

DOKTORSKA DISERTACIJA

Bojan Arbutina

Ph.D. Thesis: The minimum mass ratio for contact close binary systems of W Ursae Majoris-type

Author: Bojan Arbutina (1977–)

Pages: vi + 100

References: 99

Keywords: instabilities - binaries: close - blue stragglers - stars: late-type

Area: Astrophysics, Close Binary Systems

Ph.D. Committee: Olga Atanacković (supervisor), Trajko Angelov, Gojko Đurašević

Date: June 26 2009

Language: Serbian

Abstract:

The main research topic of this dissertation are extreme mass ratio contact close binary systems, $q \lesssim 0.1$, of W Ursae Majoris (W UMa) type. These close binaries (CBs) represent an interesting class of objects in which "normal", approximately one solar mass main-sequence star is in contact with a significantly less massive companion, $M_2 \sim 0.1 M_\odot$. Earlier theoretical investigations of these systems found that there is a minimum mass ratio $q_{\min} = M_2/M_1 \approx 0.085 - 0.095$ (obtained for $n = 3$ polytrope - fully radiative primary) above which these CBs are stable and could be observed. If the mass ratio is lower than q_{\min} , or, equivalently, if orbital angular momentum is only about three times larger than the spin angular momentum of a massive primary, a tidal instability develops (Darwin's instability) forcing eventually the stars to merge into a single, rapidly rotating object (such as FK Com-type stars or blue stragglers). However, there appear to be some W UMa-type CBs with empirically obtained values for the mass ratio below the theoretical limit for stability. The aim of this dissertation is to try to resolve the discrepancy between theory and observations by considering rotating polytropes. By including in theory the effects of higher central condensation due to rotation we were able to reduce q_{\min} to the new theoretical value $q_{\min} = 0.070 - 0.074$, for the overcontact degree $f = 0 - 1$, which is more consistent with the observed population. Other candidate systems for stellar mergers such as AM CVn-type stars have also been discussed in the dissertation.

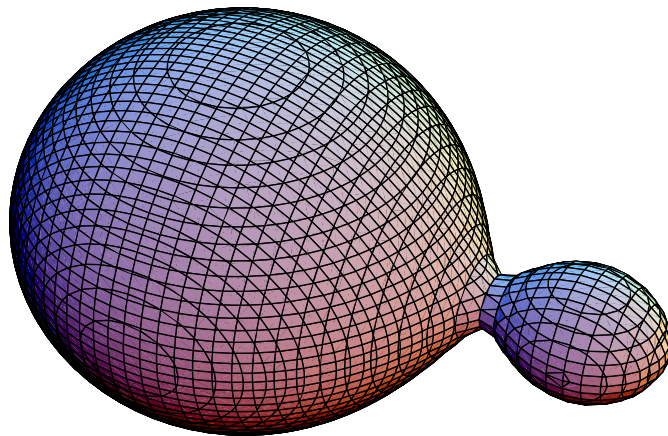
UNIVERZITET U BEOGRADU

Matematički fakultet

Bojan Arbutina

*Minimalni odnos masa za kontaktne tesne dvojne
sisteme tipa W Ursae Majoris*

Doktorska disertacija



BEOGRAD, 2009.

Ova doktorska disertacija nastala je kao rezultat samostalnog istraživačkog rada na Katedri za astronomiju Matematičkog fakulteta Univerziteta u Beogradu i na Astronomskoj opservatoriji u Beogradu, u periodu 2006–2009. Zahvaljujem se prof. dr Olgji Atanacković, prof. dr Trajku Angelovu i dr Gojku Đuraševiću koji su pročitali disertaciju i dali vrlo korisne primedbe na njen sadržaj, doprinevši tako njenom poboljšanju. Posebno im se zahvaljujem na njihovoj stalnoj, nesebičnoj pomoći i podršci. Zahvalnost dugujem i Ministarstvu za nauku i tehnološki razvoj koje je delom finansiralo moj rad preko projekata br. 146003, „Fizika Sunca i zvezda” i 146012, „Gasna i zvezdana komponenta galaksija: interakcija i evolucija”.

U Beogradu, januara 2009.

B. A.

Sadržaj

1	Uvod	1
2	Problem dva tela i ograničeni problem tri tela	7
2.1	Problem dva tela	7
2.2	Ograničeni problem tri tela	10
2.2.1	Lagranžove tačke	11
2.2.2	Rošov model	13
2.3	Gravitaciono polje sfernosimetričnog tela	14
2.3.1	Opravdanje Rošovog modela za rasprostranjene, ne- tačkaste objekte.	16
2.4	Dinamička evolucija dvojnih sistema	17
3	Politropska struktura	23
3.1	Lejn-Emdenova jednačina i njena rešenja	23
3.1.1	Metod Runge-Kuta za rešavanje Lejn-Emdenove jedna- čine	25
3.2	Standardni model	28
3.2.1	Teorema virijala	30
3.3	Potpuno konvektivne zvezde	32
4	Kontaktne dvojni sistemi	33
4.1	Klasifikacija i opšte osobine kontaktnih dvojnih sistema	33
4.2	Minimalni odnos masa za tesne dvojne sisteme tipa W UMa	34
4.2.1	Uvod	34
4.2.2	Doprinos ugaonog momenta pratioca	38
4.2.3	Diskusija	41
4.3	Moguće rešenje problema tesnih dvojnih sistema tipa W UMa sa ekstremno malim odnosom masa	43
4.3.1	Distorzija usled rotacije i prisustva pratioca – „konstanta pomeranja apsidne linije” k_{AM}	43
4.3.2	Struktura rotirajuće politrope i bezdimenzioni žiro-ra- dijus k_1	47
4.3.3	Rezultati	56
4.3.4	Zaključak	59
5	Kompaktni dvojni sistemi	61
5.1	Klasifikacija kompaktnih dvojnih sistema	61
5.2	Struktura kompaktnih objekata	71
5.2.1	Beli patuljci	71

5.2.2	Neutronske zvezde	74
5.2.3	Crne rupe	75
5.3	Gubitak energije i ugaonog momenta usled emitovanja gravitacionog zračenja	76
5.4	Maksimalni odnos masa za tesne dvojne sisteme tipa AM CVn	78
6	Zaključak	85
Dodatak A		87
	Metod rešavanja modifikovane Lejn-Emdenove jednačine	87
Dodatak B		89
	Izvođenje i metod rešavanja modifikovane Kleroove jednačine	89
Dodatak C		93
	Program za rešavanja modifikovane Lejn-Emdenove i Kleroove jednačine	93
Literatura		97

1 Uvod

Više od polovine zvezda koje vidimo predstavljaju zapravo dvojne i višestruke sisteme (Petrie, 1960; Abt, 1983). Drugim rečima, postoji bar 50% više zvezda nego što smo u mogućnosti da razdvojimo današnjim teleskopima. Ako znamo da je gravitacija sila dugog dometa, a da nemamo na raspolaganju beskonačno duge vremenske intervale kako bi utvrdili dvojnost udaljenih parova, i uzmemo u obzir ograničenu osetljivost instrumenata, zbog čega nismo u mogućnosti da otkrijemo sve bliske dvojne zvezde, dolazimo do zaključka da se gotovo 100% zvezda nalazi bilo u dugoperiodičnim, bilo u kratkoperiodičnim dvojnim sistemima (Poveda et al., 1982).

Dvojne zvezde se obično svrstavaju u jednu od tri osnovne grupe prema načinu (tj. astronomskom, odnosno astrofizičkom metodu) utvrđivanja njihove dvojnosti: vizuelne,¹ spektroskopske i eklipsne dvojne zvezde.² Često se, međutim, ovoj klasifikaciji dodaje i četvrta grupa, a to su tesni dvojni sistemi (TDS) – dvojne zvezde koje su toliko blizu da se nalaze (bar tokom određenog stadijuma evolucije) i u neposrednoj fizičkoj interakciji (razmeni materije i energije), i tako međusobno utiču na evoluciju. Tačnija definicija bi bila da su to sistemi kod kojih su dimenzije komponentata i njihovo međusobno rastojanje uporedivi.

Ova poslednja grupa se dalje deli na tri podgrupe (Kopal, 1978): razdvojene, polukontaktne i kontaktne sisteme, u zavisnosti od toga da li ni jedna, jedna ili obe komponente, redom, ispunjavaju svoj Rošov oval (detaljnije o Rošovom modelu biće reči u prvom poglavlju). Sistemi kod kojih bar jedna komponenta ispunjava Rošov oval i kod kojih postoje dokazi o direktnoj interakciji, tj. prenosu mase i energije, ponekad se nazivaju interaktivni dvojni sistemi. Karakterističan izgled tesnih dvojnih sistema prikazan je na slici 1. Kao što vidimo, zvezde u tesnim dvojnim sistemima usled plimskog dejstva mogu biti značajno deformisane, odnosno mogu znatno odstupati od sfernosimetričnog oblika na koji smo navikli. Orbitalni periodi tesnih dvojnih sistema najčešće se kreću u rasponu od nekoliko sati do nekoliko dana, iako ovo ne mora biti pravilo.

Navedena podela dvojnih zvezda na vizuelne, spektroskopske, eklipsne i tesne dvojne sisteme, ne isključuje mogućnost da jedna dvojna zvezda potpada pod više grupa. Jasno je da većina eklipsnih dvojnih zvezda ujedno predstavlja i tesne dvojne sisteme. Pomračenja, odnosno eklipse, su verovatne

¹Vizuelne dvojne zvezde treba razlikovati od optičkih parova – zvezda koje se samo prividno projektuju na nebu jedna blizu druge, iako su prostorno veoma udaljene.

²Danas se sve više kao posebna grupa izdvajaju interferometrijske dvojne zvezde (videti npr. Hartkopf, 1992).

samo kod onih dvojnih sistema kod kojih je poluprečnik jedne zvezde veći od približno 10% međusobnog rastojanja. U suprotnom potrebno je da je inklinacija tj. nagib orbitalne ravni vrlo bliska vrednosti $i \approx 90^\circ$, a uz to eklipse će se dešavati u dugim vremenskim intervalima. Slično, tesni dvojni sistemi su u velikoj većini i spektroskopske dvojne zvezde (mada i veoma razdvojene, vizuelne dvojne zvezde takođe mogu biti spektroskopske dvojne).

Eklipsne dvojne zvezde se na osnovu izgleda krivih promene sjaja mogu podeliti na sledeće klase (videti Hilditch, 2001):

EA – eklipsno dvojne zvezde tipa Algola, odnosno β Persei, kod kojih postoje dobro definisane eklipse (sa jasno određenim početkom i krajem) i neznatne varijacije sjaja izvan eklipsi. Ove zvezde ne moraju biti i fizički slične Algolu, i u većini slučajeva nisu.

EB – eklipsne dvojne zvezde tipa β Lyrae sa dobro definisanim eklipsama, ali i znatnim varijacijama sjaja izvan eklipsi, usled deformisanog oblika komponentata u sistemu. Zvezde ove klase takođe ne moraju biti fizički slične zvezdi β Lyrae.

EW – eklipsne dvojne zvezde tipa W Ursae Majoris kod kojih ne postoji jasno određena granica između faza eklipsi i faza van eklipsi, odnosno postoji kontinuirana promena sjaja. Obe komponente u sistemu jako odstupaju od sferosimetričnog oblika, u većini slučajeva su fizički slične prototipu W Ursae Majoris i dovode se u vezu sa kontaktnim sistemima. U ovom radu najviše ćemo se baviti ovom klasom TDS.

Spektroskopske i eklipsne dvojne zvezde vrlo su važne za proučavanje, između ostalog i zbog mogućnosti pouzdanog određivanja geometrijskih i fizičkih karakteristika sistema i komponentata u njemu (perioda, velike poluose, ekscentriciteta, nagiba orbite, masa, radijusa, efektivnih temperatura, kao i udaljenosti – $P, a, e, i, M_1, M_2, R_1, R_2, T_1, T_2, d$). Jedino fotometrijska posmatranja u kombinaciji sa spektroskopskim posmatranjima eklipsnih i ujedno „dvolinijskih” spektroskopskih (eng. *double-lined*) dvojnih zvezda daju tačne vrednosti ovih parametara, pre svega masa komponentata, što je od posebnog značaja u astronomiji. Spektroskopska posmatranja, tačnije analiza krivih radijalnih brzina kod jednolinijskih spektroskopskih dvojnih zvezda kod kojih vidimo spektar i doplerovsko pomeranje linija samo jedne komponente, daju nam podatke o periodu, ekscentricitetu, projektovanoj velikoj poluosi $a \sin i$, kao i funkciju mase

$$f_1 = \frac{M_2^3 \sin^3 i}{(M_1 + M_2)^2} = \frac{K_1^3 P (1 - e^2)^{3/2}}{2\pi G}, \quad (1)$$

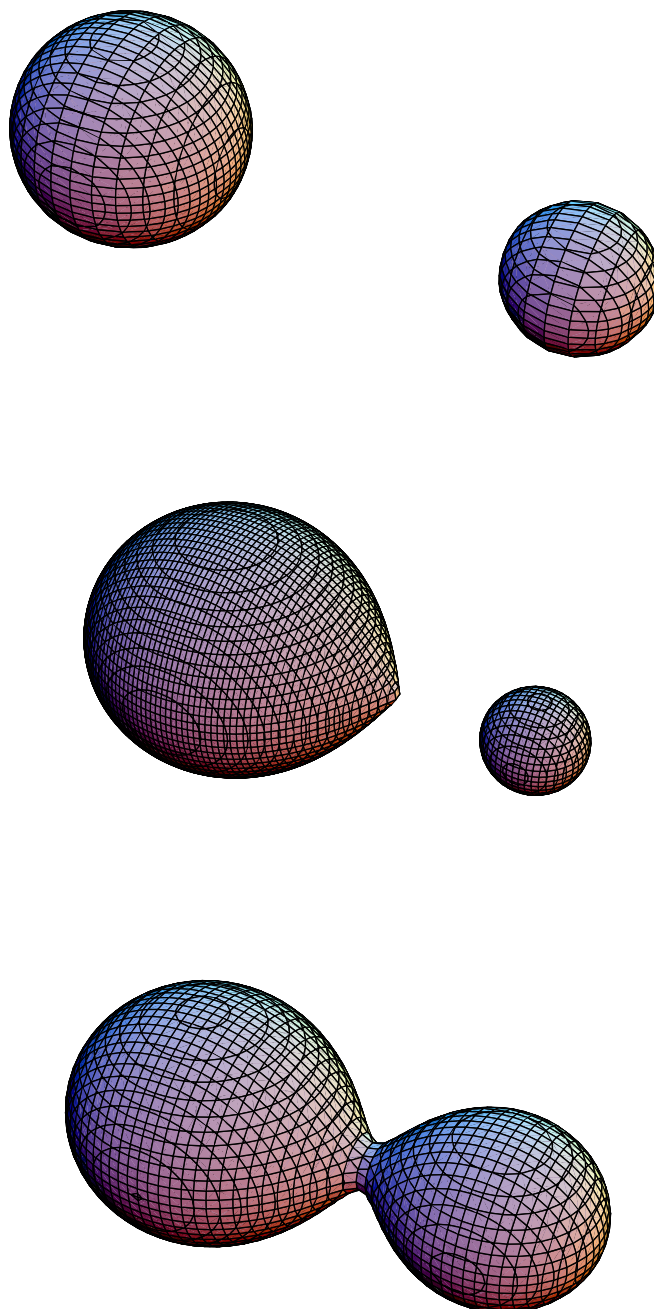
gde K_1 predstavlja amplitudu krive promene radijalne brzine. Ako „vidimo” i drugu komponentu, na osnovu amplituda krivih radijalnih brzina možemo odrediti odnos masa $q = M_2/M_1 = K_1/K_2$. Na osnovu analize krivih sjaja kod eklipsnih sistema (videti npr. Wilson & Devinney, 1971) možemo dodatno odrediti odnose R_1/a , R_2/a , T_2/T_1 (T_1 je obično poznato na osnovu spektra sjajnije komponente), nagib i i tako pojedinačne mase.

Klasifikacija dvojnih zvezda prethodno datom podelom nije iscrpljena. Na osnovu spektroskopskih posmatranja izdvojena je posebna klasa objekata, tzv. simbiotske zvezde (eng. *symbiotic stars*), koje poseduju spektralne karakteristike toplih i hladnih zvezda istovremeno. Očigledan zaključak astronoma bio je da se radi o kombinovanom spektru dve zvezde u dvojnog sistema. Ove zvezde se, međutim, nalaze u poodmaklom stadijumu interakcije i okružene su rasprostranjenim omotačem koji u velikom broju slučajeva uspeva da maskira dvojnost, odnosno orbitalno kretanje komponentata.

Još jedna vrsta TDS (potklasa polukontaktne sistema) koji predstavljaju posebno, vrlo aktivno polje istraživanja, su kataklizmičke promenljive (eng. *cataclysmic variables* ili CV, videti Warner, 1995). U ovu klasu spadaju sve vrste novih (klasične, rekurentne i patuljaste), kao i najverovatniji progenitori (zvezde-roditelji) supernovih (SN) tipa Ia (crveni džin ili subdžin koji ispunjava svoj Rošov oval i beli patuljak mase nešto ispod Čandrasekarove granice). Jedna od glavnih karakteristika ovih sistema je prisustvo belog patuljka i akrecionog diska koji ga okružuje, i koji neretko predstavlja najsajjniji deo sistema.

Donekle slične objekte predstavljaju rendgenski ili X-dvojni sistemi (eng. *X-ray binaries*), sa tom razlikom što belog patuljka u ovim sistemima zamenjuje neutronska zvezda. Akrecioni disk je prisutan u oba slučaja. Ovi sistemi se u odnosu na masu komponente koja gubi materiju dele na masivne i manje masivne X-dvojne sisteme (HMXB i LMXB, od eng. *high-mass* i *low-mass X-ray binary*, detaljnije videti u Lewin et al., 1995).

Sa ovim objektima tesno su povezani i milisekundni radio-pulsari. Usamljeni pulsari usled gubitka ugaonog momenta vremenom usporavaju, magnetno polje im slabi i na kraju prelaze tzv. „liniju smrti pulsara” tj. „umiru”. Stari, ali neverovatno brzi milisekundni pulsari mogu da postoje jedino u TDS, gde pulsar „oživljava” upravo zbog priliva mase (i ugaonog momenta) sa pratioca (Phinney & Kulkarni, 1994; Stairs, 2005). U nekim X-dvojnim sistemima neutronske zvezde vrlo verovatno zamenjuju crne rupe (opšte poznat primer je sistem Cyg X-1).



Slika 1: Trodimenzioni prikaz jednog razdvojenog (gore), polukontaktnog (u sredini) i kontaktnog (dole) tesnog dvojnog sistema. Slika je načinjena korišćenjem programa *Mathematica 5.0*.

Konačno, postoje sistemi kod kojih su obe komponente kompaktne zvezde, kao npr. dvojni pulsari (eng. *binary pulsars*).³ Najpoznatiji je svakako dvojni pulsar PSR 1913+16 (Hulse & Taylor, 1975). Ovi objekti predstavljaju pravu laboratoriju za proučavanje efekata opšte teorije relativnosti (OTR) poput relativističkog pomeranja periastrona, gravitacionog crvenog pomaka, gravitacionog zračenja i relativističke (geodezijske) precesije (Lorimer, 2003; Stairs, 2005).

Daljom klasifikacijom tesnih dvojnih sistema na ovom mestu se nećemo baviti. I ovo što je do sada rečeno dovoljno govori o zanimljivosti i raznovrsnosti ovih objekata. Uvod u osnovnu problematiku ovog rada vezanu za pitanje stabilnosti (minimalnog odnosa masa) kontaktnih tesnih dvojnih sistema tipa W Ursae Majoris (W UMa) i glavni rezultati disertacije prikazani su u četvrtom poglavlju (4.2 i 4.3). U istom poglavlju biće data i osnovna podela ovih sistema kao i njihove fizičke osobine, i biće govora o dinamičkoj evoluciji dvojnih sistema.

TDS sa ekstremno malim odnosom masa, tipa W UMa, predstavljaju izuzetno zanimljive dvojne zvezde kod kojih se u kontaktu nalaze „normalna” zvezda sunčeve ili nešto veće mase, i zvezda koja bi prema masi odgovarala crvenom patuljku ($M \sim 0.1M_{\odot}$). Ranija teorijska istraživanja pokazala su da postoji minimalni odnos masa q_{\min} iznad kojega su ovi TDS stabilni i moguće ih je posmatrati. Ako je odnos masa u sistemu manji od q_{\min} , ili ekvivalentno ako je orbitalni ugaoni momenat samo oko tri puta veći od ugaonog momenta rotacije primarne (masivnije) komponente u sistemu, sistem postaje nestabilan i dolazi do sudara u kojem dvojni sistem prestaje da postoji i nastaje jedna brzorotirajuća „plava” zvezda. Posmatranja, međutim, pokazuju da postoje TDS sa odnosom masa manjim od dobijene vrednosti za q_{\min} . Prema teoriji ovakvi sistemi ne bi trebalo da budu posmatrani.

Osnovni cilj ove doktorske disertacije je izvođenje novog kriterijuma za stabilnost kontaktnih tesnih dvojnih sistema tipa W UMa i popravljene vrednosti za minimalni odnos masa kod ovih sistema, kojom će se teorija dovesti u bolju saglasnost sa posmatranjima. U odnosu na prethodne radove koji su se bavili ovim problemom, u ovoj disertaciji polazi se od rešavanja modifikovane Lejn-Emdenove jednačine, dobijene kombinovanjem zadate politropske jednačine stanja sa jednačinom hidrostatičke ravnoteže i Poasonovom jednačinom, koja u sebe uključuje efekte rotacije i prisustva pratioca u TDS. Takođe će biti razmotrena distorzija zvezde u TDS usled ovih efekata i njeno odstupanje od idealnog sfernosimetričnog oblika, kao i doprinos sekundarne

³Naziv je delimično pogrešan, budući da se obično samo jedna komponenta vidi kao pulsar, dok je druga „nevidljiva” (pulsar čiji snop zračenja ne pogađa Zemlju, ugašena neutronska zvezda ili beli patuljak).

(manje masivne) komponente ugaonom momentu rotacije.

Proučavanje dvojnih sistema tipa W UMa posebno je važno sa stanovišta proučavanja sudara zvezda. Izdvojicemo samo tri klase astronomskih objekata koji verovatno nastaju kao posledica sudara:

- i) zalutale plave zvezde (eng. *blue stragglers*) – bar neke od ovih brzorotirajućih, plavih zvezda koje se mogu pronaći u globularnim zvezdanim jatima verovatno nastaju kao posledica sudara (spajanja) komponentata dvojnih zvezda tipa W UMa.
- ii) supernove tipa Ia – alternativni model za SN Ia podrazumeva sudar dva bela patuljka, umesto eksplozije jednog belog patuljka u TDS, čija masa pređe Čandrasekarovu granicu $M_{\text{Ch}} \approx 1.44 M_{\odot}$.
- iii) gama bljeskovi (eng. *gamma-ray bursts*) – za razliku od dugotrajnijih gama bljeskova koji se ponekad vezuju za hipernove (eksplozije izuzetno masivnih zvezda), kratkotrajni gama bljeskovi verovatno predstavljaju rezultat sudara dve neutronske zvezde.

Vidimo da su sudari mogući i u kompaktnim dvojnim sistemima. Na kraju, u poglavlju 5 razmotrićemo kompaktne dvojne sisteme koje čine „egzotični” objekti poput belih patuljaka, neutronske zvezde i crnih rupa, pre svega interaktivne „dvostruke” degenerisane (DD, eng. *double-degenerate*) sisteme poput AM Canum Venaticorum (AM CVn) i prikazati rezultate nekih preliminarnih istraživanja na ovom planu, vezanih za uslove njihove stabilnosti.

Pre svega toga, u poglavljima koja neposredno slede, podsetićemo se nekih osnovnih, dobro poznatih astronomskih problema i njihovih rešenja, neophodnih za naše istraživanje, poput problema dva tela, Rošovog modela i politropske strukture.

2 Problem dva tela i ograničeni problem tri tela

2.1 Problem dva tela

Problem dva tela i njegovo rešenje predstavlja temelj istraživanja u mnogim oblastima astronomije i šire. Prisjetimo se ovde izvođenja jednačine trajektorije (elipse) i napisati relacije između energije, odnosno ugaonog momenta sistema, i velike poluose elipse i njenog ekscentriciteta, koje će nam kasnije biti potrebne.

Pođimo od jednačina kretanja

$$M_1 \frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} = \mathbf{F}_1 = \frac{GM_1 M_2}{r^3} \mathbf{r}, \quad (2)$$

$$M_2 \frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2} = \mathbf{F}_2 = -\frac{GM_1 M_2}{r^3} \mathbf{r}, \quad (3)$$

odnosno

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} = \frac{GM_2}{r^3} \mathbf{r}, \quad (4)$$

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2} = -\frac{GM_1}{r^3} \mathbf{r}, \quad (5)$$

gde je G gravitaciona konstanta, M_1 i M_2 mase, \mathbf{r}_1 i \mathbf{r}_2 predstavljaju vektore položaja tela u datom koordinatnom sistemu, i

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 \quad (6)$$

je relativno rastojanje između tela. Vidimo da je $\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2$ u skladu sa trećim Njutnovim zakonom. Sabiranjem jednačina (2) i (3), i oduzimanjem jednačine (4) od jednačine (5) dobijamo

$$\frac{d}{dt} (M_1 \mathbf{v}_1 + M_2 \mathbf{v}_2) = \frac{d}{dt} (M \mathbf{v}_{\text{CM}}) = \frac{d\mathbf{P}}{dt} = 0, \quad (7)$$

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{GM}{r^3} \mathbf{r}. \quad (8)$$

Centar mase sistema dat je izrazom

$$\mathbf{r}_{\text{CM}} = \frac{M_1 \mathbf{r}_1 + M_2 \mathbf{r}_2}{M}, \quad (9)$$

dok su brzina centra mase i relativna brzina, redom,

$$\mathbf{v}_{\text{CM}} = \frac{M_1 \mathbf{v}_1 + M_2 \mathbf{v}_2}{M}, \quad (10)$$

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1. \quad (11)$$

Ukupna masa sistema je $M = M_1 + M_2$, dok je impuls sistema \mathbf{P} . Kako je impuls očuvan (jednačina (7)) možemo izabrati da radimo u inercijalnom sistemu u kome je $\mathbf{P} = M\mathbf{v}_{\text{CM}} \equiv 0$, odnosno $M_1 \mathbf{v}_1 = -M_2 \mathbf{v}_2 = -\mu \mathbf{v}$, gde je

$$\mu = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} \quad (12)$$

tzv. redukovana masa.

Problem dva tela se tako svodi na translatorno kretanje centra mase konstantnom brzinom \mathbf{v}_{CM} i kretanje „relativne čestice“ mase μ opisano jednačinom (8), odnosno

$$\mu \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mu \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{G\mu M}{r^3} \mathbf{r} = -\nabla U, \quad (13)$$

gde je $U = -\frac{G\mu M}{r}$ gravitaciona potencijalna energija. Umesto rešavanja poslednje jednačine, problem možemo jednostavnije rešiti pomoću zakona očuvanja energije i momenta impulsa, $\frac{dE}{dt} = 0$, $\frac{d\mathbf{J}}{dt} = 0$, gde je

$$E = \frac{1}{2} M_1 v_1^2 + \frac{1}{2} M_2 v_2^2 - \frac{GM_1 M_2}{r} = \frac{1}{2} \mu v^2 - \frac{G\mu M}{r}, \quad (14)$$

$$\mathbf{J} = M_1 \mathbf{r}_1 \times \mathbf{v}_1 + M_2 \mathbf{r}_2 \times \mathbf{v}_2 = \mu \mathbf{r} \times \mathbf{v}, \quad (15)$$

koji slede direktno iz jednačine (13), u slučaju ugaonog momenta, odnosno iz jednačine dobijene skalarnim množenjem jednačine (13) vektorom \mathbf{v} , uz $\nabla U \cdot d\mathbf{r} = dU$, u slučaju energije.

U ravni kretanja određenoj vektorom \mathbf{J} , jednačine (14) i (15) u polarnim koordinatama r i φ glase:

$$\frac{1}{2} \mu (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - \frac{G\mu M}{r} = E, \quad (16)$$

$$J = \mu r^2 \dot{\varphi}. \quad (17)$$

Kombinovanjem poslednje dve jednačine dobijamo

$$\frac{J^2}{2\mu r^4} \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 + \frac{J^2}{2\mu r^2} - \frac{G\mu M}{r} = E, \quad (18)$$

odakle nakon razdvajanja promenljivih i rešavanja integrala imamo

$$\frac{J^2}{2\mu r^4} \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 + \frac{J^2}{2\mu r^2} - \frac{G\mu M}{r} = E, \quad (19)$$

$$d\varphi = \pm \frac{J}{r^2} \frac{dr}{\sqrt{2\mu \left(E + \frac{G\mu M}{r} \right) - \frac{J^2}{r^2}}}, \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \varphi + \text{const} &= \pm \int \frac{\frac{J}{r^2} dr}{\sqrt{2\mu \left(E + \frac{G\mu M}{r} \right) - \frac{J^2}{r^2}}} \\ &= \pm \arccos \frac{J/r - G\mu^2 M/J}{\sqrt{2\mu E + (G\mu^2 M)^2/J^2}}, \end{aligned} \quad (21)$$

odnosno

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}, \quad (22)$$

gde smo iskoristili činjenicu da je kosinus parna funkcija i izabrali pravac i smer polarne ose takav da konstanta integracije bude jednaka nuli. U slučaju zatvorene trajektorije ($E < 0$), jednačina (22) predstavlja elipsu, $p = \frac{b^2}{a}$ je parametar elipse, $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$ je ekscentricitet, a i b , redom, velika i mala poluosa (videti sliku 2). Lako nalazimo

$$p = \frac{J^2}{G\mu^2 M}, \quad (23)$$

$$e = \sqrt{1 + \frac{2EJ^2}{G^2\mu^3 M^2}}, \quad (24)$$

$$a = -\frac{G\mu M}{2E}, \quad (25)$$

$$b = \sqrt{-\frac{J^2}{2\mu E}}, \quad (26)$$

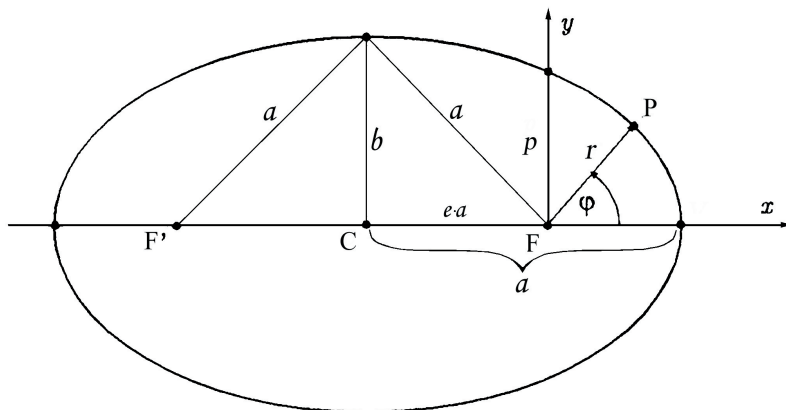
odnosno

$$E = -\frac{G\mu M}{2a}, \quad (27)$$

$$J^2 = GM\mu^2 a(1 - e^2). \quad (28)$$

Korišćenjem jednačina (17) i (22) možemo izvesti i treći Keplerov zakon:

$$JP = \int_0^P J dt = \int_0^{2\pi} \mu r^2 d\varphi = 2\mu ab\pi, \quad (29)$$



Slika 2: Prikaz elipse: a i b redom su velika i mala poluosa, e je ekscentricitet, p – parametar elipse.

$$\frac{P^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM} = \text{const.}, \quad (30)$$

odnosno

$$\Omega^2 = \frac{GM}{a^3}, \quad (31)$$

gde je P period i $\Omega = 2\pi/P$ ugaona brzina. Moment impulsa, odnosno ugaoni momenat orbitalnog kretanja (jednačina (28)) se tada može alternativno zapisati kao

$$J = \mu a^2 \Omega \sqrt{1 - e^2}. \quad (32)$$

2.2 Ograničeni problem tri tela

Problem tri tela, u opštem slučaju, se pokazao kao nerešiv. Ograničeni problem tri tela predstavlja uprošćenje koje podrazumeva da se jedno može smatrati probnom česticom čija je masa m , a samim tim i gravitacioni uticaj na prva dva tela zanemarljiv. Ova dva tela će se onda kretati oko svog zajedničkog težišta po elipsama, kako je pokazano u prethodnom poglavlju, odnosno, u specijalnom slučaju koji ovde razmatramo, po kružnim putanjama ($e = 0$), na međusobnom rastojanju a . Kako je ugaona brzina na osnovu trećeg Keplerovog zakona $\Omega^2 = \frac{GM}{a^3}$ konstantna, pogodno je preći u neinercijalni sistem u kome ova dva tela miruju.

Jednačina kretanja tela mase m tada je

$$\frac{d^2 \mathbf{r}'}{dt^2} = \frac{d\mathbf{v}'}{dt} = -\frac{GM_1}{r_1^3} \mathbf{r}_1 - \frac{GM_2}{r_2^3} \mathbf{r}_2 - \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}') - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}'. \quad (33)$$

Poslednja dva člana predstavljaju, redom, centrifugalnu i Koriolisovu silu. Gravitacioni članovi i centrifugalni član u jednačini (33) mogu se dobiti kao gradijent skalarnog polja Φ_{eff} koje predstavlja efektivni gravitacioni potencijal:

$$\Phi_{\text{eff}} = -\frac{GM_1}{r_1} - \frac{GM_2}{r_2} - \frac{1}{2}\Omega^2 \varrho^2, \quad (34)$$

gde su r_1 i r_2 udaljenosti tela mase m u tački P od prvog odnosno drugog tela, dok je ϱ udaljenost od ose rotacije koja prolazi kroz težište tj. centar mase C (videti sliku 3). Jednačinu (33) tada možemo zapisati u obliku

$$\frac{d\mathbf{v}'}{dt} = -\nabla\Phi_{\text{eff}} - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}'. \quad (35)$$

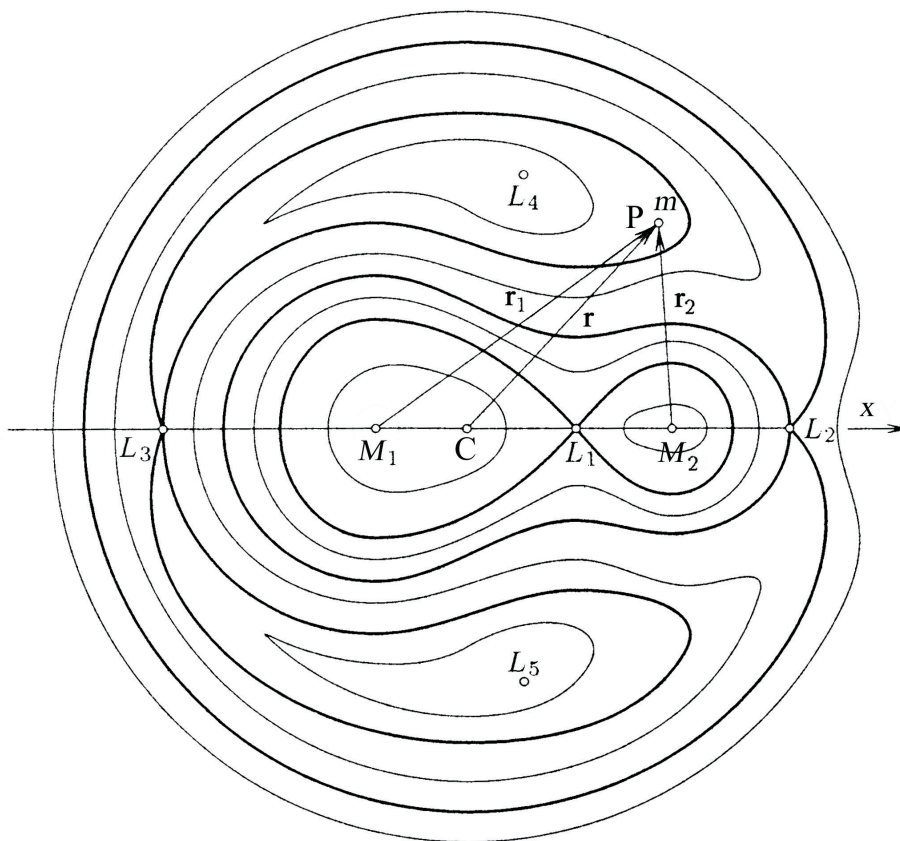
2.2.1 Lagranžove tačke

Ekvipotencijalne površi $\Phi_{\text{eff}} = \text{const.}$ za proizvoljno izabrane mase M_1 i M_2 , odnosno njihov presek sa ravni $z = 0$, prikazane su na slici 3. Telo će biti u stanju mirovanja $\mathbf{v}' = 0$ u tačkama u kojima je gradijent skalara Φ_{eff} jednak nuli, odnosno u kojima skalarna funkcija Φ_{eff} ima ekstremne vrednosti (videti jednačinu (35)). Ove tačke se nazivaju Lagranžovim tačkama, ima ih pet i obeležavaju se sa L_1, L_2, \dots, L_5 . Lagranžove tačke nalazimo tako što potražimo parcijalne izvode skalarnog funkcija $\Phi_{\text{eff}} = \Phi_{\text{eff}}(\varrho, \phi, z)$, u cilindričnim koordinatama, na primer, i izjednačimo ih sa nulom:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Phi_{\text{eff}}}{\partial\varrho} &= \frac{GM_1}{r_1^3} \left(\varrho + \frac{qa \cos\phi}{1+q}\right) + \frac{GM_2}{r_2^3} \left(\varrho - \frac{a \cos\phi}{1+q}\right) - \Omega^2 \varrho = 0, \\ \frac{\partial\Phi_{\text{eff}}}{\partial\phi} &= -\frac{GM_1}{r_1^3} \frac{qa\varrho \sin\phi}{1+q} + \frac{GM_2}{r_2^3} \frac{a\varrho \sin\phi}{1+q} = 0, \\ \frac{\partial\Phi_{\text{eff}}}{\partial z} &= \frac{GM_1}{r_1^3} z + \frac{GM_2}{r_2^3} z = 0. \end{aligned} \quad (36)$$

Rastojanja r_1 i r_2 su data izrazima

$$r_1 = \sqrt{\left(x + \frac{qa}{1+q}\right)^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{\varrho^2 + \frac{2qa\varrho \cos\phi}{1+q} + z^2 + \frac{q^2 a^2}{(1+q)^2}}, \quad (37)$$



Slika 3: Rošov model (preuzeto iz Milanković, 1997, i prilagođeno tekstu).

$$r_2 = \sqrt{\left(x - \frac{a}{1+q}\right)^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{\varrho^2 - \frac{2a\varrho \cos \phi}{1+q} + z^2 + \frac{a^2}{(1+q)^2}}, \quad (38)$$

gde je $q = M_2/M_1$ i a – rastojanje između tela.

