_2(x) W(x) dx = (1 - A) W_m \frac{a_1'}{a_1} (1 - p_a).$$

Setzt man (96), (99) und (93) in (87) ein, so bekommt man:

$$(101) \quad \begin{aligned} 2\sigma \theta^4(x) &= \frac{a_1}{a_1'} (1 - A) W_m p_a e^{-\frac{x}{H}} + (1 - A) W_m + (1 - A) W_m \frac{a_1'}{a_1} \left\{ 1 - p_a e^{-\frac{x}{H}} \right\} \\ \sigma \theta^4(x) &= \frac{1}{2} (1 - A) W_m \frac{a_1 + a_1'}{a_1} \left\{ 1 + \frac{a_1 - a_1'}{a_1'} p_a e^{-\frac{x}{H}} \right\}, \end{aligned}$$

wodurch die Temperatur $\theta(x)$ der Atmosphäre in der Höhe x gegeben ist.

Die Temperatur der untersten Luftschicht, also für $x = 0$, ist durch die Gleichung:

$$(102) \quad \sigma \theta^4(0) = \frac{1}{2} (1 - A) W_m \frac{a_1 + a_1'}{a_1} \left\{ 1 + \frac{a_1 - a_1'}{a_1'} p_a \right\}$$

gegeben, während die Temperatur der obersten Schicht der Atmosphäre, also für $x = \infty$, durch die Gleichung:

$$(103) \quad \sigma \theta^4(\infty) = \frac{1}{2} (1 - A) W_m \frac{a_1 + a_1'}{a_1'}$$

gegeben ist.

Setzt man (100) in (88) ein, so bekommt man:

$$(104) \quad a_p' \sigma \theta_p^4 = \frac{1}{2} (1 - A) W_m \frac{a_1 + a_1' + (a_1 - a_1') p_a}{a_1'}$$

wodurch die Temperatur der Erdoberfläche gegeben ist.

Die in den vorstehenden Gleichungen vorkommenden Grössen a_1 und a_1' lassen sich mit Benützung der Formeln (94) und (98) durch die Grössen p_a und p_a' ausdrücken, die durch die Beobachtung gegeben sind. Es folgt nämlich aus diesen Formeln:

$$(105) \quad \begin{cases} a_1 = -\frac{1}{H} \log_{\text{nat}} p_a = -\frac{1}{MH} \log p_a \\ a_1' = -\frac{1}{H} \log_{\text{nat}} p_a' = -\frac{1}{MH} \log p_a', \end{cases}$$

worin M den Modul der Briggschen Logarithmen bedeutet. Setzt man dies in die Formeln (101) bis (104) ein, so bekommt man:

$$(106) \quad \sigma \theta^4(x) = \frac{1}{2} (1-A) W_m \left(1 + \frac{\log p_a'}{\log p_a} \right) \left\{ 1 - \left(1 - \frac{\log p_a}{\log p_a'} \right) p_a e^{-\frac{x}{H}} \right\}$$

$$(107) \quad \sigma \theta^4(0) = \frac{1}{2} (1-A) W_m \left(1 + \frac{\log p_a'}{\log p_a} \right) \left\{ 1 - \left(1 - \frac{\log p_a}{\log p_a'} \right) p_a \right\}$$

$$(108) \quad \sigma \theta^4(\infty) = \frac{1}{2} (1-A) W_m \left(1 + \frac{\log p_a}{\log p_a'} \right)$$

$$(109) \quad a_p' \sigma \theta_p^4 = \frac{1}{2} (1-A) W_m \left\{ 1 + p_a + (1-p_a) \frac{\log p_a'}{\log p_a} \right\},$$

Für die späteren Anwendungen ist vom Interesse der Fall:

$$(110) \quad a_1(x) = 0,$$

d. h. jener, in dem die Atmosphäre die Sonnenstrahlung ungehindert transmittiert. Es ist dann wegen (94), (90), (87) und (88)

$$p_a = 1$$

$$(111) \quad W(x) = (1-A) W_m$$

$$(112) \quad \sigma \theta^1(x) = \frac{1}{2}(1-A) W_m \left\{ 1 + \int_x^h a_2(x) dx \right\}$$

$$(113) \quad a_p' \sigma \theta_p^4 = (1-A) W_m \left\{ 1 + \frac{1}{2} \int_0^h a_2(x) dx \right\}$$

$$(114) \quad \sigma \theta^4(0) = \frac{1}{2}(1-A) W_m \left\{ 1 + \int_0^h a_2(x) dx \right\}$$

$$(115) \quad \sigma \theta^4(h) = \frac{1}{2}(1-A) W_m.$$

Aus den Gleichungen (114) und (113) folgt, weil nach (97)

$$-\int_0^h a_2(x) dx = \log_{\text{nat}} p'_a$$

ist,

$$(116) \quad \sigma \theta^4(0) = \frac{1}{2}(1-A)(1 - \log_{\text{nat}} p'_a) W_m$$

$$(117) \quad a_p' \sigma \theta_p^4 = \frac{1}{2}(1-A)(2 - \log_{\text{nat}} p'_a) W_m.$$

Aus den Gleichungen (114) und (113) folgen, weil wegen (10) und (91)

$$\int_0^h a_2(x) dx = k_2 \int_0^\infty \varrho(x) dx$$

ist und

$$(118) \quad \int_0^\infty \varrho(x) dx = M$$

die Gesamtmasse der über der Flächeneinheit der Erdoberfläche lagernden Säule der Atmosphäre darstellt, die Gleichungen :

$$(119) \quad \sigma \theta^4(0) = \frac{1}{2} (1 - A) W_m [1 + k_2 M]$$

$$(120) \quad a_p' \sigma \theta_p^4 = \frac{1}{2} (1 - A) W_m [2 + k_2 M].$$

Mittels der Formel (107) können die solaren Temperaturen der Breitenkreise berechnet werden. Ich habe diese Berechnung bereits in meiner „Théorie mathématique“ mit den numerischen Werten (38) und (84) durchgeführt. Dabei wurde für W_m die an der oberen Grenze der Atmosphäre anlangende jährliche Bestrahlung, berechnet pro Zeiteinheit (Minute) und Flächeneinheit (cm^2) in die Rechnung gesetzt. Diese, den verschiedenen Breiten zugehörigen Grössen werden erhalten, wenn man die in der Tabelle VII, letzte Kolumne, enthaltenen Zahlen durch die Anzahl der Minuten im Jahre, d. h. durch 525.960, dividiert. Für den mittleren jährlichen Transmissionskoeffizient p_a ist nach (66) das Verhältnis der in der Tabelle XVII (für $p = 0,8$) und der in der Tabelle VII enthaltenen auf die in Betracht gezogene Breite sich beziehenden ganzjährigen Strahlungsmengen zu setzen. Auf diese Weise sind die in der beiliegenden Tabelle XVIII mitgeteilten solaren Temperaturen der Breitenkreise gewonnen worden.

Tabelle XVIII

Die mittleren jährlichen solaren Temperaturen der Breitenkreise bei ruhender Atmosphäre und gleichmässiger Landbedeckung

| Geogr. Breite | 0° | 10° | 20° | 30° | 40° | 50° | 60° | 70° | 80° | 90° |
|---------------|-------|-------|-------|-------|-------|------|-------|-------|-------|-------|
| Temperatur | +32,8 | +31,6 | +28,2 | +22,1 | +13,7 | +2,6 | -10,9 | -24,1 | -32,0 | -34,8 |

Diese solaren Temperaturen entsprechen einem durchschnittlichen Grad der Landbedeckung der Erdoberfläche. Vergleicht man die auf eine solche Landbedeckung reduzierten beobachteten Temperaturen der Breitenkreise, die man als die Normaltemperaturen zu bezeichnen pflegt, mit den hier berechneten, dann gelangt man zu folgendem Ergebnis.

Für die geographischen Breiten vom 41° nördlich bzw. südlich ist die hier errechnete solare Temperatur des Breitenkreises gleich der beobachteten, auf die durchschnittliche Landbedeckung reduzierten Temperatur. Gegen den Aequator zu werden die solaren Temperaturen höher und höher als die beobachteten, gegen die Pole zu dagegen niedriger. Das solare Klima ist, wie zu erwarten, exzessiver als das tatsächliche Klima der Erde, in welchem letzterem die geographischen Gegen-

sätze durch Luft- und Meeresströmungen angemildert werden. Diese Strömungen, Zirkulationen mit geschlossenen Bahnen im Potentialfelde der Erdschwere, können den durchschnittlichen Temperaturzustand der Atmosphäre nicht empfindlich ändern, weil das Arbeitsintegral dieser Strömungen gleich Null ist. Tatsächlich ergeben die in der Tabelle XVIII mitgeteilten solaren Temperaturen eine für die ganze Erde berechnete mittlere Temperatur der untersten Luftschicht von $15,2^{\circ} C$, die sich von der beobachteten nur um $0,1^{\circ}$ unterscheidet.

Will man mittels der Formeln (109) oder (120) die Temperatur der festen Erdoberfläche berechnen, so ist von der rechten Seite dieser Formeln die in denselben nicht berücksichtigte, in der Strahlungsbilanz aber durch die Post 15 und Post 16 angegebene vom Erdboden durch Verdunstung und Konvektion abgegebene Wärmemenge in Abzug zu bringen. Der numerische Wert der in der Formeln (119) und (120) vorkommenden Grösse k_2 kann, wie nachstehend gezeigt werden wird, mit zufriedenstellender Genauigkeit ermittelt werden.

§ 103. Der Aufbau der Atmosphäre im Strahlungsgleichgewicht. Der vorstehend benützten Formel (10) für die Dichteabnahme der Atmosphäre mit der Höhe x liegt die Annahme zugrunde, dass die Temperatur mit zunehmender Höhe sich nicht wesentlich ändert, weshalb jene Formel nur für beschränkte Höhenunterschiede als streng richtig zu betrachten ist. Es soll nun jene vereinfachende Annahme fallen gelassen werden, um die Frage nach dem Aufbau der Atmosphäre zu beantworten für den allgemeinen Fall, in welchem die Temperatur als Funktion der Höhe zu betrachten ist.

Bei der Beantwortung der vorstehend gestellten Frage kann man von der Eigenschaft der Atmosphäre, vorwiegend durch die dunklen Strahlungen erwärmt zu werden, Gebrauch machen. Aus der im § 98 mitgeteilten Strahlungsbilanz der Erde folgt nämlich, dass die von der Atmosphäre absorbierte dunkle Strahlung mehr als sieben Mal grösser ist als die von derselben absorbierte Sonnenstrahlung. Die für die Integration der Differentialgleichungen des Strahlungsvorganges in der Atmosphäre notwendige Annahme:

$$(121) \quad a_1(x) = 0 \quad a_2(x) = k_2 \varrho(x)$$

ist also als zulässig zu betrachten, was durch das Ergebnis der Berechnung ebenfalls erwiesen sein wird.

Es folgt aus den Gleichungen (121) und (113):

$$(122) \quad 2\sigma \theta^4(x) = (1-A)W_m \left\{ 1 + k \int_x^h \varrho(x) dx \right\},$$

worin $\theta(x)$ die absolut gemessene Temperatur der Atmosphäre in der Höhe x bedeutet und wobei der Index von k_2 , weil jetzt überflüssig, weggelassen werden konnte.

Die Temperatur der obersten Schicht der Atmosphäre, d.h. jene für $x = h$, sei mit μ^4 bezeichnet; sie ist wegen (122) und des vorstehenden Ansatzes durch

$$(123) \quad 2\sigma \mu^4 = (1-A) W_m$$

gegeben.

Es folgt aus den vorstehenden Gleichungen:

$$(124) \quad 2\sigma [\theta^4(x) - \mu^4] = (1-A) W_m k \int_x^h \varrho(x) dx.$$

Aus (6) und (5) folgt, wenn man auf die verschwindend kleine Aenderung der Schwerebeschleunigung innerhalb der Atmosphäre keine Rücksicht nimmt,

$$(125) \quad dp(x) = -g \varrho(x) dx.$$

Integriert man die vorstehende Differentialgleichung zwischen den Grenzen x und h und berücksichtigt dabei, dass für $x=h$ der Druck $p(h)$ gleich Null ist, so bekommt man:

$$(126) \quad p(x) = g \int_x^h \varrho(x) dx,$$

also wegen (124)

$$(127) \quad 2\sigma [\theta^4(x) - \mu^4] = (1-A) W_m \frac{k}{g} p(x).$$

Die Differentiation der vorstehenden Gleichung nach x ergibt:

$$(128) \quad 8\sigma \theta^3(x) d\theta(x) = (1-A) W_m \frac{k}{g} dp(x).$$

Es folgt aus (125) und (3)

$$(129) \quad \frac{dp(x)}{p(x)} = -\frac{g}{R} \frac{d\theta(x)}{\theta(x)}.$$

Setzt man in die vorstehende Gleichung die Werte für $p(x)$ und $dp(x)$ aus (127) und (128) ein, so bekommt man:

$$(130) \quad dx = -\frac{4R}{g} \frac{\theta^4(x) d\theta(x)}{\theta^4(x) - \mu^4},$$

d. h., wenn man den vorstehenden Bruch durch Ausführung der Division in eine ganze Funktion und eine echt gebrochene zerlegt,

$$(131) \quad dx = -\frac{4R}{g} d\theta(x) - \frac{4R}{g} \frac{\mu^4 d\theta(x)}{\theta^4(x) - \mu^4}.$$

Nun ist nach der bekannten Partialbruchzerlegung:

$$\frac{1}{\theta^4(x) - \mu^4} = \frac{1}{4\mu^3} \left\{ \frac{1}{\theta(x) - \mu} - \frac{1}{\theta(x) + \mu} + \frac{i}{\theta(x) - i\mu} - \frac{i}{\theta(x) + i\mu} \right\},$$

worin i die imaginäre Einheit bedeutet.

Es folgt aus der vorstehenden Gleichung

$$\frac{1}{\theta^4(x) - \mu^4} = \frac{1}{4\mu^3} \left\{ \frac{1}{\theta(x) - \mu} - \frac{1}{\theta(x) + \mu} - \frac{2\mu}{\theta^2(x) + \mu^2} \right\}.$$

Setzt man den vorstehenden Ausdruck in (131) ein und integriert die derart umgeformte Differentialgleichung, so erhält man:

$$(132) \quad x = C - \frac{4R}{g} \theta(x) - \frac{R\mu}{g} \left\{ \log_{\text{nat}} \frac{\theta(x) - \mu}{\theta(x) + \mu} - 2 \operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{\theta(x)}{\mu} \right\}.$$

Die hier vorkommende Integrationskonstante C wird aus der Bedingung

$$x = 0 \quad \theta(x) = \theta_0$$

ermittelt, worin θ_0 die Temperatur der untersten Atmosphärenschicht bedeutet. Es ist also:

$$(133) \quad C = \frac{4R}{g} \theta_0 + \frac{R\mu}{g} \left\{ \log_{\text{nat}} \frac{\theta_0 - \mu}{\theta_0 + \mu} - 2 \operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{\theta_0}{\mu} \right\}.$$

Die Gleichung (132) stellt den Zusammenhang zwischen x und $\theta(x)$ in expliziter Form für x dar.

Aus (127) und (3) folgt durch Elimination von $p(x)$ und Berücksichtigung von (123):

$$(134) \quad \varrho(x) = \frac{g}{Rk} \cdot \frac{\theta^4(x) - \mu^4}{\mu^4 \theta(x)}$$

und wegen (3)

$$(135) \quad p(x) = \frac{g}{k} \cdot \frac{\theta^4(x) - \mu^4}{\mu^4}.$$

Die beiden vorstehenden Gleichungen liefern in Verbindung mit (132) den Zusammenhang zwischen $\varrho(x)$ und x bzw. zwischen $p(x)$ und x in parametrischer Form, wobei $\theta(x)$ als Parameter zu betrachten ist.

Aus (132) und (134) folgt:

$$\text{für } \theta(x) = \mu \quad x = \infty \quad \varrho(x) = 0.$$

Dies besagt, dass während sich die Temperatur $\theta(x)$ mit unendlich wachsendem x dem Werte μ nähert, die Dichte $\varrho(x)$ dem Werte Null zustrebt. Die Atmosphäre erstreckt sich also theoretisch bis in die Unendlichkeit.

Mit Hilfe der Gleichungen (132) bis (135) kann der vertikale Aufbau der im Strahlungsgleichgewicht befindlichen Atmosphäre in allen seinen Einzelheiten numerisch veranschaulicht werden. Dies soll jetzt geschehen, wobei die Temperatur der untersten Luftschicht gleich $10,5^\circ \text{ C}$, d. h. $\theta_0 = 283,5^\circ \text{ C}$ gesetzt werden soll, um einen Vergleich mit den über Mitteleuropa durchgeführten Beobachtungen zu ermöglichen. Dieser Temperatur entspricht nach den Tabellen VII und XVII eine mittlere jährliche Beschstrahlung $W_m = 0,464$ Grammkalorien pro cm^2 und Minute. Mit $A = 0,40$ bekommt man mittels (123) $\mu = 206,9^\circ$. Die übrigen in die vorstehenden Gleichungen einzusetzenden Konstanten werden wie folgt ermittelt. Bei normalem Luftdruck von 760 mm Quecksilbersäule ist, weil das spezifische Gewicht des Quecksilbers $13,596 \text{ g/cm}^3$ beträgt, $p_0 = 1033,3 \text{ g pro cm}^2$. Aus (126) folgt:

$$(136) \quad p(0) = g \int_{\theta}^h \varrho(x) dx = gM,$$

worin M die über der Flächeneinheit gelagerten Masse der Atmosphäre bedeutet. Es ist wegen (12) $p(0) = p_0 g$, d. h. $p_0 = M$. Es ist deshalb $M = 1033,3 g$. Aus (12) und (13) folgt:

$$(137) \quad \frac{R}{g} = \frac{p_0}{\theta_0 \varrho_0},$$

worin $\varrho_0 = 1,293 \times 10^{-3} g$ pro cm^3 zu setzen ist, wodurch $\frac{R}{g}$ gegeben erscheint.

Zur Ermittlung des numerischen Wertes von k kann man sich der Gleichung (122) bedienen. Es folgt aus dieser Gleichung mit $x = 0$ und wegen (123) und (136)

$$(138) \quad 1 + kM = \frac{\theta_0^4}{\mu^4},$$

woraus mit Benützung der vorstehenden Angaben

$$(139) \quad k = 0,00245$$

olgt.

Mit Benützung der Gleichungen (132) bis (135) und der vorstehend mitgeteilten numerischen Werte der in diesen Gleichungen vorkommenden Konstanten habe ich die beiliegende Tabelle XIX berechnet, die den vertikalen Aufbau der im Strahlungsgleichgewicht befindlichen die Temperatur der untersten Luftschicht von $10,5^\circ C$ aufweisenden Atmosphäre veranschaulicht.

Anlässlich der Besprechung dieses zuerst in meiner „Théorie mathématique“ veröffentlichten Ergebnisses hat S. Mohorovičić¹⁾ zum besseren Vergleich der hier errechneten Temperaturen mit den tatsächlich beobachteten eine diesbezügliche Gegenüberstellung gemacht, die ich hier als Tabelle XX wiedergebe.

Durch die beiliegenden Tabellen wurde, im Gegensatz zu den bis dahin fast allgemein herrschenden Ansichten, die vorherrschende Rolle des Strahlungserscheinungen im vertikalen Aufbau der Atmosphäre deutlich klargelegt; die noch vorhandenen Abweichungen zwischen Berechnung und Beobachtung rühren von der in der Theorie nicht berücksichtigten Luftbewegung und von der Anwesenheit des Wasserdampfes her, von der noch die Rede sein wird.

Aus der Tabelle XIX ergab sich noch folgendes. Vergleicht man, wie ich dies in meiner „Théorie mathématique“ getan habe, den durch diese Tabelle dargestellten Dichteaufbau der im Strahlungsgleichgewicht befindlichen Atmosphäre mit

¹⁾ Meteorol. Zeitschrift, 1921. S. 316.

Tabelle XIX

Vertikaler Aufbau der im Strahlungsgleichgewicht befindlichen Atmosphäre bei einer Temperatur der untersten Luftschicht von $10,5^{\circ}$

| Höhe <i>m</i> | Tempe- ratur <i>C</i> | Barom. Druck <i>mm Hg</i> | Dichte gr. pro <i>cm</i> ³ |
|------------------|--------------------------|---------------------------------|--|
| 0 | +10,5 | 760 | $1,293 \times 10^{-3}$ |
| 918 | +5 | 679 | $1,134 \times 10^{-3}$ |
| 1779 | 0 | 610 | $1,038 \times 10^{-3}$ |
| 2672 | -5 | 545 | $0,945 \times 10^{-3}$ |
| 3602 | -10 | 484 | $0,855 \times 10^{-3}$ |
| 4577 | -15 | 426 | $0,767 \times 10^{-3}$ |
| 5607 | -20 | 371 | $0,682 \times 10^{-3}$ |
| 6706 | -25 | 320 | $0,599 \times 10^{-3}$ |
| 7891 | -30 | 271 | $0,519 \times 10^{-3}$ |
| 9190 | -35 | 226 | $0,440 \times 10^{-3}$ |
| 10644 | -40 | 183 | $0,364 \times 10^{-3}$ |
| 12320 | -45 | 143 | $0,291 \times 10^{-3}$ |
| 14344 | -50 | 105 | $0,218 \times 10^{-3}$ |
| 16975 | -55 | 70 | $0,149 \times 10^{-3}$ |
| 20977 | -60 | 37 | $0,080 \times 10^{-3}$ |
| 31723 | -65 | 7 | $0,016 \times 10^{-3}$ |

Tabelle XX

Vergleich der theoretisch berechneten mit den tatsächlich beobachteten Temperaturen

| | | | | | | | | | | |
|---------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Höhe in <i>km</i> | 0 | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| Berechnete Temperatur | 10,5 | 7,0 | 4,1 | 1,2 | −1,5 | −6,9 | −11,8 | −16,9 | −22,0 | −26,4 |
| Beobachtete Temperatur | 10,5 | 7,4 | 4,9 | 2,5 | 0,1 | −5,0 | −10,7 | −16,9 | −23,7 | −30,8 |
| Höhe in <i>km</i> | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | |
| Berechnete Temperatur | −30,7 | −34,8 | −38,2 | −41,4 | −44,1 | −46,8 | −48,3 | −51,3 | −53,2 | |
| Beobachtete Temperatur | −38,0 | −44,4 | −49,6 | −52,8 | −54,2 | −54,4 | −54,4 | −54,3 | −54,0 | |

dem Dichteaufbau, wie er sich aus der Formel

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{x}{H}}$$

mit $H=8000\text{ m}$ ergibt, so findet man, dass die Abweichungen zwischen diesen beiden die Dichteabnahme veranschaulichenden Gesetzen nicht gross sind, wodurch die Verwendung der vorstehenden Formel, wie sie im § 102 stattgefunden hat, als zulässig erkannt ist.

Durch die vorstehenden Ergebnisse erscheint auch die Brauchbarkeit der Formel (119) und des darin vorkommenden Zahlenwertes (139) zur Berechnung der solaren Temperaturen der Breitenkreise als erwiesen. Setzt man in diese Formel die Werte $A = 0,40$; $k = 0,0025$; $M=1033,3\text{ g}$ ein, so bekommt man:

$$(140) \quad \sigma \theta^4(0) = 1,075 W_m .$$

Diese Gleichung besagt, dass die solare Temperatur der untersten Luftschicht etwas höher ist als jene, die ein vollkommen schwarzer Erdboden bei Abwesenheit der Atmosphäre aufweisen würde, denn seine Oberflächentemperatur wäre aus der Formel

$$\sigma \theta_p^4 = W_m$$

zu berechnen.

Setzt man in die Gleichung (140) die in der Tabelle VII enthaltenen Strahlungsmengen ein, nachdem man sie mit der Anzahl der Minuten im Jahre dividiert hat, so erhält man mit Benützung des Zahlenwertes (84) die in der beiliegenden Tabelle XXI enthaltenen mittleren jährlichen solaren Temperaturen der Breite-

Tabelle XXI

Die mittleren jährlichen solaren Temperaturen der Breitekreise berechnet mit der Formel (140)

| Geogr. Breite | 0° | 10° | 20° | 30° | 40° | 50° | 60° | 70° | 80° | 90° |
|---------------|-------|-------|-------|-------|-------|------|------|-------|-------|-------|
| Temperatur | +31,9 | +30,8 | +27,6 | +22,2 | +14,4 | +4,2 | -8,2 | -20,1 | -26,3 | -28,3 |

kreise. Diese Temperaturen sind, wie zu erwarten und wie im § 102 begründet für die niederen Breiten höher, für die hohen Breiten niedriger als die beobachteten, auf eine gleichmässige Landbedeckung reduzierten; für die Breite von 41° stimmen sie, geradeso wie die in der Tabelle XVIII enthaltenen Temperaturen, mit den beobachteten überein. Berechnet man die aus der in der Tabelle XXI sich ergebende mittlere Temperatur der untersten Luftschicht der Atmosphäre, so ergibt sich eine Temperatur von 15,6° C, die um 0,3° höher ist als die beobachtete. Die Formel (140) bietet gegenüber der Formel (107) den Vorteil einer einfachen Berechnung der säkularen Aenderungen der solaren Temperaturen, wovon im nachstehenden Gebrauch gemacht werden wird.

§ 104. Stabilitätsfragen. Bei den bisherigen Untersuchungen sind Umwandlungen der Wärme in mechanische Arbeit, oder umgekehrt, nicht in Betracht gezogen worden, vielmehr wurde angenommen, die Atmosphäre befinde sich im mechanischen Gleichgewicht. Es soll nun geprüft werden, unter welchen Umständen diese Voraussetzung erfüllt sei. Zu diesem Zwecke muss von einigen Gleichungen der mechanischen Wärmetheorie Gebrauch gemacht werden, die vorerst entwickelt werden mögen.

Führt man der Masseneinheit eines Gases, die das Volumen v einnimmt, die Wärmemenge dQ zu, so wird ein Teil derselben zur Erhöhung der Temperatur des Gases, der andere Teil zur Vergrösserung seines Volumens, also zur mechanischen Arbeitsleistung benützt. Der erste Teil ist offenbar gleich $c d\theta$, wenn c die spezifischen Wärme des Gases bei konstantem Volumen bedeutet, während der zweite Teil gleich ist $A p dv$, wenn A das Wärmeäquivalent der Arbeit darstellt. Man hat also:

$$(141) \quad dQ = c d\theta + A p dv .$$

Ist das Gas ein vollkommenes, was hier vorausgesetzt werden soll, so gilt

für dasselbe die bereits mitgeteilte Zustandsgleichung (1) d. h.

$$(142) \quad pv = R\theta,$$

deren Differentiation die Gleichung liefert:

$$p dv + v dp = R d\theta.$$

Man bekommt also statt (14)

$$(143) \quad dQ = (c + AR) d\theta - A v dp.$$

Geschieht die Wärmeausdehnung bei konstantem Druck, d. h. wird oben $dp=0$ gesetzt, so stellt $\frac{dQ}{d\theta}$ die spezifische Wärme des Gases bei konstantem Druck dar. Wird diese mit c' bezeichnet, so ist

$$(144) \quad c' = c + AR,$$

d. h.

$$(145) \quad dQ = c' d\theta - A v dp.$$

Verändert sich der Zustand des Gases adiabatisch, d. h. ohne dass ihm Wärme zu- oder abgeführt wird, so ist $dQ=0$ und man bekommt statt (145)

$$(146) \quad c' d\theta = A v dp.$$

Eliminiert man aus dieser Gleichung mittels (142) v , nimmt auf (144) Rücksicht und setzt zwecks kürzerer Schreibweise

$$(147) \quad \frac{c'}{c} = \kappa,$$

so bekommt man:

$$(48) \quad \frac{dp}{p} = \frac{\kappa}{\kappa - 1} \cdot \frac{d\theta}{\theta}$$

als die Differentialform der nach Poisson benannten Gleichung.

Kehren wir nun zur Erdatmosphäre zurück! Nehmen wir dabei an, dieselbe bestehe aus einem vollkommenen Gase, dann gelten für sie die soeben entwickelten Gleichungen. Wird in derselben ein Teilchen ihrer Masse aus der Höhe x um das Weegelement dx gehoben, so gelangt dasselbe aus dem Gebiete des Druckes p in das Gebiet des Druckes ($p + dp$) und es ist nach (129)

$$(149) \quad \frac{dp(x)}{p(x)} = - \frac{g}{R} \cdot \frac{dx}{\theta(x)}$$

Geschieht diese Verschiebung ohne Wärmezufuhr oder Abfuhr, dann besteht zwischen der Druckänderung dp und der dadurch hervorgerufenen Temperaturänderung $d\theta$ die Beziehung (148). Aus (148) und (149) folgt aber:

$$(150) \quad \frac{d\theta}{dx} = - \frac{g}{R} \cdot \frac{\kappa - 1}{\kappa}$$

Diese Gleichung gibt die Aenderung $d\theta$ der Temperatur θ des Atmosphärenteilchens an, wenn sich dasselbe um dx nach oben verschiebt.

Herrscht an der in Betracht gezogenen Stelle der Atmosphäre eine Temperaturabnahme mit der Höhe, die kleiner ist als $\frac{g}{R} \cdot \frac{\kappa - 1}{\kappa}$, so wird ein aufsteigendes Atmosphärenteilchen in Schichten geraten, die wärmer und dünner sind als es selbst ankommt und deshalb wird das Teilchen einen Druck nach unten erfahren. Ebenso erfährt ein absteigendes Atmosphärenteilchen einen Druck nach oben. Das Gleichgewicht der Atmosphäre wird an dieser Stelle ein stabiles sein. Ist dagegen die Temperaturabnahme mit der Höhe grösser als $\frac{g}{R} \cdot \frac{\kappa - 1}{\kappa}$, so ist das Gleichgewicht ein labiles. Ist schliesslich die Atmosphäre derart aufgebaut, dass an jeder Stelle derselben die Beziehung

$$(151) \quad \frac{d\theta(x)}{dx} = - \frac{g}{R} \cdot \frac{\kappa - 1}{\kappa}$$

erfüllt ist, so befindet sie sich in indifferentem Gleichgewichtszustand.

Die Integration der obigen Gleichung ergibt mit Berücksichtigung, dass für $x = 0$ $\theta(x) = \theta_0$ ist,

$$(152) \quad \theta(x) = \theta_0 - \frac{g}{R} \cdot \frac{x-1}{x} x.$$

In diesem Falle ist die Temperatur eine lineare Funktion von x und es wird in der Höhe:

$$(153) \quad h = \frac{R}{g} \cdot \frac{x}{x-1} \theta_0$$

der absolute Nullpunkt der Temperatur erreicht. Diese Stelle würde also die obere Grenze der Atmosphäre darstellen.

Dieser Fall des Gleichgewichts würde sich in einer vollkommen unbestrahlten nur von unten durch Berührung mit der Erdoberfläche sich erwärmenden Atmosphäre einstellen, wobei dieselbe in ihrer ganzen Höhe durchgerührt werden müsste. So weit ein solcher Fall von dem tatsächlichen in der Erdatmosphäre obwaltenden Zustand entfernt ist, wurde er jahrzehntelang zur Erklärung des vertikalen Temperatureaufbaues der Atmosphäre benützt und gelehrt.

In einer beliebig aufgebauten Atmosphäre würde die Grenze des stabilen Gleichgewichts an der Stelle erreicht sein, an der die Dichteabnahme mit der Höhe überhaupt aufhört, d. h. wo

$$(154) \quad \frac{d\rho(x)}{dx} = 0$$

ist. Man kann dieser Bedingung auch eine andere Form geben Mit Hilfe der Zustandsgleichung (3), d. h mit

$$(155) \quad \rho(x) = \frac{1}{R} \cdot \frac{p(x)}{\theta(x)}$$

erhält die Gleichung (154) die Form:

$$\frac{dp(x)}{p(x)} = \frac{d\theta(x)}{\theta(x)}$$

oder wegen (149)

$$(156) \quad \frac{d\theta(x)}{dx} = -\frac{g}{R}.$$

Das Gleichgewicht, wird aufhören selbst ein labiles zu sein, wenn die Temperaturabnahme mit der Höhe grösser ist als $\frac{g}{R}$.

Mit Hilfe der soeben abgeleiteten Gleichgewichtsbedingungen ist man in der Lage zu entscheiden, ob und welcher Teil der Atmosphäre sich im Gleichgewicht befinde. So wird sich die vorstehend untersuchte im Strahlungsgleichgewicht befindliche Atmosphäre auch im mechanischen Gleichgewicht befinden, wenn die durch (130) gegebene Temperaturabnahme mit der Höhe kleiner ist als $\frac{g}{R} \cdot \frac{\kappa - 1}{\kappa}$. Dies wird der Fall sein, wenn die Ungleichheit

$$(157) \quad 1 - \frac{\mu^4}{\theta^4(x)} < 4 \frac{\kappa - 1}{\kappa}$$

erfüllt ist.

Diese Bedingung ist jedenfalls erfüllt, wenn $\kappa \geq \frac{4}{3}$ ist. Nun lehrt die kinetische Theorie der Gase, dass für ein einatomiges Gas $\kappa = \frac{5}{3}$, für ein zweiatomiges Gas $\kappa = \frac{7}{5}$ und für ein dreiatomiges Gas $\kappa = \frac{4}{3}$ ist. Die Erdatmosphäre, die in ihrer ganzen Höhe nur solche Gase enthält, wird sich also im Falle des Strahlungsgleichgewichtes auch im mechanischen Gleichgewicht befinden.

Ganz anders steht es mit der Stabilität ihres Gleichgewichts in horizontaler Richtung; die Bedingungen hierfür sind selbst theoretisch nie erfüllt, auch nicht für den Fall des stationären Bestrahlungszustandes. Aus (135) folgt nämlich, dass in diesem Falle der atmosphärische Druck in einer gegebenen Höhe x eine Funktion von $\theta(x)$ und vermittels (133) auch von θ_0 ist. Weil aber selbst für den durchschnittlichen jährlichen Bestrahlungszustand die Grösse θ_0 eine Funktion der geographischen Breite ist, wird man für ein und dasselbe x verschiedene Werte von $p(x)$ erhalten, wenn man längs des Meridianes fortschreitet. Die Gleichung $p(x) = \text{const.}$ stellt die Meridianschnitte der Flächen gleichen atmosphärischen Druckes dar, die diesem Falle Rotationsflächen sind. Diese Flächen sind mit den horizontalen Aequipotentialflächen der Erdschwere nicht identisch, weshalb ein Abfliessen der Luft längs dieser Flächen in meridionaler Richtung stattfinden muss. Weil der wirkliche Bestrahlungszustand der Erde kein stationärer ist, wird diese Erscheinung noch ausgesprochener und viel komplizierter sein. Die örtlichen Unterschiede des Temperaturzustandes in der Richtung senkrecht zum Meridian haben zur Folge, dass die Flächen gleichen atmosphärischen Druckes keine Rotationsflächen sind, und die zeitlichen Aenderungen des Temperaturzustandes werden von einem ununterbrochenen Heben und Senken dieser Flächen begleitet sein. Die dadurch hervorgerufenen Luftströmungen gelangen ausserdem noch unter den Einfluss der ablenkenden Kraft der Erdrotation. Die mathematische Erfassung dieser Erscheinungen gehört in das Gebiet der dynamischen Meteorologie und kann hier nicht weiter verfolgt werden.

§ 105. Einfluss des durchschnittlichen Wasserdampfgehaltes der Atmosphäre auf den thermischen Aufbau derselben. Neben ihren quantitativ fast unveränderlichen und qualitativ unwandelbaren Bestandteilen Stickstoff, Sauerstoff und Kohlensäure, enthält die Atmosphäre hauptsächlich noch Wasser in allen drei seinen Aggregatzuständen. Die Wandlungen und Uebergänge aus dem einen in einen anderen dieser Zustände bildet einen grossen Teil dessen, was man „Wetter“ nennt. Eine aus ihren primären Ursachen abgeleitete mathematische Beschreibung dieser Naturscheinung ist nach dem gegenwärtigen Stande der Wissenschaft nicht möglich, weshalb ich mich darauf beschränken muss, den Einfluss des durch die Gleichung (18) d. h. durch

$$(158) \quad \varrho(x) = \varrho_0' e^{-\frac{3x}{H}}$$

veranschaulichten durchschnittlichen Gehaltes des Wasserdampfes auf den thermischen Aufbau der Atmosphäre mathematisch zu erfassen.

Schon Tyndall hat nachgewiesen, dass es nicht die Hauptbestandteile der Atmosphäre, nämlich die elementaren Gase Stickstoff und Sauerstoff, sind, welche die strahlende Energie nennenswert absorbieren, sondern dass diese Absorption vorwiegend von gas- und dampfförmigen chemischen Verbindungen besorgt wird. Die Atmosphäre enthält von diesen Verbindungen, wie bereits gesagt, Wasserdampf und Kohlensäure, und diese Gase sind es, die den grösseren Teil der Sonnenstrahlung und fast die gesamte Ausstrahlung der Erdoberfläche absorbieren.

Diesen Zustand will ich nun mathematisch zum Ausdruck bringen, wobei ich mir, um die Berechnung nicht allzusehr zu komplizieren, folgende Vereinfachungen erlaube. Weil der prozentuelle Gehalt der Atmosphäre an Kohlensäure, selbst in der untersten Luftschicht, geringer als 0,03 Prozent ist, will ich die trockene Luft samt der Kohlensäure als ein einheitliches Gas behandeln und nur dem Wasserdampf seine Sonderstellung einräumen. Die Dichteabnahme der Atmosphäre mit der Höhe ist dann nach dem soeben gesagten durch die Formel

$$(159) \quad \varrho(x) = \varrho_1 e^{-\frac{x}{H}} + \varrho_2 e^{-\frac{3x}{H}}$$

dargestellt, worin ϱ_1 und ϱ_2 die Dichte der trockenen Luft bzw. des Wasserdampfes unmittelbar oberhalb der Erdoberfläche bedeuten soll. Für H ist der bereits erprobte Wert $H=8000 \text{ m}$ zu setzen. Eine weitere Vereinfachung, die ich mir noch erlaube, besteht darin, dass ich die Absorption der Sonnenstrahlung gänzlich der trockenen Luft und der Kohlensäure überweise. Ich setze also mit Anwendung des Beerschen Gesetzes:

$$(160) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_1(x) = a_1 e^{-\frac{x}{H}} \\ a_2(x) = a_1' e^{-\frac{x}{H}} + a_2' e^{-\frac{3x}{H}}, \end{array} \right.$$

worin a_1 das Absorptionsvermögen der untersten Einheitsschicht der trockenen Luft samt Kohlensäure für die Sonnenstrahlung, a_1' jenes für die dunkle Ausstrahlung der Erdoberfläche bedeutet, während a_2' das Absorptionsvermögen der untersten Einheitsschicht des in der Atmosphäre enthaltenen Wasserdampfes für die erwähnte dunkle Strahlung darstellt.

Die Transmissionskoeffizienten p_a und p_a' der derart aufgebauten Atmosphäre für die Sonnenstrahlung bzw. für die dunkle Strahlung sind nach (42) durch die folgenden Ausdrücke veranschaulicht:

$$(161) \quad \begin{cases} p_a = e^{-a_1 H} \\ p_a' = e^{-a_1' H - a_2' \frac{H}{3}} \end{cases}$$

Es ist deshalb nach (95)

$$(162) \quad W(x) = (1-A) W_m e^{-a_1 H e^{-\frac{x}{H}}}$$

und nach (87)

$$(163) \quad \sigma \theta^4(x) = \frac{1}{2} (1-A) W_m \left\{ 1 + \frac{a_1}{a_1' + a_2' e^{-\frac{x}{H}}} p_a e^{-\frac{x}{H}} + a_1' \int_x^\infty e^{-a_1 H e^{-\frac{x}{H}}} e^{-\frac{x}{H}} dx + a_2' \int_x^\infty e^{-a_1 H e^{-\frac{x}{H}}} e^{-\frac{3x}{H}} dx \right\}$$

Mit Anwendung der Substitution

$$a_1 H e^{-\frac{x}{H}} = y$$

und mittels partieller Integration bekommt man:

$$\begin{aligned} \int_x^\infty e^{-a_1 H e^{-\frac{x}{H}}} e^{-\frac{3x}{H}} dx &= -\frac{1}{a_1^3 H^2} \int_y^0 e^{-y} y^2 dy = \\ &= \frac{1}{a_1} \left\{ \frac{2}{a_1^2 H^2} - p_a e^{-\frac{x}{H}} \left[e^{-\frac{2x}{H}} + \frac{2}{a_1 H} e^{-\frac{x}{H}} + \frac{2}{a_1^2 H^2} \right] \right\}, \end{aligned}$$

so dass man nach demselben Vorgang wie in § 102 erhält:

$$(164) \quad \sigma \theta^4(x) = \frac{1}{2}(1-A) W_m \left\{ 1 + \frac{a_1}{a_1' + a_2' e^{-\frac{2x}{H}}} p_a e^{-\frac{x}{H}} + \frac{a_1'}{a_1} (1 - p_a e^{-\frac{x}{H}}) + \frac{a_2'}{a_1} \left[\frac{2}{a_1^2 H^2} - p_a e^{-\frac{x}{H}} \left(e^{-\frac{2x}{H}} + \frac{2}{a_1 H} e^{-\frac{x}{H}} + \frac{2}{a_1^2 H^2} \right) \right] \right\}.$$

Diese Gleichung liefert ein bemerkenswertes Resultat, nämlich, dass die Lufttemperatur schon in einer endlichen Höhe ihr Minimum erreicht. Differenziert man, um dies zu erweisen, die vorstehende Gleichung nach x und setzt das Resultat gleich Null, so bekommt man:

$$(165) \quad -\frac{1}{H} \log_{\text{nat}} p_a \left\{ a_1 (a_1' + a_2' e^{-\frac{2x}{H}})^{-1} - \frac{a_1'}{a_1} - \frac{a_2'}{a_1} \left(e^{-\frac{2x}{H}} + \frac{2}{a_1 H} e^{-\frac{x}{H}} + \frac{2}{a_1^2 H^2} \right) \right\} + \frac{2a_1 a_2'}{H} (a_1' + a_2' e^{-\frac{2x}{H}})^{-2} e^{-\frac{x}{H}} + \frac{2}{H} \cdot \frac{a_2'}{a_1} \left(e^{-\frac{x}{H}} + \frac{1}{a_1 H} \right) = 0.$$

Dabei ist mit $e^{-\frac{x}{H}}$ gekürzt worden, was zu besagen hat, dass auch für $x = \infty$ die Temperatur ein Extrem, ein Nebenminimum, erreicht.

Berücksichtigt man, dass wegen (160) $\log_{\text{nat}} p_a = -a_1 H$ ist, setzt der kürzeren Schreibweise halber

$$(166) \quad e^{-\frac{x}{H}} = z,$$

so bekommt man statt (165) die Gleichung:

$$(167) \quad (a_1' + a_2' z^2)^3 - a_1^3 (a_1' + a_2' z^2) - \frac{2a_1 a_2'}{H} z = 0.$$

Aus dieser Gleichung lässt sich jenen Höhe x berechnen, in der die Lufttemperatur ihr absolutes Minimum erreicht.

Zu einer solchen Berechnung braucht man ausser dem bereits angegebenen numerischen Werte von H noch jenen der Grössen a_1 , a_1' und a_2' . Es folgt aus (38) und der Tabelle XV $p_a = 0,67$; $p_a' = 0,05$ d. h.

$$(168) \quad e^{-a_1 H} = 0,67 \quad e^{-a_1' H - \frac{a_2' H}{3}} = 0,05.$$

Dieser letztere Ausdruck stellt die durch die Luft und den Wasserdampf bewirkte Transmission der Erdausstrahlung dar. Wie gross der Anteil jedes dieser beiden Gase an dieser Transmission ist, darüber gibt uns eine diesbezügliche Untersuchung Ekholm's wenigstens annähernd Auskunft. Darnach soll die trockene Luft samt der Kohlensäure rund 25 Prozent, der Wasserdampf dagegen 60 Prozent

absorbieren¹⁾, woraus folgen würde :

$$e^{-a_1 H} : e^{-a_1' H - \frac{a_2' H}{3}} = 0,67 : 0,05$$

d. h.

$$(169) \quad a_2' = 10 a_1'.$$

Aus (168) und (169) folgt: $a_1 = 0,0501$; $a_1' = 0,0864$; $a_2' = 0,8642$, und die Gleichung (167) bekommt folgende numerische Form :

$$(170) \quad (0,0864 + 0,8642 z^2)^3 - 0,0025 (0,0864 + 0,8642 z^2) - 0,0108 z = 0.$$

Aus der vorstehenden Gleichung folgt:

$$z = 0,268$$

d. h.

$$x = 10,530 \text{ m.}$$

Dies besagt, dass in der Höhe von 10,5 *km* die jährliche Mitteltemperatur der Luft ihr Minimum erreicht. Diese Erscheinung, die durch einige Nebeneinflüsse, von denen noch die Rede sein wird, beeinflusst wird, führt den Namen der oberen Temperaturinversion.

Den Einfluss, den der Wasserdampf bzw. die Kohlensäure auf die Absorption der Erdausstrahlung ausüben, haben L. de Marchi²⁾ bzw. Arrhenius³⁾ zur Grundlage ihrer Eiszeittheorien gemacht. Ich habe diese beiden Theorien im § 60 meiner „Théorie mathématique“ besprochen und die Gründe ihrer Unzulänglichkeit klargelegt.

¹⁾ Ekholm, Ueber Emission und Absorption der Wärme und deren Bedeutung für die Temperatur der Erdoberfläche. Meteorolog. Zeitschrift. 1902.

²⁾ De Marchi, Le cause dell'era glaciale. Pavia 1895.

³⁾ Arrhenius, On the influence of carbonic acid in the air upon the temperature of the ground. Philosoph. Magazine. Vol. 41. (1896).

KAPITEL XVIII

Zusammenhang zwischen Einstrahlung und Temperatur im Falle einer variablen Bestrahlung

§ 106. Die Wärmeleitung des Erdbodens. Die aus dem Innern der Erde durch Vermittlung des Bodens der Erdoberfläche jährlich zugeführte Wärmemenge ist, wie nachstehend gezeigt werden wird, im Vergleich zu jener, die die Sonnenstrahlen der Erde zuführen, ausserordentlich klein. Aus diesem Grunde hat man bei der Berechnung der jährlichen Temperaturen der Breitenkreise diese Wärmemenge nicht berücksichtigen müssen. Es ist ein anderer Fall, wenn man den täglichen oder den jährlichen Gang der Temperatur auf der Erdoberfläche oder in der Atmosphäre in Betracht zieht, d. h. wenn es sich um eine variable Bestrahlung handelt.

Es ist eine bekannte Tatsache, und man wird auch ihre theoretische Erklärung bald kennenlernen, dass bereits in einer Tiefe von kaum zwanzig Metern die Temperatur des Erdbodens während des ganzen Jahres nahezu konstant ist und sich von der Jahrestemperatur der Oberfläche nur wenig unterscheidet. Infolgedessen wird im Sommer die mittlere tägliche Temperatur der Oberfläche höher sein als die Temperatur in der erwähnten Tiefe, weshalb in dieser Jahreszeit ein Wärmefluss von der Oberfläche gegen das Innere der Erde stattfinden wird. Das Umgekehrte wird im Winter eintreten und ein ähnliches Abfliessen und Zufließen der Wärme wird auch beim Wechsel von Tag und Nacht stattfinden. Diese Erscheinung wird der Wärmeumsatz des Bodens genannt.

Um diese Erscheinung mathematisch zu beschreiben, ist es gestattet — wie dies auch bisher geschehen ist — das in Betracht gezogene Element der Erdoberfläche als eben und horizontal zu betrachten. Berücksichtigt man überdies, dass für eine gegebene Tiefe die Temperatur des Bodens in weitem Umfange eine gleichmässige ist, so dass ein Wärmefluss im Boden in horizontaler Richtung nicht vorhanden ist, so hat man nur die Wärmeleitung senkrecht zur Erdoberfläche in Betracht zu ziehen. Daraus ergibt sich folgendes.

Man ziehe ein vertikales Prisma des Erdbodens mit der Flächeneinheit als Basis in Betracht und verfolge den in demselben vor sich gehenden Wärmefluss. Bezeichnet man die Temperatur des in der Tiefe x befindlichen horizontalen Querschnittes dieses Prismas zur Zeit t mit $v(x, t)$, so stellt $\frac{\partial v(x, t)}{\partial x}$ das Temperaturgefälle senkrecht zu diesem Querschnitt und in der Richtung des zunehmenden x , d. h. gegen unten. Nach den Grundregeln der mathematischen Theorie der Wärmeleitung wird durch diesen Querschnitt während der Zeiteinheit die Wärmemenge

$$(171) \quad Q_1 = -K \frac{\partial v(x, t)}{\partial x}$$

hindurchfließen, wobei K den Wärme-Leitungskoeffizient des Bodens zu bedeuten hat.

Durch den um dx tiefer liegenden Querschnitt des in Betracht gezogenen Prismas wird während derselben Zeit die Wärmemenge

$$Q_2 = -K \left\{ \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} dx \right\}$$

hindurchfließen. Es verbleibt deshalb in dem zwischen den beiden Querschnitten eingeschlossenen Volumselement die Wärmemenge

$$(172) \quad dQ = Q_1 - Q_2 = K \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} dx.$$

Diese Wärmemenge wird, da wir von anderweitigen Umwandlungen der Wärme absehen, zur Erhöhung der Temperatur $v(x, t)$ des in Betracht gezogenen Elementarprismas verwendet. Bezeichnet also c_p die spezifische Wärme des Bodens, d. h. jene Wärmemenge, die in der Lage ist, die Einheit der Masse um einen Grad zu erwärmen und ρ_p die Dichte des Bodens, so ist in dem erwärmten Volumselement die Masse $\rho_p dx$ enthalten, so dass die Wärmemenge dQ während der Zeiteinheit eine Temperaturerhöhung $\frac{\partial v(x, t)}{\partial t}$ zustande bringen wird, die durch die Gleichung:

$$(173) \quad dQ = c_p \rho_p \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} dx$$

gegeben ist.

Führt man die Bezeichnung ein:

$$(174) \quad m^2 = \frac{K}{c_p \rho_p},$$

wobei man die Grösse m^2 den Temperatur-Leitungskoeffizient des Bodens nennt, so folgt aus den vorstehenden Gleichungen:

$$(175) \quad \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} = m^2 \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2}.$$

Diese partielle Differentialgleichung regelt mit den noch zu besprechenden Grenzbedingungen den Wärmefluss und die daraus sich ergebenden Temperaturänderungen im Boden. Diese Erscheinung ist ein wichtiger klimatischer Faktor, dessen Mechanismus nun klargelegt werden soll. Es wird sich dabei von Vorteil erweisen, von dem Einfluss der Atmosphäre auf die Bestrahlung des Erdbodens vorläufig abzusehen und diesen Einfluss erst später zu behandeln.

Nehmen wir also an, die in Betracht gezogene Stelle der Erdoberfläche sei der ungehinderten Bestrahlung durch die Sonne ausgesetzt. Diese Bestrahlung ist, wie im vierten Abschnitt dieses Buches gezeigt, mathematisch exakt beschreibbar. Sie ist eine periodische Funktion der Zeit und kann, wie ich dies in meiner „Théorie mathématique“ dargelegt habe, durch eine Fourier'sche Reihe:

$$(176) \quad W_1(t) = a_0 + a_1 \cos \frac{2\pi}{T} t + a_2 \cos \frac{4\pi}{T} t + a_3 \cos \frac{6\pi}{T} t + \dots$$

$$+ b_1 \sin \frac{2\pi}{T} t + b_2 \sin \frac{4\pi}{T} t + b_3 \sin \frac{6\pi}{T} t + \dots$$

dargestellt werden. Es bedeutet dabei T die Periode, also das Jahr, wenn es sich um den jährlichen Gang, den Tag, wenn es sich um den täglichen Gang der Bestrahlung handelt. Ich will, um die mathematische Behandlung des Gegenstandes nicht zu weitläufig zu gestalten, annehmen, dass die obige Reihe nur die ersten zwei Glieder enthält, also die Form aufweist:

$$(177) \quad W_1(t) = a_0 + a_1 \cos \frac{2\pi}{T} t.$$

Es unterliegt, wie in der „Théorie mathématique“ gezeigt, keiner Schwierigkeit von dem speziellen Fall (177) auf den allgemeinen (176) zu übergehen.

Von der Strahlung $W_1(t)$ wird, wenn man das Absorptionsvermögen der Erdoberfläche für die Sonnenstrahlung mit a_p bezeichnet, pro Zeiteinheit die Wärmemenge

$$(178) \quad Q_i = a_p W_1(t) = a_p \left(a_0 + a_1 \cos \frac{2\pi}{T} t \right)$$

absorbiert.

Ausser dieser Wärmemenge gelangt nach dem soeben gesagten zur Erdoberfläche aus dem Innern der Erde pro Zeiteinheit die Wärmemenge :

$$(179) \quad Q_p = K \frac{\partial v(0, t)}{\partial x}.$$

Das Zeichen minus kommt in obigem Ausdruck nicht vor, weil durch denselben jene Wärmemenge dargestellt werden soll, die zur Erdoberfläche, also in der Richtung $-x$ strömt.

Der Erdoberfläche werden also im Ganzen während der Zeiteinheit die Wärmemengen Q_i und Q_p zugeführt, während zur selben Zeit die durch (85) veranschaulichte Wärmemenge E von der Erdoberfläche emittiert wird. Auf der Erdoberfläche wird sich jene absolute Temperatur θ_p einstellen, bei welcher der Zufluss und der Abfluss der Wärme sich die Wage halten werden. Daraus ergibt sich die Gleichung :

$$(180) \quad a_p \left(a_0 + a_1 \cos \frac{2\pi}{T} t \right) + K \frac{\partial v(0, t)}{\partial x} = a_p' \sigma \theta_p^4.$$

Es ist dabei

$$(181) \quad \theta_p = 273^\circ + v(0, t).$$

Um mittels der vorstehenden zwei Gleichungen die Temperatur $v(0, t)$ der Erdoberfläche zu ermitteln, muss man den Temperaturgradient $\frac{\partial v(0, t)}{\partial x}$ kennen, wozu auch die Kenntnis des Temperaturzustandes im Erdboden erforderlich ist.

Das vorliegende Problem kann in endlicher Form gelöst werden, wenn die rechte Seite von (180) in bezug auf $v(0, t)$ linear ist. Dies wird der Fall sein, wenn die halbe Amplitude der Temperaturschwankung $v(0, t)$ klein ist im Verhältnis zu dem absolut gemessenen Mittelwert:

$$(182) \quad \theta_0 = 273^\circ + v_0$$

der Temperatur der Bodenoberfläche.

Setzt man also :

$$(183) \quad \left\{ \begin{array}{l} \theta_p = \theta_0 + \Delta v \\ v(0, t) = v_0 + \Delta v, \end{array} \right.$$

so wird:

$$\theta_p^4 = \theta_0^4 \left(1 + \frac{\Delta v}{\theta_0} \right)^4$$

Ist also der Bruch $\frac{\Delta v}{\theta_0}$ so klein, dass sein Quadrat neben der Einheit vernachlässigt werden kann, so wird:

$$\theta_p^4 = \theta_0^4 \left(1 + \frac{4\Delta v}{\theta_0} \right) = \theta_0^4 \left\{ 1 + 4 \frac{v(0, t) - v_0}{\theta_0} \right\}$$

$$\theta_p^4 = \theta_0^4 - 4 \theta_0^3 v_0 + 4 \theta_0^3 v(0, t).$$

Setzt man dies in die Gleichung (180) ein und führt der kürzeren Schreibweise halber die Bezeichnungen ein:

$$(184) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{4} \cdot \frac{K}{a_p' \sigma \theta_0^3} = R \\ \frac{1}{4} \cdot \frac{a_p}{a_p'} \cdot \frac{a_0}{\sigma \theta_0^3} - \frac{1}{4} \theta_0 + v_0 = A_0 \\ \frac{1}{4} \cdot \frac{a_p}{a_p'} \cdot \frac{a_1}{\sigma \theta_0^3} = A_1, \end{array} \right.$$

worin R , A_0 und A_1 Konstanten bedeuten, so wird:

$$(185) \quad v(0, t) - R \frac{\partial v(0, t)}{\partial x} = A_0 + A_1 \cos \frac{2\pi}{T} t.$$

Es handelt sich also darum, das Integral der partiellen Differentialgleichung (175) zu finden, welches der obigen Grenzbedingung genügt. Setzt man zu diesem Zwecke

$$v(x, t) = e^{\alpha t + \beta x},$$

worin α und β Konstanten sind, so überzeugt man sich durch Einsetzung des obigen Ausdruckes in die Differentialgleichung (175), dass dieselbe befriedigt werden wird, also der obige Ausdruck ein partikulares Integral derselben darstellen wird, wenn die Gleichung:

$$(186) \quad \alpha = m^2 \beta^2$$

befriedigt ist.

Es ist, wie leicht einzusehen, auch der Ausdruck:

$$(187) \quad v(x, t) = C_1' e^{\alpha_1 t + \beta_1 x} + C_2' e^{\alpha_2 t + \beta_2 x} + C_3 x + C_4,$$

worin C_1' , C_2' , C_3 , C_4 beliebige Konstanten sind, ein Integral von (175), wofern die Wertepaare α_1 , β_1 bzw. α_2 , β_2 die Gleichung (186) befriedigen.

Setzt man statt α_1 und α_2

$$(188) \quad \begin{cases} \alpha_1 = +iN \\ \alpha_2 = -iN, \end{cases}$$

worin i die imaginäre Einheit und N eine reelle Zahl bedeutet, so werden nach (186) β_1 und β_2 zwei zu einander konjugiert komplexe Zahlen sein, weil die zweite aus der ersten folgt, wenn man $+i$ durch $-i$ ersetzt. Diese beiden Zahlen sind also von der Form:

$$(189) \quad \begin{cases} \beta_1 = L + iP \\ \beta_2 = L - iP, \end{cases}$$

worin L und P reelle Zahlen bedeuten.

Durch Einsetzung der vorstehenden Ausdrücke in die Gleichung (175) und durch Gleichsetzung der reellen bzw. der imaginären Teile der derart gewonnenen Gleichung bekommt man:

$$P = L = \pm \frac{1}{m} \sqrt{\frac{N}{2}}$$

$$\beta_1 = (1+i)P$$

$$\beta_2 = (1-i)P.$$

Es wird also:

$$(190) \quad v(x, t) = e^{Px} \{ C_1' e^{i(Nt+Px)} + C_2' e^{-i(Nt+Px)} \} + C_3x + C_4.$$

Nun ist nach den Eulerschen Formeln:

$$e^{\pm i(Nt+Px)} = \cos(Nt+Px) \pm i \sin(Nt+Px)$$

und man bekommt, wenn man setzt:

$$C_1' + C_2' = C_1 \quad i(C_1' - C_2') = C_2$$

worin also C_1 und C_2 vorläufig beliebige Konstanten darstellen,

$$(191) \quad v(x, t) = e^{Px} \{ C_1 \cos(Nt+Px) + C_2 \sin(Nt+Px) \} + Cx_3 + C_4.$$

Setzt man diesen Ausdruck in (185) ein und verlangt, dass die derart erhaltene Gleichung identisch befriedigt werde, so ersieht man, dass dies nur geschehen kann, wenn die nachstehenden Gleichungen erfüllt sind:

$$(192) \quad \left\{ \begin{array}{l} N = \frac{2\pi}{T} \\ C_1 - RP(C_1 + C_2) = A_1 \\ C_2 - RP(C_2 - C_1) = 0 \\ C_4 - RC_3 = A_0. \end{array} \right.$$

Für die Konstante P stehen uns zwei gleiche, entgegengesetzt bezeichnete Werte zur Verfügung. Bei einem positiven Werte von P würden die Temperaturschwankungen mit zunehmender Tiefe unendlich werden. Dieser physikalisch unmögliche und den gemachten Voraussetzungen widersprechende Fall ist auszu-

schliessen und für P nur das negative Vorzeichen zu benützen. Es ist also:

$$(193) \quad P = -\frac{1}{m} \sqrt{\frac{\pi}{T}}$$

$$(194) \quad v(x, t) = e^{-\frac{x}{m} \sqrt{\frac{\pi}{T}}} \left\{ C_1 \cos \left(\frac{2\pi}{T} t - \frac{x}{m} \sqrt{\frac{\pi}{T}} \right) + \right. \\ \left. + C_2 \sin \left(\frac{2\pi}{T} t - \frac{x}{m} \sqrt{\frac{\pi}{T}} \right) \right\} + C_3 x + C_4.$$

Hätte man nach den dem Zeitintervall T entsprechenden mittleren Temperaturen $v(x)$ der einzelnen Bodenschichten gefragt, so hätte man, da der Mittelwert der trigonometrischen Glieder der obigen Gleichung gleich Null ist, folgendes Resultat erhalten:

$$(195) \quad v(x) = C_3 x + C_4.$$

Es stellt also C_4 die dem Zeitintervall T entsprechende mittlere Temperatur v_0 der obersten Schicht des Bodens dar, während C_3 den mittleren Temperaturgradienten gegen das Erdinnere darstellt, der mit g_τ bezeichnet werden möge. Es ist also:

$$(196) \quad C_4 = v_0 \quad C_3 = g_\tau.$$

Es war nach (192)

$$C_4 = A_0 + RC_3,$$

d. h.

$$v_0 = A_0 + Rg_\tau.$$

Setzt man in diese Gleichung die Ausdrücke für R und A_0 aus (184) ein, so wird:

$$a_p' \sigma \theta_0^4 = a_p a_0 + Kg_\tau,$$

d. h. wegen (182)

$$(197) \quad a_p' \sigma (273^\circ + v_0)^4 = a_p a_0 + K g_T.$$

Es ist also v_0 jene Temperatur der Bodenoberfläche, die dem mittleren Bestrahlungszustand $W_m = a_0$ entspricht.

Durch die Gleichungen (192) und (193) sind die noch übrig gebliebenen Konstanten C_1 und C_2 gegeben, wodurch das gestellte Problem gelöst ist.

Man kann der erhaltenen Lösung eine etwas übersichtlichere Form geben, wenn man setzt:

$$(198) \quad C_1 = B \cos \varepsilon \quad C_2 = B \sin \varepsilon,$$

d. h.

$$(199) \quad \tan \varepsilon = \frac{C_2}{C_1} \quad B = \sqrt{C_1^2 + C_2^2},$$

denn damit bekommt man:

$$(200) \quad v(x, t) = v_0 + g_T x + B e^{-\frac{x}{m} \sqrt{\frac{\pi}{T}}} \cos \left(\frac{2\pi}{T} t - \frac{x}{m} \sqrt{\frac{\pi}{T}} - \varepsilon \right),$$

wodurch die Temperatur in der Tiefe x als Funktion der Zeit gegeben ist, während die Temperatur der Bodenoberfläche durch

$$(201) \quad v(0, t) = v_0 + B \cos \left(\frac{2\pi}{T} t - \varepsilon \right)$$

dargestellt erscheint.

§ 107. Der Wärmeumsatz des Erdbodens. Die Formel (200) liefert vollständigen Aufschluss über den Mechanismus der Wärmeleitung im Boden. Aus derselben geht vor allem hervor, dass die Amplituden a_1 bzw. a_2 der Temperaturoszillation in zwei verschiedenen Tiefen x_1 und x_2 durch die beiden nachstehenden Ausdrücke veranschaulicht sind:

$$(202) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = 2 B e^{-\frac{x_1}{m} \sqrt{\frac{\pi}{T}}} \\ \alpha_2 = 2 B e^{-\frac{x_2}{m} \sqrt{\frac{\pi}{T}}} \end{array} \right.$$

Aus diesen beiden Formeln ist ersichtlich, dass diese Amplituden mit zunehmender Tiefe in geometrischer Progression abnehmen, wenn die Tiefe in arithmetischer Progression zunimmt. Die Abschwächung der Amplitude ist um so ausgesprochener, je kleiner die Periode T ist.

Es folgt aus der Formel (200), dass die Extreme der Temperatur in den Zeitmomenten t_1 bzw. t_2 erreicht werden, die durch die Gleichungen gegeben sind:

$$(203) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{2\pi}{T} t_1 - \frac{x_1}{m} \sqrt{\frac{\pi}{T}} - \varepsilon = k\pi \\ \frac{2\pi}{T} t_2 - \frac{x_2}{m} \sqrt{\frac{\pi}{T}} - \varepsilon = k\pi, \end{array} \right.$$

wo k eine beliebige ganze Zahl bedeutet.

Durch Subtraktion der obigen zwei Gleichungen erhält man:

$$(204) \quad m = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \sqrt{\frac{T}{4\pi}}.$$

Die Grösse:

$$\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = c$$

stellt offenbar die Geschwindigkeit dar, mit der sich die Temperaturoszillationen in die Tiefen des Bodens fortpflanzen, so dass es ist:

$$(205) \quad c = m \sqrt{\frac{4\pi}{T}}.$$

In homogenem Boden, d. h. für ein mit der Tiefe unveränderliches m , ist diese Geschwindigkeit bei einem gegebenen T ebenfalls konstant. Je kleiner die Periode T ist, um so schneller pflanzen sich die Oszillationen fort.

Zu diesen Ergebnissen ist bereits Poisson in seinem klassischen Werke „Théorie mathématique de la chaleur. Paris 1835.“ gelangt, weshalb die vorstehenden Gleichungen seinen Namen führen.

Hat man durch Beobachtung die Amplituden α_1, α_2 oder die Zeitpunkte t_1, t_2 ermittelt, so kann mittels der vorstehenden Gleichungen der Temperaturleitungskoeffizient m^2 des Bodens errechnet werden. So folgt aus den Gleichungen (202)

$$(206) \quad m^2 = \frac{\pi}{T} \left\{ \frac{x_2 - x_1}{\log_{\text{nat}} \frac{\alpha_1}{\alpha_2}} \right\}^2$$

Hat man mehr als zwei Gleichungen von der Form (202) oder (203) zur Verfügung, so berechnet man mit Hilfe der Ausgleichsrechnungen den wahrscheinlichsten Wert von m^2 . Solche Ermittlungen der Grösse m^2 sind bereits in einer grossen Anzahl durchgeführt worden; sie ergaben, je nach der Beschaffenheit des Bodens, recht verschiedene Werte für m^2 . Immerhin können für die sialische Erdkruste die nachstehenden Werte für m^2, K und $C_p = c_p \rho_p$ (Wärmekapazität des Bodens) und zwar in *cm-g-Min*-Masssystem als abgerundete Mittelwerte betrachtet werden:

$$(207) \quad m^2 = 1,00 \quad C_p = 0,50 \quad K = 0,50.$$

Mit dem Wert $m^2 = 1,00$ ergibt sich aus den Gleichungen (202) und (205) folgendes. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der täglichen Temperaturoszillation beträgt 135 *cm* pro Tag, während jene der jährlichen Temperaturoszillation bloss 7 *cm* pro Tag beträgt; dabei wird die tägliche Oszillation bereits in einer Tiefe von 113 *cm* auf den hundertsten Teil ihres der Bodenoberfläche entsprechenden Betrages abgeschwächt, während dies für die jährliche Oszillation in einer Tiefe von 2168 *cm* der Fall ist.

In noch grösseren Tiefen ist die Temperatur des Bodens während des ganzen Jahres konstant; sie ändert sich hier nicht mehr zeitlich, sondern nur räumlich und zwar derart, dass mit zunehmender Tiefe die Temperatur ebenfalls zunimmt, wie dies aus der Formel (200) folgt. In dieser Formel ist bei der erwähnten Tiefe und wie dies aus der obigen Berechnung folgt, das letzte mit dem Faktor $e^{-\frac{x}{m} \sqrt{\frac{\pi}{T}}}$ behaftete Glied verschwindend klein, so dass hier die Bodentemperatur durch den Ausdruck:

$$(208) \quad v(x) = v_0 + g_T x$$

als Funktion der Tiefe allein dargestellt erscheint.