Na osnovu jednačine (36) vidimo da mora biti $z = 0$. Ako $\sin \phi \neq 0$, $r_1 = r_2 = a$ – na taj način dobijamo tačke L_4 i L_5 koje se nalaze na 60° u odnosu na liniju koja spaja tela M_1 i M_2 . Ako je $\sin \phi = 0$, tačke se nalaze na x -osi (L_1, L_2, L_3) i dobijaju se numeričkim rešavanjem jednačine

$$\frac{x + \frac{qa}{1+q}}{\left|x + \frac{qa}{1+q}\right|^3} + \frac{q\left(x - \frac{a}{1+q}\right)}{\left|x - \frac{a}{1+q}\right|^3} - \frac{(1+q)|x|}{a^3} = 0. \quad (39)$$

U Lagranžovim tačkama rezultanta svih sila koje deluju na telo jednaka je nuli. Može se pokazati da tačke L_1, L_2 i L_3 predstavljaju lokalne maksimi-

mume funkcije Φ_{eff} , tj. tačke nestabilne ravnoteže. S druge strane tačke L_4 i L_5 predstavljaju lokalne minimume, drugim rečima, ako telo mase m malo pomerimo iz neke od ove dve tačke, ono će težiti da se u nju vrati (tačke stabilne ravnoteže).

2.2.2 Rošov model

Ako umesto tela mase m razmotrimo element idealnog (neviskoznog) fluida gustine ρ i pritiska P u gravitacionom polju, jednačina kontinuiteta (očuvanja mase), jednačina kretanja i jednačina očuvanja energije biće

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (40)$$

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla P - \rho \nabla \Phi - \rho \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) - 2\rho \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}, \quad (41)$$

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} + P \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) = 0, \quad (42)$$

dok je Poasonova jednačina

$$\Delta \Phi = 4\pi G \rho. \quad (43)$$

Unutrašnja energija po jedinici mase je $\varepsilon = \frac{u}{\rho}$, dok je gustina unutrašnje energije $u = \frac{1}{\gamma-1} P$. Lagranžov izvod dat je izrazom $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)$. Ako fluid miruje u izabranom neinercijalnom sistemu, $\mathbf{v} = 0$, jednačina (41) svodi se na jednačinu hidrostatičke ravnoteže

$$\nabla P = -\rho \nabla \Phi_{\text{eff}}, \quad (44)$$

gde je $\Phi_{\text{eff}} = \Phi - \frac{1}{2} \Omega^2 \varrho$. Ako je $P = P(\rho)$, tada na osnovu jednačine (44) možemo pisati $P = P(\Phi_{\text{eff}})$, $\rho = \rho(\Phi_{\text{eff}})$; drugim rečima izobarne i izopikne (izogustinske) površi, a samim tim i površina zvezde, određene su ekvipotencijalnim površima $\Phi_{\text{eff}} = \text{const}$!

Rošov model pretpostavlja da je centralna koncentracija zvezde mase M tako visoka da se najveći deo zvezdane mase nalazi zbijen u centru, te da se gravitacioni potencijal zvezde može vrlo dobro predstaviti potencijalom tačkaste mase M . Efektivni potencijal je tada ponovo dat izrazom (34), koji opisuje izgled površina zvezda u TDS (slika 3),

$$\Phi_{\text{eff}} = -\frac{GM_1}{r_1} - \frac{GM_2}{r_2} - \frac{1}{2} \Omega^2 \varrho^2. \quad (45)$$

Dve kritične površi koje prolaze redom kroz tačke L_1 i L_2 , nazivaju se unutrašnja i spoljašnja Rošova površ ili Rošov oval. Za razliku od usamljenih zvezda, zvezde u TDS imaju tako ograničenu zapreminu do koje mogu da se rašire. Zvezde koje se nalaze duboko unutar svog Rošovog ovala su gotovo idealno sfernosimetrične i evoluiraju nezavisno, poput usamljenih zvezda. U tom slučaju govorimo o razdvojenim TDS. Ukoliko tokom evolucije jedna od zvezda (obično masivnija) ispuni svoj Rošov oval, preko tačke L_1 će početi da „pretače” materiju na svog pratioca. Prenos mase može dovesti i do potpunog obrtanja odnosa masa, tako da manje masivna zvezda ispunjava Rošov oval (tzv. „paradoks” Algola). Dvojni sistemi kod kojih jedna komponenta ispunjava svoj Rošov oval nazivaju se polukontaktne. Ako pak obe zvezde ispune unutrašnji Rošov oval govorimo o kontaktnim sistemima. U slučaju da se zvezde toliko rašire, ili prosto približe, tako da ispune i spoljašnji Rošov oval, sistem će preko tačke L_2 početi da gubi masu.

Vidimo da se podela TDS na razdvojene, polukontaktne i kontaktne sisteme zasniva upravo na Rošovom modelu, ali to nikako nije sve. Zbog svoje jednostavnosti Rošov model je naišao na široku primenu u oblasti izučavanja dvojnih zvezda, od analize krivih sjaja do teorije evolucije zvezda.

2.3 Gravitaciono polje sfernosimetričnog tela

Kao što je poznato, gravitaciono polje u vakuumu, u njutnovskoj aproksimaciji, predstavljeno je potencijalom Φ koji zadovoljava jednačinu

$$\Delta\Phi = 0. \quad (46)$$

Može se pokazati da je ovaj, spoljašnji (eksterni) gravitacioni potencijal izolovanog tela mase M dat integralom

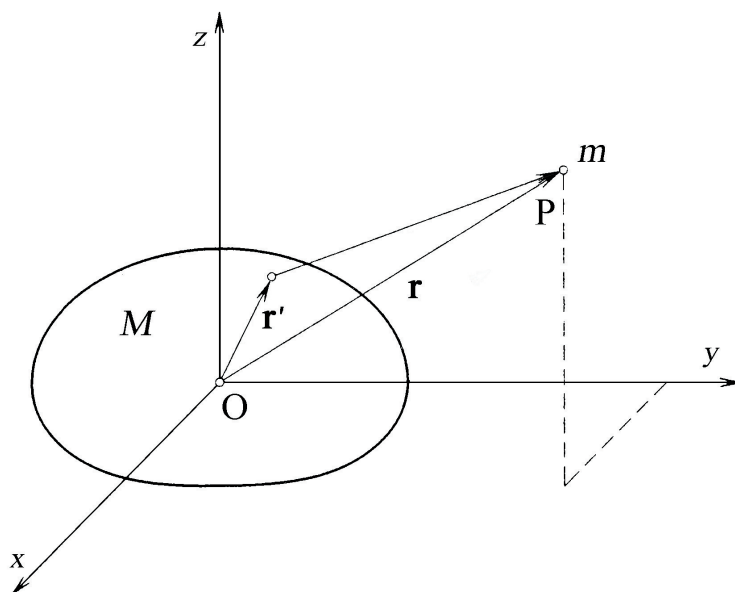
$$\Phi = - \int_M \frac{Gdm'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (47)$$

Vektori \mathbf{r} i \mathbf{r}' prikazani su na slici 4. Kako je

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{r^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' + r'^2}, \quad (48)$$

razvijemo li $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1}$ u red po r'/r do drugog stepena, imaćemo

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1} \approx \frac{1}{r} \left(1 + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} - \frac{1}{2} \frac{r'^2}{r^2} + \frac{3}{2} \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')^2}{r^4} \right). \quad (49)$$



Slika 4: Gravitaciono polje daleko od tela (preuzeto iz Milanković, 1997, i prilagođeno tekstu).

Gravitacioni potencijal daleko od tela je onda

$$\begin{aligned}\Phi &\approx - \int_M \frac{G dm'}{r} \left(1 + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} - \frac{1}{2} \frac{r'^2}{r^2} + \frac{3}{2} \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')^2}{r^4} \right) \\ &= -\frac{GM}{r} + \frac{1}{2} \frac{G}{r^3} \int_M r'^2 dm' - \frac{3}{2} \frac{G}{r^5} \int_M (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')^2 dm',\end{aligned}\quad (50)$$

gde smo iskoristili činjenicu da integral $\int_M dm' = M$ predstavlja ukupnu masu tela i da je, ako se centar koordinatnog sistema poklapa sa centrom mase, $\int_M \mathbf{r}' dm' = 0$. Kako je

$$(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')^2 = x^2 x'^2 + y^2 y'^2 + z^2 z'^2 + 2xyx'y' + 2yzy'z' + 2zxz'x', \quad (51)$$

i momenti $\int_M x'y'dm' = \int_M y'z'dm' = \int_M z'x'dm' = 0$, ako su koordinatne ose u isti mah i glavne ose inercije, za potencijal konačno dobijamo (videti npr. Milanković, 1997)

$$\Phi = -\frac{GM}{r} - \frac{G((B+C-2A)x^2 + (C+A-2B)y^2 + (A+B-2C)z^2)}{2r^5} \quad (52)$$

gde su $A = \int_M (y'^2 + z'^2) dm'$, $B = \int_M (x'^2 + z'^2) dm'$ i $C = \int_M (x'^2 + y'^2) dm'$ glavni momenti inercije. Ako je $A = B = C$ tada, očekivano,

$$\Phi = -\frac{GM}{r}, \quad (53)$$

odnosno, spoljašnje gravitaciono polje sfernosimetričnog tela identično je polju koje bi imalo tačkasto telo mase M smešteno u koordinatnom početku. Značaj ovoga za Rošov model ogleda se u činjenici da nije potrebno da su zvezde zaista „tačkaste” da bi model bio primenljiv (one to i nisu, posebno u slučaju kontaktnih sistema), dovoljno je da je raspodela mase u unutrašnjosti zvezde u dovoljnoj meri sfernosimetrična.

2.3.1 Opravdanje Rošovog modela za rasprostranjene, netačkaste objekte.

Postavimo koordinatni početak pokretnog (rotirajućeg) referentnog sistema tako da se poklapa sa centrom primarne komponente M_1 i napišimo izraz za efektivni potencijal:

$$\begin{aligned}\Phi_{\text{eff}} &= \Phi - \frac{GM_2}{r_2} - \frac{1}{2}\Omega^2 \varrho^2, \\ &= \Phi - \frac{GM_2}{\sqrt{r^2 - 2ra \cos \theta' + a^2}} - \frac{GM}{2a^3} \left(r^2 \sin^2 \theta - \frac{2qa r \cos \theta'}{1+q} + \frac{q^2 a^2}{(1+q)^2} \right), \quad (54)\end{aligned}$$

gde je $\cos \theta' = \sin \theta \cos \phi$. Ako izraz $(r^2 - 2ra \cos \theta' + a^2)^{-1/2} = \frac{1}{a} (1 - 2(\frac{r}{a}) \cos \theta' + (\frac{r}{a})^2)^{-1/2}$ razvijemo u red po r/a zaključno sa članovima drugog reda imaćemo:

$$\begin{aligned}\Phi_{\text{eff}} &= \Phi - \frac{GM_2}{a} \left[1 + \cos \theta' \left(\frac{r}{a} \right) + \frac{1}{2} (3 \cos^2 \theta' - 1) \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right] \\ &\quad - \frac{GM}{2a} \left[\left(\frac{r}{a} \right)^2 \sin^2 \theta - \frac{2q}{1+q} \cos \theta' \left(\frac{r}{a} \right) + \frac{q^2}{(1+q)^2} \right] \quad (55) \\ &= \Phi - \frac{GM_2}{2a^2} (3 \cos^2 \theta' - 1) r^2 - \frac{GM}{2a^3} r^2 \sin^2 \theta - \frac{GM}{2a} \frac{q(2+3q)}{(1+q)^2}.\end{aligned}$$

Vidimo da se članovi linearni po r/a koji potiču od centrifugalnog člana i plimskog dejstva pratioca potiru, što znači da je odstupanje ekvipotencijalnih površi od sfera, izazvano članovima drugog reda po r/a , u unutrašnjosti primarne komponente relativno malo. Ovo je još jedan prilog u korist Rošovog modela ako je zvezda dovoljno koncentrisana i $\Phi = -\frac{GM_1}{r}$. Sličan zaključak može se izvesti i za sekundarnu komponentu – potrebno je samo zameniti $M_1 \rightarrow M_2$ i $q \rightarrow \frac{1}{q}$.

2.4 Dinamička evolucija dvojnih sistema

U širem smislu, dinamička evolucija dvojnih sistema podrazumeva svaku kontinuiranu promenu orbitalnih parametara sistema tokom vremena (ponekad i „trenutnu”, npr. u slučaju supernove), usled raznih fizičkih procesa koji se dešavaju u TDS, poput disipacije energije, prenosa i gubitka mase iz dvojnog sistema, gubitka ugaonog momenta i slično. Ponekad se, međutim, pravi razlika između pravog dinamičkog procesa tj. dinamičke „evolucije” u užem smislu i sekularne evolucije. Sekularna evolucija se odvija na dugim vremenskim skalama i podrazumeva da sistem prolazi kroz niz „ravnotežnih” stanja. U slučaju dvojnog sistema, dakle, može se smatrati da putanja u svakom trenutku ostaje elipsa, ali da se parametri elipse tokom vremena postepeno menjaju.

Slično sekularnoj i dinamičkoj evoluciji, uvode se pojmovi sekularne i dinamičke nestabilnosti (videti npr. Kopal, 1978; Tassoul, 1978; Lai, Rasio & Shapiro, 1993, 1994a). Fizički i matematički koncepti kojima se definišu ove nestabilnosti su veoma različiti, kao i karakteristične vremenske skale procesa u pitanju. Dinamičku nestabilnost moguće je ustanoviti posmatranjima. S druge strane, fizički sistem može biti dinamički stabilan, a sekularno nestabilan, ali da bi se to ustanovilo posmatranjima potrebni su neverovatno dugi, praktično neostvarivi vremenski periodi. Posmatrač jedino može ustanoviti da se određena klasa sistema prosto ne sreće, ili retko sreće u prirodi.⁴

Pojava dinamičke i sekularne nestabilnosti posebno je važna pri razmatranju sudara zvezda. U literaturi se obično ne pravi razlika između spajanja (eng. *merger, coalescence*) i sudara, tj. ne vodi se računa da li su sudari konstruktivni ili destruktivni, o čemu ponekad nije lako unapred zaključiti. Ukoliko je proces dinamički, u užem smislu te reči, verovatnije je da će sudar biti destruktivan (npr. sudar neutronskih zvezda), iako se i spajanje ponekad može okončati razaranjem sistema tj. eksplozijom (npr. spajanje belih patuljaka, ako je ukupna masa sistema veća od Čandrasekarove).

Pitanjem i uslovima stabilnosti nećemo se baviti u ovom poglavlju, već ćemo to ostaviti za poglavlje 4.2. U daljem izlaganju prikazaćemo neke od procesa koji dovode do promena orbitalnih parametara dvojnih sistema. Razmotrimo prvo evoluciju usled prenosa (ili „transfera”) mase i gubitka mase

⁴Sekularna nestabilnost obično podrazumeva dejstvo disipativnih sila. Dobro poznat primer predstavljaju Maklorenovi sferoidi – ravnomerno rotirajuća homogena tela – koji su dinamički stabilni za $\tau = \mathcal{K}/|W| \in [0, 0.5]$, gde je τ odnos kinetičke energije rotacije i gravitacione potencijalne energije, ali su sekularno nestabilni za $\tau \geq \tau_b$, i u slučaju postojanja nekog disipativnog mehanizma prelaze u Jakobijeve elipsoide sa istom masom, zapreminom i ugaonim momentom, ali nižom ukupnom energijom (vrednost $\tau_b = 0.1375$ naziva se tačkom bifurkacije ili račvanja: Tassoul, 1978; Chandrasekhar, 1987).

iz sistema. Postoje tri osnovna scenarija koja opisuju prenos mase u TDS (videti Hilditch, 2001):

- A – ovaj slučaj pretpostavlja da je početni orbitalni period dovoljno kratak (od nekoliko dana) tako da će zvezda ispuniti Rošov oval blago se šireći dok se još nalazi praktično na glavnom nizu, odnosno u fazi sagorevanja vodonika u jezgru.
- B – početni orbitalni period u ovom slučaju leži u intervalu od nekoliko dana do oko 100 dana, tako da zvezda ispunjava Rošov oval tokom relativno brzog prelaza iz faze na glavnom nizu u fazu crvenog džina. Ukoliko je gubitak mase zvezde prekinut paljenjem helijuma u jezgru, prenos mase se označava kao tip BB.
- C – početni orbitalni period je preko 100 dana tako da zvezda neće ispuniti Rošov oval do faze superdžina.

Postoje i slučajevi u kojima se prenos mase nastavlja pri prelasku iz jedne faze evolucije u drugu, kao što su AB i BB.

U opštem slučaju prenos mase može biti konzervativan i nekonzervativan. Konzervativan prenos mase podrazumeva da svu masu koju zvezda izgubi prikupi njen pratilac. Ako iskoristimo treći Keplerov zakon i pretpostavimo da je orbitalni ugaoni momenat konstantan, imamo

$$\frac{3\dot{a}}{a} = \frac{2\dot{P}}{P}, \quad (56)$$

$$\frac{\dot{P}}{P} = \frac{3\dot{M}_1(M_1 - M_2)}{M_1M_2}, \quad (57)$$

gde je $M = M_1 + M_2 = \text{const.}$ i $\dot{M}_1 = -\dot{M}_2$. Vidimo da će se orbita smanjivati ako masivnija zvezda u sistemu pretače masu na svog pratioca ($\dot{M}_1 < 0$, $M_1 - M_2 > 0$), odnosno povećavati u obrnutom slučaju ($\dot{M}_1 = -\dot{M}_2 > 0$, $M_1 - M_2 > 0$). NeKonzervativan prenos mase znači gubitak mase iz sistema. Najjednostavniji slučaj gubitka mase predstavlja sfernosimetrični zvezdani vetar koji ne interaguje sa pratiocem, tako da je npr. $\dot{M}_1 < 0$ i $\dot{M}_2 = 0$. Na osnovu trećeg Keplerovog zakona sada imamo

$$\frac{2\dot{P}}{P} = \frac{3\dot{a}}{a} - \frac{\dot{M}_1}{M}. \quad (58)$$

Ako pretpostavimo da je gubitak mase izotropan, tako da se brzina zvezde na putanji praktično ne menja, na osnovu $v_1 = a_1 2\pi/P = \text{const.}$ i $a_1 = aM_2/M$, imamo

$$\frac{\dot{a}}{a} = \frac{\dot{P}}{P} - \frac{\dot{M}_1}{M}, \quad (59)$$

odnosno

$$\frac{\dot{P}}{P} = -\frac{2\dot{M}_1}{M}. \quad (60)$$

Dakle, period i orbita se usled gubitka mase na ovaj način povećavaju (jer je $\dot{M}_1 < 0$).

Slučaj nekonzervativnog prenosa mase može biti generalizovan tako da uključuje i gubitak ugaonog momenta (Tout & Hall, 1991; Hilditch, 2001). Neka zvezda gubi masu stopom $\dot{M}_1 < 0$. Deo mase $\dot{M}_2 > 0$ prikupiće pratilac, dok će deo \dot{M} biti izgubljen iz sistema. Ako zanemarimo ugaoni momenat rotacije (što je u većini slučajeva opravdano, ali ne i kod zvezda tipa W UMa sa ekstremno malim odnosom masa), za gubitak orbitalnog ugaonog momenta možemo pisati

$$\dot{J} = \dot{M}a_1^2 2\pi/P + KJ, \quad (61)$$

odnosno

$$\frac{\dot{J}}{J} = \frac{M_2}{M_1} \frac{\dot{M}}{M} + K, \quad (62)$$

gde prvi član u jednačini (61) predstavlja deo orbitalnog ugaonog momenta koji je izgubljen zbog gubitka mase iz sistema, dok K predstavlja doprinos drugih mehanizama. Ako ponovo iskoristimo treći Keplerov zakon (30) i izraz za orbitalni ugaoni momenat (32):

$$\frac{2\dot{P}}{P} = \frac{3\dot{a}}{a} - \frac{\dot{M}}{M}, \quad (63)$$

$$\frac{\dot{J}}{J} = \frac{\dot{M}_1}{M_1} + \frac{\dot{M}_2}{M_2} + \frac{\dot{a}}{2a} - \frac{\dot{M}}{2M}, \quad (64)$$

imamo

$$\frac{\dot{P}}{P} = -\frac{2\dot{M}}{M} - \frac{3\dot{M}_2(M_1 - M_2)}{M_1M_2} + 3K. \quad (65)$$

Drugi mehanizmi odgovorni za gubitak ugaonog momenta mogu biti „magnetni vetar” (eng. *magnetized stellar wind* ili *magnetic breaking*; videti Stepień, 1995; Eggleton, 2006) i gravitaciono zračenje. Magnetni zvezdani vetar pretpostavlja otvorene linije sila magnetnog polja. Dok su linije sile u oblasti ekvatora zatvorene (tzv. „mrtva zona” gde je polje približno dipolno), linije sile magnetnog polja koje polaze od polova su izdužene i gotovo radijalne („zona vetra”). Do udaljenosti R_A , tzv. Alfvenovog radijusa (vrednosti nekoliko radijusa zvezde), postoji korotacija, tj. vetar rotira zajedno sa zvezdom, dok se dalje od ovog radijusa vetar slobodno širi odnoseći ugaoni momenat, uz relativno mali gubitak mase. Za zvezdu mase M_1 , radijusa R_1 i

žiro-radijusa k_1 doprinos magnetnog vetra može se predstaviti kao (Hilditch, 2001)

$$K = M_1 k_1^2 R_1^2 \chi \dot{\omega} / J, \quad (66)$$

gde je promena ugaone brzine $\dot{\omega} = \alpha \omega^\beta < 0$ i član $\chi = 1$ u slučaju da zvezda rotira kao kruto telo, odnosno $\chi \leq 1$ u opštem slučaju. Konstante α i β se najčešće određuju na osnovu posmatranja. Za zvezde Sunčevog tipa koje ne rotiraju brzo ($v_{\text{rot}} \lesssim 10$ km/s) je $\beta = 3$ (Weber & Davis, 1967), dok $\beta \rightarrow 0$ za veće brzine rotacije ($20 < v_{\text{rot}} < 200$ km/s). U slučaju sinhronizovanih tesnih dvojnih sistema ($\omega = \Omega$) analiza je znatno komplikovanija. Kvalitativno gledano, očekujemo da u ovom slučaju sistem gubi orbitalni ugaoni momenat, usled čega se orbita smanjuje i $\dot{\Omega} > 0$, suprotno gore navedenom slučaju usamljene zvezde.

Gubitak ugaonog momenta usled gravitacionog zračenja (emisije gravitacionih talasa) može biti veoma značajan kod kompaktnih dvojnih sistema. Analogno slučaju ubrzanih naelektrisanih tela koja emituju elektromagnetne talase, ubrzana masivna tela emituju gravitacione talase. Za razliku od slučaja u elektrodinamici, zbog očuvanja impulsa i momenta impulsa⁵ ne postoji gravitaciono zračenje koje bi odgovaralo električnom dipolnom i magnetnom dipolnom zračenju, tako da je dominantno gravitaciono zračenje kvadrupolno. Za dvojni sistem na kružnoj orbiti imamo

$$K = \dot{J}_{\text{GR}} / J = -\frac{32G}{5c^5} \frac{M_1 M_2 M}{a^4}. \quad (67)$$

Izraz se donekle modifikuje u slučaju eliptične putanje (videti poglavlje 5.4).

Iako usled plimskih sila u TDS očekujemo relativno brzu cirkularizaciju (kružne putanje) i sinhronizaciju (izjednačavanje perioda rotacije i orbitalnog perioda), ovo nije uvek slučaj, posebno kod mladih zvezda klasa O-B i kompaktnih sistema. Jedan od uzroka povećanja ekscentriciteta, pa čak i razaranja sistema je eksplozija supernove u TDS. Analiza posledica supernove po tesni dvojni sistem nije nimalo jednostavna. Sama eksplozija može biti asimetrična i kompaktni ostatak - neutronska zvezda može dobiti dodatni impuls u proizvoljnom pravcu (eng. *kick velocity*, videti Postnov & Yungelson, 2006), što se zaista i zapaža kod pulsara koji generalno imaju velike rezidualne brzine i mogu se pronaći visoko iznad galaktičke ravni („odbegli” pulsari). Relativno jednostavnu analizu uticaja supernove na dvojni sistem

⁵Električnom dipolnom momentu $\mathbf{d} = \sum_i q_i \mathbf{r}_i$, tj. njegovom izvodu po vremenu $\dot{\mathbf{d}} = \sum_i q_i \mathbf{v}_i$ i magnetnom dipolnom momentu $\mathbf{m} = \frac{1}{2} \sum_i q_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i$ u dinamici odgovaraju impuls $\mathbf{p} = \sum_i m_i \mathbf{v}_i$ i moment impulsa (ugaoni moment) $\mathbf{J} = \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i$ koji podležu osnovnim zakonima očuvanja, te su njihovi izvodi po vremenu pri razmatranju gravitacionog zračenja koje potiče iz sistema tela u kretanju jednaki nuli.

dao je Verbunt (1993) pretpostavljajući da je eksplozija trenutna i idealno sferosimetrična, te da komponente neposredno nakon eksplozije imaju istu brzinu kao pre eksplozije (uz dodatnu brzinu centra mase):

$$\begin{aligned}\mathbf{v}'_1 &= \mathbf{v}''_1 + \mathbf{v}_{\text{CM}} \\ \mathbf{v}'_2 &= \mathbf{v}''_2 + \mathbf{v}_{\text{CM}}\end{aligned}\quad (68)$$

Na osnovu ovoga sledi da je relativno rastojanje pre eksplozije a' nova udaljenost periastrona

$$(1 - e)a'' = a', \quad (69)$$

i da je kvadrat relativne brzine u periastronu:

$$\frac{G(M_1 + M_2 - \Delta M)}{2a''} \frac{1 + e}{1 - e} = \frac{G(M_1 + M_2)}{2a'}. \quad (70)$$

Kombinovanjem jednačina (69) i (70) nalazimo za ekscentricitet

$$e = \frac{\Delta M}{M_1 + M_2 - \Delta M}. \quad (71)$$

Vidimo da će sistem ostati vezan ($e < 1$) ako je izbačena masa ΔM manja od polovine ukupne mase sistema pre eksplozije.

Na kraju, razmotrimo dinamičku evoluciju TDS unutar zajedničkog omotača nastalog, na primer, usled brzog, dinamički nestabilnog prenosa mase i gubitka mase iz sistema. Ukoliko se zvezda koja gubi masu brzo širi, ili se orbita usled prenosa mase ili gubitka ugaonog momenta brzo smanjuje, pratilac u TDS se može naći unutar omotača ove zvezde. Usled trenja pri kretanju pratioca kroz omotač gubi se orbitalni ugaoni momenat i energija, omotač se zagreva i postepeno počinje da rotira, a orbita se smanjuje i pratilac spiralno približava jezgru zvezde. Ako je energija predata omotaču dovoljna da on bude izbačen, komponente TDS će se naći na novoj orbiti, znatno bliže jedna drugoj. Alternativno, može doći do sudara i spajanja pratioca sa jezgrom (Paczynski, 1976).

Pretpostavimo da masu gubi sekundarna komponenta mase $M_2 = M_c + M_e$, gde su M_c i M_e , redom, masa jezgra i omotača. Rastojanje između komponentata na novoj orbiti a'' možemo proceniti upoređujući gravitacionu potencijalnu energiju omotača (energiju koju je potrebno uložiti da on bude izbačen) sa razlikom energija dvojnog sistema pre ulaska pratioca u omotač i posle njegovog izbacivanja:

$$\kappa \frac{GM_e M_2}{R_1} = \alpha \left(\frac{GM_c M_1}{2a''} - \frac{GM_1 M_2}{2a'} \right). \quad (72)$$

Parametar α govori o efikasnosti procesa – ako je sva energija dobijena smanjenjem orbite iskorišćena za „oslobođanje” omotača biće $\alpha \approx 1$, u suprotnom, ako se na primer deo energije izračti, odnosno ne doprinosi izbacivanju omotača, $\alpha < 1$. Ako su radijus primarne komponente R_1 i jezgra R_c dovoljno mali, tako da su obe komponente unutar Rošovih ovala novostvorenog sistema, dvojni sistem je očuvan. U suprotnom, ponovo može doći do prenosa mase i nastavka orbitalne evolucije, i potencijalno do sudara.

Za formiranje zajedničkog omotača može biti odgovoran i tzv. super-Edingtonov prenos mase. Pretpostavimo da za luminoznost diska možemo pisati (Postnov & Yungelson, 2006)

$$L_{\text{disc}} = \frac{1}{2}GM\dot{m}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_{L_1}}\right), \quad (73)$$

gde su M i R masa i radijus komponente koja prikuplja masu, \dot{m} stopa akrecije i R_{L_1} udaljenost do Lagranžove tačke L_1 . Ako je ova luminoznost jednaka Edingtonovoj $L_{\text{Edd}} = \frac{4\pi cGM}{\kappa_e}$ (za objašnjenje videti poglavlje 3.2.1), možemo izračunati kritičnu, Edingtonovu stopu akrecije. Veće \dot{m} verovatno znači gubitak dela materije (nekonzervativan prenos mase), tj. njeno zagrevanje i širenje. U nekim slučajevima super-Edingtonov prenos mase može sprečiti evoluciju unutar zajedničkog omotača (oduvavši omotač crvenog džina u kataklizmičkim promenljivima), dok u drugim može formirati neku vrstu zajedničkog omotača (kod interaktivnih DD sistema).

3 Politropska struktura

3.1 Lejn-Emdenova jednačina i njena rešenja

Jednačine strukture zvezde predstavljaju zatvoreni sistem jednačina čijim rešavanjem dobijamo vrednosti fizičkih promenljivih, poput gustine ρ , pritiska P , temperature T , gravitacionog potencijala Φ i dr, u proizvoljnoj tački zvezde, odnosno strukturu zvezde od njenog centra do površine. Uobičajena uprošćenja koja se čine pri rešavanju ovog složenog problemu jesu pretpostavka o statičnosti (ili kvazi-statičnosti), odnosno pretpostavlja se da promenljive eksplicitno ne zavise od vremena, i pretpostavka o sfernoj simetriji, tj. da promenljive zavise samo od udaljenosti razmatranog elementa zapremine od centra r . Pođimo od jednačine hidrostatičke ravnoteže (uporediti sa jednačinom (41))

$$\rho \nabla \Phi = -\nabla P, \quad (74)$$

i Poasonove jednačine

$$\Delta \Phi = 4\pi G \rho, \quad (75)$$

koje u sfernosimetričnom slučaju možemo zapisati kao

$$-\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} = \frac{d\Phi}{dr} = \frac{Gm}{r^2}, \quad (76)$$

gde je $m = m(r)$ masa unutar sfere poluprečnika r . Za priraštaj mase može se pisati sledeća relacija

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho. \quad (77)$$

Da bi zatvorili dati sistem jednačina potrebno je da znamo jednačinu stanja, u opštem slučaju $P = P(\rho, T)$, kao i jednačine koje opisuju proizvodnju i prenos energije u zvezdama. Ponekad je, bez ulaženja u detalje ovih složenih procesa, moguće uvesti pretpostavku da je $P = P(\rho)$, čime je sistem jednačina (74)–(75), odnosno (76)–(77), automatski zatvoren.

Pretpostavimo da je $P = P(\rho)$ u obliku

$$P = K \rho^{\Gamma_1} = K \rho^{1+1/n}, \quad (78)$$

gde su K , Γ_1 i n konstante. Jednačina (78) naziva se politropskom jednačinom (stanja), n indeksom politrope, a struktura dobijena rešavanjem jednačina (74), (75) i (78) politropskom strukturom ili politropom indeksa n . Kako je u slučaju politropske strukture, na osnovu jednačine hidrostatičke ravnoteže

$$\Phi = -K(n+1)\rho^{1/n} + \text{const.} \quad (79)$$

i laplasijan

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \right), \quad (80)$$

jednačine (74), (75) i (78) mogu se kombinovati u tzv. Lejn-Emdenovu jednačinu:

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) = -\theta^n, \quad (81)$$

gde je $\theta^n = \rho/\rho_c$, $\xi = r/l$, $l^2 = \frac{K(n+1)}{4\pi G} \rho_c^{1/n-1}$, i ρ_c gustina u centru (detaljnije o politropskoj strukturi videti u Chandrasekhar, 1958).