Die Zunahme der mittleren örtlichen Temperatur mit der Tiefe, d. h. der

Temperaturgradient g_T ist örtlich recht verschieden, es kann aber nach den bisherigen Ermittlungen desselben angenommen werden, dass einer Tiefenzunahme von 33,3 *m* (geothermische Tiefenstufe) eine durchschnittliche Temperaturzunahme von einem Grad entspricht. Dies ergibt den Mittelwert:

$$g_T = 0,003 \text{ Grad pro } cm.$$

Nach Zöppritz ist der Mittelwert von K für die Gesteine, welche die Erdoberfläche bilden, gleich $K = 0,35$ in obigen Einheiten. Der konstante Wärmestrom, der sich aus den tieferen Schichten gegen die Erdoberfläche ergiesst, ist also gleich $Kg_T = 0,000105$ Grammkalorien pro cm^2 und Minute, d. h. 55 Grammkalorien pro Jahr. Der Vergleich dieser Zahl mit den Zahlen der Tabelle VII beweist augenscheinlich, dass die aus dem Erdinnern zur Erdoberfläche gelangende Wärmemenge verschwindend klein ist im Vergleich zu jenen Wärmemengen, die die Sonnenstrahlen der Erdoberfläche zuführen.

Will man den Einfluss berechnen, den der aus dem Erdinnern gelangende Wärmestrom auf die Temperatur der Erdoberfläche ausübt, so kann der folgende Weg eingeschlagen werden.

Die durchschnittliche an der oberen Grenze der Atmosphäre anlangende Erdbestrahlung pro Zeit- und Flächeneinheit, die, um Anschluss an die Formel (140) zu gewinnen, mit W_m bezeichnet werden möge, beträgt nach der Formel (110) des vierten Abschnittes, in der e^2 neben der Einheit vernachlässigt werden kann,

$$W_m = \frac{1}{4} J_0.$$

Mit dem im § 70 angegebenen Wert der Solarkonstante von 1,946 Grammkalorien pro cm^2 und Minute bekommt man $W_m = 0,4865$ Grammkalorien pro cm^2 und Minute. Diese Strahlung würde nach (84) und (140) eine durchschnittliche Temperatur der untersten Luftschicht von 15,018 Grad ergeben. Vergrössert man die Strahlungsmenge W_m um den oben angegebenen Wert der aus dem Erdinnern zur Erdoberfläche gelangenden Wärme, so wird $W_m = 0,486605$ Grammkalorien pro cm^2 und Minute. Setzt man diesen Wert in die Formel (140) ein, so bekommt man eine durchschnittliche Temperatur der untersten Luftschicht von 15,033 Grad. Der Wärmestrom aus dem Erdinnern beeinflusst die mittlere Temperatur der Erdoberfläche also bloss um 0,015° und nicht, wie oft angegeben, um 0,1°. Dieser Wärmestrom ist, wie ich dies in der „Théorie mathématique“ gezeigt habe, auch während der langen geologischen Vorzeit kein klimatischer Faktor gewesen.

Obwohl der Erdboden kein klimatischer Faktor als Uebermittler der Wärme des Erdinnern ist, spielt er als Aufspeicherer der Sonnenstrahlung eine nicht unbedeutende klimatische Rolle, denn während des Tages und während der warmen

Jahreszeit speichert er Wärme auf, um sie während der Nacht und während der kalten Jahreszeit der Erdoberfläche und dadurch auch der Atmosphäre zurückzugeben. Dieser Wärmeumsatz des Bodens kann mathematisch wie folgt beschrieben werden.

Der von der Erdoberfläche gegen das Erdinnere abfließende Wärmestrom, pro Zeiteinheit berechnet, ist nach dem vorhergesagten dargestellt durch:

$$(209) \quad \frac{dQ}{dt} = -K \frac{\partial v(0, t)}{\partial x}.$$

Nun ist nach (170)

$$\begin{aligned} \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} = g_{\tau} - \frac{B}{m} \sqrt{\frac{\pi}{T}} e^{-\frac{x}{m} \sqrt{\frac{\pi}{T}}} \left\{ \cos \left(\frac{2\pi}{T} t - \frac{x}{m} \sqrt{\frac{\pi}{T}} - \varepsilon \right) - \right. \\ \left. - \sin \left(\frac{2\pi}{T} t - \frac{x}{m} \sqrt{\frac{\pi}{T}} - \varepsilon \right) \right\}, \end{aligned}$$

d. h.

$$\frac{\partial v(0, t)}{\partial x} = g_{\tau} - \frac{B}{m} \sqrt{\frac{\pi}{T}} \left\{ \cos \left(\frac{2\pi}{T} t - \varepsilon \right) - \sin \left(\frac{2\pi}{T} t - \varepsilon \right) \right\}.$$

Weil, ganz allgemein,

$$\begin{aligned} \cos \alpha - \sin \alpha &= \cos \alpha + \cos \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) = 2 \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) \cos \frac{\pi}{4} \\ &= \sqrt{2} \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) \end{aligned}$$

ist, so wird:

$$(210) \quad \frac{\partial v(0, t)}{\partial x} = g_{\tau} - \frac{B}{m} \sqrt{\frac{2\pi}{T}} \cos \left(\frac{2\pi}{T} t + \frac{\pi}{4} - \varepsilon \right).$$

Während des Zeitintervalles t_1 bis t_2 ist also von der Erdoberfläche gegen das Erdinnere eine Wärmemenge abgeflossen, die durch den Ausdruck:

$$Q_t = \frac{KB}{m} \sqrt{\frac{2\pi}{T}} \int_{t_1}^{t_2} \cos\left(\frac{2\pi}{T} t + \frac{\pi}{4} - \varepsilon\right) dt = \frac{KB}{m} \sqrt{\frac{T}{2\pi}} \left\{ \sin\left(\frac{2\pi}{T} t + \frac{\pi}{4} - \varepsilon\right) \right\}_{t_1}^{t_2}$$

veranschaulicht ist, wobei die vorher berechnete verschwindend kleine Wärmemenge $g_r K(t_2 - t_1)$ vernachlässigt werden konnte.

Setzt man in den obigen Ausdruck für t_1 den Wert ein, der durch

$$\frac{2\pi}{T} t_1 + \frac{\pi}{4} - \varepsilon = \frac{\pi}{2}$$

gegeben ist und für welchen $\frac{dQ_t}{dt} = 0$ ist, d. h. in dem der Wärmeabfluss gegen das Erdinnere gerade begonnen hat, und für t_2 den Wert, der durch

$$\frac{2\pi}{T} t_2 + \frac{\pi}{4} - \varepsilon = \frac{3}{2} \pi$$

gegeben ist, zu dem also der erwähnte Wärmeabfluss gerade aufgehört hat, so bekommt man als den eigentlichen Wärmeumsatz des Bodens die Wärmemenge:

$$(211) \quad Q = \frac{2KB}{m} \sqrt{\frac{T}{2\pi}}.$$

Dieser Wert ist, wie zu erwarten, gleich der Gesamtamplitude der periodischen Funktion Q_t .

Den vorstehend abgeleiteten Formeln liegt die Annahme zugrunde, dass die Bestrahlung eine einfache trigonometrische Funktion der Zeit ist. In einem solchen Falle ist nach (200) die Temperatur $v(x, t)$ in einer gegebenen Tiefe x des Bodens ebenfalls eine einfache trigonometrische Funktion der Zeit. Dies gilt natürlich auch für die durch (201) dargestellte Temperatur der Bodenoberfläche. Aus den Formeln (177) und (201) ergibt sich dann noch folgendes.

Die Bestrahlung des Erdbodens erreicht ihre extremen Werte zu den Zeiten, für die

$$\frac{2\pi}{T} t_1 = k\pi$$

ist, wo k eine beliebige ganze Zahl bedeutet, die Temperatur der Bodenoberfläche erreicht dagegen ihre extremen Werte zu den Zeiten, für die

$$\frac{2\pi}{T} t_2 - \varepsilon = k\pi$$

ist. Die Temperaturextreme verspäten sich gegenüber den Bestrahlungsextremen um die Zeitspanne:

$$(212) \quad \Delta t = t_2 - t_1 = \frac{T}{2\pi} \varepsilon$$

wobei ε durch (199) gegeben ist.

Der jährliche Bestrahlungsgang der nichtarktischen Zone unterscheidet sich nur wenig von einer einfachen trigonometrischen Funktion der Zeit t oder kann, wenn man ihn mathematisch exakter darstellen will, durch die ersten drei Glieder der Reihe (176) veranschaulicht werden. Für den jährlichen Gang der Bestrahlung der arktischen Zonen, in welchen die Sonne während der ständigen Nacht über dem Horizont nicht erscheint, oder für den täglichen Gang der Bestrahlung eines beliebigen Ortes der Erdoberfläche ist das obige nicht mehr der Fall, weil hier die Bestrahlungsfunktion $W_1(t)$ zu einer diskontinuierlichen wird.

Der tägliche Gang der Bestrahlung war durch die obere Linie der Fig. 38 graphisch veranschaulicht. Diese Linie setzt sich zusammen aus Wellenbergen, die dem Verweilen der Sonne oberhalb des Horizontes entsprechen, und geraden in die Abszissenachse fallenden Strecken, für welche die Bestrahlung gleich Null ist.

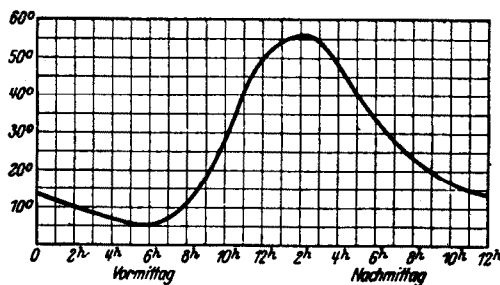


Fig. 46

Diese Diskontinuität des täglichen Bestrahlungsganges hat eine besondere, unsymmetrische Form der täglichen Temperaturkurve zur Folge. Diese war Gegenstand zahlreicher speziellen empirischen Untersuchungen, doch lässt sich die Form dieser

Kurve mit Hilfe der vorstehenden Theorie auch analytisch darstellen, wie ich dies in meiner „Théorie mathématique“ dargetan und an einem konkreten Fall erläutert habe. Dieser betraf den mittleren täglichen Gang der Temperatur der obersten Bodenschicht am Aequator ohne Berücksichtigung des Einflusses der Atmosphäre, der wie bereits gesagt, nachträglich behandelt werden soll. Das Ergebnis dieser Berechnung ist in der beiliegenden Fig. 46 wiedergegeben. Aus derselben ist zu ersehen, dass das Minimum der Temperatur mit dem Sonnenaufgang zusammenfällt, nachher folgt ein steiler Aufstieg der Temperatur, die kurz nach 2 Uhr nachmittags ihr Maximum erreicht; von hier an setzt der Abstieg ein, der sich im weiteren Verlaufe verflacht bis wieder das erwähnte Minimum erreicht wird.

§ 108. Integration der Differentialgleichungen des Strahlungsvorganges in der Atmosphäre im Falle variabler Bestrahlung. Ich habe in den vorstehenden zwei Paragraphen den Einfluss der Atmosphäre ausser Acht gelassen, um ihn nachträglich zu behandeln, was jetzt geschehen soll. Wenn es sich um eine veränderliche Bestrahlung handelt, wie es jene der Erde in Wirklichkeit ist, darf die vorstehend untersuchte Wärmeleitung des Bodens nicht unberücksichtigt gelassen werden, denn der Wärmeumsatz des Bodens ist, wie wir gesehen haben, ein wichtiger klimatischer Faktor, der in den Mechanismus der thermischen Erscheinungen in der Atmosphäre tief eingreift. Seine Berücksichtigung, verbunden mit jener der Variabilität des Bestrahlungszustandes, machte die Lösung des nun zu behandelnden Problems, die mir erst nach der Veröffentlichung der „Théorie mathématique“ vollständig gelang, zu einer recht schwierigen, doch erwies sich die wunderbare Ausdrucksmöglichkeit der mathematischen Sprache als fähig, den Mechanismus dieser komplizierten Erscheinung zu erfassen und zu beschreiben.

Nehmen wir also an, der in Betracht gezogene Teil der Erdoberfläche und der anliegenden Atmosphäre sei einer variablen periodischen Bestrahlung ausgesetzt. Diese kann in allen Fällen durch eine Fouriersche Reihe von der Form (176) dargestellt werden. Für den jährlichen Bestrahlungsgang kann man sich in den meisten Fällen mit den ersten zwei Gliedern dieser Reihe begnügen, d. h. setzen:

$$(213) \quad W_1(t) = a_0 + a_1 \cos \frac{2\pi}{T} t.$$

Von diesem speziellen Fall kann man auf den allgemeinen ohne Schwierigkeiten übergehen.

Die Atmosphäre der Erde wird, wie wir gesehen haben, vorwiegend durch die dunkle Ausstrahlung der Erdoberfläche erwärmt. Es ist deshalb gestattet, wie dies bei der Untersuchung des vertikalen Aufbaues der Atmosphäre geschehen ist, zu setzen:

$$(214) \quad \begin{cases} a_1(x) = 0 \\ a_2(x) = k \varrho(x). \end{cases}$$

Es folgt aus (42), (45) und den vorstehenden Gleichungen, dass die Erdoberfläche einer Strahlung:

$$(215) \quad W(0, t) = (1 - A)(a_0 + a_1 \cos \frac{2\pi}{T} t)$$

ausgesetzt ist, die vom Erdboden, weil in A alle Reflexionen bereits inbegriffen sind, vollständig absorbiert wird.

Ausser dieser Strahlung gelangt zur Erdoberfläche die dunkle Strahlung $O(0, t)$ der Atmosphäre, die ebenfalls vollständig absorbiert wird.

Der Erdoberfläche wird schliesslich durch Wärmeleitung des Bodens die Wärmemenge Q_p zugeführt, die nach (179) durch

$$Q_p = K \frac{\partial v(0, t)}{\partial x}$$

gegeben ist, worin x mit zunehmender Tiefe als positiv zu zählen ist.

Die Erdoberfläche selbst emittiert die dunkle Strahlung $U(0, t)$ und weil in jedem Augenblick die Wärmefaufnahme der Erdoberfläche gleich der Wärmeabgabe ist, so bekommt man die Gleichung:

$$(216) \quad U(0, t) = W(0, t) + O(0, t) + Q_p.$$

Berücksichtigt man (57), so wird:

$$(217) \quad Z(0, t) + W(0, t) + K \frac{\partial v(0, t)}{\partial x} = 0.$$

An der oberen Grenze der Atmosphäre muss die Grenzbedingung (64) erfüllt sein.

Es ist nach (12)

$$(218) \quad \varrho(x) = \varrho_0 e^{-\frac{x}{H}},$$

während aus (49) und (214)

$$(219) \quad \frac{\partial W(x, t)}{\partial x} = 0$$

folgt.

Zieht man noch die Gleichung (86) heran, so findet man, dass mit Berücksichtigung des Vorstehenden die Differentialgleichungen (58), (61) und (60) folgende Form erhalten:

$$(220) \quad \frac{\partial Y(x, t)}{\partial z} = k_{\rho_0} e^{-\frac{x}{H}} Z(x, t)$$

$$(221) \quad \frac{\partial Z(x, t)}{\partial x} = c_{\rho_0} e^{-\frac{x}{H}} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}$$

$$(222) \quad 2k_{\sigma} \theta^4(x, t) + c \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = kY(x, t).$$

Weil sich die Atmosphäre wegen (218) theoretisch bis in die Unendlichkeit erstreckt, ist (64) durch

$$(223) \quad Y(\infty, t) + Z(\infty, t) = 0$$

zu ersetzen.

In den vorstehenden Gleichungen sind die Glieder $K \frac{\partial v(0, t)}{\partial x}$ und $2k_{\sigma} \theta^4(x, t)$ störend, das erste, weil es den Gradient der Bodentemperatur enthält, das zweite, wegen der vierten Potenz. Diese Unzukömmlichkeiten lassen sich auf folgende Weise beheben.

Die Temperatur der Bodenoberfläche ist durch (201), d. h. durch die Formel

$$(224) \quad v(0, t) = v_0 + B \cos\left(\frac{2\pi}{T} t - \varepsilon\right)$$

gegeben, während für den Gradient der Bodentemperatur die Formel (210), d. h.

$$\frac{\partial v(0, t)}{\partial x} = g_r - \frac{B}{m} \sqrt{\frac{2\pi}{T}} \cos\left(\frac{2\pi}{T} t + \frac{\pi}{4} - \varepsilon\right)$$

abgeleitet worden ist. Dieser Ausdruck kann, weil, wie gezeigt, g_T vernachlässigt werden kann, wie folgt geschrieben werden:

$$\frac{\partial v(0, t)}{\partial x} = -\frac{B}{m} \sqrt{\frac{2\pi}{T}} \cos \left\{ \frac{2\pi}{T} \left(t + \frac{T}{8} \right) - \varepsilon \right\}.$$

Dieser Ausdruck ist, wie aus (224) ersichtlich, gleich der Differenz $v(0, t) - v_0$, wenn man diese mit $-\frac{1}{m} \sqrt{\frac{2\pi}{T}}$ multipliziert und die darin vorkommende Zeit t mit dem Phasenunterschied $\frac{T}{8}$ behaftet. Es ist also:

$$\frac{\partial v(0, t)}{\partial x} = -\frac{1}{m} \sqrt{\frac{2\pi}{T}} \left\{ v \left[0, \left(t + \frac{T}{8} \right) \right] - v_0 \right\}.$$

Es kann, namentlich, wenn es sich um den jährlichen Gang der Temperatur handelt, mit genügender Genauigkeit die Temperatur $v(0, t)$ der Bodenoberfläche der Temperatur $u(0, t)$ der untersten Luftschicht gleichgesetzt werden. Es wird auf diese Weise:

$$\frac{\partial v(0, t)}{\partial x} = -\frac{1}{m} \sqrt{\frac{2\pi}{T}} \left\{ u \left[0, \left(t + \frac{T}{8} \right) \right] - u_0 \right\}.$$

Setzt man dies und (179) in (217) ein, so bekommt man als die Grenzbedingung an der Bodenoberfläche:

$$(225) \quad Z(0, t) + (1-A) \left(a_0 + a_1 \cos \frac{2\pi}{T} t \right) = \frac{K}{m} \sqrt{\frac{2\pi}{T}} \left\{ u \left[0, \left(t + \frac{T}{8} \right) \right] - u_0 \right\}.$$

Die vierte Potenz der Lufttemperatur $\theta(0, t)$ lässt sich auf folgende Weise beseitigen.

Der Periode T entspricht folgender Mittelwert der Bestrahlung:

$$W_m = a_0$$

und diesem, gemäss (122), folgende Temperaturverteilung längs der vertikalen Luftsäule:

$$\sigma \theta_m^4(x) = \frac{1}{2} a_0 (1-A) \left\{ 1 + k \int_x^h \varrho(x) dx \right\}.$$

Setzt man hier für $\varrho(x)$ den Ausdruck (218) ein und berücksichtigt, dass in vorliegendem Falle $h = \infty$ ist, so wird:

$$\sigma \theta_m^4(x) = \frac{1}{2} a_0 (1-A) \left\{ 1 + k \varrho_0 H e^{-\frac{x}{H}} \right\}.$$

Nun stellt nach (11)

$$(226) \quad \varrho_0 H = M$$

die Masse der auf der Flächeneinheit der Erdoberfläche ruhenden Luftsäule der Atmosphäre dar, so dass man bekommt:

$$(227) \quad \sigma \theta_m^4(x) = \frac{1}{2} a_0 (1-A) \left\{ 1 + k M e^{-\frac{x}{H}} \right\}.$$

Setzt man:

$$(228) \quad \theta(x) = 273 + u_m(x)$$

d. h. bezeichnet mit $u_m(x)$ die der Periode T entsprechende mittlere Temperatur in der Höhe x , gemessen in Celsiusgraden, so ist der Bruch $\frac{u_m(x)}{273}$ genügend klein, damit seine höheren Potenzen neben der Einheit vernachlässigt werden können. Man erhält also mit Anwendung der Binomialformel

$$\theta_m^4(x) = 273^4 \left\{ 1 + 4 \frac{u_m(x)}{273} \right\}.$$

Es wird also:

$$\sigma 273^4 + 4 \sigma 273^3 u_m(x) = \frac{1}{2} a_0 (1-A) \left\{ 1 + k M e^{-\frac{x}{H}} \right\}.$$

Bezeichnet u_0 die Mitteltemperatur der untersten Luftschicht, d. h. jene für $x = 0$, so ist nach der vorstehenden Gleichung:

$$\sigma 273^4 + 4 \sigma 273^3 u_0 = \frac{1}{2} a_0 (1 - A) (1 + kM).$$

Setzt man ausserdem der kürzeren Schreibweise halber:

$$(229) \quad \frac{1}{8} \frac{a_0(1-A)}{\sigma 273^3} kM = b,$$

so bekommt man die Formel:

$$(230) \quad u_m(x) = u_0 + b(e^{-\frac{x}{H}} - 1).$$

Bezeichnet man schliesslich mit $u'(x, t)$ die Abweichung der variablen Lufttemperatur $u(x, t)$ in der Höhe x von ihrem dortigen Mittelwert $u_m(x)$, setzt also:

$$(231) \quad u'(x, t) = u(x, t) - u_m(x)$$

so wird vor allem

$$(232) \quad \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial u'(x, t)}{\partial t}$$

und ausserdem:

$$\begin{aligned} \theta(x, t) &= 273^\circ + u(x, t) = 273^\circ + u_m(x) + u'(x, t) = \\ &= 273^\circ + u_0 + u'(x, t) + b(e^{-\frac{x}{H}} - 1). \end{aligned}$$

Bezeichnet θ_0 die absolut gemessene Mitteltemperatur ($273^\circ + u_0$) der untersten Luftschicht, so wird:

$$(233) \quad \theta(x, t) = \theta_0 + u'(x, t) + b(e^{-\frac{x}{H}} - 1).$$

Auf der rechten Seite dieser Gleichung sind, wie zu erwarten und wie man es auch bei deren numerischen Berechnung sehen wird die beiden letzten Glieder klein im Verhältnis zum ersten Gliede θ_0 , so dass man mit Benützung der Binomialformel und Vernachlässigung der höheren Potenzen der erwähnten Verhältniszahl bekommt:

$$\theta^4(x, t) = \theta_0^4 + 4\theta_0^3 \{u'(x, t) + b(e^{-\frac{x}{H}} - 1)\}.$$

Setzt man also der kürzeren Schreibweise halber:

$$(234) \quad 4\sigma\theta_0^3 = p$$

so wird:

$$(235) \quad \sigma\theta^4(x, t) = \frac{1}{4}p\theta_0 + p \{u'(x, t) + b(e^{-\frac{x}{H}} - 1)\}.$$

Man bekommt also mit Berücksichtigung von (231), (232), (235) statt den Gleichungen (220), (221), (222), (225), (223) die fünf nachstehenden:

$$(236) \quad \frac{\partial Y(x, t)}{\partial x} = k\varrho_0 e^{-\frac{x}{H}} Z(x, t)$$

$$(237) \quad \frac{\partial Z(x, t)}{\partial x} = c\varrho_0 e^{-\frac{x}{H}} \frac{\partial u'(x, t)}{\partial t}$$

$$(238) \quad \frac{\partial u'(x, t)}{\partial t} + 2\frac{kp}{c}u'(x, t) + 2\frac{kp}{c}b(e^{-\frac{x}{H}} - 1) + \frac{1}{2}\frac{kp}{c}\theta_0 = \frac{k}{c}Y(x, t)$$

$$(239) \quad Z(0, t) + (1 - A)(a_0 + a_1 \cos \frac{2\pi}{T}t) = \frac{K}{m} \sqrt{\frac{2\pi}{T}} u' \left[0, \left(t + \frac{T}{8} \right) \right]$$

$$(240) \quad Y(\infty, t) + Z(\infty, t) = 0.$$

Um die vorstehenden Differentialgleichungen zu integrieren, führe man die Substitution durch:

$$x = -H \log_{\text{nat}} z,$$

d. h. setze:

$$(241) \quad z = e^{-\frac{x}{H}}.$$

Weil also

$$(242) \quad \begin{cases} \text{für } x = 0 & z = 1 \\ \text{für } x = \infty & z = 0 \end{cases}$$

und da

$$(243) \quad \frac{\partial F(z, t)}{\partial x} = \frac{\partial F(z, t)}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{H} e^{-\frac{x}{H}} \frac{\partial F(z, t)}{\partial z}$$

ist, können die vorstehenden partiellen Differentialgleichungen und die zugehörigen Grenzbedingungen mit Berücksichtigung von (226), (243), (241), (242) durch die nachstehenden für die Integration sich eignenden Gleichungen ersetzt werden:

$$(244) \quad \frac{\partial Y(z, t)}{\partial z} = -kM Z(z, t)$$

$$(245) \quad \frac{\partial Z(z, t)}{\partial z} = -cM \frac{\partial u'(z, t)}{\partial t}$$

$$(246) \quad \frac{\partial u'(z, t)}{\partial t} + 2 \frac{kp}{c} u'(z, t) + 2 \frac{kp}{c} h(z-1) + \frac{1}{2} \frac{kp}{c} \theta_0 = \frac{k}{c} Y(z, t)$$

$$(247) \quad Z(1, t) + (1-A) \left(a_0 + a_1 \cos \frac{2\pi}{T} t \right) = \frac{K}{m} \sqrt{\frac{2\pi}{T}} u' \left[1, \left(t + \frac{T}{8} \right) \right]$$

$$(248) \quad Y(0, t) + Z(0, t) = 0.$$

Differentiert man zu dem angegebenen Zwecke die Gleichung (246) nach z , so wird wegen (244):

$$(249) \quad \frac{\partial^2 u'(z, t)}{\partial z \partial t} + 2 \frac{kp}{c} \cdot \frac{\partial u'(z, t)}{\partial z} + 2 \frac{kp}{c} b = - \frac{k^2}{c} MZ(z, t).$$

Eine abermalige Differentiation nach z liefert mit Berücksichtigung von (245)

$$(250) \quad \frac{\partial^3 u'(z, t)}{\partial z^2 \partial t} + 2 \frac{kp}{c} \cdot \frac{\partial^2 u'(z, t)}{\partial z^2} - k^2 M^2 \frac{\partial u'(z, t)}{\partial z} = 0.$$

Es handelt sich nun darum, das die Grenzbedingungen (247) und (248) befriedigende Integral dieser Differentialgleichung zu finden. Setzt man zu diesem Zwecke:

$$u'(z, t) = e^{\alpha_i t + \beta_i z}$$

worin α_i und β_i Konstanten bedeuten, so wird der vorstehende Ausdruck ein partikulares Integral der Differentialgleichung (250) darstellen, wenn diese Konstanten die Gleichung:

$$(251) \quad \alpha_i \beta_i^2 + 2 \frac{kp}{c} \beta_i^2 - k^2 M^2 \alpha_i = 0$$

befriedigen.

Der Ausdruck:

$$(252) \quad u'(z, t) = C_1 + C_2 z + \sum_1^n G_i e^{\alpha_i t + \beta_i z},$$

worin $C_1, C_2, G_1, G_2 \dots G_n$ beliebige Konstanten bedeuten, wird ebenfalls ein Integral der Differentialgleichung (250) veranschaulichen, wofern nur die Wertepaare $\alpha_1, \beta_1; \alpha_2, \beta_2; \dots \alpha_n, \beta_n$ der Gleichung (251) Genüge leisten.

Die Grösse $u'(x, t)$ stellt nach (231) die Abweichung der variablen Lufttemperatur in der Höhe x von ihrem dortigen Mittelwert $u_m(x)$ dar, kann also keine von der Zeit t unabhängigen Glieder enthalten, weshalb zu setzen ist:

$$(253) \quad C_1=0 \quad C_2=0.$$

Ausserdem muss $u'(z, t)$ eine periodische Funktion der Zeit t sein und dabei eine Periode T aufweisen. Dies erfordert, wie wir dies anlässlich der Untersuchung der Wärmeleitung im Boden gesehen haben, dass

$$\alpha_i = \pm i \frac{2\pi}{T}$$

sei. Diesen zwei Werten von α_i werden zwei konjugiert komplexe Werte

$$\beta_i = R \pm iP$$

zugeordnet sein. Diese finden wir durch Einsetzung der vorstehenden Ausdrücke in (251) und durch Gleichsetzung der reellen bzw. der imaginären Teile der derart erhaltenen Gleichung. Auf diese Weise findet man, wenn man der kürzeren Schreibweise die Bezeichnung

$$r^2 = \frac{1}{2} \frac{\pi c k^2 M^2}{\pi^2 c^2 + k^2 p^2 T^2}$$

einführt,

$$R^2 - P^2 = 2\pi c r^2$$

$$PR = pkT^2 r^2,$$

woraus wieder folgt:

$$R^2 = r^2 \left\{ \sqrt{\pi^2 c^2 + k^2 p^2 T^2} + \pi c \right\}.$$

Hier ist vor dem Wurzelzeichen nur das positive Vorzeichen zur Verwendung gekommen, weil nur in diesem Falle R reell ist. Es folgt daraus:

$$P^2 = r^2 \left\{ \sqrt{\pi^2 c^2 + k^2 p^2 T^2} - \pi c \right\}.$$

Für den jährlichen Gang der Bestrahlung, d. h. für $T = 525\,960^m$ ist πc verschwindend klein gegenüber $k p T$ und es ist in diesem Falle, der uns allein beschäftigen wird,

$$(254) \quad r^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi c}{p^2 T^2} M^2$$

$$(255) \quad R^2 = P^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi c k}{p T} M^2.$$

Den Konstanten R und P , die durch Wurzelauszziehung des vorstehenden Ausdrucks zu gewinnen sind, kann sowohl das positive als auch das negative Vorzeichen zugewiesen werden. Bezeichnet P den positiven Wert der erwähnten Wurzel, so stehen uns für α_i und β_i folgende vier Wertepaare zur Verfügung:

$$\alpha_1 = i \frac{2\pi}{T} \quad \alpha_2 = -i \frac{2\pi}{T} \quad \alpha_3 = i \frac{2\pi}{T} \quad \alpha_4 = -i \frac{2\pi}{T}$$

$$\beta_1 = (1 + i)P \quad \beta_2 = (1 - i)P \quad \beta_3 = -(1 + i)P \quad \beta_4 = -(1 - i)P.$$

Durch Einsetzung dieser Wertepaare in (252), durch Anwendung der Eulerschen Formel

$$e^{\pm i \varphi} = \cos \varphi \pm i \sin \varphi$$

und nach Ersetzung der willkürlichen Konstanten $(G_1 + G_2)$, $i(G_1 - G_2)$, $(G_3 + G_4)$, $i(G_3 - G_4)$ durch C_5 , C_6 , C_7 , C_8 bekommt man für $u'(x, t)$ den Ausdruck:

$$(256) \quad u'(z, t) = e^{Pz} \left\{ C_5 \cos \left(\frac{2\pi}{T} t + Pz \right) + C_6 \sin \left(\frac{2\pi}{T} t + Pz \right) \right\} + \\ + e^{-Pz} \left\{ C_7 \cos \left(\frac{2\pi}{T} t - Pz \right) + C_8 \sin \left(\frac{2\pi}{T} t - Pz \right) \right\}.$$

Berechnet man nun, ausgehend von diesem Ausdruck mit Hilfe von (245) den zugehörigen Ausdruck für $Z(z, t)$, der eine neue mit C_3 zu bezeichnende Integrationskonstante aufweisen wird, verwendet den gewonnenen Ausdruck zur Berechnung von $Y(z, t)$ mittels (244), weist dem gewonnenen Ausdruck die erforderliche Integrationskonstante zu, die mit C_4 bezeichnet werden möge, setzt sodann alle erforderlichen Ausdrücke in die Grenzbedingungen (247) und (248) ein und verlangt, dass diese befriedigt werden, so gelangt man zu folgenden Gleichungen:

$$(257) \quad C_3 + C_4 = 0$$

$$(258) \quad C_3 = -(1-A)a_0$$

$$(259) \quad C_5 - C_6 - C_7 + C_8 + \frac{kM}{P}(C_6 + C_8) = 0$$

$$(260) \quad C_5 + C_6 - C_7 - C_8 - \frac{kM}{P}(C_5 + C_7) = 0$$

$$(261) \quad \frac{\pi}{T} \cdot \frac{cM}{P} e^P \{ (C_5 - C_6) \cos P + (C_5 + C_6) \sin P \} +$$

$$+ \frac{K}{m} \sqrt{\frac{2\pi}{T}} e^P \left\{ C_5 \sin \left(\frac{\pi}{4} + P \right) - C_6 \cos \left(\frac{\pi}{4} + P \right) \right\} +$$

$$+ \frac{\pi}{T} \cdot \frac{cM}{P} e^{-P} \{ (-C_7 + C_8) \cos P + (C_7 + C_8) \sin P \} +$$

$$+ \frac{K}{m} \sqrt{\frac{2\pi}{T}} e^{-P} \left\{ C_7 \sin \left(\frac{\pi}{4} - P \right) - C_8 \cos \left(\frac{\pi}{4} - P \right) \right\} = 0$$

$$(262) \quad \frac{\pi}{T} \cdot \frac{cM}{P} e^P \{ (C_5 - C_6) \sin P - (C_5 + C_6) \cos P \} -$$

$$- \frac{K}{m} \sqrt{\frac{2\pi}{T}} e^P \left\{ C_5 \cos \left(\frac{\pi}{4} + P \right) + C_6 \sin \left(\frac{\pi}{4} + P \right) \right\} +$$

$$+ \frac{\pi}{T} \cdot \frac{cM}{P} e^{-P} \{ (C_7 - C_8) \sin P + (C_7 + C_8) \cos P \} -$$

$$- \frac{K}{m} \sqrt{\frac{2\pi}{T}} e^{-P} \left\{ C_7 \cos \left(\frac{\pi}{4} - P \right) + C_8 \sin \left(\frac{\pi}{4} - P \right) \right\} = -(1-A)a_1.$$

Die vorstehenden sechs linearen Gleichungen ergeben eindeutig die noch ausstehenden Konstanten $C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, C_8$, wodurch das gestellte Problem gelöst erscheint.

§ 109. Vertikale Fortpflanzung der Temperaturoszillationen in der Atmosphäre. Die Ergebnisse vorstehender theoretischer Betrachtungen und Ableitungen ermöglichen die numerische Darstellung des jährlichen Temperaturganges des solaren Klimas für jede geographische Breite und jede Höhe in der Atmosphäre. Zu einer solchen Berechnung stehen uns verlässliche Daten hinsichtlich aller in den vorstehenden Gleichungen vorkommenden Konstanten zur Verfügung. Für die Länge des Jahres ist $T=525\,960^m$ zu setzen. Die Masse der auf dem Quadratcentimeter ruhenden Luftsäule beträgt $M=1033,3\text{ g}$. Für die virtuelle Höhe der Atmosphäre ist $H=8000\text{ m}$ zu setzen. Die spezifische Wärme der Luft bei konstantem Rauminhalt beträgt $c=0,17$. Für den Temperatur- bzw. Wärme-Leitungskoeffizient des Bodens können die bereits verwendeten Werte $m^2=1,00$; $K=0,50$ benützt werden, desgleichen für k der ebenfalls erprobte Wert $k=0,00245$. Schliesslich kann, wie bisher, $A=0,40$; $\sigma=0,76 \times 10^{-10}$ gesetzt werden.

Die soeben mitgeteilten Werte sind als unabhängig von der geographischen Breite zu betrachten, was für p nicht der Fall ist; sein numerischer Wert hängt nach (234) von der mittleren jährlichen Temperatur der untersten Luftschicht ab. Ich werde, um die Ergebnisse der Rechnung mit den mitteleuropäischen Beobachtungen vergleichen zu können, die erwähnte Temperatur gleich $10,5^\circ$, d. h. $\theta_0=283,5^\circ$ setzen, wie dies auch bei der Berechnung des vertikalen Aufbaues der Atmosphäre geschehen ist. Dadurch wird $p=0,00693$ und $P=0,43790$ oder im Winkelmass $P=25^\circ 5' 25''$. Die Auflösung der Gleichungen (259) bis (262) ergibt dann für die Konstanten C_5, C_6, C_7, C_8 folgende Ausdrücke, in denen a_1 (halbe Amplitude des jährlichen Bestrahlungsganges) noch unbestimmt gelassen wurde:

$$(263) \quad \begin{cases} C_5 = 31,051 a_1 & C_6 = 66,451 a_1 \\ C_7 = -4,415 a_1 & C_8 = -52,083 a_1 . \end{cases}$$

Die Temperatur $u'(z, t)$ erscheint damit durch den folgenden Ausdruck analytisch dargestellt:

$$(264) \quad u'(z, t) = a_1 1,5495^z \left\{ 31,051 \cos \left(\frac{2\pi}{T} t + 0,4379 z \right) + \right. \\ \left. + 66,451 \sin \left(\frac{2\pi}{T} t + 0,4379 z \right) \right\} - a_1 0,6454^z \left\{ 4,415 \cos \left(\frac{2\pi}{T} t - 0,4379 z \right) + \right. \\ \left. + 52,083 \sin \left(\frac{2\pi}{T} t - 0,4379 z \right) \right\} .$$

Es ist dabei

$$(265) \quad z = e^{-\frac{x}{8000}},$$

worin die Höhe x in Metern zu messen ist.

Die von dem Eispunkt an gemessene Temperatur der Luft ist nach (231) durch den Ausdruck:

$$(266) \quad u(x, t) = u_m(x) + u'(x, t)$$

dargestellt. Für die Berechnung der hier vorkommenden mittleren jährlichen Temperatur der Luftschicht steht uns die Gleichung (227) zur Verfügung; diese erhält jetzt die Form:

$$(267) \quad \sigma \theta_m^4(x) = 0,30 \left\{ 1 + 2,5316 e^{-\frac{x}{8000}} \right\} a_0.$$

Bei der Berechnung von p wurde, wie bereits erwähnt, $\theta_0 = 283,5^\circ$ gesetzt. Mit diesem Wert und mit $x=0$ folgt aus der vorstehenden Formel $a_0 = 0,46334$; es ist dies die durchschnittliche jährliche Bestrahlung pro Minute der Breite von 43° und dieser würde eine jährliche Strahlungsamplitude $2a_1 = 0,490$ Grammkalorien pro cm^2 und Minute entsprechen, so dass die vorstehende numerisch ausgewerteten Formeln eigentlich nur für diese Verhältnisse streng richtig wären und man für andere Breiten die Konstanten p , P , C neu berechnen müsste. Diese Konstanten ändern sich indessen bei mässigen Breitenunterschieden nur wenig, so dass es für mitteleuropäische Verhältnisse genügt, nur die örtliche Aenderung der Amplitude des jährlichen Temperaturganges zu berücksichtigen.

Für $x = 0$, d. h. für $z = 1$, ergeben die vorstehenden Gleichungen die Formel:

$$\begin{aligned} u(0, t) = & u_0 + 48,112 a_1 \cos\left(\frac{2\pi}{T} t + 25^\circ 5' 25''\right) + \\ & + 102,962 a_1 \sin\left(\frac{2\pi}{T} t + 25^\circ 5' 25''\right) - 2,849 a_1 \cos\left(\frac{2\pi}{T} t - 25^\circ 5' 25''\right) - \\ & - 33,613 a_1 \sin\left(\frac{2\pi}{T} t - 25^\circ 5' 25''\right), \end{aligned}$$

d. h. durch Zusammenziehung der trigonometrischen Glieder:

$$u(0, t) = u_0 + 98,907 a_1 \cos \frac{2\pi}{T} t + 41,195 a_1 \sin \frac{2\pi}{T} t.$$

Führt man die durch die beiden Gleichungen:

$$(268) \quad \begin{cases} B \cos \varepsilon = 98,907 \\ B \sin \varepsilon = 41,195, \end{cases}$$

d. h. durch

$$B^2 = 98,907^2 + 41,195^2$$

$$\text{tang } \varepsilon = \frac{41,195}{98,907}$$

gegebenen Hilfsgrößen B und ε ein, so wird:

$$u(0, t) = u_0 + B a_1 \cos \left(\frac{2\pi}{T} t - \varepsilon \right),$$

d. h.

$$u(0, t) = u_0 + 108,39 a_1 \cos \left(\frac{2\pi}{T} t - 22^\circ 36' 43'' \right).$$

Drückt man die Phasenverschiebung ε des jährlichen Temperaturganges in Zeiteinheiten aus, so wird, da

$$\frac{22^\circ 36' 43''}{360^\circ} 365,25^d = 22^d 22^h 36^m$$

ist,

$$(269) \quad u(0, t) = u_0 + 108,39 a_1 \cos \frac{2\pi}{T} (t - 22^d 22^h 36^m).$$

Auf dieselbe Weise lässt sich der Ausdruck für $u(x, t)$ bei jedem beliebigen

x behandeln und auf die Form bringen:

$$(270) \quad u(x, t) = u_m(x) + a_1 B(x) \cos \frac{2\pi}{T} [t - \varepsilon(x)].$$

Die Grössen $\varepsilon(x)$ bzw. $B(x)$ haben dabei folgende Bedeutung. Es stellt $\varepsilon(x)$ die Verspätung der Temperaturextreme gegenüber den Insolationsextremen dar. In der Tat erreicht die Bestrahlung $W_1(t)$ nach (213) ihren maximalen bzw. ihren minimalen Wert zu den Zeiten $t = 0$ bzw. $t = \frac{T}{2}$, die Lufttemperatur der Höhe x erreicht dagegen nach der vorstehenden Formel ihr Maximum bzw. ihr Minimum bei $t - \varepsilon(x) = 0$; $t - \varepsilon(x) = \frac{T}{2}$, d. h. zu den Zeiten $t = \varepsilon(x)$ bzw. $t = \frac{T}{2} + \varepsilon(x)$. Die Amplitude des jährlichen Temperaturganges in der Höhe x ist nach der vorstehenden Gleichung durch den Ausdruck $2a_1 B(x)$, die Amplitude des jährlichen Bestrahlungsganges dagegen nach (213) durch $2a_1$ dargestellt, so dass $B(x)$ das Verhältnis der Temperaturamplitude zur Strahlungsamplitude veranschaulicht.

In der Tabelle XXII sind die numerischen Werte von $\varepsilon(x)$ und $B(x)$, für eine Anzahl verschiedener Höhen mittels vorstehender Gleichungen berechnet, übersichtlich zusammengestellt. Diese Tabelle enthält ausserdem noch die Werte des

Tabelle XXII

| x km | $\varepsilon(x)$ | $B(x)$ | $B(x) : B(0)$ |
|-----------|---|--------|---------------|
| 0 | 22 ^d 22 ^h 36 ^m | 108,39 | 1,0000 |
| 1 | 24 ^d 1 ^h 54 ^m | 98,04 | 0,9045 |
| 2 | 24 ^d 23 ^h 32 ^m | 90,03 | 0,8306 |
| 4 | 26 ^d 7 ^h 32 ^m | 76,77 | 0,7083 |
| 6 | 27 ^d 4 ^h 5 ^m | 66,47 | 0,6133 |
| 8 | 27 ^d 17 ^h 25 ^m | 58,46 | 0,5394 |
| 10 | 28 ^d 2 ^h 23 ^m | 52,22 | 0,4818 |
| 12 | 28 ^d 8 ^h 0 ^m | 47,36 | 0,4370 |
| 15 | 28 ^d 12 ^h 42 ^m | 42,02 | 0,3877 |
| ∞ | 28 ^d 18 ^h 10 ^m | 30,26 | 0,2792 |

Verhältnisses, welches die Abschwächung der Temperaturamplitude mit zunehmender Höhe numerisch zum Ausdruck bringt.

Durch diese Tabelle ist die Fortpflanzung jährlicher Temperaturosillationen in einer ruhend gedachten nur dunkle Strahlungen absorbierenden Atmosphäre numerisch dargestellt. Diese Fortpflanzung in die Höhen der Atmosphäre ist ähnlich jener in die Tiefen des Erdbodens und unterscheidet sich von dieser nur quantitativ. Man ersieht aus der Tabelle, dass in der untersten Luftschicht die Verspätung der Temperaturextreme hinter jenen der Bestrahlung rund 23 Tage beträgt; mit zunehmender Höhe wird diese Verspätung etwas grösser. Die jährliche Temperaturschwankung nimmt mit zunehmender Höhe ab.

Der durch die Beobachtungen festgestellte Verlauf der Temperaturosillationen in der Atmosphäre ist durch verschiedene hier nicht berücksichtigte Nebeneinflüsse gestört, also viel komplizierter als der vorstehend theoretisch abgeleitete. Diese Störungen rühren von folgenden in der Theorie nicht berücksichtigten Faktoren her: von den vertikalen und horizontalen Strömungen in der Atmosphäre, von der Verdunstung und Kondensation des Wasserdampfes und von der Absorption der Sonnenstrahlung durch die Atmosphäre. Ich will hier nur den letzten dieser drei Faktoren kurz besprechen, weil er in den Rahmen der vorliegenden Theorie gehört.

Ich habe in den vorhergehenden Untersuchungen alle in der Erdatmosphäre und an der Erdoberfläche stattfindenden Reflexionen der Sonnenstrahlung an der oberen Grenze der Atmosphäre erfolgend angenommen, d. h. alle diese Verluste der Sonnenstrahlen bereits vor ihrem Eintritt in die Atmosphäre in Abzug gebracht. Der weitaus grösste Teil dieser Reflexionen findet, wie im § 97 gezeigt, an den Wolken statt. An diesen mächtigen Reflektoren wird die Sonnenstrahlung sprunghaft geändert, da hier ein namhafter Teil derselben, der mit $A_1W(x, t)$ bezeichnet werden möge, in den Weltraum zurückgewiesen wird. Der oberhalb dieser Wolken befindliche Teil der Atmosphäre wird also in Wirklichkeit nicht nur von der in meinen Berechnungen in Abzug gebrachten anlangenden Strahlung $A_1W(x, t)$, sondern auch von der zurückreflektierten Strahlung $A_1W(x, t)$ durchflutet. Wird also die Absorption der Sonnenstrahlung durch die Atmosphäre gebührend berücksichtigt, so ergeben sich für diese hohen Schichten der Atmosphäre höhere Temperaturen als die oben berechneten. Auch werden sich hier die Zeitpunkte der Temperaturextreme den Zeiten der Strahlungsextreme nähern müssen, d. h. es wird hier mit zunehmender Höhe die in der letzten Kolumne der Tabelle XXII mitgeteilte Abschwächung der Temperaturschwankung eine geringere sein müssen, was mit der in der zweiten Kolumne dieser Tabelle angegebenen Phase ebenfalls der Fall sein wird.

Es ist wohl möglich, auch diesen zuletzt genannten Faktor des Strahlungsvorganges einer theoretischen Behandlung zu unterziehen, um sich dadurch den tatsächlichen Verhältnissen rechnerisch besser zu nähern, doch will ich davon hier absehen, zumal von den Ergebnissen einer diesbezüglichen Berechnung nachstehend kein Gebrauch zu machen sein wird.

§ 110. Der jährliche Wärmeumsatz der Atmosphäre. Die vorstehend gewonnenen Resultate machen es möglich, auch den jährlichen Wärmeumsatz der Atmosphäre zu ermitteln. Zieht man zu diesem Zwecke vorerst ein prismatisches

Volumenelement der Atmosphäre in Betracht, welches als Basis die Flächeneinheit und als Höhe die Strecke dx besitzt und welches zwischen den horizontalen Ebenen x und $(x+dx)$ eingeschlossen ist, so wird in diesem Element während der Zeiteinheit die Wärmemenge

$$c \varrho(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} dx$$

aufgespeichert. Eine durch die ganze Atmosphäre reichende vertikale Säule, deren Basis die Flächeneinheit ist, speichert während der Zeiteinheit eine Wärmemenge auf, die durch den Ausdruck:

$$(271) \quad \frac{dQ}{dt} = c \int_0^{\infty} \varrho(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} dx$$

veranschaulicht ist.

Es ist nach (218)

$$\varrho(x) = \varrho_0 e^{-\frac{x}{H}}.$$

Führt man die Substitution

$$x = -H \log_{nat} z$$

durch, d. h. setzt:

$$(272) \quad z = e^{-\frac{x}{H}},$$

so wird

$$dz = -\frac{1}{H} z dx \quad \varrho(x) = \varrho_0 z \quad \varrho(x) d\bar{x} = -\varrho_0 H dz$$

und wegen (232)

$$\frac{\partial u(z, t)}{\partial t} = \frac{\partial u'(z, t)}{\partial t},$$

so dass man bekommt:

$$\frac{dQ}{dt} = -c \varrho_0 H \int_1^0 \frac{\partial u'(z, t)}{\partial t} dz.$$

Die Integrationsgrenzen sind hier 0 und 1, weil für $x=0$ $z=1$ und für $x=\infty$ $z=0$ ist. Berücksichtigt man noch, dass nach (226) $\varrho_0 H = M$ ist, wobei M die Gesamtmasse der in Betracht gezogenen atmosphärischen Säule bedeutet, so wird:

$$(273) \quad \frac{dQ}{dt} = -c M \int_1^0 \frac{\partial u'(z, t)}{\partial t} dz.$$

Es war nach (256)

$$u'(z, t) = e^{Pz} \left\{ C_5 \cos \left(\frac{2\pi}{T} t + Pz \right) + C_6 \sin \left(\frac{2\pi}{T} t + Pz \right) \right\} + e^{-Pz} \left\{ C_7 \cos \left(\frac{2\pi}{T} t - Pz \right) + C_8 \sin \left(\frac{2\pi}{T} t - Pz \right) \right\}.$$

Führt man die durch die Gleichungen:

$$(274) \quad \begin{cases} C_5 = A_1 \cos \varepsilon_1 & C_6 = A_1 \sin \varepsilon_1 \\ C_7 = A_2 \cos \varepsilon_2 & C_8 = A_2 \sin \varepsilon_2 \end{cases}$$

gegebenen Hilfsgrößen A_1 , A_2 , ε_1 , ε_2 ein, so wird:

$$u'(z, t) = A_1 e^{Pz} \cos \left(\frac{2\pi}{T} t - \varepsilon_1 + Pz \right) + A_2 e^{-Pz} \cos \left(\frac{2\pi}{T} t - \varepsilon_2 - Pz \right)$$

$$\frac{\partial u'(z, t)}{\partial t} = -\frac{2\pi}{T} A_1 e^{Pz} \sin\left(\frac{2\pi}{T} t - \varepsilon_1 + Pz\right) - \frac{2\pi}{T} A_2 e^{-Pz} \sin\left(\frac{2\pi}{T} t - \varepsilon_2 - Pz\right).$$

Man bekommt also statt (273)

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{2\pi}{T} cM \left\{ A_1 \int_1^0 e^{Pz} \sin\left(\frac{2\pi}{T} t - \varepsilon_1 + Pz\right) dz + A_2 \int_1^0 e^{-Pz} \sin\left(\frac{2\pi}{T} t - \varepsilon_2 - Pz\right) dz \right\}.$$

Führt man die vorstehenden Integrationen durch und setzt zwecks kürzerer Schreibweise:

$$(275) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{A_1}{2P} (1 - e^P \cos P - e^P \sin P) = G_1 \cos \eta_1 \\ \frac{A_1}{2P} (1 - e^P \cos P + e^P \sin P) = G_1 \sin \eta_1 \\ \frac{A_2}{2P} (1 - e^{-P} \cos P + e^{-P} \sin P) = G_2 \cos \eta_2 \\ \frac{A_2}{2P} (1 - e^{-P} \cos P - e^{-P} \sin P) = G_2 \sin \eta_2, \end{array} \right.$$

so bekommt man:

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{2\pi}{T} cM \left\{ G_1 \sin \left[\frac{2\pi}{T} t - (\varepsilon_1 + \eta_1) \right] - G_2 \sin \left[\frac{2\pi}{T} t - (\varepsilon_2 + \eta_2) \right] \right\}$$

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{2\pi}{T} cM \left\{ [G_1 \cos(\varepsilon_1 + \eta_1) - G_2 \cos(\varepsilon_2 + \eta_2)] \sin \frac{2\pi}{T} t - \right.$$

$$\left. - [G_1 \sin(\varepsilon_1 + \eta_1) - G_2 \sin(\varepsilon_2 + \eta_2)] \cos \frac{2\pi}{T} t \right\}.$$

Führt man die durch die Gleichungen :

$$G_1 \cos (\varepsilon_1 + \eta_1) - G_2 \cos (\varepsilon_2 + \eta_2) = L \cos \zeta$$

$$G_1 \sin (\varepsilon_1 + \eta_1) - G_2 \sin (\varepsilon_2 + \eta_2) = L \sin \zeta$$

gegebenen Hilfsgrößen L und ζ ein, so wird

$$(277) \quad \frac{dQ}{dt} = \frac{2\pi}{T} c M L \sin \left(\frac{2\pi}{T} t - \zeta \right).$$

Während des Zeitintervalles t_1 bis t_2 wird also in der ganzen über der Flächeneinheit sich erhebenden atmosphärischen Säule eine Wärmemenge aufgestapelt, die durch den Ausdruck:

$$Q_t = c M L \int_{t_1}^{t_2} \sin \left(\frac{2\pi}{T} t - \zeta \right) d \frac{2\pi}{T} t,$$

d. h. durch

$$(278) \quad Q_t = - c M L \left\{ \cos \left(\frac{2\pi}{T} t - \zeta \right) \right\}_{t_1}^{t_2}$$

gegeben ist.

Der maximale Wert dieser Grösse, d. h. jener, welcher dem Zeitintervall entspricht, das durch $\frac{2\pi}{T} t_1 - \zeta = 0$ und $\frac{2\pi}{T} t_2 - \zeta = \pi$ gegeben ist, also der Wert

$$(279) \quad Q = 2cML$$

stellt den Wärmeumsatz der Atmosphäre dar.

Man findet mit den vorstehend angegebenen Werten für $C_5, C_6, C_7, C_8, P, M, c$ und mit (274), (275), (276), (277)

$$(280) \quad \frac{dQ}{dt} = -\frac{2\pi}{T} 12050 a_1 \sin\left(\frac{2\pi}{T} t - 25^\circ 41' 51''\right).$$

Weil

$$\frac{25^\circ 42' 51''}{360^\circ} 365,25^d = 26^d 1^h 44^m$$

ist, beginnt der Abfluss der Wärme, d. h. die Abkühlung der Atmosphäre rund 26 Tage nach dem jährlichen Maximum der Bestrahlung, also nach dem Sommersolstitium.

Es folgt aus (277), (279), (280)

$$(281) \quad Q = 24\,100 a_1.$$

Der jährliche Umsatz der Atmosphäre ist also der jährlichen Strahlungsamplitude proportional. Man kann diese Strahlungsamplitude durch die jährliche Amplitude der Temperatur der untersten Luftschicht ausdrücken. Diese Temperatur ist durch (269) gegeben. Sie erreicht für $t_1 = 22^d 22^h 36^m$ ihr Maximum:

$$u_{max} = u_0 + 108,39 a_1$$

und für $t_2 = \frac{T}{2} + t_1$ ihr Minimum:

$$u_{min} = u_0 - 108,39 a_1.$$

Der Ausdruck:

$$\Delta u = u_{max} - u_{min}$$

d. h.

$$(282) \quad \Delta u = 216,78 a_1$$

stellt die erwähnte Amplitude des jährlichen Temperaturganges dar. Es ist also :

$$(283) \quad Q = \frac{24\,100}{216,78} \Delta u = 111 \Delta u .$$

Diese Gleichung besagt folgendes. Denkt man sich die Atmosphäre durch eine Wasserbedeckung der Erdoberfläche ersetzt, die, um Δu Grad erwärmt, eine Wärmemenge aufspeichern würde, die dem jährlichen Wärmeumsatz der Atmosphäre gleich wäre, so müsste diese Wasserbedeckung eine Mächtigkeit von 111 *cm* aufweisen.

SECHSTER ABSCHNITT

Das Eiszeitalter sein Mechanismus, seine Gliederung und Chronologie

KAPITEL XIX

Das Eiszeitenproblem und seine Geschichte

§ 111. Die Eiszeiten. Den beschreibenden Naturwissenschaften ist es in hundertjähriger forschender Arbeit gelungen nachzuweisen, dass während der jüngsten geologischen Periode, dem Quartär, ein Zeitalter grosser klimatischer Umwälzungen über die nördlichen Gegenden der Erde herangebrochen war, die in den sogenannten Eiszeiten ihren mächtigsten Ausdruck fanden und diesem Zeitabschnitt der Erdgeschichte den Namen des Eiszeitalters gaben. Eine fast unübersehbare Menge von Tatsachenmaterial wurde zutage gefördert, das dieses Naturereignis beglaubigte. Davon soll hier zum besseren Verständnis des nachfolgenden nur das wichtigste mitgeteilt werden, wobei ich den Ausführungen des im Jahre 1924 erschienenen Buches von Köppen und Wegener „Die Klimate der geologischen Vorzeit“ folge, dessen letztes Kapitel die Klimate des Quartärs behandelt, welches von Köppen verfasst wurde. Dieses Kapitel beginnt mit einer Uebersicht der Tatsachen, worin die für das Klimaproblem in Betracht zu ziehenden Ergebnisse der erdgeschichtlichen Forschung übersichtlich zusammengestellt sind. Diese Ausführungen Köppens kennzeichnen treffend den damaligen Stand der Eiszeitenfrage und so wird man an der Hand dieses Berichtes das seither geleistete gut überblicken können.

Nachdem Europa und Nordamerika seit der algonkisch-kambrischen Vereisung während ungeheuer langer Zeiträume tropisches bis subtropisches Klima ge-

habt haben, begann für sie gegen Ende der Tertiärzeit ein neues Zeitalter, zuerst in Nordamerika, dann auch in Europa, das seinen Höhepunkt im Quartär erreichte. In den Gebirgen senkte sich die Schneegrenze wiederholt um etwa 1200 Meter, so dass in den einzelnen Eiszeiten weite Teile beider Festländer unter einem kilometermächtigen Inlandeise begraben lagen, während in den Intergrazialzeiten das Eis ganz oder teilweise wegschmolz und ein Flora ähnlich der heutigen in das freigegebene Land einzog.

Schon im Anfange des neunzehnten Jahrhunderts haben Playfair und Schimper, später Venetz, Charpentier und viele andere erkannt, dass sich in den Alpen diese Vereisungserscheinungen nur durch die Annahme einer einst viel grösseren Ausdehnung der Gletscher erklären lassen. Das Netz von Eisströmen, das die Alpen durchzog, überfloss viele der Pässe, und im Norden breiteten sich am Fuss des Gebirges die aus den Tälern herausgeflossenen Eismassen zu ausgedehnten Vorlandgletschern aus.

A. Penck und E. Brückner haben die Spuren dieser quartären Vereisung in den Alpen eingehend untersucht und ihr umfangreiches Beobachtungsmaterial in dem dreibändigen Werk „Die Alpen im Eiszeitalter“ niedergelegt. Hauptsächlich auf Grund der Schotterterrassen der Flüsse kamen sie zu dem Ergebnis, dass die Vereisung viermalig war, mit drei dazwischenliegenden Intergrazialzeiten. Sie bezeichneten diese Eiszeiten als Günz-, Mindel-, Riss- und Würm-Eiszeit. Von den Intergrazialzeiten muss diejenige zwischen der Mindel- und Riss-Eiszeit weitaus die längste gewesen sein.

Ueber die absolute Zeitdauer dieser einzelnen Phasen des Eiszeitalters hat Penck im Schlussband des erwähnten Werkes interessante und, wie es sich später erweisen sollte, gut zutreffende Schätzungen mitgeteilt, die er hauptsächlich aus der festgestellten Erosion der in den Eiszeiten abgelagerten Flussschotter erhalten hatte und die er durch ein Graphikon veranschaulichte, das in der beiliegenden Fig. 47 wiedergegeben ist.

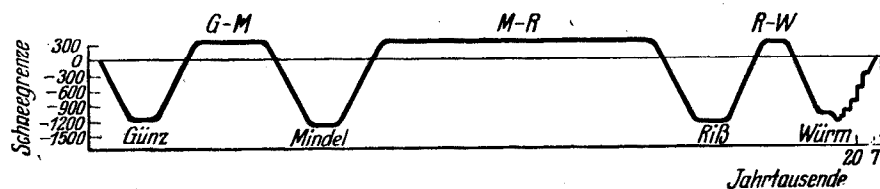


Fig. 47

Nach diesem Graphikon schätzt Penck die Zeitdauer seit der Ablagerung der Bühl-Moränen im Vierwaldstätter See auf rund 20000 Jahre und wählt diese Zeitspanne als Einheit, so dass die Riss-Würm-Intergrazialzeit mit 60000 Jahren, die vorhergehende, die Mindel-Riss-Intergrazialzeit, viermal länger, also mit 240000 Jahren zu veranschlagen wären. Ueber die Dauer der Eiszeiten selbst spricht Penck keine Vermutung aus; nach seinem Graphikon wäre die seit Beginn der Günz-Eiszeit verflossene Zeitdauer mit etwa 660000 Jahren zu bewerten.

Die in den Alpen gewonnenen Anschauungen boten schon frühzeitig Anlass, die quartäre Ueberschüttung Nordeuropas bis zum südlichen England, dem Harz und den Karpaten mit ungeheuren Massen von Tonen, Kiesen und Findlingsblöcken nicht mehr den noch zu erwähnenden Fluten oder schwimmenden Eisschollen, sondern der Wirkung des Eises zuzuschreiben, indem bewiesen wurde, dass die Verfrachtung dieser Massen nur durch Gletscher, nämlich durch ein ganz Nordeuropa bedeckendes Inlandeis erfolgt sein müsse. Aber trotz allen Bemühungen war es der Wissenschaft in ihrem Stadium, auf das sich die Köppensche Darstellung bezieht, nicht gelungen restlose Klarheit in die Gliederung des norddeutschen Quartärs und ihre Beziehung zur Gliederung der alpinen Eiszeiten zu bringen und das Penck-Brückner sche Schema auch hier anzuwenden. Hier hatten nämlich die Forschungen von Gagel¹⁾, Soergel²⁾, Krenkel³⁾ und anderer ergeben, dass die letzte, die Würmeiszeit, in drei Hauptstösse zergliedert werden muss, die man mit den Namen Würm I, Würm II und Würm III bezeichnete. Aehnliches galt auch für England, wo man mehrere Eiszeiten, sechs, festgestellt hatte.

In Skandinavien, nahe dem Herd der Vergletscherung, ist die Gliederung in Eis- und Interglazialzeiten sehr verwischt, da diese Länder Ausräumungsgebiet waren. Dennoch sind dort Funde gemacht, die wenigstens für die Existenz einer eisfreien Interglazialzeit sprechen. Das Inlandeis muss also wenigstens in einer der Interglazialzeiten auch in Skandinavien so gut wie ganz verschwunden gewesen sein. Auch für die Halbinsel Kola und die Küste des Weissen Meeres wurde eine Interglazialzeit festgestellt. Vermutlich handelt es sich hier wie auch in Skandinavien um die lange Mindel-Riss-Interglazialzeit, in der die Bedingungen für eine völlige Beseitigung des Inlandeises am günstigsten waren.

Auch in dem nicht von Eis bedeckten Gebiet Europas bildeten sich im Quartär Ablagerungen, die von unmittelbarem klimatischem Interesse sind und welche bezeugen, dass die Zahl der Klimaschwankungen viel grösser war als in dem einfachen Penck-Brücknerschen Schema. Aehnliches bezeugen auch die geologischen Belege, die uns über periodische Klimaänderungen in den aussereuropäischen Ländern Kunde geben.

Obwohl es auf diese Weise den beschreibenden Naturwissenschaften gelungen war, Aufschluss über die Ausdehnung und den ungefähren Verlauf der Vereisungen Europas und Nordamerikas zu erlangen, war es ihnen versagt, etwas über die Ursachen dieser Naturerscheinung auszusagen. Diese Ursachen lagen ausserhalb des Gesichtsfeldes dieser Wissenschaften. Sie werden den Gegenstand meiner nachfolgenden Ausführungen bilden. Zuvor möchte ich des geschichtlichen Interesses wegen über einige misslungene Versuche, das Eiszeitenproblem zu lösen, berichten, um dadurch eine scharfe Grenze zwischen diesen Versuchen und meinen Untersuchungen zu ziehen, da man diese letzteren oft irrthümlicher Weise mit jenen ersteren zu verwechseln pflegte.

1) Gagel C. Die letzte grosse Phase der diluvialen Vergletscherung Norddeutschlands. Geologische Rundschau. Band 6. 1915.

2) Soergel W. Löss, Eiszeiten und paläolithische Kulturen. Jena 1919.

3) Krenkel E. Vom diluvialen Menschen und seiner Jagd. Naturwissenschaftliche Wochenschrift. 1922.

Ueber die Eiszeitentheorien von L. de Marchi und Arrhenius habe ich im § 105 dieses Buches kurz, in meiner „Théorie mathématique“ ausführlicher berichtet. Hier will ich die geschichtlich interessantesten der Theorien kurz besprechen, die das Eiszeitenphänomen durch astronomische Ursachen zu erklären bemüht waren und deshalb unter dem Namen der astronomischen Theorien der Eiszeiten bekannt sind.

§ 112. Die alten Theorien der Eiszeiten. Meines Wissens nach war es Adhémars der erste, der die grossen klimatischen Umwälzungen des Quartärs durch astronomische Ursachen zu erklären versuchte. In seinem Werke „Les révolutions de la mer, déluges périodiques. Paris 1842 und (zweite Auflage) 1860“ trat er vor die gelehrte Welt mit diesem damals gerade aktuell gewordenen Problem, denn kurz vorher hatte man den nordischen Ursprung der über einen grossen Teil von Europa zerstreuter Steinschuttmassen und Blöcke erkannt und man suchte nach Erklärungen, wie diese Massen südwärts verfrachtet worden sind.

Mehrere diesbezügliche Hypothesen stritten damals um Anerkennung. Nach der einen derselben waren es schwimmende Eisschollen, nach der anderen, vom Pole sich ergiessende Fluten, nach der dritten, südwärts sich drängende Gletscher, die jene Verfrachtung besorgten. Adhémars, noch im Banne der Cuvier'schen Ideen stehend, nach denen unser Planet durch eine Reihe gewaltsamer revolutionärer Umgestaltungen wiederholt verheert und jedesmal durch einen neuen Schöpfungsakt von einer neuen Organismenwelt besiedelt wurde, suchte vor allem die Hypothese katastrophaler Fluten durch seine Theorie zu stützen, deren Leitgedanke der folgende ist.

Wegen der Präzession der Nachtgleichen und der Bewegung des Perihels und der daraus sich ergebenden Veränderlichkeit der Dauer der Jahreszeiten, werden, wie im vierten Abschnitt dieses Buches auseinandergesetzt, alle zehn Jahrtausende auf jeder der beiden Hemisphären kurze und milde Winter mit langen und strengen abwechseln und zwar so, dass wenn eine der Hemisphären einen sehr strengen Winter hat, die andere eines milden sich erfreut. Auf der ersteren häufen sich wegen zunehmender Kälte um den zugehörigen Pol die Eismassen derart an, dass die dadurch vermehrte Massenanziehung eine Ueberflutung dieser Halbkugel verursacht, die von einer weiteren Abkühlung begleitet ist. Die südliche Halbkugel, die gegenwärtig den längeren Winter hat, veranschaulicht mit ihrer grossen Eiskalotte und überwiegender Wasserbedeckung nach Adhémars Meinung diesen Sachverhalt. Die um den Pol angehäuften Eis- und Wassermassen werden mit dem Eintritt der Periode wärmerer Winter abzufließen beginnen, Gesteinsmassen polarer Gegenden mitführend. Stürzt nachher die morsch gewordene, auf dem Pole pilzhutartig aufsitzende Eiskappe plötzlich ein, so ergiessen sich vor ihr aus katastrophale Fluten über die Erde. Solche Katastrophen wiederholen sich, abwechselnd auf beiden Hemisphären, alle zehn Jahrtausende.

Spätere geologische Untersuchungen haben die Frage klimatischer Veränderungen auf der Erde klarer beleuchtet, indem vor allem festgestellt wurde, dass während gewisser Zeitintervalle des Diluviums grosse Gebiete von Europa und Nordamerika unter einer mächtigen Eisdecke begraben lagen und die erwähnten

Steinmassentransporte nur durch Gletscher bzw. Inlandeis geschehen konnten. Die Drifthypothese der schwimmenden Eisschollen und jene der katastrophalen Fluten wurden gänzlich verworfen. Die Adhémar'sche Theorie konnte sich, auch in ihrer für das Gletscherphänomen zurechtgelegten Form, nicht mehr halten, nachdem bewiesen wurde, dass die Eisanhäufungen der diluvialen Eiszeit bei weitem nicht von jener Grösse waren, um die von dieser Theorie angenommene Ueberflutung der vereisten Hemisphäre herbeizuführen. Nichtsdestoweniger wurde die Theorie von Adhémar zum Ausgangspunkt anderer Theorien der Eiszeiten, von denen die bemerkenswerteste jene von Croll ist.

Die Theorie von Croll, die er in seinen Werken „Climate and time in their geological relations, a theory of secular changes of the earth's climate. London 1875. — Discussions on climate and cosmology. London 1889“ niedergelegt hat, knüpfte, wie jene von Adhémar, an die ungleiche Dauer der Jahreszeiten an, weist aber gegenüber dieser letzteren schon in diesem Punkte einen Fortschritt auf, weil Croll den Einfluss der Exzentrizität der Erdbahn auf die Dauer der astronomischen Jahreszeiten richtig erkannt hat. Nur bei einer relativ grossen Exzentrizität der Erdbahn kann der Unterschied zwischen Sommer- und Winterhalbjahr beträchtlich werden. Trifft es sich also zu, dass bei einer bemerkenswerten Exzentrizität die Aequinoxtiallinie sich der Normalen der Apsidenlinie nähert, so wird jene Hemisphäre der Erde, deren Winter mit dem Durchgang der Erde durch das Aphelium zusammenfällt, einen langen und strengen Winter haben. Dann wird in ihrer gemässigten Zone Schnee auch in jenen Breiten fallen, wo jetzt nur Regen fällt, und wenn auch der Schneefall nicht besonders gross ist, wird die Schneedecke doch bleiben und nicht schmelzen, weil die Temperatur tief unter dem Gefrierpunkt bleibt. Wenn dann der Frühling und Sommer herannahen, wird die steigende Temperatur durch die grössere Verdunstung auf den Meeren zuerst den Schneefall auf dem Lande steigern. Wenn aber später der Schnee auch zu schmelzen beginnt, wird es doch lange dauern, bis das niedrige Land schneefrei wird, und auch auf nicht sehr hohen Bergen wird der Schnee liegen bleiben, und bald im Herbste beginnt der Schneefall von neuem. Das nächste Jahr bringt eine Wiederholung dieses Vorganges mit dem Unterschiede, dass nun die Schneelinie zu einem niedrigeren Niveau herabsteigt als im Vorjahr. Jahr auf Jahr wird so die Schneegrenze herabsteigen, bis endlich alles höhere Land dauernd mit Schnee bedeckt bleibt. Die Täler füllen sich dann mit Gletschern und ein grosser Teil dieser Hemisphäre wird mit Eis und Schnee bedeckt bleiben. Damit kommt ein neuer mächtiger Faktor zur Geltung: die Wirkung der Schneedecke, die auch während des Sommers die Luft abkühlen, dichte anhaltende Nebel erzeugen wird, die die Sonnenstrahlen abhalten und das Schmelzen des Schnees stark verzögern werden.

Während sich derart Schnee und Eis auf der einen Hemisphäre anhäufen, vermindern sie sich auf der anderen. Dies verstärkt die Passatwinde auf der kalten Hemisphäre und schwächt sie auf der wärmeren. Die Wirkung wird sein, dass das warme Wasser der Tropenmeere mehr und mehr in die mittleren Breiten der warmen Hemisphäre hinübertreiben wird. Diese Ablenkung der Wärmequellen von der kalten Hemisphäre wird wieder die Anhäufung von Schnee und Eis auf derselben

begünstigen, und damit werden die warmen Strömungen noch weiter abgeschwächt. So verstärken sich diese beiden Wirkungen gegenseitig.

Der gleiche Prozess einer gegenseitigen Aktion und Reaktion tritt auch auf der warmen Hemisphäre zutage, nur in gerade entgegengesetzter Richtung. In dieser wirkt alles zusammen, die mittlere Temperatur zu erhöhen und die Menge von Schnee und Eis zu verringern. Diese Hemisphäre befindet sich also in einer Interglazialzeit.

Mit der Aenderung der Länge des Perihels zum jeweiligen Frühlingspunkt ändern sich die obigen Verhältnisse. Ist die Aequinoxtiallinie zur Koinzidenz mit der Apsidenlinie gekommen, dann sind die beiden Hemisphären hinsichtlich der Bestrahlung gleichgestellt und befinden sich in einer Uebergangszeit, aus der die früher vereiste Hemisphäre in eine Interglazialzeit, die andere in die Eiszeit gelangt. So reihen sich auf jeder der beiden Hemisphären Eis-, Uebergangs- und Interglazialzeit aneinander und zwar immer so, dass wenn eine Hemisphäre die Eiszeit hat, die andere die Interglazialzeit durchlebt. Die geschilderten Wirkungen werden mit zunehmender Exzentrizität der Erdbahn verstärkt, mit abnehmender geschwächt.

Gegen die hier nur in ihren Hauptzügen wiedergegebene Theorie von Croll hat mannigfaltige Einwände erhoben. Von klimatologischer Seite, als den schwerwiegendsten, den Einwand, dass die Gletscher nicht durch einen strengen Winter begünstigt werden, sondern dass in Gegenteil ein solcher der Bildung grosser Gletscher hindernd entgegenwirkt, wie man dies in den Gebieten strenger Winterkälte im Innern der nördlichen Kontinente, namentlich in Sibirien, beobachten kann. Nicht ein strenger Winter, sondern ein kühler Sommer begünstigt das tiefe Herabsteigen der Gletscherströme.

Die Einwände, die man von geologischer Seite gegen die Crollsche Theorie erhoben hat, gipfeln in folgendem. Nach Croll würden die Eiszeiten auf jeder Hemisphäre alle zwanzig Tausend Jahre, allerdings in wechselnder Stärke, wiederkehren. Dem widerspricht die geologische Erfahrung, die zwar eine Reihe von Eiszeiten zugibt, jedoch nicht in so kurzen und regelmässigen Intervallen. Im Gegensatz zur geologischen Erfahrung würden nach Croll die Eiszeiten auf der nördlichen und der südlichen Hemisphäre abwechselnd in Erscheinung treten; eine gleichzeitige Vereisung beider Hemisphären wäre ausgeschlossen.

Ich habe mich in meiner „Théorie mathématique“ etwas ausführlicher mit der Theorie von Croll befasst und ihre Unzulänglichkeit in dem Umstand aufgedeckt, dass in derselben der Einfluss der Veränderlichkeit der Ekliptikschiefe auf die Bestrahlung der Erde nur ungenügend berücksichtigt war. Daran krankten und scheiterten die nachher unternommenen Versuche, die Eiszeiten rechnerisch zu erklären, wie dies nachstehend gezeigt werden soll.

§ 113. Ueber einige weiteren Versuche, die Eiszeiten rechnerisch zu erklären. R. Ball hat in seinem Werke „Astronomical theory of the glacial period. The cause of an Ice Age. London 1891“ die Theorie von Croll wieder aufgenommen und ihr eine neue mathematische Fassung zu geben versucht, die jedoch keinen Fortschritt bedeutet. Ball berücksichtigte zwar den Einfluss der Aenderungen der Ekliptikschiefe auf den Bestrahlungszustand der Erde, aber nur

in bezug auf die sommerliche bzw. winterliche Bestrahlung der ganzen in Betracht gezogenen Hemisphäre. Diese Bestrahlungen sind durch die Formeln (108) des vierten Abschnittes dieses Buches veranschaulicht. Aus diesen Formeln folgt, dass bei einem Zuwachs der Ekliptikschiefe von einem Bogengrad diese Bestrahlungen folgende prozentuellen Aenderungen erleiden:

$$100 \frac{\pi}{180} \cdot \frac{1}{N_s} \cdot \frac{\partial N_s}{\partial \varepsilon} = 100 \frac{\pi}{180} \cdot \frac{2 \cos \varepsilon}{\pi + 2 \sin \varepsilon}$$

$$100 \frac{\pi}{180} \cdot \frac{1}{N_w} \cdot \frac{\partial N_w}{\partial \varepsilon} = -100 \frac{\pi}{180} \cdot \frac{2 \cos \varepsilon}{\pi - 2 \sin \varepsilon}.$$

Setzt man in diese Ausdrücke den gegenwärtigen numerischen Wert der Ekliptikschiefe ein, so findet man, dass diese Aenderungen + 0,81 bzw. — 1,37 Prozent betragen. Diese Beträge sind in Verhältnis zu den in der Tabelle XIII mitgeteilten auf die höheren Breiten sich beziehenden Aenderungen recht klein. Wie man sieht, haben die Aenderungen der Ekliptikschiefe keinen stärkeren Einfluss auf die totalen Bestrahlungen der einzelnen Hemisphären, sondern machen sich erst in der Verteilung der Sonnenstrahlung innerhalb dieser Hemisphären besonders fühlbar. Bei der Betrachtungsweise von Ball bleibt diese ausschlaggebende Wirkung der Aenderungen der Ekliptikschiefe gänzlich unbeachtet.

Dieselbe Unzulänglichkeit weist der von Pilgrim in seiner im § 84 angeführten Arbeit und in der nach seinem Tode von W. Wundt herausgegebenen Abhandlung „Die Berechnung der Eiszeiten auf astronomisch-physikalischer Grundlage. Jahreshefte des Vereins für vaterländische Naturkunde in Württemberg. 84. Jahrg. 1928“ unternommene Versuch, die Eiszeiten rechnerisch zu behandeln. Trotzdem stellt die Arbeit dieses Forschers einen wesentlichen Fortschritt in der Behandlung des Eiszeitenproblems dar, weil, wie im § 84 ausgeführt, er der erste war, der die säkularen Aenderungen der auf den Bestrahlungszustand der Erde Einfluss habenden Elemente sachgemäss berechnete, so dass seine diesbezüglichen Rechnungen der weiteren Erforschung der Eiszeitenfrage dienstbar gemacht werden konnten.

Auch Hargreaves hat zur Erforschung des Eiszeitenproblems positives geliefert. In seiner im § 72 bereits angeführten mathematisch einwandfreien Arbeit hat er den Aenderungen der Ekliptikschiefe mehr Aufmerksamkeit geschenkt als alle früheren Forscher, doch hat er dabei nur die Auswirkung dieser Aenderungen auf die ganzjährigen Bestrahlungen der einzelnen geographischen Breiten in den Bereich seiner Untersuchungen einbezogen. Diese Aenderungen sind, wie aus der Tabelle XIII ersichtlich, recht klein im Vergleich zu jenen der halbjährigen Strahlungsmengen, so dass in den Berechnungsergebnissen von Hargreaves die für die Entstehung der Vereisungen ausschlaggebende periodische Verschärfung und Abschwächung der jahreszeitlichen Gegensätze gar nicht zum Vorschein gelangt.

In neuerer Zeit hat sich R. Spitaler viel mit dem Eiszeitenproblem beschäftigt und die Ergebnisse seiner Arbeit in zwei besonderen Monographien zusammengefasst. Die erste derselben erschien im Jahre 1921 unter dem Titel „Das Klima des Eiszeitalters“. Der rechnerische Aufbau dieser umfangreichen Arbeit beruht auf der Anwendung der im vierten Abschnitt des vorliegenden Buches angeführten Formel (10), die, wie dort auseinandergesetzt, unrichtig ist. Wie weit diese Formel von den tatsächlichen Bestrahlungsverhältnissen abweicht, ist aus der hier mitgeteilten mit Hilfe der Rechnungsergebnisse von Wiener konstruierten Fig. 37 und aus der zugehörigen Tabelle V ersichtlich. Die meridionalen Schnitte der durch die Fig. 37 dargestellten Fläche stellen die meridionale Verteilung der der Erde im Laufe des Jahres zugestrahlten Wärmemengen dar. Diese Schnitte sind mit Ausnahme der Kurven *AED*, *KLM* und *ARC* keine einfachen Kosinuslinien, wie es die von Spitaler benützte Formel verlangt, vielmehr weit davon entfernt, solche Linien zu sein. Man betrachte beispielsweise die Linie *HGF*, die in der mit Benützung der Rechnungsergebnisse von Angot entworfenen Fig. 44 durch die oberste, dem Transmissionskoeffizient $p=1$ entsprechende Kurve ebenfalls veranschaulicht ist. Die Bestrahlungsverhältnisse der Erde sind also viel komplizierter als es Spitaler irrtümlicherweise annahm und sie durch einfache Formeln, für die er eingestandenermassen eine besondere Vorliebe hatte, darzustellen glaubte, weshalb alle seine aus dieser Formel gewonnenen Rechnungsergebnisse unrichtig sind und im krassen Widerspruch stehen mit jenen der soeben genannten Forschern und auch aller übrigen, die sich mit derselben Frage befassten.

Es ist auf Grund der obigen Feststellung vollständig überflüssig, auf die anderen rechnerischen Fehler, die in den soeben angeführten Arbeit von Spitaler vorkommen, näher einzugehen; es sei nur beispielweise erwähnt, dass Spitaler die Perihellänge zu Beginn des Jahres 1850 mit $280^{\circ} 21' 42''$ in seine Rechnung stellt, während sie in Wirklichkeit, wie aus der mitgeteilten Tabelle VIII von Stockwell-Pilgrim ersichtlich gleich $100^{\circ} 24'$ gewesen ist.

Dreissig Jahre lang hat Spitaler an der Richtigkeit seiner Berechnungen zähe festgehalten, die von ihm berechneten Bestrahlungen der Erde als die wahren bezeichnet und alle von den seinigen abweichenden Rechnungsergebnisse für falsch erklärt, um schliesslich in seiner Arbeit „Die Bestrahlung der Erde durch die Sonne und die Temperaturverhältnisse der quartären Eiszeit. Prag 1940“ seine früheren Berechnungen als „gegenstandslos“ zu erklären. In dieser seinen neuesten Arbeit versucht er auf einem anderen Wege, ebenfalls mit Benützung einer „einfachen“ Formel, der Lösung des Problems beizukommen. Er tat dies auf folgende Weise.

Um die mittlere tägliche Bestrahlung eines Punktes der Erdoberfläche zu erhalten, zieht Spitaler den Bestrahlungs-meniskus eines Breitenkreises, wie er etwa durch die in der Fig. 36, Seite 291, gestrichelte Fläche, dargestellt ist, in Betracht und bezeichnet die durch diesen Meniskus während eines Tages zugestrahlte Wärmemenge mit *S*. Dann glaubt Spitaler die mittlere tägliche Bestrahlung eines Punktes dieses Breitenkreises durch folgende Ueberlegungen, die ich seiner Abhandlung wörtlich entnehme, gewinnen zu können.

„Diesen Bestrahlungs-meniskus kann man sich der Sonne gegenüber als festliegend denken. Nun rotiert die Erde während eines Tages an dem Bestrahlungs-meniskus vorüber, und ein Punkt nach dem anderen kommt in seinen Bereich und

erhält während seines Vorüberganges von Sonnenaufgang bis Sonnenuntergang die Bestrahlungssumme S . Man erhält daher die mittlere tägliche Bestrahlung eines Punktes, wenn man die Summe S durch die Grundlinie des Bestrahlungsmeniskus, d. h. durch die Länge des vom Meniskus überspannten Bogens B dividiert... Wiener und Milankovitch dividieren die Summe S aber immer durch den ganzen Kreisumfang, durch 2π ."

Die vorstehenden Ueberlegungen Spitalers sind unrichtig, wie ich dies auch an anderer Stelle ausführlich auseinandergesetzt habe. Um dies ersehen, ziehe man, weil man von der Bestrahlungsmenge einer Linie, so wie es Spitaler tut, eigentlich nicht reden kann, einen längs des Breitenkreises um die Erde geschlungenen schmalen Ring in Betracht, dessen Breite 1 *cm* beträgt. Bezeichnet man, so wie ich es im vierten Abschnitt diese Buches getan habe, die an einem beliebigen Punkte dieses Ringes der Flächeneinheit pro Zeiteinheit zugeführte Wärmemenge mit $\frac{dW}{dt}$, mit ψ_1 die geographische Länge dieses Punktes, gezählt, wie in der Fig. 36 angegebenen, und mit r den Radius des in Betracht gezogenen Breitenkreises, so ist die durch den Bestrahlungsmeniskus dem Breitenkreisring während der Zeiteinheit zugeführte Strahlung durch das Integral

$$\int_{-\psi_0}^{+\psi_0} \frac{dW}{dt} r d\psi_1$$

veranschaulicht, wobei sich dieses Integral über den bestrahlten Teil des Breitenkreises zu erstrecken hat. Die Integrationsgrenzen $-\psi_0$ und $+\psi_0$ ergeben sich durch Auflösung der Gleichung

$$\frac{dW}{dt} = 0,$$

d. h. der Gleichung (20) des erwähnten Abschnittes.

Während eines mittleren Sonnentages, dessen Länge, die mit τ bezeichnet werden möge, 1440 Minuten beträgt, wird dem in Betracht gezogenen Ring die von Spitaler mit S bezeichnete Strahlungsmenge zugeführt, die also durch

$$S = \tau \int_{-\psi_0}^{+\psi_0} \frac{dW}{dt} r d\psi_1$$

veranschaulicht ist.

Weil die Erde im Laufe eines Sonnentages eine vollständige Drehung in bezug auf die Sonne vollführt, gleitet der erwähnte Ring unter dem Bestrahlungs-
meniskus, den man, wie oben gesagt, der Sonne gegenüber als festliegend zu
denken hat, derart, dass im Laufe eines Tages alle seine Elemente der Bestrah-
lung durch die Sonne in gleichem Masse teilhaftig werden. Die tägliche Bestrah-
lung W_r der Flächeneinheit dieses Ringes wird also erhalten, wenn man die Strah-
lungsmenge S durch die Oberfläche des Ringes oder — weil dessen Breite gleich
eins ist — durch den Umfang $2\pi r$ dividiert. Es ist also :

$$W_r = \frac{\tau}{2\pi} \int_{-\psi_0}^{+\psi_0} \frac{dW}{dt} d\psi_1 .$$

Zieht man nun, wie es Spitaler tut, eine am Breitenkreis festliegende
Flächeneinheit in Betracht, so wird diese unter dem Bestrahlungsmeniskus gleiten
und von Sonnenaufgang t_1 bis Sonnenuntergang t_2 ihrer täglichen Bestrahlungs-
menge teilhaftig werden, die durch das Integral

$$W_r = \int_{t_1}^{t_2} \frac{dW}{dt} dt$$

veranschaulicht ist.

Dies ist ein Zeitintegral, weil bei der am Breitenkreisring festliegenden Flä-
cheneinheit die Zeit t die unabhängige Veränderliche des soeben geschilderten
Vorganges ist. Auch hier werden die Integrationsgrenzen aus der Forderung
 $\frac{dW}{dt} = 0$ gewonnen.

Um von dem vorstehenden Zeitintegral auf das vorherige den Bestrahlungs-
meniskus veranschaulichende Flächenintegral zu gelangen, muss man von Zeitmass
auf Bogenmass übergehen, d.h. berücksichtigen, dass die in Zeitmass ausgedrückte
geographische Länge durch den Ausdruck

$$t = \frac{\tau}{2\pi} \psi_1$$

veranschaulicht ist. Setzt man dies in das vorstehende Integral ein, so bekommt
man :

$$W_{\tau} = \frac{\tau}{2\pi} \int_{-\psi_0}^{+\psi_0} \frac{dW}{dt} d\psi_1$$

in vollständiger Uebereinstimmung mit der vorher abgeleiteten Formel.

Diese Formel, in der zur Ueberraschung Spitalers im Nenner die Zahl 2π tatsächlich vorkommt und nach dem soeben gesagten vorkommen muss, bildet die Grundlage aller mathematisch einwandfreien Untersuchungen über die Bestrahlung der Erde durch die Sonne. Diese Formel ist nicht nur von Wiener und mir, sondern auch von Hargreaves, Baur und Philips verwendet worden, um mit Hilfe derselben auch den jährlichen Gang der Erdbestrahlung mathematisch zu veranschaulichen. Dies führte bei Wiener zu elliptischen Integralen, bei Hargreaves und mir zu Reihenentwicklungen. Alle diese Untersuchungen führten, wie im vierten Abschnitt dieses Buches bereits festgestellt, zu vollkommen übereinstimmenden Ergebnissen. Diese Ergebnisse stimmten auch, wie dies aus der klassischen Abhandlung von Wiener ersichtlich, mit den früheren Berechnungen von Lambert und Meech überein; die Berechnungen von Angot führten ebenfalls zu denselben Resultaten. Die Berechnungen von Spitaler sind hingegen mit jenen der acht genannten Forscher nicht in Einklang zu bringen; warum, das ist jetzt deutlich sichtbar: weil Spitaler von einem Zeitintegral auf ein Flächenintegral übergehend, die Fundamentalrelation zwischen dem Zeitmasse und dem Bogenmasse, in der das verfluchte 2π vorkommt, unberücksichtigt gelassen hat.

Es bedarf wohl keines weiteren Beweises, dass ein Forscher, der dreissig Jahre braucht, um die Unrichtigkeit seiner Berechnungen einzusehen, und der bei einem neuen Anlauf, das gestellte Problem zu lösen, schon bei der Berechnung der täglichen Strahlungsmenge stolpert, nicht die Fähigkeiten besitzt, ein mathematisch so verschlungenes Problem, wie es jenes der Eiszeiten ist, zu bewältigen. Nach den Spitalerschen Berechnungen, die, wie jetzt einleuchtend, von Anfang bis Ende fehlerhaft sind, hätten die Eiszeiten Günz, Mindel, Riss und Würm ihre Höhepunkte zu folgenden vier Epochen erreicht: 1,260,000, 890.000, 520.000 und 155.000 Jahren vor der Gegenwart, d. h. in fast genau gleichen gegenseitigen Abständen von 370.000 Jahren. Wie weit auch dies von den tatsächlichen Verhältnissen entfernt ist, wird man aus den nachstehenden Ausführungen klar ersehen.

Die wichtigsten der vorstehend angeführten Theorien der Eiszeiten sind bereits von Hann im ersten Bande seines bekannten „Handbuches der Klimatologie“ ausführlich und kritisch besprochen worden, wobei er zum Schlussergebnis gelangte, dass diese Theorien leistungsunfähig sind und man nach denselben eher auf eine gewisse Beständigkeit der irdischen Klimate schliessen müsste. Jetzt wird es klar, warum Hann zu diesem Urteil gelangte. Allen diesen Theorien haftet, wie vorstehend gezeigt, derselbe Fehler an, da keine von ihnen die Veränderlichkeit aller astronomischen Elemente, die den Bestrahlungszustand der Erde beeinflussen, richtig erfasst hat. Schon die von Hann vorgenommene Gruppierung dieser Theorien, die nach dem jeweils berücksichtigten astronomischen Element durchgeführt wurde, zeigt deutlich ihre Unzulänglichkeit. Ueberdies hat keine von diesen Theorien den

ausschlaggebenden Einfluss der Aenderungen der Ekliptikschiefe auf den Bestrahlungszustand der Erde mathematisch erfassen können. Dieser Einfluss ist erst durch die Ausrechnung der vorstehend mitgetheilten Tabellen XII und XIII, deren erste Veröffentlichung in meiner akademischen Abhandlung „Ueber die Frage der astronomischen Theorien der Eizeiten“ im Jahre 1914 erfolgte, klargelegt worden. In derselben habe ich gezeigt, dass das astronomische Problem der Eiszeiten viel komplizierter ist, als man es vorher angenommen hatte und dass, um zu einer richtigen Lösung zu gelangen, das ganze Problem an seiner Wurzel erfasst und auf eine breite Basis gestellt werden müsse. Wie dies geschehen ist, soll im nachstehenden gezeigt werden.

KAPITEL XX

Verlauf der Erdbestahlung während der letztverflossenen 600 Jahrtausende

§ 114. Vorfragen. Der lange Weg, den ich auf dem Gebiete der exakten Wissenschaften gegangen bin, hat mich zur Etappe geführt, von der aus ich die Veränderungen, die die Erdbestahlung während der letztverflossenen 600 Jahrtausende erfahren hat, zu überblicken und mathematisch zu erfassen in der Lage bin. Ich habe im Kapitel XV dieses Buches gezeigt, dass sich die säkularen Veränderungen der Erdbestahlung als eindeutig gegebene Funktionen folgender Grössen darstellen lassen: der Schiefe ε der Ekliptik, der Exzentrizität e der Erdbahn, der Länge Π , des Perihels, der Solarkonstante J_0 und der geographischen Breite φ . Die astronomischen Elemente ε , e und Π , gehorchen den Gesetzen der Himmelsmechanik und ihre Aenderungen können, wie im Kapitel XIV gezeigt, für das hier in Betracht gezogene Zeitintervall der Vorzeit mit der erforderlichen Genauigkeit berechnet werden. Es muss also nur noch die Frage beantwortet werden, ob während des erwähnten Zeitraumes die Grössen J_0 und φ ebenfalls Aenderungen erfahren haben, die von Einfluss auf den Bestrahlungszustand der Erde gewesen sind.

Die Solarkonstante J_0 ist der mathematische Ausdruck und das Mass der Ergiebigkeit der Wärmeausstrahlung der Sonne. Während des langen Zeitintervalles des Lebenslaufes unserer Sonne, das mit vielen Jahrmilliarden zu bewerten ist, war die Ergiebigkeit der Sonnenstrahlung langsam verlaufenden Aenderungen unterworfen. Nach dem von Hertzsprung und Russel entdeckten Zusammenhang zwischen dem Spektraltypus und absoluter Grössenklasse der Fixsterne und nach den Ergebnissen einer wohl begründeten Theorie, um deren Ausbau sich hauptsächlich Bialobjevski und Eddington verdient gemacht haben, erscheint es als erwiesen, dass allen Fixsternen ein gleichverlaufender Lebensweg eigen ist. In seinem Anfangsstadium ein riesiger Gasball, weist jeder Stern in seiner Kindheit zwar eine niedrige Temperatur auf, sendet aber wegen seiner Grösse ungeheure Mengen strahlender Energie in den Weltraum aus. In seiner weiteren Entwicklung schrumpft der Stern allmählich zusammen, seine Ausstrahlung bleibt aber wegen seiner stei-

genden Temperatur nahezu unverändert, bis bei einer gewissen Dichte sein Temperaturmaximum erreicht wird. Von da an nimmt auch die Temperatur und damit auch die Ausstrahlung des Sternes dauernd ab, er hat den Höhepunkt seiner Entwicklung überschritten und er schreitet auf dem absteigenden Aste seines Lebensweges als Zwerg seinem endgültigen Schicksal entgegen. Unsere Sonne hat jenen Höhepunkt bereits überschritten und ihre Ausstrahlung ist im Sinken begriffen. Ueber das Ausmass und die Geschwindigkeit dieser Abnahme der Sonnenstrahlung lassen sich noch keine zahlenmässige Angaben machen.

Alles spricht dafür, dass auch unsere Erde einst ein glühender Gasball gewesen ist, der durch Ausstrahlung ebenfalls grosse Wärmemengen an den interplanetarischen Raum abgab, bis an seiner Oberfläche der feuerflüssige Zustand erreicht wurde, der sich infolge Versinkens abgekühlter Massen auch gegen das Erdinnere ausbreitete. Durch fortgesetzte Abkühlung und Durchmischung wurde auf diese Weise der Erdkern, über dessen damaligen und selbst den gegenwärtigen Aggregatzustand wir nichts bestimmtes wissen, mit einem Mantel geschmolzener Steinmassen umhüllt, deren Temperatur sich infolge der erwähnten Durchmischung nach und nach der Kristallisationstemperatur dieser Massen näherte. Wenn auf diese Weise einmal der Zeitpunkt erreicht wurde, zu welchem sich durch weitere Abkühlung an der Oberfläche dieses feuerflüssigen Mantels feste Schollen bildeten, die in dem bereits zähflüssigen Magma nicht versanken, sondern sich zu einer zusammenhängenden Haut vereinigten, änderte sich der Charakter des Abkühlungsprozesses der Erde, denn die weitere Abkühlung konnte, wenn man von dem lokal beschränkten Hervorquellen der flüssigen Massen durch diese dünne und wohl oft geborstene Haut absieht, nur auf dem Wege der Wärmeleitung durch diese feste Erdrinde erfolgen. Dieser Vorgang kann mathematisch verfolgt werden, wie ich dies in meiner „Théorie mathématique“ getan habe. Es ergab sich dabei, dass sobald die feste Erdkruste eine Dicke von nur einigen Kilometern erreicht hatte, der aus dem Erdinnern hervorquellende Wärmestrom, durch die geringe Wärmeleitfähigkeit jener Kruste gedrosselt, nicht mehr imstande war, den Temperaturzustand der Erdoberfläche zu beeinflussen. Auch die in den Jugendjahren der Erde erhöhte seismische und vulkanische Tätigkeit vermochte nicht diesen Zustand zu ändern, ja selbst die damals stärkere Aktivität der Flutkräfte hatte nach den neueren Untersuchungen bei weitem nicht jenen Einfluss auf den Temperaturzustand der Erde, wie ihn seinerzeit G. H. Darwin nachzuweisen zu haben glaubte. So war also während der ganzen geologischen Vorzeit der Erde die Sonnenstrahlung die einzige Aktivpost im Wärmehaushalt der Erdatmosphäre.

Die geologische Vorzeit der Erde ist nur ein kurzer Zeitabschnitt im Lebenslauf der Sonne, und es muss deshalb die Frage gestellt werden, ob während dieser Vorzeit die Abnahme der Sonnenstrahlung sich fühlbar gemacht habe. Die Ansicht der Geologen¹⁾ und der Klimatologen²⁾ geht dahin, dass eine Abnahme der Sonnenstrahlung im klimatischen Bilde der geologischen Vorzeit nicht nachweisbar

1) Schwinner, Lehrbuch der physikalischen Geologie, Band I: Die Erde als Planet. S. 41. Berlin 1936.

2) Köppen-Wegener, Die Klimate der geologischen Vorzeit. S. 4. Berlin 1924.

sei, woraus zu folgern ist, dass sich der numerische Wert der Solarkonstante während der geologischen Vorzeit nur unbedeutend geändert haben konnte.

Meine nachstehenden Berechnungen des säkularen Ganges der Erdbestahlung werden sich, wie gesagt, nur auf die letztverflossenen 600 Jahrtausende erstrecken. Diese Zeitspanne bildet nur einen winzigen Bruchteil der geologischen Vorzeit, weshalb mit Sicherheit anzunehmen ist, dass während dieser Zeitspanne die Solarkonstante sich ganz und gar nicht geändert hat. Deshalb wird bei den nachfolgenden Berechnungen die Grösse J_0 als konstant zu betrachten sein. Ich werde sie, wie im vierten Abschnitt dieses Buches bereits mitgeteilt, zur Einheit der zu berechnenden Strahlungsmengen wählen, d. h. $J_0 = 1$ setzen.

Der Frage der Veränderlichkeit der geographischen Breiten ist der ganze dritte Abschnitt des vorliegenden Buches gewidmet. Dort habe ich gezeigt, dass die Lage der Drehpole auf der Erdoberfläche keine fixe ist, diese Pole vielmehr lange Wege auf der Erdoberfläche zurückgelegt haben mussten, wie dies auch durch geologische Forschungen nachgewiesen erscheint. Diese Verlagerung der Drehpole der Erde ging äusserst langsam vor sich. Wie im § 66 mitgeteilt, haben sich diese Pole während der letztverflossenen Jahrillion kaum mehr als um je $1^\circ 20'$, d. h. während der letztverflossenen 600 Jahrtausende kaum mehr als um je $48'$ auf der Erdoberfläche verlagert. Eine solche Verlagerung des nördlichen Drehpoles der Erde ist zu gering, um den Ablauf des Eiszeitalters, der den Gegenstand der nachfolgenden Untersuchungen bilden wird, bemerkbar zu beeinflussen und hat sich nur während der ältesten zwei Eiszeiten, Günz und Mindel, spürbar gemacht.

Ich werde bei meinen nachfolgenden Berechnungen des säkularen Bestahlungsganges der Erde die geographische Breite als unveränderlich voraussetzen, um deren Veränderlichkeit erst nachträglich zu berücksichtigen. Dies ist sehr wohl möglich, weil ich meine Berechnungen auf 16 äquidistant verteilte Breiten der Erde erstreckte und durch Interpolation zwischen den Zahlen der derart erhaltenen Strahlungstabelle auch jede Veränderung der geographischen Breite berücksichtigen und die durch dieselbe verursachte Strahlungsänderung mathematisch erfassen kann.

§ 115. Numerische Berechnung des säkularen Verlaufes der Erdbestahlung. Nachdem die vorstehend gestellten Fragen beantwortet sind, kann auf die Berechnung des säkularen Ganges der Erdbestahlung geschritten werden. Diese Berechnung erfolgt vermittels der aus dem Newtonschen Gravitationsgesetz und aus dem geometrischen Bestahlungsgesetz gezogenen Konsequenzen. Diese beiden Gesetze verleihen den nachstehenden numerischen Ergebnissen den Charakter von Dokumenten jener Zuverlässigkeit, wie sie nur die Himmelsmechanik zu gewährleisten imstande ist. Der für die Durchführung dieser dokumentarischen Berechnung erforderliche mathematische Apparat ist im vierten Abschnitt dieses Buches geschaffen und durch die Tabellen XII, XIV und IX für den weiteren Gebrauch bereitgestellt worden.

Wie die analytische Darstellung und numerische Berechnung des säkularen Ganges der Bestahlung einzelner Breiten der Erdoberfläche zu erfolgen hat, ist im Kapitel XV ausführlich auseinandergesetzt. Man teilt das tropische Jahr in zwei gleich lange, also wirkliche Halbjahre, von denen das eine, das kalorische Som-

merhalbjahr, alle jene Tage des Jahres umfasst, an denen die Bestrahlung der in Betracht gezogenen Breite stärker ist als an irgend einem Tage des anderen, des kalorischen Winterhalbjahres, berechnet die diesen Halbjahren zugehörigen Strahlungsmengen Q_s und Q_w und verfolgt die Aenderungen dieser Strahlungsmengen während des in Betracht gezogenen Zeitraumes der geologischen Vorzeit.

Zum Ausgangspunkt meiner Berechnungen habe ich den Anfang des Jahres 1800 gewählt, weil dieser Zeitpunkt ebenfalls den Ausgangspunkt der Leverrier-Michkovitchen Berechnung der säkularen Aenderungen der astronomischen Elemente bildet.

Die während der kalorischen Halbjahre des Jahres 1800 den einzelnen Breiten der Erde zugestrahlten Mengen sind in der beiliegenden Tabelle XXIII in kanonischen Einheiten angegeben. Als zu dieser Tabelle zugehörend, ist die Tabelle XXIV berechnet worden, in der die Aenderungen mitgeteilt sind, die die in der Tabelle XXIII enthaltenen Strahlungsmengen während des dem Jahre 1800 nachfolgenden Zeitintervalles von 200 Jahren, also bis zum Jahre 2000 n. Chr. erfahren werden. Man ist also mit Hilfe dieser Tabelle in der Lage, die einem beliebigen Jahre des Zeitintervalles von 1800 bis 2000 entsprechenden, den kalorischen Halbjahren dieses Jahres zugehörigen Strahlungsmengen durch Interpolation zu berechnen. Wie aus dieser Tabelle ersichtlich, sind die Aenderungen der den kalorischen Halbjahren zugehörigen Strahlungsmengen recht klein. Dies gilt jedoch nur für das neunzehnte und zwanzigste Jahrhundert unserer Zeitrechnung, weil, wie aus der Tabelle VIII ersichtlich, die Grösse $\sin \Pi_\gamma$ vor 0,5 Jahrtausenden und die Grösse ε vor 10 Jahrtausenden ihr Maximum überschritten haben und deshalb die säkularen Aenderungen dieser beiden Grössen noch klein sind.

Für längere geologische Zeitintervalle muss man sich der im § 91 angegebenen Rechnungsweise bedienen. Wie dort gezeigt, sind die Aenderungen, die die in der Tabelle XXIII enthaltenen Strahlungsmengen im Laufe der geologischen Vorzeit erfahren haben, durch die Gleichungen (187) und (188) des vierten Abschnittes dieses Buches, also durch

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta Q_s = \Delta W_s \Delta \varepsilon - m \Delta (e \sin \Pi_\gamma) \\ \Delta Q_w = \Delta W_w \Delta \varepsilon + m \Delta (e \sin \Pi_\gamma) \end{array} \right.$$

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta \bar{Q}_s = \Delta W_s \Delta \varepsilon + m \Delta (e \sin \Pi_\gamma) \\ \Delta \bar{Q}_w = \Delta W_w \Delta \varepsilon - m \Delta (e \sin \Pi_\gamma) \end{array} \right.$$

gegeben. Diese Aenderungen entsprechen der Reihe nach den vier Kolumnen der Tabelle XXIII. Dabei sind die den einzelnen Breiten zugehörigen numerischen Werte der Grössen ΔW_s und ΔW_w der Tabelle XII, und jene der Grösse m der Tabelle XIV zu entnehmen. Die den einzelnen Zeitpunkten der geologischen Vorzeit zugehörigen numerischen Werte von $\Delta \varepsilon$ und $\Delta (e \sin \Pi_\gamma)$ sind in der Tabelle IX enthalten.

Tabelle XXIII

Die während der kalorischen Halbjahre zu-
gestrahlten Wärmemengen. Jahr 1800.
Kanonische Einheiten

| Geograph. Breite | Nördliche Halb- kugel | | Südliche Halb- kugel | |
|---------------------|--------------------------|---------------------|-------------------------|---------------------|
| | Sommer- halbjahr | Winter- halbjahr | Sommer- halbjahr | Winter- halbjahr |
| 0° | 14930 | 15601 | 15601 | 14930 |
| 5° | 15433 | 14997 | 16102 | 14328 |
| 10° | 15825 | 14286 | 16487 | 13625 |
| 15° | 16109 | 13476 | 16757 | 12828 |
| 20° | 16281 | 12577 | 16912 | 11946 |
| 25° | 16345 | 11595 | 16953 | 10987 |
| 30° | 16294 | 10538 | 16876 | 9956 |
| 35° | 16139 | 9418 | 16689 | 8868 |
| 40° | 15878 | 8244 | 16392 | 7730 |
| 45° | 15522 | 7033 | 15997 | 6558 |
| 50° | 15078 | 5799 | 15510 | 5367 |
| 55° | 14573 | 4574 | 14958 | 4189 |
| 60° | 14006 | 3363 | 14342 | 3027 |
| 65° | 13455 | 2250 | 13738 | 1966 |
| 70° | 13074 | 1392 | 13304 | 1163 |
| 75° | 12859 | 789 | 13033 | 615 |
| 80° | 12733 | 366 | 12850 | 250 |
| 85° | 12675 | 99 | 12733 | 41 |
| 90° | 12669 | 7 | 12676 | 0 |

Tabelle XXIV

Aenderungen der in der vorstehenden Tabelle XXIII angegebenen Wärmemengen während der Zeitspanne von 1800 bis 200. n. Chr. + Zunahme, — Abnahme

| Geograph. Breite | Nördliche Halb- kugel | | Südliche Halb- kugel | |
|---------------------|--------------------------|---------------------|-------------------------|---------------------|
| | Sommer- halbjahr | Winter- halbjahr | Sommer- halbjahr | Winter- halbjahr |
| 0° | + 7,0 | — 4,2 | — 4,2 | + 7,0 |
| 5° | + 6,4 | — 3,7 | — 4,8 | + 7,5 |
| 10° | + 5,7 | — 3,1 | — 5,4 | + 8,0 |
| 15° | + 5,0 | — 2,4 | — 5,8 | + 8,4 |
| 20° | + 4,2 | — 1,9 | — 6,4 | + 8,7 |
| 25° | + 3,3 | — 1,3 | — 6,9 | + 8,9 |
| 30° | + 2,3 | — 0,8 | — 7,5 | + 9,0 |
| 35° | + 1,3 | — 0,2 | — 7,9 | + 9,0 |
| 40° | + 0,2 | + 0,2 | — 8,4 | + 8,8 |
| 45° | — 0,8 | + 0,6 | — 8,8 | + 8,6 |
| 50° | — 2,0 | + 1,0 | — 9,2 | + 8,2 |
| 55° | — 3,3 | + 1,2 | — 9,7 | + 7,6 |
| 60° | — 4,7 | + 1,2 | — 10,3 | + 6,8 |
| 65° | — 6,5 | + 0,7 | — 11,3 | + 5,5 |
| 70° | — 9,0 | — 0,5 | — 13,0 | + 3,5 |
| 75° | — 10,5 | — 0,7 | — 13,5 | + 2,3 |
| 80° | — 11,8 | — 0,6 | — 13,8 | + 1,4 |
| 85° | — 12,7 | — 0,4 | — 13,7 | + 0,6 |
| 90° | — 13,3 | — 0,0 | — 13,3 | + 0,0 |

Aus den vorstehenden Gleichungen folgt:

$$(3) \quad \Delta Q_s + \Delta Q_w = \Delta \bar{Q}_s + \Delta \bar{Q}_w,$$

welche Gleichung zur Kontrolle der durch die Berechnung erhaltenen numerischen Resultate dienen kann.

Die durch die vorstehenden Formeln berechneten Zahlen geben die gesuchten Strahlungsänderungen in kanonischen Einheit wieder, wie diese im § 85 definiert worden sind. Der klimatische Effekt einer solchen kanonischen Einheit wird aus den Ausführungen des Kapitels XXII ersichtlich werden.

Auf die soeben geschilderte Weise ist die nachstehende Tabelle XXV des säkularen Ganges der Erdbestrahlung berechnet worden, in der die Aenderungen der während der kalorischen Halbjahre den einzelnen Breiten zugestrahltten Wärmemengen enthalten sind.

Diese Tabelle bildet eine Zusammenfassung der in meiner „Mathematischen Klimalehre“ veröffentlichten Tabelle 15, in der der säkulare Gang der Bestrahlung der aussertropischen Breiten dargestellt ist, und der in meinen „Astronomischen Mitteln“ veröffentlichten Tabelle 92, die sich auf die tropischen Breiten bezieht. Bei der vorliegenden Zusammenfassung dieser beiden Tabellen sind deren numerische Daten noch einmal überprüft und an einzelnen Stellen korrigiert worden. Diese Korrekturen betrafen folgendes.

Wie im § 84 erwähnt, hat von Bacsák in der von Michkovitch berechneten astronomischen Tabelle IX zwei auf das Glied $\Delta(e \sin \Pi_r)$ und die Zeitpunkte 500 und 465 sich beziehende Rechen- oder Schreibfehler entdeckt, die neben der in dieser Tabelle erforderlichen Korrektur auch eine solche in der erwähnten Tabelle 15 erheischten.

Ich habe zur Zeit als ich die Berechnung der Tabelle 15 meiner „Mathematischen Klimalehre“ bewerkstelligte, die durch die Gleichung (162) des vierten Abschnittes des vorliegenden Werkes dargestellte Summenformel noch nicht entdeckt gehabt, sondern habe die durch die Formel (168) gegebene Konstante m durch Summierung der in der Tabelle VI enthaltenen Koeffizienten $b_0, b_1, b_2 \dots$ berechnet, was zu einer leichten Divergenz zwischen der in der „Mathematischen Klimalehre“ auf Seite 51 mitgetheilten Tabelle der Koeffizienten m und der hier mitgetheilten Tabelle XIV Anlass gab. Bei der Berechnung der nachstehenden Tabelle XXV sind die numerischen Werte der Tabelle XIV zur Anwendung gekommen, weshalb diese Tabelle an einzelnen Stellen Abweichungen von der Tabelle 15 der „Mathematischen Klimalehre“ aufweist, die bei den geographischen Breiten von 5° bis 65° den Betrag von einer kanonischen Einheit nicht übersteigen. Für die Breite von 75° ist die Abweichung grösser; sie erreicht bei dem Zeitpunkte von 445 Jahrtausenden den Betrag von 13 kanonischen Einheiten, sonst ist sie überall kleiner.

Bei der mittels der vorstehenden Gleichung (3) durchgeführten Ueberprüfung der Tabelle 15 der „Mathematischen Klimalehre“ hat A. Penck einige Additionsfehler entdeckt, die in der nachstehenden Tabelle XXV ausgemerzt worden sind. Ich danke Herrn Penck, mich auf dieselben aufmerksam gemacht zu haben.

Mit diesen Fehlern, die sich auf die südliche Hemisphäre der Erde, und wo dies nicht der Fall ist, auf das Winterhalbjahr der nördlichen Hemisphäre beziehen, ist keine meiner in der „Mathematischen Klimalehre“ veröffentlichten Strahlungskurven behaftet, sonst würden solche Additionsfehler sofort zum Vorschein gekommen sein und wären beseitigt gewesen.

Die Tabelle XXV stellt die in mathematischer Sprache verfasste Geschichte der Bestrahlung der Erde durch die Sonne für das Intervall der letztverflossenen 600 Jahrtausende, also einen sogenannten Kanon dieser Bestrahlung dar.

Diese Tabelle ist durch die nachfolgende Tabelle XXVI ergänzt, in der die säkularen Verlagerungen des kalorischen Aequators während des in Betracht gezogenen Zeitintervalles der geologischen Vorzeit angegeben sind. Wie aus dieser Tabelle ersichtlich, waren diese Verlagerungen nicht unbeträchtlich, da sie den Betrag von $8^{\circ} 37'$ erreichten. Während des erwähnten Zeitraumes der geologischen Vorzeit hat der kalorische Aequator dreizehnmal den Breitenkreis von $+5^{\circ}$ und vierzehnmal den Breitenkreis von -5° überschritten. In jedem solcher Fälle fand an dem einen oder dem anderen dieser Breitenkreise eine Inversion der Jahreszeiten statt. Die Strahlungsmenge, die dem Sommerhalbjahr der in Betracht gezogenen Hemisphäre entsprach, war an diesem Breitenkreis geringer als die Strahlungsmenge des Winterhalbjahres. Dies stimmt auch mit dem Ergebnis der Tabellen XXIII und XXV überein. Fügt man den in der Tabelle XXIII mitgeteilten Strahlungsmengen der kalorischen Halbjahre ihre durch die Tabelle XXV gegebenen säkularen Aenderungen hinzu, dann ergibt sich in jenen siebenundzwanzig Fällen für die sommerliche Bestrahlung des in Rede stehenden Breitenkreises ein geringerer Betrag als für die winterliche, d. h. an diesem Breitenkreis fand sein Sommerhalbjahr zur Zeit des Winterhalbjahres seiner Hemisphäre statt. Der Breitenkreis gehörte thermisch seiner Hemisphäre nicht, sondern der anderen Hemisphäre an, weil er vom kalorischen Aequator überschritten war.

Die säkularen Aenderungen jener Breiten, die in der Tabelle XXV nicht enthalten sind, können durch Interpolation zwischen den nächstliegenden Breiten leicht ermittelt werden. Für die äquatornahen Breiten ist dabei neben dem soeben gesagten noch zu berücksichtigen, dass das Sommerhalbjahr der nördlichen Hemisphäre mit dem Winterhalbjahr der südlichen, das Sommerhalbjahr der südlichen Hemisphäre mit dem Winterhalbjahr der nördlichen zusammenfällt, also die Interpolation zwischen den derart zugehörigen Strahlungsmengen zu erfolgen hat.

Tabelle XXV

Der säkulare Gang der Erdbestrahlung während der letztverflossenen 600 Jahrtausende
Aenderungen der während der kalorischen Halbjahre zugestrahlten Wärmemengen
Kanonische Einheiten

| Jahrtausende vor 1800 n. Chr. | Nördliche Hemisphäre; Sommerhalbjahr | | | | | | | |
|----------------------------------|--------------------------------------|------|------|------|------|------|------|------|
| | Geographische Breite | | | | | | | |
| | 5° | 15° | 25° | 35° | 45° | 55° | 65° | 75° |
| 0,6 | -8 | -5 | -2 | +3 | +7 | +12 | +18 | +27 |
| 5 | +231 | +253 | +264 | +271 | +275 | +277 | +288 | +311 |
| 10 | +672 | +687 | +685 | +667 | +632 | +589 | +553 | +530 |
| 11,1 | +693 | +705 | +697 | +671 | +630 | +578 | +529 | +492 |
| 15 | +495 | +495 | +482 | +457 | +420 | +374 | +328 | +285 |
| 20 | +49 | +12 | -28 | -72 | -119 | -171 | -243 | -338 |
| 22,1 | +24 | -36 | -99 | -166 | -237 | -315 | -426 | -573 |
| 25 | +179 | +103 | +18 | -74 | -176 | -290 | -444 | -644 |
| 30 | +635 | +554 | +453 | +331 | +189 | +27 | -179 | -431 |
| 32,7 | +663 | +592 | +498 | +383 | +249 | +95 | -99 | -332 |
| 35 | +597 | +536 | +454 | +354 | +236 | +101 | -68 | -272 |
| 40 | +311 | +289 | +258 | +217 | +168 | +111 | +42 | -39 |
| 45 | +307 | +141 | +174 | +206 | +237 | +271 | +322 | +395 |
| 47,1 | +88 | +121 | +152 | +182 | +213 | +246 | +295 | +366 |
| 50 | +129 | +157 | +182 | +206 | +227 | +250 | +287 | +343 |
| 55 | +395 | +381 | +355 | +319 | +272 | +217 | +153 | +84 |
| 60 | +696 | +654 | +589 | +504 | +399 | +278 | +133 | -37 |
| 60,6 | +712 | +666 | +599 | +510 | +401 | +276 | +125 | -51 |
| 65 | +517 | +457 | +381 | +288 | +178 | +54 | -105 | -296 |
| 70 | -68 | -123 | -178 | -233 | -292 | -354 | -446 | -570 |
| 71,9 | -177 | -227 | -273 | -317 | -361 | -407 | -479 | -583 |
| 75 | -3 | -49 | -95 | -144 | -196 | -253 | -333 | -440 |
| 80 | +803 | +762 | +700 | +614 | +506 | +379 | +231 | +62 |
| 82,8 | +1018 | +989 | +932 | +844 | +734 | +600 | +450 | +289 |
| 85 | +901 | +889 | +852 | +791 | +708 | +608 | +500 | +391 |
| 90 | -17 | +19 | +58 | +98 | +141 | +189 | +256 | +346 |

Tabelle XXV

Der säkulare Gang der Erdbestrahlung während der letztverflossenen 600 Jahrtausende
Aenderungen der während der kalorischen Halbjahre zugestrahlten Wärmemengen
Kanonische Einheiten

| Jahrtausende vor 1800 n. Chr. | Nördliche Hemisphäre; Sommerhalbjahr | | | | | | | |
|----------------------------------|--------------------------------------|------|------|------|------|------|------|------|
| | Geographische Breite | | | | | | | |
| | 5° | 15° | 25° | 35° | 45° | 55° | 65° | 75° |
| 0,6 | -8 | -5 | -2 | +3 | +7 | +12 | +18 | +27 |
| 5 | +231 | +253 | +264 | +271 | +275 | +277 | +288 | +311 |
| 10 | +672 | +687 | +685 | +667 | +632 | +589 | +553 | +530 |
| 11,1 | +693 | +705 | +697 | +671 | +630 | +578 | +529 | +492 |
| 15 | +495 | +495 | +482 | +457 | +420 | +374 | +328 | +285 |
| 20 | +49 | +12 | -28 | -72 | -119 | -171 | -243 | -338 |
| 22,1 | +24 | -36 | -99 | -166 | -237 | -315 | -426 | -573 |
| 25 | +179 | +103 | +18 | -74 | -176 | -290 | -444 | -644 |
| 30 | +635 | +554 | +453 | +331 | +189 | +27 | -179 | -431 |
| 32,7 | +663 | +592 | +498 | +383 | +249 | +95 | -99 | -332 |
| 35 | +597 | +536 | +454 | +354 | +236 | +101 | -68 | -272 |
| 40 | +311 | +289 | +258 | +217 | +168 | +111 | +42 | -39 |
| 45 | +307 | +141 | +174 | +206 | +237 | +271 | +322 | +395 |
| 47,1 | +88 | +121 | +152 | +182 | +213 | +246 | +295 | +366 |
| 50 | +129 | +157 | +182 | +206 | +227 | +250 | +287 | +343 |
| 55 | +395 | +381 | +355 | +319 | +272 | +217 | +153 | +84 |
| 60 | +696 | +654 | +589 | +504 | +399 | +278 | +133 | -37 |
| 60,6 | +712 | +666 | +599 | +510 | +401 | +276 | +125 | -51 |
| 65 | +517 | +457 | +381 | +288 | +178 | +54 | -105 | -296 |
| 70 | -68 | -123 | -178 | -233 | -292 | -354 | -446 | -570 |
| 71,9 | -177 | -227 | -273 | -317 | -361 | -407 | -479 | -583 |
| 75 | -3 | -49 | -95 | -144 | -196 | -253 | -333 | -440 |
| 80 | +803 | +762 | +700 | +614 | +506 | +379 | +231 | +62 |
| 82,8 | +1018 | +989 | +932 | +844 | +734 | +600 | +450 | +289 |
| 85 | +901 | +889 | +852 | +791 | +708 | +608 | +500 | +391 |
| 90 | -17 | +19 | +58 | +98 | +141 | +189 | +256 | +346 |

Tabelle XXV

(Fortsetzung)

| Jahrtausende vor 1800 n. Chr. | Nördliche Hemisphäre; Sommerhalbjahr | | | | | | | |
|----------------------------------|--------------------------------------|-------|-------|------|------|------|------|------|
| | Geographische Breite | | | | | | | |
| | 5° | 15° | 25° | 35° | 45° | 55° | 65° | 75° |
| 195 | +834 | +762 | +664 | +541 | +395 | +225 | +16 | -232 |
| 198,5 | +1226 | +1159 | +1055 | +915 | +742 | +540 | +300 | +26 |
| 200 | +1144 | +1085 | +993 | +868 | +714 | +530 | +316 | +72 |
| 205 | +82 | +93 | +103 | +110 | +117 | +122 | +134 | +153 |
| 209,6 | -558 | -502 | -429 | -338 | -231 | -106 | +48 | +234 |
| 210 | -553 | -496 | -419 | -327 | -217 | -91 | +66 | +256 |
| 215 | +115 | +152 | +188 | +221 | +255 | +291 | +346 | +425 |
| 220 | +1110 | +1079 | +1018 | +925 | +805 | +661 | +500 | +327 |
| 220,8 | +1128 | +1088 | +1017 | +912 | +780 | +624 | +444 | +247 |
| 225 | +619 | +553 | +463 | +355 | +227 | +79 | -105 | -328 |
| 230 | -219 | -286 | -350 | -411 | -472 | -537 | -636 | -778 |
| 232,4 | -254 | -316 | -374 | -428 | -479 | -534 | -621 | -748 |
| 235 | +41 | -21 | -87 | -156 | -232 | -315 | -430 | -583 |
| 240 | +723 | +663 | +580 | +476 | +350 | +204 | +27 | -185 |
| 242,2 | +788 | +747 | +685 | +601 | +494 | +370 | +224 | +58 |
| 245 | +677 | +658 | +619 | +562 | +488 | +400 | +300 | +192 |
| 250 | +225 | +261 | +291 | +317 | +340 | +362 | +404 | +467 |
| 255 | +64 | +88 | +111 | +134 | +157 | +182 | +218 | +271 |
| 256,5 | +72 | +86 | +99 | +111 | +123 | +134 | +152 | +180 |
| 260 | +167 | +156 | +141 | +121 | +95 | +66 | +31 | -10 |
| 265 | +419 | +382 | +332 | +270 | +196 | +110 | +3 | -122 |
| 270 | +699 | +634 | +547 | +438 | +309 | +160 | -23 | -244 |
| 270,7 | +719 | +652 | +563 | +452 | +319 | +166 | -23 | -250 |
| 275 | +520 | +453 | +368 | +266 | +148 | +13 | -159 | -369 |
| 280 | -76 | -112 | -147 | -182 | -218 | -255 | -312 | -391 |
| 281,8 | -174 | -196 | -214 | -230 | -242 | -245 | -277 | -316 |
| 285 | +2 | -7 | -18 | -27 | -39 | -50 | -68 | -90 |

Tabelle XXV

(Fortsetzung)

| Jahrtausende vor 1800 n. Chr. | Nördliche Hemisphäre; Sommerhalbjahr | | | | | | | |
|----------------------------------|--------------------------------------|------|------|------|------|------|------|------|
| | Geographische Breite | | | | | | | |
| | 5° | 15° | 25° | 35° | 45° | 55° | 65° | 75° |
| 290 | +775 | +770 | +743 | +695 | +629 | +548 | +463 | +378 |
| 292,7 | +955 | +951 | +922 | +867 | +789 | +694 | +596 | +502 |
| 295 | +813 | +818 | +806 | +771 | +717 | +649 | +585 | +530 |
| 300 | —53 | —25 | +5 | +38 | +74 | +114 | +169 | +241 |
| 303,1 | —337 | —327 | —307 | +278 | —240 | —196 | —145 | —90 |
| 305 | —216 | —231 | —242 | —247 | —249 | —249 | —256 | —274 |
| 310 | +685 | +606 | +506 | +383 | +240 | +75 | —132 | —383 |
| 313,4 | +991 | +906 | +790 | +646 | +471 | +270 | +23 | —272 |
| 315 | +900 | +820 | +712 | +577 | +414 | +228 | —3 | —278 |
| 320 | +92 | +44 | —8 | —65 | —127 | —195 | —289 | —412 |
| 323,3 | —170 | —192 | —212 | —227 | —240 | —253 | —278 | —317 |
| 325 | —81 | —97 | —113 | —126 | —140 | —154 | —176 | —209 |
| 330 | +68 | +88 | +108 | +127 | +145 | +165 | +194 | +237 |
| 332,8 | +736 | +737 | +718 | +679 | +623 | +555 | +485 | +420 |
| 335 | +621 | +622 | +607 | +576 | +530 | +473 | +416 | +365 |
| 340 | +85 | +82 | +77 | +69 | +59 | +47 | +34 | +19 |
| 342,1 | +1 | —7 | —16 | —25 | —35 | —45 | —61 | —81 |
| 345 | +177 | +151 | +120 | +84 | +41 | —8 | —70 | —146 |
| 350 | +666 | +605 | +524 | +424 | +301 | +163 | —10 | —216 |
| 350,9 | +688 | +627 | +544 | +440 | +315 | +171 | —6 | —217 |
| 355 | +414 | +358 | +287 | +203 | +107 | —5 | —145 | —319 |
| 359,9 | —13 | —39 | —66 | —93 | —121 | —152 | —198 | —258 |
| 360 | —15 | —41 | —67 | —94 | —122 | —153 | —197 | —256 |

Tabelle XXV

(Fortsetzung)

| Jahrtausende vor 1800 n. Chr. | Nördliche Hemisphäre; Sommerhalbjahr | | | | | | | |
|----------------------------------|--------------------------------------|------|------|------|------|------|------|------|
| | Geographische Breite | | | | | | | |
| | 5° | 15° | 25° | 35° | 45° | 55° | 65° | 75° |
| 365 | +366 | +357 | +337 | +307 | +268 | +221 | +169 | +113 |
| 369,6 | +729 | +728 | +707 | +666 | +607 | +537 | +464 | +394 |
| 370 | +726 | +726 | +707 | +669 | +613 | +545 | +475 | +410 |
| 375 | +270 | +291 | +305 | +314 | +316 | +317 | +329 | +354 |
| 379,7 | —81 | —65 | —48 | —29 | —6 | +20 | +54 | +96 |
| 380 | —78 | —64 | —48 | —30 | —8 | —16 | +47 | +87 |
| 385 | +398 | +357 | +304 | +238 | +160 | +72 | —40 | —174 |
| 389,6 | +717 | +647 | +556 | +441 | +304 | +148 | —46 | —279 |
| 390 | +713 | +641 | +546 | +430 | +292 | +134 | —64 | —301 |
| 395 | +312 | +251 | +178 | +95 | +1 | —106 | —247 | —422 |
| 399,2 | +117 | +67 | +11 | —50 | —116 | —191 | —292 | —423 |
| 400 | +132 | +83 | +28 | —33 | —101 | —177 | —278 | —409 |
| 405 | +447 | +417 | +372 | +315 | +246 | +164 | +66 | —48 |
| 407,7 | +488 | +477 | +452 | +414 | +363 | +304 | +236 | +165 |
| 410 | +404 | +413 | +412 | +401 | +381 | +354 | +332 | +318 |
| 415 | +146 | +181 | +215 | +246 | +277 | +308 | +359 | +432 |
| 415,5 | +141 | +175 | +208 | +239 | +268 | +300 | +349 | +422 |
| 420 | +368 | +388 | +399 | +401 | +396 | +387 | +388 | +404 |
| 424 | +603 | +589 | +558 | +511 | +448 | +374 | +291 | +203 |
| 425 | +609 | +588 | +550 | +495 | +424 | +341 | +245 | +140 |
| 430 | +208 | +157 | —99 | +34 | —41 | —124 | —235 | —375 |
| 433,6 | —65 | —125 | —185 | —245 | —310 | —378 | —478 | —615 |
| 435 | —58 | —120 | —183 | —248 | —315 | —389 | —495 | —640 |

Tabelle XXV
(Fortsetzung)

| Jahrtausende vor 1800 n. Chr. | Nördliche Hemisphäre; Sommerhalbjahr | | | | | | | |
|----------------------------------|--------------------------------------|-------|-------|------|------|------|------|------|
| | Geographische Breite | | | | | | | |
| | 5° | 15° | 25° | 35° | 45° | 55° | 65° | 75° |
| 440 | +602 | +533 | +443 | +334 | +207 | +61 | -123 | -347 |
| 444 | +963 | +896 | +800 | +676 | +525 | +349 | +137 | -112 |
| 445 | +943 | +886 | +801 | +689 | +552 | +390 | +197 | -19 |
| 450 | +104 | +105 | +103 | +98 | +91 | +83 | +73 | +66 |
| 454,8 | -440 | -395 | -336 | -264 | -177 | -78 | +46 | +194 |
| 455 | -441 | -395 | -334 | -261 | -173 | -72 | +54 | +205 |
| 460 | +149 | +165 | +177 | +186 | +193 | +198 | +212 | +237 |
| 465 | +1149 | +1107 | +1031 | +922 | +784 | +621 | +433 | +227 |
| 465,4 | +1157 | +1114 | +1037 | +926 | +785 | +620 | +429 | +217 |
| 470 | +415 | +379 | +331 | +271 | +198 | +113 | +11 | -112 |
| 475 | -426 | -450 | -464 | -467 | -462 | -452 | -454 | -473 |
| 475,6 | -435 | -460 | -474 | -478 | -473 | -462 | -464 | -484 |
| 480 | +186 | +137 | +80 | +17 | -54 | -134 | -240 | -375 |
| 485 | +1059 | +999 | +908 | +784 | +632 | +454 | +242 | -1 |
| 486,1 | +1053 | +997 | +910 | +793 | +649 | +479 | +277 | +48 |
| 490 | +596 | +573 | +533 | +476 | +404 | +318 | +220 | +110 |
| 495 | -120 | -100 | -75 | -47 | -13 | +23 | +72 | +132 |
| 497,1 | -156 | -132 | -102 | -67 | -27 | +18 | +77 | +150 |
| 500 | +19 | +42 | +65 | +89 | +114 | +141 | +181 | +233 |
| 505 | +530 | +524 | +504 | +469 | +421 | +363 | +302 | +240 |
| 508,2 | +628 | +596 | +545 | +476 | +390 | +289 | +170 | +35 |
| 510 | +578 | +534 | +472 | +393 | +297 | +186 | +51 | -108 |
| 515 | +419 | +358 | +284 | +195 | +93 | -23 | -171 | -354 |

Tabelle XXV

(Fortsetzung)

| Jahrtausende vor 1800 n. Chr. | Nördliche Hemisphäre; Sommerhalbjahr | | | | | | | |
|----------------------------------|--------------------------------------|-------|-------|-------|------|------|------|------|
| | Geographische Breite | | | | | | | |
| | 5° | 15° | 25° | 35° | 45° | 55° | 65° | 75° |
| 520 | +314 | +265 | +207 | +137 | +57 | -35 | -151 | -297 |
| 525 | +139 | +107 | +69 | +27 | -21 | -75 | -147 | -237 |
| 525,3 | +130 | +100 | +64 | +24 | -22 | -73 | -140 | -226 |
| 530 | +148 | +140 | +126 | +110 | +88 | +63 | +34 | 0 |
| 535 | +640 | +642 | +626 | +593 | +545 | +487 | +428 | +374 |
| 537,8 | +851 | +839 | +804 | +745 | +666 | +569 | +466 | +360 |
| 540 | +808 | +790 | +753 | +692 | +611 | +516 | +409 | +297 |
| 545 | +7 | -1 | -10 | -19 | -30 | -41 | -57 | -77 |
| 548,6 | -417 | -422 | -415 | -398 | -372 | -339 | -307 | -281 |
| 550 | -373 | -384 | -386 | -378 | -362 | -342 | -325 | -319 |
| 555 | +659 | +599 | +520 | +420 | +301 | +163 | -7 | -209 |
| 559 | +1268 | +1189 | +1072 | +916 | +728 | +507 | +242 | -63 |
| 560 | +1247 | +1169 | +1052 | +900 | +712 | +494 | +232 | -71 |
| 565 | +122 | +95 | +62 | +26 | -15 | -61 | -123 | -200 |
| 569,4 | -622 | -603 | -566 | -513 | -442 | -360 | -266 | -164 |
| 570 | -610 | -588 | -549 | -492 | -420 | -335 | -238 | -130 |
| 575 | +451 | +461 | +458 | +443 | +420 | +389 | +362 | +344 |
| 579,7 | +1195 | +1186 | +1149 | +1076 | +977 | +855 | +727 | +604 |
| 580 | +1187 | +1181 | +1144 | +1073 | +974 | +854 | +729 | +607 |
| 585 | +325 | +328 | +321 | +306 | +282 | +255 | +227 | +202 |
| 590 | -391 | -411 | -424 | -426 | -419 | -409 | -411 | -426 |
| 590,3 | -386 | -408 | -421 | -426 | -421 | -414 | -417 | -437 |
| 595 | +327 | +264 | +188 | +102 | +4 | -106 | -253 | -434 |
| 600 | +903 | +825 | +717 | +583 | +422 | +236 | +7 | -265 |

Tabelle XXV

(Fortsetzung)

| Jahrtausende vor 1800 n. Chr. | Nördliche Hemisphäre; Winterhalbjahr | | | | | | | |
|----------------------------------|--------------------------------------|------|------|------|------|------|------|------|
| | Geographische Breite | | | | | | | |
| | 5° | 15° | 25° | 35° | 45° | 55° | 65° | 75° |
| 0,6 | +1 | —1 | —3 | —5 | —7 | —7 | —5 | 0 |
| 5 | —288 | —304 | —304 | —294 | —271 | —234 | —170 | —80 |
| 10 | —752 | —760 | —742 | —700 | —627 | —528 | —387 | —203 |
| 11,1 | —764 | —769 | —747 | —699 | —625 | —524 | —384 | —205 |
| 15 | —530 | —527 | —508 | —471 | —417 | —347 | —255 | —141 |
| 20 | +30 | +60 | +84 | +103 | +113 | +111 | +80 | +15 |
| 22,1 | +107 | +155 | +192 | +218 | +229 | +215 | +155 | +41 |
| 25 | —23 | +39 | +92 | +136 | +166 | +170 | +121 | +9 |
| 30 | —501 | —432 | —358 | —278 | —198 | —130 | —99 | —117 |
| 32,7 | —549 | —488 | —417 | —338 | —256 | —182 | —137 | —132 |
| 35 | —501 | —448 | —386 | —316 | —243 | —175 | —132 | —121 |
| 40 | —284 | —265 | —239 | —206 | —170 | —131 | —98 | —71 |
| 45 | —190 | —216 | —232 | —239 | —231 | —207 | —151 | —57 |
| 47,1 | —166 | —191 | —207 | —213 | —208 | —187 | —135 | —51 |
| 50 | —199 | —220 | —232 | —233 | —223 | —197 | —143 | —59 |
| 55 | —391 | —377 | —352 | —317 | —272 | —220 | —162 | —101 |
| 60 | —647 | —609 | —554 | —485 | —402 | —315 | —234 | —163 |
| 60,6 | —658 | —618 | —561 | —489 | —405 | —316 | —235 | —166 |
| 65 | —420 | —370 | —312 | —249 | —185 | —128 | —96 | —90 |
| 70 | +193 | +236 | +267 | +283 | +283 | +259 | +188 | +62 |
| 71,9 | +298 | +336 | +359 | +365 | +353 | +314 | +229 | +89 |
| 75 | +102 | +139 | +165 | +184 | +190 | +177 | +127 | +86 |
| 80 | —770 | —732 | —677 | —601 | —508 | —405 | —299 | —197 |
| 82,8 | —1024 | —994 | —936 | —847 | —783 | —596 | —438 | —267 |
| 85 | —936 | —921 | —877 | —805 | —705 | —580 | —427 | —246 |
| 90 | —62 | —91 | —114 | —129 | —136 | —128 | —93 | —24 |
| 94 | +367 | +324 | +275 | +220 | +164 | +115 | +86 | +87 |