Lejn-Emdenova jednačina (81) ima regularna (konačna u centru) analitička rešenja za $n = 0, 1$ i 5 . To su:

$$\theta_0 = 1 - \frac{\xi^2}{6}, \quad (82)$$

$$\theta_1 = \frac{\sin \xi}{\xi}, \quad (83)$$

$$\theta_5 = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{3}\xi^2}}. \quad (84)$$

Granični uslovi u centru su $\theta(0) = 1$ i $\frac{d\theta}{d\xi}|_{\xi=0} = 0$. Površinu zvezde na $\xi = \xi_1$ nalazimo iz uslova $\theta(\xi_1) = 0$. Ukupnu masu nalazimo iz

$$\begin{aligned} M_1 &= 4\pi l^3 \rho_c \int_0^{\xi_1} \xi^2 \theta^n d\xi \\ &= -4\pi l^3 \rho_c \int_0^{\xi_1} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) d\xi \\ &= -4\pi l^3 \rho_c \xi_1^2 \frac{d\theta}{d\xi} \Big|_{\xi=\xi_1}, \end{aligned} \quad (85)$$

odakle uz $\xi_1 = R_1/l$ sledi odnos srednje gustine i gustine u centru (mera koncentrisanosti zvezde)

$$\frac{\langle \rho \rangle}{\rho_c} = -\frac{3}{\xi_1} \frac{d\theta}{d\xi} \Big|_{\xi=\xi_1}. \quad (86)$$

Na osnovu jednačine (85), odnosno (86), i definicije momenta inercije

$$\begin{aligned} I &= \int \varrho^2 dm = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{R_1} r^2 \sin^2 \theta \rho(r) r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \\ &= \frac{8\pi}{3} \int_0^{R_1} r^4 \rho(r) dr = \frac{8\pi}{3} l^5 \rho_c \int_0^{\xi_1} \xi^4 \theta^n d\xi = k_1^2 M_1 R_1^2 \end{aligned} \quad (87)$$

možemo pronaći i bezdimenzioni žiro-radijus

$$k_1^2 = -\frac{2}{3} \frac{\int_0^{\xi_1} \xi^4 \theta^n d\xi}{\xi_1^4 \left. \frac{d\theta}{d\xi} \right|_{\xi=\xi_1}}, \quad (88)$$

koji će nam trebati u kasnijoj analizi. Lejn-Emdenove funkcije θ_n daju konačnu masu i radijus za $n < 5$, za $n = 5$ masa je konačna, ali radijus beskonačan (videti jednačinu (84)), dok su za $n > 5$ i masa i radijus beskonačni. Kada $n \rightarrow \infty$ imamo jedno singularno analitičko rešenje jednačina (74), (75) i (78), tzv. singularnu izotermalnu sferu (videti npr. Chandrasekhar, 1958; Shu, 1992)

$$\rho = \text{const} \cdot e^{-\Phi/c_s^2} = \frac{c_s^2}{2\pi G r^2} \propto r^{-2}, \quad (89)$$

gde se $K = c_s^2$ može interpretirati kao kvadrat izotermalne brzina zvuka. U opštem slučaju, za proizvoljno n , jednačinu (81) rešavamo numeričkim metodama.

3.1.1 Metod Runge-Kuta za rešavanje Lejn-Emdenove jednačine

Postoje razne metode za rešavanje jednačina strukture zvezde, i posebno Lejn-Emdenove jednačine. Izložićemo ovde jednu od najjednostavnijih metoda, tzv. Runge-Kuta integrator. Jednostavnost metoda se ogleda u činjenici da se za zadate uslove u centru struktura rešava u samo jednom prolazu, od centra ka površini (videti Press et al., 1992; Hansen & Kawaler, 1994).

Uvešćemo oznake $x = \xi$, $y = \theta$ i $z = \frac{d\theta}{d\xi} = \frac{dy}{dx}$, i rastaviti Lejn-Emdenovu jednačinu drugog reda na dve diferencijalne jednačine prvog reda:

$$y' = \frac{dy}{dx} = z, \quad (90)$$

$$z' = \frac{dz}{dx} = -y^n - \frac{2}{x}z, \quad (91)$$

Cilj je da na osnovu poznatih vrednosti y_i i z_i u tački x_i nađemo vrednosti y_{i+1} i z_{i+1} u tački $x_{i+1} = x_i + h$, gde je h pogodno odabran korak integracije. U slučaju Runge-Kuta integratora četvrtog reda potrebno je izračunati veličine

$$\begin{aligned} k_1 &= h y'(x_i, y_i, z_i), \\ l_1 &= h z'(x_i, y_i, z_i), \\ k_2 &= h y'(x_i + h/2, y_i + k_1/2, z_i + l_1/2), \end{aligned}$$

Tabela 1: Podaci za odabrane politrope indeksa n dobijeni numeričkim rešavanjem Lejn-Emdenove jednačine, osim za politrope indeksa $n = 0, 1$ i 5 za koje postoje analitička rešenja (Chandrasekhar, 1958; Hansen & Kawaler, 1994; Lai, Rasio & Shapiro, 1993).

n	ξ_1	$-(d\theta/d\xi) _{\xi=\xi_1}$	$\rho_c/\langle\rho\rangle$	k_1^2
0	$\sqrt{6}$	$\sqrt{6}/3$	1	$2/5$
0.5	2.7528	0.49976	1.836	0.32593
1.0	π	$1/\pi$	$\pi^2/3$	$\frac{2}{3}\frac{\pi^2-6}{\pi^2}$
1.5	3.6538	0.20330	5.991	0.20460
2.0	4.3529	0.12725	11.403	0.15485
2.5	5.3553	0.07626	23.406	0.11180
3.0	6.8968	0.04243	54.182	0.07536
3.5	9.5358	0.02079	152.884	0.04555
4.0	14.9716	0.00802	622.408	0.02257
4.5	31.8365	0.00171	6189.47	0.00690
5.0	∞	0	∞	–

$$\begin{aligned}
l_2 &= h z'(x_i + h/2, y_i + k_1/2, z_i + l_1/2), \\
k_3 &= h y'(x_i + h/2, y_i + k_2/2, z_i + l_2/2), \\
l_3 &= h z'(x_i + h/2, y_i + k_2/2, z_i + l_2/2), \\
k_4 &= h y'(x_i + h, y_i + k_3, z_i + l_3), \\
l_4 &= h z'(x_i + h, y_i + k_3, z_i + l_3),
\end{aligned} \tag{92}$$

gde se y' i z' računaju na osnovu jednačina (90) i (91). Vrednosti y_{i+1} i z_{i+1} u tački x_{i+1} tada nalazimo kao

$$y_{i+1} = y_i + \frac{k_1}{6} + \frac{k_2}{3} + \frac{k_3}{3} + \frac{k_4}{6}, \tag{93}$$

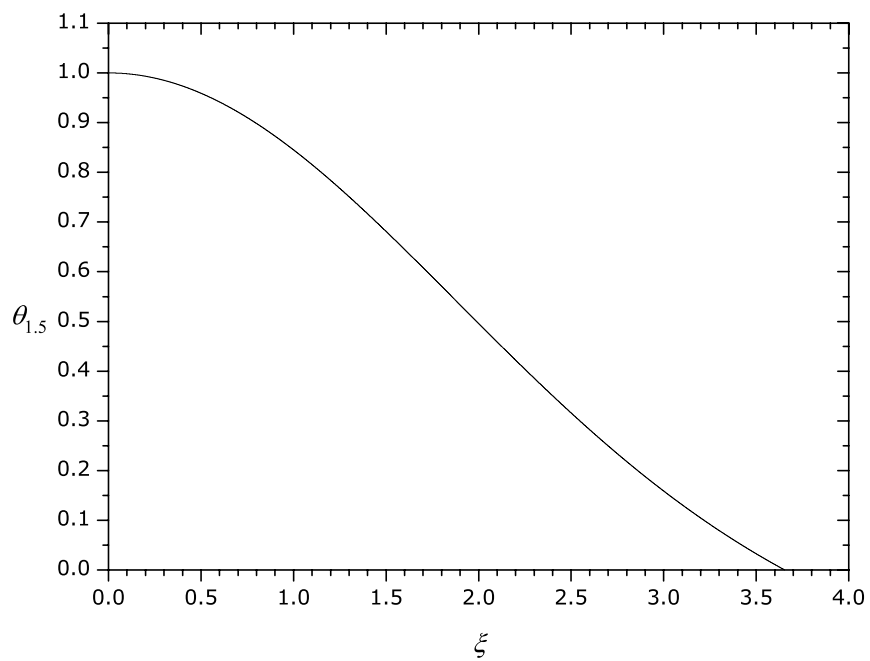
$$z_{i+1} = z_i + \frac{l_1}{6} + \frac{l_2}{3} + \frac{l_3}{3} + \frac{l_4}{6}, \tag{94}$$

sa tačnošću reda $\mathcal{O}(h^4)$. Integracija počinje iz centra ($x = 0$) gde imamo granične uslove

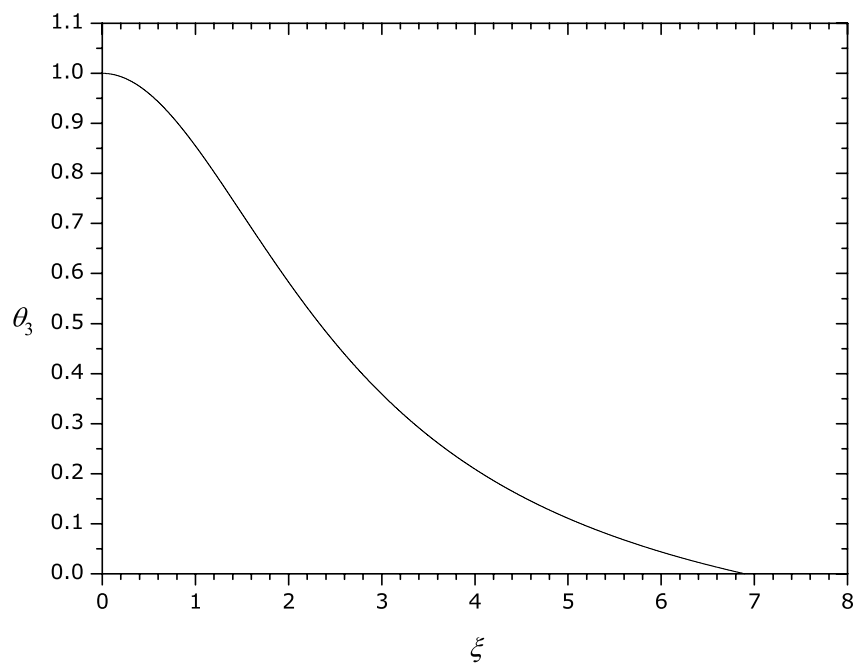
$$y(0) = 1, \quad z(0) = 0, \tag{95}$$

međutim, kako je jednačina (91) neodređena u $x = 0$, potrebno je y , odnosno θ_n razviti u Tejlorov red (videti u Cox & Giuli, 1968)

$$\theta_n(\xi) = 1 - \frac{1}{6}\xi^2 + \frac{n}{120}\xi^4 - \frac{n(8n-5)}{15120}\xi^6 + \dots \tag{96}$$



Slika 5: Profil gustine, odnosno $\theta = \theta_n(\xi)$ za politropu indeksa $n = 1.5$.



Slika 6: Profil gustine, odnosno $\theta = \theta_n(\xi)$ za politropu indeksa $n = 3$.

Kako za $x = \xi \rightarrow 0$ imamo $z' \rightarrow -1/3$, možemo sa ovom vrednošću započeti integraciju, ili bolje, iskoristiti jednačinu (96) da pronađemo y i z u tački proizvoljno bliskoj nuli. Površinu, odnosno radijus politrope ξ_1 nalazimo iz uslova $\theta_n = 0$.

U tabeli 1 dati su podaci za odabrane politrope. Od posebnog značaja u astrofizici su politrope indeksa $n = 1.5$ i 3 (videti slike 5 i 6), o čemu će više reči biti u narednim poglavljima.

3.2 Standardni model

Jedna od, u literaturi najčešće pominjanih, primena politropa koja nema samo istorijski značaj, jeste Edingtonov standardni model za zvezde u ravnoteži zračenja (potpuno radijativne zvezde, videti Chandrasekhar, 1958; Hansen & Kawaler, 1994). Pođimo od izraza za fluks zračenja u difuznoj aproksimaciji (Shu, 1991)

$$\mathbf{F}_{\text{rad}} = -\frac{c}{\rho\kappa}\nabla P_{\text{rad}} = -\frac{c}{3\rho\kappa}\nabla(aT^4) = \frac{L(r)}{4\pi r^3}\mathbf{r}, \quad (97)$$

gde je $L(r)$ „unutrašnja” luminoznost, P_{rad} pritisak zračenja, c brzina svetlosti, $a = 4\sigma/c$, σ je Štefan-Bolcmanova konstanta i κ je neprozračnost za koju možemo pretpostaviti da je data kao zbir Tomsonove i Kramersove neprozračnosti:

$$\kappa = \kappa_e + \kappa_o\rho T^{-3.5}. \quad (98)$$

Tomsonova neprozračnost je $\kappa_e = \sigma_e n_e / \rho$, gde je n_e koncentracija elektrona i $\sigma_e = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{m_e c^2}\right)^2$ presek za rasejanje na slobodnim elektronima, m_e i e su masa i naelektrisanje elektrona, dok κ_o zavisi samo od hemijskog sastava (za homogeni hemijski sastav κ_o je konstanta).

Ako kombinujemo jednačinu (97) sa jednačinom hidrostatičke ravnoteže (76) imamo

$$\frac{dP_{\text{rad}}}{dP} = \frac{\kappa(r)L(r)}{4\pi c G m(r)} = \frac{L}{4\pi c G M} \kappa(r)\eta(r), \quad (99)$$

$$P_{\text{rad}}(r) = \frac{L}{4\pi c G M} \langle \kappa(r)\eta(r) \rangle P(r), \quad (100)$$

gde smo pretpostavili da je gasni pritisak na površini jednak nuli i $P_{\text{rad}}(R) \ll P_{\text{rad}}(r)$, i uveli funkciju

$$\eta(r) = \frac{L(r)/L}{m(r)/M} = \frac{\langle \varepsilon(r) \rangle}{L/M}; \quad (101)$$

Tabela 2: Edingtonov standardni model.

$M [M_\odot]$	β
1.0	0.9996
2.0	0.9985
5.0	0.9907
10.0	0.9662
20.0	0.8987
50.0	0.7277

$\varepsilon(r)$ je proizvedena energija po jedinici mase, M je ukupna masa i L ukupna luminoznost zvezde.

Ako uvedemo promenljivu $\beta = P_g/P$, gde je P_g pritisak gasa, imamo

$$1 - \beta(r) = \frac{P_{\text{rad}}(r)}{P(r)} = \frac{L}{4\pi cGM} \langle \kappa(r)\eta(r) \rangle. \quad (102)$$

Ključna pretpostavka u standardnom modelu jeste da je $\beta = \text{const}$, drugim rečima, iako $\kappa(r)$ raste i $\eta(r)$ brzo opada od centra ka površini, njihov usrednjeni proizvod $\langle \kappa(r)\eta(r) \rangle$ se ne menja bitno kroz zvezdu. Sa $\beta = \text{const}$ imamo

$$P_{\text{rad}} = \frac{1 - \beta}{\beta} P_g = \frac{1 - \beta}{\beta} \frac{\rho k T}{\mu H} = \frac{1}{3} a T^4, \quad (103)$$

gde je H masa vodonika, μ srednja molekulska masa i k Bolcmanova konstanta, odnosno

$$T = \left(\frac{1 - \beta}{\beta} \frac{3k}{a\mu H} \right)^{1/3} \rho^{1/3}, \quad (104)$$

$$P = \left[\frac{1 - \beta}{\beta^4} \frac{3}{a} \left(\frac{k}{\mu H} \right)^4 \right]^{1/3} \rho^{4/3}. \quad (105)$$

Vidimo iz poslednje jednačine da dobijamo politropsku relaciju $P = K\rho^{\Gamma_1}$ sa $K = \left[\frac{1 - \beta}{\beta^4} \frac{3}{a} \left(\frac{k}{\mu H} \right)^4 \right]^{1/3}$ i $\Gamma_1 = 4/3$, odnosno $n = 3$. Kako je za politropu sa indeksom $n = 3$

$$K = \frac{(4\pi)^{1/3} GM^{2/3}}{4(-\xi_1^2 \frac{d\theta}{d\xi} |_{\xi=\xi_1})^{2/3}}, \quad (106)$$

imamo relaciju

$$\frac{1 - \beta}{\beta^4} = 0.002996 \cdot \mu^4 \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^2. \quad (107)$$

Za zvezde na glavnom nizu sa zastupljenošću vodonika $X = X_1 \approx 0.7$, helijuma $Y = X_2 \approx 0.3$ i metala $Z = \sum_{i>2} X_i \approx 0.03 \rightarrow 0$, u slučaju potpuno

jonizovane sredine ($y_i \rightarrow 1$), imamo

$$\mu^{-1} = \sum_i \frac{X_i}{A_i} + \sum_i \frac{Z_i X_i y_i}{A_i} \approx \frac{5X + 3}{4} \approx 1.625 \quad \text{tj.} \quad \mu \approx 0.6, \quad (108)$$

gde smo uzeli da je za $i > 2$ odnos rednog i atomskog broja hemijskog elementa $Z_i/A_i \approx 1/2$ (atomi imaju približno jednak broj protona i neutrona u jezgri) i $X + Y + Z \approx X + Y = 1$.

Izračunato β za zadate mase zvezda i $\mu = 0.6$ su date u tabeli 2. Osnovni nedostatak opisa zvezde u okviru standardnog modela leži u činjenici da zvezde nisu u potpunosti u ravnoteži zračenja – zvezde mase $M \sim M_\odot$ ($\beta \rightarrow 1$) imaju konvektivni omotač, dok masivne zvezde ($\beta \rightarrow 0$) imaju konvektivno jezgro, znatne brzine rotacije i snažne zvezdane vetrove, tako da spoljašnji slojevi više nisu ni u strogoj hidrostatičkoj ravnoteži.

3.2.1 Teorema virijala

Teorema virijala može se dobiti direktno iz jednačina kretanja u hidrodinamici (videti Tassoul, 1978) i u opštem obliku (zanemarujući viskozne sile i magnetno polje) glasi:

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 \mathcal{I}}{dt^2} = 2\mathcal{K} + W + 3 \int_V P dV, \quad (109)$$

gde je veličina $\mathcal{I} = \int r^2 \rho dV$ povezana sa momentom inercije, $\mathcal{K} = \frac{1}{2} \int \rho v^2 dV$ je kinetička energija, $W = \frac{1}{2} \int \rho \Phi dV$ gravitaciona potencijalna energija, V je zapremina, dok je $M = \int \rho dV$ ukupna masa sistema. U slučaju politrope indeksa n može se pokazati (Chandrasekhar, 1958) da je gravitaciona potencijalna energija

$$W = \frac{1}{2} \int \rho \Phi dV = \frac{1}{2} \int \Phi dm = - \int_0^M \frac{Gm dm}{r} = - \frac{3}{5-n} \frac{GM^2}{R}, \quad (110)$$

gde je R radijus zvezde. Ako vezu između gustine unutrašnje energije i pritiska možemo iskazati relacijom $u = \frac{1}{\Gamma-1} P$, jednačina (109) glasi

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 \mathcal{I}}{dt^2} = 2\mathcal{K} + W + 3\langle \Gamma - 1 \rangle U, \quad (111)$$

gde je $U = \int u dV$ unutrašnja energija.

U hidrostatičkoj ravnoteži ($\dot{\mathcal{I}} = 0$, $\mathcal{K} = 0$) teorema virijala sa $\Gamma = \text{const.}$ se svodi na

$$W + 3(\Gamma - 1)U = 0. \quad (112)$$

Kako ukupna energija mora biti negativna (da bi sistem ostao gravitaciono „vezan”)

$$E = W + U < 0, \quad (113)$$

teorema virijala daje uslov dinamičke stabilnosti: $[1-3(\Gamma-1)]U < 0$, odnosno $\Gamma > 4/3$. Za sistem idealnog gasa (sa $\gamma = 5/3$) i zračenja crnog tela je

$$\begin{aligned} u &= u_g + u_{\text{rad}} \\ &= \frac{1}{\gamma - 1} P_g + 3P_{\text{rad}} \\ &= \left[\frac{\beta}{\gamma - 1} + 3(1 - \beta) \right] P \\ &= \frac{1}{\Gamma - 1} P, \end{aligned} \quad (114)$$

pa kada $\Gamma \rightarrow 4/3$ imamo $\beta \rightarrow 0$ (dominantan pritisak zračenja). Masivne zvezde kod kojih je $\beta \approx 0$ dostižu Edingtonovu graničnu luminoznost (uporediti sa jednačinom (102))

$$L_{\text{Edd}} = \frac{4\pi cGM}{\kappa_e}, \quad (115)$$

iznad koje pritisak zračenja nadvladava gravitaciju i zvezda je nestabilna. Slično, $\Gamma = \gamma = 4/3$ u slučaju relativističkih belih patuljaka koji su takođe nestabilni (videti poglavlje 5).

Teoremu virijala možemo primeniti i na Maklorenove sferoide, na primer (videti Tassoul, 1978; Chandrasekhar, 1987). U slučaju stacionarnog kretanja tj. rotacije ($\dot{I} = 0$) jednačina (111) sa $\Gamma = \text{const.}$ se svodi na

$$2\mathcal{K} + W + 3(\Gamma - 1)U = 0. \quad (116)$$

Kako je poslednji član u jednačini (116) pozitivan mora biti

$$2\mathcal{K} + W < 0, \quad (117)$$

odnosno $0 \leq \tau \leq 0.5$, gde je $\tau = \mathcal{K}/|W|$ odnos kinetičke energije rotacije i gravitacione potencijalne energije. Maklorenovi sferoidi su, dakle, dinamički stabilni za $\tau < 0.5$, ali se pokazuje da su sekularno nestabilni za $\tau \geq \tau_b$ gde je $\tau_b = 0.1375$ (videti fusnotu 4).

3.3 Potpuno konvektivne zvezde

Ukoliko se prenos energije proizvedene u nuklearnim reakcijama u jezgru obavlja konvekcijom sve do površine govorimo o potpuno konvektivnim zvezdama (takve su, na primer, zvezde na glavnom nizu najmanjih masa – crveni patuljci). Pođimo od jednačine očuvanja unutrašnje energije (prvi zakon termodinamike za element fluida, jednačina (42)):

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} + P \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) = 0, \quad (118)$$

gde je $\varepsilon = \frac{u}{\rho}$ i $u = \frac{1}{\gamma-1}P$. Iz jednačine (118) lako nalazimo

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt}(P\rho^{-\gamma}) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(P\rho^{-\gamma}) + \mathbf{v} \cdot \nabla(P\rho^{-\gamma}) &= 0, \\ \mathbf{v} \cdot \nabla(P\rho^{-\gamma}) &= 0, \end{aligned} \quad (119)$$

ako P i ρ eksplicitno ne zavise od vremena. Ukoliko je brzina v mala tako da je i dalje praktično ispunjen uslov hidrostatičke ravnoteže (74), ali nije identički jednaka nuli (imamo konvekciju), sledi da mora biti

$$P\rho^{-\gamma} = \text{const}. \quad (120)$$

Jednačina adijabate (120) je ponovo jedna politropska relacija $P = K\rho^{\Gamma_1}$ sa $\Gamma_1 = \gamma = 5/3$, odnosno indeksom $n = 1.5$. Zavisnost konstante K od relevantnih fizičkih konstanti, u ovom slučaju je, za razliku od standardnog modela, teže odrediti *a priori*. Takođe, za razliku od relacije (106), odnosno (107), ukupna masa sada zavisi i od radijusa R (ili gustine u centru):

$$M = -\frac{1}{(4\pi)^2} \left(\frac{5K}{2G} \right)^3 R^{-3} \xi_1^5 \frac{d\theta}{d\xi} \Big|_{\xi=\xi_1}. \quad (121)$$

Jedna od važnijih primena politrope sa indeksom $n = 1.5$ i jednačine (121) jeste slučaj nerelativističkih belih patuljaka, kao što ćemo videti u petom poglavlju.

4 Kontaktni dvojni sistemi

4.1 Klasifikacija i opšte osobine kontaktnih dvojnih sistema

Kontaktni tesni dvojni sistemi predstavljaju sisteme kod kojih obe komponente ispunjavaju svoje unutrašnje Rošove ovale. Zvezde koje su dovoljno blizu mogu doći u kontakt smanjenjem orbite usled gubitka ugaonog momenta ili prenosa masa, kao i delovanjem raznih drugih mehanizama. Jedna od ponuđenih teorija koja objašnjava relativno veliki broj, dugovečnost, odnosno stabilnost kontaktnih sistema jeste da oni, na dugim vremenskim skalama, prolaze kroz tzv. termalne relaksacione oscilacije (Lucy, 1976; Wang, 1994). Naime, ukoliko je primarna komponenta ta koja je prva ispunila svoj Rošov oval (za zvezde na glavnom nizu, po pravilu je masivnija zvezda većih dimenzija i brže evoluira), započinje prenos mase sa primarne komponente na sekundarnu (manje masivnu), pri čemu se orbita smanjuje, sekundarna komponenta se blago širi i zvezde dolaze u kontakt. Pri kontaktnoj konfiguraciji, u prvo vreme masa se i dalje pretače sa primarne na sekundarnu komponentu, ali u jednom trenutku, usled širenja sekundarne komponente, smer prenosa mase se obrće, orbita se povećava (budući da se masa sada pretače sa sekundarne na primarnu komponentu), primarna komponenta izlazi iz kontakta i sistem prolazi kroz fazu marginalnog kontakta. Kako sekundarna komponenta i dalje ispunjava Rošov oval, prenos mase se nastavlja, primarna komponenta se sada blago širi i ispunjava svoj Rošov oval, zvezde ponovo dolaze u kontakt, smer prenosa mase se obrće i ciklus se ponavlja.

Iako postoje kontaktni TDS koje čine zvezde ranih spektralnih klasa O, B i A, sa omotačima u ravnoteži zračenja, velika većina kontaktnih sistema potpada pod zvezde tipa W UMa – sisteme sa zvezdama poznih spektralnih klasa od F do K, koje imaju zajednički konvektivni omotač. Jedna od osnovnih karakteristika kontaktnih TDS jesu približno iste efektivne temperature zvezda, iako je masa primarne komponente obično znatno veća – od dva puta u proseku, do deset puta u slučaju kontaktnih sistema sa ekstremno malim odnosom masa. Ova činjenica nam ukazuje da mora postojati prenos energije sa primarne na sekundarnu komponentu, koji dovodi do izjednačavanja temperatura, iako tačan mehanizam prenosa još uvek nije poznat. U prilog ovome govori i pojačan sjaj na „vratu” tj. u oblasti omotača koji spaja dve zvezde, uočen kod nekih sistema (Hilditch et al., 1998; Djurašević et al., 1999).

Dok primarne komponente kontaktnih sistema tipa W UMa izgledaju kao normalne zvezde na glavnom nizu, sekundarne komponente su siste-

matski veće u odnosu na veličinu koju bi imale na početnom glavnom nizu, s obzirom na njihovu masu, i na H-R dijagramu se nalaze *levo* od glavnog niza! Razrešenje ove anomalije upravo leži u činjenici da temperatura sekundarne komponente dobijena na osnovu analize krivih sjaja predstavlja temperaturu zajedničkog omatača (u kom postoji neki vid prenosa energije sa primarne komponente), a ne temperaturu koju bi sekundarna komponenta imala kao usamljena zvezda.

Na krivama sjaja kod eklipsnih dvojnih sistema tipa W UMa postoji kontinuirana promena sjaja, bez jasno određene granice između faza eklipsi i faza van eklipsi. Minimumi na krivama sjaja su približno iste dubine, ali ne u potpunosti, tako da i dalje možemo razlikovati primarne i sekundarne eklipse. Sistemi tipa W UMa dele se na dva podtipa:

- A – kod kojih je tokom primarnog (dubljeg) minimuma, odnosno eklipse, pomračena masivnija, primarna komponenta, i
- W – kod kojih je tokom primarnog minimuma pomračena manje masivna, sekundarna komponenta.

Kako je razlika u dubini minimuma, u najvećoj meri posledica razlike u temperaturi zvezda dolazimo do još jednog paradoksa – kod većine sistema podtipa W sekundarna, manje masivna komponenta ima nešto veću temperaturu! Iako ne postoji opšte prihvaćeno rešenje ovog problema, razrešenje verovatno ponovo treba tražiti u prenosu energije sa primarne komponente.

Kontaktne TDS predstavljaju neiscrpno polje istraživanja i veliki izazov za astrofizičare. Modeliranje dve zvezde različitih masa, ali jednakih efektivnih temperatura pokazalo se kao izuzetno složen zadatak. U gornjim slojevima zajedničkog omatača izogustinske i izotermalne površi se poklapaju sa ekvipotencijalnim površima, ali u dubljim slojevima omatača, u blizini unutrašnje Rošove površi mora se, ili odustati od zahteva da temperatura bude konstanta na ekvipotencijalnim površima (jer su zvezde različite mase i luminoznosti), ili pretpostaviti kontaktne diskontinuitet u gustini i temperaturi na jednom od unutrašnjih Rošovih ovala (Shu, Lubow & Anderson, 1976, 1979, 1980). Uprkos brojnim pokušajima, struktura kontaktnih TDS i dalje predstavlja nerešen problem (Tassoul, 2000).

4.2 Minimalni odnos masa za tesne dvojne sisteme tipa W UMa

4.2.1 Uvod

Usled plimskih dejstava u TDS brzo dolazi do cirkularizacije i sinhronizacije, o čemu je već bilo govora u prethodnim poglavljima. U dvojnima

sistemima pozne spektralne klase, sistem će verovatno gubiti ugaoni momenat magnetnim vetrom (Stepień, 2006, videti poglavlje 2.4), i ako je vreme sinhronizacije manje od karakterističnog vremena za gubitak ugaonog momenta sistem će ostati sinhronizovan, rotacioni ugaoni momenat komponenti J_{spin} će se povećavati na račun orbitalnog ugaonog momenta J_{orb} , dok će se rastojanje između komponenti smanjivati. Orbitalni i rotacioni ugaoni momenat tako postaju uporedivi! Kada ukupni ugaoni momenat $J_{\text{tot}} = J_{\text{orb}} + J_{\text{spin}}$ dostigne minimalnu vrednost ($J_{\text{orb}} \approx 3J_{\text{spin}}$, kao što ćemo videti) nastaje sekularna, plimska nestabilnost (Darwin, 1879) koja će naposljetku dovesti do toga da se dve zvezde „stope” u jedan brzorotirajući objekat. Kako se ugaoni momenat i orbita smanjuju, sistem će, dakle, biti sekularno stabilan za $\frac{dJ_{\text{tot}}}{da} > 0$. Ovaj uslov možemo shvatiti na sledeći način: nakon minimuma ugaoni momenat bi trebao da se povećava kako se orbita smanjuje, što je fizički nemoguće jer mehanizam koji dovodi do gubitka ugaonog momenta i dalje deluje. To znači da matematički model nakon $\frac{dJ_{\text{tot}}}{da} = 0$ nije odgovarajući, tj. da je neka od pretpostavki (sinhronizacija) dalje neodrživa. Sistem će postati asinhronizovan, orbita će nastaviti da se smanjuje i na kraju će doći do sudara.

Verovatno na ovaj način nastaju bar neke od „zalutalih” plavih zvezda (eng. *blue stragglers*) u zvezdanim jatima (videti npr. Lombardi et al., 2002, slika 7). Ove zvezde nalaze se u produžetku glavnog niza nakon tačke odvajanja, na H-R dijagramima globularnih jata, iako su se sve masivnije zvezde već pomerile udesno ka grani crvenih džinova i asimptotskoj grani džinova (skr. AGB od eng. *asymptotic giant branch*). Kako očekujemo da je formiranje zvezda u ovim starim jatima davno prestalo, logično objašnjenje za nastanak „zalutalih” plavih zvezda su sudari. Mogućnost da su ove zvezde povezane sa dvojnim sistemima tipa W UMa potkrepljena je otkrićem velikog broja zvezda tipa W UMa, među „zalutalim” plavim zvezdama u rasejanim i zbijenim zvezdanim jatima (Kaluzny & Shara, 1988).

Nestabilnost se javlja na nekom kritičnom rastojanju između zvezda, koje se u slučaju kontaktnih sistema može prevesti u minimalni odnos masa, kao što ćemo upravo videti. Ako pretpostavimo sinhronizaciju, za ukupan ugaoni momenat sistema možemo pisati

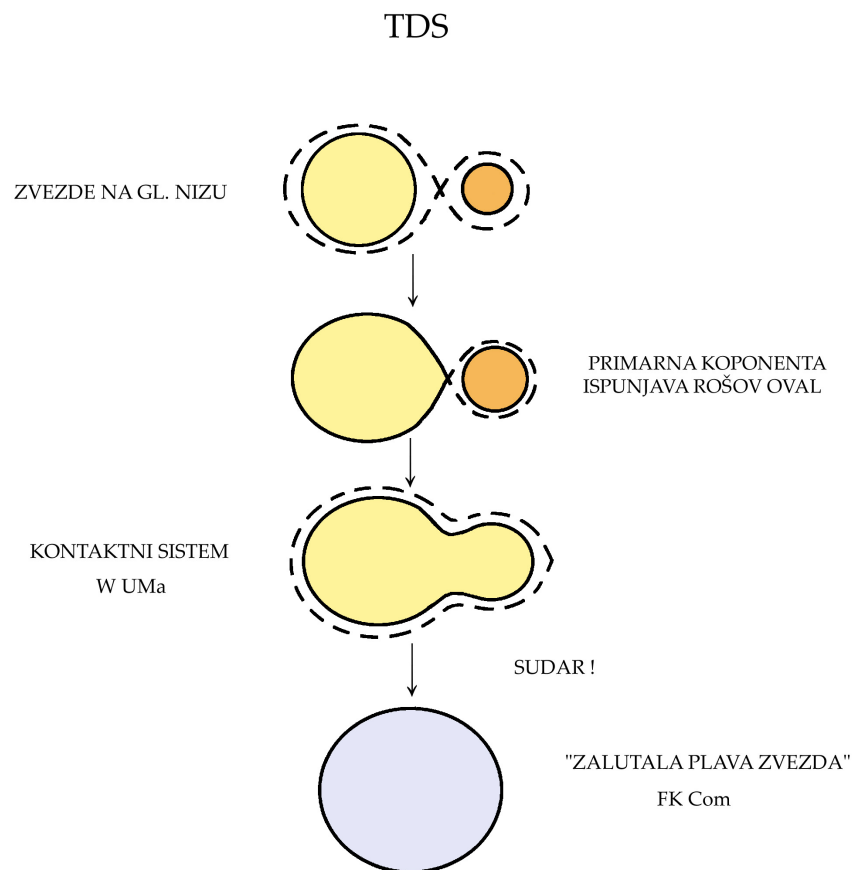
$$J_{\text{tot}} = J_{\text{orb}} + J_{\text{spin}}, \quad (122)$$

gde je orbitalni ugaoni momenat

$$J_{\text{orb}} = \mu a^2 \Omega = \frac{q \sqrt{GM^3 a}}{(1+q)^2}, \quad (123)$$

i rotacioni ugaoni momenat

$$J_{\text{spin}} = k_1^2 M_1 R_1^2 \Omega + k_2^2 M_2 R_2^2 \Omega. \quad (124)$$



Slika 7: Nastanak i moguća evolucija kontaktnih tesnih dvojnih sistema.

Rastojanje između komponenti je a , M_1 i M_2 su, redom, masa primarne i sekundarne komponente, $\mu = M_1 M_2 / M$ je redukovana, $M = M_1 + M_2$ ukupna masa, $q = M_2 / M_1 < 1$ odnos masa, $\Omega = \sqrt{GM/a^3}$ orbitalna ugaona brzina, R_1 i R_2 su srednji (zapreminski) radijusi zvezda, i k_1 i k_2 bezdimenzioni žiro-radijusi. Ako je $M_2/M_1 \ll 1$ i $R_2/R_1 < 1$ (što je u opštem slučaju tačno za TDS tipa W UMa) rotacioni ugaoni momenat sekundarne komponente možemo zanemariti. Tada za ukupni ugaoni momenat pišemo

$$J_{\text{tot}} = \frac{q \sqrt{GM^3 R_1}}{(1+q)^2} \left(\frac{a}{R_1}\right)^{1/2} \left[1 + \frac{k_1^2(1+q)}{q} \left(\frac{R_1}{a}\right)^2\right]. \quad (125)$$

Iz uslova $\frac{dJ_{\text{tot}}}{da} = 0$ za nastanak nestabilnosti lako nalazimo

$$\frac{1}{2} \left(\frac{a}{R_1}\right)^{-1/2} - \frac{3 k_1^2(1+q)}{2 q} \left(\frac{a}{R_1}\right)^{-5/2} = 0, \quad (126)$$

$$\frac{a_{\text{inst}}}{R_1} = k_1 \sqrt{\frac{3(1+q)}{q}}, \quad (127)$$

ili popularniji uslov da je $J_{\text{orb}} = 3J_{\text{spin}}$ (Counselman, 1973; Hut, 1980; Rasio, 1995). U poslednjoj jednačini a_{inst} je kritično rastojanje.