Tabelle XXV
(Fortsetzung)

| Jahrtausende vor 1800 n. Chr. | Nördliche Hemisphäre; Winterhalbjahr | | | | | | | |
|----------------------------------|--------------------------------------|-------|------|------|------|------|------|------|
| | Geographische Breite | | | | | | | |
| | 5° | 15° | 25° | 35° | 45° | 55° | 65° | 75° |
| 95 | +343 | +300 | +251 | +199 | +145 | +99 | +74 | +80 |
| 100 | —380 | —361 | —332 | —294 | —247 | —197 | —145 | —97 |
| 105,1 | —1009 | —927 | —823 | —700 | —564 | —428 | —319 | —249 |
| 110 | —357 | —292 | —225 | —157 | —92 | —44 | —36 | —79 |
| 115 | +433 | +470 | +486 | +483 | +456 | +400 | +291 | +125 |
| 116,1 | +463 | +496 | +510 | +503 | +472 | +411 | +299 | +131 |
| 120 | +36 | +67 | +94 | +114 | +125 | +121 | +87 | +18 |
| 125 | —831 | —816 | —774 | —710 | —620 | —509 | —375 | —219 |
| 127,7 | —984 | —973 | —934 | —862 | —760 | —629 | —462 | —261 |
| 130 | —877 | —880 | —853 | —797 | —711 | —593 | —436 | —235 |
| 135 | —199 | —208 | —210 | —205 | —189 | —163 | —119 | —56 |
| 140 | +200 | +199 | +192 | +178 | +159 | +131 | +97 | +53 |
| 145 | —132 | —99 | —66 | —34 | —5 | +13 | +7 | —27 |
| 150 | —693 | —632 | —555 | —467 | —371 | —277 | —207 | —170 |
| 152,2 | —800 | —738 | —660 | —565 | —458 | —350 | —261 | —199 |
| 155 | —699 | —637 | —570 | —488 | —397 | —302 | —225 | —171 |
| 160 | —72 | —61 | —49 | —36 | —24 | —14 | —11 | —16 |
| 164,3 | +264 | +247 | +223 | +195 | +162 | +127 | +93 | +66 |
| 165 | +254 | +235 | +210 | +180 | +146 | +112 | +84 | +63 |
| 170 | —322 | —334 | —334 | —322 | —295 | —253 | —185 | —89 |
| 175 | —1040 | —1022 | —972 | —891 | —780 | —640 | —471 | —275 |
| 176,3 | —1075 | —1048 | —990 | —901 | —785 | —639 | —470 | —281 |
| 180 | —706 | —672 | —618 | —549 | —462 | —367 | —272 | —180 |
| 185 | +335 | +357 | +365 | +358 | +334 | +290 | +211 | +95 |
| 187,5 | +554 | +574 | +573 | +550 | +505 | +432 | +316 | +143 |
| 190 | +374 | +403 | +416 | +411 | +387 | +337 | +246 | +107 |
| 195 | —732 | —670 | —592 | —501 | —402 | —302 | —225 | —180 |

Tabelle XXV

(Fortsetzung)

| Jahrtausende vor 1880 n. Chr. | Nördliche Hemisphäre; Winterhalbjahr | | | | | | | |
|----------------------------------|--------------------------------------|-------|-------|------|------|------|------|------|
| | Geographische Breite | | | | | | | |
| | 5° | 15° | 25° | 35° | 45° | 55° | 65° | 75° |
| 198,5 | -1160 | -1099 | -1009 | -889 | -747 | -590 | -437 | -294 |
| 200 | -1093 | -1039 | -957 | -848 | -717 | -569 | -421 | -279 |
| 205 | -112 | -120 | -124 | -122 | -115 | -99 | -73 | -32 |
| 209,6 | +473 | +425 | +368 | +304 | +236 | +171 | +128 | +114 |
| 210 | +463 | +414 | +355 | +292 | +223 | +160 | +121 | +111 |
| 215 | -204 | -233 | -251 | -257 | -249 | -222 | -162 | -62 |
| 220 | -1119 | -1087 | -1024 | -929 | -805 | -654 | -482 | -291 |
| 220,8 | -1118 | -1079 | -1010 | -908 | -781 | -632 | -465 | -289 |
| 225 | -509 | -453 | -385 | -311 | -234 | -164 | -124 | -112 |
| 230 | +382 | +433 | +465 | +476 | +461 | +412 | +299 | +115 |
| 232,4 | +408 | +456 | +483 | +489 | +469 | +416 | +303 | +122 |
| 235 | +93 | +142 | +182 | +210 | +223 | +212 | +152 | +37 |
| 240 | -638 | -586 | -521 | -442 | -355 | -268 | -202 | -157 |
| 242,2 | -755 | -717 | -662 | -588 | -497 | -395 | -292 | -193 |
| 245 | -681 | -661 | -622 | -564 | -488 | -397 | -292 | -177 |
| 250 | -317 | -344 | -357 | -354 | -333 | -292 | -213 | -91 |
| 255 | -122 | -140 | -152 | -157 | -153 | -138 | -100 | -37 |
| 256,5 | -109 | -119 | -125 | -126 | -120 | -106 | -77 | -31 |
| 260 | -156 | -145 | -133 | -116 | -96 | -75 | -55 | -39 |
| 265 | -367 | -335 | -296 | -250 | -200 | -150 | -111 | -90 |
| 270 | -603 | -547 | -479 | -400 | -316 | -234 | -175 | -147 |
| 270,7 | -620 | -563 | -493 | -413 | -325 | -242 | -180 | -151 |
| 275 | -407 | -350 | -287 | -221 | -155 | -100 | -76 | -94 |
| 280 | +160 | +188 | +207 | +215 | +212 | +191 | +139 | +50 |
| 281,8 | +235 | +252 | +258 | +254 | +238 | +198 | +151 | +67 |
| 285 | +18 | +26 | +32 | +35 | +37 | +34 | +25 | +7 |
| 290 | -815 | -806 | -772 | -711 | -626 | -518 | -380 | -215 |

Tabelle XXV

(Fortsetzung)

| Jahrtausende vor 1800 n. Chr. | Nördliche Hemisphäre; Winterhalbjahr | | | | | | | |
|----------------------------------|--------------------------------------|-------|------|------|------|------|------|------|
| | Geographische Breite | | | | | | | |
| | 5° | 15° | 25° | 35° | 45° | 55° | 65° | 75° |
| 292,7 | -1013 | -1003 | -963 | -890 | -785 | -650 | -478 | -268 |
| 295 | -885 | -883 | -857 | -800 | -712 | -594 | -436 | -236 |
| 300 | -5 | -27 | -46 | -61 | -70 | -70 | -51 | -7 |
| 303,1 | +338 | +328 | +308 | +278 | +240 | +195 | +144 | +87 |
| 305 | +265 | +276 | +276 | +267 | +245 | +211 | +154 | +74 |
| 310 | -558 | -492 | -416 | -333 | -248 | -172 | -130 | -132 |
| 313,4 | -872 | -798 | -706 | -598 | -479 | -361 | -269 | -212 |
| 315 | -784 | -716 | -630 | -531 | -422 | -316 | -236 | -192 |
| 320 | +6 | +45 | +78 | +104 | +120 | +120 | +85 | +12 |
| 323,3 | +232 | +248 | +255 | +251 | +236 | +206 | +150 | +66 |
| 325 | +123 | +136 | +143 | +143 | +137 | +122 | +88 | +36 |
| 330 | -115 | -133 | -143 | -146 | -142 | -127 | -92 | -35 |
| 332,8 | -788 | -784 | -755 | -700 | -619 | -515 | -378 | -210 |
| 335 | -666 | -663 | -640 | -594 | -527 | -438 | -321 | -178 |
| 340 | -84 | -81 | -76 | -69 | -59 | -43 | -35 | -22 |
| 342,1 | +17 | +24 | +29 | +32 | +34 | +31 | +23 | +6 |
| 345 | -133 | -112 | -90 | -67 | -44 | -25 | -20 | -30 |
| 350 | -578 | -526 | -462 | -389 | -307 | -230 | -172 | -141 |
| 350,9 | -599 | -546 | -481 | -404 | -321 | -239 | -179 | -147 |
| 355 | -318 | -270 | -219 | -165 | -113 | -69 | -54 | -73 |
| 359,9 | +71 | +91 | +107 | +116 | +117 | +108 | +79 | +24 |
| 360 | +72 | +92 | +107 | +117 | +118 | +109 | +79 | +24 |
| 365 | -370 | -360 | -340 | -308 | -268 | -218 | -161 | -96 |

Tabelle XXV

(Fortsetzung)

| Jahrtausende vor 1800 n. Chr. | Nördliche Hemisphäre; Winterhalbjahr | | | | | | | |
|----------------------------------|--------------------------------------|------|------|------|------|------|------|------|
| | Geographische Breite | | | | | | | |
| | 5° | 15° | 25° | 35° | 45° | 55° | 65° | 75° |
| 369,6 | —776 | —770 | —739 | —684 | —604 | —501 | —368 | —206 |
| 370 | —776 | —772 | —742 | —689 | —610 | —506 | —371 | —206 |
| 375 | —334 | —349 | —351 | —339 | —312 | —268 | —196 | —93 |
| 379,7 | +54 | +41 | +30 | +18 | +8 | 0 | +1 | +11 |
| 380 | +54 | +42 | +31 | +20 | +10 | +3 | +3 | +11 |
| 385 | —335 | —301 | —259 | —213 | —164 | —120 | —89 | —81 |
| 389,6 | —612 | —552 | —481 | —399 | —311 | —228 | —171 | —148 |
| 390 | —603 | —542 | —469 | —387 | —299 | —218 | —163 | —146 |
| 395 | —199 | —148 | —97 | —50 | —8 | +19 | +12 | —40 |
| 399,2 | —14 | +26 | +61 | +90 | +109 | +112 | +80 | +6 |
| 400 | —32 | +8 | +43 | +73 | +95 | +100 | +71 | +1 |
| 405 | —410 | —383 | —346 | —301 | —248 | —192 | —143 | —102 |
| 407,7 | —497 | —485 | —458 | —418 | —363 | —297 | —218 | —129 |
| 410 | —452 | —457 | —446 | —420 | —378 | —317 | —232 | —122 |
| 415 | —235 | —262 | —278 | —281 | —271 | —240 | —175 | —70 |
| 415,5 | —228 | —254 | —269 | —273 | —262 | —233 | —169 | —68 |
| 420 | —437 | —451 | —448 | —429 | —391 | —333 | —245 | —121 |
| 424 | —614 | —598 | —566 | —515 | —448 | —366 | —269 | —160 |
| 425 | —605 | —585 | —547 | —494 | —424 | —344 | —253 | —157 |
| 430 | —111 | —70 | —30 | +5 | +35 | +50 | +35 | —20 |
| 433,6 | +201 | +247 | +281 | +299 | +301 | +275 | +199 | +65 |
| 435 | +199 | +248 | +283 | +304 | +306 | +281 | +203 | +66 |
| 440 | —489 | —430 | —362 | —289 | —214 | —148 | —112 | —116 |

Tabelle XXV

(Fortsetzung)

| Jahrtausende vor 1800 n. Chr. | Nördliche Hemisphäre; Winterhalbjahr | | | | | | | |
|----------------------------------|--------------------------------------|-------|-------|------|------|------|------|------|
| | Geographische Breite | | | | | | | |
| | 5° | 15° | 25° | 35° | 45° | 55° | 65° | 75° |
| 444 | —881 | —822 | —742 | —644 | —530 | —411 | —306 | —221 |
| 445 | —882 | —831 | —758 | —665 | —556 | —436 | —323 | —228 |
| 450 | —113 | —113 | —109 | —102 | —91 | —76 | —55 | —30 |
| 454,8 | +371 | +332 | +287 | +236 | +182 | +131 | +98 | +89 |
| 455 | +369 | +329 | +283 | +232 | +177 | +127 | +95 | +89 |
| 460 | —194 | —205 | —208 | —203 | —190 | —164 | —120 | —55 |
| 465 | —1133 | —1093 | —1020 | —916 | —785 | —633 | —467 | —292 |
| 465,4 | —1139 | —1097 | —1023 | —918 | —787 | —634 | —468 | —294 |
| 470 | —365 | —334 | —296 | —251 | —201 | —151 | —113 | —90 |
| 475 | +508 | +524 | +522 | +499 | +457 | +390 | +284 | +140 |
| 475,6 | +519 | +536 | +534 | +511 | +466 | +398 | +291 | +143 |
| 480 | —90 | —50 | —12 | +21 | +47 | +61 | +42 | —14 |
| 485 | —997 | —943 | —864 | —760 | —636 | —501 | —371 | —252 |
| 486,1 | —1002 | —951 | —874 | —773 | —652 | —517 | —382 | —255 |
| 490 | —586 | —564 | —526 | —472 | —404 | —326 | —241 | —151 |
| 495 | +83 | +66 | +49 | +32 | +16 | +5 | +4 | +18 |
| 497,1 | +113 | +93 | +71 | +50 | +30 | +15 | +12 | +25 |
| 500 | —71 | —89 | —102 | —109 | —110 | —102 | —74 | —24 |
| 505 | —553 | —545 | —521 | —478 | —420 | —346 | —254 | —146 |
| 508,2 | —600 | —570 | —524 | —464 | —392 | —311 | —230 | —153 |
| 510 | —520 | —481 | —431 | —370 | —301 | —231 | —171 | —129 |
| 515 | —314 | —263 | —210 | —154 | —100 | —57 | —45 | —71 |
| 520 | —228 | —188 | —146 | —103 | —62 | —30 | —25 | —51 |

Tabelle XXV
(Fortsetzung)

| Jahrtausende vor 1800 n. Chr. | Nördliche Hemisphäre; Winterhalbjahr | | | | | | | |
|----------------------------------|--------------------------------------|-------|-------|-------|------|------|------|------|
| | Geographische Breite | | | | | | | |
| | 5° | 15° | 25° | 35° | 45° | 55° | 65° | 75° |
| 525 | -77 | -51 | -26 | -3 | +17 | +28 | +19 | -14 |
| 525,3 | -72 | -47 | -23 | -1 | +18 | +28 | +19 | -12 |
| 530 | -139 | -132 | -120 | -106 | -88 | -70 | -52 | -36 |
| 535 | -687 | -684 | -659 | -612 | -542 | -451 | -331 | -183 |
| 537,8 | -882 | -868 | -826 | -758 | -664 | -545 | -401 | -232 |
| 540 | -828 | -808 | -767 | -700 | -610 | -500 | -368 | -217 |
| 545 | +11 | +17 | +23 | +26 | +29 | +28 | +20 | +4 |
| 548,6 | +456 | +457 | +442 | +413 | +369 | +309 | +227 | +122 |
| 550 | +423 | +430 | +421 | +398 | +359 | +303 | +222 | +115 |
| 555 | -573 | -521 | -459 | -386 | -306 | -229 | -171 | -141 |
| 559 | -1179 | -1109 | -1009 | -881 | -734 | -575 | -425 | -297 |
| 560 | -1158 | -1088 | -989 | -864 | -718 | -563 | -416 | -292 |
| 565 | -70 | -48 | -25 | -5 | +12 | +21 | +15 | -13 |
| 569,4 | +623 | +604 | +567 | +513 | +442 | +359 | +265 | +161 |
| 570 | +603 | +582 | +544 | +490 | +420 | +340 | +251 | +156 |
| 575 | -502 | -507 | -494 | -464 | -416 | -350 | -256 | -135 |
| 579,7 | -1261 | -1246 | -1196 | -1103 | -973 | -804 | -590 | -334 |
| 580 | -1255 | -1243 | -1191 | -1099 | -970 | -802 | -589 | -332 |
| 585 | -352 | -352 | -340 | -316 | -281 | -234 | -171 | -94 |
| 590 | +464 | +478 | +475 | +455 | +415 | +353 | +259 | +128 |
| 590,3 | +462 | +477 | +475 | +456 | +416 | +356 | +260 | +128 |
| 595 | -210 | -158 | -105 | -56 | -12 | +16 | +10 | -43 |
| 600 | -790 | -722 | -638 | -538 | -429 | -322 | -240 | -194 |

Tabelle XXV

(Fortsetzung)

| Jahrtausende vor 1800 n. Chr. | Südliche Hemisphäre; Sommerhalbjahr | | | | | | | |
|----------------------------------|-------------------------------------|------|------|------|------|------|------|------|
| | Geographische Breite | | | | | | | |
| | 5° | 15° | 25° | 35° | 45° | 55° | 65° | 75° |
| 0,6 | +4 | +7 | +10 | +13 | +15 | +18 | +24 | +31 |
| 5 | -265 | -233 | -188 | -137 | -77 | -9 | +78 | +183 |
| 10 | -718 | -659 | -579 | -477 | -354 | -211 | -37 | +170 |
| 11,1 | -735 | -681 | -603 | -505 | -384 | -246 | -77 | +122 |
| 15 | -515 | -483 | -436 | -373 | -296 | -208 | -100 | +23 |
| 20 | -3 | -38 | -76 | -116 | -157 | -201 | -265 | -352 |
| 22,1 | +52 | -8 | -73 | -142 | -217 | -299 | -414 | -565 |
| 25 | -87 | -155 | -224 | -294 | -366 | -444 | -558 | -714 |
| 30 | -557 | -600 | -631 | -649 | -657 | -659 | -685 | -741 |
| 32,7 | -597 | -630 | -648 | -653 | -645 | -631 | -633 | -660 |
| 35 | -541 | -568 | -582 | -582 | -572 | -555 | -552 | -568 |
| 40 | -295 | -299 | -294 | -281 | -262 | -237 | +216 | -197 |
| 45 | -155 | -113 | -64 | -10 | +51 | +119 | +210 | +327 |
| 47,1 | -134 | -95 | -50 | 0 | +55 | +118 | +201 | +308 |
| 50 | -169 | -133 | -90 | -40 | +15 | +78 | +161 | +265 |
| 55 | -393 | -383 | -361 | -329 | -286 | -237 | -181 | -120 |
| 60 | -668 | -670 | -653 | -620 | -569 | -508 | -447 | -391 |
| 60,6 | -680 | -684 | -669 | -636 | -587 | -526 | -467 | -413 |
| 65 | -461 | -491 | -509 | -516 | -516 | -510 | -519 | -550 |
| 70 | +142 | +81 | +14 | -61 | -142 | -232 | -356 | -516 |
| 71,9 | +247 | +185 | +113 | +31 | -61 | -163 | -299 | -473 |
| 75 | +61 | +15 | -37 | -90 | -150 | -215 | -305 | -424 |
| 80 | -783 | -774 | -744 | -692 | -620 | -535 | -443 | -350 |
| 82,8 | -1022 | -987 | -924 | -832 | -714 | -574 | -414 | -241 |
| 85 | -921 | -877 | -804 | -707 | -584 | -440 | -272 | -81 |
| 90 | -29 | +7 | +46 | +88 | +133 | +183 | +250 | +342 |

Tabelle XXV

(Fortsetzung)

| Jahrtausende vor 1800 n. Chr. | Nördliche Hemisphäre; Sommerhalbjahr | | | | | | | |
|----------------------------------|--------------------------------------|-------|-------|-------|-------|------|------|------|
| | Geographische Breite | | | | | | | |
| | 5° | 15° | 25° | 35° | 45° | 55° | 65° | 75° |
| 94 | +402 | +427 | +443 | +449 | +446 | +441 | +447 | +471 |
| 95 | +378 | +404 | +421 | +430 | +430 | +429 | +439 | +468 |
| 100 | -388 | -385 | -371 | -347 | -312 | -272 | -228 | -185 |
| 105,1 | -1063 | -1089 | -1087 | -1058 | -1007 | -939 | -883 | -851 |
| 110 | -414 | -463 | -504 | -536 | -561 | -585 | -634 | -716 |
| 115 | +380 | +311 | +228 | +133 | +23 | -101 | -262 | -464 |
| 116,1 | +412 | +343 | +261 | +164 | +54 | -73 | -235 | -439 |
| 120 | +1 | -38 | -78 | -120 | -165 | -214 | -283 | -376 |
| 125 | -820 | -782 | -720 | -637 | -530 | -405 | -260 | -96 |
| 127,7 | -962 | -907 | -827 | -717 | -580 | -421 | -233 | -16 |
| 130 | -846 | -786 | -700 | -589 | -454 | -296 | -109 | +113 |
| 135 | -182 | -157 | -127 | -92 | -49 | -2 | +60 | +134 |
| 140 | +194 | +182 | +164 | +139 | +111 | +76 | +36 | -12 |
| 145 | -164 | -193 | -219 | -242 | -264 | -285 | -322 | -378 |
| 150 | -737 | -762 | -767 | -754 | -726 | -687 | -660 | -652 |
| 152,2 | -839 | -855 | -850 | -824 | -778 | -719 | -669 | -633 |
| 155 | -723 | -738 | -733 | -710 | -671 | -619 | -575 | -544 |
| 160 | -82 | -90 | -97 | -101 | -104 | +106 | -113 | -125 |
| 164,3 | +273 | +274 | +267 | +255 | +236 | +212 | +188 | +166 |
| 165 | +266 | +271 | +269 | +260 | +246 | +226 | +210 | +198 |
| 170 | -298 | -262 | -217 | -163 | -99 | -27 | +65 | +177 |
| 175 | -1025 | -978 | -901 | -793 | -660 | -501 | -318 | -111 |
| 176,3 | -1067 | -1026 | -954 | -852 | -724 | -569 | -393 | -199 |
| 180 | -719 | -713 | -685 | -639 | -574 | -496 | -414 | -331 |
| 185 | +301 | +254 | +197 | +130 | +52 | -35 | -148 | +36 |
| 187,5 | +515 | +456 | +380 | +288 | +181 | +57 | -99 | -288 |
| 190 | +331 | +274 | +206 | +126 | +34 | -70 | -204 | -372 |

Tabelle XXV

(Fortsetzung)

| Jahrtausende vor 1800 n. Chr. | Nördliche Hemisphäre; Sommerhalbjahr | | | | | | | |
|----------------------------------|--------------------------------------|-------|-------|-------|------|------|------|------|
| | Geographische Breite | | | | | | | |
| | 5° | 15° | 25° | 35° | 45° | 55° | 65° | 75° |
| 195 | —774 | —796 | —798 | —781 | —747 | —701 | —666 | —650 |
| 198,5 | —1188 | —1181 | —1143 | —1071 | —972 | —850 | —724 | —600 |
| 200 | —1114 | —1103 | —1061 | —988 | —890 | —770 | —642 | —514 |
| 205 | —100 | —83 | —63 | —40 | —13 | +18 | +56 | +105 |
| 209,6 | +508 | +532 | +541 | +540 | +527 | +508 | +500 | +510 |
| 210 | +501 | +526 | +539 | +541 | +531 | +515 | +514 | +530 |
| 215 | —167 | —122 | —70 | —11 | +55 | +129 | +226 | +351 |
| 220 | —1116 | —1077 | —1006 | —905 | —775 | —619 | —444 | —251 |
| 220,8 | —1122 | —1092 | —1031 | —936 | —816 | —672 | —510 | —337 |
| 225 | —555 | —591 | —609 | —615 | —611 | —599 | —605 | —634 |
| 230 | +315 | +230 | +134 | +27 | —94 | —229 | —410 | —640 |
| 232,4 | +344 | +264 | +170 | +64 | —55 | —190 | —367 | —592 |
| 235 | +37 | —25 | —91 | —160 | —234 | —317 | —432 | —585 |
| 240 | —673 | —691 | —692 | —674 | —642 | —600 | —567 | —547 |
| 242,2 | —768 | —759 | —729 | —679 | —610 | —526 | —436 | —346 |
| 245 | —679 | —656 | —615 | —554 | —476 | —382 | —276 | —160 |
| 250 | —279 | —229 | —169 | —99 | —18 | +72 | +190 | +337 |
| 255 | —98 | —68 | —35 | +2 | +43 | +88 | +150 | +229 |
| 256,5 | —94 | —74 | —51 | —25 | +5 | +38 | +82 | +138 |
| 260 | —161 | —160 | —157 | —149 | —137 | —122 | —107 | —94 |
| 265 | —389 | —400 | —402 | —394 | —378 | —356 | —339 | —332 |
| 270 | —643 | —666 | —673 | —664 | —643 | —612 | —593 | —592 |
| 270,7 | —661 | —686 | —693 | —684 | —661 | —630 | —609 | —608 |
| 275 | —454 | —491 | —518 | —534 | —542 | —547 | —571 | —621 |
| 280 | +126 | +84 | +37 | —16 | —74 | —139 | —226 | —339 |
| 281,8 | +210 | +176 | +134 | +86 | +30 | —43 | —115 | —216 |
| 285 | +10 | +1 | —10 | —21 | —33 | 46 | —64 | —88 |

Tabelle XXV

(Fortsetzung)

| Jahrtausende vor 1800 n. Chr. | Südliche Hemisphäre; Sommerhalbjahr | | | | | | | |
|----------------------------------|-------------------------------------|------|------|------|------|------|------|------|
| | Geographische Breite | | | | | | | |
| | 5° | 15° | 25° | 35° | 45° | 55° | 65° | 75° |
| 290 | —799 | —756 | —691 | —601 | —489 | —360 | —205 | —30 |
| 292,7 | —989 | —931 | —846 | —731 | —589 | —424 | —228 | —2 |
| 295 | —855 | —794 | —710 | —601 | —467 | —311 | —123 | +98 |
| 300 | +19 | +45 | +71 | +98 | +126 | +156 | +199 | +259 |
| 303,1 | +337 | +327 | +307 | +276 | +238 | +192 | +141 | +84 |
| 305 | +244 | +215 | +176 | +131 | +77 | +17 | —60 | —154 |
| 310 | —611 | —650 | —674 | —683 | —680 | —671 | —682 | —719 |
| 313,4 | —921 | —946 | —948 | —926 | —885 | —830 | —787 | —764 |
| 315 | —832 | —860 | —864 | —849 | —816 | —770 | —739 | —728 |
| 320 | —34 | —78 | —122 | —167 | —215 | —267 | —343 | —444 |
| 323,3 | +206 | +172 | +130 | +81 | +26 | —37 | —118 | —219 |
| 325 | +105 | +83 | +57 | +26 | —8 | —46 | —98 | —161 |
| 330 | —98 | —72 | —42 | —9 | +27 | +69 | +124 | +195 |
| 332,8 | —766 | —719 | —650 | —557 | —443 | —311 | —153 | +30 |
| 335 | —647 | —606 | —547 | —468 | —370 | —257 | —122 | +35 |
| 340 | —85 | —82 | —77 | —71 | —61 | —51 | —38 | —25 |
| 342,1 | +9 | +1 | —8 | —19 | —29 | —41 | —57 | —79 |
| 345 | —151 | —165 | —178 | —186 | —191 | —196 | —208 | —230 |
| 350 | —614 | —635 | —640 | —630 | —607 | —575 | —554 | —548 |
| 350,9 | —636 | —657 | —662 | —650 | —625 | —591 | —568 | —561 |
| 355 | —358 | —390 | —415 | —431 | —441 | —449 | —473 | —519 |
| 359,9 | +47 | +19 | —10 | —43 | —79 | —118 | —172 | —242 |
| 360 | +49 | +21 | —9 | —40 | —76 | —115 | —169 | —240 |
| 365 | —368 | —355 | —331 | —297 | —254 | —203 | —143 | —77 |

Tabelle XXV

(Fortsetzung)

| Jahrtausende vor 1800 n. Chr. | Südliche Hemisphäre; Sommerhalbjahr | | | | | | | |
|----------------------------------|-------------------------------------|------|------|------|------|------|------|------|
| | Geographische Breite | | | | | | | |
| | 5° | 15° | 25° | 35° | 45° | 55° | 65° | 75° |
| 369,6 | −757 | −712 | −645 | −556 | −447 | −319 | −166 | +8 |
| 370 | −756 | −710 | −641 | −551 | −439 | −309 | −153 | +26 |
| 375 | −308 | −269 | −221 | −162 | −94 | −15 | +83 | +204 |
| 379,7 | +65 | +75 | +84 | +91 | +98 | +104 | +116 | +134 |
| 380 | +64 | +72 | +80 | +86 | +92 | +98 | +107 | +123 |
| 385 | −362 | −379 | −386 | −386 | −378 | −366 | −362 | −372 |
| 389,6 | −655 | −683 | −694 | −689 | −670 | −642 | −628 | −635 |
| 390 | −649 | −679 | −692 | −690 | −674 | −650 | −642 | −655 |
| 395 | −246 | −289 | −328 | −363 | −395 | −428 | −483 | −566 |
| 399,2 | −57 | −101 | −147 | −192 | −240 | −291 | −366 | −469 |
| 400 | −74 | −117 | −160 | −203 | −247 | −295 | −366 | −463 |
| 405 | −425 | −429 | −422 | −403 | −374 | −338 | −304 | −274 |
| 407,7 | −494 | −475 | −440 | −394 | −333 | −262 | −180 | −89 |
| 410 | −432 | −397 | −348 | −287 | −213 | −128 | −22 | +102 |
| 415 | −198 | −151 | −97 | −36 | +33 | +110 | +213 | +342 |
| 415,5 | −191 | −145 | −92 | −33 | +34 | +110 | +209 | +336 |
| 420 | −408 | −364 | −307 | −237 | −154 | −59 | +58 | +202 |
| 424 | −609 | −585 | −544 | −485 | −412 | −324 | −223 | −111 |
| 425 | −607 | −590 | −556 | −505 | −438 | −359 | −271 | −176 |
| 430 | −152 | −191 | −227 | −262 | −295 | −332 | −387 | −469 |
| 433,6 | +145 | +79 | +7 | −73 | −160 | −256 | −388 | −561 |
| 435 | +140 | +72 | −3 | −86 | −175 | −275 | −411 | −588 |
| 440 | −536 | −571 | −593 | −602 | −601 | −595 | −607 | −643 |

Tabelle XXV

(Fortsetzung)

| Jahrtausende vor 1800 n. Chr. | Südliche Hemisphäre; Sommerhalbjahr | | | | | | | |
|----------------------------------|-------------------------------------|-------|-------|------|------|------|------|------|
| | Geographische Breite | | | | | | | |
| | 5° | 15° | 25° | 35° | 45° | 55° | 65° | 75° |
| 444 | —915 | —924 | —908 | —870 | —809 | —733 | —661 | —600 |
| 445 | —907 | —906 | —881 | —833 | —762 | —674 | —587 | —509 |
| 450 | —110 | —103 | —91 | —78 | —61 | —41 | —17 | +10 |
| 454,8 | +400 | +419 | +428 | +428 | +419 | +406 | +402 | +412 |
| 455 | +399 | +419 | +430 | +431 | +423 | +412 | +410 | +423 |
| 460 | —175 | —149 | —117 | —80 | —37 | +12 | +74 | +153 |
| 465 | —1139 | —1113 | —1053 | —960 | —840 | —697 | —537 | —367 |
| 465,4 | —1147 | —1120 | —1061 | —970 | —851 | —708 | —749 | —381 |
| 470 | —385 | —395 | —397 | —387 | —370 | —347 | —329 | —320 |
| 475 | +474 | +422 | +356 | +273 | +178 | +68 | —72 | —239 |
| 475,6 | +485 | +432 | +364 | +280 | +181 | +68 | —74 | —246 |
| 480 | —130 | —169 | —206 | —243 | —278 | —316 | —374 | —457 |
| 485 | —1023 | —1021 | —990 | —932 | —848 | —746 | —642 | —541 |
| 486,1 | —1023 | —1015 | —978 | —913 | —825 | —717 | —603 | —490 |
| 490 | —590 | —577 | —547 | —500 | —438 | —366 | —284 | —198 |
| 495 | +98 | +112 | +123 | +133 | +141 | +149 | +164 | +188 |
| 497,1 | +130 | +146 | +158 | +169 | +177 | +184 | +199 | +224 |
| 500 | —49 | —24 | +3 | +33 | +66 | +101 | +151 | +215 |
| 505 | —544 | —516 | —474 | —415 | —341 | —255 | —154 | —38 |
| 508,2 | —612 | —606 | —583 | —544 | —490 | —425 | —356 | —287 |
| 510 | —544 | —554 | —550 | —531 | —499 | —460 | —425 | —400 |
| 515 | —357 | —394 | —422 | —443 | —457 | —469 | —501 | —556 |
| 520 | —264 | —295 | —319 | —339 | —353 | —367 | —397 | —447 |

Tabelle XXV

(Fortsetzung)

| Jahrtausende vor 1800 n. Chr. | Südliche Hemisphäre; Sommerhalbjahr | | | | | | | |
|----------------------------------|-------------------------------------|-------|-------|-------|-------|------|------|------|
| | Geographische Breite | | | | | | | |
| | 5° | 15° | 25° | 35° | 45° | 55° | 65° | 75° |
| 525 | —103 | —127 | —151 | —173 | —193 | —215 | —249 | —299 |
| 525,3 | —96 | —120 | —142 | —162 | —182 | —203 | —236 | —284 |
| 530 | —142 | —142 | —138 | —130 | —118 | —105 | —90 | —76 |
| 535 | —668 | —626 | —564 | —483 | —383 | —267 | —128 | +34 |
| 537,8 | —869 | —829 | —762 | —671 | —556 | —421 | —264 | —86 |
| 540 | —820 | —784 | —727 | —646 | —543 | —422 | —281 | —125 |
| 545 | +3 | —5 | —14 | —23 | —32 | —43 | —59 | —79 |
| 548,6 | +439 | +408 | +363 | +306 | +236 | +155 | +57 | —59 |
| 550 | +403 | +368 | +320 | +260 | +188 | +106 | +5 | —117 |
| 555 | —609 | —629 | —634 | —624 | —599 | —567 | —545 | —539 |
| 559 | —1216 | —1219 | —1188 | —1124 | —1036 | —923 | —810 | —707 |
| 560 | —1195 | —1199 | —1170 | —1110 | —1022 | —914 | —804 | —705 |
| 565 | —92 | —113 | —132 | —150 | —167 | —185 | —213 | —256 |
| 569,4 | +622 | +603 | +566 | +511 | +440 | +356 | +262 | +158 |
| 570 | +606 | +590 | +557 | +508 | +442 | +365 | +278 | +186 |
| 575 | —481 | —443 | —390 | —323 | —242 | —149 | —34 | +102 |
| 579,7 | —1233 | —1164 | —1061 | —920 | —747 | —543 | —301 | —26 |
| 580 | —1227 | —1159 | —1054 | —913 | —740 | —536 | —295 | —19 |
| 585 | —341 | —318 | —285 | —242 | —190 | —129 | —55 | +30 |
| 590 | +433 | +387 | +326 | +252 | +165 | +65 | —61 | —212 |
| 590,3 | +430 | +382 | +321 | +246 | +157 | +56 | —71 | —225 |
| 595 | —259 | —304 | —344 | —380 | —412 | —446 | —501 | —586 |
| 600 | —837 | —863 | —867 | —849 | —814 | —766 | —731 | —717 |

Tabelle XXV

(Fortsetzung)

| Jahrtausende vor 1800 n. Chr. | Südliche Hemisphäre; Winterhalbjahr | | | | | | | |
|----------------------------------|-------------------------------------|------|------|------|------|------|------|------|
| | Geographische Breite | | | | | | | |
| | 5° | 15° | 25° | 35° | 45° | 55° | 65° | 75° |
| 0,6 | —11 | —13 | —15 | —15 | —15 | —13 | —11 | —4 |
| 5 | +208 | +182 | +148 | +114 | —81 | +52 | +40 | +48 |
| 10 | +638 | +586 | +522 | +444 | +359 | +272 | +203 | +157 |
| 11,1 | +664 | +617 | +553 | +477 | +389 | +300 | +222 | +165 |
| 15 | +480 | +451 | +410 | +359 | +299 | +235 | +173 | +121 |
| 20 | +82 | +110 | +132 | +147 | +151 | +141 | +102 | +29 |
| 22,1 | +79 | +127 | +166 | +194 | +209 | +199 | +143 | +33 |
| 25 | +243 | +297 | +334 | +356 | +356 | +324 | +235 | +79 |
| 30 | +691 | +722 | +726 | +702 | +648 | +556 | +407 | +193 |
| 32,7 | +711 | +734 | +729 | +698 | +638 | +544 | +397 | +196 |
| 35 | +637 | +656 | +650 | +620 | +565 | +481 | +352 | +175 |
| 40 | +322 | +323 | +313 | +292 | +260 | +217 | +160 | +87 |
| 45 | +72 | +38 | +6 | —23 | —45 | —55 | —39 | +11 |
| 47,1 | +56 | +25 | —5 | —31 | —50 | —59 | —41 | +7 |
| 50 | +99 | +70 | +40 | +13 | —11 | —25 | —17 | +19 |
| 55 | +397 | +387 | +364 | +331 | +286 | +234 | +172 | +103 |
| 60 | +717 | +715 | +688 | +639 | +566 | +471 | +346 | +191 |
| 60,6 | +734 | +732 | +707 | +657 | +583 | +486 | +357 | +196 |
| 65 | +558 | +578 | +578 | +555 | +509 | +436 | +318 | +155 |
| 70 | —17 | +32 | +75 | +111 | +133 | +137 | +98 | +8 |
| 71,9 | —126 | —76 | —27 | +17 | +53 | +70 | +49 | —21 |
| 75 | +38 | +75 | +107 | +130 | +144 | +139 | +99 | +20 |
| 80 | +816 | +804 | +767 | +705 | +618 | +509 | +375 | +215 |
| 82,8 | +1016 | +982 | +920 | +829 | +715 | +578 | +426 | +263 |
| 85 | +886 | +845 | +779 | +693 | +587 | +468 | +345 | +226 |
| 90 | —50 | —79 | —102 | —119 | —128 | —122 | —87 | —20 |
| 94 | —485 | —502 | —501 | —482 | —440 | —377 | —276 | —133 |

Tabelle XXV
(Fortsetzung)

| Jahrtausende vor 1800 n. Chr. | Südliche Hemisphäre; Winterhalbjahr | | | | | | | |
|----------------------------------|-------------------------------------|-------|-------|-------|------|------|------|------|
| | Geographische Breite | | | | | | | |
| | 5° | 15° | 25° | 35° | 45° | 55° | 65° | 75° |
| 95 | —461 | —480 | —481 | —463 | —425 | —365 | —266 | —128 |
| 100 | +408 | +403 | +384 | +354 | +311 | +257 | +189 | +107 |
| 105,1 | +1193 | +1207 | +1179 | +1110 | +998 | +840 | +615 | +323 |
| 110 | +551 | +588 | +601 | +591 | +552 | +480 | +350 | +157 |
| 115 | —253 | —196 | —138 | —83 | —32 | +4 | —1 | —53 |
| 116,1 | —289 | —232 | —174 | —115 | —62 | —21 | —19 | —61 |
| 120 | +84 | +115 | +138 | +154 | +159 | +149 | +107 | +30 |
| 125 | +793 | +758 | +702 | +626 | +532 | +425 | +315 | +203 |
| 127,7 | +910 | +859 | +790 | +696 | +584 | +461 | +342 | +231 |
| 130 | +771 | +718 | +647 | +559 | +459 | +355 | +264 | +193 |
| 135 | +141 | +120 | +98 | +75 | +51 | +33 | +25 | +32 |
| 140 | —180 | —169 | —154 | —134 | —111 | —87 | —65 | —45 |
| 145 | +240 | +261 | +272 | +272 | +259 | +227 | +165 | +69 |
| 150 | +841 | +856 | +841 | +795 | +719 | +607 | +445 | +228 |
| 152,2 | +932 | +940 | +916 | +861 | +772 | +648 | +475 | +251 |
| 155 | +804 | +811 | +790 | +742 | +665 | +558 | +409 | +217 |
| 160 | +106 | +111 | +113 | +110 | +102 | +88 | +65 | +30 |
| 164,3 | —294 | —293 | —283 | —263 | —234 | —195 | —143 | —78 |
| 165 | —296 | —297 | —290 | —272 | —244 | —204 | —150 | —79 |
| 170 | +240 | +210 | +176 | +140 | +103 | +71 | +53 | +57 |
| 175 | +990 | +946 | +876 | +779 | +662 | +528 | +391 | +255 |
| 176,3 | +1049 | +1010 | +942 | +845 | +725 | +583 | +430 | +271 |
| 180 | +752 | +742 | +708 | +651 | +572 | +471 | +346 | +198 |
| 185 | —219 | —179 | —139 | —98 | —58 | —28 | —23 | —49 |
| 187,5 | —420 | —370 | —313 | —250 | —187 | —130 | —98 | —99 |
| 190 | —228 | —181 | —132 | —85 | —41 | —9 | —10 | —49 |
| 195 | +876 | +888 | +870 | +821 | +740 | +624 | +457 | +238 |

Tabelle XXV

(Fortsetzung)

| Jahrtausende vor 1880 n. Chr. | Südliche Hemisphäre; Winterhalbjahr | | | | | | | |
|----------------------------------|-------------------------------------|-------|-------|-------|------|------|------|------|
| | Geographische Breite | | | | | | | |
| | 5° | 15° | 25° | 35° | 45° | 55° | 65° | 75° |
| 198,5 | +1254 | +1241 | +1189 | +1097 | +967 | +800 | +587 | +332 |
| 200 | +1165 | +1149 | +1097 | +1008 | +887 | +731 | +537 | +307 |
| 205 | +70 | +55 | +42 | +28 | +15 | +5 | +5 | +16 |
| 209,6 | -593 | -609 | -602 | -574 | -522 | -443 | -324 | -162 |
| 210 | -591 | -608 | -603 | -576 | -525 | -446 | -327 | -163 |
| 215 | +78 | +41 | +7 | -25 | -49 | -60 | -42 | +12 |
| 220 | +1107 | +1069 | +1000 | +901 | +775 | +626 | +462 | +287 |
| 220,8 | +1132 | +1101 | +1038 | +940 | +815 | +664 | +489 | +295 |
| 225 | +665 | +691 | +687 | +659 | +604 | +514 | +376 | +184 |
| 230 | -152 | -83 | -19 | +38 | +83 | +104 | +73 | -23 |
| 232,4 | -190 | -124 | -61 | -3 | +45 | +72 | +49 | -34 |
| 235 | +97 | +146 | +186 | +214 | +225 | +214 | +154 | +39 |
| 240 | +758 | +768 | +751 | +708 | +637 | +536 | +392 | +205 |
| 242,2 | +801 | +789 | +752 | +692 | +607 | +501 | +368 | +211 |
| 245 | +675 | +653 | +612 | +552 | +476 | +385 | +284 | +175 |
| 250 | +187 | +146 | +103 | +62 | +25 | -2 | +1 | +39 |
| 255 | +40 | +16 | -6 | -25 | -39 | -44 | -32 | +5 |
| 256,5 | +57 | +41 | +25 | +10 | +2 | -10 | -7 | +11 |
| 260 | +172 | +171 | +165 | +154 | +136 | +113 | +83 | +45 |
| 265 | +441 | +447 | +438 | +414 | +374 | +316 | +231 | +120 |
| 270 | +739 | +753 | +741 | +702 | +636 | +538 | +395 | +201 |
| 270,7 | +760 | +775 | +763 | +723 | +655 | +554 | +406 | +207 |
| 275 | +567 | +594 | +599 | +579 | +535 | +460 | +336 | +158 |
| 280 | -42 | -8 | +23 | +49 | +68 | +75 | +53 | -2 |
| 281,8 | -149 | -120 | -90 | -62 | -34 | -4 | -11 | -33 |
| 285 | +10 | +18 | +24 | +29 | +31 | +30 | +21 | +5 |
| 290 | +759 | +720 | +662 | +585 | +492 | +390 | +288 | +193 |

Tabelle XXV

(Fortsetzung)

| Jahrtausende vor 1800 n. Chr. | Südliche Hemisphäre; Winterhalbjahr | | | | | | | |
|----------------------------------|-------------------------------------|-------|-------|------|------|------|------|------|
| | Geographische Breite | | | | | | | |
| | 5° | 15° | 25° | 35° | 45° | 55° | 65° | 75° |
| 292,7 | +931 | +879 | +805 | +708 | +593 | +468 | +346 | +236 |
| 295 | +783 | +729 | +659 | +572 | +472 | +366 | +272 | +196 |
| 300 | -77 | -97 | -112 | -121 | -122 | -112 | -81 | -25 |
| 303,1 | -336 | -326 | -306 | -276 | -238 | -193 | -142 | -87 |
| 305 | -195 | -170 | -142 | -111 | -81 | -55 | -42 | -46 |
| 310 | +738 | +764 | +764 | +733 | +672 | +574 | +420 | +204 |
| 313,4 | +1040 | +1054 | +1032 | +974 | +877 | +739 | +541 | +280 |
| 315 | +948 | +964 | +946 | +895 | +808 | +682 | +500 | +258 |
| 320 | +132 | +167 | +192 | +206 | +208 | +192 | +139 | +44 |
| 323,3 | -144 | -116 | -87 | -57 | -30 | -10 | -10 | -32 |
| 325 | -63 | -44 | -27 | -9 | +5 | +14 | +10 | -12 |
| 330 | +48 | +27 | +7 | -10 | -24 | -31 | -22 | +7 |
| 332,8 | +714 | +672 | +613 | +536 | +447 | +351 | +260 | +187 |
| 335 | +602 | +565 | +514 | +450 | +373 | +292 | +217 | +152 |
| 340 | +86 | +83 | +78 | +71 | +61 | +50 | +37 | +22 |
| 342,1 | +9 | +16 | +21 | +26 | +28 | +27 | +19 | +4 |
| 345 | +195 | +204 | +208 | +203 | +188 | +163 | +118 | +54 |
| 350 | +702 | +714 | +702 | +665 | +601 | +508 | +372 | +191 |
| 350,9 | +725 | +738 | +725 | +686 | +619 | +523 | +383 | +197 |
| 355 | +454 | +478 | +483 | +469 | +435 | +375 | +274 | +127 |
| 359,9 | +11 | +33 | +51 | +66 | +75 | +74 | +53 | +8 |
| 360 | +8 | +30 | +49 | +63 | +72 | +71 | +51 | +8 |
| 365 | +364 | +352 | +328 | +296 | +254 | +206 | +151 | +94 |
| 369,6 | +710 | +670 | +613 | +538 | +450 | +355 | +262 | +180 |

Tabelle XXV

(Fortsetzung)

| Jahrtausende vor 1800 n. Chr. | Südliche Hemisphäre; Winterhalbjahr | | | | | | | |
|----------------------------------|-------------------------------------|------|------|------|------|------|------|------|
| | Geographische Breite | | | | | | | |
| | 5° | 15° | 25° | 35° | 45° | 55° | 65° | 75° |
| 370 | +706 | +664 | +606 | +531 | +442 | +348 | +257 | +178 |
| 375 | +244 | +211 | +175 | +137 | +98 | +64 | +50 | +57 |
| 379,7 | -92 | -99 | -102 | -102 | -96 | -84 | -61 | -27 |
| 380 | -88 | -94 | -97 | -96 | -90 | -79 | -57 | -25 |
| 385 | +425 | +435 | +431 | +411 | +374 | +318 | +233 | +117 |
| 389,6 | +760 | +778 | +769 | +731 | +663 | +562 | +411 | +208 |
| 390 | +759 | +778 | +769 | +733 | +667 | +566 | +415 | +208 |
| 395 | +359 | +392 | +409 | +408 | +388 | +341 | +248 | +104 |
| 399,2 | +160 | +194 | +219 | +232 | +233 | +212 | +154 | +52 |
| 400 | +174 | +208 | +231 | +243 | +241 | +218 | +159 | +55 |
| 405 | +462 | +463 | +448 | +417 | +372 | +310 | +227 | +124 |
| 407,7 | +485 | +467 | +434 | +390 | +333 | +269 | +198 | +125 |
| 410 | +384 | +353 | +314 | +268 | +216 | +165 | +122 | +94 |
| 415 | +109 | +70 | +34 | +1 | -27 | -42 | -29 | +20 |
| 415,5 | +104 | +66 | +31 | -1 | -28 | -43 | -29 | +18 |
| 420 | +339 | +301 | +258 | +209 | +159 | +113 | +85 | +81 |
| 424 | +598 | +576 | +536 | +481 | +412 | +332 | +245 | +154 |
| 425 | +611 | +593 | +559 | +506 | +438 | +356 | +263 | +159 |
| 430 | +249 | +278 | +296 | +301 | +289 | +258 | +187 | +74 |
| 433,6 | -9 | +43 | +89 | +127 | +151 | +153 | +109 | +11 |
| 435 | +1 | +56 | +103 | +142 | +166 | +167 | +119 | +14 |
| 440 | +649 | +674 | +674 | +647 | +594 | +508 | +372 | +180 |
| 444 | +997 | +998 | +966 | +902 | +804 | +671 | +492 | +267 |

Tabelle XXV

(Fortsetzung)

| Jahrtausende vor 1800 n. Chr. | Südliche Hemisphäre; Winterhalbjahr | | | | | | | |
|----------------------------------|-------------------------------------|-------|-------|------|------|------|------|------|
| | Geographische Breite | | | | | | | |
| | 5° | 15° | 25° | 35° | 45° | 55° | 65° | 75° |
| 445 | +968 | +961 | +924 | +857 | +758 | +628 | +461 | +262 |
| 450 | +101 | +95 | +85 | +74 | +61 | +48 | +35 | +26 |
| 454,8 | —469 | —482 | —477 | —456 | —414 | —353 | —258 | —129 |
| 455 | —471 | —485 | —481 | —460 | —419 | —357 | —261 | —129 |
| 460 | +130 | +109 | +86 | +63 | +40 | +22 | +18 | +29 |
| 465 | +1155 | +1127 | +1064 | +966 | +839 | +681 | +503 | +302 |
| 465,4 | +1165 | +1137 | +1077 | +978 | +849 | +694 | +510 | +304 |
| 470 | +435 | +440 | +432 | +407 | +367 | +309 | +227 | +118 |
| 475 | —392 | —348 | —298 | —241 | —183 | —130 | —98 | —94 |
| 475,6 | —401 | —356 | —304 | —247 | —188 | —132 | —99 | —95 |
| 480 | +226 | +256 | +274 | +281 | +271 | +243 | +176 | +68 |
| 485 | +1085 | +1077 | +1034 | +956 | +844 | +699 | +513 | +288 |
| 486,1 | +1074 | +1061 | +1014 | +933 | +822 | +679 | +498 | +283 |
| 490 | +600 | +586 | +554 | +504 | +438 | +358 | +263 | +157 |
| 495 | —135 | —146 | —149 | —148 | —138 | —121 | —88 | —38 |
| 497,1 | —173 | —185 | —189 | —186 | —174 | —151 | —110 | —49 |
| 500 | —3 | —23 | —40 | —53 | —62 | —62 | —44 | —6 |
| 505 | +521 | +495 | +457 | +406 | +342 | +272 | +202 | +132 |
| 508,2 | +640 | +632 | +604 | +556 | +488 | +403 | +296 | +169 |
| 510 | +602 | +607 | +591 | +554 | +495 | +415 | +305 | +163 |
| 515 | +462 | +489 | +496 | +484 | +450 | +389 | +285 | +131 |
| 520 | +350 | +372 | +380 | +373 | +348 | +302 | +221 | +99 |
| 525 | +165 | +183 | +194 | +197 | +189 | +168 | +121 | +48 |

Tabelle XXV

(Fortsetzung)

| Jahrtausende vor 1800 n. Chr. | Südliche Hemisphäre; Winterhalbjahr | | | | | | | |
|----------------------------------|-------------------------------------|-------|-------|-------|-------|------|------|------|
| | Geographische Breite | | | | | | | |
| | 5° | 15° | 25° | 35° | 45° | 55° | 65° | 75° |
| 525,3 | +154 | +173 | +183 | +185 | +178 | +158 | +115 | +46 |
| 530 | +151 | +150 | +144 | +134 | +118 | +98 | +72 | +40 |
| 535 | +621 | +584 | +531 | +464 | +386 | +303 | +225 | +157 |
| 537,8 | +838 | +800 | +740 | +658 | +558 | +445 | +329 | +214 |
| 540 | +800 | +766 | +713 | +638 | +544 | +438 | +322 | +205 |
| 545 | +15 | +21 | +27 | +30 | +31 | +30 | +22 | +6 |
| 548,6 | —400 | —373 | —336 | —291 | —239 | —185 | —137 | —100 |
| 550 | —353 | —322 | —285 | —240 | —191 | —145 | —108 | —87 |
| 555 | +695 | +707 | +695 | +658 | +594 | +501 | +367 | +189 |
| 559 | +1305 | +1299 | +1251 | +1159 | +1030 | +855 | +627 | +347 |
| 560 | +1284 | +1280 | +1233 | +1146 | +1016 | +845 | +620 | +342 |
| 565 | +144 | +160 | +169 | +171 | +164 | +145 | +105 | +43 |
| 569,4 | —621 | —602 | —565 | —511 | —440 | —357 | —263 | —161 |
| 570 | —613 | —596 | —562 | —510 | —442 | —360 | —265 | —160 |
| 575 | +430 | +397 | +354 | +302 | +246 | +188 | +140 | +107 |
| 579,7 | +1167 | +1104 | +1014 | +893 | +751 | +594 | +438 | +296 |
| 580 | +1159 | +1097 | +1007 | +887 | +744 | +588 | +435 | +294 |
| 585 | +314 | +294 | +266 | +232 | +191 | +150 | +111 | +78 |
| 590 | —360 | —320 | —275 | —223 | —169 | —121 | —91 | —86 |
| 590,3 | —354 | —313 | —267 | —216 | —162 | —114 | —86 | —84 |
| 595 | +376 | +410 | +427 | +426 | +404 | +356 | +258 | +109 |
| 600 | +950 | +966 | +946 | +894 | +807 | +680 | +498 | +258 |

Tabelle XXVI

Säkulare Verlagerungen des kalorischen Äquators

| Jahrtausende vor 1800 n. Chr | Geograph. Breite des kalor. Äquators | Jahrtausende vor 1800 n. Chr | Geograph. Breite des kalor. Äquators | Jahrtausende vor 1800 n. Chr | Geograph. Breite des kalor. Äquators |
|------------------------------------|---|------------------------------------|---|------------------------------------|---|
| 0 | +3° 2' | 70 | +4° 11' | 145 | +1° 24' |
| 0,6 | +3° 5' | 71,9 | +5° 11' | 150 | —4° 5' |
| 5 | +0° 46' | 75 | +3° 28' | 152,3 | —4° 59' |
| 10 | —3° 10' | 80 | —4° 12' | 155 | —3° 51' |
| 11,1 | —3° 21' | 82,8 | —6° 10' | 160 | +2° 15' |
| 15 | —1° 31' | 85 | —5° 8' | 164,3 | +5° 30' |
| 20 | +2° 53' | 90 | +2° 54' | 165 | +5° 27' |
| 22,1 | +3° 20' | 94 | +6° 40' | 170 | +0° 29' |
| 25 | +1° 57' | 95 | +6° 27' | 175 | —6° 4' |
| 30 | —2° 29' | 100 | —0° 32' | 176,3 | —6° 31' |
| 32,7 | —2° 48' | 100 | —7° 16' | 180 | —3° 37' |
| 35 | —2° 12' | 110 | —1° 8' | 185 | +5° 43' |
| 40 | +0° 18' | 115 | +6° 27' | 187,5 | +7° 41' |
| 45 | +1° 48' | 116,1 | +6° 44' | 190 | +5° 59' |
| 47,1 | +1° 59' | 120 | +2° 55' | 195 | —4° 25' |
| 50 | +1° 39' | 125 | —4° 16' | 198,5 | —8° 4' |
| 55 | —0° 32' | 127,7 | —5° 26' | 200 | —7° 18' |
| 60 | —3° 12' | 130 | —4° 18' | 205 | +2° 11' |
| 60,6 | —3° 21' | 135 | +1° 29' | 209,4 | +7° 35' |
| 65 | —1° 27' | 140 | +4° 47' | 210 | +7° 31' |

Tabelle XXVI

(Forsetzung)

| Jahrtausende vor 1800 n. Chr. | Geograph. Breite des kalor. Aequators | Jahrtausende vor 1800 n. Chr. | Geograph. Breite des kalor. Aequators | Jahrtausende vor 1800 n. Chr. | Geograph. Breite des kalor. Aequators |
|-------------------------------------|--|-------------------------------------|--|-------------------------------------|--|
| 215 | +1° 42' | 285 | +3° 6' | 350,9 | —3° 4' |
| 220 | —7° 0' | 290 | —4° 2' | 355 | —0° 29' |
| 220,8 | —7° 9' | 292,7 | —5° 38' | 359,9 | +3° 23' |
| 225 | —2° 25' | 295 | —4° 24' | 360 | +3° 24' |
| 230 | +5° 48' | 300 | +3° 18' | 365 | —0° 18' |
| 232,4 | +6° 5' | 303,1 | +6° 5' | 369,6 | —3° 38' |
| 235 | +3° 11' | 305 | +5° 13' | 370 | —3° 37' |
| 240 | —3° 24' | 310 | —2° 59' | 375 | +0° 25' |
| 242,2 | —4° 3' | 313,4 | —5° 52' | 379,7 | +3° 40' |
| 245 | —3° 6' | 315 | —5° 2' | 380 | +3° 39' |
| 250 | +0° 44' | 320 | +2° 34' | 385 | —0° 25' |
| 255 | +2° 15' | 323,3 | +4° 51' | 389,6 | —3° 19' |
| 256,5 | +2° 15' | 325 | +3° 57' | 390 | —3° 16' |
| 260 | +1° 34' | 330 | +2° 15' | 395 | +0° 32' |
| 265 | —0° 38' | 332,8 | —3° 42' | 399,2 | +2° 21' |
| 270 | —3° 9' | 335 | —2° 40' | 400 | +2° 11' |
| 270,7 | —3° 21' | 340 | +2° 16' | 405 | —0° 56' |
| 275 | —1° 26' | 342,1 | +3° 6' | 407,7 | —1° 24' |
| 280 | +4° 5' | 345 | +1° 35' | 410 | —0° 44' |
| 281,8 | +4° 53' | 350 | —2° 52' | 415 | +1° 26' |

Tabelle XXVI

(Fortsetzung)

| Jahrtausende vor 1800 n. Chr. | Geograph. Breite des kalor. Aequators | Jahrtausende vor 1800 n. Chr. | Geograph. Breite des kalor. Aequators | Jahrtausende vor 1800 n. Chr. | Geograph. Breite des kalor. Aequators |
|-------------------------------------|--|-------------------------------------|--|-------------------------------------|--|
| 415,5 | +1° 29' | 475,6 | +7° 25' | 540 | —4° 18' |
| 420 | —0° 28' | 480 | +1° 40' | 545 | +3° 2' |
| 424 | —2° 27' | 485 | —6° 32' | 548,6 | +7° 0' |
| 425 | —2° 29' | 486,1 | —6° 28' | 550 | +6° 39' |
| 430 | +1° 28' | 490 | —2° 21' | 555 | —2° 48' |
| 433,6 | +4° 12' | 495 | +3° 58' | 559 | —8° 27' |
| 435 | +4° 9' | 497,1 | +4° 16' | 560 | —8° 16' |
| 440 | —2° 13' | 500 | +2° 41' | 565 | +2° 7' |
| 444 | —5° 38' | 505 | —1° 49' | 569,4 | +8° 37' |
| 445 | —5° 28' | 508,2 | —2° 37' | 570 | +8° 28' |
| 450 | +2° 4' | 510 | —2° 6' | 575 | —1° 10' |
| 454,8 | +6° 39' | 515 | —0° 30' | 579,7 | —7° 44' |
| 455 | +6° 38' | 520 | +0° 26' | 580 | —7° 40' |
| 460 | +1° 33' | 525 | +1° 59' | 585 | +0° 1' |
| 465 | —7° 21' | 525,3 | +2° 4' | 590 | +6° 56' |
| 465,4 | —7° 26' | 530 | +1° 44' | 590,3 | +6° 55' |
| 470 | —0° 36' | 535 | —2° 51' | 595 | +0° 24' |
| 475 | +7° 19' | 537,8 | —4° 42' | 600 | —5° 4' |

KAPITEL XXI

Die Strahlungskurven als Grundlage der Chronologie und der Vollgliederung des Eiszeitalters

§ 116. Die Strahlungskurven und ihre erste Anwendung. Durch die Ergebnisse der Kapitel XV und XX wurde der Verlauf der Erdbestahlung während des Zeitintervalles der letztverflossenen 600 Jahrtausende analytisch erfasst und numerisch dargestellt. Es unterliegt keinem Zweifel, dass dieser Bestahlungsgang so verlaufen ist wie vorstehend geschildert, sind doch zu seiner Erfassung keine Hypothesen erforderlich gewesen, sondern nur anerkannte und wohlerprobte Lehren der astronomischen Wissenschaft. Aus diesem Grunde kann ich, und darin stimmt A. Penck mit mir überein, die vorstehenden Rechnungsergebnisse als den Kanon der Erdbestahlung bezeichnen.

Mit diesem Kanon kann an die Erforschung des Eiszeitenphänomens geschritten werden. Dabei stehen uns zwei Wege zur Verfügung. Der erste derselben führt, wie der bisher gegangene, über das Gebiet der exakten Wissenschaften. Die im fünften Abschnitt dieses Buches mitgeteilten Lehren dieser Wissenschaft ermöglichen, den dem säkularen Bestahlungsgang zugehörigen Temperaturgang rechnerisch zu ermitteln und auf diese Weise die dadurch verursachten vorzeitlichen Aenderungen des Erdklimas mathematisch zu beschreiben. Der zweite Weg führt über das Gebiet der beschreibenden Naturwissenschaften. Die Spuren, die die klimatischen Aenderungen der Vorzeit am Antlitz der Erde hinterlassen haben, ermöglichen, wie im § 111 bereits mitgeteilt, die empirische Ermittlung der Aufeinanderfolge der Klimate jenes Zeitraumes der Erdgeschichte, auf den sich meine vorstehenden Berechnungen des säkularen Ganges der Erdbestahlung beziehen. Es kann also die Frage gestellt und beantwortet werden, wie jene empirisch gefundenen Klimaschwankungen mit diesem theoretisch ermittelten Bestahlungsgang übereinstimmen. Dieser zweite Weg ist früher als jener zuerst erwähnte betreten worden. Dies geschah, wie ich dies im Vorwort bereits erzählt habe, auf folgende Weise.

Ich habe schon in meiner „Théorie mathématique“ nachweisen können, dass die vorzeitlichen Aenderungen der Erdbestahlung einen mächtigen Einfluss auf den Ablauf der Erdklimate ausgeübt haben mussten. Dieses Ergebnis meines Erstlings-

werkes lenkte auf sich die Aufmerksamkeit des grossen deutschen Klimatologen Wladimir Köppen. Er arbeitete damals mit seinem Schwiegersohne Alfred Wegener an dem hier bereits angeführten und noch öfter zu erwähnenden Werke „Die Klimate der geologischen Vorzeit“, dessen letztes und grösstes Kapitel „Klimate des Quartärs“ er zu bearbeiten übernahm. Dabei gedachte er, den von mir theoretisch errechenbaren Bestrahlungsgang der Erde zur Erforschung des Klimas dieses Abschnittes der Vorzeit zu benützen. Ich wurde also von diesen beiden Gelehrten zur Mitarbeit an ihrem Werke eingeladen und nach brieflichem Gedankenaustausch wurde mir die Aufgabe zuteil, den Verlauf der Bestrahlung der hohen nördlichen Breiten der Erde während der letztverflossenen 650 Jahrtausende numerisch und graphisch zu veranschaulichen.

Bevor ich an diese Arbeit gehen konnte, musste eine prinzipielle Vorfrage gelöst werden, nämlich jene, um welches meteorologische Element und um welche Jahreszeit handelte es sich bei dem Eiszeitalter.

Nach einer erschöpfenden Diskussion aller in Betracht zu ziehenden Umstände beantwortete Köppen diese Frage dahin, dass für die Vergletscherung die Abminderung der Wärme des Sommerhalbjahres entscheidend ist. Dieser Auffassung, die heute wohl von allen Klimatologen vertreten wird, stimmte auch der ebenfalls bedeutende Klimatologe und Mitarbeiter Penks Ed. Brückner in einer ausführlichen Besprechung des Köppen-Wegenerschen Werkes bei: „Schlagend zeigen die obigen Zahlen, dass es nur die niedrigen Sommertemperaturen sind, die die Vergletscherung erzeugen. Kalte Sommer in grosser Häufung müssen also als Ursache der Vergletscherung und der Bildung des Inlandeises betrachtet werden.“¹⁾

Zu demselben Ergebnis gelangte, wie nachstehend gezeigt werden wird, auch ich auf einem anderen Wege, den mir die Erforschung des Zusammenhanges zwischen Erdbestrahlung und Schneegrenze und jenes zwischen Einstrahlung und Temperatur eröffnete, den ich aber zur Zeit der Abfassung des Köppen-Wegenerschen Werkes noch nicht betreten hatte. Es war deshalb das grosse Verdienst Köppens, mir in dieser Frage den richtigen Weg gezeigt zu haben, indem er mir riet, bei meinen Berechnungen das Augenmerk auf die Zeiten mit kalten Sommern zu richten.

Bevor ich diese Berechnungen in Angriff genommen hatte, habe ich durch die Aufstellung des Begriffes der kalorischen Jahreszeiten das Mittel gefunden, die säkularen Aenderungen der Erdbestrahlung mathematisch zu erfassen und darzustellen. Seidem habe ich den hiezu erforderlichen mathematischen Apparat vervollständigt und ihm die im Kapitel XV mitgeteilte Form gegeben. Immerhin war das damals von mir von diesem Apparat geschaffene ausreichend, der gestellten Aufgabe gerecht zu werden.

Die durch die Formeln (185) des vierten Abschnittes dieses Buches veranschaulichten Aenderungen der Bestrahlung der in Betracht gezogenen geographischen Breite erreichen, weil sich die Perihellänge Π , schneller ändert als die Schiefe ε der Ekliptik, mit grosser Annäherung ihre extremen Werte zu den Zeiten, zu denen die Perihellänge Π , den Wert von 90° bzw. 270° aufweist. In diesen beiden

¹⁾ Brückner Ed., W. Köppen und A. Wegener über die Klimate der geologischen Vorzeit. Zeitschrift für Gletscherkunde, Band XIV. 1925.

Fällen sind die dem kalorischen Sommer- bzw. Winterhalbjahr zugehörigen Strahlungsmengen vermittels der Gleichungen (126) und (171) des erwähnten Abschnittes durch die nachstehenden Formeln gegeben:

$$Q_s = W_s^0 + \Delta W_s \Delta \varepsilon \mp me$$

$$Q_w = W_w^0 + \Delta W_w \Delta \varepsilon \pm me$$

wobei das obere Vorzeichen für $\Pi_\gamma = 90^\circ$, das untere für $\Pi_\gamma = 270^\circ$ gilt.