Ako iskoristimo aproksimativne analitičke izraze za poluprečnike unutrašnjeg i spoljašnjeg Rošovog ovala (Eggleton, 1983; Yakut & Eggleton, 2005),

$$\frac{R_{\text{IL1}}}{a} = \frac{0.49q^{-2/3}}{0.6q^{-2/3} + \ln(1+q^{-1/3})}, \quad (128)$$

$$\frac{R_{\text{OL1}}}{a} = \frac{0.49q^{-2/3} + 0.15}{0.6q^{-2/3} + \ln(1+q^{-1/3})}, \quad (129)$$

i kombinujemo ih sa jednačinom (127), možemo pronaći minimalni odnos masa q_{min} , pod pretpostavkom da je k_1^2 poznato. Ako uzmemo $k_1^2 \approx 0.075$ (vrednost koja se dobija za politropu indeksa $n = 3$ – potpuno radijativna zvezda sa $\Gamma_1 = 4/3$), nalazimo minimalni odnos masa $q_{\text{min}} \approx 0.085$ – 0.095 (u zavisnosti od stepena kontakta f koji će biti definisan kasnije). Sistemi sa odnosom masa manjim od vrednosti q_{min} ne bi trebalo da budu posmatrani.

Analiza podataka dobijenih spektroskopskim i fotometrijskim posmatranjima pokazuje, međutim, da postoje sistemi sa manjim vrednostima za odnos masa: V857 Her ($q = 0.065$, Qian et al., 2005, 2006), SX Crv ($q = 0.066$ – 0.079 , Rucinski et al., 2001; Zola et al., 2004), AW UMa ($q = 0.075$, Rucinski, 1992)⁶, V870 Ara ($q = 0.082$, Szalai et al., 2007). Ako želimo da

⁶Pribula i Rućinski na osnovu novih spektroskopskih posmatranja nalaze da je $q \approx 0.1$ i iznose tvrdnju da AW UMa možda i nije kontakti sistem (Pribulla & Rucinski, 2008).

teoriju dovedemo u saglasnost sa posmatranjima, jedino rešenje je da stavimo $k_1^2 < 0.075$ ($k_1^2 \approx 0.06$, Rasio, 1995; Li & Zhang, 2006). Ovo možemo objasniti time da primarne komponente nemaju dubok konvektivni omotač (u suprotnom moralo bi biti $k_1^2 > 0.075$ i k_1 težiti vrednosti za potpuno konvektivne zvezde sa $\Gamma_1 = 5/3$, tj. $n = 1.5$) i mora biti da su već blago evoluirale, tj. da se jezgro, kako se troši nuklearno gorivo, vrlo sporo sažima, dok se poluprečnik još uvek bitno ne menja, čime zvezde postaju više koncentrisane (povećava se odnos gustine u centru i srednje gustine).

4.2.2 Doprinos ugaonog momenta pratioca

Doprinos ugaonog momenta pratioca ukupnom ugaonom momentu pri analizi stabilnosti sistema tipa W UMa nedavno su razmatrali Li i Džang koristeći uslov $J_{\text{orb}} = 3J_{\text{spin}}$ (Li & Zhang, 2006). Minimalni odnos masa dobijen je pod pretpostavkom da su poluprečnici zvezda nepromenljivi i nezavisni. Ovo, međutim, nije tačno kod kontaktnih sistema gde su, u skladu sa Rošovim modelom, poluprečnici komponenti povezani, tako da je $R_2 = R_2(R_1, a, q)$. Što je još važnije, u prethodnim radovima uzeto je $k_1^2 \approx 0.06$ kako bi se najpoznatiji kontaktni sistem sa ekstremno malim odnosom masa AW UMa sa $q = 0.075$ (Rucinski, 1992) našao na granici stabilnosti (videti međutim fusnotu 6). Kako je upravo rečeno, za politropu indeksa $n = 3$ (potpuno radijativna zvezda) $k_1^2 \approx 0.075$, što znači da primarna komponenta sistema AW UMa ne može imati dubok konvektivni omotač i mora da je blago evoluirala (Rasio, 1995). Kod većine TDS tipa W UMa primarna komponenta je zvezda na glavnom nizu slična Suncu (spektralne klase od F do K, videti npr. Hilditch, 2001). Za Sunce $k_{\odot}^2 = 0.059 \approx 0.06$ (Allen, 1973) i moguće je da primarna komponenta u sistemima tipa W UMa takođe ima žiro-radijus k_1 nešto ispod vrednosti za politropu indeksa $n = 3$, ali ista vrednost za žiro-radijus ne mora biti odgovarajuća i za sekundarnu komponentu.

U ovom poglavlju izvešćemo novi kriterijum stabilnosti i minimalni odnos masa za kontaktne tesne dvojne sisteme tipa W UMa, polazeći od uslova $dJ_{\text{tot}} = 0$ i pretpostavljajući da je $R_2 = R_2(R_1, a, q)$ i $k_1^2 \neq k_2^2$ (Arbutina, 2007). U narednom poglavlju prodiskutovaćemo dobijene rezultate i uporediti ih sa posmatračkim podacima.

Orbitalni ugaoni momenat i ugaoni momenat rotacije dati su izrazima (123) i (124). Stepent kontakta kod kontaktnih tesnih dvojnih sistema definiše se kao

$$f = \frac{\Phi - \Phi_{\text{IL}}}{\Phi_{\text{OL}} - \Phi_{\text{IL}}} \approx \frac{R - R_{\text{IL}}}{R_{\text{OL}} - R_{\text{IL}}}, \quad (130)$$

gde smo pretpostavili najjednostavniju, linearnu zavisnost stepena kontakta f od srednjeg poluprečnika, što je dosta dobra aproksimacija u uskom intervalu $0 \leq f \leq 1$ (videti tabele 6 i 7 u radu Mochnacki, 1984). Srednji (zapreminski) poluprečnici unutrašnjih Rošovih ovala za primarnu i sekundarnu komponentu (Eggleton, 1983) dati su izrazima

$$\frac{R_{ILi}}{a} = \begin{cases} \frac{0.49q^{-2/3}}{0.6q^{-2/3} + \ln(1+q^{-1/3})}, & i = 1 \\ \frac{0.49q^{2/3}}{0.6q^{2/3} + \ln(1+q^{1/3})}, & i = 2, \end{cases} \quad (131)$$

dok su srednji poluprečnici za spoljašnju Rošovu površ (Yakut & Eggleton, 2005)

$$\frac{R_{OLi}}{a} = \begin{cases} \frac{0.49q^{-2/3} + 0.15}{0.6q^{-2/3} + \ln(1+q^{-1/3})}, & i = 1 \\ \frac{0.49q^{2/3} + 0.27q - 0.12q^{4/3}}{0.6q^{2/3} + \ln(1+q^{1/3})}, & i = 2. \end{cases} \quad (132)$$

Ovi poslednji su definisani kao poluprečnici sfera iste zapremine kao i tela koja se dobijaju presecanjem ekvipotencijalne površi koja prolazi kroz tačku L_2 sa ravni koja prolazi kroz tačku L_1 i normalna je na pravu koja spaja dve zvezde, tj. njihove centre.

Kako su površine komponenti u jednom kontaktnom sistemu na istom potencijalu (istom f), kombinujući jednačine (130)–(132) dobijamo

$$R_2 = P(q)a + Q(q)R_1, \quad (133)$$

gde je

$$Q(q) = \frac{R_{OL2} - R_{IL2}}{R_{OL1} - R_{IL1}}, \quad (134)$$

i

$$P(q) = \frac{R_{IL2}}{a} - Q(q)\frac{R_{IL1}}{a}. \quad (135)$$

Ukupni ugaoni momenat kontaktnog dvojnog sistema $J_{\text{tot}} = J_{\text{orb}} + J_{\text{spin}}$ sada možemo napisati kao

$$J_{\text{tot}} = \frac{q\sqrt{GM^3R_1}}{(1+q)^2} \left(\frac{a}{R_1}\right)^{1/2} \left[1 + \frac{k_1^2(1+q)}{q} \left((1+q\tilde{Q}^2) \left(\frac{R_1}{a}\right)^2 + 2q\tilde{P}\tilde{Q} \left(\frac{R_1}{a}\right) + q\tilde{P}^2 \right) \right], \quad (136)$$

gde je $\tilde{Q} = \frac{k_2}{k_1}Q$ i $\tilde{P} = \frac{k_2}{k_1}P$. Iz uslova $\frac{dJ_{\text{tot}}}{d(a/R_1)} = 0$ nakon kraćeg računa sledi

$$\frac{1}{2} \left(\frac{a}{R_1}\right)^{-1/2} \left(1 + k_1^2(1+q)\tilde{P}^2 \right) + \frac{k_1^2(1+q)}{q} \left(-\frac{3}{2}(1+q\tilde{Q}^2) \left(\frac{R_1}{a}\right)^{5/2} - q\tilde{P}\tilde{Q} \left(\frac{R_1}{a}\right)^{3/2} \right) = 0, \quad (137)$$

to jest

$$\left(\frac{q}{1+q} \frac{1}{k_1^2} + q\tilde{P}^2\right) \left(\frac{a}{R_1}\right)^2 - 2q\tilde{P}\tilde{Q} \left(\frac{a}{R_1}\right) - 3(1+q\tilde{Q}^2) = 0, \quad (138)$$

a odatle nalazimo kritično rastojanje

$$\frac{a_{\text{inst}}}{R_1} = \frac{q\tilde{P}\tilde{Q} + \sqrt{(q\tilde{P}\tilde{Q})^2 + 3(1+q\tilde{Q}^2)(q\tilde{P}^2 + \frac{q}{(1+q)k_1^2})}}{q\tilde{P}^2 + \frac{q}{(1+q)k_1^2}}. \quad (139)$$

Razmotrimo prvo dva specijalna slučaja:

(i) $\tilde{P} = \tilde{Q} = 0$

U ovom slučaju rotacioni ugaoni moment sekundarne komponente je zanemaren $k_2 \rightarrow 0$. Jednačina (139) se tada svodi na jednačinu (127) koju je dobio Rasio (1995). Kombinujući jednačinu (127) sa jednačinama (131) i (132), odnosno (128) i (129) i uzimajući sada $k_1^2 = 0.06$, dobijamo $q_{\text{min}} = 0.071\text{--}0.077$, za unutrašnji i spoljašnji Rošov oval ($f = 0\text{--}1$).

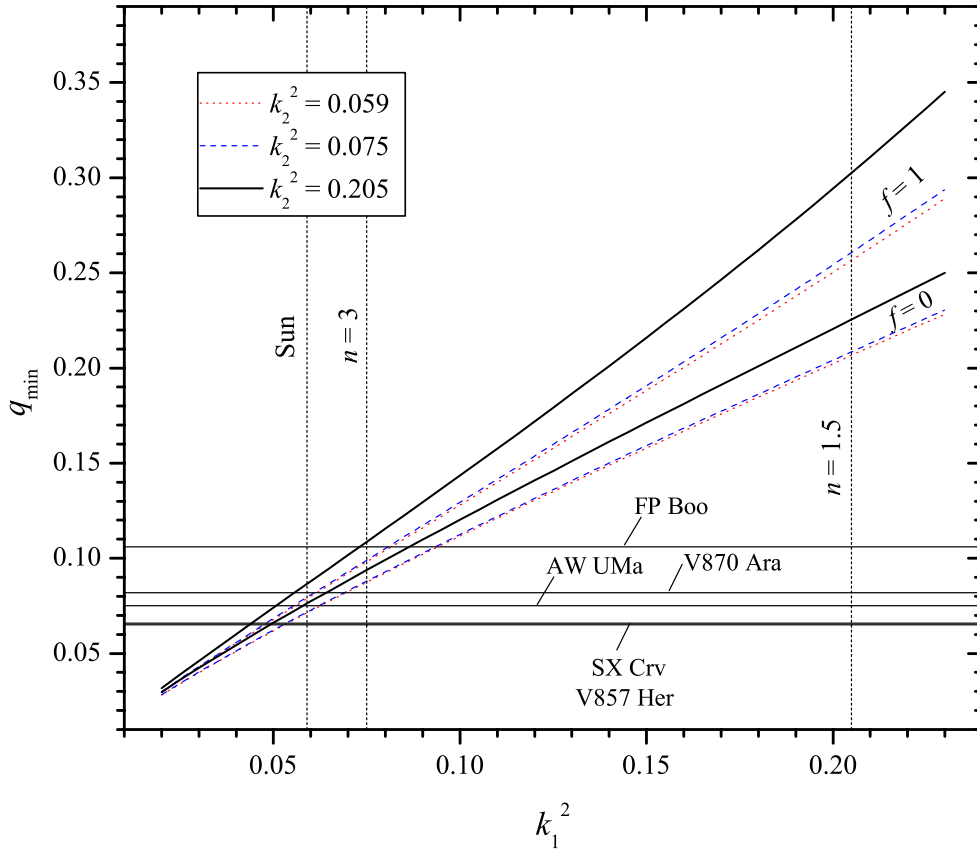
(ii) $\tilde{P} = 0, \tilde{Q} = \frac{k_2 R_2}{k_1 R_1}$

U ovom slučaju poluprečnici komponenti su tretirani kao nezavisni. Uzimajući $k_1^2 = k_2^2 = 0.06$ dobijamo $q_{\text{min}} = 0.071\text{--}0.078$ (Li & Zhang, 2006).

Ako uzmemo $k_1^2 = k_2^2 = 0.06$, kombinujemo jednačinu (139) sa jednačinama (131) i (132) i numerički rešimo dobijenu algebarsku jednačinu nalazimo $q_{\text{min}} = 0.072\text{--}0.080$. Strogo izvođenje tako ne menja drastično rezultat. Budući da je q malo sve pretpostavke i pojednostavljenja u ranijim izvođenjima su opravdana. Za potpuno radijativnu zvezdu na glavnom nizu mogli bismo, međutim, uzeti $k_1^2 \approx 0.075$. S druge strane, sekundarna komponenta u svim kontaktnim TDS sa ekstremno malim odnosom masa je zvezda male mase (videti sliku 2 u Gazeas & Niarchos, 2006), $M_2 \sim 0.1M_\odot$.⁷ Zvezdu ovako male mase realnije je opisati politropom indeksa $n = 1.5$ (potpuno konvektivna zvezda sa $\Gamma_1 = 5/3$), za koju je $k_2^2 \approx 0.205$. Sa ovako izabranim vrednostima za žiro-radijuse dobijamo teorijsku vrednost za minimalni odnos masa $q_{\text{min}} = 0.094\text{--}0.109$. Tačna vrednost zavisi od stepena kontakta f (Rasio, 1995; Rasio & Shapiro, 1995).

Ako k_1^2 ima nešto nižu vrednost od vrednosti za politropu sa indeksom $n = 3$, npr. $k_1^2 = k_\odot^2 = 0.059$, i $k_2^2 \approx 0.205$ (iako ostaje mogućnost da je

⁷Samo V776 Cas ima nešto masivniju sekundarnu komponentu, $M_2 \approx 0.2M_\odot$ (Djurašević et al., 2004).



Slika 8: Zavisnost minimalnog odnosa masa q_{\min} od bezdimenzionog žiro-radijusa k_1^2 , za kritične Rošove površi ($f = 0$ i 1) i različite vrednosti k_2^2 . Vertikalne linije predstavljaju vrednosti k_1^2 za Sunce i politrope indeksa $n = 3$ i 1.5 , dok su horizontalne linije empirijski određeni odnosi masa za zvezde FP Boo, V870 Ara, AW UMa, SX Crv i V857 Her.

i ova vrednost nešto niža budući da je sekundarna komponenta uvećana), rešavajući jednačinu (139) dobijamo $q_{\min} = 0.076\text{--}0.087$ (videti sliku 8). Ove vrednosti su *više* od teorijskih vrednosti dobijenih ranije, što čini sisteme sa ekstremno malim odnosom još teže objašnjivim.

4.2.3 Diskusija

Kontaktne sisteme sa malim odnosom masa, koji se mogu pronaći u literaturi, dati su u tabeli 3. Bar prva četiri sigurno imaju odnos masa ispod teorijske vrednosti za stabilnost, iako u nekim slučajevima standardna greška deluje suviše optimistički. Spektroskopski određen odnos masa dobija se iz odnosa amplituda krivih radijalnih brzina kod dvolinijskih spektroskopskih dvojnih zvezda. Radijalne brzine su prethodno dobijene na osnovu pomaka

Tabela 3: Kontaktne sisteme sa najmanjim odnosom masa.

Zvezda	q	Reference
V857 Her*	0.065 ± 0.001	Qian et al. (2006)
SX Crv	0.066 ± 0.003	Rucinski et al. (2001)
AW UMa	0.075 ± 0.005	Rucinski (1992)
V870 Ara	0.082 ± 0.030	Szalai et al. (2007)
FP Boo	0.106 ± 0.005	Rucinski et al. (2005)
CK Boo	0.111 ± 0.052	Rucinski & Lu (1999)
FG Hya	0.112 ± 0.004	Lu & Rucinski (1999)
GR Vir	0.122 ± 0.044	Rucinski & Lu (1999)
V776 Cas	0.130 ± 0.004	Rucinski et al. (2001)

*Navedena standardna greška pri određivanju q za V857 Her je zapravo 0.0002. Međutim, ovo je jedini sistem za koji je odnos masa određen fotometrijski.

linija u spektru korišćenjem tehnika kao što su *kros-korelacija* (videti Hilditch, 2001), ili BF (od eng. *broadening function*, Rucinski, 1999), svaka sa svojim nedostacima. Čen i saradnici (Qian et al., 2006), na primer, navode $q = 0.072$ za SX Crv, dok Zola sa saradnicima nalazi $q = 0.079$ (Zola et al., 2004). Ipak, spektroskopski određen odnos masa je neuporedivo pouzdaniji od fotometrijskog (dobijenog kroz tzv. *q-search*, kao što je npr. $q = 0.065$ za V857 Her), zbog velikog broja parametara pri modeliranju krivih sjaja.

Ako želimo da objasnimo postojanje kontaktnih TDS sa ekstremno malim odnosom masa u okvirima postojeće teorije, jedino rešenje je da uskladimo k_1^2 (i k_2^2) sa posmatranjima, što zahteva $k_1^2 < 0.075$. Ovo znači da je primarna komponenta u kontaktnim sistemima koncentrisanija od politrope indeksa $n = 3$. Jedno od mogućih rešenja je uključivanje u teoriju diferencijalne rotacije. Diferencijalna rotacija je nedavno predložena od strane Jakuta i Egltona kao mogući mehanizam prenosa termalne energije sa primarne na sekundarnu komponentu, što dovodi do izjednačavanja temperature u zajedničkom omotaču (Yakut & Eggleton, 2005). U ovom slučaju mogli bismo uslovno zameniti k_1^2 u jednačini (124) sa χk_1^2 , gde je $\chi = 1$ za rotaciju tipa krutog tela, dok je u slučaju diferencijalne rotacije $\chi < 1$ (videti Hilditch, 2001). Takođe je moguće da uključivanje drugih procesa koji se dešavaju u TDS, kao što su prenos i gubitak mase, dovede parametre u jednačinama (123) i (124) (na primer mase komponenata) u međusobnu zavisnost i zavisnost od rastojanja a . To bi zahtevalo izvođenje novog izraza za kritično rastojanje, čija primena bi mogla objasniti postojanje ovih sistema.

U oba slučaja problem možda nije tako jednostavan i moguće je da je

potrebno izmeniti i same kriterijume stabilnosti. Uslov $J_{\text{orb}} = 3J_{\text{spin}}$ za nastanak nestabilnosti sigurno ne bi bio važeći, a možda bi trebalo ponovo razmotriti čak i opštiji kriterijum $dJ_{\text{tot}} = 0$, tj. zahtev da J_{tot} ima minimum. Pitanje koje se postavlja jeste šta bi trebalo ostati konstantno duž krive $J_{\text{tot}} = J_{\text{tot}}(a)$ koja predstavlja niz ravnotežnih stanja sistema. Detaljna diskusija ovog problema u slučaju kompresovanih Rimanovih elipsoida⁸ može se pronaći u radovima Laja, Rasija i Šapira (Lai, Rasio & Shapiro, 1993, 1994a,b). Na primer, budući da viskozne sile očuvavaju ugaoni momenat, evolucija dvojnog sistema odvijace se duž krive $J_{\text{tot}} = \text{const.}$ (ovo je dobar opis evolucije pre postizanja sinhronizacije). S druge strane, ako sistem gubi ugaoni momenat, na primer gravitacionim zračenjem, ostaje očuvana cirkulacija fluida $\mathcal{C} = \oint \mathbf{v} d\mathbf{l}$ i evolucija će se odvijati duž krive $\mathcal{C} = \text{const.}$ Kod kontaktnih dvojnih sistema pozne spektralne klase, sistem verovatno gubi ugaoni momenat magnetnim vetrom (Stepień, 2006), ali gravitaciono zračenje je svakako značajno kod kompaktnih sistema (videti poglavlje 5). Nastanak nestabilnosti će zavistiti od toga šta pokreće evoluciju, npr. gubitak ugaonog momenta ili disipacija delovanjem viskoznih sila. U kontaktnim tesnim dvojnim sistemima postoje i razne druge mogućnosti, uključujući prenos i gubitak mase.

4.3 Moguće rešenje problema tesnih dvojnih sistema tipa W UMa sa ekstremno malim odnosom masa

4.3.1 Distorzija usled rotacije i prisustva pratioca – „konstanta pomeranja apsidne linije” k_{AM}

U narednim poglavljima pokušaćemo da dođemo do rešenja problema tesnih dvojnih sistema tipa W UMa sa ekstremno malim odnosom masa, nastojeći pri tome da održimo teoriju što je moguće jednostavnijom. Razmotrićemo prvo uticaj rotacije i prisustva pratioca u TDS na omotač (deformisanost), a zatim i na unutrašnjost (strukturu) primarne komponente (Arbutina, 2009). Prvo ćemo pretpostaviti da je rotacija spora, tako da nema uticaja na unutrašnjost zvezde i videti kakvu promenu u našim jednačinama (123) i (124) unosi postojanje nenultog kvadrupolnog momenta usled deformisanosti primarne komponente. Sledićemo u potpunosti pristup koji je dao Eggleton (videti Eggleton, 2006).

⁸Rimanovi elipsoidi predstavljaju idealizovana, neravnomerno rotirajuća homogena tela, kod kojih u unutrašnjosti elipsoida postoji konstantno vrtloženje, $\omega = |\nabla \times \mathbf{v}| = \text{const.}$

Kvadrupolni moment zvezde u dvojnem sistemu najpogodnije je izraziti u tenzorskom obliku, budući da mu doprinose dva efekta sa različitim osama simetrije: rotacija (Ω) i prisustvo pratioca tj. plimske sile (\mathbf{a}),

$$Q_{ij} = Q_{ij}^{\text{rot}} + Q_{ij}^{\text{comp}}. \quad (140)$$

Za kvadrupolni moment Q sa osom simetrije \mathbf{k} , tenzor kvadrupolnog momenta Q_{ij} dat je kao

$$Q_{ij} = \frac{Q}{2k^2}(3k_i k_j - k^2 \delta_{ij}). \quad (141)$$

Kvadrupolni tenzor usled rotacije je tada

$$Q_{ij}^{\text{rot}} = -\frac{\tilde{A}_1}{6G}(3\Omega_i \Omega_j - \Omega^2 \delta_{ij}), \quad (142)$$

dok je kvadrupolni tenzor usled prisustva pratioca

$$Q_{ij}^{\text{comp}} = \frac{M_2 \tilde{A}_1}{2a^5}(3a_i a_j - a^2 \delta_{ij}), \quad (143)$$

gde su $\tilde{A}_1 = \frac{R_1^5 \tilde{Q}_1}{1 - \tilde{Q}_1}$, $\tilde{Q}_1 = \frac{1}{5M_1 R_1^2 \alpha_1} \int_0^{M_1} (5\alpha + r \frac{d\alpha}{dr}) r^2 dm$, $\alpha_1 = \alpha(R_1)$. Funkcija $\alpha(r)$ dobija se kao rešenje Kleroove jednačine. Konstanta \tilde{Q} povezana je sa „konstantom pomeranja apsidne linije” $k_{\text{AM}} = \frac{1}{2} \frac{\tilde{Q}}{1 - \tilde{Q}}$ čiji naziv potiče od činjenice da se ova konstanta javlja pri razmatranju kretanja apsidne linije u dvojnim sistemima, ili, drugim rečima, pomeranja periastrona usled precesije orbite (za više detalja videti Gimenez & Garcia-Pelayo, 1982; Quataert, Kumar & Ao, 1996; Hilditch, 2001; Eggleton, 2006).⁹

U sistemu koji rotira sa primarnom komponentom, tenzor kvadrupolnog momenta je

$$Q_{ij} = \begin{bmatrix} Q_{11} & 0 & 0 \\ 0 & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{33} \end{bmatrix} \quad (144)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\tilde{A}_1 \Omega^2}{6G} + \frac{\tilde{A}_1 M_2}{a^3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\tilde{A}_1 \Omega^2}{6G} - \frac{\tilde{A}_1 M_2}{2a^3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\tilde{A}_1 \Omega^2}{3G} - \frac{\tilde{A}_1 M_2}{2a^3} \end{bmatrix}$$

dok je tenzor inercije

$$I_{ij} = \begin{bmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix} \quad (145)$$

⁹U literaturi, k_{AM} se obično obeležava sa k_2 . U ovoj tezi, međutim, indeksi 1 i 2 označavaju veličine koje se odnose na primarnu i sekundarnu komponentu, respektivno.

gde su $A = \int_0^{M_1} (y^2 + z^2) dm$, $B = \int_0^{M_1} (x^2 + z^2) dm$ i $C = \int_0^{M_1} (x^2 + y^2) dm$ glavni momenti inercije.

Kako je gravitacioni potencijal dat izrazom (uporediti sa jednačinom (52))

$$\begin{aligned}\Phi &\approx -\frac{GM_1}{r} - \frac{G\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{r}}{r^5} \\ &= -\frac{GM_1}{r} - \frac{G(Q_{11}x^2 + Q_{22}y^2 + Q_{33}z^2)}{r^5} \\ &= -\frac{GM_1}{r} - \frac{G[(B+C-2A)x^2 + (C+A-2B)y^2 + (A+B-2C)z^2]}{2r^5}\end{aligned}\quad (146)$$

na osnovu poslednje jednačine imamo

$$\begin{aligned}B + C - 2A &= 2Q_{11} \\ C + A - 2B &= 2Q_{22} \\ A + B - 2C &= 2Q_{33}\end{aligned}\quad (147)$$

Budući da je trag kvadrupolnog tenzora jednak nuli, $Q_{11} + Q_{22} + Q_{33} = 0$, ove tri jednačine nisu nezavisne i potrebno je zadati još jednu,

$$A + B + C = 3I = 2 \int_0^{M_1} r^2 dm = 3k_1^2 M_1 R_1^2, \quad (148)$$

kako bismo pronašli C :

$$C = I - \frac{2}{3}Q_{33} = k_1^2 M_1 R_1^2 + \frac{2}{3} \left(\frac{\Omega^2}{3G} + \frac{M_2}{2a^3} \right) \tilde{A}_1. \quad (149)$$

Ono što nas zapravo zanima jeste ugaoni momenat rotacije:

$$J_{\text{spin}} = C\Omega = k_1^2 M_1 R_1^2 \Omega + \frac{2}{3} \left(\frac{\Omega^2}{3G} + \frac{M_2}{2a^3} \right) \tilde{A}_1 \Omega. \quad (150)$$

Ako je kvadrupolni moment jednak nuli, tada je $C = I$ i imamo aproksimaciju koja je korišćena u jednačini (124).

Nenulti kvadrupolni moment zvezda povlači i reviziju trećeg Keplerovog zakona (Eggleton, 2006, str.128):

$$\Omega^2 = \frac{GM}{a^3} \left(1 + \frac{\tilde{A}_1 \omega_1^2}{2GM_1 a^2} + \frac{3\tilde{A}_1 M_2}{M_1 a^5} + \frac{\tilde{A}_2 \omega_2^2}{2GM_2 a^2} + \frac{3\tilde{A}_2 M_1}{M_2 a^5} + \frac{3GM}{c^2 a} \right). \quad (151)$$

Ako pretpostavimo sinhronizaciju $\omega_1 = \omega_2 = \Omega$ i zanemarimo poslednja tri člana u zagradi (doprinos sekundarne komponente i relativističku korekciju), nalazimo

$$\Omega^2 = \frac{GM}{a^3} \left(1 + \frac{3\tilde{A}_1 q}{a^5} \right) / \left[1 - \frac{\tilde{A}_1 (1+q)}{2a^5} \right]. \quad (152)$$

Ako \tilde{A}_1/a^5 posmatramo kao malu veličinu, razvojem u red dobijamo izraz

$$\Omega \approx \sqrt{\frac{GM}{a^3}} \left[1 + \frac{\tilde{A}_1(1+7q)}{4a^5} \right]. \quad (153)$$

Na kraju, za orbitalni ugaoni momenat i ugaoni momenat rotacije nalazimo

$$\begin{aligned} J_{\text{spin}} &= M_1 \sqrt{\frac{GM}{a^3}} k_1^2 R_1^2 \left(1 + k_{\text{AM}} \frac{1+7q}{2} \left(\frac{R_1}{a} \right)^5 \right) \\ &+ \frac{2}{9} M_1 \sqrt{\frac{GM}{a^3}} k_{\text{AM}} (2+5q) \frac{R_1^5}{a^3}, \end{aligned} \quad (154)$$

$$J_{\text{orb}} = M_1 \sqrt{\frac{GM}{a^3}} \frac{q}{1+q} a^2 \left(1 + k_{\text{AM}} \frac{1+7q}{2} \left(\frac{R_1}{a} \right)^5 \right). \quad (155)$$

Ukupan ugaoni momenat je zbir poslednja dva izraza:

$$\begin{aligned} J_{\text{tot}} &= M_1 R_1^2 \sqrt{\frac{GM}{R_1^3}} \left(\frac{a}{R_1} \right)^{-3/2} \left\{ k_1^2 \right. \\ &+ k_1^2 k_{\text{AM}} \frac{1+7q}{2} \left(\frac{R_1}{a} \right)^5 \\ &+ \frac{2}{9} k_{\text{AM}} (2+5q) \left(\frac{R_1}{a} \right)^3 \\ &+ \left. \frac{q}{1+q} \left(\frac{R_1}{a} \right)^{-2} \left[1 + k_{\text{AM}} \frac{1+7q}{2} \left(\frac{R_1}{a} \right)^5 \right] \right\} \\ &= M_1 R_1^2 \sqrt{\frac{GM}{R_1^3}} \left(\frac{a}{R_1} \right)^{-3/2} \left[k_1^2 \right. \\ &+ k_1^2 k_{\text{AM}} \frac{1+7q}{2} \left(\frac{R_1}{a} \right)^5 \\ &+ k_{\text{AM}} \frac{83q^2 + 37q + 8}{18(1+q)} \left(\frac{R_1}{a} \right)^3 \\ &+ \left. \frac{q}{1+q} \left(\frac{R_1}{a} \right)^{-2} \right]. \end{aligned} \quad (156)$$

Na osnovu uslova $\frac{dJ_{\text{tot}}}{d(a/R_1)} = 0$ nalazimo

$$\begin{aligned} &-\frac{3}{2} \left(\frac{a}{R_1} \right)^{-5/2} k_1^2 - \frac{13}{2} k_1^2 k_{\text{AM}} \frac{1+7q}{2} \left(\frac{R_1}{a} \right)^{15/2} \\ &-\frac{9}{2} k_{\text{AM}} \frac{83q^2 + 37q + 8}{18(1+q)} \left(\frac{R_1}{a} \right)^{11/2} + \frac{1}{2} \frac{q}{1+q} \left(\frac{a}{R_1} \right)^{-1/2} = 0, \end{aligned} \quad (157)$$

odnosno

$$k_1^2 \left(\frac{R_1}{a_{\text{inst}}} \right)^2 \left(3 + \frac{13}{2} (1 + 7q) k_{\text{AM}} \left(\frac{R_1}{a_{\text{inst}}} \right)^5 \right) + \frac{83q^2 + 37q + 8}{2(1+q)} k_{\text{AM}} \left(\frac{R_1}{a_{\text{inst}}} \right)^5 = \frac{q}{1+q}. \quad (158)$$

Kombinujući jednačinu (158) sa jednačinama (131) i (132) i numerički rešavajući dobijenu algebarsku jednačinu, uz $k_1^2 = 0.075$, $k_{\text{AM}} = 0.015$ (vrednosti za politropu indeksa $n = 3$), nalazimo $q_{\text{min}} = 0.091\text{--}0.103$, za unutrašnju i spoljašnju Rošovu površ ($f = 0\text{--}1$).

Vidimo da uključivanje u teoriju uticaja rotacije i prisustva pratioca na omotač, odnosno postojanje nenultog kvadrupolnog momenta usled distorzije primarne komponente tj. njenog odstupanja od idealnog sfernosimetričnog oblika, samo povećava vrednost za minimalni odnos masa. Ako želimo da dobijemo manje vrednosti za q_{min} jedini način je da dobijemo $k_1^2 < 0.075$ što zahteva veću koncentrisanost zvezde (manji odnos $\langle \rho \rangle / \rho_c$). U narednom poglavlju razmotrićemo uticaj rotacije i prisustva pratioca na unutrašnjost zvezde i pokazati da se veća koncentrisanost dobija prirodno pri razmatranju strukture rotirajućih politropa.

4.3.2 Struktura rotirajuće politrope i bezdimenzioni žiro-radijus k_1

Razmotrimo politropu indeksa n koja se nalazi u hidrostatičkoj ravnoteži u sopstvenom sistemu reference koji rotira konstantnom ugaonom brzinom Ω . Jednačine strukture su

$$\rho \nabla \Phi_{\text{eff}} = -\nabla P, \quad (159)$$

$$\Delta \Phi_{\text{eff}} = 4\pi G \rho - 2\Omega^2, \quad (160)$$

$$P = K \rho^{1+1/n}, \quad (161)$$

gde oznake imaju svoje standardno značenje: ρ je gustina, P pritisak i $\Phi_{\text{eff}} = \Phi - \frac{1}{2}\Omega^2 \varrho^2 - \frac{GM_2}{r_2}$ efektivni gravitacioni potencijal. Pretpostavićemo da je ugaona brzina Ω data u keplerovskom obliku $\Omega = \sqrt{GM/a^3}$. Doprinos sekundarne komponente – član $\frac{GM_2}{r_2}$ se ne pojavljuje eksplicitno u jednačini (160) budući da je laplasijan $\Delta \left(\frac{GM_2}{r_2} \right) \equiv 0$.

Neka je $V = V(\Phi_{\text{eff}})$ zapremina obuhvaćena ekvipotencijalnom površi Φ_{eff} , i neka je R srednji radijus definisan tako da je

$$\frac{4\pi}{3} R^3 = V. \quad (162)$$

Gustina je data standardnim izrazom

$$\rho = \frac{dm}{dV}. \quad (163)$$

Kako je $\Phi_{\text{eff}} = \Phi_{\text{eff}}(R)$ i $\rho = \rho(R)$, jednačina (160) se može zapisati kao

$$\frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \Phi_{\text{eff}}}{\partial R} \right) = 4\pi G \rho - 2\Omega^2 \quad (164)$$

gde su h_1, h_2 and h_3 Laméovi koeficijenti koji se pojavljuju u metrici $ds^2 = h_1^2 dR^2 + h_2^2 d\vartheta^2 + h_3^2 d\varphi^2$.¹⁰

Integraljenjem jednačine (164) imamo

$$\begin{aligned} & \int_V \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \Phi_{\text{eff}}}{\partial R} \right) dR d\vartheta d\varphi \\ &= 4\pi G \int_V \rho h_1 h_2 h_3 dR d\vartheta d\varphi - 2\Omega^2 \int_V h_1 h_2 h_3 dR d\vartheta d\varphi, \end{aligned} \quad (165)$$

$$\oint_S \frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \Phi_{\text{eff}}}{\partial R} dS = 4\pi G \int_V \rho dV - 2\Omega^2 \int_V dV, \quad (166)$$

$$4\pi R^2 \frac{d\Phi_{\text{eff}}}{dR} \approx 4\pi G m(R) - 2\Omega^2 V(R), \quad (167)$$

gde smo iskoristili Gausovu teoremu pri prelasku sa jednačine (165) na jednačinu (166).

Na osnovu jednačina (161), (162), (163) i (167) konačno dobijamo (Eggleton, 2006, str.119)

$$-\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dR} = \frac{d\Phi_{\text{eff}}}{dR} \approx \frac{Gm}{R^2} - \frac{2}{3} \Omega^2 R, \quad (168)$$

$$\frac{dm}{dR} = 4\pi R^2 \rho, \quad (169)$$

$$P = K \rho^{1+1/n}. \quad (170)$$

Dakle, u prvoj aproksimaciji, možemo da rešavamo jednačine (159)–(161), ili (168)–(170), u „sfernoj simetriji”, imajući na umu da R nije radijalna koordinata, već srednji (zapreminski) radijus deformisane politrope!

¹⁰Promenljive ϑ i φ nisu standardni polarni i azimutalni ugao, θ i ϕ , budući da ni R nije radijalna koordinata r (nemamo sfernu simetriju).

Kombinujući jednačine (159)–(161) dobijamo modifikovanu Lejn-Emdenovu jednačinu

$$\frac{1}{\Xi^2} \frac{d}{d\Xi} \left(\Xi^2 \frac{d\Theta}{d\Xi} \right) = -\Theta^n + v, \quad (171)$$

gde je $\Theta^n = \rho/\rho_c$, $\Xi = R/l$, $l^2 = \frac{K(n+1)}{4\pi G} \rho_c^{1/n-1}$ i $v = \frac{\Omega^2}{2\pi G \rho_c}$. Ukupnu masu konfiguracije nalazimo kao (uporediti sa jednačinom (85))

$$\begin{aligned} M_1 &= 4\pi l^3 \rho_c \int_0^{\Xi_1} \Xi^2 \Theta^n d\Xi \\ &= 4\pi l^3 \rho_c \left(-\Xi_1^2 \frac{d\Theta}{d\Xi} \Big|_{\Xi=\Xi_1} + v \frac{\Xi_1^3}{3} \right) \\ &= 4\pi l^3 \rho_c \left[-\Xi_1^2 \frac{d\Theta}{d\Xi} \Big|_{\Xi=\Xi_1} + \frac{M_1(1+q)}{6\pi l^3 \rho_c} \left(\frac{R_1}{a} \right)^3 \right], \end{aligned} \quad (172)$$

tj. imamo

$$\frac{M_1}{4\pi l^3 \rho_c} = -\frac{\Xi_1^2 \frac{d\Theta}{d\Xi} \Big|_{\Xi=\Xi_1}}{1 - \frac{2}{3}(1+q)(R_1/a)^3}, \quad (173)$$

gde je $\Xi_1 = R_1/l$ i

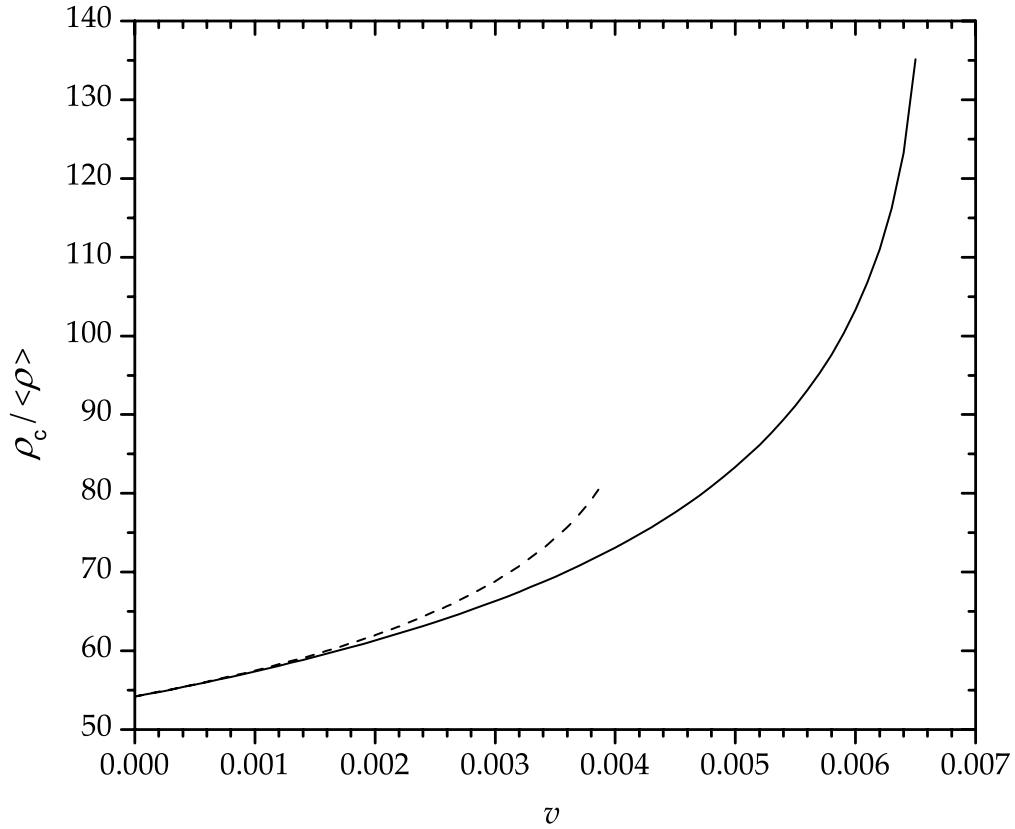
$$\begin{aligned} v &= \frac{M_1(1+q)}{2\pi l^3 \rho_c} \left(\frac{R_1}{a} \right)^3 \frac{1}{\Xi_1^3} \\ &= -\frac{2(1+q)(R_1/a)^3}{1 - \frac{2}{3}(1+q)(R_1/a)^3} \frac{1}{\Xi_1} \frac{d\Theta}{d\Xi} \Big|_{\Xi=\Xi_1}. \end{aligned} \quad (174)$$

Na osnovu jednačina (173) i (174) nalazimo odnos srednje i gustine u centru

$$\begin{aligned} \frac{\langle \rho \rangle}{\rho_c} &= -\frac{\frac{3}{\Xi_1} \frac{d\Theta}{d\Xi} \Big|_{\Xi=\Xi_1}}{1 - \frac{2}{3}(1+q)(R_1/a)^3} \\ &= -\frac{3}{\Xi_1} \frac{d\Theta}{d\Xi} \Big|_{\Xi=\Xi_1} + v \\ &= \frac{3v}{2(1+q)(R_1/a)^3}. \end{aligned} \quad (175)$$

Slično, na osnovu

$$\begin{aligned} J_{\text{spin}} &\approx \frac{8\pi}{3} \Omega \int_0^{R_1} R^4 \rho(R) dR \\ &= \frac{8\pi}{3} \Omega l^5 \rho_c \int_0^{\Xi_1} \Xi^4 \Theta^n d\Xi = k_1^2 M_1 R_1^2 \Omega \end{aligned} \quad (176)$$



Slika 9: Poređenje naših rezultata za $\rho_c / \langle \rho \rangle$ kao funkcije od v (puna kriva) sa rezultatima dobijenim za osnosimetrični politropski model sa indeksom $n = 3$ (James, 1964, isprekidana kriva).

nalazimo bezdimenzioni žiro-radijus (videti jednačinu (88))

$$\begin{aligned}
 k_1^2 &= -\frac{2}{3} \frac{1 - \frac{2}{3}(1+q)(R_1/a)^3}{\Xi_1^4 \frac{d\Theta}{d\Xi} \Big|_{\Xi=\Xi_1}} \int_0^{\Xi_1} \Xi^4 \Theta^n d\Xi \\
 &= -\frac{2}{3} \frac{\int_0^{\Xi_1} \Xi^4 \Theta^n d\Xi}{\Xi_1^4 \left(\frac{d\Theta}{d\Xi} \Big|_{\Xi=\Xi_1} - \frac{v}{3} \Xi_1 \right)}. \tag{177}
 \end{aligned}$$

Da bismo našli zavisnost odnosa gustine u centru i srednje gustine $\rho_c / \langle \rho \rangle$, i bezdimenzionog žiro-radijusa k_1^2 , od odnosa masa q i rastojanja a moramo rešiti jednačinu (171) za zadato v (videti dodatak A). Na slici 9 uporedili smo naše rezultate za $\rho_c / \langle \rho \rangle$ kao funkcije v (za $v = 0 - 0.0065$, $n = 3$), sa rezultatima dobijenim za osnosimetrični politropski model (James, 1964; Tassoul, 1978). Slaganje dva modela je dosta dobro čak i kada primarna komponenta u TDS sa malim odnosom masa ispunjava Rošov oval ($v \approx 0.002$,

videti tabelu 4).¹¹ Naravno, naša zvezda nije osnosimetrična, tako da i ne očekujemo potpuno slaganje, a osim toga ne očekujemo da je naš model ispravan za veliko v (gde je fizički besmislen).

Kada je u pitanju naš problem, interesuje nas, pre svega, bezdimenzioni žiro-radijus. Pogodnije je da nađemo k_1^2 kao funkciju od $u = -v\Xi_1(\frac{d\Theta}{d\Xi}|_{\Xi=\Xi_1})^{-1}$ (videti jednačinu (174)), pre nego kao funkciju od v . Rezultati su prikazani na slici 10. Nastojali smo da aproksimiramo numeričke podatke analitičkom funkcijom, što je moguće jednostavnijeg oblika. Konačan izraz je:

$$k_1^2 = \frac{0.01593 u + 0.07536}{0.39819 u + 1}. \quad (178)$$

Kvalitet fita je $r^2=0.99$.

Sada kada nam je poznata struktura zvezde $\rho = \rho(R)$ možemo rešiti i Kleroovu jednačinu (u nešto izmenjenom obliku, Eggleton, 2006, videti dodatak B) kako bi uračunali uticaj deformisanosti zvezde,

$$\frac{d^2\alpha}{dR^2} - \frac{6\alpha}{R^2} + \frac{2R(G\frac{dm}{dR} - 2\Omega^2 R^2)}{Gm - \frac{2}{3}\Omega^2 R^3} \left(\frac{1}{R} \frac{d\alpha}{dR} + \frac{\alpha}{R^2} \right) = 0, \quad (179)$$

gde je $r \approx R[1 - \alpha(R)P_2(\cos\theta) - \alpha(R)P_2(\cos\theta')]$, P_2 je Ležandrov polinom $P_2(\mu) = \frac{1}{2}(3\mu^2 - 1)$; ugao θ meri se u odnosu na osu rotacije, dok se ugao θ' meri od linije koja spaja zvezde, tj. njihove centre. Nakon sređivanja, jednačina (179) u našoj notaciji glasi

$$\frac{d^2\alpha}{d\Xi^2} - \frac{6\alpha}{\Xi^2} - \frac{2\Xi(\Theta^n - v)}{d\Theta/d\Xi} \left(\frac{1}{\Xi} \frac{d\alpha}{d\Xi} + \frac{\alpha}{\Xi^2} \right) = 0. \quad (180)$$

Konstanta \tilde{Q} je konačno

$$\begin{aligned} \tilde{Q} &= \frac{4\pi}{5M_1 R_1^2 \alpha_1} \int_0^{R_1} (5\alpha + R \frac{d\alpha}{dR}) R^4 \rho(R) dR \\ &= \frac{1}{5} \frac{\int_0^{\Xi_1} (5\alpha + \Xi \frac{d\alpha}{d\Xi}) \Xi^4 \Theta^n d\Xi}{\Xi_1^4 (\frac{d\Theta}{d\Xi}|_{\Xi=\Xi_1} - \frac{v}{3}\Xi_1) \alpha_1}. \end{aligned} \quad (181)$$

Na kraju, možemo naći „konstantu pomeranja apsidne linije” kao funkciju v : $k_{AM} = \frac{1}{2} \frac{\tilde{Q}}{1-\tilde{Q}} = k_{AM}(v)$, ili bolje $k_{AM} = k_{AM}(k_1^2)$, budući da nam je već poznata funkcionalna zavisnost k_1^2 od v . Rezultati su prikazani na slici 11. Kroz podatke je provučena parabola. Kvalitet fita r^2 je skoro 1.

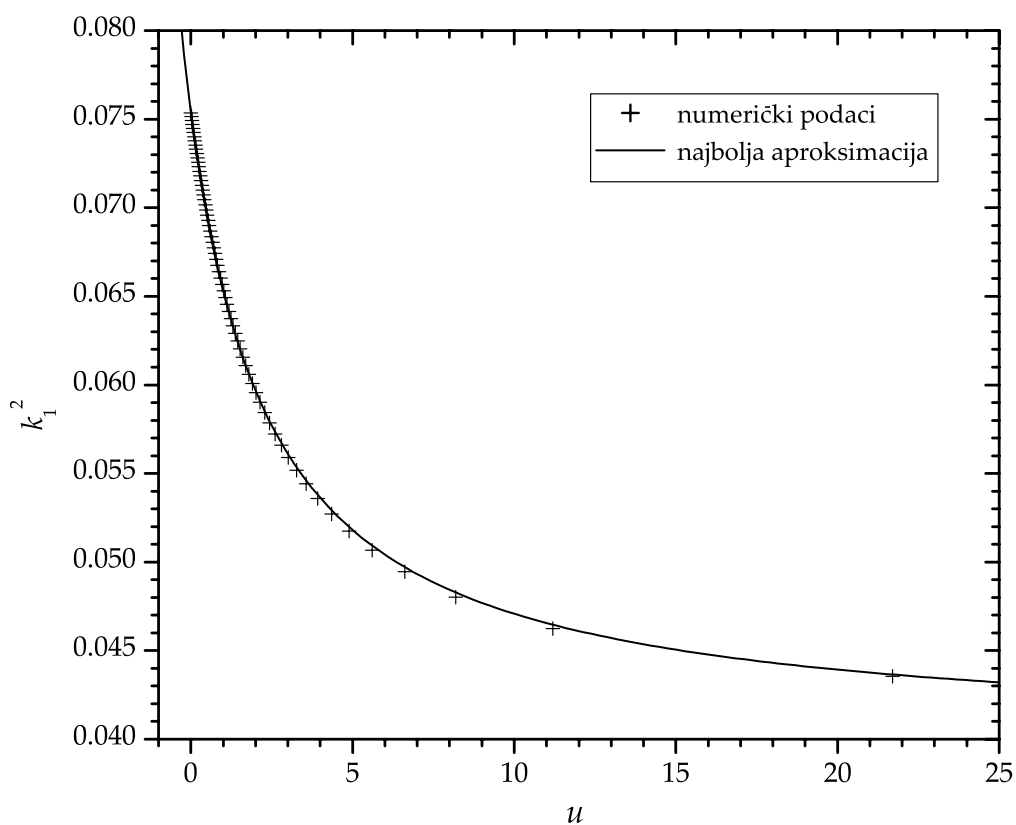
¹¹Podaci u tabeli 4 odnose se na primarnu komponentu ($n = 3$), dok se podaci u tabeli 5 odnose na sekundarnu komponentu ($n = 1.5$).

Tabela 4: Podaci dobijeni rešavanjem jednačine (171) za indeks politrope $n = 3$ i zadato R_1/a i q . Srednji poluprečnici za unutrašnju i spoljašnju Rošovu površ, R_{IL1}/a i R_{OL1}/a , izračunati su za dato q na osnovu izraza (131) i (132).

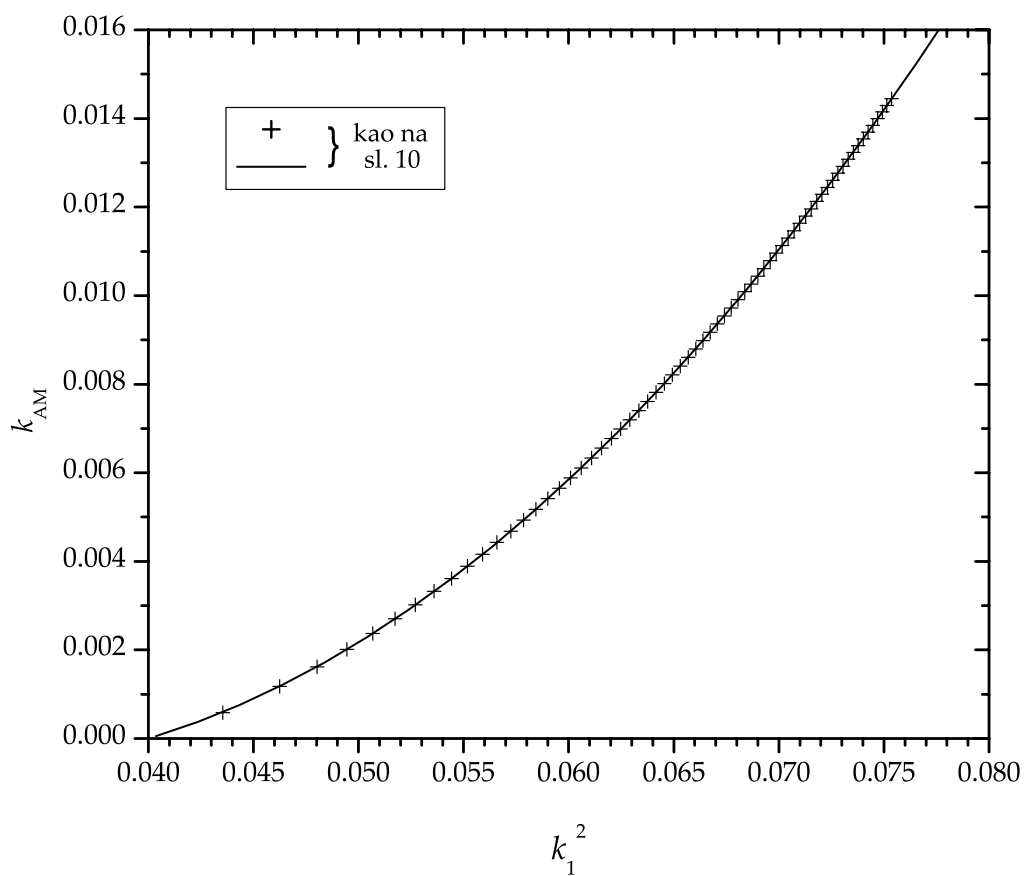
q	R_1/a	Ξ_1	$(d\Theta/d\xi) _{\xi=\Xi_1}$	v	k_1^2	$\rho_c/(\rho)$
0	0	6.8968	-0.04243	0	0.07536	54.18
0.1	0.1	6.8987	-0.04238	1.3525E-05	0.07533	54.22
0.2	0.1	6.8988	-0.04238	1.4754E-05	0.07533	54.22
0.5	0.1	6.8993	-0.04236	1.8439E-05	0.07532	54.23
1	0.1	6.9002	-0.04234	2.4576E-05	0.07530	54.25
0.1	0.2	6.9117	-0.04203	0.00010765	0.07512	54.50
0.2	0.2	6.9131	-0.04199	0.00011737	0.07510	54.53
0.5	0.2	6.9172	-0.04188	0.00014648	0.07504	54.61
1	0.2	6.9240	-0.04170	0.00019479	0.07493	54.76
0.1	$R_{IL1}/a = 0.578$	7.2683	-0.03326	0.00226710	0.06968	62.52
0.2	$R_{IL1}/a = 0.521$	7.1913	-0.03503	0.00186101	0.07083	60.71
0.5	$R_{IL1}/a = 0.440$	7.1173	-0.03678	0.00144354	0.07194	59.01
1	$R_{IL1}/a = 0.379$	7.0841	-0.03759	0.00124505	0.07245	58.26
0.1	$R_{OL1}/a = 0.616$	7.3497	-0.03147	0.00266247	0.06849	64.48
0.2	$R_{OL1}/a = 0.575$	7.2969	-0.03262	0.00240986	0.06926	63.20
0.5	$R_{OL1}/a = 0.525$	7.2760	-0.03309	0.00230600	0.06957	62.70
1	$R_{OL1}/a = 0.495$	7.3223	-0.03207	0.00253302	0.06889	63.81

Tabela 5: Podaci dobijeni rešavanjem jednačine (171) za politropu indeksa $n = 1.5$ i zadato R_1/a i q . Srednji poluprečnici za unutrašnjju i spoljašnjju Rošovu površ, R_{II1}/a i R_{OI1}/a , izračunati su za dato q na osnovu izraza (131) i (132).

q	R_1/a	Ξ_1	$(d\Theta/dE) _{\Xi=\Xi_1}$	v	k_1^2	$\rho_c/\langle\rho\rangle$
0	0	3.6538	-0.20330	0	0.20460	5.99
0.1	0.1	3.6615	-0.20166	0.001220597	0.20436	6.01
0.5	0.1	3.6558	-0.20286	0.000333606	0.20454	6.00
1	0.1	3.6551	-0.20301	0.000222462	0.20456	5.99
0.1	$R_{II1}/a = 0.207$	3.7242	-0.18866	0.010535460	0.20677	6.15
0.5	$R_{II1}/a = 0.321$	3.7255	-0.18839	0.010723593	0.20230	6.16
1	$R_{II1}/a = 0.379$	3.7328	-0.18691	0.011749132	0.20206	6.17
0.1	$R_{OI1}/a = 0.249$	3.7785	-0.17776	0.017956665	0.20055	6.29
0.5	$R_{OI1}/a = 0.412$	3.8093	-0.17171	0.021914972	0.19951	6.36
1	$R_{OI1}/a = 0.495$	3.8354	-0.16667	0.025135173	0.19861	6.43



Slika 10: Bezdimenzioni žiro-radijus k_1^2 kao funkcija promenljive $u = -v\Xi_1 \left(\frac{d\Theta}{d\xi} \Big|_{\xi=\xi_1} \right)^{-1}$. Krstovi predstavljaju numeričke podatke, dok kriva predstavlja najbolju aproksimaciju (videti tekst).



Slika 11: „Konstanta pomeranja linije apsida” k_{AM} kao funkcija bezdimenzionog žiro-radijusa k_1^2 . Krstovi predstavljaju numeričke podatke, dok „parabola” (ili bikvadratna funkcija, u zavisnosti od toga smatramo li k_1^2 ili k_1 nezavisnom promenljivom) predstavlja najbolju aproksimaciju: $k_{AM} = 7.563 k_1^4 - 0.4644 k_1^2 + 0.0065$.

4.3.3 Rezultati

Da bismo našli novi kriterijum stabilnosti, odnosno kritično rastojanje, potrebni su nam izrazi za orbitalni i ugaoni momenat rotacije, tj. ukupni ugaoni momenat. Oni su ponovo dati jednačinama (154)–(156), samo što su sada bezdimenzioni žiro-radijus i „konstanta pomeranja linije apsida” funkcije a i q : $k_1^2 = k_1^2(a/R_1, q)$ i $k_{AM} = k_{AM}(a/R_1, q)$. Kombinujući jednačine (174) i (178) nalazimo

$$k_1^2 = \frac{0.07536(a/R_1)^3 - 0.0184(1+q)}{(a/R_1)^3 + 0.1297(1+q)}, \quad (182)$$

$$\frac{dk_1^2}{d(a/R_1)} = \frac{0.0845(1+q)(a/R_1)^2}{[(a/R_1)^3 + 0.1297(1+q)]^2}, \quad (183)$$

dok je

$$k_{AM} = 7.563 k_1^4 - 0.4644 k_1^2 + 0.0065. \quad (184)$$

Uslov $\frac{dJ_{\text{tot}}}{d(a/R_1)} = 0$ (videti jednačinu (156)), nakon nešto dužeg računa i sređivanja glasi

$$\begin{aligned} & -\frac{3}{2} \left(\frac{a}{R_1}\right)^{-5/2} k_1^2 + \left(\frac{a}{R_1}\right)^{-3/2} \frac{dk_1^2}{d(a/R_1)} - \frac{13}{2} k_1^2 k_{AM} \frac{1+7q}{2} \left(\frac{a}{R_1}\right)^{-15/2} \\ & + \frac{1+7q}{2} \left(\frac{a}{R_1}\right)^{-13/2} \left(k_1^2 \frac{dk_{AM}}{dk_1^2} + k_{AM}\right) \frac{dk_1^2}{d(a/R_1)} - \frac{9}{2} \frac{83q^2+37q+8}{18(1+q)} \left(\frac{a}{R_1}\right)^{-11/2} k_{AM} \\ & + \frac{83q^2+37q+8}{18(1+q)} \left(\frac{a}{R_1}\right)^{-9/2} \frac{dk_{AM}}{dk_1^2} \frac{dk_1^2}{d(a/R_1)} + \frac{1}{2} \frac{q}{1+q} \left(\frac{a}{R_1}\right)^{-1/2} = 0, \end{aligned} \quad (185)$$

a odatle dobijamo

$$\begin{aligned} & k_1^2 \left[3 + \frac{13}{2} (1+7q) k_{AM} \left(\frac{R_1}{a_{\text{inst}}}\right)^5 \right] - 2 \left(\frac{a_{\text{inst}}}{R_1}\right) \frac{dk_1^2}{d(a/R_1)} \Big|_{a=a_{\text{inst}}} \\ & - (1+7q) \left(\frac{R_1}{a_{\text{inst}}}\right)^4 \left(k_1^2 \frac{dk_{AM}}{dk_1^2} \Big|_{a=a_{\text{inst}}} + k_{AM} \right) \frac{dk_1^2}{d(a/R_1)} \Big|_{a=a_{\text{inst}}} \\ & - \frac{83q^2+37q+8}{9(1+q)} \left(\frac{R_1}{a_{\text{inst}}}\right)^2 \frac{dk_{AM}}{dk_1^2} \cdot \frac{dk_1^2}{d(a/R_1)} \Big|_{a=a_{\text{inst}}} \\ & + \frac{83q^2+37q+8}{2(1+q)} k_{AM} \left(\frac{R_1}{a_{\text{inst}}}\right)^3 = \frac{q}{1+q} \left(\frac{a_{\text{inst}}}{R_1}\right)^2. \end{aligned} \quad (186)$$

Poslednja jednačina predstavlja uopštenje jednačine (127), odnosno jednačine (158). Ako pretpostavimo:

- (i) $\frac{dk_1^2}{da} = 0$ i $\frac{dk_{AM}}{da} = 0$, dobijamo jednačinu (158), na osnovu koje, uz $k_{AM} \approx 0.015$ i $k_1^2 = 0.075$, imamo $q_{\text{min}} = 0.091\text{--}0.103$; a ako je uz to

Tabela 6: Odnos masa q i stepen kontakta f za odabrane sisteme, dobijeni na osnovu kombinovane analize spektroskopskih i fotometrijskih posmatranja.

Zvezda	q	f	Reference
V857 Her [†]	0.065	0.84	Qian et al. (2006)
AW UMa [‡]	0.075	0.9?	Rucinski (1992)
SX Crv	0.079	0.27	Zola et al. (2004)
V870 Ara	0.082	0.96	Szalai et al. (2007)
FP Boo	0.096	0.38	Gazeas et al. (2006)
GSC 619-232 [†]	0.104	0.93	Qian et al. (2006)
CK Boo	0.106	0.91	Gazeas et al. (2006)
FG Hya	0.112	0.86	Qian et al. (2006)
GR Vir	0.124	0.79	Yakut & Eggleton (2005)
ϵ CrA	0.128	0.30	Yakut & Eggleton (2005)
V776 Cas	0.130	0.4?	Djurašević et al. (2004)
V410 Aur	0.137	0.72	Gazeas et al. (2006)
TV Mus	0.138	0.13	Yakut & Eggleton (2005)

[†]Odnos masa je određen fotometrijski.

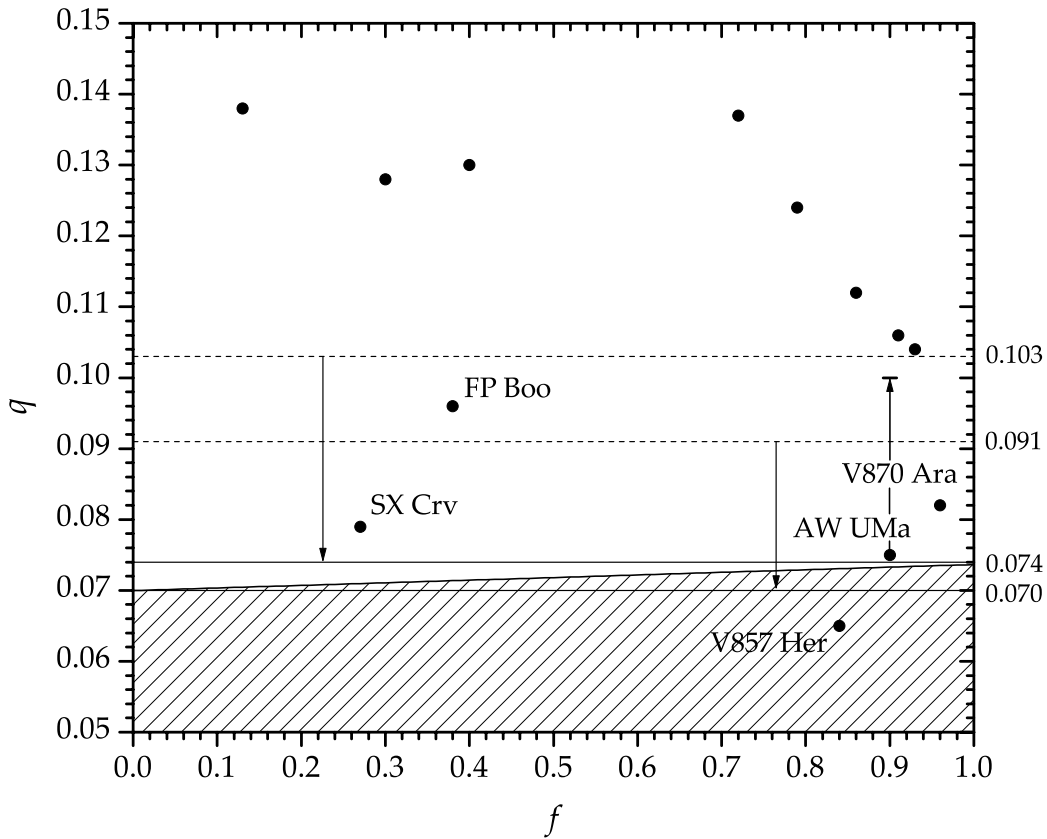
[‡]Pribula i Ručinski nalaze veći odnos masa $q \approx 0.1$ i ukazuju na mogućnost da AW UMa nije kontaktni sistem (Pribulla & Rucinski, 2008).

- (ii) $k_{AM} = 0$ ($k_1^2 = 0.075$) dobijamo jednačinu (127) na osnovu koje imamo $q_{\min} = 0.085\text{--}0.095$.

Kombinovanjem jednačine (186) sa jednačinama (182)–(184) i (128)–(129), i numeričkim rešavanjem dobijene jednačine, nalazimo $q_{\min} = 0.070\text{--}0.074$ za stepen kontakta $f = 0\text{--}1$. Ove vrednosti su znatno *niže* od prethodno dobijenih.

Minimalni odnos masa q_{\min} bi mogao imati nešto višu vrednost ako bismo u analizu uključili doprinos sekundarne komponente rotacionom ugaonom momentu J_{spin} (tj. ako bismo pretpostavili $R_2 = R_2(R_1, a, q)$ – videti poglavlje 4.2.2, iako je verovatno da se i poluprečnik primarne komponente sporo menja $R_1 = R_1(a)$), ali bi isto tako mogao biti niži ako bi uzeli u obzir evolutivni status zvezde (Rucinski, 2001), tj. ako su $\rho_c/\langle\rho\rangle$ i k_1^2 , a samim tim i q_{\min} , niži zato što je zvezda nuklearno evoluirala (više koncentrisana od politrope indeksa $n = 3$). Na primer, za Sunce, koje ne rotira tako brzo, imali smo $k_{\odot}^2 = 0.059$ (Allen, 1973). Bezdimenzioni žiro-radius bi takođe mogao biti efektivno niži ako bismo uzeli u obzir diferencijalnu rotaciju (videti poglavlje 4.2.3).

Kako bi uporedili dobijene teorijske rezultate sa posmatranjima, u tabeli 6



Slika 12: Zavisnost $q - f$ za kontaktne tesne dvojne sisteme sa ekstremno malim odnosom masa. Tačke predstavljaju dvojne zvezde, isprekidana linija su prethodno dobijene vrednosti za q_{\min} za $f = 0$ i $f = 1$, dok su pune linije nove vrednosti dobijene na osnovu analize strukture rotirajuće politrope. Strelice pokazuju za koliko se spustila vrednost za q_{\min} u odnosu na pređašnje, kao i moguću novu vrednost q za sistem AW UMa.

prikupili smo podatke za odnos masa q i stepen kontakta f za kontaktne TDS sa ekstremno malim odnosom masa, dobijene na osnovu kombinovane analize spektroskopskih i fotometrijskih posmatranja. Svi ovi sistemi su prikazani na slici 12. Nije uključen sistem TZ Boo za koji Pribula i saradnici nalaze znatno veći odnos masa (videti Pribulla et al., 2008) od prvobitno određenog (McLean & Hilditch, 1983). Takođe, za sada smo uključili verovatno najpoznatiji kontaktni TDS tipa W UMa sa ekstremno malim odnosom masa, AW UMa (Paczyński, Sienkiewicz & Szczygiel, 2007), iako Pribula i Ručinski na osnovu novih spektroskopskih posmatranja nalaze da je odnos masa nešto veći, $q \approx 0.1$, i iznose tvrdnju da AW UMa na kraju možda i nije kontaktni sistem (Pribulla & Rucinski, 2008).

Ako pretpostavimo da je zavisnost stepena kontakta od srednjeg radi-

jusa¹² data kao

$$f = \frac{\Phi_{\text{eff}} - \Phi_{\text{IL}}}{\Phi_{\text{OL}} - \Phi_{\text{IL}}} \approx \frac{1/R - 1/R_{\text{IL}}}{1/R_{\text{OL}} - 1/R_{\text{IL}}}, \quad (187)$$

možemo rešiti jednačinu (186) za zadato f , i dobiti relaciju $q_{\text{min}} - f$ (slika 12).

Za sisteme sa odnosom masa manjim od $q_{\text{min}} = q_{\text{min}}(f)$, sistem će lakše pohraniti ugaoni momenat u jednu zvezdu, nego u dvojni sistem sa ekstremno malim odnosom masa, tako da će se komponente relativno brzo, za 10^3 – 10^4 godina (Rasio, 1995) spojiti u jednu brzo rotirajuću zvezdu (poput zvezda tipa FK Com ili „zalutalih” plavih zvezda), što znači da takvi sistemi neće biti posmatrani. Jedini sistem koji nalazimo u „zabranjenoj zoni” je V857 Her (Qian et al., 2006) za koji je odnos masa određen fotometrijski. Iako se u literaturi navode različite vrednosti za spektroskopski određen odnos masa (npr. SX Crv, Rucinski et al., 2001; Zola et al., 2004, uporediti tabele 3 i 6), ovako određen odnos masa je daleko pouzdaniji nego odnos masa određen fotometrijski, na osnovu modeliranja krivih sjaja (videti diskusiju u poglavlju 4.2.3). Da bi razrešili ovo pitanje moraćemo sačekati nova posmatranja. Ako bi ovako mali odnos masa za V857 Her bio potvrđen i sistem jeste stabilan, ostaje mogućnost da je primarna komponenta nuklearno evoluirala i da je stoga više koncentrisana. Kako god bilo, ovaj sistem zahteva posebnu pažnju.