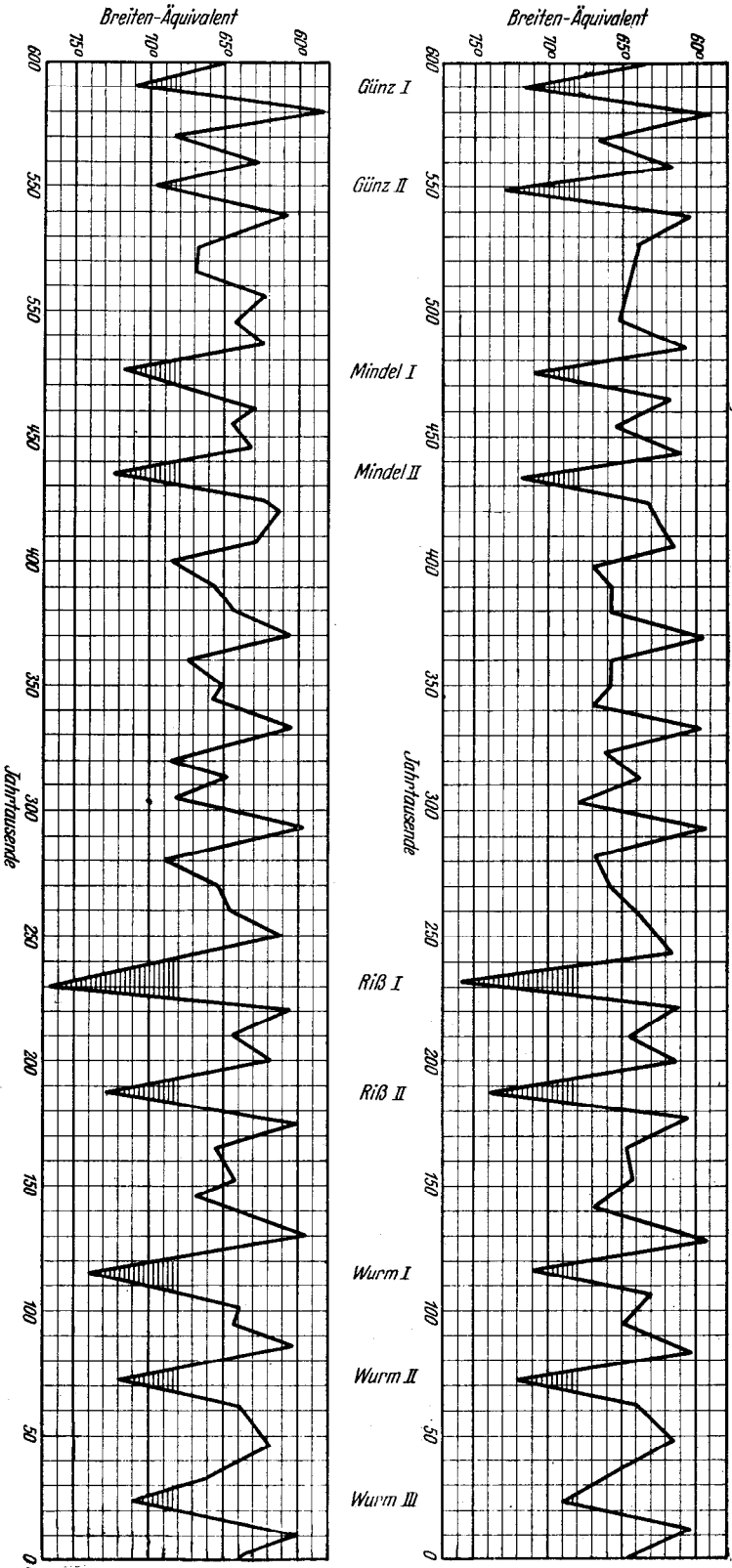
Mit den vorstehenden Formeln lassen sich die einzelnen Ausschläge des Bestrahlungsganges der in Betracht gezogenen geographischen Breite berechnen und man kann mit diesen Formeln das Hin- und Herschwanken der Bestrahlung dieser Breite in die Vorzeit verfolgen.

Meine diesbezüglichen Berechnungen führte ich betreffs der sommerlichen Wärmemengen, die während des in Betracht gezogenen Zeitraumes der Vorzeit den nördlichen Breiten von 55° , 60° und 65° zugestrahlt wurden. Dabei bediente ich mich hinsichtlich der säkularen Veränderungen der astronomischen Elemente der in der Tabelle VIII mitgeteilten von Pilgrim berechneten Zahlenwerte. Nachdem ich auf diese Weise die gewünschten Strahlungsänderungen berechnet hatte, setzte ich im Einverständnis mit Köppen diese Aenderungen in fiktive Breiteschwankungen um, weil wir dadurch ein geometrisches Bild dieser Aenderungen gewinnen wollten. Hatte sich also beispielsweise für den Breitenkreis von 65° und für einen bestimmten Zeitpunkt der geologischen Vorzeit eine Verminderung der sommerlichen Strahlungsmenge gegenüber der heutigen ergeben, so ermittelte ich jene nördlicher gelegene Breite, auf die man sich gegenwärtig zu begeben hätte, um durch diese Aenderung der Breite die berechnete Abminderung der sommerlichen Strahlungsmenge zu erreichen. Einer Vermehrung der sommerlichen Strahlungsmenge entsprach eine fiktive Breiteschwankung nach Süden.

Auf diese Weise erhielt ich drei zackenförmige Linien, die man später „Strahlungskurven“ nannte und die ich zu einem Diagramm vereinigte, das dem Köppen-Wegenerschen Werke auf einer besonderen Tafel beigelegt wurde, während meine diesbezüglichen Erläuterungen im Text des Buches Aufnahme fanden.

In der beiliegenden Fig. 48, obere Abbildung, ist die auf die geographische Breite von 65° sich beziehende und bis zum 600. Jahrtausend vor der Gegenwart reichende Zackenlinie des erwähnten Diagrammes wiedergegeben. Die auf die Breiten von 55° und 60° sich beziehenden Zackenlinien sind in der Fig. 48 nicht wiedergegeben, weil diese fast gleichverlaufend mit jener von 65° sind. In derselben Figur ist durch die untere Abbildung die Strahlungskurve wiedergegeben, wie sie sich mit Benützung der in der Tabelle IX mitgeteilten Zahlen ergeben hat.

Betrachtet man die obere, Köppen zur Verfügung gestellte Zackenlinie der Fig. 48, so erkennt man darin neun besonders starke Abminderungen der sommerlichen Bestrahlung, die zu den Zeiten von 589, 548, 475, 434, 231, 187, 116, 72 und 22 Jahrtausenden vor der Gegenwart stattgefunden haben. Diese neun Kälteeinbrüche erscheinen zu vier Gruppen vereinigt, von denen die ersten drei je zwei



Amplituden der säkularen Aenderung der sommerlichen Bestrahlung der nördlichen Breite von 65°

Oben: altes Diagramm mit Benützung der Zahlen der Tabelle VIII
Unten: neues Diagramm mit Benützung der Zahlen der Tabelle IX

Fig. 48

Zacken aufweisen, die vierte deren drei besitzt. In diesen vier Gruppen erkannte Köppen die vier Eiszeiten des Penck-Brücknerschen Schemas, die Günz-, die Mindel, die Riss- und die Würm-Eiszeit.

Als ich bei der Abfassung meiner „Mathematischen Klimalehre“ die Berechnung des säkularen Ganges der Erdbestahlung auf eine breitere Basis stellte und diese Berechnung mit Benützung der Zahlenwerte der Tabelle IX, also mit besseren Massenwerten der Planeten durchführte, entwarf ich eine der im Köppen-Wege-nerschen Werke veröffentlichten ähnliche Strahlungskurve, die in der Fig. 48 durch die untere Abbildung veranschaulicht ist. In dieser neueren Kurve ist der in die Zeit von 22 Jahrtausenden vor der Gegenwart fallende letzte Einbruch sommerlicher Kälte, der in der alten Kurve schwächer ausgebildet ist, durch eine deutlich ausgebildete starke Zacke veranschaulicht. Dies veranlasste mich, die auf diesen Zeitpunkt sich beziehende Berechnung Pilgrims einer Kontrolle zu unterziehen und da ergab sich, dass die auf den Zeitpunkt von 22,3 Jahrtausenden vor der Gegenwart und auf die Schiefe der Ekliptik sich beziehende Berechnung Pilgrims mit einem Rechenfehler behaftet erscheint, so dass die in der Tabelle VIII enthaltene diesbezügliche Zahl von $22^{\circ} 44'$ durch $22^{\circ} 33'$ zu ersetzen ist. Die daraus resultierende Korrektur ist in der beiliegenden Abbildung durchgeführt worden.

Vergleicht man die beiden in der Fig. 48 wiedergegebenen Diagramme miteinander, so ersieht man, dass sie gut übereinstimmende Resultate liefern: in beiden Diagrammen kommen die erwähnten neun stärksten Einbrüche sommerlicher Kälte zu denselben bereits angegebenen Zeiten deutlich zum Vorschein. Die noch vorhandenen kleineren Abweichungen rühren mit Ausnahme der im § 84 erwähnten auf die Zeitpunkte 500 und 465 sich beziehenden von den verschiedenen Massenwerten der Planeten her, die den Berechnungen von Stockwell bzw. jenen von Michkovitch zugrunde lagen. Das Ausmass dieser Abweichungen ist, wie im § 84 bereits gesagt, eine Bürgschaft dafür, dass die eventuell noch sich als notwendig erweisenden Korrekturen der Planetenmassen den hier berechneten Verlauf der vorzeitlichen Aenderungen der Erdbestahlung nur unwesentlich zu beeinflussen imstande sein werden.

Kehren wir nochmals zu der in der Fig. 48, untere Abbildung, wiedergegebenen Strahlungskurve zurück! Wenn man darin alle über 68° reichenden Zacken durch Schraffieren kennzeichnet, so ersieht man deutlich, dass sie die übrigen Zacken des Diagramms deutlich überragen. Fasst man diese Zacken zu den angegebenen vier Gruppen zusammen, so bekommt man das in der beiliegenden Fig. 49 dargestellte Schema.

Vergleicht man nun die beiden durch die Fig. 49 bzw. die Fig. 47 (Seite 491) dargestellten Schemas miteinander, so ersieht man, dass sie sehr gut, ja verblüffend übereinstimmen, wenn man bedenkt, dass sie auf ganz verschiedenen Wegen, durch geologische Forschung bzw. durch astronomische Berechnung, gewonnen worden sind. Auf diese Uebereinstimmung, die sich auch bei Benützung des älteren Diagramms offenbarte, hinweisend, konnte Köppen mit aller Entschiedenheit behaupten, dass sich in meinen Strahlungskurven die vier alpinen Eiszeiten getreulich widerspiegeln, welcher Erkenntnis bald nachher auch Brückner in seiner bereits erwähnten Abhandlung beipflichtete.

Auf diese Weise hat Köppen als erster den Zusammenhang zwischen dem von mir mathematisch erforschten säkularen Bestrahlungsgang der Erde und den nachgewiesenen erdgeschichtlichen Klimaten mit genialem Blicke entdeckt.

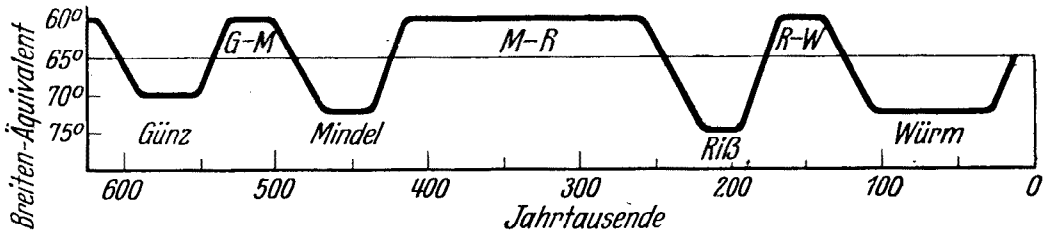


Fig. 49

Um seiner Behauptung eine feste Grundlage zu geben, musste Köppen noch die Frage klären, wie die durch das Zeitintervall wärmerer Sommer getrennten je zwei oder drei Einbrüche sommerlicher Kälte den Eindruck je einer einheitlichen „Eiszeit“ hinterlassen konnten.

Heute ist man, wie aus dem nachfolgenden Kapitel ersichtlich werden wird, in der Lage, viel weitgehendere Schlüsse aus dem Verlauf des säkularen Bestrahlungsganges zu ziehen als es aus der obigen ersten graphischen Darstellung dieses Ganges möglich war. Man kann beispielsweise nicht nur qualitativ, sondern auch quantitativ angeben, wie sich durch diesen Gang die Schneegrenze hin und her verschieben und die polare Eiskalotte verbreiten und zusammenschrumpfen hat müssen. Es ist deshalb möglich, auch die Frage zu beantworten, warum in den Zentren der Vereisungen, in den Alpen und den Polargegenden, die eng benachbarten Kältevorstöße den Eindruck je einer Eiszeit hervorrufen mussten. Das zur Beantwortung aller dieser Fragen erforderliche mathematische Werkzeug war aber damals, als Köppen und Wegener ihr Buch schrieben, noch nicht geschmiedet, und es ist deshalb erstaunlich, wie treffend Köppen die gestellte Frage beantwortete und seine Behauptung bewies.

In seinem und Wegenerschem Werke konnte Köppen auch auf die ausgezeichnete Uebereinstimmung des aus der Strahlungskurve bei dem Jahrtausend 11 klar ersichtlichen Maximums der sommerlichen Bestrahlung mit dem durch die geologische Forschung festgestellten Klimaoptimum hinweisen. Er konnte sich auch darauf berufen, dass, wie erwähnt, noch vor der Veröffentlichung dieser ersten Strahlungskurven eine Dreiteilung der Würm-Eiszeit bereits festgestellt war und konnte mit der Stimme des Propheten verkünden, es mehren sich die Anzeichen dafür, dass man selbst in den Alpen die Spaltung der Eiszeiten in mehrere Hauptvorstöße noch erkennen wird. Und dies sollte sich, wie man sogleich sehen wird, bald bewahrheiten.

§ 117. Die Zergliederung des alpinen Glazials. Nach seiner Veröffentlichung im Köppen-Wegenerschen Werke wurde das von mir entworfene Strahlungsdiagramm, dessen einzelne Zackenlinien man, wie bereits erwähnt, Strahlungskurven nannte und mit meinem Namen — anfangs auch mitunter mit den Namen von Köppen und Wegener — bezeichnete, auch von anderen Gelehrten bei ihren Forschungen benützt, um die gewonnenen Befunde in die Strahlungskurve einzuordnen und dadurch astronomisch zu datieren. Und dies ist auch ferner so geschehen.

Es entspricht dem Zweck und der Anlage dieses Werkes, auch über alle auf meine Strahlungskurven bezugnehmenden Arbeiten kurz zu berichten, weil dadurch die praktische Verwendbarkeit dieser Kurven und die Reichweite der ihnen zugrunde liegenden Theorie am deutlichsten zu Tage treten wird.

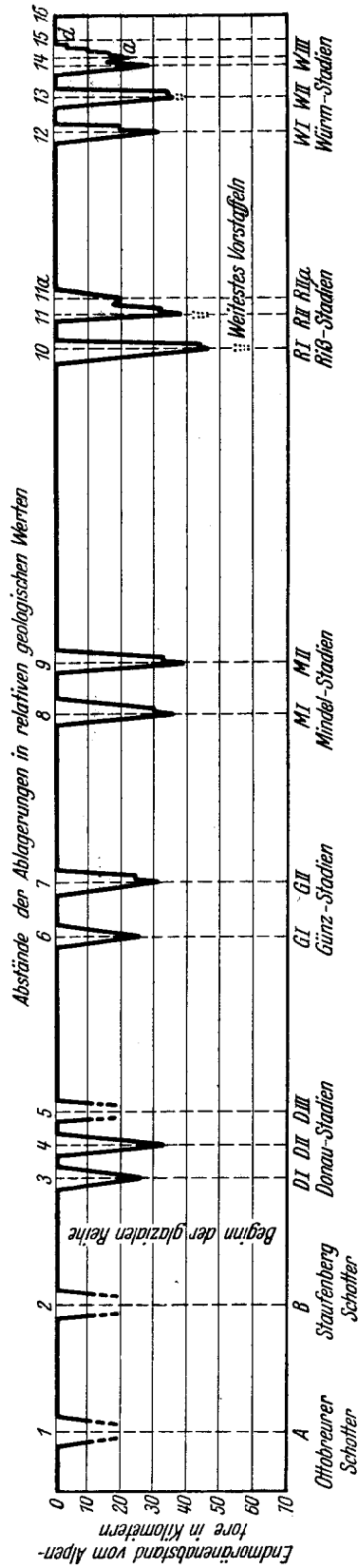
Ich beginne meinen Bericht, der wegen des grossen und ständig zunehmenden Materials weder auf Vollständigkeit noch auf systematische Anordnung Anspruch erheben kann, mit einem Werke, das die im vorhergehenden Paragraphen angeschnittene Gliederung der alpinen Vereisung zum Gegenstand hat; es ist das umfangreiche Werk von Barthel Eberl über die Eiszeitenfolge im nördlichen Alpenvorlande.¹⁾

Das eigentliche Forschungsgebiet von Eberl ist, wie dies im Untertitel des Werkes angegeben wird, die Eiszeitlandschaft des nördlichen Alpenvorlandes und zwar der Raum zwischen Lech und Iller, die von Penck so benannte Lech-Illerplatte. Hier haben zwei kleinere Gletscher, der Lech- und der Illergletscher, mit ihren Eiszungen den Raum gefüllt, mächtig genug, um die ganze Phasenfolge der Eisvorstösse zur Entwicklung zu bringen, und doch nicht so übermächtig, dass sie immer wieder die eigenen Ablagerungen weithin zerstört oder überschüttet hatten, wie dies in Gebieten mit besonders grossartiger Entwicklung der aus den Alpen quellenden Eisströme gewöhnlich geschah. Auf diesem Gebiete des Alpenvorlandes ist die eiszeitliche Schichtenfolge nicht nur vollständig entwickelt, sondern auch wunderbar erhalten und hier ist es Eberl durch Verfeinerung der Methoden und Intensivierung der Beobachtung gelungen, alle Phasen der alpinen Vereisung in einem so weitgehenden Masse zu erkennen und nachzuweisen, wie es kaum anderswo geschehen konnte. Da ergab es sich aus der Gliederung der Moränen und Schotter, dass die Eiszeiten Günz, Mindel und Riss doppelphasig waren, während sich in der Würm-Eiszeit drei Hauptstösse kundgaben.

Durch dieses Ergebnis, über das Eberl in seinem Vortrag in der Geologischen Vereinigung zu München bereits am 29. Januar 1924, also noch vor der Veröffentlichung meiner Strahlungskurven berichtete, wurde die Mehrgliederung der alpinen Eiszeiten, wie sie Köppen aus dem Verlauf der Strahlungskurve vorher sagte, auf das vollständigste bestätigt.

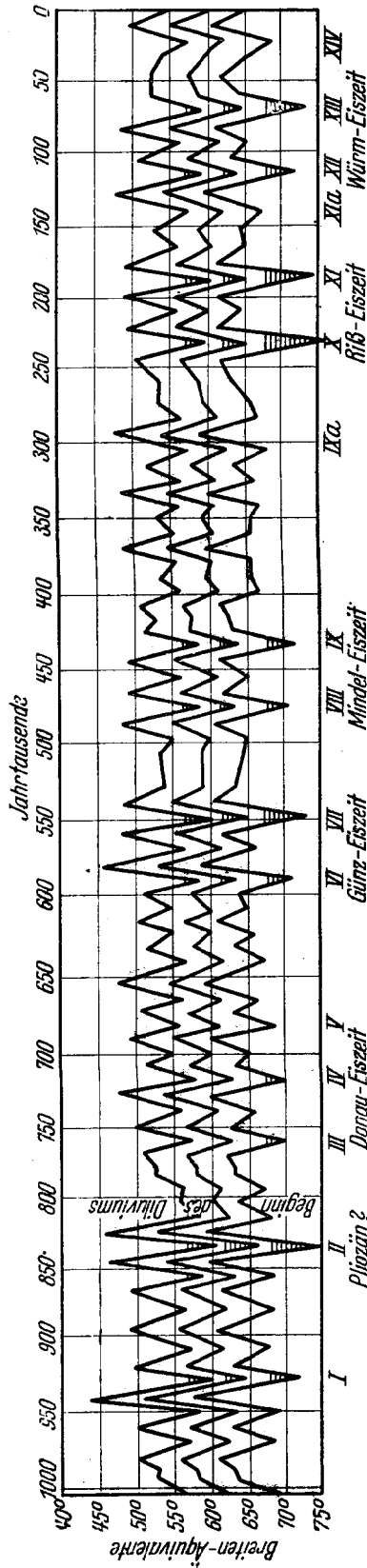
Die Ergebnisse der Untersuchungen von Eberl, wie sie in ihrer Vollständigkeit in seinem soeben erwähnten Werke veröffentlicht erscheinen, sind aber

¹⁾ Eberl B. Die Eiszeitenfolge im nördlichen Alpenvorlande, ihr Ablauf, ihre Chronologie auf Grund der Aufnahmen im Bereich des Lech- und Illergletschers. Augsburg 1930. — Die Gliederung und Chronologie des alpinen Glazials im Bereich des Lech- und Illergletschers. Forschungen und Fortschritte. 1931.



Stratigraphisches Diagramm von B. Eberl

Fig. 50



Strahlungsdiagramm von M. Milankovitch

Fig. 51

noch viel weitgehender. Er veranschaulichte sie nämlich durch ein stratigraphisches Diagramm, das ich hier in der beiliegenden Fig. 50 wiedergebe. In demselben ist der Ablauf und die räumliche Entwicklung der vorzeitlichen Vergletscherungen des durchforschten Gebietes graphisch dargestellt. Durch die Ordinaten dieses Graphikons ist die Reichweite der einzelnen Gletschervorstöße veranschaulicht. Diese Ordinaten stellen sichere, durch direkte Beobachtung gewonnene Werte dar, deren reichliches Ausmass von 25 bis 50 Kilometer jeden Zweifel an ihre Zuverlässigkeit von vorn herein ausschliesst. Die Abszissen des Graphikons beruhen dagegen auf geologischen Schätzungen nach dem Masse der in den Zeiten zwischen den Vereisungen stattgehabten Verwitterung und der Zersägung der Ablagerung durch die Flüsse. Vergleicht man dieses stratigraphische Diagramm mit meinem in Köppen-Wegenerschen Buche veröffentlichten Strahlungsdiagramm, das — man wird sogleich erfahren warum — mit seiner nachträglich berechneten Fortsetzung bis zum 1000. Jahrtausend reichend in der Fig. 51 veranschaulicht ist, so ersieht man folgendes. Alle von Eberl auf dem durchforschten Gebiet festgestellten Gletschervorstöße finden sich in meinem auf astronomischer Grundlage berechneten Strahlungsdiagramm durch entsprechende die Zeiten der kalten Sommer veranschaulichende Zacken getreulich wiedergegeben. Diese Uebereinstimmung der Resultate zweier auf ganz verschiedenem Wege gewonnenen Gliederungen ist geradezu als wunderbar zu bezeichnen, besonders wenn man bedenkt, dass Eberl, wie erwähnt, zu seinen Ergebnissen noch vor der Veröffentlichung meiner Strahlungskurven gekommen ist. Dies gilt auch hinsichtlich des restlichen über das 650. Jahrtausend vor der Gegenwart reichenden Teiles der beiden Diagramme.

Es war nämlich Eberl, wie schon früher Gutzwiller im Sundgau, gelungen, noch ältere, vor der Günz-Eiszeit abgelagerte, sehr verwitterte Schotter zu finden, die in seinem stratigraphischen Diagramm unter 1 bis 5 eingetragen sind. Als er deshalb die volle Uebereinstimmung seiner übrigen Feststellungen mit dem in Köppen-Wegenerschen Buche bis zum 650. Jahrtausend reichenden Strahlungsdiagramm ersah, wandte er sich durch Vermittlung von Köppen an mich mit der Bitte, mein Strahlungsdiagramm über diesen Zeitpunkt zu verlängern, was auch geschehen ist. Auch diese Teile der beiden Diagramme stimmten, wie ersichtlich, überein: die von Eberl geologisch festgestellten Kälteneinbrüche kamen in der von Eberl angegebenen Reihenfolge und Anordnung deutlich zum Vorschein.

Die ausgesprochen glaziale Natur der in diesem Teile des stratigraphischen Diagrammes eingetragenen Schotterablagerungen ist zwar noch nicht ganz festgestellt, doch sind auch anderswo, nämlich in sämtlichen deutschen Stromgebieten hohe vor-günzische Terrassen gefunden worden, die wahrscheinlich diesen frühen Oszillationen der Erdbestahlung entsprechen. Auch in Westeuropa gewinnt man den Eindruck, dass zwischen Günz und das typische Tertiär eine ziemlich beträchtliche Uebergangsperiode eingeschaltet sei. Es ist sehr wahrscheinlich, dass vereinzelte Kältevorstöße, wie es die im Strahlungsdiagramm mit I und II bezeichneten gewesen sind, nicht die Wirkung der rasch hintereinander sich wiederholenden gehabt hatten. Sicher ist es aber, dass auch diese kurzandauernde vor-günzischen Vorstöße deutliche Spuren hinterlassen hatten und astronomisch datiert werden konnten. Ihr auf zwei verschiedenen Wegen, auf jenem der geologischen Forschung

und jenem der astronomischen Berechnung, erfolgte Nachweis hat auch berechtigtes Aufsehen erregt, wie dies in dem bald zu erwähnenden Artikel von Keilhack deutlich zum Ausdruck gelangte.

Die Zweiteilung der Günz-, Mindel- und Riss-Eiszeit, sowie die Dreiteilung der Würm-Ablagerungen ist auch von Knauer¹⁾ im Lech-Isar-Gebiet festgestellt worden, und zwar ebenfalls ohne Kenntnis meiner Strahlungskurven. Weil paläontologische und petrographische Hilfsmittel zur Trennung der verschiedenen Gebilde nicht oder meist nicht zur Verfügung standen, hat Knauer vorgezogen, die „überzähligen Gebilde“ als Vorrückungs- und Rückzugsstillstände des Eises zu betrachten, hebt aber die nahezu vollständige Uebereinstimmung der Befunde mit der Strahlungskurve hervor. Dasselbe gilt auch für seine späteren auf das norddeutsche Vereisungsgebiet und das westalpine Vorland sich beziehenden Abhandlungen²⁾, in denen er auf meine Strahlungskurve oder auf die aus derselben abgeleitete Vereisungskurve von Soergel oder auf beide Bezug nimmt.

Auch Gage l hat lange vor der Veröffentlichung meiner Strahlungskurven auf all die Unstimmigkeiten hingewiesen, die sich aus den Beobachtungen über das Diluvium und aus deren Einzwängung in das damals in Gebrauch stehende — und wie es sich herausgestellt hat, ganz unzureichende — Gliederungsschema ergaben. Nach der Veröffentlichung der Strahlungskurven erklärte Gage l, dass der grösste Teil dieser Unstimmigkeiten und Unbegreiflichkeiten sich auflösen werde und dass eine verständliche und in sich widerspruchlose Gliederung des Diluviums das Ergebnis sein wird.³⁾

Ausser Eberl und Knauer hat sich Paul Beck sehr eingehend mit der Gliederung des alpinen Glazials beschäftigt, nachdem er eingesehen hat, dass mit dem „starren und hemmenden Panzer, den die Penck-Brücknersche Vierheit der Eiszeiten an alle europäischen Forschungen legte“ nicht auszukommen ist. Beck durchforschte das Moränengebiet des Aaregletschers in der Schweiz, gelangte dabei zu einer Einteilung in sieben Vereisungen und fand, dass diese Einteilung nach Zahl und Zeitabstand in überraschender Weise mit meiner Strahlungskurve übereinstimmt.⁴⁾

Nachher stellte Beck die Frage, ob die Strahlungsschwankungen allein ausreichend gewesen waren, um die in den Alpen geologisch festgestellten Eisvor-

1) Knauer J. Glazialgeologische Ergebnisse aus dem Isargletschergebiet. Zeitschrift der Deutschen Geologischen Gesellschaft. Band 80. 1928.

2) Knauer J. Die Ablagerungen der älteren Würm-Eiszeit (Vorrückungs-Phase) im süddeutschen und norddeutschen Vereisungsgebiet. Abhandlungen der Geologischen Landesuntersuchung am Bayerischen Oberbergamt. Heft 21. 1935. — Ueber das Alter der Moränen der Zürich-Phase im Linthgletscher-Gebiet. Ebenda. Heft 33. 1938. — Die Mindel-Eiszeit, die Zeit grösster diluvialer Vergletscherung in Süddeutschland. Ebenda. Heft 29. 1838.

3) Gage l C. Die Bedeutung der Verwitterungszonen für die Gliederung des Diluviums. Centralblatt für Mineralogie, Geologie und Paläontologie. Abteilung B. Jahrgang 1926. — Ueber einige nordwestdeutsche Interglaziale. Jahrbuch der Preussischen Geologischen Landesanstalt. Band 48 für das Jahr 1927. (Veröffentlicht 1928).

4) Beck P. Ueber das schweizerische und europäische Pliozän und Pleistozän. *Eclogae geologicae Helvetiae*. Vol. 26. № 2. 1933.

stösse in ihrem vollen Umfang zu erzeugen.¹⁾ Er unternahm es also mit Hilfe der in meiner „Mathematischen Klimalehre“ veröffentlichten Angaben über den säkularen Gang der Erdbestrahlung und mit Anwendung seines Prinzips der Frostmonate, Anhaltspunkte über die klimatischen Auswirkungen dieses Ganges zu gewinnen und gelangte zu dem Ergebnis, dass die von mir berechneten Strahlungsschwankungen mit den direkten thermischen und hydrometeorischen Folgen in Zusammenhang mit den indirekten Auswirkungen der entstehenden Vergletscherungen genügen, um die grössten Vereisungen der Schweizeralpen zu erklären.²⁾

Mit dem Ablauf des alpinen Postglazials hat sich Bertsch eingehend befasst und gefunden, dass das von ihm hauptsächlich auf pollenanalytischem Wege entworfene Bild dieses Ablaufs mit meiner Strahlungskurve übereinstimmt.³⁾

§ 118. Die Vollgliederung des Eiszeitalters. Hat der säkulare Gang der Erdbestrahlung deutliche Spuren im Alpengebiet hinterlassen und hat er hier durch die bei den einzelnen Gletschervorstössen geschaffenen Endmoränen seine Ausschläge und seinen Rhythmus derart markiert, dass eine weitgehende Zergliederung und eine auf zuverlässiger astronomischer Berechnung fussende Chronologie des alpinen Glazials durchgeführt werden konnte, so gilt dies in noch grosserer Masse für das Randgebiet der norddeutschen Vereisungen. In diesem Randgebiet sind unter vorwiegend klimatischen Bedingtheiten bestimmte Gesteine entstanden, die als glaziale oder interglaziale mit Sicherheit zu erkennen sind und auch eine feste Bezugnahme auf die eigentlichen Vereisungsgebiete gestatten. Als neu oder doch in vollständiger Entwicklung nur dem Randgebiet eigentümlich kommen hinzu die Schotterterrassen und in besonders reicher Gliederung die Löss, die als sichere Zeugen für wiederholte Herrschaft eines kalten Trockenklimas zu betrachten sind. Und schliesslich müssen Klimaschwankungen im Randgebiet von wesentlichem Einfluss gewesen sein auf die Tätigkeit der Flüsse, auf Erosion und Akumulation. Eine solche klimatische Einflussnahme auf die Flusstätigkeit muss sich wie dies Siegert⁴⁾ und Soergel⁵⁾ ausführlich dargelegt hatten, besonders geltend machen im Oberlauf der Flüsse, vor Allem in den Oberlaufgebieten der grossen Stromsysteme Deutschlands. Hier müssen alle grösseren Klimaschwankungen in der Flusstätigkeit gewissermassen registriert worden sein.

Ausgehend von dieser Erkenntnis hat Wolfgang Soergel noch vor der Veröffentlichung meiner Strahlungskurven die volle Durchgliederung des Eiszeitalters als Grundaufgabe der Eiszeitforschung erkannt und ihrer Lösung eine ganze

1) Beck P. Vorläufige Mittelung über die Revision des alpinen Quartärs. *Eclogae geologicae Helvetiae*. Vol. 30. № 1. 1937.

2) Beck P. Studien über das Quartärklima im Lichte astronomischer Berechnungen. *Eclogae geologicae Helvetiae*. Vol. 30. № 2. 1937 und Vol. 31. № 1. 1938.

3) Bertsch F. Der deutsche Wald im Wechsel der Zeiten. Tübingen 1935. — Herkunft und Entwicklung unserer Getreide. „Mannus“, Zeitschrift für deutsche Vorgeschichte. Band 31. 1939.

4) Siegert L. Zur Theorie der Talbildung. *Zeitschrift der Deutschen Geologischen Gesellschaft*. Band 62. 1910.

5) Soergel W. Diluviale Flussverlegungen und Krustenbewegungen. *Fortschritte der Geologie und Paläontologie*. Heft 5. 1923.

Reihe grundlegender Arbeiten gewidmet, weshalb er als der Begründer der Vollgliederung des Eiszeitalters zu betrachten ist.

Die ersten sicheren Anhaltspunkte zu dieser Vollgliederung gewann Soergel in Thüringen im Oberlaufgebiet des Elbsystems. Hier gelang es ihm noch vor dem Bekanntwerden meiner Strahlungskurven nachzuweisen, dass die Flussterrassen der Saale und der Ilm ihre Entstehung Klimaschwankungen verdanken. Jede Aufschotterungsphase entspricht einer Zeit glazialen Klimas, jede Einschneidungsphase einer Zeit gemässigten Klimas. Es ergab sich dadurch eine Gliederung des Eiszeitalters in 11 kalte und 11 gemässigte Perioden.¹⁾

Zwei Monate nachdem diese Ergebnisse der Soergelschen Forschungen veröffentlicht wurden, erschien das Köppen-Wegenersche Werk, und so konnte Soergel seine Ergebnisse mit meinen in diesem Werke veröffentlichten Strahlungskurven vergleichen und in Beziehung bringen. Dies tat er in seinem bald nachher erschienenem Buche „Die Gliederung und absolute Zeitrechnung des Eiszeitalters“.²⁾ Dabei erweiterte er sein Forschungsgebiet derart, dass bereits in diesem Buche die Vollgliederung der deutschen Flussysteme ihre festen Umrisse erhielt.

Ich kann hier nur die wichtigsten Ergebnisse dieser grundlegenden Arbeit Soergels kurz erwähnen. In der beiliegenden Fig. 52 sehen wir seine Parallelisierung der Schotterterrassen der Ilm mit der untersten Strahlungskurve meines im Köppen-Wegenerschen Werke veröffentlichten Strahlungsdiagramms.

Wie aus dieser Figur ersichtlich, fanden alle grösseren Spitzen der Strahlungskurve ihr Korrelat in den Schotterterrassen der Ilm und zwar nicht nur die neun grössten Spitzen, sondern noch zwei kleinere, die Soergel mit „Prae-Riss“ und „Prae-Würm“ bezeichnete.

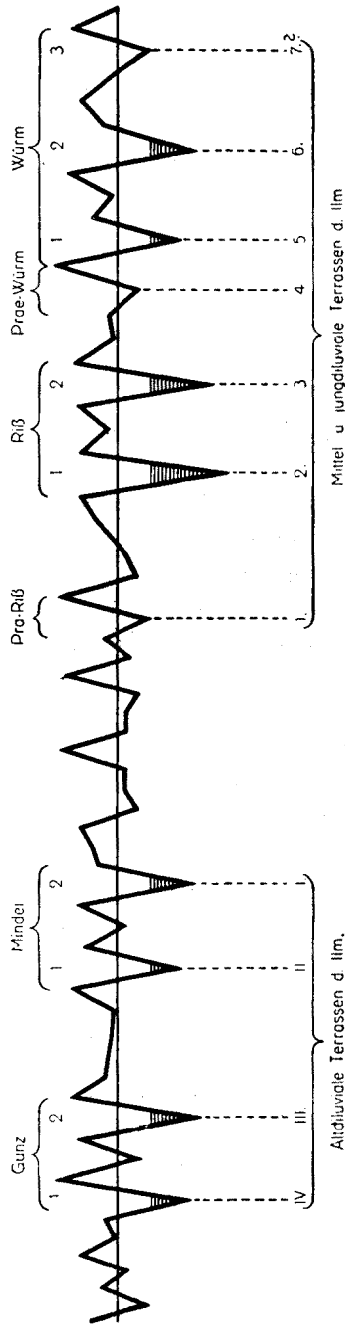
Soergel blieb bei diesem hochwichtigen Ergebnis seiner Forschungen nicht stehen, sondern erweiterte diese auch auf das System der Weser, über dessen diluviale Terrassen Siebert eine ausführliche Studie veröffentlicht hatte.³⁾ Dabei gelang es Soergel eine ins Einzelne gehende Parallelisierung der Ilm-Saale-Terrassen mit den Werra-Weser-Terrassen durchzuführen und gründete damit seine Gliederung auf die Befunde im Oberlauf zweier selbständigen Stromsysteme.

Um den Ring der Beweise für die Richtigkeit der von ihm durchgeführten Vollgliederung zu schliessen, zog Soergel noch ein reich gegliedertes diluviales Profil heran, um auch dasselbe mit der Strahlungskurve in Beziehung zu bringen. Es war dies das Profil der Schichtenfolge des Süsswasserkalklagers von Ehringsdorf bei Weimar, dessen Stellung in der Vollgliederung des Eiszeitalters und damit auch in der Strahlungskurve durch die zuunterst liegenden Flussschotter ebenso wie durch den zuoberst liegenden Löss bestimmt und sicher eingegrenzt ist. Auch hier ergab sich eine in die feinsten Einzelheiten reichende Uebereinstimmung mit der Strahlungskurve. Deshalb konnte Soergel die Ergebnisse seiner Forschungen zusammenfassend sagen: „Wohl noch selten haben zwei Lösungsversuche

1) Soergel W. Die diluvialen Terrassen der Ilm und ihre Bedeutung für die Gliederung des Eiszeitalters. Jena 1924.

2) Soergel W. Die Gliederung und absolute Zeitrechnung des Eiszeitalters. Fortschritte der Geologie und Paläontologie. Heft 13. 1925.

3) Siebert L. Beiträge zur Kenntnis des Pliozäns und der diluvialen Terrassen im Flussgebiet der Weser. Abhandlungen der Preussischen Geologischen Landesanstalt. Heft 90. 1921.



Die Parallelisierung der Schotterterrassen der Ilm mit der Strahlungskurve. (Nach W. Soergel)

Fig. 52

für das gleiche Problem, die ganz unabhängig voneinander und auf ganz verschiedener Grundlage unternommen worden sind, zu derartig übereinstimmenden Resultaten geführt. Darin liegt eine sehr hohe Gewähr der in beiden Systemen vertretenen Eiszeitgliederung; beide Systeme stützen sich gegenseitig. Ich halte damit die astronomische Gliederung des Eiszeitalters für bewiesen, das Problem der absoluten Zeitrechnung für gelöst“.

Auch nach der Veröffentlichung seines soeben besprochenen Buches war Soergel am weiteren Ausbau der Vollgliederung des Eiszeitalters unermüdlich tätig. Seine diesbezüglichen Untersuchungen sind in einer Reihe von Abhandlungen und in zwei besonderen Veröffentlichungen niedergelegt; die ersteren befassen sich vorwiegend mit Spezialfragen, die ich aber ihrer Wichtigkeit wegen hier anführen muss¹⁾, die letzteren behandeln das Eiszeitenproblem in seiner Gänze und werden später zu Besprechung gelangen.

Soergels Arbeiten haben Schule gemacht. Eine ständig zunehmende Zahl von tüchtigen Forschern unternahm es, die Quartärablagerungen nach den neuen Gesichtspunkten zu gliedern, mit der Strahlungskurve in Verbindung zu bringen und mit Hilfe derselben zu datieren. Dadurch hat, wie sich einer der besten dieser Forscher mir gegenüber schriftlich äusserte, die Quartärgeologie einen starken Impuls erhalten, da ihr die Möglichkeit geboten wurde, die bisherigen beschreibenden Ergebnisse einem exakten System einzuordnen.

Die von Soergel im thüringischen System hauptsächlich an der Ilm gewonnenen Ergebnisse wurden durch Toepfer auch für die Saale bestätigt, deren glaziale Terrassen Toepfer in die Strahlungskurve einordnete.²⁾

Ausser in Thüringen sind, wie wir dies bereits für das Flusssystem Werra-Weser gesehen haben, auch in anderen Gebieten Deutschlands Systeme von Flussterrassen gefunden worden, die sich mit den Oszillationen meiner Strahlungskurven decken und die Soergelsche Vollgliederung bestätigen. Grahmann, der als einer der ersten der astronomischen Theorie der Klimaschwankungen seine Aufmerksamkeit schenkte³⁾ und bei seinen ausgedehnten Untersuchungen meine Strahlungskurven benützte, erforschte die Terrassen der Elster und Mulde und ordnete sie in

¹⁾ Soergel W. Exkursion ins Travertingebiet von Ehringsdorf. *Paläontologische Zeitschrift*. Band VIII. 1926. — Das Alter der paläolithischen Fundstätten von Taubach-Ehringsdorf-Weimar. „Mannus“, *Zeitschrift für Deutsche Vorgeschichte*. Band 18. 1926. — Das geologische Alter des Homo heidelbergensis. *Paläontologische Zeitschrift*. Band X. 1928. — Das Alter der Sauerwasserkalke von Cannstatt. *Jahresberichte und Mitteilungen des oberrheinischen geologischen Vereines*. 1929. — Diluviale Frostspalten im Deckschichtprofil von Ehringsdorf. *Fortschritte der Geologie und Paläontologie*. Band XI. 1932. — Die geologische Entwicklung der Neckarschlinge von Mauer. *Paläontologische Zeitschrift*. Band 15. 1933. — Diluviale Eiskeile. *Zeitschrift der Deutschen Geologischen Gesellschaft*. Band 88. 1836. — Die als Pseudopariser bekannte Einlagerung im Travertinprofil von Ehringsdorf bei Weimar. *Beiträge zur Geologie von Thüringen*. Band V. 1940.

²⁾ Toepfer V. Die glazialen und präglazialen Schotterterrassen im mittleren Saaletal und ihre Stellung in der geologischen und astronomischen Gliederung des Eiszeitalters. *Berichte der Naturforschenden Gesellschaft zu Freiburg i. Br.* Band XXXII. 1933. — Ein kurzer Auszug dieser Abhandlung erschien im *Centralblatt für Mineralogie, Geologie und Paläontologie*. Abt. B. Jahrg. 1933.

³⁾ Grahmann R. Die absolute Zeitrechnung des Quartärs. *Sitzungsberichte der naturforschenden Gesellschaft zu Leipzig*. Jahrgang 53.—55.

die Strahlungskurve ein.¹⁾ Auch in seinen anderen Veröffentlichungen hat er von meinen Strahlungskurven Gebrauch gemacht²⁾ und hat der astronomischen Theorie der Klimaschwankungen auch dadurch wertvolle Dienste geleistet, dass er als erster den Anschluss der Strahlungskurven an die De Geerschen Warvenzählungen bewerkstelligte.

Steinmann untersuchte das Diluvium des Rheingebietes, das mit einem durchgehenden System von Schotterterrassen das alpine und das nordische Vereisungsgebiet miteinander verknüpft, und fand, dass dessen Gliederung aufs beste mit der Strahlungskurve übereinstimmt.³⁾

Beurlen hat in Anschluss an die Arbeiten von Soergel in einer besonderen Studie die geologischen Vorgänge in Ostpreussen während des Diluviums mit den durch die Strahlungskurve dargestellten Klimaschwankungen in Beziehung gebracht und sie in die Strahlungskurve eingeordnet.⁴⁾

Staub besprach die bis zum Jahre 1927 mit der Strahlungskurve erzielten Ergebnisse, durch die eine absolute Zergliederung und Unterteilung des Eiszeitalters auf astronomisch-physikalischen Wege ermöglicht wurde.⁵⁾

Dietrich gab in seiner Studie über den Rixdorfer Horizont ein die Vollgliederung bestätigendes Schema des Berliner Diluviums.⁶⁾

Zeuner hat an den Flussterrassen der Glatzer Neisse in Schlesien zwei Würmphasen, zwei Rissphasen, eine Vor-Riss-Phase und die zweite Mindelphase nachgewiesen und in die Strahlungskurve eingeordnet, wobei ihm das absolute Zeitmass dieser Kurve ermöglichte, die Hebungsgeschwindigkeit des Sudetengebirges zu berechnen ⁷⁾

§ 119. Weitere Anwendungen der Strahlungskurven. Durch die vorstehend mitgeteilten Ergebnisse geologischer Forschung erwarb sich die astronomische Theorie der Klimaschwankungen ihren Platz in den beschreibenden Naturwissenschaften. Wasmund nahm sie in seinem im „Handbuch der Bodenlehre“ erschienenen Artikel über Klimaschwankungen in jüngerer geologischer Zeit auf und entwarf

1) Grahmann R. Ueber die Ausdehnung der Vereisungen Norddeutschlands und ihre Einordnung in die Strahlungskurve. Berichte der math. - phys. Klasse der sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig. Band LXXX. 1928.

2) Grahmann R. Spät- und postglaziale Süßwasserbildungen im Regis-Breitungen und die Entwicklung der Urlandschaft in Westsachsen. Mitteilungen aus dem Osterlande. Band XXII. 1934. — Grundriss der Quartärgeologie Sachsens. Erschienen im „Grundriss der Vorgeschichte Sachsens“. Leipzig 1934. — Die Entwicklungsgeschichte des Kaspisees und des Schwarzen Meeres. Mitteilungen der Gesellschaft für Erdkunde zu Leipzig. Band 54 1937.

3) Steinmann H. G. jun. Das Diluvium des Niederrheins und die Gliederung des Eiszeitalters. Geologische Rundschau. Band 17. 1926.

4) Beurlen K. Diluvialstratigraphie und Diluvialtektonik. Beiträge und Ergebnisse aus Nordostdeutschland. Fortschritte der Geologie und Paläontologie. Band VI. Heft 18. 1927.

5) Staub W. Ergebnisse neuerer Eiszeitforschung in Europa. Zeitschrift der Gesellschaft für Erdkunde. 1927.

6) Dietrich W. O. Ueber den Rixdorfer Horizont im Berliner Diluvium. Zeitschrift der Deutschen Geologischen Gesellschaft. Band 84. 1932.

7) Zeuner F. Diluvialstratigraphie und Diluvialtektonik im Gebiet der Glatzer Neisse. Borna-Leipzig 1928.

darin eine chronologische Vergleichstabelle der diluvialen Zeitabschnitte nach der Strahlungskurve.¹⁾

Indessen war auch meine „Mathematische Klimalehre“ im „Handbuch der Klimatologie“ erschienen, wodurch meine Theorie einem weiten wissenschaftlichen Kreis zugänglich gemacht wurde. Reichel besprach sie ausführlich und erklärte, dass man wohl keine Bedenken tragen darf, der Behandlung der Klimaschwankungen für das letzte Stadium der Erdgeschichte die von mir gegebene theoretische Ableitung zugrunde zu legen.²⁾

Für die Verbreitung der Lehren meiner Theorie hat Keilhack besonders viel getan, indem er über diese Theorie in seinem im „Handwörterbuch der Naturwissenschaften“ erschienenen Artikel „Eiszeiten“ ausführlich berichtete und die gegen dieselbe vorgebrachten Einwände widerlegte.³⁾

Auch v. Seidlitz⁴⁾, v. Bubnoff⁵⁾, Wright⁶⁾ und Schwinner⁷⁾ haben in ihren Büchern meine Theorie weitgehend berücksichtigt.

Auch meinen beiden als Fortsetzung der „Mathematischen Klimalehre“ zu betrachtenden Veröffentlichungen, den „Neuen Ergebnissen der astronomischen Theorie der Klimaschwankungen“ und den „Astronomischen Mitteln zur Erforschung der erdgeschichtlichen Klimate“ wurde eine freundliche Aufnahme zuteil, worüber ich im Vorwort bereits berichtet habe. Die Ergebnisse der drei erwähnten Veröffentlichungen wurden von Gutenberg in sein grosses Sammelwerk „Physics of the Earth“ aufgenommen und dadurch dem amerikanischen und englischen Gelehrtenkreis zugänglich gemacht.⁸⁾ Auch Schulman war in diesem Sinne tätig.⁹⁾

Es soll nicht unerwähnt bleiben, dass gegen meine Theorie auch einige Einwände erhoben wurden, die sich aber durchwegs als Missdeutungen derselben erwiesen haben. Als meine ersten Strahlungskurven veröffentlicht wurden, erklärten einige, dass diese Kurven die einstigen Vereisungen auf der südlichen Hemisphäre und in der äquatorialen Zone nicht erklären können. Freilich können die für die hohen nördlichen Breiten berechneten Strahlungskurven dies nicht tun, dies leisten wie noch gezeigt werden wird, die später für die südliche Hemisphäre und für die äquatoriale Zone berechneten Strahlungskurven in vollem Masse. Der Name der astronomischen Theorie, mit dem ich meine Lehre kennzeichnete, verleitete manche zu der Auffassung, diese Theorie sei mit den Fehlern der alten Theorien der Eiszeiten behaftet, was, wie vorstehend gezeigt, unrichtig ist. Man behauptete ferner, dass meine Theorie eine gleichzeitige Vereisung der beiden Hemisphären nicht erklären

1) Wasmund E. Klimaschwankungen in jüngerer geologischer Zeit. Handbuch der Bodenlehre. Band II. Berlin 1929.

2) Zeitschrift für Gletscherkunde. Band 19. 1931.

3) Handwörterbuch der Naturwissenschaften. 2. Aufl. S. 80—98. Jena 1933.

4) v. Seidlitz W. Der Bau der Erde und die Bewegungen ihrer Oberfläche. Berlin 1932.

5) v. Bubnoff S. Grundprobleme der Geologie. Berlin 1931.

6) Wright W. B. The Quarternary Ice Age. 2. Edit. London 1937.

7) Schwinner R. Lehrbuch der physikalischen Geologie. Band I. Berlin 1936.

8) Gutenberg B. Hypotheses on the Development of the Earth's Crust and their Implications. In Gutenbergs „Physics of the Earth“ VII. New York and London 1939.

9) Schulman Ed. Mathematische Klimalehre by M. Milankovitch. Bulletin of the American Meteorological Society. Vol. 19. 1938.

könne, was, wie man ebenfalls sehen wird, unrichtig ist. Ganz ungerechtfertigt erwies sich auch die Befürchtung, der für die astronomische Zwecke hergestellte Apparat der Störungsrechnung reiche für Zeitbestimmungen der Geologie nicht aus. Ebenso ungeheuerlich war die Zumutung, ich hätte „mit den Veränderungen der Schiefe der Ekliptik und der Lage des Perihels, die in der Gegenwart beobachtet werden, eine Extrapolation vorgenommen, um daraus eine Aenderung der Strahlungskurve für das Diluvium folgern zu wollen“. Eine derartige Behauptung kann nur von demjenigen herrühren, der den bewunderungswürdigen Mut besitzt, über Sachen zu schreiben, von denen er keine Ahnung hat

Alle vorstehend angeführten Einwände gegen meine Theorie rührten, wie aus dem soeben gesagten gefolgert werden muss, davon her, dass sich deren Autoren mit meiner Theorie nicht genügend vertraut gemacht haben, weshalb ich alle diese Einwände unbeantwortet gelassen habe. Ich betrachtete es nicht als meine Pflicht, Uneingeweihten Elementarunterricht zu erteilen, habe auch nie den Versuch gemacht, die Anwendung meiner Theorie, an der niemand einen Fehler entdeckt hat, anderen aufzudrängen.

Ich hatte meine reservierte Haltung nicht zu bereuen, denn mehrere deutsche Gelehrte haben ohne mein Mittun die richtige Antwort auf die erhobenen Einwände gefunden. Unter diesen ist an erster Stelle wieder W. Köppen zu nennen. Trotz seines hohen Alters verfolgte er bis an sein Lebensende mit regem Interesse die auf die Strahlungskurven sich stützende Erforschung des Eiszeitalters und ergriff mehrere Male die Feder, um über die erzielten Erfolge zu berichten.¹⁾ Wenige Tage vor seinem Tode konnte er noch die Ergänzungen zu seinem und Wegeners Werk fertigstellen und mit Genugtuung noch einmal überblicken, was seit dem Erscheinen jenes Werkes in der Erforschung der erdgeschichtlichen Klimate geleistet worden ist.²⁾

Auch Georg von Bacsák hat gegen die erwähnten Missdeutungen meiner Theorie energisch Stellung genommen.³⁾ Er hat sich, wie bereits berichtet, eingehend und mit Erfolg mit dem Studium meiner Strahlungskurven befasst und es ist ihm gelungen, meine Theorie auch Nichtmathematikern leicht verständlich zu machen. Dabei hat er den Interglazialzeiten mehr Beachtung geschänkt, als ich es getan habe, und hat mit Hilfe der aus den beiden komponentalen Schwankungen der Strahlungskurve sich ergebenden Abschnitte des Eiszeitalters, je nachdem sie sich durch kalte Sommer bzw. durch warme Sommer, warme Winter oder kalte Winter auszeichneten, in glaziale bzw. antiglaziale, subtropische und subarktische unterschieden. Diese Kategorisierung erwögligte ihm, einen tieferen Einblick in das Klima der interglazialen Perioden des Quartärs zu gewinnen.

¹⁾ Köppen W. Neuere über Verlauf und Ursachen des europäischen Eiszeitalters. Gerlands Beiträge zur Geophysik. Band 26. 1930. — Schwankungen der Sonnenstrahlung seit 13500 Jahren und deren Folgen. Ebenda. Band 31. 1931. — Vergleich zweier Eiszeiten-Theorien. Ebenda. Band 43. 1935.

²⁾ Ergänzungen und Berichtigungen zu W. Köppen und A. Wegener: Die Klimate der geologischen Vorzeit. Berlin 1941.

³⁾ v. Bacsák G. Zur Erklärung der Interglazialzeiten (ungarisch, mit einem ausführlichen deutschen Textauszug) „Az időjárás“ (Das Wetter). Band XLIV. Budapest 1940.

Nach und nach kamen die Strahlungskurven auf immer weiteren Gebieten der erdgeschichtlichen Forschung und auch ausserhalb Deutschlands zur Anwendung. Girmounsky schenkte bei seinem Versuch einer vergleichenden Zusammenstellung der westeuropäischen, amerikanischen und russischen Schematen für die Gliederung der Quartäreiszeit und in seinen Untersuchungen über die untere Grenze des Anthropozoikums volle Beachtung der astronomischen Theorie der Klimaschwankungen¹⁾; dasselbe tat auch Klimaszewski, der die polnischen Vereisungen mit der Strahlungskurve in Verbindung brachte.²⁾ Reinig wendete diese Theorie für das ganze Nordeuropa, Sibirien und Nordamerika umfassende zirkumpolare Gebiet in seinem Buche, das sich mit dem Studium quartärer Wandlungen der Faunen und Floren dieser Gebiete befasste.³⁾ Auch bei den Untersuchungen über das Quartär von Finland, Ungarn, Italien, Frankreich und England fanden die Strahlungskurven Anwendung, wie dies aus den auf der Quartär-Konferenz in Wien gehaltenen Vorträgen von Sauramo, Scherf, Blanc und Zeuner hervorging.⁴⁾

Auf diese Weise ist im Laufe der Zeit ein auf die Strahlungskurven und auf die Vollgliederung des Eiszeitalters bezugnehmendes reichhaltiges wissenschaftliches Material zu Tage gebracht worden, und es entstand das Bedürfnis, dasselbe zu sammeln, zu sichten und ordnen. Friedrich Zeuner, der aus der Schule von Soergel hervorgegangen, einen Lehrauftrag für Geochronologie an der Universität in London erhalten hatte, unternahm es, diese Arbeit zu leisten. Er vollführte sie in einer umfangreichen Studie „Die Chronologie des Pleistozäns“.⁵⁾ In derselben hat er die vorstehend grösstenteils bereits angeführten auf die Strahlungskurven bezugnehmenden Arbeiten benützt und ebensoviel andere Arbeiten berücksichtigt, die sich mit der Gliederung des Quartärs befassen; zusammengezählt sind es über 130 Arbeiten.

1) Girmounsky A. Versuch einer vergleichenden Zusammenstellung der westeuropäischen, amerikanischen und russischen Schemen für die Gliederung der Quartärzeit. Zeitschrift für Gletscherkunde. Band 19. 1931. — Die Probleme der unteren Grenze des Anthropozoikums und einige Fragen der Synchronisation der anthropozoischen Ablagerungen. Transactions of the II International Conference of the study of the quaternary period in Europe. Fascicle I. Leningrad-Moskow. 1932.

2) Klimaszewski M. Some problems of the glaciation in Poland. Rocznik Polskiego Towarzystwa geologicznego. Tome VIII. 1932.

3) Reinig W. F. Die Holarktis. Ein Beitrag zur diluvialen und alluvialen Geschichte der zirkumpolaren Faunen- und Florengebiete. Jena 1937.

4) Verhandlungen der III. Internationalen Quartär-Konferenz, Wien September 1936.: Sauramo M. Ueber das spätglaziale Klima. — Scherf E. Versuch einer Einteilung des ungarischen Pleistozäns auf moderner polyglazialistischer Grundlage. — Blanc A. C. Ueber die Quartärstratigraphie des Agro Pontino und der Bassa Versilia. — Zeuner F. Die Beziehungen des englischen und französischen Pleistozäns zum deutschen Diluvium.

Siehe auch: Sauramo M. The mode of the land upheaval in Fennoscandia during late-quaternary time. Comptes Rendus de la Société géologique de Finlande № XIII. 1939. — Zeuner F. The pleistocene Chronology of Central Europe. Geological Magazine. Vol. LXXII. 1935. — Zeuner F. A comparison of the Pleistocene of East Anglia with that of Germany. Proceedings of the Prehistoric Society. 1937.

5) Zeuner F. Die Chronologie des Pleistozäns. (serbisch). Berichte der königlich serbischen Akademie. Band CLXXVII. 1937. — Eine vollständige deutsche Uebersetzung dieser Arbeit erschien im „Bulletin de l'Académie des sciences mathématiques et naturelles. B. № 4. 1938.

Zeuner verarbeitete das gesammelte reichhaltige Material vorerst nach geographischen Gesichtspunkten: Zentral- und Nordeuropa, Ost- und Südeuropa, Westeuropa, Mittelmeergebiet und Tropen, und ordnete es sodann in die Strahlungskurve ein. Dadurch entstand die in meinen „Astronomischen Mitteln“ wiedergebene Chronologie europäischer Glazialablagerungen, in der auch die bereits erwähnten vor-günzischen Ablagerungen ihre Berücksichtigung fanden. Diese wurden nach den aus der Köppenschen, Soergelschen und Eberlschen Deutung meiner Strahlungskurven sich ergebenden und in der Literatur bereits eingebürgerten Unterabteilungen kategorisiert und den aus der Strahlungskurve gewonnenen Zeitpunkten der Vorzeit zugeordnet.

Die Schlussergebnisse, zu denen Zeuner auf Grund seiner Arbeit gelangte, seien hier, etwas gekürzt, wiedergegeben.

„Abschliessend kann man feststellen, dass in einem grossen Teile von Europa und sogar des Mittelmeergebietes die sogenannte Vollgliederung die stratigraphischen Verhältnisse besser erklärt als das Penck-Brücknersche Schema. Hierbei ist die Vollgliederung als eine Verfeinerung des Penck-Brücknerschen Schemas aufzufassen, denn es hat sich allenthalben gezeigt, dass jede der Penck-Brücknerschen Eiszeiten in zwei kalte Phasen zerfällt (Wurm in drei) und dass daneben noch einige unbedeutende Schwankungen vorgekommen sind, die sich nur in seltenen Fällen geologisch belegen lassen. Da die Vollgliederung also durch Ausbau der älteren Gliederung gewonnen wurde und auf einer Fülle von beobachteten und im Gelände aufgenommenen Tatbeständen beruht, kann ihr nicht der Vorwurf gemacht werden, dass sie zugunsten einer Theorie aufgestellt worden sei. Dies geht schon aus der Menge von Arbeiten hervor, die ohne Kenntnis der Strahlungskurve ausgeführt worden sind und zugunsten Vollgliederung sprechen. Die in der Vollgliederung des Pleistozäns belegten Klimaschwankungen stimmen selbst in Einzelheiten mit den säkularen Schwankungen der sommerlichen Sonnenstrahlung überein, welche von Milankovitch für die letzte Million Jahre auf rein astronomischer Grundlage berechnet wurden. Nach den primitivsten Regeln der Wahrscheinlichkeit kann die Uebereinstimmung zweier derartig komplizierter Systeme nicht gut auf Zufall beruhen“.

Zeuner befasste sich in seiner Studie auch mit der Chronologie der prähistorischen Kulturen. Sein Lehrer Soergel hat bereits im Jahre 1925 mit dieser Arbeit begonnen, und seine Schüler haben sie fortgesetzt.¹⁾ Soergel hat darauf hingewiesen, dass die absolute Zeitrechnung mit der genauen Datierung der Kulturstufen und Menschenrassen in die Diluvialprähistorie gewissermassen vollhistorische Momente bringt, die dem Vorstellungsbild alten historischen Geschehens grössere Tiefe, der Beurteilung dieses Geschehens einen verlässlichen Massstab geben.

¹⁾ Peters E. und Toepfer V. Der Abschluss der Grabungen am Petersfels bei Engen im badischen Hegau. Prähistorische Zeitschrift. Band XXIII. 1932. — Toepfer V. Die mitteldiluvialen Säugetierreste aus der Saaleterrasse bei Lengenfeld-Bad Kösen. Neues Jahrbuch für Mineralogie. Beil. - Band 74. Abt. B. 1935. — Fauler W. Das Deckenprofil und das geologische Alter der Moustierstation von Wallertheim (Rheinessen). Jahresberichte und Mitteilungen des Oberrheinischen geologischen Vereines. Band XXVII. 1938. — Zeuner F. The age of neanderthal Man. Geochron. Table 2. University of London. Institute of Archaeology. 1910.

Zeuner hat in seiner „Chronologie des Pleistozäns“ eine graphische Darstellung der zeitlichen Verteilung der europäischen Kulturen des Paläolithikums gegeben.

Für die Erweiterung des Anwendungsgebietes der Strahlungskurven hat sich Alberto Carlo Blanc besonders verdient gemacht. Das eigentliche Forschungsgebiet Blanc's sind die Strandebenen des Agro Pontino bei Rom und jene der Bassa Versilia, nördlich der Einmündung des Arno. Hier haben abwechselnde Meeres- und Landablagerungen mit eingeschalteten Torfen, Faunen und paläolithischen Industrien ein getreues Abbild der hier während der letzten Interglazialzeit und der letzten Eiszeit stattgefundenen physischen und biologischen Veränderungen des Geländes hinterlassen. Hier ist es Blanc gelungen, den Zusammenhang zwischen den klimatischen Schwankungen und den Schwankungen des Meeresspiegels aufzudecken, diese Schwankungen in die Strahlungskurve einzuordnen und dadurch astronomisch zu datieren.¹⁾ Dadurch ist ein neues Anwendungsgebiet der Strahlungskurven erschlossen worden²⁾, auf dem auch Zeuner tätig war, der seine Untersuchungen auf Mittelmeer, Westeuropa, Südafrika, Australien und Nordamerika erstreckte.³⁾

Die Untersuchungen Blanc's führten zu der Entdeckung zweier fossilen menschlichen Schädeln, die in der Kiesgrube Saccopastore bei Rom bzw. in der Grotte Guattari am Monte Circeo ausgegraben wurden. Es sind dies zwei verschiedene Varietäten des Homo neanderthalensis. Aus der topographischen und stratigraphischen Lage der Schichten, in denen diese Funde gemacht wurden, und mittels der bereits erwähnten Einordnung der Schwankungen des Meeresspiegels in die Strahlungskurve ist es Blanc gelungen, das Alter dieser beiden Neanderthaler zu bestimmen. Der Homo neanderthalensis di Saccopastore weist ein Alter von mindestens 130 000 Jahren auf, das Alter des Homo neanderthalensis del Monte Circeo liegt zwischen den Jahren 130 000 bis 70 000, dürfte aber dieser letzteren Zahl näher sein.⁴⁾

Auch in seinen anderen Arbeiten hat Blanc von den Strahlungskurven Gebrauch gemacht⁵⁾ und hat meiner Theorie der Klimaschwankungen eine besondere Abhandlung gewidmet.⁶⁾

1) Blanc A. C. Low levels of the Mediterranean Sea during the Pleistocene Glaciation. Quarterly Journal of the Geological Society of London. Vol. XCIII. 1937.

2) Blanc A. C. Le variazioni delle linee di riva del Mar Caspio, del Mar Nero e del Mediterraneo durante il Quaternario. Bolletino della Società Geologica Italiana. Vol. LVI. 1937.

3) Zeuner F. The Chronology of the Sea-Levels. Annals and Magazine of Natural History. 1938.

4) Blanc A. C. L' Uomo fossile del Monte Circeo: un cranio neandertaliano nella Grotta Guattari a San Felice Circeo. Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali. Serie 6^a. Vol. XXIX. 1939. — L' Uomo fossile del Monte Circeo. Rivista di Antropologia. XXXII. 1939. — L' Uomo del Monte Circeo e la sua età geologica. Bolletino della Società Geologica Italiana. Vol. LVIII. 1939. — L' Homme fossile du Mont Circé. L' Anthropologie. Tome 49. 1939. — Les grottes paléolithiques et l' Homme fossile du Mont Circé. Revue Scientifique. 1940. — The fossil Man of Circe's Mountain. „Natural History“ May, New York 1940.

5) Blanc A. C. Dipinto schematico rupestre nell' Arnalo dei Bufali sotto Sezze Romano. Bulletino di Paleontologia. Vol. III. 1939. — Dei „Microbulini“ e della precoce comparsa del mesolitico in Italia. Rivista di Antropologia. Vol. XXXII. 1939.

6) Blanc A. C. La curva di Milankovitch e la sua applicatione alla datazione assoluta dei Neandertaliani a Italia. Atti della Società Toscana di Scienze Naturali. Memorie. — Vol. XLVIII. 1939.

Die vorstehend angeführten Forschungsergebnisse veranlassten Soergel, sie in ein System zusammenzufassen, in dem alles klimatische, alles geologische und auch alles biologische Geschehen in seinen Ursachen, seinen gegenseitigen Bedingtheiten, seinem Wechsel nach Zeit und Ort klargelegt, einen breiten Weg zur vollständigen Erschliessung des Eiszeitalters eröffnen soll. Diesem Zwecke ist das neueste Werk von Soergel „Das diluviale System“ gewidmet, von dem der erste Teil bereits veröffentlicht ist.¹⁾ In diesem sind die geologischen Grundlagen der Vollgliederung des Eiszeitalters (zunächst ohne Berücksichtigung der Strahlungskurve) und die regionale Gültigkeit der Vollgliederung vor allem für den deutschen Raum, in dem diese Gliederung aufgestellt wurde, einer gründlichen Ueberprüfung unterworfen worden. Die weiteren Teile dieses gross angelegten Werkes werden den Zusammenhang dieser Gliederung mit der Strahlungskurve bzw. mit der Vereisungskurve, von der noch die Rede sein wird, zum Gegenstand haben.

Ich will meinen Bericht zum Abschluss bringen mit einem Hinweis auf eine andere zusammenfassende Darstellung des hier behandelten Gegenstandes, die ebenfalls von Soergel herrührt.²⁾ In derselben, die aus einem Vortrag auf der Hochschulwoche der Universität Freiburg hervorgegangen ist, gibt Soergel einen umfassenden, äusserst anschaulichen Ueberblick des Eiszeitalters in Mitteleuropa und schildert darin, wie aus dem Zusammenwirken zweier Wissenschaften, der Astronomie und der Geologie, die Vollgliederung des Eiszeitalters hervorgegangen ist und welche Früchte dieser neue Wissenszweig getragen hat.

¹⁾ Soergel W. Das diluviale System. I. Die geologischen Grundlagen der Vollgliederung des Eiszeitalters. Berlin 1939.

²⁾ Soergel W. Das Eiszeitalter. Jena 1938.

Klimatische Answirkungen des säkularen Ganges der Erdbestrahlung

§ 120. Die unmittelbaren thermischen Effekte des säkularen Ganges der Erdbestrahlung. Die Ergebnisse des fünften Abschnittes dieses Buches setzen mich in den Stand, die thermischen Effekte des säkularen Ganges der Erdbestrahlung mathematisch zu erfassen. Diese Effekte können in unmittelbare und mittelbare unterschieden werden; mit den ersteren habe ich mich bereits in der „Mathematischen Klimalehre“ befasst, die letzteren kamen in meinen „Astronomischen Mitteln“ zur ausführlicheren Behandlung. Diese Reihenfolge soll auch hier eingehalten werden.

Was unter den unmittelbaren, was unter den mittelbaren Effekten des säkularen Ganges der Erdbestrahlung zu verstehen ist, das lässt sich an der Hand der Gleichung (119) des fünften Abschnittes, d. h. der Gleichung

$$(4) \quad \sigma\theta^4(o) = \frac{1}{2} (1 - A)(1 + k_2 M) W$$

deutlich erklären.

Diese Gleichung vermittelt den Zusammenhang zwischen der jahreszeitlichen, ganzjährigen oder halbjährigen, Bestrahlung W der in Betracht gezogenen Breite der Erdoberfläche und der zugehörigen absolut gemessenen Temperatur $\theta(o)$ der untersten Luftschicht. Dabei bedeutet A das Reflexionsvermögen der in Betracht gezogenen Flächeneinheit der Erdoberfläche samt der darauf lagernden Atmosphäre, M die Masse dieser atmosphärischen Säule und k_2 den zugehörigen Absorptionskoeffizient für die dunklen Strahlungen.

Nehmen wir vorerst an, es habe sich an der in Betracht gezogenen Stelle der Erde nur die jahreszeitliche Bestrahlung W säkular verändert. Dann lässt sich die dadurch verursachte Aenderung der Temperatur $\theta(o)$ wie folgt berechnen.

Der gemachten Annahme zufolge sind in der vorstehenden Gleichung die Grössen A und k_2 als unveränderlich zu betrachten und es folgt aus den Gleichungen (84) und (140) des vorhergehenden Abschnittes

$$(5) \quad \theta^4(o) = 14145 \times 10^6 W$$

oder, falls man der kürzeren Schreibweise halber

$$(6) \quad n = 14145 \times 10^6$$

setzt und aus demselben Grunde statt $\theta(o)$ einfach θ schreibt,

$$(7) \quad \theta^4 = n W.$$

Es stelle W die dem in Betracht gezogenen Jahre der geologischen Vorzeit zugehörige jahreszeitliche Bestrahlung und θ die zugehörige jahreszeitliche Temperatur dar, während die auf die Gegenwart sich beziehenden Werte mit W_0 bzw. θ_0 bezeichnet werden mögen. Es ist dann

$$(8) \quad \theta_0^4 = n W_0$$

$$(9) \quad \theta^4 - \theta_0^4 = n(W - W_0).$$

Die Differenz

$$(10) \quad W - W_0 = \Delta W$$

stellt die säkulare Aenderung der Bestrahlung W dar und es ist

$$(11) \quad \theta^4 - \theta_0^4 = n \Delta W.$$

Bezeichnet man die in Celsiusgraden gemessenen auf die Vorzeit bzw. auf die Gegenwart sich beziehenden Temperaturen der untersten Luftschicht mit u bzw. u_0 , so ist

$$\theta = 273 + u$$

$$\theta_0 = 273 + u_0$$

$$\theta^4 = 273^4 \left(1 + \frac{u}{273}\right)^4$$

$$\theta_0^4 = 273^4 \left(1 + \frac{u_0}{273}\right)^4$$

Berücksichtigt man, dass $\frac{u}{273}$ und $\frac{u_0}{273}$ kleine Zahlen sind, so dass ihre Potenzen neben der Einheit vernachlässigt werden können, dann folgt mit Anwendung der Binomialformel:

$$\theta^4 = 273^4 \left(1 + \frac{4u}{273}\right)$$

$$\theta_0^4 = 273^4 \left(1 + \frac{4u_0}{273}\right)$$

$$(12) \quad \theta^4 - \theta_0^4 = 4 \times 273^3 (u - u_0).$$

Weil

$$(13) \quad u - u_0 = \Delta u$$

die säkulare Änderung der Temperatur der untersten Luftschicht veranschaulicht, so folgt aus (11), (12) und (13)

$$(14) \quad \Delta u = \frac{n}{4 \times 273^3} \Delta W,$$

d. h. wegen (6)

$$(15) \quad \Delta u = 173,8 \Delta W.$$

Will man die soeben gewonnene Formel benützen, um die säkularen Schwan-

kungen der Mitteltemperatur des kalorischen Sommer- bzw. Winterhalbjahres zu berechnen, dann ist folgendes zu berücksichtigen.

In der Formel (15) ist für ΔW die pro Minute berechnete Bestrahlung der Flächeneinheit und zwar in Grammkalorien einzusetzen. Die in der Tabelle XXV mitgeteilten säkularen Schwankungen ΔQ_s und ΔQ_w der sommerlichen bzw. der winterlichen Strahlungsmengen Q_s und Q_w sind in kanonischen Einheiten ausgedrückt, für die $J_0 = 1$; $T = 100\,000$ gesetzt wurde. Weil das Jahr $T = 525942$ Minuten umfasst und $J_0 = 1,946$ Grammkalorien pro Minute beträgt, hat man, wie im § 85 auseinandergesetzt, die Zahlen der Tabelle XXV mit $\frac{1,946 T}{100\,000}$ zu multiplizieren und nachher, da das kalorische Halbjahr $\frac{1}{2} T$ Minuten umfasst, mit dieser Zahl zu dividieren, also alles in allem mit 50 000 zu dividieren und mit 1,946 zu multiplizieren. Man bekommt also

$$\Delta u_s = \frac{1,946 \times 173,8}{50\,000} \Delta Q_s,$$

d. h. abgerundet

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u_s = \frac{1}{150} \Delta Q_s \\ \Delta u_w = \frac{1}{150} \Delta Q_w. \end{array} \right.$$

Die vorstehenden Formeln besagen, dass man die in Celsiusgraden gemessenen säkularen Aenderungen der Mitteltemperaturen des kalorischen Sommer- bzw. Winterhalbjahres erhält, wenn man die in der Tabelle XXV enthaltenen Zahlen durch 150 dividiert.

Die Berechnung der säkularen Schwankung Δu_T der Mitteltemperatur u_T des ganzen Jahres geschieht auf folgende Weise.

Die säkulare Schwankung der jährlichen Bestrahlung Q_T ist durch den Ausdruck

$$\Delta Q_T = \Delta Q_s + \Delta Q_w$$

gegeben. Weil das Jahr 100 000 kanonische Zeiteinheiten umfasst, so ergeben die vorstehenden Ueberlegungen

$$(17) \quad \Delta u_T = \frac{1}{300} (\Delta Q_s + \Delta Q_w),$$

d. h., wie zu erwarten,

$$\Delta u_x = \frac{1}{2} (\Delta u_s + \Delta u_w).$$

§ 121. Die mittelbaren klimatischen Effekte des säkularen Ganges der Erdbestrahlung. Das vorstehend gewonnene Ergebnis gilt nur, wenn die bei der Ableitung desselben gemachten Voraussetzungen erfüllt sind, d. h. wenn das Reflexionsvermögen A unverändert bleibt. Dies ist der Fall solange das in Betracht gezogene Gebiet der Erdoberfläche nicht unter eine auch den Sommer überdauernde Eisdecke gelangt, d. h. nur für die während der Vorzeit nicht vereisten Gebiete. In den vereisten Gebieten kommt der mächtige Einfluss der Schneedecke zur Geltung. Durch eine solche Decke wird das Reflexionsvermögen A wesentlich vergrößert und ein namhafter Teil der auf dieses Gebiet während des Sommers auffallenden Strahlung wird für den Wärmehaushalt unbenutzt in den Weltraum zurückgewiesen. Mit zunehmender Mächtigkeit der Schneedecke rückt die Oberfläche des Gebietes in die Höhe und es entspricht, wie noch gezeigt werden wird, jeder Erhebung dieser Oberfläche um 150 Meter eine Verminderung der mittleren Sommertemperatur von einem Grad Celsius. Kommt dann im Laufe der Zeit die säkulare Vergrößerung der sommerlichen Bestrahlung an die Reihe, so braucht es langer Zeiträume bis diese Bestrahlung thermisch zur Geltung kommt, denn ein grosser Bruchteil dieser Bestrahlung muss vorerst zum Abschmelzen des angehäuften Schnees verwendet werden

Ich habe in meiner „Mathematischen Klimalehre“, § 42, eine mathematische Beschreibung der vorstehend geschilderten Erscheinungen geliefert, und Soergel hat sie praktisch verwertet¹⁾, worüber hier kurz berichtet werden möge, wobei ich mich auch der bereits angeführten Monographie Soergels „Das Eiszeitalter“ bediene.

Aus der Strahlungskurve lassen sich die Zeiten der maximalen bzw. minimalen sommerlichen und winterlichen Bestrahlungen der in Betracht gezogenen Gebiete direkt ablesen, sie lässt aber nicht ohne weiteres erkennen, in welchem Zeitpunkt die Eismassen jeweils ihre grösste Ausdehnung besaßen und zwar aus folgendem Grunde.

Wenn bei sinkender Strahlung die Ausdehnung der Eismassen zunimmt, so werden diese wachsenden Eismassen selbst ein Faktor der Abkühlung, so dass das Abkühlungsmass und damit die Tendenz zur Eiserhaltung und Eisausdehnung über das Mass der Strahlungsminderung hinaus eine Steigerung erfährt. Mit sinkender Strahlung und wachsender Eisausdehnung werden die Bedingungen zur weiterer Vergrößerung des Eisschildes zunehmend günstiger. Als die Strahlung zur Zeit einer Kältsommer-Periode ihren tiefsten Stand erreichte, waren die Eismassen im Vormarsch, war ihre Kältewirkung noch in Wachsen. Als die Strahlung wieder zu steigern begann, blieb der geringe Wärmegewinn für lange Zeit gegenüber der Kältewirkung der Eismassen ohne entscheidenden Einfluss, weshalb sich der Eishochstand gegenüber dem Strahlungstief verzögerte. Soergel unternahm es mit Berücksichtigung der für das Abschmelzen des Eises erforderlichen Strahlungsmengen, diese Verzögerung abzuschätzen und auf Grund

1) Soergel W. Die Vereisungskurve. Berlin 1937.

der geologischen Befunde, die sich vorwiegend auf das Gebiet zwischen dem elften und neunzehnten Grad östlicher Länge erstreckten, aus der Strahlungskurve eine Kurve zu konstruieren, die er die Vereisungskurve nannte und aus der ersichtlich ist, wo der Rand der nordischen Eismassen jeweils gelegen hat. Auf diese Weise liessen sich die zeitliche Stellung und Dauer nicht nur der Eiszeiten, sondern auch der Zwischeneiszeiten mit einer für die Aufgaben der Eiszeitforschung zunächst hinreichender Genauigkeit festlegen.

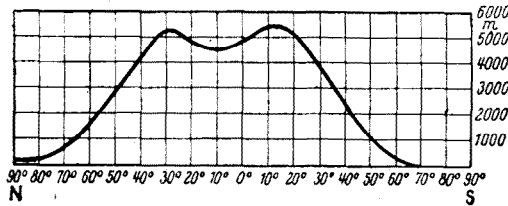
Aus der Soergelschen Vereisungskurve kann man auch die Dauer der Vorstossphase und der grossen Rückschmelzphase ablesen, es können aus der Strahlungs- und Vereisungskurve die Klima- bzw. Temperaturverhältnisse im jeweiligen Vor- und Umland des Eises abgeleitet werden.

In weiterer Anwendung der Strahlungs- und Vereisungskurve gelang es Soergel, Tier- und Pflanzenfunde, die körperlichen Reste der Menschen und ihre Kulturen ihrer absoluten Zeitstellung nach zu bestimmen. Auf diese Weise ergaben sich folgende das ungefähre Alter der Einzelfunde bezeichnende Zahlen: Homo Heidelbergensis etwa 530 000 Jahre vor der Gegenwart, der Urmensch von Steinheim, je nachdem die Kiese, aus denen der Schädel zu tage kam, vor die erste und die zweite Risseiszeit gehören, etwa 300 000 bzw. 200 000 vor heute, die Ehringsdorfer Neandertal-Rasse etwa 128 000 vor heute, der Neandertaler aus dem Neandertal bei Düsseldorf, nach dem Alter westeuropäischer, mit Säugetierresten und Steinwerkzeugen überlieferter Funde beurteilt, etwa 115 000—100 000 vor heute; der Schädel aus der Höhle am Vogelherd nach allgemeiner Alterstellung der begleitenden Steinwerkzeuge etwa 80 000 vor heute und die Skelette von Oberkassel bei Bonn auf Grund der mit ihnen gefundenen Knochenarbeiten etwa 60 000 vor heute.

Ich habe, wie im Vorwort berichtet, nach der Veröffentlichung der „Mathematischen Klimalehre“ einen anderen Weg gefunden, den wichtigsten klimatischen Effekt des säkularen Ganges der Erdbestrahlung, die säkularen Verschiebungen der Schneegrenze, mathematisch zu erfassen und mit diesem Gange in direkte Beziehung zu bringen. Wie dies geschehen ist, soll nachstehend gezeigt werden.

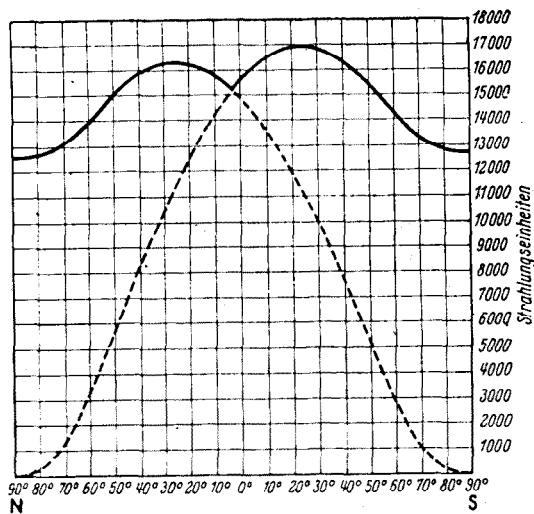
§ 122. Die durch den säkularen Gang der Erdbestrahlung unmittelbar hervorgerufenen Verschiebungen der Schneegrenze. Die gegenwärtige Höhenlage der Schneegrenze in den verschiedenen Gebieten der Erdoberfläche ist eine Funktion mannigfaltiger Faktoren, der Temperatur, der Niederschlagsmenge, der Meeresströmungen, des Oberflächenreliefs und anderer sekundärer Einflüsse. Stellt man die Frage, welche Verschiebungen diese Schneegrenze infolge des sich stetig ändernden Bestrahlungszustandes der Erde im Laufe der Vorzeit erfahren hat, so hat man nur den ersten der soeben angeführten Faktoren in Betracht zu ziehen. Schaltet man also alle übrigen Faktoren aus, oder nimmt man an, diese Faktoren seien auf der Erdoberfläche gleichmässig wirksam, so wird die Höhenlage der Schneegrenze nur eine Funktion der geographischen Breite sein können. Sie wird unter den obigen Voraussetzungen, wie dies schon Humboldt, Buch und Renou erkannt haben, eine Isothermiläche der wärmeren Jahreshälfte darstellen, weil diese wärmere Jahreshälfte für das Abschmelzen des Schnees, also für dessen untere Grenze allein massgebend sein wird. Schmilzt dort der Schnee während der wärmeren Jahreshälfte nicht weg, so wird er um so weniger während der kälteren Jahreshälfte zum Schmelzen

gebracht werden können. Unter der wärmeren Jahreshälfte haben wir das dem kalorischen Sommerhalbjahr zugeordnete thermische Sommerhalbjahr zu verstehen, das, wie im fünften Abschnitt dieses Buches gezeigt, einen Phasenunterschied von 26 Tagen gegenüber dem kalorischen Sommerhalbjahr aufweist. Um diese Zeitspanne verspäten sich die Temperaturextreme gegenüber den Strahlungsextremen. Deshalb



Heutige Höhe der Schneegrenze in den verschiedenen Breiten. Nach W. Köppen.

Fig. 53



Die während der kalorischen Halbjahre den einzelnen Breiten zugestrahlt
Wärmemengen.

Voll: Sommerhalbjahr; gestrichelt: Winterhalbjahr.

Fig. 54

ist für das Abschmelzen des Schnees, d. h. für die Höhenlage der Schneegrenze, die während des kalorischen Sommerhalbjahres zugestrahlt Wärmemenge entscheidend.

Es handelt sich nun darum, den Zusammenhang zwischen der sommerlichen Bestrahlung der einzelnen Breiten der Erdoberfläche und der zugehörigen

Höhenlage der Schneegrenze zu ermitteln. Zu diesem Zwecke stehen uns vor allem die Angaben über die gegenwärtige mittlere Höhenlage der Schneegrenze an den verschiedenen Breiten der Erdoberfläche zur Verfügung. Auf Grund dieser Angaben hat Köppen ein graphisches Diagramm entworfen, das die mittlere Höhenlage der Schneegrenze an den verschiedenen Breiten der Erde veranschaulicht¹⁾ und das ich hier in der beiliegenden Fig. 53 wiedergebe.

Ueber die gegenwärtige sommerliche Bestrahlung der einzelnen Breiten der Erdoberfläche sind wir durch die Ergebnisse der Tabelle XXII auf das Genaueste unterrichtet. In der beiliegenden Fig. 54 ist das Diagramm gegeben, welches nach den Angaben der Tabelle XXII die während der kalorischen Halbjahre zugestrahltten Wärmemengen als Funktion der geographischen Breite zur Darstellung bringt. In diesem Diagramm ist die auf das kalorische Sommerhalbjahr sich beziehende Kurve voll, jene auf das kalorische Winterhalbjahr sich beziehende gestrichelt gezeichnet. Der Punkt, in dem diese Kurven zusammenlaufen, entspricht dem kalorischen Aequator, denn hier sind die dem kalorischen Sommer- bzw. Winterhalbjahr zugehörigen Strahlungsmengen einander gleich. Die Abszisse dieses Punktes stellt die gegenwärtige geographische Breite des kalorischen Aequators dar. Dieser Aequator liegt, wie aus der Figur ersichtlich, in Uebereinstimmung mit unserer früheren Berechnung, am dritten Grad nördlicher Breite.

Vergleicht man die voll ausgezogene Kurve dieses Diagrammes mit der in der Fig. 53 dargestellten Kurve, so fällt der innige Zusammenhang zwischen diesen beiden Kurven sofort auf. In den beiden Kurven ist die äquatoriale Einsenkung deutlich ausgebildet, der Tiefpunkt dieser Einsenkung liegt in beiden Kurven nördlich der Aequators. In beiden Kurven ist der südliche Scheitelpunkt höher als der nördliche. Die durch die Fig. 53 dargestellte Schneegrenzkurve ist hingegen grundverschieden von der in der Fig. 54 strichliert eingezeichneten Kurve der winterlichen Bestrahlung und von der durch Addition der Ordinaten der beiden Kurven der Fig. 54 sich ergebenden Kurve der jährlichen Bestrahlung. Dies beweist, dass die Höhenlage der Schneegrenze nur von der sommerlichen Bestrahlung abhängig ist und mit der winterlichen und jährlichen Bestrahlung in gar keinem Zusammenhange steht.

Untersuchen wir nun den Zusammenhang der Schneegrenzkurve und der Kurve der sommerlichen Bestrahlung analytisch! Dabei ist zu berücksichtigen, dass in der Schneegrenzkurve in ihren beiden hoch hinaufgezogenen Scheitelstrecken sich der Einfluss eines der Bestrahlung fremden Elementes fühlbar macht, jener der Abwesenheit der Niederschläge in den beiden beiderseits des Aequators liegenden Trockenzone der Erdoberfläche. In diesen beiden Zonen liegt die Menge der Niederschläge tief unter dem auf die ganze Erdoberfläche sich beziehenden Durchschnittswerte. Bei der analytischen Untersuchung des Zusammenhanges zwischen der sommerlichen Strahlungsmenge und der Höhenlage der Schneegrenze muss dieses fremde Element ausgeschieden werden, weshalb ich die nachstehende Untersuchung auf das zwischen 40° und 90° nördlich gelegene Breiteintervall beschränken muss.

Diese Untersuchung will ich mit der Ermittlung des Korrelationsfaktors zwischen der Höhenlage der Schneegrenze und der sommerlichen Strahlungsmenge einleiten. Die beiliegende Tabelle XXVII ermöglicht, diesen Korrelationsfaktor zu finden.

¹⁾ Veröffentlicht in Wegener, Die Entstehung der Kontinente und Ozeane. Vierte Auflage. Braunschweig 1929.

Tabelle XXVII

| φ | h | Q_s | a | b | H |
|-----------|------|-------|-------|-------|------|
| 90° | 100 | 12669 | —1382 | —1197 | 173 |
| 85° | 175 | 12675 | —1307 | —1191 | 179 |
| 80° | 300 | 12733 | —1182 | —1133 | 243 |
| 75° | 475 | 12859 | —1007 | —1007 | 381 |
| 70° | 700 | 13074 | — 782 | — 792 | 616 |
| 65° | 1075 | 13445 | — 407 | — 411 | 1033 |
| 60° | 1550 | 14006 | + 68 | + 140 | 1626 |
| 55° | 2100 | 14573 | + 618 | + 707 | 2256 |
| 50° | 2625 | 15078 | +1143 | +1212 | 2808 |
| 45° | 3275 | 15522 | +1793 | +1656 | 3294 |
| 40° | 3925 | 15878 | +2443 | +2012 | 3684 |

Die erste Kolumne dieser Tabelle enthält die in Betracht gezogenen geographischen Breiten φ , die zweite die zugehörigen Höhenkoten h der Schneegrenze nach dem Köppenschen Diagramm, gemessen in Metern, die dritte die der Tabelle XXII entnommenen dem kalorischen Sommerhalbjahr zugehörigen Strahlungsmengen Q_s in kanonischen Einheiten. Die vierte Kolumne gibt die Abweichungen a der Höhen h von ihrem arithmetischen Mittelwert an, die fünfte die Abweichungen b der Strahlungsmengen Q_s von ihrem arithmetischen Mittelwert.

Der Korrelationsfaktor k ist, wie bekannt, durch die Formel

$$(18) \quad k = \frac{\sum ab}{\sqrt{\sum a^2 \sum b^2}}$$

gegeben. Setzt man in dieselbe die in der Tabelle XXVII enthaltenen numerischen Werte ein, so bekommt man:

$$k = 0,996.$$

Dieser ausserordentlich hohe Korrelationsfaktor ist der mathematische Beleg

des innigen Zusammenhanges zwischen der Höhenlage der Schneegrenze in den verschiedenen in Betracht gezogenen Breiten und der zugehörigen Strahlungsmenge des kalorischen Sommerhalbjahres.

Um den mathematischen Ausdruck dieses Zusammenhanges abzuleiten, sei die durch denselben darzustellende Höhenlage der Schneegrenze mit H bezeichnet. Der soeben gefundene sehr hohe Korrelationsfaktor ermöglicht, die Grösse H als eine lineare Funktion der Grösse Q_s darzustellen, d. h., dieser Funktion die Form

$$(19) \quad H = A + BQ_s$$

zu geben, worin A und B zwei Konstanten sind. Die numerischen Werte dieser zwei Konstanten sind aus der Forderung zu ermitteln, dass dieselben vermittlems der Theorie der kleinsten Quadrate die minimale Abweichung der theoretischen Höhe H von der durch die Beobachtung gewonnenen klimatischen Höhe h gewährleisten, d. h. die Forderung befriedigen:

$$\sum (H - h)^2 = \text{Minimum.}$$

Die vorstehenden zwei Gleichungen ergeben:

$$(20) \quad \sum (A + BQ_s - h)^2 = \text{Minimum.}$$

Bildet man also die Ableitungen des vorstehenden Ausdruckes nach A bzw. B und setzt diese gleich Null, so bekommt man die Gleichungen:

$$(21) \quad \begin{cases} \sum (A + BQ_s - h) = 0 \\ \sum (A + BQ_s - h)Q_s = 0. \end{cases}$$

Bezeichnet n die Anzahl der zu verwendenden Angaben über die Grösse h , so können die zwei vorstehenden Gleichungen durch

$$(22) \quad \begin{cases} nA + B\sum Q_s - \sum h = 0 \\ A\sum Q_s + B\sum Q_s^2 - \sum hQ_s = 0 \end{cases}$$

ersetzt werden

Setzt man in die zwei vorstehenden Gleichungen die Angaben der Tabelle XXVII ein und löst diese Gleichungen nach A und B auf, so bekommt man:

$$(23) \quad A = -13687 \quad B = 1,094.$$

Setzt man diese Werte in (19) ein, so gelangt man zu der Gleichung

$$(24) \quad H = 1,094 Q_s - 13687,$$

die den Zusammenhang zwischen der sommerlichen Strahlungsmenge Q_s und der Höhenlage H der Schneegrenze vermittelt und in der H mit Metern und Q_s mit kanonischen Einheiten zu messen ist.

Die Grösse H kann als die solare Höhenlage der Schneegrenze bezeichnet werden, d. h. als jene, die sich bei gleichmässiger Verteilung der übrigen Faktoren auf der Erdoberfläche als Folge der in meridionalen Richtung verschiedener Bestrahlung einstellen würde; sie ist für die in Betracht gezogenen Breiten durch die letzte Kolumne der Tabelle XXVII gegeben.

Mittels der Gleichung (24) sind auch die säkularen Verschiebungen der Schneegrenze mathematisch erfasst, denn bezeichnet H_0 die gegenwärtige Höhenlage der Schneegrenze an der in Betracht gezogenen Breite der Erdoberfläche und H die Höhenlage dieser Grenze zur Zeit t der geologischen Vorzeit, Q_s^0 die gegenwärtige sommerliche Bestrahlung dieser Breite und Q_s jene zur Zeit t , so ist nach obigem:

$$H_0 = 1,094 Q_s^0 - 13687$$

$$H = 1,094 Q_s - 13687.$$

Es folgt aus den beiden vorstehenden Gleichungen:

$$H - H_0 = 1,094 (Q_s - Q_s^0).$$

Weil

$$(25) \quad \Delta Q_s = Q_s - Q_s^0$$

die säkulare Aenderung der sommerlichen Bestrahlung und

$$(26) \quad \Delta H = H - H_0$$

die säkulare Verschiebung der Schneegrenze veranschaulicht, so ist

$$(27) \quad \Delta H = 1,094 \Delta Q_s.$$

Diese Gleichung besagt, dass jeder Aenderung der sommerlichen Strahlungsmenge Q_s um eine kanonische Einheit eine dadurch verursachte Aenderung der Höhenlage der Schneegrenze von 1,094 Meter entspricht.

Der Zusammenhang zwischen den säkularen Aenderungen ΔQ_s und ΔH kann auch mittels der Gleichung (16), d. h. mittels

$$(28) \quad \Delta u_s = \frac{1}{150} \Delta Q_s$$

abgeleitet werden, in der Δu_s die säkulare Aenderung der Mitteltemperatur des Sommerhalbjahres bedeutet.

Die Beobachtung haben nämlich ergeben, dass man während der wärmeren Jahreshälfte um 150 Meter steigen muss, damit die Temperatur um einen Grad sinkt. Um also nach der säkularen Aenderung der sommerlichen Temperatur um Δu_s Grad auf derselben Isothermfläche, also etwa an der unteren Grenze des ewigen Schnees zu verbleiben, d. h. die säkulare Temperaturschwankung durch Vertikalverschiebung wettzumachen, hat man sich um die Strecke ΔH nach oben zu verschieben, wenn diese Temperaturschwankung positiv ist, wobei ΔH durch die Gleichung gegeben ist:

$$(29) \quad \Delta H = 150 \Delta u_s.$$

Es folgt aus (28) und (29)

$$(30) \quad \Delta H = \Delta Q_s.$$

Es ergibt sich aus den vorstehenden Untersuchungen, je nachdem man sich der einen oder der anderen der oben mitgeteilten Ableitungen bedient, dass jeder Aenderung der sommerlichen Wärmemenge im Betrage von einer kanonischen Strahlungseinheit eine Verschiebung der Schneegrenze von 1,09 bzw. von 1,00 Meter entspricht.

Ich will, obwohl mir die zuerst angegebene Zahl als vollkommen zuverlässig erscheint, mich mit der zweiten dieser Zahlen begnügen, um mit um so größerer Sicherheit folgendes behaupten zu können.

Die durch die säkularen Aenderungen der sommerlichen Bestrahlungsmenge Q_s unmittelbar hervorgerufenen Verschiebungen der Schneegrenze sind durch den säkularen Gang dieser Strahlungsmenge gegeben, wenn man die bei der Darstellung dieses Ganges benutzten kanonischen Einheiten als Meter deutet. Dabei bedeutet das Vorzeichen + die Verschiebung der Schneegrenze nach oben, das Vorzeichen — die Verschiebung nach unten.

Ich habe bei der Ermittlung der numerischen Werte der Konstanten A und B der Gleichung (19) aus dem vorstehend angegebenen Grunde nur den zwischen den Breiten von 40° und 90° nördlich gelegenen Teil der Erdoberfläche in Betracht gezogen. Die soeben ermittelte Relation zwischen dem säkularen Gange der Erdbestrahlung und den dadurch hervorgerufenen Verschiebungen der Schneegrenze gilt also, streng genommen, nur für diesem Teil der Erdoberfläche. Weil die Definition des solaren Klimas keine prinzipielle Unterscheidung zwischen der nördlichen und südlichen Hemisphäre beinhaltet, werden die gefundenen numerischen Werte der Konstanten A und B auch für den zwischen den Breiten von 40° und 90° gelegenen Teil der südlichen Hemisphäre ihre Geltung bewahren. Was den restlichen Teil der Erdoberfläche anbelangt, so ist folgendes zu bemerken.

Es ist bisher nicht gelungen, den Einfluss der Abwesenheit der Niederschläge in den beiden beiderseits des Aequators liegenden Trockenzone der Erdoberfläche auf die Höhenlage der Schneegrenze quantitativ zu erfassen, d. h. festzustellen, welcher Bruchteil dieser Höhenlage auf die sommerliche Strahlungsmenge, welcher auf die Niederschlagsverhältnisse zu buchen ist. In Ermanglung einer solchen Angabe war es mir nicht möglich, den für die säkularen Verschiebungen allein in Betracht kommenden numerischen Wert der Konstante B der Gleichung (19) für diesen Gürtel der Erdoberfläche zu ermitteln. Alles spricht dafür, dass der numerische Wert von B von der Breite von 40° angefangen gegen den Aequator zu etwas abnimmt, ohne auf den Betrag von 0,50 zu sinken; an der geographischen Breite von 30° nördlich dürfte er der Einheit noch sehr nahe sein.

Durch die vorstehenden Ergebnisse hat die Tabelle XXV ihre klimatologische Deutung erfahren. Dividiert man die in dieser Tabelle enthaltenen Zahlen mit 150, so erhält man die unmittelbaren säkularen Aenderungen der Mitteltemperatur des Sommer- bzw. des Winterhalbjahres. Die auf das Sommerhalbjahr sich beziehenden Zahlen der Tabelle XXV geben mit der soeben gemachten Einschränkung die durch den säkularen Bestrahlungsgang der Erde unmittelbar verursachten Verschiebungen der Schneegrenze in Metern an.

Diese Verschiebungen der Schneegrenze sind jene, die ohne des Einflusses der abkühlenden Wirkung der resultierenden Schneebedeckung zustande kommen; man kann sie also als die durch die Aenderungen der Bestrahlung unmittelbar hervorgerufenen lokalen solaren Verschiebungen bezeichnen. Verschiebt sich dadurch die Schneegrenze nach unten, dann gelangen immer weitere und weitere Teile des in Betracht gezogenen Gebietes der Erdoberfläche unter eine auch den Sommer überdauernde Schneedecke. Der Einfluss dieser Schneebedeckung muss sich ebenfalls im klimatischen Bilde dieser Gegend fühlbar machen. Er hängt von der Konfiguration dieser Gegend, also von lokalen Verhältnissen ab und ist

Gegenstand regionaler Erforschung, wie sie von Soergel für Deutschland durchgeführt worden ist.

§ 123. Klimatische Auswirkungen der säkularen Aenderungen des Reflexionsvermögens der Erde. Haben die Variationen der Höhenlage der Schneegrenze das Ausmass der Schneebedeckung der Gebirge tragenden Gebiete der Erde in Mitleidenschaft gezogen und dort lokale klimatische Aenderungen hervorgerufen, so haben diese Variationen einen noch viel mächtigeren, auf der ganzen Erdoberfläche sich fühlbar machenden klimatischen Effekt zeitigt durch die Veränderungen der polaren Schneekalotten der Erde. Diese Kalotten haben, wie nachstehend numerisch beglaubigt werden wird, ein sehr hohes Reflexionsvermögen, d. h. sie weisen einen namhaften Bruchteil der auf dieselben auffallenden Sonnenstrahlung in den Weltraum zurück, der dadurch für den Wärmehaushalt der Erde verloren geht. Aendert sich das Flächenausmass dieser polaren Schneekalotten, so beeinflusst dies bemerkbar das ganze Reflexionsvermögen der Erde und zieht deren Temperaturzustand in Mitleidenschaft. Es ist das hohe Verdienst des Klimatologen Walter Wundt auf diesen Faktor nachdrücklich hingewiesen und in seine Untersuchungen über das Klima der Vorzeit einbezogen zu haben.¹⁾

Ich selbst habe mich, wie im Vorwort bereits berichtet, bemüht, den klimatischen Effekt der säkularen Aenderungen des Reflexionsvermögens der Erde mathematisch zu erfassen und numerisch zum Ausdruck zu bringen. Die mathematische Formulierung der zu diesem Zwecke zu lösenden Aufgabe ist eindeutig wie folgt gegeben. Sind wir imstande, rechnerisch zu verfolgen, wie sich im Laufe der Vorzeit die Schneegrenze nach oben bzw. nach unten verschoben hat, so sind wir dadurch in die Lage versetzt, auch jene Veränderungen rechnerisch zu verfolgen, die die polaren Schneekalotten während der Vorzeit erfahren haben. Hat man dadurch die Veränderungen des Flächenausmasses dieser Kalotten ermittelt, so kann man auch die Verluste berechnen, die die Erdbestrahlung durch Reflexion an diesen Schneekalotten im Laufe der Vorzeit erlitten hat.

Zu einer solchen Berechnung ist die Kenntnis des Reflexionsvermögens der Schneebedeckungen der Erde erforderlich. Eine diesbezügliche Angabe besass ich lange Zeit nicht, und erst als durch die Untersuchungen von Joseph Devaux²⁾ dieses Reflexionsvermögen zuverlässig ermittelt wurde, konnte ich meine Berechnungen in Angriff nehmen und deren erste Ergebnisse in meinen „Neuen Ergebnissen der astronomischen Theorie der Klimaschwankungen“ und meinen „Astronomischen Mitteln zur Erforschung der ergeschichtlichen Klimate“ veröffentlichen.

Bei diesen ersten Berechnungen habe ich die Strahlungsverluste, die der Wärmehaushalt der Erde durch das Reflexionsvermögen der polaren Schneekalotten erleidet, auf folgende Weise berechnet. Ich berechnete zuerst die Strahlungsmenge, die der Flächeneinheit der in Betracht gezogenen Kalotte der Erde während

¹⁾ Wundt W. Aenderungen der Erdalbedo während der Eiszeit. Meteorologische Zeitschrift. 1933. — Die zeitliche Aenderung der Erdalbedo als Problem. Ebenda. 1934. — Das Reflexionsvermögen der Erde zur Eiszeit. Ebenda 1938.

²⁾ Devaux J. L'économie radio-thermique des champs de neige et des glaciers. Paris 1933.

des kalorischen Sommerhalbjahres an der oberen Grenze der Atmosphäre zugewiesen wird. Dann berechnete ich unter Zugrundelegung der mittleren sommerlichen Bewölkung des in Betracht gezogenen Erdstriches, welche Bewölkung ich in der zuerst angeführten Abhandlung mit 55 und in der zweiten mit 54 Prozent in Rechnung stellte, die bis zur Erdoberfläche transmittierte Strahlungsmenge, um schliesslich mit dem Reflexionsvermögen der Schneekalotte den gesuchten Strahlungsverlust zu berechnen.

Meine späteren Nachforschungen und die Rücksprache mit meinem Kollegen P. V u j e v i t c h haben ergeben, dass die obigen Bewölkungszahlen ziemlich unsicher sind, da langjährige Beobachtungen auf den hier in Betracht zu ziehenden polaren Gebieten fehlen. Es lässt sich ebensowenig zuverlässig angeben, welche Bewölkungsverhältnisse während der Eiszeit über den polaren Schneekalotten geherrscht hatten. Dies alles veranlasste mich, um willkürlichen Angaben aus dem Wege zu gehen, meine Berechnungen auf Grund der im § 98 mitgeteilten Strahlungsbilanz von B a u r und P h i l i p p s durchzuführen, der grösseren Sicherheit halber aber den durch (37) des erwähnten Paragraphen gegebenen Transmissionskoeffizient der Atmosphäre von 0,84 auf 0,80 herabzudrücken.

Auch stellte ich meine Berechnungen auf eine breitere Basis, indem ich den säkularen Gang der Bestrahlung der bis zu den Breiten von 55°, 45° bzw. 30° reichenden nördlichen und südlichen Kalotten der Erdoberfläche bei Berücksichtigung der säkularen Veränderlichkeit des Reflexionsvermögens der Erde berechnete. Dabei benützte ich den Umstand, dass die durchschnittliche Begrenzung der Schneekalotten während des in Betracht gezogenen Intervalles der Vorzeit den Breitenkreis von 55° nicht überschritten hat, also alle Strahlungsverluste an der bis zur Breite von 55° reichenden Kalotte vor sich gegangen sind, um die Strahlungsverluste der beiden breiteren Kalotten durch einfache Aufteilung der zuerst erhaltenen Verluste auf das Flächenausmass dieser breiteren Kalotten zu gewinnen. Diese neuen Berechnungen, deren Ergebnisse sich von jener der früheren Berechnungen nur unwesentlich unterscheiden, hatten also folgenden Gang.

Der soeben angeführten Abhandlung von W u n d t (1933) sind vier Abbildungen beigelegt, aus denen die gegenwärtigen Grenzen der beiden polaren Schneekalotten und deren grösste Reichweite während der Eiszeit eingezeichnet sind. Verwandelt man diese unregelmässigen Flächen in geometrische mit Breitenkreisen begrenzte Kalotte, so findet man, dass die der Gegenwart entsprechende nördliche Kalotte durch den Breitenkreis von 75°, die südliche durch einen solchen von 68° begrenzt erscheint. Die maximale Verbreiterung der nördlichen Kalotte während der Eiszeit erreichte durchschnittlich den Breitenkreis von 55°, jene der südlichen den Breitenkreis von 63°.

Ziehen wir also die beiden durch die Breitenkreise von 55° nördlich und südlich begrenzten polaren Kalotten der Erdoberfläche in Betracht. Die säkularen Aenderungen der Bestrahlung dieser beiden Kalotten während des Zeitintervalles der letztverflossenen 600 Jahrtausende und ohne Berücksichtigung der Aenderungen des Reflexionsvermögens dieser beiden Kalotten lassen sich nach dem im § 92 angegebenen Vorgange zuverlässig berechnen. Die numerische Auswertung der durch die Formeln (201) gegebenen Grössen ΔH_s , ΔH_w und M ergibt mit $\varphi_1 = 55^\circ$; $\varphi_2 = 90^\circ$; $J_0 = 1$; $T = 100.000$ und mit Benützung der Tabelle XII für die dabei durchzuführenden mechanischen Quadraturen:

$$\Delta H_s = 363 \quad \Delta H_w = -101 \quad M = 7900.$$

Setzt man diese Werte in die Formeln (202) und (203) ein, so kann man mit Hilfe der Tabelle IX die säkularen Aenderungen der pro Flächeneinheit berechneten durchschnittlichen sommerlichen bzw. winterlichen Bestrahlungen der mit dem Breitenkreis von 55° begrenzten nördlichen bzw. südlichen Kalotte ermitteln. Diese säkularen Aenderungen mögen mit $\Delta_1 Q_s$, $\Delta_1 Q_w$, $\Delta_1 \bar{Q}_s$ und $\Delta_1 \bar{Q}_w$ bezeichnet werden, um mit dem Index 1 anzudeuten, dass dieselben ohne Berücksichtigung der Aenderungen des Reflexionsvermögens dieser Kalotten berechnet worden sind.

Nachdem die vorstehend angegebenen Berechnungen durchgeführt waren, konnten die säkularen Aenderungen des Flächenausmasses der Schneebedeckung der beiden in Betracht gezogenen Kalotten wie folgt mathematisch erfasst werden.

Die gegenwärtige durchschnittliche Begrenzung der Schneebedeckung der nördlichen Hemisphäre liegt, wie gesagt, am Breitenkreis von 75° ; während der Vorzeit hat diese Begrenzung den Breitenkreis von 55° erreicht. Es kann mit gutem Recht angenommen werden, dass die jeweilige Verbreiterung der Schneekalotte proportional dem zugehörigen Defizit der sommerlichen Bestrahlung gewesen ist. Daraus ergibt sich folgendes. Es folgt aus der durchgeführten Rechnung, deren Resultate in der nachfolgenden Tabelle XXVIII zusammengestellt sind, dass die minimalste sommerliche Bestrahlung der nördlichen bis zur Breite von 55° reichenden Kalotte vor 230 Jahrtausenden stattgefunden hat und dass damals das Strahlungsdefizit gegenüber heute 660 kanonische Einheiten betrug. Dieses Strahlungsdefizit hatte eine Verbreiterung der Schneekalotte von 20° zur Folge. Dem Defizit von einer kanonischen Strahlungseinheit entsprach also eine Verbreiterung der Schneekalotte von $1'82$. Einer Zunahme der Bestrahlung von $\Delta_1 Q_s$ kanonischen Einheiten entsprach eine Zusammenschrumpfung der Schneekalotte, d. h. eine Zunahme der geographischen Breite ihres Grenzkreises von $1'82 \Delta_1 Q_s$. Deshalb ist die geographische Breite φ dieses Grenzkreises zur Zeit t der geographischen Vorzeit, der eine säkulare Aenderung $\Delta_1 Q_s$ entsprach, gegeben durch

$$(31) \quad \varphi = 75^\circ + 1'82 \Delta_1 Q_s.$$

Bei der Anwendung dieser Formel ist folgendes zu berücksichtigen. Die nördliche Schneekalotte verschwand, ein ebenes Gelände vorausgesetzt, während der Vorzeit vollständig, sobald $\varphi = 90^\circ$, d. h. $\Delta_1 Q_s = +495$ ward; für $\Delta_1 Q_s \geq 495$ ist also immer $\varphi = 90^\circ$ zu setzen.

Die vorstehenden Betrachtungen auf die südliche Hemisphäre angewendet ergeben folgendes. Das grösste Strahlungsdefizit an der in Betracht gezogenen südlichen Kalotte der Erde fand nach den Angaben der Tabelle XXVIII vor 105,1 Jahrtausenden statt, es hatte einen Betrag von 870 kanonischen Strahlungseinheiten und rief eine Verbreiterung der Schneekalotte von 5° hervor, weshalb dem Defizit von einer kanonischen Einheit eine Verbreiterung der Schneekalotte von $0'345$ entsprach. Die geographische Breite des Grenzkreises dieser Schneekalotte zur Zeit t der geo-

logischen Vorzeit, der eine säkulare Aenderung $\Delta_1 \bar{Q}_s$ entsprach, ist durch die Formel gegeben:

$$(32) \quad \varphi = 68^\circ + 0'345 \Delta_1 \bar{Q}_s.$$

Die Verbreiterung der südlichen Schneekalotte während der Vorzeit war also bedeutend geringer als jene der nördlichen, weil diese Verbreiterung nur auf Kosten des Meeres vor sich gehen konnte. Auch die Zusammenschumpfung dieser Schneedecke war relativ recht klein, weil die grosse Erhebung des antarktischen Kontinents (durchschnittliche Meereshöhe 2200 m) seine Schneedecke vor der Abschmelzung schützte. Die südliche Schneekalotte unterlag deshalb geringeren säkularen Veränderungen als die nördliche, die sich auf niedrigen Kontinentaltafeln ungehindert verbreitern konnte. Eine totale Abschmelzung der südlichen Schneekalotte fand während der letztverflissenen 600 Jahrtausende nicht statt.

Durch die vorstehend abgeleiteten Formeln sind die säkularen Veränderungen des Flächenausmasses der polaren Schneekalotten gegeben und es kann nun an die Berechnung der säkularen Aenderungen des Reflexionsvermögens der Erde und deren Folgen geschritten werden.

Ziehen wir zu diesem Zwecke vorerst die nördliche mit dem Breitenkreis von 55° begrenzte Kalotte der Erdoberfläche in Betracht; ihre Oberfläche sei mit F_0 und deren Teil, der gegenwärtig auch während des Sommerhalbjahres mit Eis und Schnee bedeckt ist und der, wie gesagt, durchschnittlich bis zur Breite von 75° reicht, mit F_1 bezeichnet. Sei R das Reflexionsvermögen der Flächeneinheit des mit Schnee und Eis bedeckten Gebietes dieser Kalotte und R_0 jenes des unbedeckten Gebietes, dann ist das Absorptionsvermögen a bzw. a_0 dieser beiden Arten von Gebieten gleich

$$a = 1 - R \quad a_0 = 1 - R_0.$$

Das Absorptionsvermögen der ganzen in Betracht gezogenen Kalotte F_0 in ihrem gegenwärtigen Zustand ist also gleich

$$A_0 = F_1 a + (F_0 - F_1) a_0.$$

Während der Epoche t der geologischen Vorzeit sei der Teil F der Fläche F_0 mit Eis und Schnee bedeckt gewesen, so dass das damalige Absorptionsvermögen der ganzen in Betracht gezogenen Kalotte F_0 durch den nachstehenden Ausdruck veranschaulicht erscheint:

$$A = F a + (F_0 - F) a_0.$$

Die Zunahme des Absorptionsvermögens zur Zeit t gegenüber der Gegenwart ist also gleich:

$$A - A_0 = (F - F_1)(a - a_0),$$

d. h. pro Flächeneinheit berechnet

$$(33) \quad \Delta a = (a - a_0) \frac{F - F_1}{F_0}.$$

Die Oberfläche der mit dem Breitenkreis φ begrenzten Kalotte der Erdoberfläche ist, wenn r Erdhalbmesser bedeutet, gleich

$$F = 2\pi r^2 (1 - \sin \varphi).$$

Es ist nach dem soeben gesagten und nach der Formel (31)

$$F_0 = 2\pi r^2 (1 - \sin 55^\circ)$$

$$F_1 = 2\pi r^2 (1 - \sin 75^\circ)$$

$$F = 2\pi r^2 [1 - \sin (75^\circ + 1'82 \Delta_1 Q_s)],$$

d. h. wegen (33)

$$(34) \quad \Delta a = (a - a_0) \frac{\sin 75^\circ - \sin (75^\circ + 1'82 \Delta_1 Q_s)}{1 - \sin 55^\circ}.$$

Der numerische Wert des Absorptionsvermögens a der Schnee- und Eisbedeckungen der Erde ist, wie vorstehend berichtet, durch Devaux zuverlässig ermittelt worden. Er beträgt für Neuschnee 0,3, für Firnschnee 0,5 und für Gletscher 0,6. Für das sommerliche Absorptionsvermögen ausgedehnter Schneedecken wäre das Mittel der beiden letztgenannten Zahlen also

$$a = 0,55$$

zu setzen.

Das Absorptionsvermögen der unvereisten Gebiete der nördlichen Hemisphäre beträgt nach der vorstehend angeführten Abhandlung von Wundt

$$a_0 = 0,94.$$

Es ist also

$$a - a_0 = -0,39.$$

Setzt man dies in die Formel (34) ein, so bekommt man:

$$(35) \quad \Delta a = -0,39 \frac{\sin 75^\circ - \sin (75^\circ + 1'82 \Delta_1 Q_s)}{1 - \sin 55^\circ}.$$

Während der Epoche t der geologischen Vorzeit hat die Flächeneinheit der in Betracht gezogenen mit dem Breitenkreis von 55° begrenzten Kalotte der Erde den obigen Teilbetrag der auf sie während des Sommerhalbjahres tatsächlich auffallenden Strahlungsmenge, die mit Q'_s bezeichnet werden möge, mehr absorbiert als gegenwärtig. Es ist also

$$(36) \quad \Delta_2 Q_s = \Delta a Q'_s,$$

Dieser Ausdruck veranschaulicht den säkularen Zuwachs der für den Wärmehaushalt des in Betracht gezogenen Gebietes verwendeten sommerlichen Strahlungsmenge als Folge des veränderten Reflexionsvermögens dieses Gebietes. Es handelt sich also darum, jene den Erdboden tatsächlich erreichende sommerliche Strahlungsmenge Q'_s zu ermitteln. Diese Strahlungsmenge ist kleiner von der Strahlungsmenge Q_s , die an der oberen Grenze der Atmosphäre während des Sommers anlangt. Man kann sie wie folgt berechnen.

Nach den im § 98 mitgeteilten Angaben reflektieren die Wolken und die Lufthülle von 100 Einheiten der an der oberen Grenze der Atmosphäre anliegenden Sonnenstrahlung $30 + 8 = 38$ solcher Einheiten in den Weltraum zurück, weshalb das Reflexionsvermögen der Atmosphäre

$$(37) \quad A_1 = 0,38$$

zu setzen ist. In diesem Betrag sind die an der Erdoberfläche selbst stattfindenden Reflexionen deshalb nicht inbegriffen, weil sie später zu berücksichtigen sein werden. Der obige Teilbetrag der Sonnenstrahlung kann vor ihrem Eintritt in die Atmosphäre in Abzug gebracht werden.

Die während des kalorischen Sommerhalbjahres bis zur Erdoberfläche ge-

langende, pro Flächeneinheit der in Betracht gezogenen bis zur Breite von 55° reichenden Kalotte berechnete Strahlungsmenge Q'_s kann als Bruchteil der in die Atmosphäre eindringenden Strahlung $(1 - A_1) Q_s$ wie folgt berechnet werden.

Weil es sich um die Verhältniszahl der an der oberen Grenze der Atmosphäre anlagenden und der bis zur Erdoberfläche durchgelassenen Strahlungsmengen handelt und weil der Phasenunterschied zwischen den kalorischen und den astronomischen Halbjahren ein geringer ist, kann als obiges Verhältnis jenes für das astronomische Sommerhalbjahr sich ergebende in Rechnung gesetzt werden, so dass es wird:

$$(38) \quad Q'_s = (1 - A_1) \frac{K'_s}{K_s} Q_s,$$

worin K_s die der Flächeneinheit der in Betracht gezogenen Kalotte der Erde während des astronomischen Sommerhalbjahres an der oberen Grenze der Atmosphäre zugewiesene, K'_s jene bis zur Erdoberfläche durchgelassene Strahlungsmenge bedeutet.

Die Berechnung von K'_s will ich, wie bereits angesagt, mit dem Transmissionskoeffizienten $p = 0,80$ durchführen; ein höherer Transmissionskoeffizient würde noch grössere Schwankungen der Bestrahlung der in Betracht gezogenen Kalotte ergeben als jene die in der nachstehenden Tabelle XXVIII mitgeteilt sind. Unter der obigen Annahme ist das Verhältnis $\frac{K'_s}{K_s}$ durch den Ausdruck gegeben:

$$\frac{K'_s}{K_s} = \int_{55^\circ}^{90^\circ} W'_s \cos \varphi \, d\varphi : \int_{55^\circ}^{90^\circ} W_s \cos \varphi \, d\varphi,$$

worin W'_s die der Tabelle XVII zu entnehmenden auf das Sommerhalbjahr und den Transmissionskoeffizienten $p = 0,80$ sich beziehenden, und W_s die der Tabelle VII zu entnehmenden Zahlen bedeuten. Führt man die obigen Integrationen mittels mechanischer Quadratur durch, so bekommt man:

$$\frac{K'_s}{K_s} = 0,60.$$

Est ist also

$$Q'_s = 0,62 \times 0,60 Q_s.$$

Man bekommt auf diese Weise statt (36) mit Rücksicht auf (35)

$$(39) \quad \Delta_2 Q_s = -0,39 \times 0,62 \times 0,60 \frac{\sin 75^\circ - \sin (75^\circ + 1'82 \Delta_1 Q_s)}{1 - \sin 55^\circ} Q_s.$$

Bezeichnet Q_s^0 die gegenwärtige pro Flächeneinheit der in Betracht gezogenen Kalotte während des kalorischen Sommerhalbjahres zugewiesene Strahlungsmenge, so ist

$$(40) \quad Q_s = Q_s^0 + \Delta_1 Q_s$$

worin $\Delta_1 Q_s$ die vorher angegebene säkulare Schwankung dieser Strahlungsmenge bedeutet

Die Grösse Q_s^0 kann nach den Gleichungen (190) und (191) des vierten Abschnittes mit Benützung der Tabelle XXIII durch mechanische auf das Intervall von $\varphi = 55^\circ$ bis $\varphi = 90^\circ$ sich erstreckende Quadratur

$$(41) \quad Q_s^0 = \frac{2r^2\pi}{F_0} \int_{55^\circ}^{90^\circ} Q_s \cos \varphi d\varphi$$

berechnet werden, wodurch man bekommt:

$$Q_s^0 = 13520 \text{ k. E.}$$

Setzt man dies in (40) und dann in (39) ein und führt die darin vorkommenden numerischen Rechnungen durch, so bekommt man

$$(42) \quad \Delta_2 Q_s = 0,802 (13\,520 + \Delta_1 Q_s) [\sin (75^\circ + 1'82 \Delta_1 Q_s) - \sin 75^\circ].$$

Diese Grösse veranschaulicht den Effekt der säkularen Aenderung des Reflexionsvermögens der Erde auf den Bestrahlungszustand der in Betracht gezogenen Kalotte der Erdoberfläche.

Für die südliche mit dem Breitenkreis von 55° begrenzte Kalotte ist folgendes zu berücksichtigen.

Die ausserhalb der Schneedecke dieser Kalotte liegenden Gebiete sind von eistreibendem Meer bedeckt, weshalb für das Reflexionsvermögen dieser Gebiete

$$a_0 = 0,88$$

zu setzen ist, so dass es wird

$$a - a_0 = - 0,33.$$

Man erhält also statt (39) und mit Rücksicht auf (32)

$$(43) \quad \Delta_2 \bar{Q}_s = - 0,33 \times 0,62 \times 0,60 \frac{\sin 68^\circ - \sin (68^\circ + 0' 345 \Delta_1 \bar{Q}_s)}{1 - \sin 55^\circ} \bar{Q}_s.$$

Ausserdem ist für die südliche Kalotte

$$\bar{Q}_s^0 = 13\,770,$$

so dass man schliesslich erhält:

$$(44) \quad \Delta_2 \bar{Q}_s = 0,679 (13770 + \Delta_1 \bar{Q}_s) [\sin (68^\circ + 0' 345 \Delta_1 \bar{Q}_s) - \sin 68^\circ].$$

Die Benützung der vorstehend abgeleiteten Formeln für die Berechnung der klimatischen Auswirkungen der säkularen Aenderungen des Reflexionsvermögens der Erde ist recht zeitraubend, berücksichtigt man aber, dass der Einfluss der Atmosphäre und der Schneebedeckungen der Erde auf deren Bestrahlungszustand nicht mit jener hohen Genauigkeit zu erfassen ist, wie es bei der Berechnung des durch die Tabelle XXV dargestellten Ganges der Erdbestahlung der Fall gewesen ist, so wird es, bei der Anwendung der vorstehenden Formeln sich mit einer geringeren Genauigkeit zufriedenstellend, genügen, die Grössen $\Delta_1 Q_s$ und $\Delta_1 \bar{Q}_s$ auf Zehner der kanonischen Einheiten und die Winkel $1'82 \Delta_1 Q_s$ und $0'345 \Delta_1 \bar{Q}_s$ auf Zehner der Minuten zu berechnen, um zu einem Resultat zu gelangen, durch welches die klimatischen Effekte des säkularen Ganges der Erdbestahlung hinlänglich genau dargestellt erscheinen. Auf diese Weise sind die in der nachstehenden Tabelle XXVIII enthaltenen auf die beiden bis zur Breite von 55° reichenden Kalotten sich beziehenden numerischen Daten gewonnen worden.

In dieser Tabelle ist auch der säkulare Bestahlungsgang der bis zur Breite von 45° bzw. 30° nördlich und südlich reichenden Kalotten der Erdoberfläche bei Berücksichtigung des Einflusses der polaren Schneebedeckungen numerisch zur Darstellung gebracht worden. Die auf diese Kalotten sich beziehenden Berechnungen wurden auf folgende Weise durchgeführt.

In den Formeln (202) und (203) des vierten Abschnittes ist für die bis zur Breite von 45° reichenden Kalotten der Erde

$$\Delta H_s = 306 \qquad \Delta H_w = -128 \qquad M = 9\,870$$

und für die bis zur Breite von 30° reichenden Kalotten

$$\Delta H_s = 235 \qquad \Delta H_w = -145 \qquad M = 12\,450$$

zu setzen, um dadurch die Grössen $\Delta_1 Q_s$, $\Delta_1 \bar{Q}_s$ und $\Delta_1 Q_w$, $\Delta_1 \bar{Q}_w$ zu berechnen. Die auf diese Kalotten sich beziehenden Grössen $\Delta_2 Q_s$ und $\Delta_2 \bar{Q}_s$ ergeben sich, wie bereits gesagt, wenn man die auf die zur Breite von 55° reichende Kalotte sich beziehenden Grössen $\Delta_2 Q_s$ und $\Delta_2 \bar{Q}_s$ mit jener Zahl multipliziert, die das Verhältnis des Flächenausmasses dieser Kalotte in bezug auf das Flächenausmass der in Betracht gezogenen Kalotte darstellt. Für die bis zur Breite von 45° reichende Kalotte ist diese Verhältniszahl gleich 0,617, und für jene bis zur Breite von 30° reichende gleich 0,362.

Die Ergebnisse der auf die vorstehend geschilderte Weise gewonnenen Tabelle XXVIII werden im nächsten Kapitel besprochen werden.