4.3.4 Zaključak

Kao što smo videli u uvodu datom u poglavlju 4.2.1, ranija teorijska istraživanja koja su se bavila uslovima stabilnosti kontaktnih TDS tipa W UMa, i sa ovim pitanjem povezanim minimalnim odnosa masa, daju $q_{\text{min}} = 0.085 - 0.095$, iako su posmatrani sistemi sa manjim odnosom masa. Osnovni zadatak ove disertacije jeste izvođenje nove teorijske vrednosti za minimalni odnos masa, pri čemu smo nastojali da teorija ostane što je moguće jednostavnija.

U prethodnim poglavljima (4.3.1, 4.3.2 i 4.3.3) razmatrali smo uticaj rotacije i prisustva pratioca (plimsko dejstvo) na zvezde u TDS, i na koji način se ovaj uticaj odražava na problem stabilnosti i minimalni odnos masa.

¹²Jakut i Eglton su prepostavili logaritamsku (Jakut & Eggleton, 2005), dok Arbutina (2007) prepostavlja linearnu zavisnost Φ_{eff} od R (videti poglavlje 4.2.2). Ovde smo prepostavili obrnutu proporcionalnost što je izgleda još bolja aproksimacija (videti Mochnacki, 1984). Ovo je donekle razumljivo, jer ako je gravitacioni potencijal $\Phi \propto 1/r$, za očekivati je da će funkcionalna zavisnost efektivnog potencijala od srednjeg („efektivnog”) radijusa biti najbolje opisana kao $\Phi_{\text{eff}} \propto 1/R$.

Po prvi put su razmotreni efekti deformisanosti zvezde usled rotacije i prisustva pratioca na naš problem i pokazano je da njihovo uključivanje u teoriju samo povećava minimalni odnos masa na $q_{\min} = 0.091-0.103$. Međutim, razmatranjem strukture rotirajućih politropa i uključivanjem efekata povećane koncentracije zvezda usled rotacije uspeali smo da spustimo q_{\min} na novu teorijsku vrednost

$$q_{\min} = 0.070 - 0.074 \quad (188)$$

za stepen kontakta $f = 0 - 1$, što je u boljoj saglasnosti sa posmatranom populacijom.

Jedini sistem koji je trenutno još uvek ispod teorijske vrednosti za stabilnost je V857 Her koji ima manje pouzdan fotometrijski određen odnos masa. Potrebna su nova (spektroskopska) posmatranja kako bi se rešilo i ovo pitanje.

5 Kompaktni dvojni sistemi

5.1 Klasifikacija kompaktnih dvojnih sistema

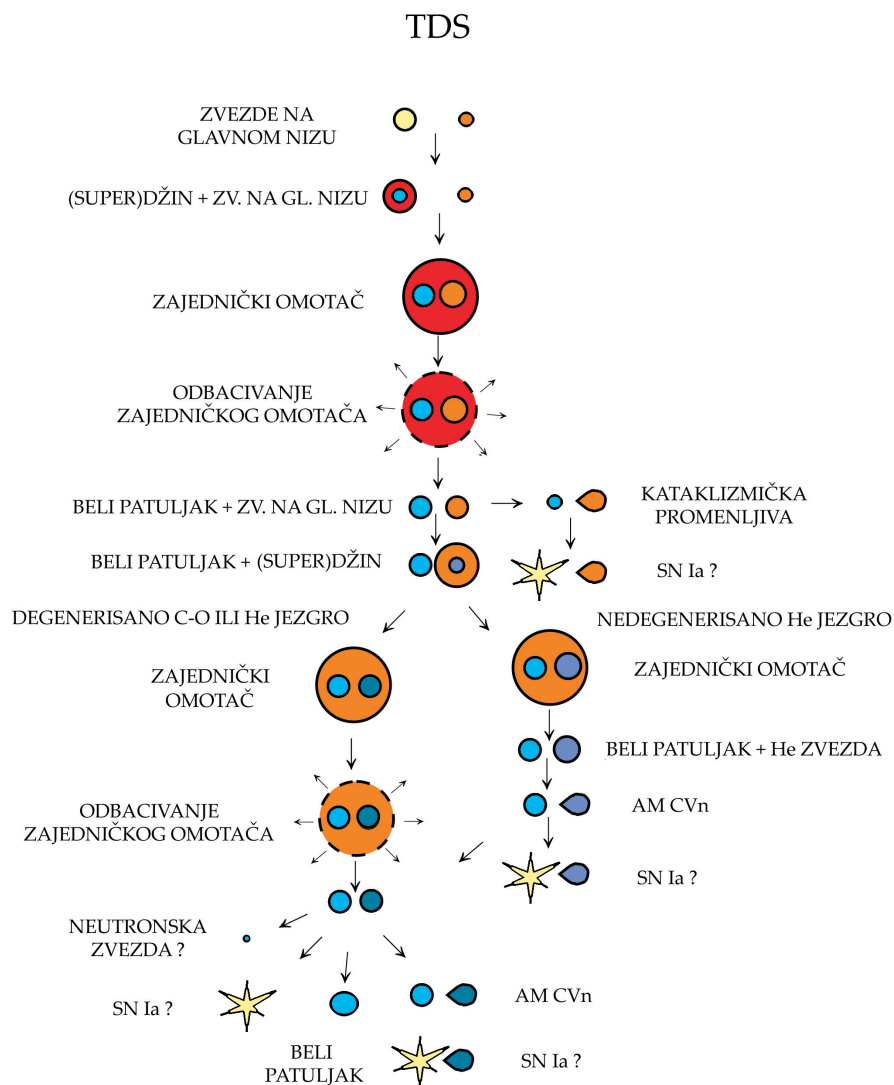
Kao što je poznato, postoje tri konačne faze evolucije zvezde: beli patuljci, neutronske zvezde i crne rupe. Zvezde konačne mase manje od Čandrasekarove granice $M_{\text{Ch}} \approx 1.44 M_{\odot}$ završiće kao beli patuljci, zvezde veće konačne mase, ali ispod Openhajmerove granice od vrlo približno $3 M_{\odot}$ završiće kao neutronske zvezde, a masivnije zvezde neminovno kao crne rupe.¹³

Kompaktni dvojni sistemi predstavljaju sisteme koje čine ovi egzotični objekti. Za razliku od kataklizmičkih promenljivih, rendgenskih (X) dvojnih sistema i pojedinih milisekundnih pulsara, obe komponente u ovim sistemima su kompaktne zvezde. Još uvek nisu otkriveni sistemi koje čine beli patuljak i crna rupa (nije izvesno kako i da li se ovakvi sistemi uopšte formiraju), neutronska zvezda i crna rupa, i dve crne rupe (koje će biti jako teško detektovati). Mogući scenariji formiranja kompaktnih sistema sa belim patuljcima, neutronske zvezde i crnim rupama su dati na slikama 13, 14 i 15.

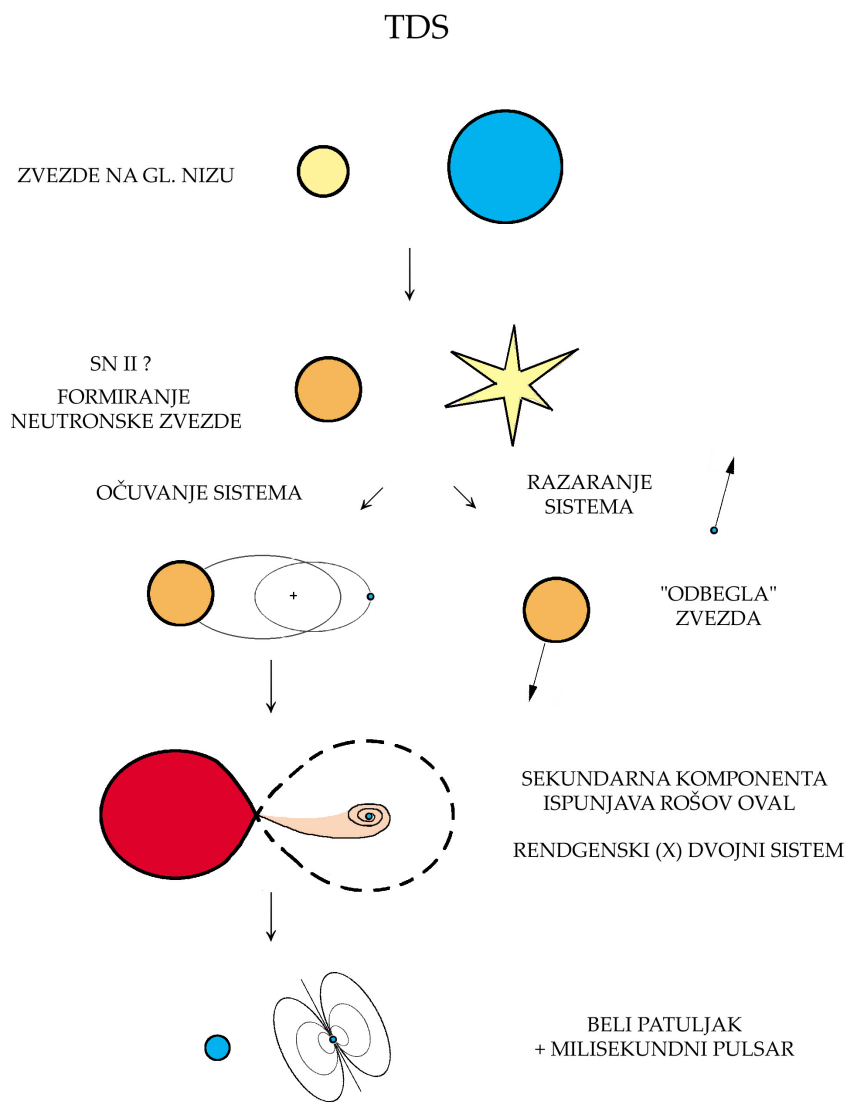
Kompaktni dvojni sistemi sa belim patuljcima mogu se podeliti na nekoliko klasa (Postnov & Yungelson, 2006):

- Dvostruki degenerisani (DD, eng. *double-degenerate*) sistemi koje čini razdvojeni beli patuljci.
- Kataklizmičke promenljive koje čine beli i crveni patuljak (ili eventualno subdžin).
- Zvezde tipa AM CVn, ili interaktivni dvostruki degenerisani sistemi koje čine beli patuljak i drugi beli patuljak (ili delimično degenerisana helijumska zvezda male mase) koji ispunjava Rošov oval.
- Odvojeni sistemi koje čine beli patuljak i nedegenerisana helijumska zvezda male mase.
- Odvojeni sistemi koje čine neutronska zvezda (moguće milisekundni pulsar) i beli patuljak.
- Ultrakompaktni X-dvojni sistemi koje čine neutronska zvezda i beli patuljak koji ispunjava Rošov oval.

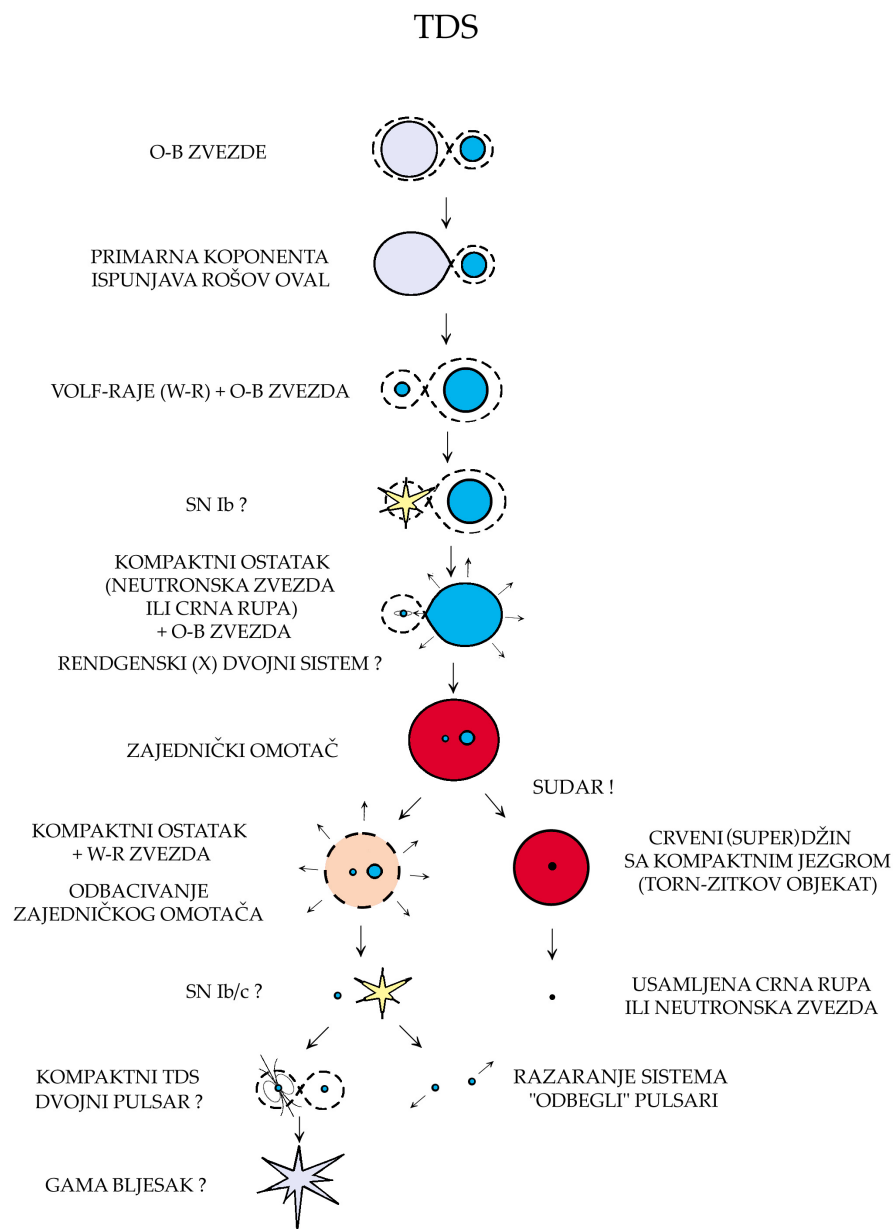
¹³Naglašavamo da se radi o *konačnim* masama. Smatra se da zvezde početne mase od čak $M \approx 8 M_{\odot}$ usled gubitka mase u kasnijim fazama evolucije, ipak na kraju završavaju kao beli patuljci.



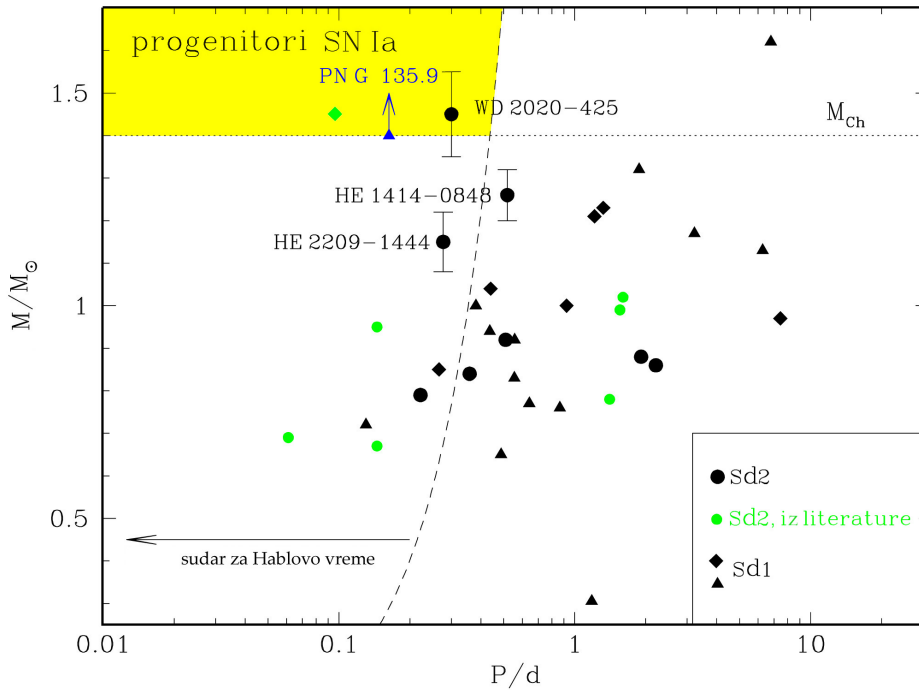
Slika 13: Formiranje kompaktnih tesnih dvojnih sistema sa belim patuljcima (Postnov & Yungelson, 2006).



Slika 14: Formiranje milisekundnih („recikliranih”) pulsara (Lorimer, 2003).



Slika 15: Formiranje kompaktnih tesnih dvojnih sistema sa neutronske zvezdama i crnim rupama (Postnov & Yungelson, 2006).



Slika 16: Kompaktni dvojni sistemi koje čine dva bela patuljka, ili beli patuljak i sdB zvezda (preuzeto iz Postnov & Yungelson, 2006; Napiwotzki et al., 2004; Geier et al., 2007, i prilagođeno). Sd1 i Sd2 označavaju, redom, jednolinijske i dvolinijske spektroskopske dvojne zvezde. Kod dvojnih Sd1 masa pratioca je ocenjena na osnovu funkcije mase (1) pretpostavljajući $i = 52^{\circ}$. Zeleni krugovi obeležavaju sisteme poznate pre projekta SPY. Plavi trougao obeležava belog patuljka u dvojnog sistema u centru planetarne magline PN G135.9+55.91 (Tovmassian et al., 2004).

Fenomenološki, beli patuljci mogu se podeliti na dva tipa. Većinu predstavljaju beli patuljci tipa DA, koji imaju Balmerove linije u spektru i ne pokazuju prisustvo helijuma i drugih elemenata – smatra se da se njihova atmosfera sastoji gotovo isključivo od vodonika. Potpuno suprotno, patuljci tipa DB imaju atmosferu koja se sastoji gotovo isključivo od helijuma. Posmatrani beli patuljci imaju prosečnu masu oko $0.6 M_{\odot}$ i poluprečnik koji nije značajno veći od Zemljinog (oko $10^{-2} R_{\odot}$). O strukturi belih patuljaka biće reči u narednom poglavlju.

U značajnom broju sistema pratilac belog patuljka je tzv. sdB zvezda, subpatuljak klase B, za koje se pretpostavlja da predstavljaju zvezde koje sagorevaju helijum u jezgru i imaju veoma tanak omotač od vodonika. Ove zvezde se generalno vezuju za dvojne sisteme, a njihov nastanak za fazu zajedničkog omotača (videti poglavlje 2.4).

Tabela 7: Do sada potvrđeni DD sistemi (Nelemans et al., 2005). Masa primarne komponente* (A) određena je na osnovu modela atmosfere i/ili gravitacionog crvenog pomaka. Masa sekundarne komponente (B) kod jednolinijskih spektroskopskih dvojnih (Sd1) predstavlja donju granicu dobijenu za $i = 90^\circ$.

Oznaka	P [d]	M_A [M_\odot]	M_B [M_\odot]	Sd
WD0135-052	1.56	0.47	0.52	2
WD0136+768	1.41	0.47	0.37	2
HE0320-1917	0.87	0.29	> 0.35	1
WD0326-273	1.88	0.51	> 0.59	1
WD0957-666	0.06	0.37	0.32	2
WD1013-010	0.43	0.44	> 0.38	1
WD1022+050	1.16	0.39	> 0.28	1
WD1101+364	0.15	0.29	0.35	2
WD1115+166	30.09	0.52	0.43	2
WD1202+608	1.49	0.40	> 0.34	1
WD1204+450	1.6	0.46	0.52	2
WD1210+140	0.64	0.23	> 0.38	1
WD1241-010	3.35	0.31	> 0.37	1
WD1317+453	4.87	0.33	> 0.42	1
WD1349+144	2.12	0.44	0.44	2
HE1414-0848	0.52	0.71	0.55	2
WD1428+373	1.14	0.35	> 0.23	1
HE1511-0448	3.22	0.48	> 0.46	1
WD1704+481	0.14	0.39	0.56	2
WD1713+332	1.12	0.35	> 0.18	1
WD1824+040	6.27	0.43	> 0.52	1
WD2032+188	5.08	0.41	> 0.47	1
HE2209-1444	0.28	0.58	0.58	2
WD2331+290	0.17	0.39	> 0.32	1

*Samo ovde pod terminom primarna mislimo na sjajniju komponentu.

Interesovanje za DD sisteme veoma je živo. Dobrim delom to je posledica činjenice da jedan deo astronomske javnosti i dalje daje prednost sudaru belih patuljaka kao modelu za (bar neke) supernove tipa Ia (SN Ia). Opšte prihvaćeno mišljenje je da SN Ia nastaju kao posledica termonuklearne eksplozije belog patuljka. Osnovni model pretpostavlja crvenog džina ili subdžina koji ispunjava Rošov oval i pretače materiju na belog patuljka mase nešto ispod Čandrasekarove granice (Whelan & Iben, 1973). U alternativnom modelu pratilac je drugi beli patuljak, ili helijumska (sdB) zvezda male mase (DD sistemi i zvezde tipa AM CVn), koji se zbog smanjenja orbite usled gubitka energije i ugaonog momenta gravitacionim zračenjem spaja sa primarnom komponentom u sistemu čija ukupna masa prelazi Čandrasekarovu (Iben & Tutukov, 1984). Projekat SPY (*ESO Supernovae Ia Progenitors survey*, Napiwotzki et al., 2001, 2002; Karl et al., 2003; Nelemans et al., 2005) upravo ima za cilj da proveri ovu drugu mogućnost. Do sada potvrđeni DD sistemi dati su u tabeli 7. Za sada postoji jedan nepotvrđeni sistem dva bela patuljka sa ukupnom masom većom od Čandrasekarove, WD 2020-425 (slika 16), kod kojeg bi do sudara moglo doći za vreme postojanja vasiona (Hablovo vreme), i moguće još jedan sistem sa sdB zvezdom (KPD 1930+2752, Geier et al., 2007).

Najpoznatija klasa neutronske zvezde su radio-pulsari, mada postoje i druge, poput anomalijskih X-pulsara (eng. *Anomalous X-ray Pulsars – AXP*) i tzv. „radio-tihih” neutronske zvezde, kao što su one nedavno otkrivene u ostacima supernovih Cas A i Pup A. Neki od najpoznatijih pulsara, poput pulsara Krab i Vela, su takođe povezani sa ostacima supernovih, što govori o vezi ovih pojava (eksplozije supernove i formiranja neutronske zvezde). Osnovni model zračenja pulsara je tzv. model svetionika, prema kojem se zračenje pretežno emituje u pravcu magnetne ose pulsara koja zaklapa neki ugao sa osom rotacije, tako da snop pogađa posmatrača u pravilnim vremenskim razmacima. Glavne karakteristike pulsara su velike brzine rotacije i jaka magnetna polja. Ovo se obično objašnjava očuvanjem magnetnog fluksa $\Phi_m \propto BR^2$ i ugaonog momenta rotacije $J \propto MR^2\omega$ pri gravitacionom kolapsu jezgra, tako da imamo

$$B = B_o(R_o/R)^2, \quad (189)$$

$$\omega = \omega_o(R_o/R)^2, \quad (190)$$

gde su B_o , ω_o i R_o početna jačina magnetnog polja, početna ugaona brzina i poluprečnik. Periodi rotacije pulsara kreću se u rasponu od oko 1 ms (u slučaju milisekundnih pulsara) do nekoliko sekundi (kod anomalijskih X-pulsara, na primer). Njihov poluprečnik je u proseku oko 10 km i slabo zavisi od mase, dok mase pokazuju tendenciju grupisanja oko gornje granice za bele patuljke, $M_{Ch} \approx 1.44 M_\odot$.

Tabela 8: Parametri poznatih sistema koje čine dve neutronske zvezde (Lorimer, 2003; Stairs, 2004). Komponenta A predstavlja pulsar, dok komponenta B predstavlja drugu neutronsku zvezdu. Jedino u sistemu J0737-3039 postoje dva pulsara. Karakteristično vreme pulsara je $\tau = -(\omega/\dot{\omega})$, τ_g je vreme do sudara (videti poglavlje 5.3), dok je e ekscentricitet.

Oznaka	P_{spin} [ms]	P [d]	τ [10^8 god.]	τ_g [10^8 god.]	M_A [M_\odot]	M_B [M_\odot]	e
J0737-3039	22.7/2770	0.102	2.1/0.5	0.87	1.337	1.250	0.088
J1518+4904	40.9	8.6	200	24000	1.56	1.05	0.25
B1534+12	37.9	0.4	2.5	27	1.3332	1.3452	0.27
J1756-2251	28.5	0.32	4.4	169	–	–	0.18
J1811-1736	104.2	18.8	9.2	10000	2.62	1.11	0.83
J1829+2456	41.0	1.18	130	600	1.14	1.36	0.14
B1913+16	59.0	0.3	1.1	3.0	1.4408	1.3873	0.62
B2127+11C	30.5	0.3	0.97	2.2	1.35	1.36	0.68

Tabela 9: Parametri poznatih sistema koje čine pulsar i beli patuljak (Lorimer, 2003; Stairs, 2004). Komponenta A predstavlja pulsar, dok je sekundarna komponenta B beli patuljak. Donja granica za masu sekundarne komponente izračunata je za pretpostavljenu masu pulsara od $1.4 M_{\odot}$. Karakteristično vreme pulsara je $\tau = -(\omega/\dot{\omega})$, τ_g je vreme do sudara (videti poglavje 5.3), dok je e ekscentricitet.

Oznaka	P_{spin} [ms]	P [d]	τ [10^8 god.]	τ_g [10^8 god.]	M_A [M_{\odot}]	M_B [M_{\odot}]	e
J1141-6545	394	0.198	0.02	5.8	1.30	0.986	0.172
B2303+46	1066	12.3	0.32	40000	1.34	1.3	0.658
J0621+1002	28.9	8.32	126	110000	1.70	0.97	0.0025
B0655+64	196	1.03	50	–	–	>0.66	<0.00003
J1157-5112	43.6	3.51	50	–	–	>1.18	0.00040
J1904+0412	71.1	14.9	126	–	–	>0.22	0.0002
J0034-0534	1.88	1.59	79	–	–	>0.14	–
J0218+4232	2.32	2.03	5.0	–	–	0.21	–
J0437-4715	5.76	5.74	5.0	160000	1.58	0.236	0.000019
J0751+1807	3.48	0.263	63	43	2.2	0.188	<0.000003
J1012+5307	5.26	0.605	63	570	1.64	0.16	<0.0000013
J1732-5049	5.31	5.26	63	–	–	>0.18	0.00001
B1855+09	5.36	12.3	50	1000000	1.58	0.267	0.000022
J1909-3744	2.95	1.53	32	–	–	>0.20	<0.0000006
B1957+20	1.61	0.382	25	–	–	>0.02	–

Neutronske zvezde i crne rupe formiraju se u dvojnim sistemima koje u početku čine masivne O-B zvezde (videti sliku 15). Verovatno da se pri tome dešava jedna ili dve eksplozije tzv. ogoljenih supernovih (SN Ib/c), čije zvezde-roditelji su u potpunosti ostale bez omotača od vodonika (Ib) i helijuma (Ic). Jedini način na koji se ovo može desiti jeste prepunjavanje Rošovog ovala u slučaju zvezda u TDS, ili snažni zvezdani vetar kod usamljenih O i W-R (Wolf-Raje) zvezda (videti npr. Arbutina, 2005). U slučaju da sistem ne biva razoren pri eksploziji, imaćemo masivni kompaktni TDS.

Kompaktni dvojni sistemi sa neutronske zvezdama najčešće se nazivaju dvojnim pulsarima, iako se obično samo jedna komponenta vidi kao pulsar, dok se druga ne vidi (ugašena neutronska zvezda ili pulsar čiji snop zračenja ne pogađa Zemlju, beli patuljak ili čak planeta, videti Wolszczan & Frail, 1992; Thorsett, Arzoumanian & Taylor, 1993).¹⁴ Samo jedan sistem do sada otkriven je pravi dvojni pulsar (J0737-3039, Lyne et al., 2004). Dvojni pulsari predstavljaju pravu laboratoriju za proučavanje efekata opšte teorije relativnosti. Najpoznatiji primer je svakako sistem B1913+16 (Hulse & Taylor, 1975). Od sistema koje čine beli patuljak i neutronska zvezda većinu predstavljaju sistemi sa milisekundnim („recikliranim”) pulsarom. Njihov nastanak prikazan je na slici 14. Svega nekoliko sistema su zaista kompaktni (u tom smislu da su relativistički). Neki parametri poznatih dvojnih pulsara dati su u tabelama 8 i 9.

Efekti opšte teorije relativnosti, a samim tim i emisija gravitacionih talasa, su kod kompaktnih sistema sa neutronske zvezdama daleko izraženiji nego kod sistema sa belim patuljcima (i direktno merljivi). Usled gubitka energije gravitacionim zračenjem, orbita se smanjuje i na kraju dolazi do sudara. Sudar dve neutronske zvezde je najverovatnije objašnjenje za neke gama bljeskove – kratkotrajne, ali izuzetno intenzivne izlive gama zračenja. Dugotrajniji gama bljeskovi se vezuju za kolaps ekstremno masivnih zvezda i formiranje brzorotirajućih crnih rupa, koje je moguće praćeno snažnom eksplozijom – hipernovom.

Na kraju, sudar dve crne rupe zvezdane mase u dvojnem sistemu trebalo bi da proizvede izliv gravitacionog zračenja poznat kao „cvrkut” (eng. *chirp*) jer se intenzitet i frekvencija zračenja povećavaju nekoliko sekundi do maksimuma na oko 1 kHz. Iako postoje brojni posredni dokazi, zbog izuzetno male energije gravitaciono zračenje još uvek nije direktno detektovano. Nekoliko projekata koji se bave detekcijom gravitacionih talasa, poput LIGO (skr. od. eng. *Laser Interferometer Gravitational-wave Observatory*),

¹⁴Termin dvojni pulsar (eng. *binary pulsar*) ne koristi se, međutim, samo za kompaktnu, već i uopšte za dvojne sisteme u kojima je jedna komponenta pulsar. U novije vreme za sisteme sa masivnim pratiocem koristi se i termin dvojna neutronska zvezda.

GEO600, TAMA300 i VIRGO, je u toku, ili u pripremi (LIGO2, LISA – *Laser Interferometer Space Antenna*).

5.2 Struktura kompaktnih objekata

5.2.1 Beli patuljci

Život zvezde predstavlja neprekidnu borbu sile gravitacije i pritiska gasa i zračenja koje potiče iz termonuklearnih reakcija koje se odvijaju u jezgru. Kada se nuklearno gorivo (pretežno H i He) konačno istroši (ili temperatura nije dovoljno visoka da započne sagorevanje težih elemenata), gravitacija nadvladava i jezgo se sažima. U slučaju belih patuljaka gravitacionom sažimanju suprostavlja se pritisak degenerisanog elektronskog gasa.

Pođimo od funkcije raspodele fermiona u stanju termodinamičke ravnoteže $f = \frac{2}{h^3} F$, gde je

$$F = \frac{1}{e^{[\mathcal{E} - (\mu_h - mc^2)]/kT} + 1}, \quad (191)$$

\mathcal{E} je kinetička energija, m masa, μ_h hemijski potencijal (stepen degenerisanosti je $\eta = \frac{\mu_h}{kT}$), T temperatura, c je brzina svetlosti, k je Bolcmanova i h Plankova konstanta. Faktor 2 potiče od činjenice da se fermioni javljaju u dva spinska stanja. Ukupna energija čestice je data poznatim izrazom

$$E^2 = (mc^2 + \mathcal{E})^2 = m^2c^4 + p^2c^2 \quad (192)$$

gde je p impuls čestice. Koncentracija, pritisak i gustina mase-energije su u opštem slučaju (Hansen & Kawaler, 1994; Schutz, 2004)

$$n = \int_0^\infty f 4\pi p^2 dp, \quad (193)$$

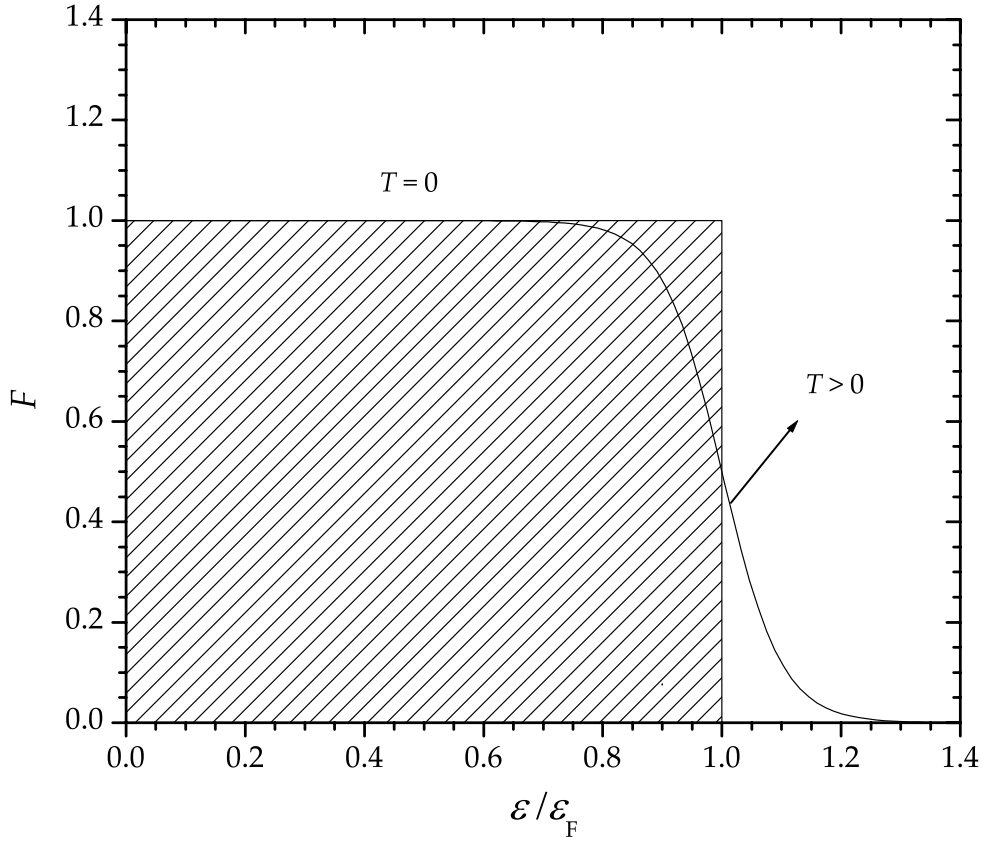
$$P = \frac{1}{3} \int_0^\infty f p v 4\pi p^2 dp, \quad (194)$$

$$\epsilon = \rho c^2 = \int_0^\infty f E 4\pi p^2 dp, \quad (195)$$

gde je brzina čestice $v = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial p} = \frac{\partial E}{\partial p} = \frac{p}{E} c^2$.

Iz jednačine (191) vidimo da kada $T \rightarrow 0$ funkcija F će biti 0 ili 1, u zavisnosti od toga da li je energija veća ili manja od Fermijeve energije $\mathcal{E}_F = \mu_h - mc^2$. Dakle, za potpuno degenerisan Fermi-Dirakov gas na apsolutnoj nuli imamo (videti sliku 17)

$$F = \begin{cases} 0, & \mathcal{E} > \mathcal{E}_F \\ 1, & \mathcal{E} \leq \mathcal{E}_F. \end{cases} \quad (196)$$



Slika 17: Funkcija raspodele F . Na apsolutnoj nuli fermioni su ograničeni na isenčani deo slike (nema fermiona sa energijom većom od \mathcal{E}_F). Puna kriva pokazuje efekat povećanja temperature.