Tabelle XXVIII

Der säkulare Gang der Erdbestrahlung bei Berücksichtigung der Aenderungen des Reflexionsvermögens der Erdkugel
Kanonische Einheiten

| Jahrtausende vor 1800 n. Chr. | Nördliche | | | | Südliche | | | |
|----------------------------------|--|----------------|----------------|--------------|----------------|----------------|----------------|--------------|
| | bis zur Breite von 55 reichende Kalotte der Erde | | | | | | | |
| | $\Delta_1 Q_w$ | $\Delta_1 Q_s$ | $\Delta_2 Q_s$ | ΔQ_s | $\Delta_1 Q_w$ | $\Delta_1 Q_s$ | $\Delta_2 Q_s$ | ΔQ_s |
| 0,6 | -10 | +20 | +30 | +50 | -10 | +20 | +10 | +30 |
| 5 | -150 | +300 | +320 | +620 | +50 | +100 | +30 | +130 |
| 10 | -350 | +550 | +380 | +930 | +190 | +10 | 0 | +10 |
| 11,1 | -350 | +520 | +380 | +900 | +210 | -40 | -10 | -50 |
| 15 | -230 | +320 | +320 | +640 | +170 | -80 | -30 | -110 |
| 20 | +70 | -260 | -470 | -730 | +90 | -280 | -100 | -380 |
| 22,1 | +130 | -460 | -950 | -1410 | +110 | -440 | -150 | -590 |
| 25 | +100 | -480 | -1000 | -1480 | +200 | -580 | -210 | -790 |
| 30 | -100 | -230 | -420 | -650 | +360 | -690 | -250 | -940 |
| 32,7 | -140 | -140 | -230 | -370 | +360 | -640 | -230 | -870 |
| 35 | -130 | -110 | -180 | -290 | +310 | -550 | -200 | -750 |
| 40 | -90 | +30 | +40 | +70 | +150 | -210 | -70 | -280 |
| 45 | -130 | +330 | +330 | +660 | -30 | +230 | +90 | +320 |
| 47,1 | -110 | +300 | +320 | +620 | -30 | +220 | +90 | +310 |
| 50 | -130 | +350 | +320 | +620 | -10 | +180 | +70 | +250 |
| 55 | -150 | +140 | +170 | +310 | +150 | -160 | -60 | -220 |
| 60 | -220 | +100 | +130 | +230 | +320 | -440 | -150 | -590 |
| 60,6 | -220 | +90 | +120 | +210 | +320 | -450 | -160 | -610 |
| 65 | -100 | -140 | -230 | -370 | +280 | -520 | -190 | -710 |
| 70 | +160 | -470 | -980 | -1450 | +80 | -390 | -140 | -530 |
| 71,9 | +200 | -500 | -1050 | -1550 | +40 | -340 | -120 | -460 |
| 75 | +100 | -350 | -690 | -1040 | +80 | -330 | -110 | -440 |
| 80 | -280 | +200 | +240 | +440 | +340 | -420 | -150 | -570 |
| 82,8 | -410 | +420 | +370 | +790 | +390 | -380 | -140 | -520 |
| 85 | -390 | +480 | +380 | +860 | +330 | -240 | -80 | -320 |
| 90 | -80 | +270 | +300 | +570 | -80 | +270 | +100 | +370 |

Tabelle XXVIII

(Fortsetzung)

| Jahrtausende vor 1800 n. Chr. | Nördliche | | | | Südliche | | | |
|----------------------------------|---|----------------|----------------|--------------|----------------|----------------|----------------|--------------|
| | bis zur Breite von 55° reichende Kalotte der Erde | | | | | | | |
| | $\Delta_1 Q_w$ | $\Delta_1 Q_s$ | $\Delta_2 Q_s$ | ΔQ_s | $\Delta_1 Q_w$ | $\Delta_1 Q_s$ | $\Delta_2 Q_s$ | ΔQ_s |
| 94 | +90 | +110 | +140 | +250 | -250 | +450 | +170 | +620 |
| 95 | +80 | +130 | +170 | +300 | -240 | +450 | +170 | +620 |
| 100 | -130 | +80 | +110 | +190 | +170 | -220 | -80 | -300 |
| 105,1 | -310 | -10 | -20 | -30 | +550 | -870 | -320 | -1190 |
| 110 | -50 | -290 | -430 | -720 | +310 | -650 | -230 | -880 |
| 115 | +250 | -570 | -1260 | -1830 | -10 | -310 | -110 | -420 |
| 116,1 | +270 | -570 | -1260 | -1830 | -30 | -270 | -90 | -360 |
| 120 | +70 | -280 | -520 | -800 | +90 | -300 | -100 | -400 |
| 125 | -350 | +410 | +370 | +780 | +290 | -230 | -80 | -310 |
| 127,7 | -420 | +550 | +380 | +930 | +320 | -190 | -70 | -260 |
| 130 | -390 | +580 | +380 | +960 | +250 | -60 | -20 | -80 |
| 135 | -110 | +210 | +250 | +460 | +30 | +70 | +20 | +90 |
| 140 | +80 | -120 | -210 | -330 | +60 | +20 | +10 | +30 |
| 145 | 0 | -190 | -330 | -520 | -140 | -330 | -110 | -440 |
| 150 | -200 | -60 | -100 | -160 | +400 | -660 | -240 | -900 |
| 152,2 | -250 | +20 | +30 | +50 | +430 | -660 | -240 | -900 |
| 155 | -210 | +10 | +10 | +20 | +370 | -570 | -210 | -780 |
| 160 | -10 | -50 | -80 | -130 | +50 | -110 | -50 | -160 |
| 164,3 | +90 | -40 | -60 | -100 | -130 | +180 | +70 | +250 |
| 165 | +80 | -10 | -20 | -30 | -140 | +210 | +80 | +290 |
| 170 | -160 | +310 | +320 | +630 | +60 | +90 | +30 | +120 |
| 175 | -430 | +520 | +380 | +900 | +370 | -280 | -100 | -380 |
| 176,3 | -440 | +480 | +380 | +860 | +400 | -360 | -120 | -480 |
| 180 | -260 | +180 | +220 | +400 | +320 | -400 | -150 | -550 |
| 185 | +190 | -390 | -780 | -1170 | -30 | -170 | -60 | -230 |
| 187,5 | +280 | -520 | -1110 | -1630 | -100 | -140 | -50 | -190 |
| 190 | +220 | -470 | -980 | -1450 | -20 | -230 | -80 | -310 |

Tabelle XXVIII

(Fortsetzung)

| Jahrtausende vor 1800 n. Chr. | Nördliche | | | | Südliche | | | |
|----------------------------------|---|----------------|----------------|--------------|----------------|----------------|----------------|--------------|
| | bis zur Breite von 55° reichende Kalotte der Erde | | | | | | | |
| | $\Delta_1 Q_w$ | $\Delta_1 Q_s$ | $\Delta_2 Q_s$ | ΔQ_s | $\Delta_1 Q_w$ | $\Delta_1 Q_s$ | $\Delta_2 Q_s$ | ΔQ_s |
| 195 | -210 | -40 | -60 | -100 | +410 | -660 | -240 | -900 |
| 198,5 | -410 | +240 | +280 | +520 | +530 | -700 | -250 | -950 |
| 200 | -390 | +270 | +300 | +570 | +490 | -610 | -220 | -830 |
| 205 | -70 | +140 | +190 | +330 | +10 | +60 | +20 | +80 |
| 209,6 | +130 | +80 | +110 | +190 | -290 | +500 | +170 | +670 |
| 210 | +120 | +100 | +130 | +230 | -300 | +520 | +180 | +700 |
| 215 | -150 | +370 | +360 | +730 | -30 | +250 | +100 | +350 |
| 220 | -450 | +470 | +380 | +850 | +430 | -410 | -150 | -560 |
| 220,8 | -430 | +400 | +370 | +770 | +450 | -480 | -170 | -650 |
| 225 | -120 | -150 | -250 | -400 | +340 | -610 | -220 | -830 |
| 230 | +260 | -660 | -1520 | -2180 | +60 | -460 | -160 | -620 |
| 232,4 | +270 | -650 | -1480 | -2130 | +30 | -410 | -150 | -560 |
| 235 | +130 | -460 | -950 | -1410 | +130 | -460 | -160 | -620 |
| 240 | -190 | -20 | -30 | -50 | +350 | -560 | -200 | -760 |
| 242,2 | -270 | +190 | +230 | +420 | +330 | -410 | -150 | -560 |
| 245 | -270 | +280 | +310 | +590 | +270 | -260 | -90 | -350 |
| 250 | -190 | +420 | +370 | +790 | +10 | +220 | +90 | +310 |
| 255 | -80 | +230 | +260 | +490 | -20 | +170 | +70 | +240 |
| 256,5 | -60 | +160 | +200 | +360 | 0 | +100 | +30 | +130 |
| 260 | -50 | +20 | +30 | +50 | +70 | -100 | -30 | -130 |
| 265 | -110 | -20 | -30 | -50 | +210 | -340 | -120 | -460 |
| 270 | -170 | -70 | -120 | -190 | +350 | -590 | -210 | -800 |
| 270,7 | -180 | -70 | -120 | -190 | +360 | -610 | -220 | -830 |
| 275 | -80 | -200 | -340 | -540 | +300 | -580 | -210 | -790 |
| 280 | +120 | -330 | -640 | -970 | +40 | -250 | -90 | -340 |
| 281,8 | +140 | -290 | -540 | -830 | -20 | -130 | -40 | -170 |
| 285 | +20 | -70 | -120 | -190 | +20 | -70 | -20 | -90 |

Tabelle XXVIII

(Fortsetzung)

| Jahrtausende vor 1800 n. Chr. | Nördliche | | | | Südliche | | | |
|----------------------------------|---|----------------|----------------|--------------|----------------|----------------|----------------|--------------|
| | bis zur Breite von 55° reichende Kalotte der Erde | | | | | | | |
| | $\Delta_1 Q_w$ | $\Delta_1 Q_s$ | $\Delta_2 Q_s$ | ΔQ_s | $\Delta_1 Q_w$ | $\Delta_1 Q_s$ | $\Delta_2 Q_s$ | ΔQ_s |
| 290 | -350 | +450 | +380 | +830 | +270 | -170 | -60 | -230 |
| 292,7 | -430 | +580 | +380 | +960 | +330 | -180 | -60 | -240 |
| 295 | -400 | +580 | +380 | +960 | +260 | -80 | -30 | -110 |
| 300 | -40 | +190 | +230 | +420 | -60 | +210 | +80 | +290 |
| 303,1 | +130 | -130 | -220 | -350 | -130 | +130 | +40 | +170 |
| 305 | +140 | -260 | -470 | -730 | -40 | -80 | -30 | -110 |
| 310 | -130 | -180 | -310 | -490 | +370 | -680 | -240 | -920 |
| 313,4 | -260 | -40 | -60 | -100 | +480 | -780 | -280 | -1060 |
| 315 | -230 | -60 | -100 | -160 | +450 | -740 | -280 | -1020 |
| 320 | +70 | -320 | -600 | -920 | +110 | -360 | -120 | -480 |
| 323,3 | +130 | -280 | -520 | -800 | -10 | -140 | -50 | -190 |
| 325 | +80 | +190 | -330 | -520 | 0 | -110 | -40 | -150 |
| 330 | -80 | +200 | +240 | +440 | -20 | +140 | +60 | +200 |
| 332,8 | -340 | +470 | +380 | +850 | +240 | -110 | -40 | -150 |
| 335 | -290 | +410 | +370 | +780 | +210 | -90 | -30 | -120 |
| 340 | -30 | +30 | +40 | +70 | +30 | -30 | -10 | -40 |
| 342,1 | +20 | -60 | -100 | -160 | +20 | -60 | -20 | -80 |
| 345 | -20 | -90 | -140 | -230 | +100 | -210 | -70 | -280 |
| 350 | -170 | -50 | -80 | -130 | +330 | -550 | -200 | -750 |
| 350,9 | -170 | -50 | -80 | -130 | +350 | -570 | -210 | -780 |
| 355 | -60 | -180 | -310 | -490 | +240 | -480 | -170 | -650 |
| 359,9 | +60 | -210 | -370 | -580 | +40 | -190 | -70 | -260 |
| 360 | +60 | -200 | -340 | -540 | +40 | -180 | -60 | -240 |
| 365 | -140 | +150 | +190 | +340 | +140 | -130 | -40 | -170 |

Tabelle XXVIII

(Fortsetzung)

| Jahrtausende vor 1800 n. Chr. | Nördliche | | | | Südliche | | | |
|----------------------------------|---|----------------|----------------|--------------|----------------|----------------|----------------|--------------|
| | bis zur Breite von 55° reichende Kalotte der Erde | | | | | | | |
| | $\Delta_1 Q_w$ | $\Delta_1 Q_s$ | $\Delta_2 Q_s$ | ΔQ_s | $\Delta_1 Q_w$ | $\Delta_1 Q_s$ | $\Delta_2 Q_s$ | ΔQ_s |
| 369,6 | -330 | +450 | +380 | +830 | +250 | -130 | -40 | -170 |
| 370 | -340 | +460 | +380 | +840 | +240 | -120 | -40 | -160 |
| 375 | -170 | +330 | +330 | +660 | +50 | +110 | +40 | +150 |
| 379,7 | 0 | +60 | +90 | +150 | -60 | +120 | +40 | +160 |
| 380 | +10 | +50 | +70 | +120 | -50 | +110 | +40 | +150 |
| 385 | -90 | -60 | -100 | -160 | +210 | -360 | -120 | -480 |
| 389,6 | -170 | -90 | -140 | -230 | +370 | -630 | -230 | -860 |
| 390 | -170 | -110 | -180 | -290 | +370 | -650 | -230 | -880 |
| 395 | 0 | -280 | -520 | -800 | +220 | -500 | -170 | -670 |
| 399,2 | +70 | -320 | -600 | -920 | +130 | -380 | -140 | -520 |
| 400 | +60 | -300 | -570 | -870 | +140 | -380 | -140 | -520 |
| 405 | -130 | +40 | +50 | +90 | +210 | -300 | -100 | -400 |
| 407,7 | -200 | +220 | +250 | +470 | +180 | -160 | -60 | -220 |
| 410 | -210 | +330 | +330 | +660 | +110 | +10 | 0 | +10 |
| 415 | -150 | +380 | +360 | +740 | -10 | +240 | +90 | +330 |
| 415,5 | -140 | +360 | +360 | +720 | -20 | +240 | +90 | +330 |
| 420 | -220 | +390 | +360 | +750 | +80 | +90 | +30 | +120 |
| 424 | -250 | +280 | +310 | +590 | +230 | -200 | -70 | -270 |
| 425 | -240 | +230 | +260 | +490 | +240 | -250 | -90 | -340 |
| 430 | +20 | -260 | -470 | -730 | +160 | -400 | -150 | -550 |
| 433,6 | +170 | -500 | -1050 | -1550 | +90 | -420 | -150 | -570 |
| 435 | +170 | -520 | -1100 | -1620 | +90 | -440 | -150 | -590 |
| 440 | -110 | -170 | -290 | -460 | +330 | -610 | -220 | -830 |
| 444 | -290 | +90 | +120 | +210 | +450 | -650 | -230 | -880 |

Tabelle XXVIII

(Fortsetzung)

| Jahrtausende vor 1800 n. Chr | Nördliche | | | | Südliche | | | |
|---------------------------------|---|----------------|----------------|--------------|----------------|----------------|----------------|--------------|
| | bis zur Breite von 55° reichende Kalotte der Erde | | | | | | | |
| | $\Delta_1 Q_w$ | $\Delta_1 Q_s$ | $\Delta_2 Q_s$ | ΔQ_s | $\Delta_1 Q_w$ | $\Delta_1 Q_s$ | $\Delta_2 Q_s$ | ΔQ_s |
| 445 | -300 | +150 | +190 | +340 | +420 | -570 | -210 | -780 |
| 450 | -50 | +70 | +100 | +170 | +30 | -10 | 0 | -10 |
| 454,8 | +90 | +80 | +110 | +190 | -230 | +400 | +140 | +540 |
| 455 | +90 | +90 | +120 | +210 | -230 | +410 | +140 | +550 |
| 460 | -100 | +210 | +250 | +460 | +20 | +90 | +30 | +120 |
| 465 | -430 | +390 | +360 | +750 | +470 | -510 | -190 | -700 |
| 465,4 | -430 | +390 | +360 | +750 | +470 | -510 | -190 | -700 |
| 470 | -110 | -10 | -20 | -30 | +210 | -330 | -110 | -440 |
| 475 | +260 | -460 | -960 | -1420 | -100 | -100 | -30 | -130 |
| 475,6 | +260 | -470 | -980 | -1450 | -100 | -110 | -40 | -150 |
| 480 | +30 | -270 | -500 | -770 | +150 | -390 | -140 | -530 |
| 485 | -350 | +200 | +240 | +440 | +470 | -620 | -220 | -840 |
| 486,1 | -360 | +240 | +280 | +520 | +460 | -580 | -210 | -790 |
| 490 | -220 | +200 | +240 | +440 | +240 | -260 | -90 | -350 |
| 495 | 0 | +90 | +120 | +210 | -80 | +170 | +70 | +240 |
| 497,1 | +20 | +90 | +120 | +210 | -100 | +210 | +80 | +290 |
| 500 | -60 | +190 | +230 | +420 | -40 | +170 | +70 | +240 |
| 505 | -230 | +290 | +310 | +600 | +190 | -130 | -40 | -170 |
| 508,2 | -210 | +140 | +170 | +310 | +270 | -340 | -120 | -460 |
| 510 | -160 | +20 | +30 | +50 | +280 | -420 | -150 | -570 |
| 515 | -50 | -210 | -370 | -580 | +250 | -510 | -190 | -700 |
| 520 | -30 | -180 | -310 | -490 | +190 | -400 | -240 | -640 |
| 525 | +10 | -160 | -270 | -430 | +110 | -260 | -90 | -350 |
| 525,3 | +20 | -160 | -270 | -430 | +100 | -240 | -80 | -320 |

Tabelle XXVIII

(Fortsetzung)

| Jahrtausende vor 1800 n. Chr. | Nordliche | | | | Südliche | | | |
|----------------------------------|---|----------------|----------------|--------------|----------------|----------------|----------------|--------------|
| | bis zur Breite von 55° reichende Kalotte der Erde | | | | | | | |
| | $\Delta_1 Q_w$ | $\Delta_1 Q_s$ | $\Delta_2 Q_s$ | ΔQ_s | $\Delta_1 Q_w$ | $\Delta_1 Q_s$ | $\Delta_2 Q_s$ | ΔQ_s |
| 530 | —50 | +30 | +40 | +70 | +70 | —90 | —30 | —120 |
| 535 | —300 | +420 | +370 | +790 | +220 | —100 | —30 | —130 |
| 537,8 | —370 | +450 | +380 | +830 | +310 | —230 | —80 | —310 |
| 540 | —340 | +390 | +360 | +750 | +300 | —250 | —90 | —340 |
| 545 | +20 | —60 | —100 | —160 | +20 | —60 | —20 | —80 |
| 548,6 | +210 | —300 | —550 | —850 | —130 | +40 | +10 | +50 |
| 550 | +200 | —320 | —600 | —920 | —100 | —20 | —10 | —30 |
| 555 | —170 | —40 | —60 | —100 | +330 | —540 | —200 | —740 |
| 559 | —410 | +190 | +230 | +420 | +570 | —790 | —280 | —1070 |
| 560 | —390 | +170 | +210 | +380 | +570 | —790 | —280 | —1070 |
| 565 | +10 | —140 | —240 | —380 | +90 | —220 | —80 | —300 |
| 569,4 | +240 | —240 | —440 | —680 | —240 | +240 | +90 | +330 |
| 570 | +230 | —220 | —400 | —620 | —250 | +260 | +100 | +360 |
| 575 | —230 | +360 | +360 | +720 | +130 | 0 | 0 | 0 |
| 579,7 | —540 | +710 | +390 | +1100 | +420 | —250 | —90 | —340 |
| 580 | —530 | +700 | +390 | +1090 | +410 | —240 | —80 | —320 |
| 585 | —160 | +220 | +250 | +470 | +100 | —40 | —10 | —50 |
| 590 | +230 | —410 | —830 | —1240 | —90 | —90 | —30 | —120 |
| 590,3 | +230 | —420 | —860 | —1280 | —90 | —100 | —30 | —130 |
| 595 | 0 | —290 | —540 | —830 | +220 | —510 | —190 | —700 |
| 600 | —230 | —50 | —80 | —130 | +450 | —730 | —260 | —990 |

Tabelle XXVIII

(Fortsetzung)

| Jahrtausende vor 1800 n. Chr. | Nördliche | | | | Südliche | | | |
|----------------------------------|---|----------------|----------------|--------------|----------------|----------------|----------------|--------------|
| | bis zur Breite von 45° reichende Kalotte der Erde | | | | | | | |
| | $\Delta_1 Q_w$ | $\Delta_1 Q_s$ | $\Delta_2 Q_s$ | ΔQ_s | $\Delta_1 Q_w$ | $\Delta_1 Q_s$ | $\Delta_2 Q_s$ | ΔQ_s |
| 0,6 | -10 | +20 | +20 | +40 | -10 | +20 | +10 | +30 |
| 5 | -190 | +290 | +200 | +490 | +50 | +40 | +20 | +60 |
| 10 | -440 | +570 | +230 | +800 | +240 | -110 | 0 | -110 |
| 11,1 | -430 | +540 | +230 | +770 | +260 | -150 | -10 | -160 |
| 15 | -290 | +350 | +200 | +550 | +200 | -140 | -20 | -160 |
| 20 | +80 | -220 | -290 | -510 | +110 | -240 | -60 | -300 |
| 22,1 | +170 | -390 | -590 | -980 | +150 | -370 | -90 | -460 |
| 25 | +120 | -390 | -620 | -1010 | +250 | -520 | -130 | -650 |
| 30 | -130 | -100 | -260 | -360 | +450 | -680 | -150 | -830 |
| 32,7 | -170 | -20 | -140 | -160 | +450 | -640 | -140 | -780 |
| 35 | -160 | 0 | -110 | -110 | +400 | -560 | -120 | -680 |
| 40 | -120 | +70 | +20 | +90 | +180 | -230 | -40 | -270 |
| 45 | -160 | +300 | +200 | +500 | -40 | +180 | +60 | +240 |
| 47,1 | -150 | +280 | +200 | +480 | -40 | +170 | +60 | +230 |
| 50 | -160 | +280 | +200 | +480 | -10 | +130 | +40 | +170 |
| 55 | -190 | +180 | +100 | +280 | +200 | -200 | -40 | -240 |
| 60 | -280 | +190 | +80 | +270 | +390 | -480 | -90 | -570 |
| 60,6 | -280 | +190 | +70 | +260 | +410 | -500 | -100 | -600 |
| 65 | -120 | -40 | -140 | -180 | +360 | -520 | -120 | -640 |
| 70 | +200 | -410 | -600 | -1010 | +100 | -310 | -90 | -400 |
| 71,9 | +250 | -450 | -650 | -1100 | +40 | -250 | -70 | -320 |
| 75 | +140 | -300 | -430 | -730 | +100 | -270 | -70 | -340 |
| 80 | -350 | +290 | +150 | +440 | +430 | -490 | -90 | -580 |
| 82,8 | -510 | +510 | +230 | +740 | +490 | -480 | -90 | -570 |
| 85 | -490 | +550 | +230 | +780 | +400 | -340 | -50 | -390 |
| 90 | -100 | +230 | +190 | +420 | -90 | +230 | +60 | +290 |

Tabelle XXVIII

(Fortsetzung)

| Jahrtausende vor 1800 n. Chr. | Nördliche | | | | Südliche | | | |
|----------------------------------|---|----------------|----------------|--------------|----------------|----------------|----------------|--------------|
| | bis zur Breite von 45° reichende Kalotte der Erde | | | | | | | |
| | $\Delta_1 Q_w$ | $\Delta_1 Q_s$ | $\Delta_2 Q_s$ | ΔQ_s | $\Delta_1 Q_w$ | $\Delta_1 Q_s$ | $\Delta_2 Q_s$ | ΔQ_s |
| 94 | +110 | +30 | +90 | +120 | -310 | +450 | +100 | +550 |
| 95 | +100 | +50 | +100 | +150 | -300 | +440 | +100 | +540 |
| 100 | -170 | +140 | +70 | +210 | +220 | -250 | -50 | -300 |
| 105,1 | -380 | +160 | -10 | +150 | +700 | -910 | -200 | -1110 |
| 110 | -60 | -180 | -270 | -450 | +390 | -620 | -140 | -760 |
| 115 | +320 | -540 | -780 | -1320 | -10 | -200 | -70 | -270 |
| 116,1 | +330 | -540 | -780 | -1320 | -40 | -170 | -60 | -230 |
| 120 | +90 | -230 | -320 | -550 | +120 | -260 | -60 | -320 |
| 125 | -430 | +470 | +230 | +700 | +370 | -320 | -50 | -370 |
| 127,7 | -530 | +620 | +230 | +850 | +400 | -310 | -40 | -350 |
| 130 | -490 | +620 | +230 | +850 | +310 | -190 | -10 | -200 |
| 135 | +30 | +40 | +150 | +190 | -130 | +200 | +10 | +210 |
| 140 | +110 | -130 | -130 | -260 | -80 | +50 | +10 | +60 |
| 145 | 0 | -130 | -200 | -330 | +180 | -310 | -70 | -380 |
| 150 | -250 | +70 | -60 | +10 | +500 | -680 | -150 | -830 |
| 152,2 | -310 | +150 | +20 | +170 | +540 | -690 | -150 | -840 |
| 155 | -270 | +130 | +10 | +140 | +460 | -600 | -130 | -730 |
| 160 | -20 | -30 | -50 | -80 | +70 | -110 | -30 | -140 |
| 164,3 | +110 | -70 | -40 | -110 | -160 | +200 | +40 | +240 |
| 165 | +100 | -50 | -10 | -60 | -170 | +220 | +50 | +270 |
| 170 | -210 | +300 | +200 | +500 | +70 | +30 | +20 | +50 |
| 175 | -540 | +600 | +230 | +830 | +450 | -390 | -60 | -450 |
| 176,3 | -540 | +570 | +230 | +800 | +500 | -470 | -70 | -540 |
| 180 | -320 | +260 | +140 | +400 | +400 | -450 | -90 | -540 |
| 185 | +240 | -370 | -480 | -850 | -40 | -100 | -40 | -140 |
| 187,5 | +350 | -510 | -680 | -1190 | -120 | -40 | -30 | -70 |
| 190 | +270 | -450 | -600 | -1050 | -20 | -150 | -50 | -200 |

Tabelle XXVIII

(Fortsetzung)

| Jahrtausende vor 1800 n. Chr. | Nördliche | | | | Südliche | | | |
|----------------------------------|---|----------------|----------------|--------------|----------------|----------------|----------------|--------------|
| | bis zur Breite von 45° reichende Kalotte der Erde | | | | | | | |
| | $\Delta_1 Q_w$ | $\Delta_1 Q_s$ | $\Delta_2 Q_s$ | ΔQ_s | $\Delta_1 Q_w$ | $\Delta_1 Q_s$ | $\Delta_2 Q_s$ | ΔQ_s |
| 195 | -270 | +100 | -40 | +60 | +520 | -690 | -150 | -840 |
| 198,5 | -510 | +400 | +170 | +570 | +670 | -780 | -150 | -930 |
| 200 | -490 | +400 | +190 | +590 | +610 | -700 | -140 | -840 |
| 205 | -80 | +130 | +120 | +250 | +10 | +40 | +10 | +50 |
| 209,6 | +160 | -10 | +70 | +60 | -360 | +510 | +100 | +610 |
| 210 | +150 | 0 | +80 | +80 | -370 | +520 | +110 | +630 |
| 215 | -180 | +330 | +220 | +550 | -40 | +190 | +60 | +250 |
| 220 | -560 | +570 | +230 | +800 | +530 | -520 | -90 | -610 |
| 220,8 | -540 | +520 | +230 | +750 | +560 | -580 | -100 | -680 |
| 225 | -160 | -30 | -150 | -180 | +420 | -610 | -140 | -750 |
| 230 | +330 | -600 | -940 | -1540 | +70 | -340 | -100 | -440 |
| 232,4 | +330 | -590 | -910 | -1500 | +40 | -300 | -90 | -390 |
| 235 | +160 | -390 | -590 | -980 | +160 | -390 | -100 | -490 |
| 240 | -240 | +100 | -20 | +80 | +440 | -590 | -120 | -710 |
| 242,2 | -340 | +280 | +140 | +420 | +420 | -480 | -90 | -570 |
| 245 | -340 | +340 | +190 | +530 | +330 | -320 | -60 | -380 |
| 250 | -240 | +390 | +230 | +620 | +10 | +140 | +60 | +200 |
| 255 | -110 | +210 | +160 | +370 | -30 | +130 | +40 | +170 |
| 256,5 | -90 | +150 | +120 | +270 | 0 | +70 | +20 | +90 |
| 260 | -70 | +50 | +20 | +70 | +90 | -120 | -20 | -140 |
| 265 | -130 | +50 | -20 | +30 | +260 | -350 | -70 | -420 |
| 270 | -210 | +50 | -70 | -20 | +440 | -610 | -130 | -740 |
| 270,7 | -220 | +50 | -70 | -20 | +460 | -620 | -140 | -760 |
| 275 | -100 | -90 | -210 | -300 | +380 | -570 | -130 | -700 |
| 280 | +150 | -290 | -390 | -680 | +50 | -190 | -60 | -250 |
| 281,8 | +170 | -270 | -330 | -600 | -20 | -80 | -20 | -100 |
| 285 | +30 | -60 | -70 | -130 | +20 | -60 | -10 | -70 |

Tabelle XXVIII

(Fortsetzung)

| Jahrtausende vor 1800 n. Chr. | Nördliche | | | | Südliche | | | |
|----------------------------------|---|----------------|----------------|--------------|----------------|----------------|----------------|--------------|
| | bis zur Breite von 45° reichende Kalotte der Erde | | | | | | | |
| | $\Delta_1 Q_w$ | $\Delta_1 Q_s$ | $\Delta_2 Q_s$ | ΔQ_s | $\Delta_1 Q_w$ | $\Delta_1 Q_s$ | $\Delta_2 Q_s$ | ΔQ_s |
| 290 | -430 | +500 | +230 | +730 | +340 | -270 | -40 | -310 |
| 292,7 | -540 | +640 | +230 | +870 | +410 | -310 | -20 | -350 |
| 295 | -500 | +620 | +230 | +850 | +320 | -200 | -20 | -220 |
| 300 | -50 | +150 | +140 | +290 | -90 | +180 | +50 | +230 |
| 303,1 | +170 | -170 | -140 | -310 | -160 | +160 | +20 | +180 |
| 305 | +170 | -260 | -290 | -550 | -50 | -30 | -20 | -50 |
| 310 | -160 | -50 | -190 | -240 | +470 | -680 | -150 | -830 |
| 313,4 | -320 | +120 | -40 | +80 | +610 | -810 | -170 | -980 |
| 315 | -280 | +90 | -60 | +30 | +560 | -760 | -170 | -930 |
| 320 | +90 | -250 | -370 | -620 | +150 | -320 | -70 | -390 |
| 323,3 | +170 | -270 | -320 | -590 | -20 | -90 | -30 | -120 |
| 325 | +100 | -170 | -200 | -370 | +10 | -80 | -20 | -100 |
| 330 | -100 | +180 | +150 | +330 | -20 | +100 | +40 | +140 |
| 332,8 | -430 | +520 | +230 | +750 | +310 | -220 | -20 | -240 |
| 335 | -370 | +440 | +230 | +670 | +260 | -180 | -20 | -200 |
| 340 | -40 | +40 | +20 | +60 | +40 | -40 | -10 | -50 |
| 342,1 | +20 | -60 | -60 | -120 | +20 | -50 | -10 | -60 |
| 345 | -30 | -50 | -90 | -140 | +130 | -210 | -40 | -250 |
| 350 | -210 | +60 | -50 | +10 | +420 | -570 | -120 | -690 |
| 350,9 | -220 | +70 | -50 | +20 | +430 | -580 | -130 | -710 |
| 355 | -70 | -90 | -190 | -280 | +310 | -470 | -100 | -570 |
| 359,9 | +90 | -180 | -230 | -410 | +60 | -150 | -40 | -190 |
| 360 | +90 | -180 | -210 | -390 | +50 | -150 | -40 | -190 |
| 365 | -190 | +190 | +120 | +310 | +180 | -170 | -20 | -190 |

Tabelle XXVIII

(Fortsetzung)

| Jahrtausende vor 1800 n. Chr. | Nördliche | | | | Südliche | | | |
|----------------------------------|---|----------------|----------------|--------------|----------------|----------------|----------------|--------------|
| | bis zur Breite von 45° reichende Kalotte der Erde | | | | | | | |
| | $\Delta_1 Q_w$ | $\Delta_1 Q_s$ | $\Delta_2 Q_s$ | ΔQ_s | $\Delta_1 Q_w$ | $\Delta_1 Q_s$ | $\Delta_2 Q_s$ | ΔQ_s |
| 369,6 | -420 | +500 | +230 | +730 | +310 | -230 | -20 | -250 |
| 370 | -420 | +510 | +230 | +740 | +300 | -220 | -20 | -240 |
| 375 | -220 | +330 | +200 | +530 | +60 | +40 | +20 | +60 |
| 379,7 | 0 | +40 | +60 | +100 | -70 | +110 | +20 | +130 |
| 380 | +10 | +30 | +40 | +70 | -60 | +100 | +20 | +120 |
| 385 | -110 | +10 | -60 | -50 | +260 | -370 | -70 | -440 |
| 389,6 | -210 | +30 | -90 | -60 | +460 | -640 | -140 | -780 |
| 390 | -200 | +20 | -110 | -90 | +470 | -650 | -140 | -790 |
| 395 | 0 | -190 | -320 | -510 | +270 | -460 | -100 | -560 |
| 399,2 | +80 | -250 | -370 | -620 | +170 | -340 | -90 | -430 |
| 400 | +70 | -240 | -350 | -590 | +170 | -340 | -90 | -430 |
| 405 | -170 | +110 | +30 | +140 | +260 | -320 | -60 | -380 |
| 407,7 | -250 | +270 | +150 | +420 | +230 | -220 | -40 | -260 |
| 410 | -260 | +340 | +200 | +540 | +150 | -70 | 0 | -70 |
| 415 | -190 | +340 | +220 | +560 | -20 | +170 | +60 | +230 |
| 415,5 | -190 | +330 | +220 | +550 | -20 | +170 | +60 | +230 |
| 420 | -270 | +390 | +220 | +610 | +110 | +10 | +20 | +30 |
| 424 | -310 | +330 | +190 | +520 | +280 | -270 | -40 | -310 |
| 425 | -290 | +290 | +160 | +450 | +300 | -310 | -60 | -370 |
| 430 | +30 | -190 | -290 | -480 | +210 | -370 | -90 | -460 |
| 433,6 | +210 | -440 | -650 | -1090 | +110 | -340 | -90 | -430 |
| 435 | +220 | -460 | -680 | -1140 | +120 | -360 | -90 | -450 |
| 440 | -140 | -50 | -180 | -230 | +420 | -610 | -140 | -750 |
| 444 | -360 | +220 | +70 | +290 | +560 | -700 | -140 | -840 |

Tabelle XXVIII

(Fortsetzung)

| Jahrtausende vor 1800 n. Chr. | Nördliche | | | | Südliche | | | |
|----------------------------------|---|----------------|----------------|--------------|----------------|----------------|----------------|--------------|
| | bis zur Breite von 45° reichende Kalotte der Erde | | | | | | | |
| | $\Delta_1 Q_w$ | $\Delta_1 Q_s$ | $\Delta_2 Q_s$ | ΔQ_s | $\Delta_1 Q_w$ | $\Delta_1 Q_s$ | $\Delta_2 Q_s$ | ΔQ_s |
| 445 | -580 | +280 | +120 | +400 | +530 | -630 | -130 | -760 |
| 450 | -60 | +80 | +60 | +140 | +40 | -30 | 0 | -30 |
| 454,8 | +120 | 0 | +70 | +70 | -290 | +410 | +90 | +500 |
| 455 | +120 | 0 | +70 | +70 | -290 | +410 | +90 | +500 |
| 460 | -130 | +210 | +150 | +360 | +30 | +50 | +20 | +70 |
| 465 | -540 | +510 | +220 | +730 | +580 | -610 | -120 | -730 |
| 465,4 | -540 | +510 | +220 | +730 | +590 | -620 | -120 | -740 |
| 470 | -140 | +50 | -10 | +40 | +260 | -340 | -70 | -410 |
| 475 | +320 | -460 | -590 | -1050 | -120 | -20 | -20 | -40 |
| 475,6 | +330 | -470 | -600 | -1070 | -120 | -20 | -20 | -40 |
| 480 | +40 | -200 | -310 | -510 | +190 | -350 | -90 | -440 |
| 485 | -430 | +330 | +150 | +480 | +580 | -690 | -140 | -830 |
| 486,1 | -450 | +360 | +170 | +530 | +570 | -650 | -130 | -780 |
| 490 | -280 | +260 | +150 | +410 | +300 | -320 | -60 | -380 |
| 495 | +10 | +50 | +70 | +120 | -100 | +160 | +40 | +200 |
| 497,1 | +20 | +50 | +70 | +120 | -120 | +190 | +50 | +240 |
| 500 | -80 | +160 | +140 | +300 | -50 | +130 | +40 | +170 |
| 505 | -290 | +330 | +190 | +520 | +240 | -200 | -20 | -220 |
| 508,2 | -270 | +220 | +100 | +320 | +340 | -390 | -70 | -460 |
| 510 | -200 | +110 | +20 | +130 | +340 | -440 | -90 | -530 |
| 515 | -60 | -110 | -230 | -340 | +320 | -490 | -120 | -610 |
| 520 | -40 | -110 | -190 | -300 | +240 | -390 | -150 | -540 |
| 525 | +20 | -120 | -170 | -290 | +130 | -240 | -60 | -300 |
| 525,3 | +20 | -110 | -170 | -280 | +130 | -220 | -50 | -270 |

Tabelle XXVIII

(Fortsetzung)

| Jahrtausende vor 1800 n. Chr. | Nördliche | | | | Südliche | | | |
|----------------------------------|---|----------------|----------------|--------------|----------------|----------------|----------------|--------------|
| | bis zur Breite von 45° reichende Kalotte der Erde | | | | | | | |
| | $\Delta_1 Q_w$ | $\Delta_1 Q_s$ | $\Delta_2 Q_s$ | ΔQ_s | $\Delta_1 Q_w$ | $\Delta_1 Q_s$ | $\Delta_2 Q_s$ | ΔQ_s |
| 530 | -60 | +50 | +20 | +70 | +80 | -100 | -20 | -120 |
| 535 | -380 | +460 | +230 | +690 | +260 | -190 | -20 | -210 |
| 537,8 | -460 | +510 | +230 | +740 | +380 | -330 | -50 | -380 |
| 540 | -420 | +460 | +220 | +680 | +370 | -340 | -60 | -400 |
| 545 | +20 | -50 | -60 | -110 | +20 | -50 | -10 | -60 |
| 548,6 | +260 | -320 | -340 | -660 | -160 | +100 | +10 | +110 |
| 550 | +250 | -330 | -370 | -700 | -130 | +50 | -10 | +40 |
| 555 | -210 | +60 | -40 | +20 | +410 | -560 | -120 | -680 |
| 559 | -500 | +350 | +140 | +490 | +710 | -860 | -170 | -1030 |
| 560 | -490 | +340 | +130 | +470 | +710 | -860 | -170 | -1030 |
| 565 | +10 | -100 | -150 | -250 | +120 | -200 | -50 | -250 |
| 569,4 | +310 | -310 | -270 | -580 | -300 | +300 | +60 | +360 |
| 570 | +290 | -280 | -250 | -530 | -310 | +320 | +60 | +380 |
| 575 | -290 | +380 | +220 | +600 | +170 | -80 | 0 | -80 |
| 579,7 | -670 | +790 | +240 | +1030 | +510 | -400 | -60 | -460 |
| 580 | -670 | +790 | +240 | +1030 | +510 | -400 | -50 | -450 |
| 585 | -200 | +240 | +150 | +390 | +130 | -90 | -10 | -100 |
| 590 | +290 | -410 | -510 | -920 | -110 | -10 | -20 | -30 |
| 590,3 | +290 | -420 | -530 | -950 | -110 | -20 | -20 | -40 |
| 595 | 0 | -200 | -330 | -530 | +290 | -480 | -120 | -600 |
| 600 | -290 | +100 | -50 | +50 | +560 | -750 | -160 | -910 |

Tabelle XXVIII

(Fortsetzung)

| Jahrtausende vor 1800 n. Chr. | Nördliche | | | | Südliche | | | |
|----------------------------------|---|----------------|----------------|--------------|----------------|----------------|----------------|--------------|
| | bis zur Breite von 30° reichende Kalotte der Erde | | | | | | | |
| | $\Delta_1 Q_w$ | $\Delta_1 Q_s$ | $\Delta_2 Q_s$ | ΔQ_s | $\Delta_1 Q_w$ | $\Delta_1 Q_s$ | $\Delta_2 Q_s$ | ΔQ_s |
| 0,6 | -10 | +10 | +10 | +20 | -10 | +10 | 0 | +10 |
| 5 | -230 | +280 | +120 | +400 | +70 | -20 | +10 | -10 |
| 10 | -540 | +610 | +140 | +750 | +320 | -250 | 0 | -250 |
| 11,1 | -540 | +600 | +140 | +740 | +340 | -280 | 0 | -280 |
| 15 | -360 | +390 | +120 | +510 | +260 | -230 | -10 | -240 |
| 20 | +90 | -160 | -170 | -330 | +130 | -200 | -40 | -240 |
| 22,1 | +190 | -300 | -340 | -640 | +170 | -280 | -50 | -330 |
| 25 | +130 | -270 | -360 | -630 | +290 | -430 | -80 | -510 |
| 30 | -190 | +70 | -150 | -80 | +550 | -670 | -90 | -760 |
| 32,7 | -230 | +140 | -80 | +60 | +550 | -640 | -80 | -720 |
| 35 | -220 | +140 | -70 | +70 | +480 | -560 | -70 | -630 |
| 40 | -150 | +130 | +10 | +140 | +230 | -250 | -30 | -280 |
| 45 | -190 | +260 | +120 | +380 | -30 | +100 | +30 | +130 |
| 47,1 | -180 | +240 | +120 | +360 | -40 | +100 | +30 | +130 |
| 50 | -190 | +250 | +120 | +370 | -10 | +70 | +30 | +100 |
| 55 | -230 | +230 | +60 | +290 | +250 | -250 | -20 | -270 |
| 60 | -350 | +310 | +50 | +360 | +490 | -530 | -50 | -580 |
| 60,6 | -360 | +310 | +40 | +350 | +500 | -550 | -60 | -610 |
| 65 | -170 | +80 | -80 | 0 | +430 | -520 | -70 | -590 |
| 70 | +230 | -340 | -350 | -690 | +110 | -220 | -50 | -270 |
| 71,9 | +300 | -400 | -380 | -780 | +40 | -140 | -40 | -180 |
| 75 | +160 | -240 | -250 | -490 | +120 | -200 | -40 | -240 |
| 80 | -440 | +420 | +90 | +510 | +540 | -560 | -50 | -610 |
| 82,8 | -640 | +640 | +130 | +770 | +620 | -620 | -50 | -670 |
| 85 | -610 | +640 | +140 | +780 | +510 | -480 | -30 | -510 |
| 90 | -110 | +170 | +110 | +280 | -110 | +170 | +40 | +210 |
| 94 | +150 | -80 | +50 | -30 | -370 | +440 | +60 | +500 |

Tabelle XXVIII

(Fortsetzung)

| Jahrtausende vor 1800 n. Chr. | Nördliche | | | | Südliche | | | |
|----------------------------------|---|----------------|----------------|--------------|----------------|----------------|----------------|--------------|
| | bis zur Breite von 30° reichende Kalotte der Erde | | | | | | | |
| | $\Delta_1 Q_w$ | $\Delta_1 Q_s$ | $\Delta_2 Q_s$ | ΔQ_s | $\Delta_1 Q_w$ | $\Delta_1 Q_s$ | $\Delta_2 Q_s$ | ΔQ_s |
| 95 | +130 | -60 | +60 | 0 | -370 | +440 | +60 | +500 |
| 100 | -210 | +200 | +40 | +240 | +270 | -280 | -30 | -310 |
| 105,1 | -500 | +390 | -10 | +380 | +860 | -970 | -120 | -1090 |
| 110 | -90 | -20 | -160 | -180 | +470 | -580 | -80 | -660 |
| 115 | +380 | -490 | -460 | -950 | -40 | -70 | -40 | -110 |
| 116,1 | +400 | -500 | -460 | -960 | -60 | -40 | -30 | -70 |
| 120 | +110 | -180 | -190 | -370 | +130 | -200 | -40 | -240 |
| 125 | -540 | +560 | +130 | +690 | +460 | -440 | -30 | -470 |
| 127,7 | -650 | +700 | +140 | +840 | +510 | -460 | -30 | -490 |
| 130 | -610 | +680 | +140 | +820 | +410 | -340 | -10 | +350 |
| 135 | -160 | +190 | +90 | +280 | +40 | -10 | +10 | 0 |
| 140 | +140 | -150 | -80 | -230 | -100 | +90 | 0 | +90 |
| 145 | -10 | -60 | -120 | -180 | +210 | -280 | -40 | -320 |
| 150 | -330 | +240 | -40 | +200 | +610 | -700 | -90 | -790 |
| 152,2 | -400 | +320 | +10 | +330 | +660 | -740 | -90 | -830 |
| 155 | -350 | +280 | 0 | +280 | +570 | -640 | -80 | -720 |
| 160 | -20 | 0 | -30 | -30 | +80 | -100 | -20 | -120 |
| 164,3 | +140 | -120 | -20 | -140 | -200 | +220 | +30 | +250 |
| 165 | +130 | -110 | -10 | -120 | -210 | +230 | +30 | +260 |
| 170 | -250 | +300 | +120 | +420 | +90 | -40 | +10 | -30 |
| 175 | -680 | +710 | +140 | +850 | +580 | -550 | -40 | -590 |
| 176,3 | -680 | +700 | +140 | +840 | +640 | -620 | -40 | -660 |
| 180 | -410 | +380 | +80 | +460 | +490 | -520 | -50 | -570 |
| 185 | +280 | -350 | -280 | -630 | -60 | -10 | -20 | -30 |
| 187,5 | +430 | -510 | -400 | -910 | -170 | +90 | -20 | +70 |
| 190 | +330 | -420 | -350 | -770 | -50 | -40 | -30 | -70 |
| 195 | -360 | +280 | -20 | +260 | +640 | -720 | -90 | -810 |

Tabelle XXVIII

(Fortsetzung)

| Jahrtausende vor 1800 n. Chr. | Südliche | | | | Nördliche | | | |
|----------------------------------|---|----------------|----------------|--------------|----------------|----------------|----------------|--------------|
| | bis zur Breite von 30° reichende Kalotte der Erde | | | | | | | |
| | $\Delta_1 Q_w$ | $\Delta_1 Q_s$ | $\Delta_2 Q_s$ | ΔQ_s | $\Delta_1 Q_w$ | $\Delta_1 Q_s$ | $\Delta_2 Q_s$ | ΔQ_s |
| 198,5 | —650 | +590 | +100 | +690 | +830 | —890 | —90 | —980 |
| 200 | —630 | +590 | +110 | +700 | +770 | —810 | —80 | —890 |
| 205 | —100 | +130 | +70 | +200 | +20 | +10 | +10 | +20 |
| 209,6 | +210 | —140 | +40 | —100 | —450 | +520 | +60 | +580 |
| 210 | +210 | —110 | +50 | —60 | —450 | +530 | +70 | +600 |
| 215 | —210 | +290 | +130 | +420 | —30 | +110 | +40 | +150 |
| 220 | —700 | +710 | +140 | +850 | +680 | —670 | —50 | —720 |
| 220,8 | —680 | +670 | +130 | +800 | +700 | —710 | —60 | —770 |
| 225 | —210 | +110 | —90 | +20 | +510 | —610 | —80 | —690 |
| 230 | +380 | —520 | —550 | —1070 | +60 | —200 | —60 | —260 |
| 232,4 | +390 | —520 | —540 | —1060 | +30 | —160 | —50 | —210 |
| 235 | +180 | —300 | —340 | —640 | +180 | —300 | —60 | —360 |
| 240 | —310 | +240 | —10 | +230 | +550 | —620 | —70 | —690 |
| 242,2 | —430 | +410 | +80 | +490 | +530 | —550 | —50 | —600 |
| 245 | —430 | +430 | +110 | +540 | +410 | —410 | —30 | —440 |
| 250 | —290 | +370 | +130 | +500 | +30 | +50 | +30 | +80 |
| 255 | —130 | +180 | +90 | +270 | —30 | +80 | +30 | +110 |
| 256,5 | —100 | +130 | +70 | +200 | 0 | +30 | +10 | +40 |
| 260 | —80 | +70 | +10 | +80 | +120 | —130 | —10 | —140 |
| 265 | —180 | +130 | —10 | +120 | +320 | —370 | —40 | —410 |
| 270 | —280 | +200 | —40 | +160 | +540 | —620 | —80 | —700 |
| 270,7 | —290 | +210 | —40 | +170 | +570 | —650 | —80 | —730 |
| 275 | —140 | +50 | —120 | —70 | +460 | —550 | —80 | —630 |
| 280 | +180 | —250 | —230 | —480 | +60 | —130 | —30 | —160 |
| 281,8 | +200 | —260 | —200 | —460 | —40 | —20 | —10 | —30 |
| 285 | +30 | —50 | —40 | —90 | +30 | —50 | —10 | —60 |
| 290 | —550 | +580 | +140 | +720 | +430 | —400 | —20 | —420 |

Tabelle XXVIII

(Fortsetzung)

| Jahrtausende vor 1800 n. Chr. | Nördliche | | | | Südliche | | | |
|----------------------------------|---|----------------|----------------|--------------|----------------|----------------|----------------|--------------|
| | bis zur Breite von 30° reichende Kalotte der Erde | | | | | | | |
| | $\Delta_1 Q_w$ | $\Delta_1 Q_s$ | $\Delta_2 Q_s$ | ΔQ_s | $\Delta_1 Q_w$ | $\Delta_1 Q_s$ | $\Delta_2 Q_s$ | ΔQ_s |
| 292,7 | —680 | +730 | +140 | +870 | +520 | —470 | —20 | —490 |
| 295 | —610 | +670 | +140 | +810 | +410 | —350 | —10 | —360 |
| 300 | —60 | +110 | +80 | +190 | —100 | +150 | +30 | +180 |
| 303,1 | +210 | —210 | —80 | —290 | —210 | +210 | +10 | +220 |
| 305 | +210 | —250 | —170 | —420 | —70 | +30 | —10 | +20 |
| 310 | —230 | +120 | —110 | +10 | +570 | —680 | —90 | —770 |
| 313,4 | —430 | +330 | —20 | +310 | +750 | —850 | —100 | —950 |
| 315 | —370 | +270 | —40 | +230 | +690 | —790 | —100 | —890 |
| 320 | +90 | —180 | —220 | —400 | +170 | —260 | —40 | —300 |
| 323,3 | +200 | —260 | —190 | —450 | —40 | —20 | —20 | —40 |
| 325 | +120 | —150 | —120 | —270 | 0 | —30 | —10 | —40 |
| 330 | —120 | +160 | +90 | +250 | —20 | +60 | +20 | +80 |
| 332,8 | —530 | +570 | +140 | +710 | +390 | —350 | —10 | —360 |
| 335 | —450 | +490 | +130 | +620 | +330 | —290 | —10 | —300 |
| 340 | —50 | +50 | +10 | +60 | +50 | —50 | 0 | —50 |
| 342,1 | +30 | —40 | —40 | —80 | +30 | —40 | —10 | —50 |
| 345 | —40 | 0 | —50 | —50 | +160 | —200 | —30 | —230 |
| 350 | —270 | +200 | —30 | +170 | +510 | —580 | —70 | —650 |
| 350,9 | —290 | +210 | —30 | +180 | +530 | —610 | —80 | —690 |
| 355 | —110 | +30 | —110 | —80 | +370 | —450 | —60 | —510 |
| 359,9 | +100 | —150 | —130 | —280 | +60 | —110 | —30 | —140 |
| 360 | +100 | —150 | —120 | —270 | +60 | —110 | —20 | —130 |
| 365 | —240 | +240 | +70 | +310 | +220 | —220 | —10 | —230 |

Tabelle XXVIII

(Fortsetzung)

| Jahrtausende vor 1800 n. Chr. | Nördliche | | | | Südliche | | | |
|----------------------------------|---|----------------|----------------|--------------|----------------|----------------|----------------|--------------|
| | bis zur Breite von 30° reichende Kalotte der Erde | | | | | | | |
| | $\Delta_1 Q_w$ | $\Delta_1 Q_s$ | $\Delta_2 Q_s$ | ΔQ_s | $\Delta_1 Q_w$ | $\Delta_1 Q_s$ | $\Delta_2 Q_s$ | ΔQ_s |
| 369,6 | -520 | +560 | +140 | +700 | +400 | -360 | -10 | -370 |
| 370 | -530 | +570 | +140 | +710 | +390 | -350 | -10 | -360 |
| 375 | -270 | +320 | +120 | +440 | +90 | -40 | +10 | -30 |
| 379,7 | 0 | +20 | +30 | +50 | -80 | +100 | +10 | +110 |
| 380 | +10 | +10 | +30 | +40 | -70 | +90 | +10 | +100 |
| 385 | -140 | +90 | -40 | +50 | +320 | -370 | -40 | -410 |
| 389,6 | -280 | +190 | -50 | +140 | +560 | -650 | -80 | -720 |
| 390 | -270 | +180 | -70 | +110 | +570 | -660 | -80 | -740 |
| 395 | -10 | -80 | -190 | -270 | +330 | -420 | -60 | -480 |
| 399,2 | +90 | -180 | -220 | -400 | +190 | -280 | -50 | -330 |
| 400 | +80 | -160 | -210 | -370 | +200 | -280 | -50 | -330 |
| 405 | -220 | +190 | +20 | +210 | +320 | -350 | -40 | -390 |
| 407,7 | -310 | +320 | +90 | +410 | +290 | -280 | -20 | -300 |
| 410 | -330 | +370 | +120 | +490 | +190 | -150 | 0 | -150 |
| 415 | -230 | +310 | +130 | +440 | -10 | +90 | +30 | +120 |
| 415,5 | -220 | +290 | +130 | +420 | -20 | +90 | +30 | +120 |
| 420 | -340 | +390 | +130 | +520 | +140 | -90 | +10 | -80 |
| 424 | -380 | +390 | +110 | +500 | +360 | -350 | -30 | -380 |
| 425 | -360 | +360 | +90 | +450 | +380 | -380 | -30 | -410 |
| 430 | +20 | -110 | -170 | -280 | +240 | -330 | -50 | -380 |
| 433,6 | +240 | -360 | -380 | -740 | +120 | -240 | -50 | -290 |
| 435 | +250 | -370 | -400 | -770 | +130 | -250 | -50 | -300 |
| 440 | -190 | +100 | -110 | -10 | +510 | -600 | -80 | -680 |
| 444 | -470 | +400 | +40 | +440 | +690 | -760 | -80 | -840 |

Tabelle XXVIII

(Fortsetzung)

| Jahrtausende vor 1800 n. Chr. | Nördliche | | | | Südliche | | | |
|----------------------------------|---|----------------|----------------|--------------|----------------|----------------|----------------|--------------|
| | bis zur Breite von 30° reichende Kalotte der Erde | | | | | | | |
| | $\Delta_1 Q_w$ | $\Delta_1 Q_s$ | $\Delta_2 Q_s$ | ΔQ_s | $\Delta_1 Q_w$ | $\Delta_1 Q_s$ | $\Delta_2 Q_s$ | ΔQ_s |
| 445 | -490 | +440 | +70 | +510 | +650 | -700 | -80 | -780 |
| 450 | -80 | +90 | +40 | +130 | +60 | -50 | 0 | -50 |
| 454,8 | +160 | -110 | +40 | -70 | -360 | +410 | +50 | +460 |
| 455 | +160 | -100 | +40 | -60 | -360 | +420 | +50 | +470 |
| 460 | -160 | +200 | +90 | +290 | +40 | 0 | +10 | +10 |
| 465 | -690 | +670 | +130 | +800 | +730 | -750 | -70 | -820 |
| 465,4 | -680 | +670 | +130 | +800 | +740 | -750 | -70 | -820 |
| 470 | -180 | +140 | -10 | +130 | +320 | -360 | -40 | -400 |
| 475 | +390 | -460 | -350 | -810 | -170 | +100 | -10 | +90 |
| 475,6 | +400 | -470 | -360 | -830 | -160 | +90 | -10 | +80 |
| 480 | +30 | -110 | -180 | -290 | +230 | -310 | -50 | -360 |
| 485 | -550 | +500 | +90 | +590 | +730 | -780 | -80 | -860 |
| 486,1 | -570 | +530 | +100 | +630 | +710 | -750 | -80 | -830 |
| 490 | -360 | +350 | +90 | +440 | +380 | -390 | -30 | -420 |
| 495 | +20 | +10 | +40 | +50 | -120 | +150 | +30 | +180 |
| 497,1 | +30 | +10 | +40 | +50 | -150 | +190 | +30 | +220 |
| 500 | -90 | +130 | +80 | +210 | -50 | +90 | +30 | +120 |
| 505 | -360 | +380 | +110 | +490 | +300 | -280 | -10 | -290 |
| 508,2 | -340 | +320 | +60 | +380 | +420 | -440 | -40 | -480 |
| 510 | -270 | +220 | +10 | +230 | +430 | -480 | -50 | -530 |
| 515 | -100 | +10 | -130 | -120 | +380 | -470 | -70 | -540 |
| 520 | -60 | -10 | -110 | -120 | +300 | -370 | -90 | -460 |
| 525 | +10 | -70 | -100 | -170 | +150 | -210 | -30 | -240 |
| 525,3 | +10 | -60 | -100 | -160 | +150 | -200 | -30 | -230 |

Tabelle XXVIII

(Fortsetzung)

| Jahrtausende vor 1800 n. Chr. | Nördliche | | | | Südliche | | | |
|----------------------------------|---|----------------|----------------|--------------|----------------|----------------|----------------|--------------|
| | bis zur Breite von 30° reichende Kalotte der Erde | | | | | | | |
| | $\Delta_1 Q_w$ | $\Delta_1 Q_s$ | $\Delta_2 Q_s$ | ΔQ_s | $\Delta_1 Q_w$ | $\Delta_1 Q_s$ | $\Delta_2 Q_s$ | ΔQ_s |
| 530 | -80 | +70 | +10 | +80 | +100 | -110 | -10 | -120 |
| 535 | -460 | +500 | +130 | +630 | +340 | -300 | -10 | -310 |
| 537,8 | -570 | +600 | +140 | +740 | +490 | -460 | -30 | -490 |
| 540 | -530 | +540 | +130 | +670 | +470 | -460 | -30 | -490 |
| 545 | +20 | -40 | -40 | -80 | +20 | -40 | -10 | -50 |
| 548,6 | +310 | -350 | -200 | -550 | -210 | +170 | 0 | +170 |
| 550 | +310 | -350 | -220 | -570 | -170 | +130 | 0 | +130 |
| 555 | -270 | +200 | -20 | +180 | +510 | -580 | -70 | -650 |
| 559 | -650 | +570 | +80 | +650 | +890 | -970 | -100 | -1070 |
| 560 | -630 | +550 | +80 | +630 | +870 | -950 | -100 | -1050 |
| 565 | 0 | -50 | -90 | -140 | +140 | -190 | -30 | -220 |
| 569,4 | +380 | -380 | -160 | -540 | -380 | +380 | +30 | +410 |
| 570 | +360 | -360 | -140 | -500 | -380 | +380 | +40 | +420 |
| 575 | -360 | +400 | +130 | +530 | +220 | -180 | 0 | -180 |
| 579,7 | -840 | +900 | +140 | +1040 | +660 | -600 | -30 | -630 |
| 580 | -830 | +890 | +140 | +1030 | +650 | -590 | -30 | -620 |
| 585 | -250 | +270 | +90 | +360 | +170 | -150 | 0 | -150 |
| 590 | +350 | -410 | -300 | -710 | -150 | +90 | -10 | +80 |
| 590,3 | +350 | -420 | -310 | -730 | -150 | +80 | -10 | +70 |
| 595 | -20 | -80 | -200 | -280 | +340 | -440 | -70 | -510 |
| 600 | -380 | +290 | -30 | +260 | +700 | -790 | -90 | -880 |

Mechanismus und Ablauf der grossen klimatischen Schwankungen des Quartärs

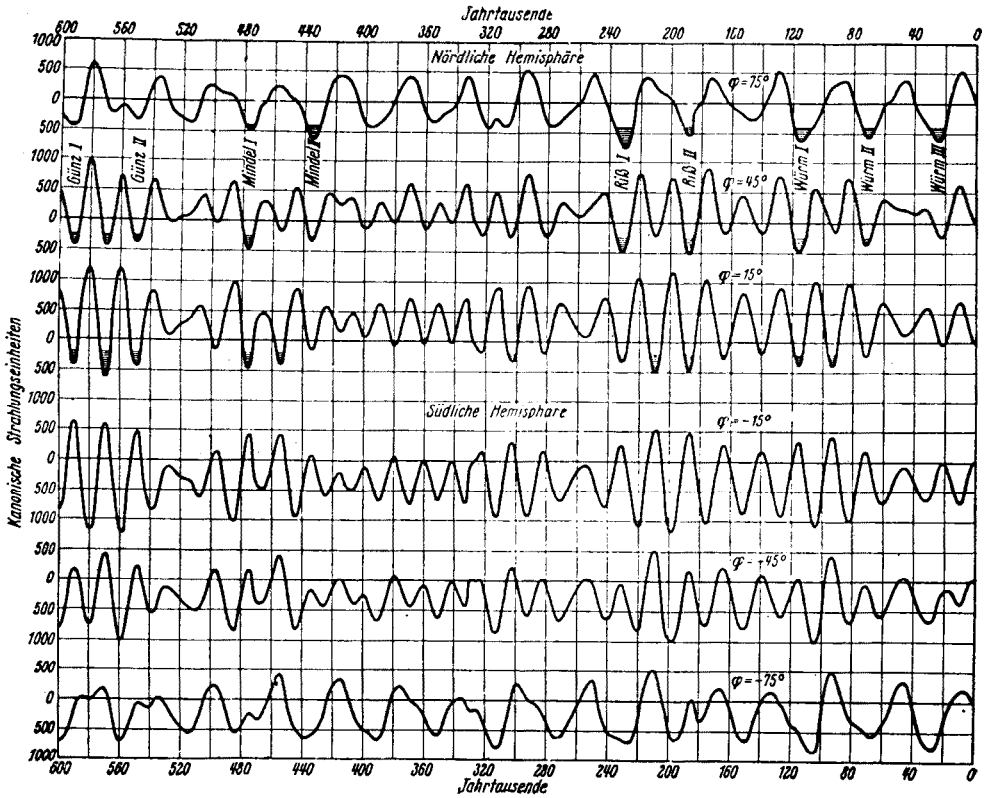
§ 124. Zusammenfassung der Ergebnisse über den säkularen Gang der Erdbestrahlung und seine klimatischen Auswirkungen. Die vorstehenden Ergebnisse und namentlich jene der Tabellen XXV und XXVIII sollen jetzt zusammengefasst und überblickt werden.

Durch die zahlenreiche Tabelle XXV ist der säkulare Bestrahlungsgang der Erde während der letztverflossenen 600 Jahrtausende exakt dargestellt. Einen zusammenfassenden Ueberblick dieses Ganges würde wohl am besten eine graphische Darstellung der Ergebnisse dieser Tabelle ermöglichen, wie eine solche durch die Fig. 37 dieses Werkes zwecks Veranschaulichung des jährlichen Ganges der Erdbestrahlung zur Anwendung gekommen ist. Ein solches Graphikon würde den komplizierten säkularen Gang der Bestrahlung nicht nur der in der Tabelle XXV enthaltenen sechzehn geographischen Breiten, sondern der ganzen Erdoberfläche auf das augenscheinlichste zum Ausdruck bringen; ein nach demselben Prinzip hergestelltes dreidimensionales Modell würde einem solchen Zweck noch besser erfüllen.

Ein Graphikon von der vorstehend angegebenen Art müsste in einem entsprechend grossen Massstabe ausgeführt werden, der das Blattformat dieses Buches weit überschreiten würde, weshalb ich mich hier damit begnügen muss, den säkularen Gang nur einiger ausgewählter Breiten graphisch zu veranschaulichen. Dies ist durch die beiliegende Fig. 55 geschehen, die ich meinen „Astronomischen Mitteln“ entnehme.

In der Fig. 55 ist der säkulare Gang der sommerlichen Bestrahlung der Breiten von 15°, 45° und 75° nördlich und südlich zur Darstellung gebracht, wobei die säkularen Aenderungen des Reflexionsvermögens der Erde noch nicht berücksichtigt erscheinen. Man ersieht aus dieser Figur, dass, wie im Kapitel XV bereits festgestellt, der säkulare Bestrahlungsgang an den verschiedenen geographischen Breiten einen sehr verschiedenen Verlauf gehabt hat. Er war an den hohen Breiten der nördlichen und der südlichen Hemisphäre fast gleichverlaufend, an den tropischen Breiten war er entgegengesetzt, d. h. jener der tropischen Breiten der südli-

chen Hemisphäre ein Spiegelbild jenes der tropischen Breiten der nördlichen Hemisphäre; an den mittleren Breiten der beiden Hemisphären war er weder gleichverlaufend noch spiegelbildlich, sondern verschiedenartig. Dies rührt davon her, dass in den Formeln (1) und (2), die zur Berechnung dieses Ganges dienten, an den hohen Breiten wegen des grossen numerischen Wertes des Koeffizienten ΔW_s der



Säkularer Gang der sommerlichen Bestrahlung verschiedener Breiten der Erdoberfläche ohne Berücksichtigung der säkularen Aenderungen des Reflexionsvermögens der Erde

Fig. 55

Einfluss der Aenderungen $\Delta \epsilon$ der Ekliptik ϵ sich besonders fühlbar macht, an den niederen Breiten dagegen wegen der überwiegenden Grösse des Koeffizienten m der Einfluss der durch den Ausdruck $\Delta (e \sin \Pi_\gamma)$ dargestellten Aenderungen der beiden übrigen Elemente e und Π_γ zur Geltung gelangt. Weil sich der Einfluss der Aenderungen des ersten der obigen drei Elemente auf beiden Hemisphären in demselben Sinne, der Einfluss der Aenderungen der übrigen zwei Elemente aber in entgegengesetztem fühlbar macht, ergeben sich daraus diese so deutlich zum Vorschein kommenden Eigenschaften des säkularen Bestrahlungsganges.

Dieser Bestrahlungsgang kam im klimatischen Bilde der Vorzeit vor allem dadurch zur Geltung, dass er gleichsinnige Aenderungen der jahreszeitlichen Mitteltemperaturen zeitigte, die man nach der Formel (16) erhält, wenn man die in der Tabelle XXV enthaltenen Zahlen durch 150 dividiert. Durch solche Aenderungen sank, wie aus der Fig. 55 sofort ersichtlich, die Mitteltemperatur des Sommerhalbjahres an den hohen und gemässigten Breiten der beiden Hemisphären mitunter um mehr als 5° , um wie wir sehen werden, die Ursache weiterer tiefgehender klimatischer Aenderungen zu werden. Aber auch in der tropischen Zone, wo eine solche mittelbar hervorgerufene weitere Temperaturänderung entweder ganz unterblieb oder nur gering gewesen sein konnte, war der primäre thermische Effekt des säkularen Ganges der Bestrahlung dieser Zone ganz bedeutend. Man ersieht aus der Fig. 55 und der Tabelle XXV, dass an der südlichen Breite von 15° das sommerliche Strahlungsdefizit mehrere Male den Betrag von 1000 kanonischen Strahlungseinheiten überschritten und eine Erniedrigung der mittleren Temperatur der wärmeren Jahreshälfte von über 7° hervorgerufen hatte.

Der augenscheinlichste Effekt dieser säkularen Aenderungen der Sommertemperaturen waren aber die dadurch gezeitigten Verschiebungen der Schneegrenze. Es folgt aus der im § 122 abgeleiteten Korrelation zwischen der Aenderung der sommerlichen Bestrahlung und der zugehörigen Verschiebung der Schneegrenze, nach der jeder Aenderung der sommerlichen Strahlungsmenge von einer kanonischen Einheit eine Verschiebung der Schneegrenze von einem Meter entspricht, dass in Gebirge tragenden Gebieten der Erde als primärer Effekt des säkularen Bestrahlungsganges die Schneegrenze nach oben bzw. nach unten sich verschob, je nachdem die säkulare Schwankung der sommerlichen Bestrahlung eine positive oder eine negative gewesen war. Dieser primäre Effekt überschritt, wie aus der Fig. 55 ersichtlich, an den hohen und den gemässigten Breiten der nördlichen Hemisphäre mitunter den Betrag von 500 m; an der südlichen Hemisphäre war er noch grösser.

Wir haben gesehen, dass die soeben angeführte Korrelation zwischen der Aenderung der sommerlichen Bestrahlung und der Verschiebung der Schneegrenze nur für das Breitenintervall zwischen 30° und 90° streng richtig ist. Für die tropische Zone, für die eine quantitativ gleiche Korrelation nicht bewiesen erscheint, bleibt uns ein anderer Weg offen, um die dort stattgefundenen Verschiebungen der Schneegrenze zu ermitteln. Hat sich dort die mittlere Temperatur der wärmeren Jahreshälfte, wie vorstehend angegeben, um 7° erniedrigt, so müssten wir, um nach einer solchen Temperaturerniedrigung auf der Isotherme der unteren Grenze des ewigen Schnees zu verbleiben, um eine Strecke tiefer heruntersteigen, die man erhält, wenn man die obige Temperaturerniedrigung mit der Abnahme der Temperatur mit der Höhe multipliziert. Diese Abnahme ist für die einzelnen Gebirgsgegenden der tropischen Zone durch die Beobachtungen gegeben. Durch diese Feststellung wird die von einigen Geologen geäusserte Ansicht, der säkulare Bestrahlungsgang könne die in der tropischen Zone stattgefundenen Schneegrenzeverschiebungen nicht erklären, hinfällig.

Fragen wir nun nach den durch die obigen Verschiebungen der Höhenlage der Schneegrenze hervorgerufenen klimatischen Auswirkungen! Diese sind zweifacher Art, je nachdem diese Verschiebungen der narktischen oder der arktischen Zone angehören.

In der nichtarktischen Zone vergrösserte jede Verschiebung der Schneegrenze nach unten das Flächenausmass der Schneebedeckung der Gebirge tragenden Gebiete der Erde. Dies war beispielsweise in den Alpen der Fall. Sank dort die Schneegrenze nach unten, so kam dadurch ein weiterer Teil der Gegend unter eine auch den Sommer überdauernde Schneedecke. Wie gross diese Verbreiterung der Schneedecke gewesen ist, das hing von den Böschungsverhältnissen des Gebietes ab. Die Ermittlung dieser Vergrösserung des Flächenausmasses der Schneebedeckung und deren klimatischer Auswirkung ist Gegenstand regionaler Erforschung. Solche Untersuchungen würden den festgelegten Rahmen meines Werkes überschreiten, weshalb ich auf sie verzichten muss. Ich kann mich zu einem solchen Verzicht um so leichter entschliessen, als ich in der Lage war, die anderen weitaus mächtigeren Auswirkungen der säkularen Aenderungen der Höhenlage der Schneegrenze, jene, die in den polaren Gegenden der Erde vor sich gegangen sind, in den Bereich meiner Untersuchungen einzubeziehen auf Grund folgender Ueberlegungen.

Betrachtet man das durch die Fig. 53 dargestellte Diagramm der gegenwärtigen Höhenlage der Schneegrenze, so ersieht man, dass diese Grenze in den nördlichen Gegenden der Erde an der Breite von etwa 75° die Oberfläche der Kontinentaltafeln erreicht. Bis zu dieser Breite reicht durchschnittlich die nördliche polare Schneekalotte der Erde. Sank diese Höhenlage der Schneegrenze, so wie es im Verlauf der Vorzeit mehrere Male gewesen ist, um etwa 500 m , so hat sie, wie aus der Fig. 53 sofort ersichtlich, die Oberfläche der Kontinente bereits an einer Breite von etwa 65° erreichen müssen, d. h. die polare Schneekalotte musste damals um rund 10° breiter gewesen sein als gegenwärtig und hatte, wie es eine einfache Ausrechnung ergibt, ein 2,75 Mal grösseres Ausmass. Durch eine solche Vergrösserung des Flächenausmasses der polaren Schneedecke veränderte sich das Reflexionsvermögen der Erde ganz empfindlich und ein namhafter Teil der auf diese schneebedeckten Gegenden der Erde auffallenden Sonnenstrahlung wurde auf Kosten des Warmehaushaltes der Erde in den Weltraum zurückgewiesen. Weil das Reflexionsvermögen der Schneebedeckungen der Erde bald nach der Veröffentlichung meiner „Mathematischen Klimalehre“ zuverlässig ermittelt wurde, kam ich bald in die Lage, die vorstehend geschilderte Erscheinung mathematisch zu erfassen. So ist es mir möglich gewesen, die Strahlungsverluste zu berechnen, die die Erde durch jede Vergrösserung ihrer polaren Schneekalotten im Laufe der Vorzeit erlitten hat. Dies ist im vorstehenden Paragraphen geschehen, worin die gewonnenen Ergebnisse der Rechnung durch die umfangreiche Tabelle XXVIII systematisch zusammengestellt sind.

Die ersten sieben Seiten dieser Tabelle enthalten die auf die beiden bis zu den Breiten von 55° reichenden polaren Kalotten der Erde sich beziehenden Rechnungsergebnisse. In der ersten Kolumne dieser Tabelle sind die einzelnen Zeitpunkte der geologischen Vorzeit, auf die sich die Berechnungen bezogen hatten, eingetragen; die zweite und die dritte Kolumne enthält die durch die Veränderungen der astronomischen Elemente hervorgerufenen säkularen Aenderungen $\Delta_1 Q_w$ und $\Delta_1 Q_s$ der pro Flächeneinheit berechneten winterlichen bzw. sommerlichen Bestrahlung der nördlichen Kalotte, die vierte Kolumne enthält die durch die Variabilität der Schneebedeckungen dieser Kalotte hervorgerufenen Aenderungen $\Delta_2 Q_s$ der sommerlichen Bestrahlung dieser Kalotte. Die fünfte Kolumne enthält die totalen säkularen Aenderungen $\Delta Q_s = \Delta_1 Q_s + \Delta_2 Q_s$ der sommerlichen Bestrahlung der Kalotte.

Die durch die Veränderungen des Flächenausmasses der Schneebedeckungen hervorgerufenen Aenderungen $\Delta_2 Q_w$ der winterlichen Bestrahlung habe ich nicht in den Bereich meiner Berechnungen einbezogen und zwar aus folgendem Grunde. Die in Betracht gezogenen Gegenden der Erde sind nämlich auch gegenwärtig während des grössten Teiles des Winterhalbjahres mit Schnee bedeckt. Während der grossen Kältevorstösse der Vorzeit war dies allerdings während des ganzen Winterhalbjahres der Fall gewesen, doch konnte selbst damals die Aenderung $\Delta_2 Q_w$ nicht gross gewesen sein, um in der jährlichen Bestrahlungssumme eine Rolle zu spielen.