Na osnovu jednačine (193) odmah nalazimo koncentraciju elektrona

$$n_e = \int_0^{p_F} f 4\pi p^2 dp = \frac{8\pi}{3h^3} p_F^3, \quad (197)$$

gde je p_F Fermijev impuls. U slučaju belih patuljaka pritisak potiče od degenerisanog elektronskog gasa, ali gotovo sva masa potiče od nukleona (protona i neutrona), tako da je gustina mase

$$\rho = \rho_0 = \mu_e m_n n_e = \frac{8\pi}{3h^3} \mu_e m_n p_F^3, \quad (198)$$

gde je $m_n \approx m_p$ masa protona, odnosno neutrona, i

$$\mu_e^{-1} = \sum_i \frac{Z_i X_i y_i}{A_i} \approx \frac{1}{2}(Y + Z) \approx 1/2 \quad \text{tj.} \quad \mu_e \approx 2, \quad (199)$$

odnos broja nukleona prema broju slobodnih elektrona (videti jednačinu (108)). Što se tiče pritiska, razmotrimo dva slučaja.

- a) Ako je gas nerelativistički imamo $E \approx mc^2 + \frac{p^2}{2m}$ i $E^{-1} \approx \frac{1}{mc^2}$. Jednačina (194) tada daje

$$P \approx \frac{1}{3} \int_0^{p_F} f p \frac{p}{m_e} 4\pi p^2 dp = \frac{8\pi}{3h^3} \frac{1}{m_e} \frac{p_F^5}{5}. \quad (200)$$

Eliminišući p_F uz pomoć jednačine (198) dobijamo politropsku relaciju $P = K\rho^{5/3}$ sa indeksom $n = 1.5$ i $K = \left(\frac{3}{8\pi}\right)^{2/3} \frac{h^2}{5m_e m_n^{5/3} \mu_e^{5/3}}$. Na osnovu jednačine (121) za politropu indeksa $n = 1.5$ imamo

$$\frac{M}{M_\odot} = 2 \cdot 10^{-6} \left(\frac{2}{\mu_e}\right)^5 \left(\frac{R}{R_\odot}\right)^{-3}. \quad (201)$$

Poslednja jednačina predstavlja relaciju masa-radijus za nerelativističke bele patuljke. Ako obrnemo relaciju, vidimo da kako masa raste radijus belog patuljak opada, suprotno od zvezda na glavnom nizu.

- b) Ako je gas relativistički $E \approx pc$ i jednačina (194) daje

$$P \approx \frac{1}{3} \int_0^{p_F} f pc 4\pi p^2 dp = \frac{8\pi c}{3h^3} \frac{p_F^4}{4}. \quad (202)$$

Ponovo eliminišući p_F uz pomoć jednačine (198) dobijamo politropsku relaciju $P = K\rho^{4/3}$ sa indeksom $n = 3$ i $K = \left(\frac{3}{8\pi}\right)^{1/3} \frac{hc}{4m_n^{4/3} \mu_e^{4/3}}$. Za politropu indeksa $n = 3$ masa zavisi samo od konstante K . Kako se radijus smanjuje sa povećanjem mase, zaključujemo da jednačina (106) daje maksimalnu masu (za $R \rightarrow 0$):

$$\frac{M_{\text{Ch}}}{M_\odot} \approx 1.4 \left(\frac{2}{\mu_e}\right)^2, \quad (203)$$

što predstavlja tzv. Čandrasekarovu granicu.

U režimu između nerelativističkog i krajnje relativističkog degenerisanog elektronskog gasa vrlo korisnu približnu analitičku relaciju dao je Eglton (videti Hansen & Kawaler, 1994)

$$\frac{R}{R_o} = 2.02 \left[1 - \left(\frac{M}{M_\infty}\right)^{4/3}\right]^{1/2} \left(\frac{M}{M_\infty}\right)^{-1/3}, \quad (204)$$

gde je

$$M_\infty = M_{\text{Ch}}, \quad \frac{M_\infty}{M_\odot} = 1.456 \left(\frac{2}{\mu_e}\right)^2 \quad (205)$$

i

$$\frac{R_o}{R_\odot} = 5.585 \cdot 10^{-3} \left(\frac{2}{\mu_e}\right). \quad (206)$$

5.2.2 Neutronske zvezde

U slučaju masivnijih zvezda, u konačnim fazama evolucije gravitaciji se suprostavlja pritisak degenerisanog neutronske gasa. Analiza je slična prethodno datoj, s tom razlikom da sada i pritisak i masa potiču od neutrona. Razmotrimo ponovo nerelativistički i relativistički slučaj.

- a) Ako je gas nerelativistički ponovo imamo $E \approx mc^2 + \frac{p^2}{2m}$ i $E^{-1} \approx \frac{1}{mc^2}$. Jednačina (195) sada daje

$$\begin{aligned}\epsilon &= \int_0^{p_F} f(m_n c^2 + \frac{p^2}{2m_n}) 4\pi p^2 dp \\ &= \frac{8\pi}{3h^3} p_F^3 m_n c^2 + \frac{4\pi}{5h^3} \frac{1}{m_n} p_F^5 \\ &= \rho_o c^2 + u,\end{aligned}\quad (207)$$

gde je ρ_o gustina i u gustina unutrašnje energije. Vidimo da je

$$\rho \approx \rho_o = \frac{8\pi}{3h^3} m_n p_F^3. \quad (208)$$

Za pritisak, slično jednačini (200) imamo

$$P \approx \frac{1}{3} \int_0^{p_F} f p \frac{p}{m_n} 4\pi p^2 dp = \frac{8\pi}{3h^3} \frac{1}{m_n} \frac{p_F^5}{5}. \quad (209)$$

Jednačine (208) i (209) ponovo daju politropsku relaciju $P = K\rho^{5/3}$ sa indeksom $n = 1.5$ i $K = (\frac{3}{8\pi})^{2/3} \frac{h^2}{5m_n^{8/3}}$.

- b) Ako je gas relativistički ($E \approx pc$) imamo

$$\epsilon = \rho c^2 \approx \int_0^{p_F} f pc 4\pi p^2 dp = \frac{8\pi c}{h^3} \frac{p_F^4}{4} = u, \quad (210)$$

$$P \approx \frac{1}{3} \int_0^{p_F} f pc 4\pi p^2 dp = \frac{8\pi c}{3h^3} \frac{p_F^4}{4}, \quad (211)$$

odnosno $P = \frac{1}{3}\rho c^2 = \frac{1}{3}u$ – gas se ponaša kao fotonski gas sa $\gamma = 4/3$ (što je i logično jer smo zanemarili masu mirovanja).

Efekti opšte teorije relativnosti na strukturu kod neutronske zvezde nisu zanemarljivi, tako da umesto klasične jednačine hidrostatičke ravnoteže (76) moramo koristiti Openhajmer-Volkovljevu jednačinu

$$\frac{dP}{dr} = -\left(\rho + \frac{P}{c^2}\right) \frac{G(M + 4\pi r^3 \frac{P}{c^2})}{r^2(1 - \frac{2GM}{rc^2})}, \quad (212)$$

$$\frac{dM}{dr} = 4\pi r^2 \rho, \quad (213)$$

gde je ρ gustina mase-energije i $M = M(r)$ ukupna masa-energija unutar Švarcšildove koordinate r (videti Misner, Thorne & Wheeler, 1973). U njutnovskoj aproksimaciji $c \rightarrow \infty$, $M \rightarrow m$ jednačina (212) svodi se na jednačinu (76)

$$\frac{dP}{dr} = -\rho \frac{Gm}{r^2}. \quad (214)$$

Dati opis neutronske zvezde nije kompletan, uz razne druge komplikacije (videti Shapiro & Teukolsky, 1983), i iz razloga što na gustinama jednakim ili većim od nuklearnih više ne možemo zanemariti sile između nukleona, koje i dalje ostaju nedovoljno poznate. To je i razlog što, za razliku od belih patuljaka, još uvek nismo sasvim sigurni koja je gornja granica za masu neutronske zvezde.

5.2.3 Crne rupe

Kod ekstremno masivnih zvezda potpuni kolaps je neminovan i dolazi do formiranja crne rupe. Za opis crnih rupa neophodna je opšta teorija relativnosti, u kojoj se gravitacija posmatra geometrijski, kao zakrivljenost prostor-vremena, a koeficijenti metrike imaju ulogu potencijala. U slučaju statične sfernosimetrične crne rupe imamo Švarcšildovu metriku

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)c^2 dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{2GM}{rc^2}} dr^2 + r^2 d\theta + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (215)$$

Prema klasičnoj teoriji, nakon gravitacionog kolapsa celokupna preostala masa zvezde M biće sabijena u singularitet u centru crne rupe, $r = 0$. Singularitet okružuje tzv. horizont događaja dat Švarcšildovim radijusom

$$R_{\text{Sch}} = \frac{2GM}{c^2}, \quad (216)$$

koji definiše oblast u kojoj je gravitacija toliko jaka da ni svetlost ne može da je napusti.

U slučaju stacionarne, rotirajuće crne rupe postoji znatno komplikovanije rešenje koje je našao Ker. Kerova metrika u Bojer-Lindkvistovim koordinatama je (Misner, Thorne & Wheeler, 1973; Schutz, 2004)

$$\begin{aligned} ds^2 = & -\frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2} c^2 dt^2 + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta \\ & + \frac{(r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta}{\rho^2} d\phi^2 - \frac{4GMa r \sin^2 \theta}{\rho^2 c} dt d\phi, \end{aligned} \quad (217)$$

gde je

$$\begin{aligned}\Delta &= r^2 - \frac{2GMr}{c^2} + a^2, \\ \rho^2 &= r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \\ a &= \frac{J}{Mc},\end{aligned}\tag{218}$$

i J je ugaoni moment rotacije. Kada $a \rightarrow 0$ jednačina (217) se svodi na (215). Crne rupe nisu predmet našeg istraživanja, tako da se dalje ovom problematikom nećemo baviti.

5.3 Gubitak energije i ugaonog momenta usled emitovanja gravitacionog zračenja

U slučaju elektromagnetnog zračenja ukupna izračena snaga data je standardnim izrazom

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)_{\text{EM}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{2\langle|\ddot{\mathbf{d}}|^2\rangle}{3c^3} + \frac{2\langle|\ddot{\mathbf{m}}|^2\rangle}{3c^5} + \frac{\langle|\ddot{\hat{\mathbf{D}}}|^2\rangle}{20c^5} \right\}.\tag{219}$$

Članovi u zagradi predstavljaju redom električno dipolno, magnetno dipolno i električno kvadrupolno zračenje, $\mathbf{d} = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha}$ je električni dipolni moment, $\mathbf{m} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} q_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} \times \mathbf{v}_{\alpha}$ magnetni dipolni moment i $\hat{\mathbf{D}}$ električni kvadrupolni tenzor:

$$\begin{aligned}D_{ij} &= \sum_{\alpha} q_{\alpha} \left(x_i^{\alpha} x_j^{\alpha} - \frac{1}{3} \delta_{ij} |\mathbf{r}_{\alpha}|^2 \right), & |\ddot{\hat{\mathbf{D}}}|^2 &= \ddot{D}_{ij} \ddot{D}_{ij}, \\ \mathbf{r}_{\alpha} &= (x_1^{\alpha}, x_2^{\alpha}, x_3^{\alpha}).\end{aligned}\tag{220}$$

Ako zanemarimo poslednja dva člana u jednačini (219) dobijamo dobro poznatu Larmorovu formulu.

Dominantno gravitaciono zračenje je kvadrupolno (videti fusnotu 5) tako da ovde imamo (Shapiro & Teukolsky, 1983)

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)_{\text{GR}} = G \frac{\langle|\ddot{\hat{\mathbf{I}}}|^2\rangle}{5c^5},\tag{221}$$

gde je $\hat{\mathbf{I}}$ kvadrupolni tenzor (onako kako je definisan u Misner, Thorne & Wheeler, 1973, postoje razne druge definicije u literaturi):

$$\begin{aligned}I_{ij} &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left(x_i^{\alpha} x_j^{\alpha} - \frac{1}{3} \delta_{ij} |\mathbf{r}_{\alpha}|^2 \right) & |\ddot{\hat{\mathbf{I}}}|^2 &= \ddot{I}_{ij} \ddot{I}_{ij}, \\ &= -I_{ij} + \frac{1}{3} \delta_{ij} \text{Tr} \hat{\mathbf{I}}\end{aligned}\tag{222}$$

i $\hat{\Gamma}$ tenzor inercije u inercijalnom sistemu reference. Gubitak ugaonog momenta usled gravitacionog zračenja je

$$\left(\frac{dJ_i}{dt}\right)_{\text{GR}} = -\frac{2G}{5c^5}\varepsilon_{ijk}\langle\ddot{F}_{jk}\ddot{F}_{jk}\rangle. \quad (223)$$

U slučaju sistema dve zvezde na kružnim putanjama može se pokazati (Shapiro & Teukolsky, 1983) da je gubitak energije i ugaonog momenta

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{32}{5}\frac{G^4}{c^5}\frac{M^3\mu^2}{a^5}, \quad (224)$$

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{1}{\Omega}\frac{dE}{dt} = -\frac{32}{5}\frac{G^{7/2}}{c^5}\frac{M^{5/2}\mu^2}{a^{7/2}}. \quad (225)$$

U slučaju eliptičnih putanja izrazi se donekle modifikuju:

$$\frac{dE}{dt} = f(e)\frac{dE}{dt}\Big|_{e=0}, \quad (226)$$

$$\frac{dJ}{dt} = g(e)\frac{dJ}{dt}\Big|_{e=0}, \quad (227)$$

gde su funkcije f i g

$$f(e) = \left(1 + \frac{73}{24}e^2 + \frac{37}{96}e^4\right)(1 - e^2)^{-7/2}, \quad (228)$$

$$g(e) = \left(1 + \frac{7}{8}e^2\right)(1 - e^2)^{-2}. \quad (229)$$

Kako je energija dvojnog sistema (27)

$$E = -\frac{G\mu M}{2a}, \quad (230)$$

imamo

$$\frac{da}{dt} = -\frac{64}{5}\frac{G^3}{c^5}\frac{M^2\mu}{a^3}. \quad (231)$$

Rastojanje između komponenti se usled gubitka energije, očekivano, smanjuje, i to sve brže i brže ($\dot{a} \propto a^{-3}$). Potražimo dalje kako se menja ekscentricitet. Na osnovu jednačina (24)–(28) i (224)–(229) imamo

$$e^2 = 1 + \frac{2EJ^2}{G^2\mu^3M^2}, \quad (232)$$

$$2e\frac{de}{da} = \frac{2}{G^2\mu^3M^2}\left(J^2 + 2EJ\frac{dJ}{dE}\right)\frac{dE}{da}, \quad (233)$$

$$e \frac{de}{da} = \frac{1}{2G\mu^2 Ma^2} \left(\mu^2 a^4 (1 - e^2) \Omega^2 - GM\mu^2 a \sqrt{1 - e^2} \frac{g(e)}{f(e)} \right), \quad (234)$$

$$\frac{de}{da} = \frac{1}{2ea} \left(1 - e^2 - \sqrt{1 - e^2} \frac{g(e)}{f(e)} \right). \quad (235)$$

Izraz u zagradi je pozitivan za $e < 1$, a kako je $\dot{a} < 0$ vidimo da se i ekscentricitet smanjuje ($\dot{e} < 0$). Drugim rečima, emisija gravitacionih talasa dovodi do cirkularizacije orbite. Na kraju, lako možemo naći i promenu perioda

$$\frac{1}{P} \frac{dP}{dt} = -\frac{96}{5} \frac{G^3}{c^5} \frac{M^2 \mu}{a^4} f(e). \quad (236)$$

Vreme do sudara može se izračunati na osnovu približnog analitičkog izraza (Lorimer, 2003; Postnov & Yungelson, 2006)

$$\tau_g = 9.83 \times 10^6 \cdot P^{8/3} \mathbb{M}^{-5/3} (1 - e^2)^{7/2} \text{ god.} \quad (237)$$

U poslednjoj jednačini P je period izražen u satima, a $\mathbb{M} = M^{2/5} \mu^{3/5}$, izraženo u Sunčevim masama M_\odot , predstavlja „masu cvrkuta” (videti poglavlje 5.1).

5.4 Maksimalni odnos masa za tesne dvojne sisteme tipa AM CVn

U početku se smatralo da u pozadinskom gravitacionom zračenju na niskim frekvencijama ($\sim 10^{-2} - 10^{-4}$ Hz) preovladava zračenje kontaktnih sistema tipa W UMa, da bi kasnije bilo shvaćeno da je u ovoj oblasti, najverovatnije, dominantno zračenje odvojenih DD sistema i sistema tipa AM CVn (videti Postnov & Yungelson, 2006). Sistemi tipa AM CVn predstavljaju fantastične polukontaktne sisteme koje čine dva bela patuljka. Budući da jedna komponenta ispunjava Rošov oval i pretače masu na drugu komponentu – belog patuljka, ovi sistemi se takođe mogu smatrati kataklizmičkim promenljivima, ali su za razliku od tipičnih sistema ove vrste mnogo kompaktniji. Orbitalni period prototipa čitave klase AM CVn iznosi svega $P \approx 17$ minuta, a postoje sistemi sa još kraćim periodom (videti tabelu 10).

Ovi sistemi verovatno nastaju nakon (druge) faze zajedničkog omotača, posle formiranja jednog belog patuljka, tokom koje se komponente približavaju do na rastojanja jednaka Sunčevom radijusu i manja (videti sliku 13 i poglavlje 2.4). Ako se nakon evolucije unutar zajedničkog omotača formiraju dva C-O bela patuljka, i ako ukupna masa sistema prelazi Čandrasekarovu, moguća je eksplozija SN Ia kao rezultat sudara, o čemu je već bilo reči. U

slučaju da se formiraju C-O i He beli patuljak, i ispunjeni su uslovi za stabilan prenos mase (videti nastavak) nastaje zvezda tipa AM CVn. Druga mogućnost je da se pored belog patuljka formira nedegenerisana He zvezda – subpatuljak (sdB). Ako ova zvezda ispuni Rošov oval dok još uvek sagoreva helijum u jezgru, usled gubitka mase reakcije će se ugasiti i zvezda će postati „poludegenerisana”. Na taj način nastaje sistem tipa AM CVn sa helijumskom zvezdom, umesto degenerisanog belog patuljka. U slučaju zvezda tipa AM CVn u kojima je primarna komponenta beli patuljak mase nešto ispod Čandrasekarove postoje dva dodatna kanala za eksploziju SN Ia, ali su oba malo verovatna.

Za razliku od kontaktnih TDS tipa W UMa kod kojih je sekularna evolucija sistema vođena gubitkom ugaonog momenta magnetnim vetrom, DD sistemi i kompaktni sistemi tipa AM CVn sigurno gube ugaoni momenat usled emisije gravitacionih talasa (mada ni drugi mehanizmi, kao što su gubitak mase iz sistema, pa ni magnetni vetar, nisu isključeni). Kako se orbita smanjuje, smanjuju se i Rošovi ovali, a pošto radijus kod belih patuljaka zavisi obrnuto proporcionalno od mase ($R \propto M^{-1/3}$ za bele patuljke male mase), sekundarna komponenta prva ispunjava Rošov oval i počinje da pretače materiju na masivnijeg pratioca!

Kako je $q < 1$ i $R_1 \ll R_2 < a$ možemo, u prvoj aproksimaciji, zanemariti ugaoni momenat rotacije i uzeti $J = J_{\text{tot}} \approx J_{\text{orb}}$ (videti jednačine (122) i (124)). Kada se masa pretače sa manje masivne komponente na masivniju $\dot{M}_2 = -\dot{M}_1 < 0$, očekujemo da se orbita povećava, $\dot{a} > 0$, što uz $\dot{J} < 0$ daje $\frac{dJ}{da} < 0$. Ovi uslovi, kao što ćemo videti, moraju biti ispunjeni da bi sistem bio stabilan.

Pođimo od jednačina (31) i (32)

$$J = \mu a^2 \Omega \sqrt{1 - e^2}, \quad \Omega^2 = \frac{GM}{a^3}, \quad (238)$$

i potražimo njihov izvod po vremenu

$$\frac{\dot{J}}{J} = \frac{M_1 - M_2}{M_1 M_2} \dot{M}_2 + 2 \frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{\Omega}}{\Omega}, \quad (239)$$

$$2 \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} = -3 \frac{\dot{a}}{a}. \quad (240)$$

Kombinujući poslednje dve jednačine dobijamo

$$\frac{\dot{J}}{J} = \frac{M_1 - M_2}{M_1 M_2} \dot{M}_2 + \frac{1}{2} \frac{\dot{a}}{a}. \quad (241)$$

Tabela 10: Poznati sistemi tipa AM CVn (Napiwotzki, 2005; Stroeer & Vecchio, 2006). Neke mase su prilično nepouzdanе (detaljnije videti u Stroeer & Vecchio, 2006).

Oznaka	P [s]	$M_1 [M_\odot]$	$M_2 [M_\odot]$
RX J0806.3+1527	321	0.2–0.5	0.13
V407 Vul	569	0.7	0.068
ES Cet	621	0.7	0.062
AM CVn	1029	0.85	0.14
HP Lib	1103	0.57	0.032
CR Boo	1471	0.55	0.023
KL Dra	1500	0.27	0.022
V803 Cen	1612	1.31	0.021
SDSS J0926+3624	1699	0.6	0.02
CP Eri	1701	0.63	0.019
SN2003aw	2028	0.42?	0.015?
SDSS J1240-0159	2242	0.38?	0.015?
GP Com	2794	0.45	0.01
CE 315	3906	0.48	0.006

U dvojnomo sistemu u kome je prenos mase stabilan promena radijusa komponente koja gubi masu tačno odgovara promeni srednjeg radijusa njenog Rošovog ovala, odnosno

$$\frac{R_2}{R_{\text{IL2}}} = \text{const.} \quad (242)$$

Ako iskoristimo približni izraz (Kopal, 1959)

$$\begin{aligned} R_{\text{IL2}} &\approx 0.4622a \left(\frac{q}{1+q} \right)^{1/3} \\ &= 0.4622a \left(\frac{M_2}{M} \right)^{1/3}, \end{aligned} \quad (243)$$

imamo

$$\frac{\dot{R}_2}{R_2} = \frac{\dot{a}}{a} + \frac{1}{3} \frac{\dot{M}_2}{M_2}, \quad (244)$$

$$\frac{\dot{a}}{a} = \frac{\dot{M}_2}{M_2} \left(\zeta - \frac{1}{3} \right), \quad (245)$$

gde je $\zeta = \frac{d \ln R_2}{d \ln M_2}$. Pošto je $\zeta < 0$ i $\dot{M}_2 < 0$ vidimo da je $\dot{a} > 0$. Jednačine (241) i (245) konačno daju

$$\frac{\dot{J}}{J} = \frac{\dot{M}_2}{M_2} \left(\frac{1}{2} \zeta - \frac{1}{6} + 1 - q \right). \quad (246)$$

Ako sistem gubi ugaoni momenat usled gravitacionog zračenja, $\dot{J} < 0$ je dato izrazom (225). Jednačinu (246) tada možemo iskoristiti da pronađemo stopu prenosa mase. Kako je $\dot{M}_2 < 0$, za stabilan prenos mase izraz u zagradi u jednačini (246) mora biti veći od nule

$$\frac{1}{2}\zeta + \frac{5}{6} - q > 0, \quad (247)$$

odnosno, u slučaju belih patuljaka male mase ($\zeta = -\frac{1}{3}$) mora biti $q < \frac{2}{3}$ (Postnov & Yungelson, 2006). Ako je sekundarna komponenta helijumska zvezda male mase, $R_2/R_\odot \approx 0.043(M_2/M_\odot)^{-0.062}$ (Tutukov & Fedorova, 1989), i dobija se nešto veća vrednost. Narušavanje ovog kriterijuma rezultira nestabilnim, dinamičkim prenosom i gubitkom mase, i verovatno relativno brzim sudarom tj. spajanjem komponenti.

U nastavku, pokušaćemo da popravimo ove vrednosti i uporedimo dobijene rezultate sa posmatranjima. Pre svega, ako iskoristimo precizniji Egltonov izraz za srednji Rošov radijus sekundarne komponente (131)

$$\frac{R_{\text{IL}2}}{a} = \frac{0.49q^{2/3}}{0.6q^{2/3} + \ln(1 + q^{1/3})}, \quad (248)$$

i potražimo njegov izvod po vremenu, imamo

$$\frac{a\dot{R}_{\text{IL}2} - R_{\text{IL}2}\dot{a}}{a^2} = \frac{0.49\frac{2}{3}q^{-1/3}[0.6q^{2/3} + \ln(1 + q^{1/3})] - 0.49q^{2/3}[0.6\frac{2}{3}q^{-1/3} + \frac{\frac{1}{3}q^{-1/3}}{1 + q^{1/3}}]}{[0.6q^{2/3} + \ln(1 + q^{1/3})]^2}\dot{q}, \quad (249)$$

$$\frac{\dot{R}_{\text{IL}2}}{R_{\text{IL}2}} - \frac{\dot{a}}{a} = \frac{2(1 + q^{1/3})\ln(1 + q^{1/3}) - q^{1/3}}{3q(1 + q^{1/3})[0.6q^{2/3} + \ln(1 + q^{1/3})]}\dot{q}, \quad (250)$$

$$\frac{\dot{R}_{\text{IL}2}}{R_{\text{IL}2}} - \frac{\dot{a}}{a} = \frac{1}{3}\eta(q)\frac{\dot{M}_2}{M_2}, \quad (251)$$

gde je

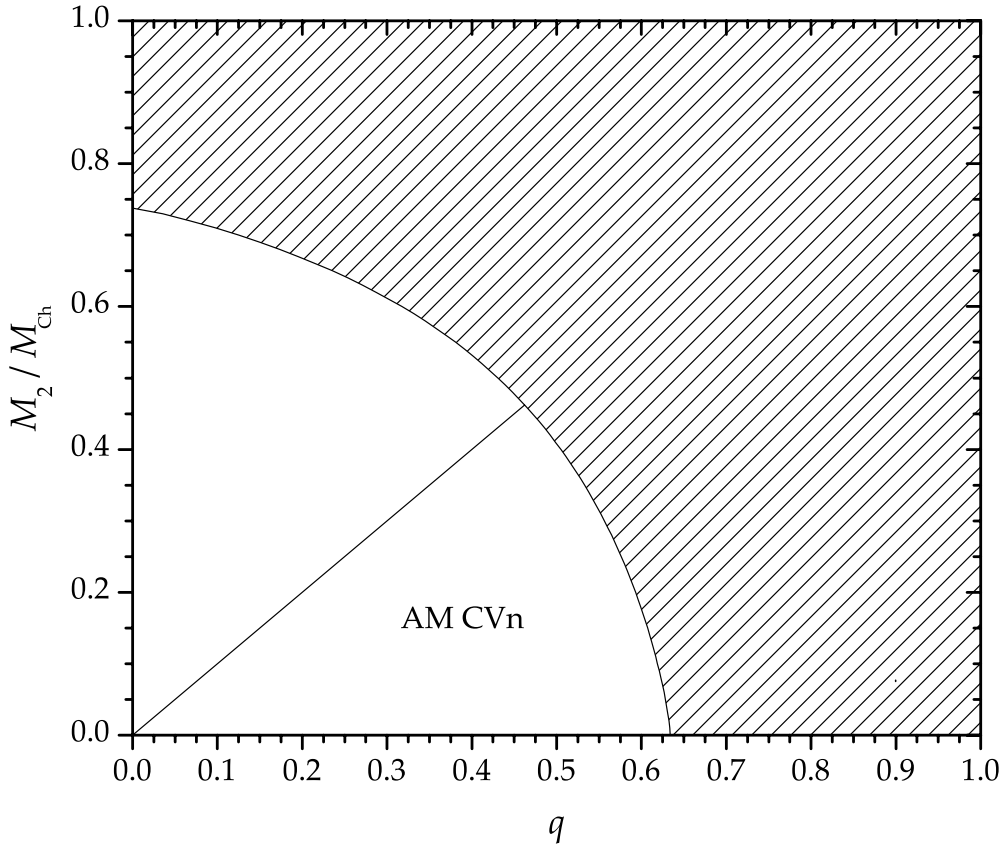
$$\eta(q) = \frac{[2(1 + q^{1/3})\ln(1 + q^{1/3}) - q^{1/3}](1 + q)}{(1 + q^{1/3})[0.6q^{2/3} + \ln(1 + q^{1/3})]}\dot{q}, \quad (252)$$

i iskoristili smo

$$\dot{q} = q(1 + q)\frac{\dot{M}_2}{M_2}. \quad (253)$$

S druge strane, $\zeta \neq \text{const.}$ za čitav spektar masa $0 < M_2 < M_{\text{Ch}}$, već $\zeta = \zeta(M_2)$. Ako iskoristimo izraze (204)–(206) imamo

$$\ln R_2 = \frac{1}{2}\ln\left[1 - \left(\frac{M_2}{M_{\text{Ch}}}\right)^{4/3}\right] - \frac{1}{3}\ln M_2 + \text{const}, \quad (254)$$



Slika 18: Relacija $q_{\max} = q_{\max}(M_2)$ za bele patuljka. Belo je oblast stabilnosti za kompaktne sisteme tipa AM CVn i njima slične. Prava $M_2/M_{\text{Ch}} = q$ predstavlja granicu do koje imamo dva bela patuljka u sistemu.

odnosno

$$\zeta(M_2) = \frac{d \ln R_2}{d \ln M_2} = -\frac{1}{3} - \frac{2}{3} \frac{\left(\frac{M_2}{M_{\text{Ch}}}\right)^{4/3}}{1 - \left(\frac{M_2}{M_{\text{Ch}}}\right)^{4/3}}. \quad (255)$$

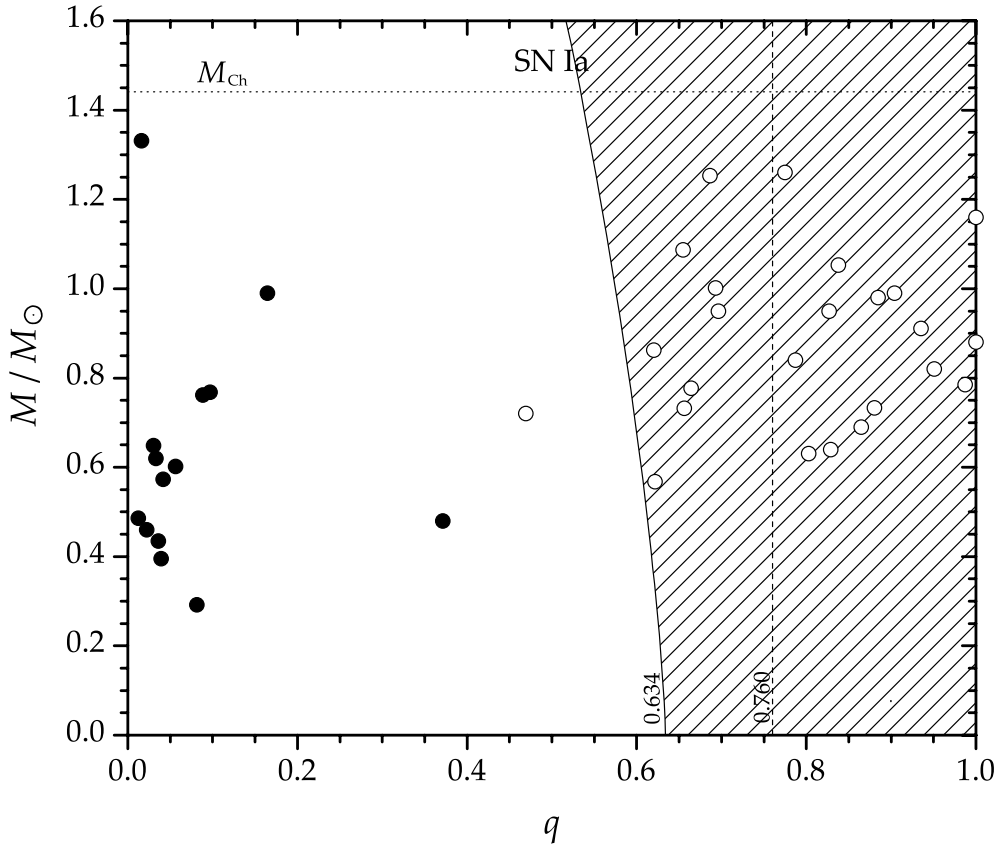
Uslov stabilnosti je sada (videti jednačine (246) i (247))

$$\frac{1}{2}\zeta(M_2) + \frac{1}{6}\eta(q) + 1 - q > 0. \quad (256)$$

Ako je $M_2 \ll M_{\text{Ch}}$, $\zeta \rightarrow -\frac{1}{3}$ (ili -0.062), numeričkim rešavanjem jednačine dobijamo maksimalni odnos masa za sisteme tipa AM CVn

$$q_{\max} = 0.634 - 0.760, \quad (257)$$

u zavisnosti od toga da li je sekundarna komponenta koja gubi masu beli patuljak ili helijumska zvezda male mase.



Slika 19: Poznati DD (beli krugovi) i sistemi tipa AM CVn (ispunjeni krugovi). Puna kriva predstavlja relaciju $q_{\max} = q_{\max}(M)$ za bele patuljke. Isprekidana vertikalna prava daje q_{\max} ako je sekundarna komponenta helijumska zvezda. Tačkasta horizontalna prava označava Čandrasekarovu masu iznad koje je moguće da se desi supernova tipa Ia, mada takvih sistema – potencijalnih kandidata nema u uzorku.

Razmotrimo dalje zavisnost nejednakosti (256) za nalaženje q od mase belog patuljka M_2 . Funkcija $\eta > 0$ se sporo menja $\eta(q) \sim \eta(0) = 1$, tako da s povećanjem M_2 funkcija $\zeta < 0$ opada, i samim tim q se smanjuje. Za $q = 0$ na osnovu (256) mora biti

$$\zeta(M_2) > -\frac{5}{3}, \quad (258)$$

odnosno

$$M_2 < \left(\frac{2}{3}\right)^{3/4} M_{\text{Ch}} \approx 0.738 M_{\text{Ch}} \approx 1.06 M_{\odot}. \quad (259)$$

Sada možemo rešiti nejednačinu (256) varirajući masu M_2 od 0 do $0.738 M_{\text{Ch}}$ i dobiti relaciju $q_{\max} = q_{\max}(M_2)$ ili $q_{\max} = q_{\max}(M)$ (slike 18 i 19). Na slici 19 prikazali smo i poznate DD i sisteme tipa AM CVn.

Pre toga bilo je potrebno proceniti verovatne mase sekundarnih komponenti za sisteme za koje je data samo donja granica za M_2 (videti tabelu 7). Ovo je moguće uraditi uz pomoć jednačine (1) koristeći neku srednju vrednost za $\sin^3 i$. Ako su orbitalne ravni dvojnih sistema slučajno orijentisane u prostoru, verovatnoća da se nagib orbite nalazi u intervalu $(i, i + di)$ je $f_i(i)di = \sin i di$. Ova raspodela daje $\langle \sin^3 i \rangle = 0.589$. Češće se, međutim, koristi $\langle \sin^3 i \rangle = 0.679$ ($i \approx 61.5^\circ$) što se dobija za raspodelu $f_i(i) = (4/\pi) \sin^2 i$ koja uzima u obzir činjenicu da je spektroskopske dvojne za koje je $i = 0^\circ$ teško detektovati (Trimble, 1974). Ovde smo radi jednostavnosti usvojili $i = 60^\circ$ (mase za pojedine sisteme su ionako prilično nepouzdanе).

Vidimo da su svi sistemi tipa AM CVn u oblasti stabilnosti. Štaviše, odnosi masa za većinu sistema su vrlo mali, što je posledica prenosa mase sa manje masivne na masivniju komponentu čime se početni odnos masa još više smanjuje. S druge strane, praktično svi (ili bar velika većina, ako uzmemo u obzir nepouzdanost masa) odvojeni DD sistemi imaju odnose mase veće od maksimalne vrednosti za početak stabilnog prenosa mase, jednom kada manje masivna komponenta ispuni svoj Rošov oval. Neispunjavanje datog kriterijuma, kao što smo rekli, znači gubitak mase sekundarne komponente u dinamičnom procesu koji verovatno rezultira sudarom (videti Postnov & Yungelson, 2006) i moguće formiranjem zvezde poput R CrB.