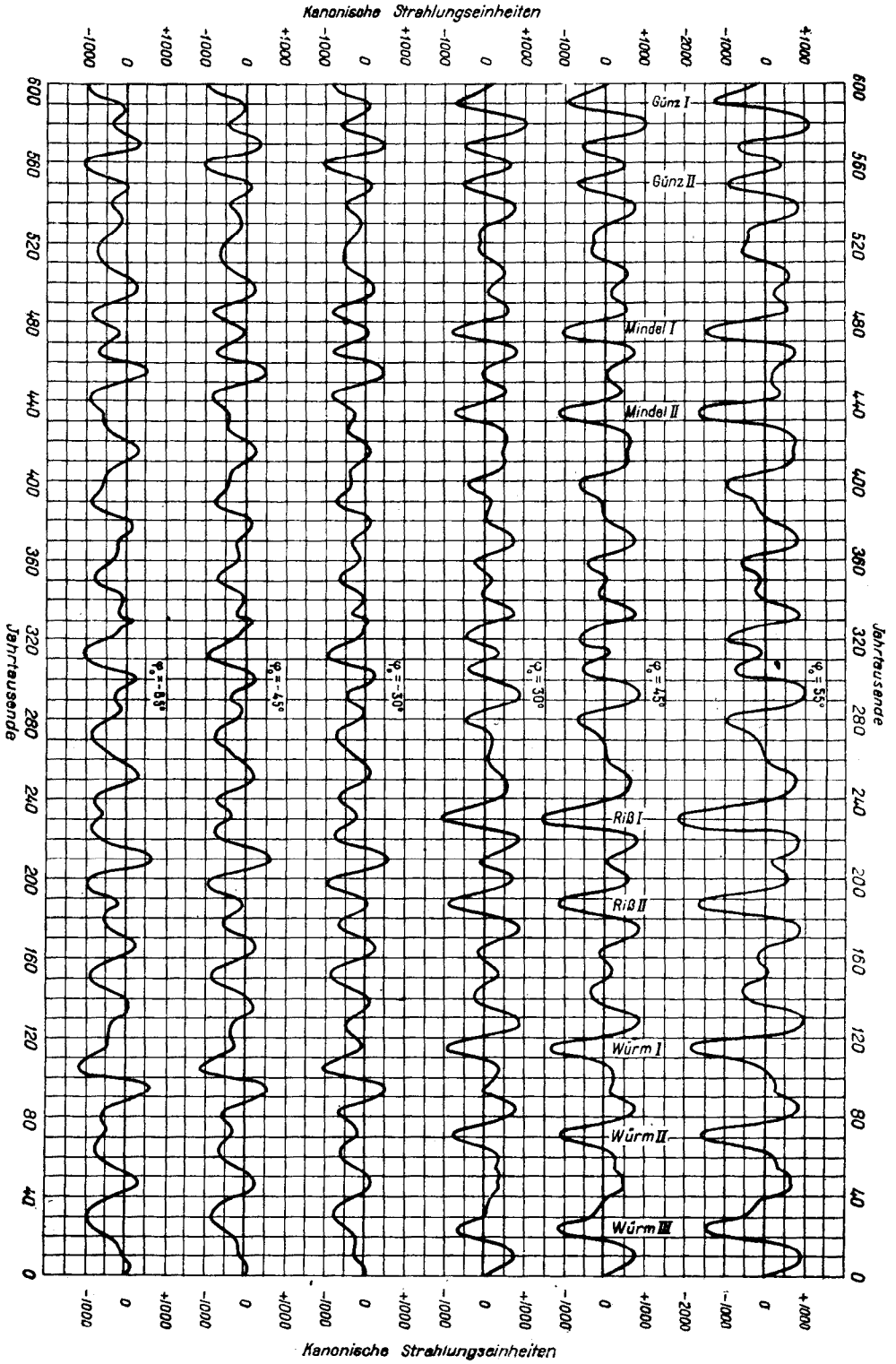
Die Kolonnen sechs bis neun der Tabelle XXVIII enthalten die auf die südliche Kalotte der Erde sich beziehenden Aenderungen $\Delta_1 Q_w$, $\Delta_1 Q_s$, $\Delta_2 Q_s$ und ΔQ_s . Die restlichen Seiten der Tabelle beziehen sich auf den säkularen Gang der bis zur Breite von 45° bzw. 30° reichenden nördlichen und südlichen Kalotten der Erde.

Die wichtigsten Resultate der Tabelle XXVIII sind, um sie überblicken und hier besprechen zu können, in der beiliegenden Fig. 56 graphisch veranschaulicht.

Die oberste Kurve der Fig. 56 stellt den mit Berücksichtigung der Aenderungen des Reflexionsvermögens der Erde sich ergebenden säkularen Bestrahlungsgang der sommerlichen Bestrahlung der nördlichen bis zur Breite von 55° reichenden Kalotte der Erde dar. Die Ordinaten dieser Kurve geben also die jeweiligen totalen Variationen $\Delta Q_s = \Delta_1 Q_s + \Delta_2 Q_s$ der pro Flächeneinheit berechneten sommerlichen Bestrahlung an. Wie aus der Figur ersichtlich, erreichten die negativen Ausschläge dieser Grösse während der Vorzeit mehrere Male sehr hohe Beträge. Zur Zeit von 230 Jahrtausenden vor der Gegenwart betrug dieser Fehlbetrag der sommerlichen Strahlungsmenge 2180 kanonische Strahlungseinheiten. Diesem Betrag entsprach eine Verschiebung der Schneegrenze nach unten von 2180 m. Nach der letzten Kolonne der Tabelle XXVII beträgt die gegenwärtige Höhenlage der solaren Schneegrenze an der Breite von 55° 2256 m. Weil sie sich zu jener Zeit um den soeben angegebenen Betrag nach unten zu verschob, hat sie die Oberfläche der Kontinentaltafeln erreichen müssen, so dass damals die nördliche polare Schneebedeckung der Erde bis zur Breite von 55° reichen musste, wie es tatsächlich der Fall gewesen ist.

Die positiven Ausschläge der Grösse ΔQ_s waren während der Vorzeit nicht unbedeutend kleiner als die negativen. Dies ist leicht verständlich. Jede Verbreiterung der polaren Schneedecke der Erde brachte wegen der ständigen Zunahme des Umfangs der Breitenkreise gegen den Aequator zu immer längere ringförmige Streifen der Erdoberfläche unter die Schneehaube, so dass ihre reflektierende Fläche mit dem Quadrat der Poldistanz zunahm. Bei einer Zusammenschrumpfung der Schneedecke nahm ihre abkühlende Wirkung mit der Annäherung an den Pol rasch ab. Schmolz die polare Schneekalotte ganz ab, dann ward $\Delta_2 Q_s$ gleich Null, und die positive Wirkung der Aenderung des Reflexionsvermögens der Erde erlosch vollständig.

Die unterste Kurve der Fig. 56 stellt den säkularen Gang der sommerlichen Bestrahlung der südlichen bis zur Breite von 55° reichenden Kalotte der Erde dar. Die Ausschläge dieser Kurve, die positiven und noch mehr die negativen, sind kleiner als jene der auf die nördliche Kalotte sich beziehenden Strahlungskurve. Dies rührt, wie bereits gesagt, davon her, dass sich das Ausmass der südlichen



Der mit Berücksichtigung der Aenderungen des Reflexionvermögens sich ergebende säkulare Bestrahlungsgang der Erdkalotten.
Fig. 56

Säkularer durch Breiteschwankungen dargestellter Gang der sommerlichen Bestrahlung der Breite von 65° nördlich.

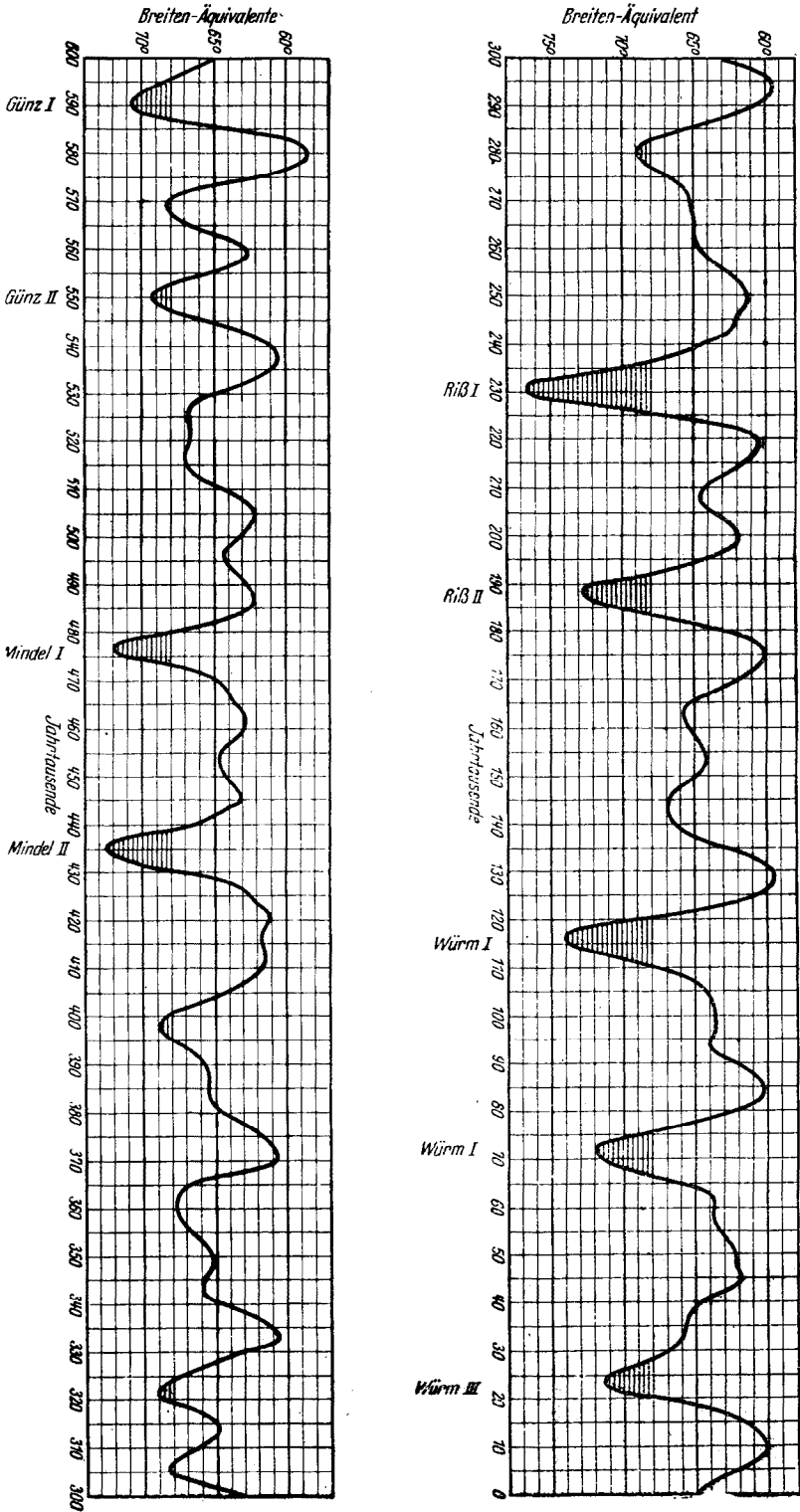


Fig. 57

polaren Schneedecke der Erde während der Vorzeit weniger verändern konnte, weil ihre Verbreiterung auf Kosten des Meeres vor sich ging, ihrer Zusammenschrumpfung die grosse Höhe des antarktischen Kontinents entgegenwirkte. Auch waren die negativen Ausschläge dieser Strahlungskurve gleichmässiger; sie erreichten und überschritten manchmal den Betrag von 1000 Strahlungseinheiten oder 1000 m Schneegrenzeverschiebung.

Wie aus den vorstehenden Daten ersichtlich, waren die beiden bis zu den Breiten von 55° reichenden Kalotten der Erde infolge der Veränderlichkeit der astronomischen Elemente und des Reflexionsvermögens dieser Kalotten starken Schwankungen der sommerlichen Strahlungsmengen unterworfen. Infolgedessen sank die solare mittlere Temperatur der wärmeren Jahreshälfte um Beträge, die auf der nördlichen Hemisphäre bis 14° , auf der südlichen bis 8° heranreichten. Zu diesen Zeiten sank auch die mittlere jährliche Temperatur ganz erheblich. Im 230 Jahrtausend vor der Gegenwart betrug, wie aus der Tabelle XXVIII mittels der Formel (17) abzuleiten, die säkulare Schwankung der jährlichen Strahlungsmenge -1920 kanonische Einheiten und die zugehörige Verminderung der Jahrestemperatur $-6,4^\circ$.

Die hie und da geäusserte Meinung, der säkulare Bestrahlungsgang könne, keine bemerkbaren Schwankungen der Jahrestemperatur hervorrufen, ist, wie das vorstehende Rechnungsergebnis zeigt, unbegründet und unhaltbar.

Die grossen säkularen Temperaturänderungen, die auf den beiden vorstehend in Betracht gezogenen Kalotten der Erde während der Vorzeit stattfanden, haben sich durch Vermittlung der Luft- und Meeresströmungen auch ausserhalb dieser Kalotten fühlbar gemacht. Um über diese Auswirkung Auskunft zu erhalten, habe ich, wie aus der Tabelle XXVIII ersichtlich, den säkularen Gang der Bestrahlung der bis zu den Breiten von 45° bzw. 30° reichenden Kalotten berechnet und die wichtigsten Ergebnisse dieser Berechnung in der Fig. 56 ebenfalls graphisch veranschaulicht.

In der Fig. 56 stellt die zweite von oben gezählte Strahlungskurve den mit Berücksichtigung der ermittelten Aenderungen des Reflexionsvermögens der Erde sich ergebenden pro Flächeneinheit berechneten säkularen Gang der sommerlichen Bestrahlung der nördlichen bis zur Breite von 45° reichenden Kalotte der Erde dar. Die zweite Strahlungskurve von unten bezieht sich auf die südliche bis zur Breite von 45° südlich reichende Kalotte; die beiden mittleren Strahlungskurven beziehen sich auf die beiden bis zur Breite von 30° reichenden Kalotten. Wie aus diesen Kurven ersichtlich, waren die in den polaren Gegenden der Erde während der Vorzeit durch die dort abgelagerten Schneemassen erfolgten Strahlungsverluste gross genug, um selbst den durchschnittlichen Bestrahlungszustand der bis zu den Breiten von 30° reichenden Kalotten mächtig zu beeinflussen und sich dadurch in allen aussertropischen Gebieten der Erde deutlich fühlbar zu machen.

§ 125. Zeitliche Abfolge und Ausmass der grossen klimatischen Schwankungen der letztverflossenen 600 Jahrtausende. Die grossen Ereignisse des quartären Eiszeitalters haben auf der nördlichen Hemisphäre der Erde die bis zur Breite von 45° reichende Kalotte zum Schauplatz gehabt. Um diese Ereignisse überblicken und rekonstruieren zu können, haben wir die für diese Kalotte berechnete Strahlungskurve zu Rate zu ziehen. Es ist dies die von oben gezählte zweite

der in der Fig. 56 veranschaulichten sechs Strahlungskurven. Aus dem Verlauf dieser Kurve ist folgendes deutlich zu ersehen.

Während des Zeitintervalles der letztverflossenen 600 Jahrtausende hat das pro Flächeneinheit dieser Kalotte sich ergebende Defizit der sommerlichen Bestrahlung dieser Kalotte sieben Mal den Betrag von 1000 kanonischen Einheiten überschritten, einmal den Betrag von 950 und einmal den Betrag von 700 solcher Einheiten erreicht. Dies waren die neun mächtigsten Aenderungen der sommerlichen Strahlungsmenge während des angegebenen Zeitraumes.

Um über die genaue Grösse dieser Aenderungen und über deren Folgen Auskunft zu erhalten, ziehen die Tabelle XXVIII heran. Aus derselben ist zu ersehen, dass den erwähnten Höchstwerten jener Aenderungen folgende in Jahrtausenden vor dem Jahre 1800 zu zählenden Zeitpunkte der geologischen Vorzeit entsprachen:

590,3 550 475,6 435 230 187,5 115 71,9 25.

Zu diesen Zeiten erreichte die nach unten zu erfolgte Verschiebung der mittleren solaren Schneegrenze folgende in Metern zu messende Beträge:

950 700 1070 1140 1540 1190 1320 1100 1010.

Die dabei stattgefundenen Defizite der sommerlichen Bestrahlung zeitigten gemäss der Formel (16) folgende in Celsiusgraden gemessene Abminderungen der mittleren Temperatur des Sommerhalbjahres:

6,3 4,7 7,1 7,6 10,3 7,9 8,8 7,3 6,7.

Die Mitteltemperatur des Jahres wurde dabei ebenfalls verkleinert und zwar gemäss der Formel (17) um mindesten folgende Beträge:

2,2 1,5 2,5 3,1 4,0 2,8 3,3 2,8 3,0.

Es waren dies also Zeiten nicht nur sehr kalter Sommerhalbjahre sondern auch kalter Jahre.

Diese neun Epochen des tiefen Herabsteigens der Schneegrenze sind über das Intervall der letztverflossenen 600 Jahrtausende nicht gleichmässig verteilt, sondern erscheinen zu vier Gruppen vereinigt, von denen die ersten drei aus je zwei, die vierte aus drei solchen Kältevorstössen zusammengesetzt sind. Es sind dies jene Gruppen, in denen, wie im § 116 berichtet, Köppen in meinen ersten Strahlungskurven die vier Eiszeiten des Penck-Brücknerschen Schemas erkannte.

Kehren wir also, um Anschluss an die im § 116 angeführten Forschungen der Geologen und der Klimatologen zu erhalten, noch einmal zu meinen ursprünglichen Strahlungskurven zurück! Durch diese Kurven wurde der säkulare Gang der Erdbestrahlung durch fiktive Breiteschwankungen veranschaulicht. Eine derartige und zwar auf die nördliche Breite von 65° sich beziehende Strahlungskurve ist auf

der der Fig. 46 gegenüberliegenden Seite durch die Fig. 57 wiedergegeben. Diese Kurve habe ich zuerst in meiner „Mathematischen Klimalehre“ veröffentlicht, als es mir durch Vervollkommnung des mathematischen Apparates gelungen war, die ursprünglichen Zackenlinien, in denen bloss die Ausschläge des säkularen Bestrahlungsganges dargestellt waren, durch kontinuierliche Kurven zu ersetzen, in denen auch die zwischen jenen Ausschlägen liegenden Zwischenwerte der Bestrahlung veranschaulicht erscheinen.

Diese Kurven unterscheiden sich von den durch die Fig. 55 dargestellten dadurch, dass in denselben die nach unten zu gerichteten Ausschläge gegenüber den nach oben gerichteten etwas verstärkt erscheinen, da, wie aus der Fig. 54 ersichtlich, einer Abnahme der sommerlichen Bestrahlung hoher Breiten eine grössere fiktive Breitenänderungen zukommt als einer Zunahme. In diesen Kurven kam also, wie ich dies in der „Mathematischen Klimalehre“ hervorhob, die abkühlende Wirkung der Schneebedeckungen geometrisch teilweise zum Ausdruck.

Vergleicht man nun die Strahlungskurve der Fig. 57 mit der auf die Kalotte $\varphi_0 = 45^\circ$ sich beziehenden Strahlungskurve der Fig. 56, so ersieht man, dass diese Kurven ihrer Form nach genau übereinstimmen. Die bei dem Zeitpunkt von 465 Jahrtausenden sichtbare kurze Abweichung rührt von dem im § 84 und § 115 erwähnten auf das Glied $\Delta(e \sin \Pi_\gamma)$ sich beziehenden Rechenfehler der astronomischen Tabelle her, der eine Interglazialzeit betrifft und der für die Deutung dieser Kurve ohne Belang gewesen ist.

Der Form nach stimmen also meine neuen Strahlungskurven mit den alten überein, so dass die aus den alten Strahlungskurven gezogenen Schlüsse durch die neueren nicht betroffen werden. Darüber hinaus liefern die neuen Strahlungskurven folgendes.

Meine alten Strahlungskurven und Zahlen veranschaulichten exakt den säkularen Gang der Erdbestrahlung, aber aus diesen Kurven war der klimatische Effekt dieses Ganges nicht direkt ablesbar. Dies veranlasste wohl A. Penck, nachdem er die Richtigkeit meiner in der „Mathematischen Klimalehre“ mitgeteilten Zahlen, „in denen wir ein ausserordentlich wichtiges Material besitzen“, anerkannt, aber sich mit meinen inzwischen erschienenen „Neuen Ergebnissen“ nicht vertraut gemacht hat, zur Aeusserung, der säkulare Bestrahlungsgang wäre nicht imstande, die grossen klimatischen Schwankungen des Quartärs quantitativ zu erklären.¹⁾ Die soeben mitgeteilten Rechnungsergebnisse widerlegen diese Ansicht. Der mit Berücksichtigung des veränderlichen Reflexionsvermögens der Erde berechnete vorzeitliche Gang der Erdbestrahlung reicht, wie die vorstehenden Zahlen beweisen, vollkommen aus, um auch die grössten klimatischen Ereignisse des Quartärs in ihrem vollen Umfang zu erklären und ihre Ursachen klarzulegen. Die abkühlende Wirkung der zeitweilig verbreiterten polaren Kalotten der Erde gesellte sich als sekundärer Effekt des säkularen Ganges den primären Wirkungen desselben hinzu, denn jene Verbreiterung war durch diesen Gang hervorgerufen. Deshalb weisen die neuen mit Berücksichtigung dieses Effektes ermittelten Strahlungskurven denselben Rhythmus wie die

¹⁾ Penck A. Die Strahlungstheorie und die geologische Zeitrechnung. Zeitschrift der Gesellschaft für Erdkunde. 1938. — Eiszeit und Strahlungskurve. Forschungen und Fortschritte. № 6. 1939.

früher berechneten auf, zeichnen sich aber durch die numerisch zum Ausdruck gebrachten klimatischen Effekte dieses Ganges aus.

Ueber die weiteren Schlüsse, die aus den neuen Kurven gezogen werden können, wird später die Rede sein; hier will ich noch über das Ausmass der auf der südlichen Hemisphäre während des Quartärs stattgefundenen klimatischen Aenderungen kurz berichten.

Von den drei ausserarktischen Kontinenten der südlichen Hemisphäre, Südamerika, Afrika und Australien, hat nur der erstgenannte in seinem südlichsten Teile wirkliche Eiszeiten während des Quartärs überlebt. Dies ist leicht verständlich, reicht nur dieser Kontinent über die Breite von 45° südlich hinaus. Für die Untersuchung der hier stattgefundenen klimatischen Schwankungen kommt also die für die bis zur Breite von 45° reichende südliche Kalotte berechnete Strahlungskurve in Betracht. Es ist die zweite von unten der in der Fig. 56 veranschaulichten Strahlungskurven. Aus derselben ist folgendes zu ersehen.

Während des Zeitintervalles der letztverflossenen 600 Jahrtausende hat das pro Flächeneinheit berechnete Defizit der sommerlichen Bestrahlung dieser Kalotte neun Mal den Betrag von 900 kanonischen Einheiten überschritten; dies waren die neuen grössten säkularen Aenderungen der sommerlichen Strahlungsmenge während des in Betracht gezogenen Zeitraumes. Aus der Tabelle XXVIII ist ersichtlich, dass diesen Tiefpunkten der sommerlichen Strahlungsmenge folgende Jahrtausende der Vorzeit entsprachen:

| | | | | | | | | |
|-----|-----|-----|-----|-------|-------|-------|-------|-----|
| 600 | 560 | 485 | 444 | 313,4 | 198,5 | 152,2 | 105,1 | 30. |
|-----|-----|-----|-----|-------|-------|-------|-------|-----|

Zu diesen Zeiten sank die mittlere solare Schneegrenze um folgende in Metern angegebene Beträge:

| | | | | | | | | |
|-----|------|-----|-----|-----|-----|-----|------|------|
| 910 | 1030 | 830 | 840 | 980 | 930 | 840 | 1110 | 830. |
|-----|------|-----|-----|-----|-----|-----|------|------|

Die Mitteltemperatur des Sommerhalbjahres erniedrigte sich dabei um

| | | | | | | | | |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 6,1 | 6,9 | 5,5 | 5,6 | 6,5 | 6,2 | 5,6 | 7,4 | 5,5 |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|

Grade, während die Erniedrigung der Jahrestemperatur das folgende Ausmass hatte:

| | | | | | | | | |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|------|
| 1,2 | 1,1 | 0,8 | 0,9 | 1,2 | 0,9 | 1,0 | 1,4 | 1,3. |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|------|

Während also auf der nördlichen Hemisphäre der stärkste Einbruch der Kälte vor 230 Jahrtausenden stattfand, war dies auf der südlichen Hemisphäre vor 105 Jahrtausenden der Fall. Auf der nördlichen Hemisphäre erreichte das letzte Strahlungsdefizit vor 25 Jahrtausenden seinen Höchstwert, auf der südlichen vor 30 Jahrtausenden. Berücksichtigt man, dass, wie man sehen wird, jeder solcher Kältevorstösse 10 und mehr Jahrtausende währte, so ersieht man, dass zur Zeit vor 25 Jahrtausenden beide Hemisphären der Erde von Eiszeiten heimgesucht wurden.

Aehnliches gilt auch für die vor

600 560 485 444

Jahrtausenden auf der südlichen Hemisphäre stattgefundenen Kälteeinbrüche, die mit jenen vor

590,3 550 475,6 435

Jahrtausenden auf der nördlichen Hemisphäre stattgefundenen zeitlich eng benachbart waren. Durch diese Feststellung wird auch der letzte der im § 119 angeführten Einwände gegen meine Theorie, nämlich jener, sie könne eine gleichzeitige Vereisung beider Hemisphären nicht erklären, widerlegt. Uebrigens ist die Geologie durch ihre Forschungsmethoden gar nicht imstande, die Zeitpunkte der älteren Phasen des Eiszeitalters auf Jahrtausende genau zu ermitteln, um auf diesem Gebiete mit der Astronomie Krieg zu führen.

§ 126. Die vor dem 600. Jahrtausend stattgefundenen klimatischen Schwankungen. Ich habe, wie im § 117 berichtet, meine Berechnung des Verlaufes des säkularen Bestrahlungsganges der Erde auch über den Zeitpunkt von 600 Jahrtausenden vor der Gegenwart in noch fernere Vorzeit und zwar bis zum 1000. Jahrtausend fortgesetzt. Die Ergebnisse dieser Berechnung sind in der Fig. 51 durch fiktive Breiteschwankungen veranschaulicht. Aus diesem Strahlungsdiagramm ist folgendes ersichtlich.

Zur Zeit vor 720 bzw. 761 Jahrtausenden vor der Gegenwart sank die sommerliche Bestrahlung der in diesem Diagramm in Betracht gezogenen Breiten von 55°, 60° bzw. 65° auf ein Minimum, das an die grossen vorstehend besprochenen grossen Einbrüche der Kälte zwar nicht heranreichte, aber die während der Interglazialzeiten vorgekommenen Strahlungsminima übertraf. Diese Feststellung gilt jedoch nur solange man auf die Verlagerungen der Erdpole keine Rücksicht nimmt.

Der dritte Abschnitt dieses Werkes war diesen Verlagerungen der Rotationspole der Erde ausschliesslich gewidmet. Dort ist bewiesen worden, dass diese Pole während der geologischen Vorzeit weite Wege auf der Oberfläche der Erde zurückgelegt haben und aus der Fig. 32 ist ersichtlich, dass während der letzverflossenen Jahrillion sich der Nordpol in einer Richtung bewegte, die ihn dem mitteleuropäischen Vereisungsgebiet ständig näher brachte. Wie gross die Geschwindigkeit dieser Bewegung gewesen ist, konnte nicht genau ermittelt werden. Um über das Ausmass dieser Geschwindigkeit einen Anhaltspunkt zu gewinnen, ziehen wir vorerst die Ergebnisse des Internationalen Breitendienstes zu Rate.

Die Beobachtungen dieses Breitendienstes erstrecken sich auf ein sehr kurzes Zeitintervall und die im § 67 mitgeteilte Zahl über die aus diesen Beobachtungen sich ergebende Geschwindigkeit der säkularen Bewegung des Poles ist aus einer 25-jährigen Beobachtung gewonnen worden. Zudem fallen diese Beobachtungen in die Zeit der im § 69 gekennzeichneten durch die Hebung Skandinaviens verursachten ge-

störten Bewegung des Poles. Die kurze Strecke der säkularen Bewegung des Poles, die sich aus der Beobachtung ergeben hat, stellt also die vektorielle Differenz der ungestörten und der gestörten Bewegung dar. Aus dieser Differenz lässt sich nicht die Geschwindigkeit der ungestörten Bewegung ableiten, sondern bloss der Gröszenordnung nach einigermassen abschätzen. Diese dürfte zu mindesten 2° Verlagerung pro Jahrillion betragen.

Benützen wir diese numerische Angabe, deren Zuverlässigkeit nicht überschätzt werden darf, so finden wir, dass zur Zeit von 720 Jahrtausenden vor der Gegenwart, also zur Zeit des grösseren der beiden vorstehend erwähnten Einbrüche der Kälte, der nördliche Pol der Erde von den mitteleuropäischen Gebieten um $1^{\circ} 26'$ entfernter lag als gegenwärtig, d. h. diese Gegenden wiesen damals eine um $1^{\circ} 26'$ kleinere geographische Breite als gegenwärtig auf.

Die auf die Breite von 55° sich beziehende Strahlungskurve des in der Fig. 51 dargestellten Diagrammes reicht mit ihrer dem Zeitpunkte von 720 Jahrtausenden entsprechenden Zacke, wie dies im Eberlschen Werke durch die von mir berechnete Tabelle III angegeben ist, bis zur Breite von $58^{\circ} 30'$. Ziehen wir von derselben den obigen Betrag der wirklichen Breiteänderung ab, so finden wir, dass diese Zacke bis auf die Breite von $57^{\circ} 4'$ zu reduzieren ist. Die neun grossen Ausschläge dieser Zackenlinie reichen mit Ausnahme des letzten derselben, der infolge des im § 116 erwähnten Rechenfehlers der Pilgrimschen Tabelle in der Fig. 51 zu klein ausgefallen ist, durchwegs bis knapp von 59° und darüber hinaus. Die Berücksichtigung der säkularen Wanderung des Rotationspoles drückt also die auf die Zeitpunkte von 720 und 761 Jahrtausenden sich beziehenden Zacken des Strahlungsdiagrammes derart herunter, dass sie als nicht zur Kategorie der Eiszeiten hervorrufenden Strahlungsänderungen zu betrachten sind.

Die in dem durch die Fig. 51 dargestellten Strahlungsdiagramm und in dem durch die Fig. 50 veranschaulichten stratigraphischen Diagramm mit III, IV, V bzw. mit D I, D II, D III bezeichneten Zacken, die den von Eberl so benannten Donau-Eiszeit bzw. Donau-Stadien entsprechen, dürften also keinen ausgesprochenen Eiszeiten angehören, sondern zwischeneiszeitliche Schwankungen darstellen von der Art jener, die Soergel mit seinem durch die Fig. 52 dargestellten Diagramm beglaubigt hat.

Schreiten wir an der Hand des Strahlungsdiagrammes Fig. 51 in die Vorzeit weiter, so erblicken wir in demselben zwei tiefreichende Zacken, die dort mit I bzw. II bezeichnet sind. Ziehen wir vorerst die erstere derselben in Betracht. Ihr entsprach der Zeitpunkt von 949,3 Jahrtausenden vor der Gegenwart und die auf die Breite von 55° sich beziehende Strahlungskurve reichte mit ihrer Zacke bis $59^{\circ} 0'$. Zieht man von dieser fiktiven Breite die seit jenem Zeitpunkt bis zur Gegenwart stattgefundenene Verlagerung des Poles, die $1^{\circ} 54'$ betrug ab, so findet man, dass diese Zacke nur bis zur Breite von $57^{\circ} 6'$, zu reichen hätte, also fast genau bis jener, die dem Zeitpunkt von 720 Jahrtausenden vor der Gegenwart entsprach. Dadurch sinkt auch diese Zacke in die Kategorie jener Strahlungsänderungen, die zu keiner Eiszeit geführt hatten. Der von Eberl in seinem stratigraphischen Diagramm Fig. 50 angegebene Ottobeurer Schotter dürfte ebenfalls keiner grösseren Inlandvereisung angehören.

Die im Strahlungsdiagramm mit II bezeichnete Zacke war grösser als die soeben besprochene; sie entsprach dem Zeitpunkt von 834,7 Jahrtausenden vor der Gegenwart und reichte in der für die Breite von 55° berechneten Strahlungskurve bis zur Breite von 61° , als ν mit Berücksichtigung der stattgefundenen Verlagerung des Poles bis zur Breite von $59^{\circ} 20'$. Sie gehörte deshalb zur Kategorie jener neun durch die in der Fig. 51 ebenfalls ersichtlichen grossen Zacken veranschaulichten Aenderungen der Bestrahlung, die wir als Ursache der während des Zeitintervalles der letztverflossenen 600 Jahrtausende stattgefundenen grossen klimatischen Schwankungen erkannt haben. Während aber diese neun Zacken zu vier Gruppen vereinigt erscheinen und durch diese Gruppierung, wie dies im nächsten Paragraphen gezeigt werden wird, zu ausgedehnten Vereisungen Europas führten, steht die obige Zacke vereinsamt da. Sie stellt einen kurz andauernden Kältevorstoss dar, dessen Auswirkung sich wohl fühlbar machte, aber nicht an jene der gekoppelten grossen Zacken heranreichte.

Die vorstehenden Schlussfolgerungen sind an die Voraussetzung gebunden, dass die säkulare Bewegung der Rotationspole der Erde eine kontinuierliche gewesen ist und der dadurch während einer Jahrillion zurückgelegte Weg den Betrag von 2° nicht überstiegen hat. Ueberprüfen wir die Berechtigung einer solchen Annahme.

Ich habe in meiner im § 58 gegebenen Ableitung der Grundgleichung der säkularen Bewegung der Erdpole die Anpassungsgeschwindigkeit des Erdkörpers als proportional den Anpassungskräften angenommen, woraus sich neben der Kontinuität der Anpassungsänderungen auch jene der Bewegung der Erdpole ergab. Diese Anpassung erfolgte, wie dort ebenfalls hervorgehoben, durch Ueberwindung von Widerständen. Die obige Voraussetzung stellt einen für die mathematische Behandlung des Problems notwendigen ideellen Fall vor. In Wirklichkeit ist die Anpassung des Erdkörpers und die Bewegung der Pole nicht so ideal verlaufen. Selbst wenn wir von der Heterogenität des Erdkörpers ganz absehen, konnte die Anpassung desselben nur dann vor sich gehen, wenn die Anpassungskräfte einen gewissen Schwellenwert erreicht hatten. Diese Anpassung erfolgte deshalb ruckweise und damit auch die Verlagerung der Pole. Weil es, wie soeben gesagt, nicht möglich erscheint, die Diskontinuitäten dieses Vorganges mathematisch zu erfassen, müssen wir, um über dieselben Auskunft zu erhalten, die empirisch gewonnenen Tatsachen zu Rate ziehen.

Das auf die obige Frage sich beziehende empirische Tatsachenmaterial ist, während ich dies Buch schrieb, von W. Köppen gesichtet, um in seinen bereits erwähnten „Ergänzungen und Berichtigungen“ zu den „Klimaten der geologischen Vorzeit“ veröffentlicht zu werden. Knapp vor seinem Tode und nachdem der dritte Abschnitt meines Buches bereits gedruckt war, sandte mir Köppen einen Korrekturabzug dieser Ergänzungen, so dass ich sie erst in diesem letzten Abschnitt meines Werkes, aber immer noch rechtzeitig berücksichtigen kann.

Nach Köppens Ansicht spricht das Tatsachenmaterial der geologischen Forschung dafür, dass im Frühquartär der Nordpol um etwa 14° von seiner jetzigen Lage entfernt war, um durch eine unbekannte Ursache, die zugleich den Anstoss zu der gewaltigen himalaja-alpiden Faltung gab, in seine jetzige Normalbahn zu gelangen. Trifft dies zu, so wäre die Wirkung der soeben besprochenen vorgünzischen Strahlungsschwankungen wegen der noch bedeutend kleineren als oben angegebenen geographischen Breite von Mitteleuropa eine ganz geringe gewesen. Dies würde mit

einem Schlag erklären, warum die europäischen Eiszeiten auf das Zeitintervall der letztverflossenen 600 Jahrtausende beschränkt blieben.

Aber auch die vorstehenden Berechnungen besagen, dass mit dem Fortschreiten in die Vergangenheit sich die Wirkung der säkularen Schwankungen in Mittel- und Nordeuropa immer weniger fühlbar gemacht haben musste wegen der gegen die Vorzeit zu ständig zunehmenden Entfernung des Poles von diesen Gebieten der Erde. Ausserdem trat, wie aus dem Strahlungsdiagramm Fig. 51 ersichtlich, im Ablauf des säkularen Bestrahlungsganges eine tiefgehende Veränderung zu Tage. Zwischen den beiden durch die Formeln (1) und (2) gegebenen Komponenten dieses Bestrahlungsganges stellte sich nämlich eine Phasendifferenz ein, die die in den vier Hauptperioden der quartären Eiszeit zutage tretenden gekoppelten Kältevorstösse in isolierte verwandelte, deren Wirkung, wie oben bemerkt, viel geringer sein musste.

Dadurch ist die oft gestellte Frage, warum die Eiszeit ein Spezifikum des Quartärs gewesen ist, meritorisch beantwortet. Diese Antwort kann durch die nachstehenden Ausführungen wesentlich vervollständigt werden.

Die im ersten Abschnitt dieses Buches mitgeteilten Lehren der Himmelsmechanik besagen unzweideutig, dass die dort analytisch dargestellten gegenseitigen Störungen der Planeten während der ganzen Erdgeschichte vor sich gegangen sind, woraus wieder folgt, dass die Bestrahlung der Erde während dieses ganzen langen Zeitintervalles säkularen Aenderungen unterworfen war. Wohl erlauben uns die gegenwärtigen Mittel der Himmelsmechanik nicht, den säkularen Bestrahlungsgang der Erde bis in jene ferne Zeiten rechnerisch zu verfolgen, es ist aber nicht zu bezweifeln, dass säkulare Schwankungen der Erdbestrahlung auch vor dem Quartär stattgefunden haben, ja noch mehr. Mit der Länge des in Betracht zu ziehenden Intervalles wächst naturgemäss die Wahrscheinlichkeit eines fallweise intensiveren Zusammenwirkens der Veränderlichkeit der astronomischen Elemente zur Herbeiführung grösserer Amplituden des säkularen Bestrahlungsganges. Wären wir in der Lage gewesen, die den Bestrahlungsgang der Erde numerisch veranschaulichende Tabelle XXV bis in jene ferne Zeiten fortzusetzen, so wären wir unzähligen Strahlungsschwankungen begegnet, deren Ausschläge die in der Fig. 51 dargestellten manchmal stark übertroffen haben würden.

Dass solche Strahlungsschwankungen während der Vorzeit wirklich vor sich gegangen sind, darüber liefert uns die Geologie untrügliche Belege. So entdeckte man, um nur ein derartiges Beispiel anzuführen, in den Ablagerungen des Karbonzeitalters regelmässig abwechselnde übereinander geschichtete Lagen von Sedimentgestein bzw. von Kohle. Die Anzahl der derart mit Zwischenschichten voneinander getrennten Kohlenadern beträgt mitunter über siebzig. Jedem solchen Schichtwechsel entspricht aber ein Klimawechsel. Hier haben also die Schwankungen der Bestrahlung des Gebietes ihren Rhythmus in diesen Ablagerungen markiert und man könnte aus der Abfolge und Mächtigkeit solcher Ablagerungen die einzelnen Zacken der zugehörigen Strahlungskurve konstruieren, ja selbst die damals stattgefundenen Störungen der Erdbahnelemente ermitteln.

Warum diese während des Karbonzeitalters stattgefundenen Strahlungsschwankungen keine Vereisungen auf der damaligen Nordhemisphäre herbeigeführt haben, ist durch die Untersuchungen von Köppen und Wegener und durch die

Ergebnisse des dritten Abschnittes dieses Werkes unzweideutig beantwortet. Aus der Fig. 32, die die säkulare Bahn des nördlichen Drehpoles der Erde veranschaulicht, ist zu ersehen, dass sich der Nordpol während des Paläozoikums weit im Pazifischen Ozean befunden hat. Wenn also selbst die säkularen Schwankungen der Bestrahlung der damaligen Nordhemisphäre der Erde das Ausmass der quartären Schwankungen überschritten haben würden, könnten sie doch nicht zu einer Vereisung dieser Hemisphäre geführt haben, denn sie blieben ohne ihren sekundären Effekt, der in den Veränderungen des Reflexionsvermögens der Erde seinen Ursprung hat. Um den damaligen weit im Pazifischen Ozean liegenden Nordpol konnte sich keine polare Schneekalotte bilden, weshalb ihre zur Vereisung erforderliche Wirkung vollkommen ausblieb.

Auf der südlichen Hemisphäre war es damals anders, denn der Südpol überquerte, wie aus den Angaben der Tabelle IV ersichtlich, während des Paläozoikums die südliche Spitze des afrikanischen Kontinents und führte zu den Vereisungen der südlichen Kontinente.

Die eiszeitenfreie Periode der nördlichen Hemisphäre dauerte, wie ebenfalls aus der Tabelle IV ersichtlich, sehr lange. Erst als sich der Nordpol auf seiner durch die Fig. 32 dargestellten Bahn der Nordwestecke des amerikanischen Kontinents näherte, um sie nachher zu überqueren, rief er die tertiären Vereisungen Alaskas und Nordostsibiriens hervor.

Wann dabei die von Köppen vermutete ruckweise Verlagerung des Poles erfolgt war und welches Ausmass dieser letzte Ruck der Polwanderung gehabt hat, lässt sich nicht mit Bestimmtheit feststellen und so will ich mich, auch in dieser Frage nicht, auf Vermutungen und Hypothesen einlassen. Ich kann darauf aus folgendem Grunde verzichten. Sobald die amerikanischen Eiszeit Spuren in die Strahlungskurven derart eingeordnet sein werden, wie es mit den europäischen geschehen ist, wird man aus der Anzahl der durch solche Spuren beglaubigten Zacken der Strahlungskurve genau ermitteln können, wie die Verlagerung des Nordpoles während der letzten Jahrmillione verlaufen ist und wann das Eiszeitalter in Amerika begonnen hat.

§ 127. Einzelheiten über den Verlauf der klimatischen Schwankungen des Eiszeitalters. Der säkulare Gang der Bestrahlung der Erde ist — darüber ist kein Zweifel möglich — so verlaufen, wie er durch die vorstehenden Tabellen zahlenmässig dargestellt erscheint. Die Genauigkeit der zu diesem Zwecke durchgeführten Berechnung der stattgefundenen Aenderungen der Strahlungsmengen, verbunden mit absolut verlässlicher Zeitangabe, bürgt dafür, dass unsere Erde während der Vorzeit jener Bestrahlung theilhaftig war, die hier mathematisch beschrieben ist.

Bei der Umsetzung der vorstehend berechneten Strahlungsmengen in den Wärmegehalt des Erdbodens, der Wasserbedeckungen und der Atmosphäre der Erde machten sich verschiedene mathematisch kaum zu erfassende Einflüsse geltend, die die vorstehend beschriebenen Effekte des säkularen Bestrahlungsganges mehr oder weniger modifizierten, aber nicht entstellten, so dass sie in der Sprache der exakten Wissenschaft als Störungen, in der Sprache der beschreibenden Wissenschaften als Nebeneinflüsse zu bezeichnen sind.

Diese Nebeneinflüsse rührten vorwiegend von der Konfiguration der Kontinente und von Luft- und Meeresströmungen her. Bei der Ermittlung derselben müssen empirische Forschungsmethoden zur Anwendung gelangen, weshalb sie Gegenstand der empirischen Geologie bzw. der empirischen Meteorologie sind. Ueber die auf dem ersteren dieser beiden Wissensgebiete von Soergel bzw. Beck durchgeführten Untersuchungen ist bereits berichtet worden, auf dem zweiten dieser Gebiete hat sich Walter Wundt verdienstvoll hervorgetan, indem er sich zur Aufgabe machte, die hier niedergelegte Theorie nach ihren klimatischen Sekundärwirkungen weiter auszubauen.¹⁾ Durch seine diesbezüglichen Untersuchungen hat er zugleich ein Vorbild geschaffen, wie diese Fragen zu behandeln sind.²⁾

Ich kann hier nur die wichtigsten der erwähnten Nebeneinflüsse kurz besprechen,

Die vorstehend berechneten säkularen Temperaturänderungen betreffen, weil bei der Ermittlung derselben nur Strahlungsänderungen Berücksichtigung fanden, die solaren Temperaturen. Dies sind jene Temperaturen, die sich je nach der geographischen Breite des in Betracht gezogenen Ortes aus der zugehörigen jahreszeitlichen Einstrahlung der Atmosphäre und der Bestrahlung dieses Ortes ergeben. Zwischen diesen solaren Temperaturen und den tatsächlich beobachteten bestehen, wie im vorstehenden Abschnitt ausführlich besprochen, Unterschiede, die in der Konfiguration der Kontinente und in den Luft- und Meereströmungen ihren Ursprung haben. Wirft man nur einen Blick auf die durch die Beobachtung gewonnenen Isothermenkarten, so ersieht man sofort, dass weder die monatlichen noch die jahreszeitlichen Isothermen parallel den Breitenkreisen verlaufen, sondern dass sich im Verlauf derselben der erwähnte Einfluss deutlich fühlbar macht.

Die vorstehenden Berechnungen betreffen indessen nur die säkularen Änderungen der solaren Temperaturen. Diese Änderungen werden sich von jenen der tatsächlich beobachtbaren Temperaturen nicht viel unterscheiden können, weil während des Zeitintervalles von 600 Jahrtausenden, auf das sich meine vorstehenden Berechnungen beziehen, die Konfiguration der Kontinente nur geringen Veränderungen unterworfen war. Deshalb blieb der Unterschied zwischen den solaren und den tatsächlichen Temperaturen im grossen und ganzen auch während der Vorzeit aufrecht und drückte seinen Stempel auf das eiszeitliche Klima. Auch damals bestand die bunte Mannigfaltigkeit der Klimate der Erde, wie wir sie heute beobachten. Deshalb verliefen die Begrenzungslinien der polaren Schneekalotten nicht längs der Breitenkreise, sondern längs der durch die Konfiguration der Kontinente und durch die Luft- und Meereströmungen aufgezwungenen Linien. Bei den vorstehenden Betrachtungen und Untersuchungen konnte nur von der mittleren Begrenzungslinie dieser Kalotten die Rede sein, wie sie sich durch die Ausschaltung der erwähnten Nebeneinflüsse ergab.

1) Wundt W. Die astronomische Theorie der Eiszeiten. Naturwissenschaftliche Monatschrift. November 1938.

2) Wundt W. Die astronomische Theorie der Eiszeiten und die auftretenden Sekundärwirkungen. Zeitschrift für Gletscherkunde. Band XXII. 1935. — Die Klimate der Spät- und Nacheiszeit. Meteorologische Zeitschrift. 1935. — Die Verschiebung der Klimagürtel seit dem Ausklang der Eiszeit. Petermanns Geographische Mitteilungen. 1938. — Klimaänderungen in der Nacheiszeit. Forschungen und Fortschritte № 9. 1939.

Könnte vorstehend durch die Tabelle XXV der säkulare Bestrahlungsgang der einzelnen Breiten zur numerischen Darstellung gebracht werden, so war dies bei der Berechnung der Tabelle XXVII nicht mehr möglich. Um den Einfluss der Veränderungen des Reflexionsvermögens der Erde mathematisch zu erfassen, mussten endliche Gebiete der Erdoberfläche, also durch Breitenkreise begrenzte Kalotten derselben in Betracht gezogen werden. Deshalb stellen die durch die Tabelle XXVIII und die Fig. 56 veranschaulichten Aenderungen der Bestrahlung und der Höhenlage der Schneegrenze die durchschnittlichen für die in Betracht gezogene Kalotte sich ergebenden Mittelwerte dar. Aus diesen Mittelwerten kann die Staffelung der erwähnten Aenderungen in meridionaler Richtung von Breite zu Breite abgeschätzt, aber nicht genau abgelesen werden. Diese Mittelwerte geben einen Ueberblick über die zonale Verteilung dieser Aenderungen, aber nicht ihre lokalen Ausmasse. Die Ermittlung dieser letzteren kann nur Aufgabe regionaler Erforschung sein. Dasselbe gilt auch hinsichtlich der nachfolgenden Erscheinung im Ablauf des Eiszeitalters.

Ich habe bei der vorstehenden numerischen Ermittlung des Einflusses der Eisbedeckungen der Erde auf den Ablauf des vorzeitlichen Klimas nur das Oberflächenausmass dieser Bedeckungen in Rechnung stellen können, aber nicht deren Mächtigkeit, die von den lokalen Bedingtheiten und von der Niederschlagsmenge abhängig ist. Hätte diese Mächtigkeit während des Eiszeitalters nirgends ein bescheidenes Mass überschritten, würden die Strahlungskurven auch die thermischen Erscheinungen des Eiszeitalters widerspiegeln, d. h. die säkularen Aenderungen der jahreszeitlichen Temperaturen würden den Strahlungsschwankungen proportional gewesen sein. Die obige Voraussetzung war aber nur in den Zwischengebieten der Vereisungen und sonst nur während der Interglazialzeiten weitgehend erfüllt, weshalb in jenen Zwischengebieten, wie es die Untersuchungen von Soergel dargethan haben, die klimatischen Schwankungen mit dem Verlauf der Strahlungskurven so genau übereinstimmten, dass hier nicht nur die vorher besprochenen neun grossen Ausschläge der Bestrahlung, sondern auch deren kleinere Oszillationen deutliche Spuren hinterliessen.

Ueberstieg die Mächtigkeit der Eisdecken das vorher angegebene Ausmass, was namentlich während der neun grossen Ausschläge der Bestrahlung der Fall gewesen ist, dann machten sich folgende Auswirkungen geltend.

War im Verlauf der Vorzeit die sommerliche Strahlungsmenge im Sinken begriffen, so war dies, wie bewiesen, auch mit der Höhenlage der Schneegrenze der Fall. Die polaren Schneekalotten vergrösserten sich zusehends und auch ausserhalb ihres Bereiches kamen weite Gebiete unter eine auch den Sommer überdauernde Schneedecke. Ziehen wir vorerst diese Gebiete, also beispielsweise das Alpengebiet in Betracht.

Ein solches Gebiet kam unter eine dauernde Schneedecke sobald die Höhenlage der Schneegrenze seinen höchsten Berggipfel erreichte. Mit zunehmender Vorgrösserung dieser Schneedecke kam ihre durch Reflexion der auf dieselbe auffallenden Sonnenstrahlung hervorgerufene abkühlende Wirkung zur Geltung. Bei meinen vorstehenden Berechnungen habe ich die abkühlende Wirkung der polaren Schneedecken gebührend berücksichtigt, nicht aber jene des ausserhalb dieser Schneedecken liegenden Inlandeises, da diese einen ausgesprochen lokalen Charakter hatte. Ihr Einfluss machte sich während des Zeitintervalles, das einem Abstieg der

Strahlungskurve in das Wellental entsprach, durch eine leichte nach unten zu erfolgte Abzweigung der Temperaturkurve von der Strahlungskurve mehr oder weniger geltend, aber bedeutend mehr zu jener Zeit, die einem Aufstieg der Strahlungskurve aus dem Wellental zum Wellenberg entsprach. Bei diesem Strahlungsaufstieg musste nämlich vorerst ein namhafter Teil der dem vereisten Gebiet zugestrahlten Wärmemenge zum Abschmelzen des angehäuften Schnees und Eises aufgebraucht werden, bevor es zu einem neuen Temperaturaufstieg kam. Dadurch verspätete sich das Temperaturminimum gegenüber dem Strahlungsminimum um eine Zeitspanne, die, je nach der Mächtigkeit der abzuschmelzenden Schneedecke, mehrere Jahrtausende betrug, manchmal noch mehr. Diese Verspätungserscheinung hat sich namentlich während der sogenannten Interstadiale, d. h. während der Zeitintervalle, die in der Strahlungskurve durch zwei eng benachbarte Strahlungsminima begrenzt erscheinen, besonders fühlbar machen müssen. Die einem solchen Interstadial entsprechende Temperaturkurve hat mit ihrem Wellenberg nicht jenen Scheitelpunkt erreichen können, der nach der Formel (16) dem Scheitelpunkt der Strahlungskurve entsprechen würde. In manchen Fällen und namentlich in dem Kerngebiet der Vereisung kam hier ein Temperaturaufstieg überhaupt nicht zustande, denn hat die mächtige Vereisung des Gebietes die Oberfläche der Eisbedeckung bis zu einer solchen Meereshöhe emporgehoben, dass sie durch ihre Höhenlage vor der Abschmelzung geschützt war, dann vereinigten sich die beiden Tale der Temperaturkurve zu einem einzigen. Hier also hinterliessen die zu einem Dublett oder Triplett zusammengewinkelten Wellentäler der Strahlungskurve den Eindruck je einer einzigen Vereisungsphase, wie solche im Penck-Brücknerschen Schema zum Ausdruck gelangen.

In den zur polaren Eiskalotte gehörigen Inlandeisgebieten, also im hohen Norden Europas, wiederholte sich diese Erscheinung in noch stärkerem Masse, denn dort konnte die Mächtigkeit der Eisbedeckung deren Oberfläche bis zu einer solchen Höhe emporheben, wo sie auch während der nachfolgenden Strahlungsmaxima vor der Abschmelzung geschützt war. Dies erklärt, dass, wie im § 111 bereits mitgeteilt, in Skandinavien die ersten vier bzw. die letzten fünf der neun grossen Kältephasen des Eiszeitalters sich zu je einer einzigen Vereisungsphase vereinigten und diese zwei verbleibenden Phasen durch die grosse im Strahlungsdiagramm zwischen Mindel II und Riss I deutlich erkennbare grosse Interglazialzeit von einander geschieden waren. Durch eine derartige Höhenlage ihrer Oberfläche trotz der Eisbedeckung Grönlands heute noch der Wärme der Sonnenstrahlung.

Das durch die Strahlungskurven gewonnene Schema der Eiszeitenabfolge widerspricht also, wie im § 116 bereits festgestellt, dem im Alpengebiet empirisch gefundenen Penck-Brücknerschen Schema nicht, sondern vervollständigt und verfeinert dasselbe, indem es weiter zergliedert und dadurch alle Einzelheiten des Eiszeitalters erkennen lässt. Darüber hinaus liefert das neue Schema eine auf astronomischer Rechnung fussende Chronologie dieses Zeitalters und bringt die Ursachen des Eiszeitphänomens zutage.

Diese Ursachen, die durch die gegenseitigen Störungen der Planeten hervorgerufenen Aenderungen der Erdbestrahlung, liegen weit ausserhalb des Gesichtskreises der beschreibenden Naturwissenschaften. Deshalb war es Aufgabe der exakten Naturwissenschaft mit ihren das Weltall beherrschenden Gesetzen und mit

ihrem ausgebildeten mathematischen Apparat das obige Schema zu entwerfen. Den beschreibenden Naturwissenschaften war es aber, wie im Kapitel XXI berichtet, vorbehalten, die Uebereinstimmung dieses Schemas mit der geologischen Erfahrung festzustellen.

Inhalts-Verzeichnis

Vorwort

Verzeichnis

der auf den in diesem Werke behandelten Gegenstand sich beziehenden
Schriften des Verfassers

ERSTER ABSCHNITT

Die Bewegung der Planeten um die Sonne und die gegenseitigen Störungen dieser Bewegung

Kapitel I

Das Newtonsche Gravitationsgesetz

| | Seite |
|--|-------|
| § 1. Die Keplerschen Gesetze | 1 |
| § 2. Ableitung des Gravitationsgesetzes aus den Keplerschen Gesetzen | 8 |

Kapitel II

Das Zweikörperproblem der Himmelsmechanik und die ungestörte heliozentrische Bewegung der Planeten

| | |
|---|----|
| § 3. Problemstellung | 15 |
| § 4. Die Schwerpunktsintegrale | 16 |
| § 5. Die beiden Vektorintegrale der Differentialgleichung der ungestörten heliozentrischen Bewegung der Planeten | 17 |
| § 6. Geometrische Deutung der beiden Vektorintegrale | 20 |
| § 7. Verschiedene andere Formen der erhaltenen Integrale | 25 |
| § 8. Das sechste skalare Integral | 26 |
| § 9. Endgültige vektorielle Form der vollständigen Integrale der Differenti- algleichung der ungestörten Bewegung der Planeten | 28 |
| § 10. Das Satellitenproblem, zurückgeführt auf des Zweikörperproblem | 32 |
| § 11. Der Zusammenhang zwischen den vektoriellen und den elliptischen Elementen | 35 |

Kapitel III

Die Störungsrechnung

| | Seite |
|--|-------|
| § 12. Das Mehrkörperproblem der Himmelsmechanik und seine allgemeinen Integrale | 40 |
| § 13. Die Differentialgleichungen der heliozentrischen Bewegung der Planeten | 48 |
| § 14. Die vektoriellen Grundgleichungen der Störungsrechnung | 51 |
| § 15. Die Klammersausdrücke von Lagrange | 54 |
| § 16. Berechnung der Lagrangeschen Klammersausdrücke für die vektoriellen Elemente | 58 |
| § 17. Die Gleichungen der zeitlichen Aenderungen der vektoriellen Elemente | 61 |
| § 18. Periodische und säkulare Störungen; die Bedeutung dieser letzteren für die Ziele der nachstehenden Forschungen | 64 |
| § 19. Die Differentialgleichungen der säkularen Aenderungen der vektoriellen Elemente | 69 |
| § 20. Klassische Form der Differentialgleichungen der säkularen Aenderungen der astronomischen Elemente | 80 |
| § 21. Die Integration der Differentialgleichungen der säkularen Aenderungen der astronomischen Elemente | 85 |
| § 22. Einige Schlussfolgerungen aus den vorstehenden Integralen | 91 |

ZWEITER ABSCHNITT

Die Drehbewegungen der Erde

Kapitel IV

Ableitung der für das Studium der Drehbewegungen der Erde erforderlichen Sätze und Gleichungen

| | |
|---|-----|
| § 23. Das tellurische Massenpunktsystem | 97 |
| § 24. Die Impulssätze | 98 |
| § 25. Der Schwerpunktsatz | 100 |
| § 26. Unabhängigkeit der Drehbewegung von der fortschreitenden Bewegung | 101 |
| § 27. Einführung beweglicher Bezugssysteme | 103 |
| § 28. Das mit dem bewegten Körper fest verbundene Bezugssystem | 105 |
| § 29. Die Eulerschen Winkel | 107 |
| § 30. Polhodie und Herpolhodie | 108 |
| § 31. Einiges über des Gravitationsfeld raumfüllender Massen | 111 |
| § 32. Drehbewegung flüssiger oder gasförmiger Himmelskörper | 116 |
| § 33. Drehbewegung mit ausgeglichenen Winkelgeschwindigkeiten | 120 |
| § 34. Gleichgewichtsbedingungen | 125 |
| § 35. Das Theorem von Clairaut | 127 |

Kapitel V

Die tägliche Drehbewegung der Erde und ihre Folgen

| | |
|--|-----|
| § 36. Mechanismus der kräftefreien Drehbewegung der Erde | 132 |
| § 37. Erfahrungstatsachen | 141 |
| § 38. Die tägliche Drehbewegung der Erde und ihr Spiegelbild | 146 |
| § 39. Sphärische Koordinaten | 148 |

| | Seite |
|---|-------|
| § 40. Die tägliche Bewegung des Himmels | 155 |
| § 41. Die Bewegung der Sonne am Himmel | 157 |
| § 42. Nebeneinflüsse | 161 |

Kapitel VI

Die Präzession der Erdachse

| | |
|--|-----|
| § 43. Geschichtliches | 169 |
| § 44. Das Drehmoment der auf die Erde einwirkenden äusseren Kräfte | 170 |
| § 45. Bewegungsgleichungen. Permanente und periodische Störungsglieder | 173 |
| § 46. Wirkung der einzelnen Bestandteile des Drehmoments | 178 |
| § 47. Die Präzession der Erdachse | 184 |
| § 48. Periodische Glieder | 188 |

Kapitel VII

Die astronomische Nutation der Erdachse

| | |
|---|-----|
| § 49. Störungen der Ebene der Mondbahn | 190 |
| § 50. Die astronomische Nutation der Erdachse | 193 |

Kapitel VIII

Zeitmessung und Zeitzählung

| | |
|---------------------------------------|-----|
| § 51. Stern- und Sonnentage | 199 |
| § 52. Zeitzählung | 202 |

DRITTER ABSCHNITT

Säkulare Wanderungen der Drehpole der Erde

Kapitel IX

Das Polwanderungsproblem und seine mathematische Erfassung

| | |
|---|-----|
| § 53. Geschichtliches | 206 |
| § 54. Geophysikalische Tatsachen | 208 |
| § 55. Mathematische Erfassung des vorstehenden Tatsachenmaterials | 210 |

Kapitel X

Die dynamische Asymmetrie der Erdrinde und ihre Folgen

| | |
|---|-----|
| § 56. Die Anomalie der Trägheitspole des Erdkörpers | 218 |
| § 57. Die dynamische Anpassung des Erdkörpers | 221 |

Kapitel XI

Der Mechanismus der säkularen Polwanderungen

| | Seite |
|---|-------|
| § 58. Die vektorielle Grundgleichung der säkularen Bewegung der Erdpole | 230 |
| § 59. Periodische Glieder der Polbahnbewegung | 233 |
| § 60. Eine andere Ableitung der Grundgleichung der säkularen Bewegung der Erdpole | 241 |
| § 61. Allgemeine Eigenschaften des Feldes Ω und der Polbahnkurven | 247 |
| § 62. Die Gleichung der ungestörten Polbahnkurve | 252 |
| § 63. Die säkulare Bewegung des Poles längs seiner Bahnkurve | 256 |

Kapitel XII

Numerische Ausrechnung und kartographische Veranschaulichung der säkularen Polwanderungen

| | |
|--|-----|
| § 64. Grundlagen der Berechnung | 257 |
| § 65. Gang und Ergebnis der Berechnung | 264 |
| § 66. Vergleich des durch die vorstehende Berechnung erhaltenen Ergebnisses mit den Dokumenten der Erdgeschichte | 276 |
| § 67. Der zeitliche Verlauf der Polverlagerungen | 278 |
| § 68. Der Einfluss der Polverlagerungen auf die Orientierung der Erdoberfläche im Weltraum | 281 |
| § 69. Nebeneinflüsse | 282 |

VIERTER ABSCHNITT

Die Bestrahlung der Erde durch die Sonne und die säkularen Änderungen dieser Bestrahlung

Kapitel XIII

Der gegenwärtige Bestrahlungszustand der Erde

| | |
|---|-----|
| § 70. Die Solarkonstante | 283 |
| § 71. Das Bestrahlungsgesetz | 284 |
| § 72. Die Bestrahlung der Erde in einem gegebenen Zeitpunkte | 287 |
| § 73. Der tägliche Bestrahlungsgang | 292 |
| § 74. Die täglichen Strahlungsmengen | 294 |
| § 75. Die Diskontinuität des Bestrahlungsganges und deren Elimination | 301 |
| § 76. Reihenentwicklungen | 305 |
| § 77. Der jährliche Gang der Bestrahlung | 319 |
| § 78. Die während beliebiger Zeitabschnitte des Jahres zugestrahlten Wärmemengen | 317 |
| § 79. Die astronomischen Jahreszeiten | 320 |
| § 80. Quantitäten der Bestrahlung während der astronomischen Jahreszeiten | 322 |
| § 81. Die den beiden Hemisphären während beliebiger Intervalle des Jahres zugestrahlten Wärmemengen | 325 |

Kapitel XIV

Säkulare Aenderungen der den Bestrahlungszustand der Erde bestimmenden astronomischen Elemente

| | Seite |
|---|-------|
| § 82. Mechanismus der säkularen Aenderungen der den Bestrahlungszustand der Erde bestimmenden astronomischen Elemente | 329 |
| § 83. Analytische Darstellung der säkularen Aenderungen der Elemente e, Π, ϵ | 331 |
| § 84. Numerische Ausrechnungen der säkularen Aenderungen der astronomischen Elemente | 335 |

Kapitel XV

Analytische Darstellung des säkularen Ganges der Erdbestrahlung

| | |
|---|-----|
| § 85. Hilfstabellen zur Berechnung der säkularen Aenderungen der Erdbestrahlung | 349 |
| § 86. Allgemeines über den säkularen Gang der Erdbestrahlung | 356 |
| § 87. Die kalorischen Jahreszeiten | 361 |
| § 88. Die den kalorischen Jahreszeiten der einzelnen Breiten zugehörigen Zeitintervalle | 365 |
| § 89. Die während der kalorischen Jahreszeiten den einzelnen Breiten zugestrahlten Wärmemengen | 369 |
| § 90. Der kalorische Aequator | 375 |
| § 91. Analytische Darstellung des säkularen Bestrahlungsganges der einzelnen Breiten der Erde | 377 |
| § 92. Analytische Darstellung des säkularen Bestrahlungsganges einzelner Zonen der Erdoberfläche | 381 |
| § 93. Analytische Darstellung des säkularen Ganges der durchschnittlichen Bestrahlung der nördlichen bzw. der südlichen Hemisphäre der Erde | 385 |

FÜNFTER ABSCHNITT

Zusammenhang zwischen Einstrahlung und Temperatur der Erde und ihrer Atmosphäre

Das mathematische Klima der Erde

Kapitel XVI

Einleitung. Grundlegende Tatsachen und Gesetze

| | |
|--|-----|
| § 94. Das mathematische Klima der Erde | 392 |
| § 95. Die Schichtung der Atmosphäre | 394 |
| § 96. Das Bouguer-Lambertsche Gesetz | 399 |
| § 97. Numerische Ergebnisse | 404 |
| § 98. Die Strahlungsbilanz der Erde | 412 |

Kapitel XVII

Zusammenhang zwischen Einstrahlung und Temperatur im Falle eines stationären Bestrahlungszustandes

| | |
|--|-----|
| § 99. Differentialgleichungen der Strahlungsvorgänge in der Atmosphäre | 417 |
|--|-----|

| | Seite |
|--|-------|
| § 100. Integration der vorstehenden Differentialgleichungen für den Fall einer stationären Bestrahlung | 423 |
| § 101. Gesetze von Beer, Kirchhoff und Stefan | 426 |
| § 102. Das solare Temperaturfeld der Erde | 429 |
| § 103. Der Aufbau der Atmosphäre im Strahlungsgleichgewicht | 436 |
| § 104. Stabilitätsfragen | 443 |
| § 105. Einfluss des durchschnittlichen Wasserdampfgehaltes der Atmosphäre auf den thermischen Aufbau derselben | 448 |

Kapitel XVIII

Zusammenhang zwischen Einstrahlung und Temperatur im Falle einer variablen Bestrahlung

| | |
|---|-----|
| § 106. Die Wärmeleitung des Erdbodens | 452 |
| § 107. Der Wärmeumsatz des Erdbodens | 460 |
| § 108. Integration der Differentialgleichungen des Strahlungsvorganges in der Atmosphäre im Falle variabler Bestrahlung | 467 |
| § 109. Vertikale Fortpflanzung der Temperaturoszillationen in der Atmosphäre | 479 |
| § 110. Der jährliche Wärmeumsatz der Atmosphäre | 483 |

SECHSTER ABSCHNITT

**Das Eiszeitalter
sein Mechanismus, seine Gliederung und Chronologie**

Kapitel XIX

Das Eiszeitenproblem und seine Geschichte

| | |
|---|-----|
| § 111. Die Eiszeiten | 490 |
| § 112. Die alten Theorien der Eiszeiten | 493 |
| § 113. Ueber einige weiteren Versuche, die Eiszeiten reichnerisch zu erklären | 495 |

Kapitel XX

Verlauf der Erdbestrahlung während der letztverflossenen 600 Jahrtausende

| | |
|---|-----|
| § 114. Vorfagen | 502 |
| § 115. Numerische Berechnung des säkularen Verlaufes der Erdbestrahlung | 504 |

Kapitel XXI

**Die Strahlungskurven als Grundlage der Chronologie
und der Vollgliederung des Eiszeitalters**

| | |
|--|-----|
| § 116. Die Strahlungskurven und ihre erste Anwendung | 541 |
| § 117. Die Zergliederung des alpinen Glazials | 547 |
| § 118. Die Vollgliederung des Eiszeitalters | 552 |
| § 119. Weitere Anwendungen der Strahlungskurven | 556 |

Kapitel XXII

**Klimatische Auswirkungen des säkularen Ganges
der Erdbestrahlung**

| | Seite |
|--|-------|
| § 120. Die unmittelbaren thermischen Effekte des säkularen Ganges der Erdbestrahlung | 563 |
| § 121. Die mittelbaren klimatischen Effekte des säkularen Ganges der Erdbestrahlung | 567 |
| § 122. Die durch den säkularen Gang der Erdbestrahlung unmittelbar hervorgerufenen Verschiebung der Schneegrenze | 568 |
| § 123. Klimatische Auswirkungen der säkularen Aenderungen des Reflexionsvermögens der Erde | 576 |

Kapitel XXIII

**Mechanismus und Ablauf der grossen klimatischen Schwankungen
des Quartärs**

| | |
|--|-----|
| § 124. Zusammenfassung der Ergebnisse über den säkularen Gang der Erdbestrahlung und seine klimatischen Auswirkungen | 607 |
| § 125. Zeitliche Abfolge und Ausmass der grossen klimatischen Schwankungen der letztverflossenen 600 Jahrtausende | 614 |
| § 126. Die vor dem 600. Jahrtausend stattgefundenen klimatischen Schwankungen | 618 |
| § 127. Einzelheiten über den Verlauf der klimatischen Schwankungen des Eiszeitalters | 622 |