Da li će i retki DD sistemi koji ispunjavaju uslov za dinamički stabilan prenos mase formirati sisteme tipa AM CVn je neizvesno. Prethodno data analiza ne uključuje plimske efekte, razmenu ugaonog momenta i moguću super-Edingtonovu stopu akrecije (Postnov & Yungelson, 2006). Za očekivati je da ovi efekti nameću još strožija ograničenja za stabilnost i maksimalni odnos masa. U poslednjem slučaju materija se u potpunosti ne prikuplja akrecijom, već delom gubi iz sistema, odnoseći i deo ugaonog momenta. Sistem može biti stabilan uprkos dodatnom gubitku ugaonog momenta, ali zagrevanje materijala može dovesti do širenja i formiranja zajedničkog omotača unutar kojega će doći do sudara komponenti. Pitanje konačne sudbine DD sistema zahteva jednu dublju i komplikovaniju analizu.

6 Zaključak

Predmet ove doktorske disertacije bilo je istraživanje kontaktnih tesnih dvojnih sistema (TDS) sa ekstremno malim odnosom masa $q \lesssim 0.1$, tipa W Ursae Majoris (W UMa). Ovi TDS predstavljaju izuzetno zanimljive dvojne zvezde kod kojih se u kontaktu nalaze „normalna” zvezda Sunčeve ili nešto veće mase, i zvezda koja bi prema masi odgovarala crvenom patuljku ($M \sim 0.1M_{\odot}$). Ranija teorijska istraživanja pokazala su da postoji minimalni odnos masa $q_{\min} = 0.085 - 0.095$ iznad kojega su ovi TDS stabilni i moguće ih je posmatrati. Ako je odnos masa u sistemu manji od q_{\min} , ili ekvivalentno ako je orbitalni ugaoni momenat samo oko tri puta veći od ugaonog momenta rotacije masivnije zvezde u sistemu, sistem postaje nestabilan i dolazi do sudara u kojem dvojni sistem prestaje da postoji i nastaje jedna brzorotirajuća tzv. „zalutala plava zvezda”. Posmatranja, međutim, pokazuju da postoje TDS sa odnosom masa manjim od dobijene vrednosti za q_{\min} . Prema teoriji, verovatnoća da ovakvi sistemi budu viđeni je vrlo mala. Razrešenje ovog problema izvođenjem novog kriterijuma za stabilnost kontaktnih TDS tipa W UMa i popravljene vrednosti za minimalni odnos masa, i samim tim dovođenje teorije u bolju saglasnost sa posmatranjima, bio je osnovni zadatak ove disertacije.

U tom cilju je, po prvi put u teoriji, razmatran uticaj deformacije i unutrašnje strukture komponentata na stabilnost TDS i na vrednost q_{\min} . Najpre, pokazano je da deformacija usled rotacije i prisustva pratioca (plimskog dejstva) zapravo povećava minimalni odnos masa, i to na vrednost $q_{\min} = 0.091 - 0.103$. S druge strane, na osnovu izvedenog modela rotirajuće politrope pokazalo se da efekat povećane centralne koncentracije (odnosa gustine u centru i srednje gustine) usled rotacije reguliše i minimalni odnos masa komponentata. Saglasno ovom modelu dobijena je nova teorijska vrednost

$$q_{\min} = 0.070 - 0.074, \quad (260)$$

za stepen kontakta $f = 0 - 1$, koja je u boljoj saglasnosti sa posmatranom populacijom kontaktnih TDS.

Jedini sistem koji je trenutno još uvek ispod teorijske vrednosti za stabilnost je V857 Her koji ima manje pouzdan fotometrijski određen odnos masa. Potrebna su nova (spektroskopska) posmatranja kako bi se rešilo i ovo pitanje. Ako se pokaže da je sistem stabilan, moguće objašnjenje bi bilo da je primarna komponentna odmakla u nuklearnoj evoluciji i da je samim tim više koncentrisana.

U drugom delu disertacije razmatrani su kompaktni sistemi, pre svega sistemi tipa AM Canum Venaticorum (AM CVn) i prikazani su rezultati nekih

preliminarnih istraživanja na ovom planu, vezani za uslove njihove stabilnosti. Sistemi tipa AM CVn predstavljaju fantastične interaktivne sisteme kod kojih su obe komponente degenerisane. Takve sistem čine dva bela patuljka, od kojih jedan ispunjava Rošov oval. Sistemi tipa AM CVn, kao i sistemi tipa W UMa gube ugaoni momenat (magnetnim vetrom ili gravitacionim zračenjem) na dugim vremenskim skalama. Usled toga se kod sistema tipa W UMa orbita smanjuje, a kod sistema tipa AM CVn dešava suprotno – zbog pretakanja materije sa manje masivne na masivniju komponentu orbita se sporo povećava, tako da uslov stabilnosti daje maksimalni odnos masa: $q_{\max} \approx 2/3$. Vrednost za q_{\max} kod sistema tipa AM CVn je u ovoj disertaciji popravljena i iznosi

$$q_{\max} = 0.634 - 0.760, \quad (261)$$

u zavisnosti od toga da li je sekundarna komponenta koja gubi masu beli patuljak ili helijumska zvezda male mase. Uključivanje u teoriju drugih efekata, poput razmene ugaonog momenta ili super-Edingtonove stope akrecije, verovatno nameću još strožija ograničenja za stabilnost i maksimalni odnos masa. Pitanje formiranja sistema AM CVn i njihova veza sa odvojenim „dvostrukim” degenerisanim sistemima zahteva detaljniju analizu koju ostavljamo za buduća istraživanja.

Dodatak A

Metod rešavanja modifikovane Lejn-Emdenove jednačine

Za rešavanje modifikovane Lejn-Emdenove jednačine

$$\frac{1}{\Xi^2} \frac{d}{d\Xi} \left(\Xi^2 \frac{d\Theta}{d\Xi} \right) = -\Theta^n + v, \quad (262)$$

korišćen je metod Runge-Kuta, praktično identičan metodu opisanom u poglavlju 3.1.1. Ako uvedemo oznake $x = \Xi$, $y = \Theta$ i $z = \frac{d\Theta}{d\Xi} = \frac{dy}{dx}$, imamo :

$$y' = \frac{dy}{dx} = z, \quad (263)$$

$$z' = \frac{dz}{dx} = -y^n - \frac{2}{x}z + v. \quad (264)$$

Za poznate x_i , y_i , z_i , sa zadatim korakom $h = x_{i+1} - x_i$ potrebno je izračunati veličine

$$\begin{aligned} k_1 &= h y'(x_i, y_i, z_i), \\ l_1 &= h z'(x_i, y_i, z_i), \\ k_2 &= h y'(x_i + h/2, y_i + k_1/2, z_i + l_1/2), \\ l_2 &= h z'(x_i + h/2, y_i + k_1/2, z_i + l_1/2), \\ k_3 &= h y'(x_i + h/2, y_i + k_2/2, z_i + l_2/2), \\ l_3 &= h z'(x_i + h/2, y_i + k_2/2, z_i + l_2/2), \\ k_4 &= h y'(x_i + h, y_i + k_3, z_i + l_3), \\ l_4 &= h z'(x_i + h, y_i + k_3, z_i + l_3), \end{aligned} \quad (265)$$

gde se y' i z' računaju na osnovu jednačina (263) i (264). Vrednosti y_{i+1} i z_{i+1} u tački x_{i+1} tada nalazimo kao

$$y_{i+1} = y_i + \frac{k_1}{6} + \frac{k_2}{3} + \frac{k_3}{3} + \frac{k_4}{6}, \quad (266)$$

$$z_{i+1} = z_i + \frac{l_1}{6} + \frac{l_2}{3} + \frac{l_3}{3} + \frac{l_4}{6}. \quad (267)$$

Uslovi u centru ($x = 0$) su poznati: $y(0) = 1$, $z(0) = 0$. Pretpostavimo da je u okolini centra funkcija $y = \Theta$ data u obliku polinoma. S obzirom na granične uslove biće

$$\Theta(\Xi) = 1 + c_1 \Xi^2 + c_2 \Xi^4 + \dots \quad (268)$$

Zahtevajući da polinom (268) bude rešenje jednačine (262) dobijamo

$$6c_1 + 20c_2\Xi^2 + \dots \approx -(1 + c_1n\Xi^2 + \dots) + v \quad (269)$$

odakle nalazimo koeficijente

$$\begin{aligned} c_1 &= -\frac{1-v}{6}, \\ c_2 &= -\frac{n}{20}c_1 = \frac{1-v}{120}n. \end{aligned} \quad (270)$$

Jednačinu (268) sada možemo iskoristiti da započnemo integraciju. Površinu, odnosno radijus politrope Ξ_1 nalazimo iz uslova $y = \Theta = 0$.

Ako je korak h dovoljno mali, bezdimenzioni žiro-radijus

$$k_1^2 = -\frac{2}{3} \frac{\int_0^{\Xi_1} \Xi^4 \Theta^n d\Xi}{\Xi_1^4 \left(\frac{d\Theta}{d\Xi} \Big|_{\Xi=\Xi_1} - \frac{v}{3}\Xi_1 \right)} \quad (271)$$

možemo najjednostavnije izračunati trapeznim pravilom ili sličnom metodom, nakon što rešimo strukturu.

Dodatak B

Izvođenje i metod rešavanja modifikovane Kleroove jednačine

Pretpostavimo da su radijalna koordinata (udaljenost od centra) r i srednji radijus R zvezde deformisane usled rotacije i prisustva pratioaca (plimskih sila) u dvojnemu sistemu povezani relacijom

$$r \approx R[1 - \alpha(R)P_2(\cos \theta) - \beta(R)P_2(\cos \theta')], \quad (272)$$

gde je P_2 Ležandrov polinom $P_2(\mu) = \frac{1}{2}(3\mu^2 - 1)$, $\mu = \cos \theta$; ugao θ meri se u odnosu na osu rotacije, dok se ugao θ' meri od linije koja spaja zvezde, tj. njihove centre. Ako su α i β male veličine, na osnovu jednačine (272) možemo pisati (Eggleton, 2006)

$$R \approx r[1 + \alpha(r)P_2(\cos \theta) + \beta(r)P_2(\cos \theta')], \quad (273)$$

$$\begin{aligned} |\nabla R|^2 &\approx 1 + 2\nabla(r\alpha)P_2(\cos \theta) + 2\nabla(r\beta)P_2(\cos \theta') \\ &\approx 1 + 2\frac{d(R\alpha)}{dR}P_2(\cos \theta) + 2\frac{d(R\beta)}{dR}P_2(\cos \theta'), \end{aligned} \quad (274)$$

$$\begin{aligned} \Delta R &\approx \frac{2}{r} + \left(\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 \frac{d(r\alpha)}{dr}) - \frac{6\alpha}{r} \right) P_2(\cos \theta) \\ &+ \left(\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 \frac{d(r\beta)}{dr}) - \frac{6\beta}{r} \right) P_2(\cos \theta'), \\ &\approx \frac{2}{R} + \frac{2\alpha}{R} P_2(\cos \theta) + \frac{2\beta}{R} P_2(\cos \theta') \\ &+ \left(\frac{1}{R^2} \frac{d}{dR} (R^2 \frac{d(R\alpha)}{dR}) - \frac{6\alpha}{R} \right) P_2(\cos \theta) \\ &+ \left(\frac{1}{R^2} \frac{d}{dR} (R^2 \frac{d(R\beta)}{dR}) - \frac{6\beta}{R} \right) P_2(\cos \theta'), \end{aligned} \quad (275)$$

gde smo iskoristili činjenicu da je $\Delta P_l(\mu) = -\frac{l(l+1)}{r^2}P_l(\mu)$. Uz pomoć jednačina (274) i (275) imamo

$$\begin{aligned} \Delta \Phi_{\text{eff}} &= \frac{d^2 \Phi_{\text{eff}}}{dR^2} |\nabla R|^2 + \frac{d\Phi_{\text{eff}}}{dR} \Delta R \\ &= \Phi_{\text{eff}}'' + \frac{2}{R} \Phi_{\text{eff}}' + \left[R\alpha'' + 4\alpha' - \frac{2\alpha}{R} + 2\frac{\Phi_{\text{eff}}''}{\Phi_{\text{eff}}} (R\alpha' + \alpha) \right] \Phi_{\text{eff}}' P_2(\cos \theta) \\ &+ \left[R\beta'' + 4\beta' - \frac{2\beta}{R} + 2\frac{\Phi_{\text{eff}}''}{\Phi_{\text{eff}}} (R\beta' + \beta) \right] \Phi_{\text{eff}}' P_2(\cos \theta') \\ &= 4\pi G\rho(R) - 2\Omega^2. \end{aligned} \quad (276)$$

Jednačina (276) važi za svako θ , odnosno θ' , tako da mora biti

$$\frac{d^2\Phi_{\text{eff}}}{dR^2} + \frac{2}{R} \frac{d\Phi_{\text{eff}}}{dR} = 4\pi G\rho(R) - 2\Omega^2, \quad (277)$$

što se svodi na modifikovanu Lejn-Emdenovu jednačinu (262), i

$$\frac{d^2\alpha}{dR^2} - \frac{6\alpha}{R^2} + \frac{2R(G\frac{dm}{dR} - 2\Omega^2 R^2)}{Gm - \frac{2}{3}\Omega^2 R^3} \left(\frac{1}{R} \frac{d\alpha}{dR} + \frac{\alpha}{R^2} \right) = 0, \quad (278)$$

gde smo iskoristili jednačine (168) i (169). Istu jednačinu imamo za β , a pošto ove dve funkcije zadovoljavaju iste granične uslove, možemo uzeti $\alpha = \beta$. Jednačina (278) predstavlja modifikovanu Kleroovu jednačinu. Ako je Ω malo ($r \approx R$) dobijamo Kleroovu jednačinu u standardnom obliku

$$\frac{d^2\alpha}{dr^2} - \frac{6\alpha}{r^2} + \frac{6\rho}{\bar{\rho}} \left(\frac{1}{r} \frac{d\alpha}{dr} + \frac{\alpha}{r^2} \right) = 0, \quad (279)$$

gde je $\bar{\rho}(r) = \frac{3m(r)}{4\pi r^3}$ srednja gustina.

Nakon sređivanja (videti jednačinu (79) i dalje),

$$\frac{d^2\alpha}{dR^2} - \frac{6\alpha}{R^2} + 2R \frac{4\pi G\rho R^2 - 2\Omega^2 R^2}{R^2 \frac{d\Phi_{\text{eff}}}{dR}} \left(\frac{1}{R} \frac{d\alpha}{dR} + \frac{\alpha}{R^2} \right) = 0, \quad (280)$$

$$\frac{d^2\alpha}{dR^2} - \frac{6\alpha}{R^2} - 2R \frac{\frac{\rho}{\rho_c} - \frac{\Omega^2}{2\pi G\rho_c}}{\frac{K(n+1)}{4\pi G\rho_c} \frac{d\rho^{1/n}}{dR}} \left(\frac{1}{R} \frac{d\alpha}{dR} + \frac{\alpha}{R^2} \right) = 0, \quad (281)$$

jednačina (278) u našoj notaciji, glasi

$$\frac{d^2\alpha}{d\Xi^2} - \frac{6\alpha}{\Xi^2} - \frac{2\Xi(\Theta^n - v)}{d\Theta/d\Xi} \left(\frac{1}{\Xi} \frac{d\alpha}{d\Xi} + \frac{\alpha}{\Xi^2} \right) = 0. \quad (282)$$

Jednačinu (282) ponovo rešavamo metodom Runge-Kuta, s tim što je sada

$$y' = \frac{dy}{dx} = z, \quad (283)$$

$$z' = \frac{6y}{x^2} + \frac{2x(Y^n - v)}{Z} \left(\frac{z}{x} + \frac{y}{x^2} \right), \quad (284)$$

gde je $x = \Xi$, $y = \alpha$ i $z = \frac{d\alpha}{d\Xi} = \frac{dy}{dx}$, $Y = \Theta$, $Z = \frac{d\Theta}{d\Xi} = \frac{dY}{dx}$. Zavisnost $\Theta = \Theta(\Xi)$ je data tabelarno (dobijena je rešavanjem modifikovane Lejn-Emdenove jednačine). Da bi primenili jednačine (265)–(267) potrebne su nam vrednosti Y i Z za $x_i + h/2$ (pretpostavili smo da Lejn-Emdenovu

i Kleroovu jednačinu rešavamo sa istim korakom h). Njih možemo dobiti iz jednačina (265)–(267) smanjivanjem koraka, linearnom interpolacijom (usrednjavanjem) ili razvojem u red

$$\begin{aligned} Y &= Y_k + \frac{dY}{dx} \Big|_{x=x_k} (x - x_k) + \frac{d^2Y}{dx^2} \Big|_{x=x_k} \frac{(x - x_k)^2}{2} + \dots, \\ Z &= Z_k + \frac{dZ}{dx} \Big|_{x=x_k} (x - x_k) + \dots, \end{aligned} \quad (285)$$

oko tačke $x_i = x_1$:

$$\begin{aligned} Y &\approx Y_1 + Z_1(x - x_1) + (-Y_1^n + v - \frac{2Z_1}{x_1}) \frac{(x - x_1)^2}{2}, \\ Z &\approx Z_1 + (-Y_1^n + v - \frac{2Z_1}{x_1})(x - x_1), \end{aligned} \quad (286)$$

i tačke $x_{i+1} = x_2$:

$$\begin{aligned} Y &\approx Y_2 + Z_2(x - x_2) + (-Y_2^n + v - \frac{2Z_2}{x_2}) \frac{(x - x_2)^2}{2}, \\ Z &\approx Z_2 + (-Y_2^n + v - \frac{2Z_2}{x_2})(x - x_2), \end{aligned} \quad (287)$$

i nalaženjem srednjih vrednosti

$$\begin{aligned} \langle Y \rangle &= \frac{Y_1 + Y_2 + (Z_1 - Z_2) \frac{h}{2} - (Y_1^n + Y_2^n + \frac{2Z_1}{x_1} + \frac{2Z_2}{x_2} - 2v) \frac{h^2}{8}}{2}, \\ \langle Z \rangle &= \frac{Z_1 + Z_2 + (Y_2^n - Y_1^n + \frac{2Z_2}{x_2} - \frac{2Z_1}{x_1}) \frac{h}{2}}{2}, \end{aligned} \quad (288)$$

gde smo pisali $x - x_1 = h/2$ i $x - x_2 = -h/2$.

Kako jednačina (282) tj. (284) nije određena u $x = 0$ potrebno je y , odnosno α , ponovo razviti u red. Pretpostavimo da je

$$\alpha(\Xi) = c_0 + c_1 \Xi + c_2 \Xi^2 + \dots \quad (289)$$

Za $\frac{\Theta^n - v}{\frac{d\Theta}{d\Xi}}$ u okolini centra, uz pomoć jednačina (268) i (270) imamo

$$\frac{\Theta^n - v}{\frac{d\Theta}{d\Xi}} \approx \frac{1 - \frac{1-v}{6} n \Xi^2 - v}{-2 \frac{1-v}{6} \Xi + 4 \frac{1-v}{120} n \Xi^3} = -\frac{1}{2\Xi} \cdot \frac{6 - n \Xi^2}{1 - \frac{n}{10} \Xi^2} \approx -\frac{6}{2\Xi} (1 - \frac{n}{15} \Xi^2), \quad (290)$$

tako da jednačina (282) daje

$$\begin{aligned} 2c_2 - \frac{6c_0}{\Xi^2} - \frac{6c_1}{\Xi} - 6c_2 + 2\Xi \frac{6}{2\Xi} (1 - \frac{n}{15} \Xi^2) (\frac{c_1}{\Xi} + 2c_2 + \frac{c_0}{\Xi^2} + \frac{c_1}{\Xi} + c_2) = \\ -\frac{6c_0}{\Xi^2} - \frac{6c_1}{\Xi} - 4c_2 + 6(1 - \frac{n}{15} \Xi^2) (\frac{c_0}{\Xi^2} + 2\frac{c_1}{\Xi} + 3c_2) \approx \\ \frac{6c_1}{\Xi} - 4c_2 + 18c_2 - \frac{6}{15} n c_0 = 0. \end{aligned} \quad (291)$$

Odatle sledi

$$c_1 = 0. \quad (292)$$

Kako je α određeno do na proizvoljnu multiplikativnu konstantu (videti jednačinu (282)), možemo izabrati

$$c_0 = 1, \quad (293)$$

tako da imamo

$$c_2 = \frac{n}{35}c_0 = \frac{n}{35}. \quad (294)$$

Integraciju sada možemo započeti u tački proizvoljno bliskoj nuli koristeći jednačinu (289) i koeficijente iz (292) – (294).

Rešivši Kleroovu jednačinu nalazimo (Eggleton, 2006)

$$\begin{aligned} \tilde{Q} &= \frac{4\pi}{5M_1R_1^2\alpha_1} \int_0^{R_1} (5\alpha + R\frac{d\alpha}{dR})R^4\rho(R)dR \\ &= -\frac{1}{5} \frac{\int_0^{\Xi_1} (5\alpha + \Xi\frac{d\alpha}{d\Xi})\Xi^4\Theta^n d\Xi}{\Xi_1^4(\frac{d\Theta}{d\Xi}|_{\Xi=\Xi_1} - \frac{v}{3}\Xi_1)\alpha_1}, \end{aligned} \quad (295)$$

gde je $\alpha_1 = \alpha(\Xi_1)$, i konačno, „konstantu pomeranja apsidne linije”:

$$k_{AM} = \frac{1}{2} \frac{\tilde{Q}}{1 - \tilde{Q}}. \quad (296)$$

Dodatak C

Program za rešavanje modifikovane Lejn-Emdenove i Klerooove jednačine

U nastavku je dat program u IDL-u koji rešava modifikovanu Lejn-Emdenovu i Klerooovu jednačinu, i nalazi bezdimenzioni žiro-radijus k_1 i „konstantu pomeranja apsidne linije” k_{AM} .

```
PRO distorted
FILENAME = 'profil.dat'
FILENAME2 = 'tabela.dat'
FILENAME3 = 'alpha.dat'
FILENAME4 = 'tabela2.dat'
;Racunanje strukture
n = 3.0d
;n = 1.5d
h = 1.d-4
v = 0.00d
w = 0.0066d
;w = 0.083d
OPENW, 2, FILENAME2
OPENW, 4, FILENAME4
WHILE v lt w DO BEGIN
x = 0.d
y = 1.d
z = 0.d
OPENW, 1, FILENAME
printf, 1, x, y, z
x = x + h
y = 1. - x^2*(1.-v)/6. + n*(1.-v)/120.*x^4
z = -x*(1.-v)/3. + n*(1.-v)/30.*x^3
repeat begin
printf, 1, x, y, z
k1 = h*dy(z)
l1 = h*dz(x,y,z,v,n)
k2 = h*dy(z+l1/2.)
l2 = h*dz(x+h/2.,y+k1/2.,z+l1/2.,v,n)
k3 = h*dy(z+l2/2.)
```

```

l3 = h*dz(x+h/2.,y+k2/2.,z+l2/2.,v,n)
k4 = h*dy(z+l3)
l4 = h*dz(x+h,y+k3,z+l3,v,n)
x = x + h
y = y + k1/6. + k2/3. + k3/3. + k4/6.
z = z + l1/6. + l2/3. + l3/3. + l4/6.
endrep until ((y lt h^4) or FINITE(y, /NaN))
CLOSE, 1
;Racunanje k^2
SUM1 = 0.d
SUM2 = 0.d
OPENR, 1, FILENAME
READF, 1, x1, y1, z1
WHILE NOT EOF(1) DO BEGIN
READF, 1, x1, y1, z1
if NOT EOF(1) then begin
READF, 1, x2, y2, z2
endif else begin
x2=0.d
y2=0.d
endelse
SUM1 = SUM1 + x1^4*y1^n*2*h
SUM2 = SUM2 + x2^4*y2^n*2*h
ENDWHILE
CLOSE, 1
if x2 gt 0.d then begin
x1 = x2
z1 = z2
endif
SUM1 = -2.d/3.d/(z1-v/3.d*x1)/x1^4*SUM1
SUM2 = -2.d/3.d/(z1-v/3.d*x1)/x1^4*SUM2
y1 = -x1/(z1-v/3.d*x1)/3.d
print, n, v, x1, z1, y1, (SUM1+SUM2)/2.d
printf, 2, n, v, x1, z1, y1, (SUM1+SUM2)/2.d
;Racunanje distorzije
x = 0.d
y = 1.d
z = 0.d
OPENR, 1, FILENAME
OPENW, 3, FILENAME3
readf, 1, x1, y1, z1

```

```

printf, 3, x, y, z
readf, 1, x1, y1, z1
x = x1
y = 1.d + x^2*n/35.
z = x*2*n/35.
printf, 3, x, y, z
WHILE NOT EOF(1) DO BEGIN
readf, 1, x2, y2, z2
SUM1=(y1+y2+(z1-z2)*h/2.)/2.
SUM1=SUM1-((y1^n+y2^n+2.*z1/x1+2.*z2/x2-2*v)*h^2/8.)/2.
SUM2=(z1+z2+(-y1^n+y2^n-2.*z1/x1+2.*z2/x2)*h/2.)/2.
k1 = h*dy(z)
l1 = h*dz2(x,y,z,v,n,y1,z1)
k2 = h*dy(z+l1/2.)
l2 = h*dz2(x+h/2.,y+k1/2.,z+l1/2.,v,n,SUM1,SUM2)
k3 = h*dy(z+l2/2.)
l3 = h*dz2(x+h/2.,y+k2/2.,z+l2/2.,v,n,SUM1,SUM2)
k4 = h*dy(z+l3)
l4 = h*dz2(x+h,y+k3,z+l3,v,n,y2,z2)
x1=x2
y1=y2
z1=z2
x = x + h
y = y + k1/6. + k2/3. + k3/3. + k4/6.
z = z + l1/6. + l2/3. + l3/3. + l4/6.
printf, 3, x, y, z
ENDWHILE
CLOSE, 1
CLOSE, 3
;Racunanje Q
SUM1 = 0.d
SUM2 = 0.d
OPENR, 1, FILENAME
OPENR, 3, FILENAME3
READF, 1, x1, y1, z1
WHILE NOT EOF(1) DO BEGIN
READF, 1, x1, y1, z1
READF, 3, x, y, z
if NOT EOF(1) then begin
READF, 1, x2, y2, z2
READF, 3, x3, y3, z3

```

```

endif else begin
x2=0.d
y2=0.d
endelse
SUM1 = SUM1 + x1^4*y1^n*(5.*y+x1*z)*2.*h
SUM2 = SUM2 + x2^4*y2^n*(5.*y3+x2*z3)*2.*h
ENDWHILE
CLOSE, 1
CLOSE, 3
if x2 gt 0.d then begin
x1 = x2
z1 = z2
y = y3
endif
SUM1 = -1.d/5.d/(z1-v/3.d*x1)/x1^4/y*SUM1
SUM2 = -1.d/5.d/(z1-v/3.d*x1)/x1^4/y*SUM2
print, n, v, SUM1, SUM2
x = (SUM1+SUM2)/2.d
x = x/(1.-x)/2.d
printf, 4, n, v, (SUM1+SUM2)/2.d, x
v = v+0.0001d
;v = v+0.001d
ENDWHILE
CLOSE, 2
CLOSE, 4
end

FUNCTION dy, z, dbl=dbl
return, z
END

FUNCTION dz, x, y, z, c, n, dbl=dbl
f = -y^n-2./x*z+c
return, f
END

FUNCTION dz2, x, y, z, c, n, y1, z1, dbl=dbl
f = 6.d*y/x^2. + 2.d*(y1^n - c)*(z + y/x)/z1
return, f
END

```


Literatura

- Abt H. A., 1983, *Annu. Rev. Astron. Astrophys.*, **21**, 343
- Allen C.W., 1973, *Astrophysical Quantities*, 3th ed., London: Athlone Press, str.161
- Arbutina B., 2005, *Značaj tipa supernove za hidrodinamičku i radio-evoluciju njenog ostatka*, Magistarska teza, Univerzitet u Beogradu
- Arbutina B., 2007, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **377**, 1635
- Arbutina B., 2009, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **394**, 501
- Chandrasekhar S., 1958, *An Introduction to the Study of Stellar Structure*, New York: Dover
- Chandrasekhar S., 1987, *Ellipsoidal Figures of Equilibrium*, New York: Dover
- Counselman C.C., 1973, *Astrophys. J.*, **180**, 307
- Cox J.P., Giuli R.T., 1968, *Principles of Stellar Structure*, New York: Gordon & Breach, str. 707
- Darwin G.H., 1879, *Proc. Roy. Soc. London*, **29**, 168
- Djurašević G., Zakirov M., Erkačić S., 1999, *Astron. Astrophys.*, **343**, 894
- Djurašević G., Albayrak B., Selam S.O., Erkačić S., Senavci S.W., 2004, *New Astron.*, **9**, 425
- Eggleton P.P., 1983, *Astrophys. J.*, **268**, 368
- Eggleton P.P., 2006, *Evolutionary Processes in Binary and Multiple Stars*, Cambridge: Cambridge University Press, str. 119, 121, 128
- Gazeas K.D., Niarchos P.G., 2006, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **370**, L29
- Gazeas K.D., Niarchos P.G., Zola S., Kreiner J. M., Rucinski S. M., 2006, *Acta Astron.*, **56**, 127
- Geier S., Nesslinger S., Heber U., Przybilla N., Napiwotzki R., Kudritzki R.-P., 2007, *ASP Conf. Ser.*, **372**, 393
- Geier S., Nesslinger S., Heber U., Przybilla N., Napiwotzki R., Kudritzki R.-P., 2007, *Astron. Astrophys.*, **464**, 299
- Gimenez A., Garcia-Pelayo J.M., 1982, u *Binary and Multiple Stars as Tracers of Stellar Evolution*, IAU Coll. 69, ured. Kopal Z., Rahe J., Dordrecht: Reidel
- Hansen C.J., Kawaler S.D., 1994, *Stellar Interiors – Physical Principles, Structure and Evolution*, New York: Springer
- Hartkopf W.I., 1992, u *Complementary Approaches to Double and Multiple Star Research*, IAU Coll. 135, ured. McAlister H. A., Hartkopf W. I., *ASP Conf. Ser.*, **32**, 459
- Hilditch R.W., Bell S.A., Hill G., Harries T.J., 1998, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **299**, 100

- Hilditch R.W., 2001, *An Introduction to Close Binary Stars*, Cambridge: Cambridge University Press, str.11, 291
- Hulse R.A., Taylor J.H., 1975, *Astrophys. J.*, **195**, L51
- Hut P., 1980, *Astron. Astrophys.*, **92**, 167
- Iben I. Jr., Tutukov A.V., 1984, *Astrophys. J. Suppl. Ser.*, **54**, 335
- James R. A., 1964, *Astrophys. J.*, **140**, 552
- Kaluzny J., Shara M. M., 1988, *Astron. J.*, **95**, 785
- Karl C.A., Napiwotzki R., Nelemans G., Christlieb N., Koester D., Heber U., Reimers D., 2003, *Astron. Astrophys.*, **410**, 663
- Kopal Z., 1959, *Close Binary Systems*, London: Chapman & Hall
- Kopal Z., 1978, *Dynamics of Close Binary Systems*, Dordrecht: Reidel
- Lai D., Rasio F.A., Shapiro S.L., 1993, *Astrophys. J. Suppl. Ser.*, **88**, 205
- Lai D., Rasio F.A., Shapiro S.L., 1994a, *Astrophys. J.*, **423**, 344
- Lai D., Rasio F.A., Shapiro S.L., 1994b, *Astrophys. J.*, **437**, 742
- Lewin W.H.G., van Paradijs J., van den Heuvel E.P.J., ured., 1995, *X-ray Binaries*, Cambridge: Cambridge University Press
- Li L., Zhang F., 2006, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **369**, 2001
- Lombardi J.C. Jr., Warren J.S., Rasio F.A., Sills A., Warren A.R., 2002, *Astrophys. J.*, **568**, 939
- Lorimer D.R., 2003, *Living Rev. Relativity*, **6**, 5
- Lu W., Rucinski S.M., 1999, *Astron. J.*, **118**, 515
- Lucy L.B., 1976, *Astrophys. J.*, **342**, 1003
- Lyne A.G. et al., 2004, *Science*, **303**, 1153
- McLean B.J., Hilditch R.W., 1983, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **203**, 1
- Milanković M., 1997, *Nebeska mehanika*, Beograd: ZUNS, str. 213
- Misner C.W., Thorne K.S., Wheeler J.A., 1973, *Gravitation*, San Francisco: Freeman & Co.
- Mochnecki S.W., 1984, *Astrophys. J. Suppl. Ser.*, **55**, 551
- Napiwotzki R., Edelmann H., Heber U., Karl C., Drechsel H., Pauli E.-M., Christlieb N., 2001, *Astron. Astrophys.*, **378**, L17
- Napiwotzki, R.; Koester, D.; Nelemans, G.; Yungelson, L.; Christlieb, N.; Renzini, A.; Reimers, D.; Drechsel, H.; Leibundgut, B., 2002, *Astron. Astrophys.*, **386**, 957
- Napiwotzki R. et al., 2004, *ASP Conf. Ser.*, **318**, 402
- Napiwotzki R., 2005, *ASP Conf. Ser.*, **330**, 27
- Nelemans G., Napiwotzki R., Karl C., Marsh T. R., Voss B., Roelofs G., Izzard R. G., Montgomery M., Reerink T., Christlieb N., Reimers D., 2005, *Astron. Astrophys.*, **440**, 1087

- Paczynski B., 1976, *IAU Symp.*, **73**, 75
- Paczyński B., Sienkiewicz R., Szczygiel D.M., 2007, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **378**, 961
- Petrie R. M., 1960, *Ann. Astrophys.*, **23**, 744
- Phinney E.S., Kulkarni S.R., 1994, *Annu. Rev. Astron. Astrophys.*, **32**, 591
- Postnov K.A., Yungelson L.R., 2006, *Living Rev. Relativity*, **9**, 6
- Poveda A., Allen C., Parrao L., 1982, *Astrophys. J.*, **258**, 589
- Press W.H., Teukolsky S.A., Flannery W.T., Vetterling W.T., 1992, *Numerical Recipes – The Art of Scientific Computing*, Cambridge: Cambridge University Press
- Pribulla T., Rucinski S.M., 2008, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **386**, 377
- Pribulla T., Rucinski S.M., DeBond H., de Ridder A., Karmo T., Thomson J.R., Croll B., Ogloza W., Pilecki B., Siwak M., 2008, *Astron. J.*, **137**, 3646
- Qian S., Zhu L., Soonthornthum B., Yuan J., Yang J., He J., 2005, *Astron. J.*, **130**, 1206
- Qian S., Yang J., Zhu L., He J., Yuan J., 2006, *Astrophys. Space Sci.*, **304**, 25
- Quataert E.J., Kumar P., Ao C.O., 1996, *Astrophys. J.*, **463**, 284
- Rasio F.A., 1995, *Astrophys. J.*, **444**, L41
- Rasio F.A., Shapiro S.L., 1995, *Astrophys. J.*, **438**, 887
- Rucinski S.M., 1992, *Astron. J.*, **104**, 1968
- Rucinski S.M., 2001, *Astron. J.*, **122**, 1007
- Rucinski S.M., 1999, u *Precise Radial Velocities*, IAU Coll. 170, ured. Hearnshaw J.B., Scarfe C.D., *ASP Conf. Ser.*, **185**, 82
- Rucinski S.M., Lu W., 1999, *Astron. J.*, **118**, 2451
- Rucinski S.M., Lu W.X., Mochnacki S.W., Ogloza W., Stachowski G., 2001, *Astron. J.*, **122**, 1974
- Rucinski S.M., et al., 2005, *Astron. J.*, **130**, 767
- Schutz B.F., 2004, *A First Course in General Relativity*, Cambridge: Cambridge University Press
- Shapiro S.L., Teukolsky S.A., 1983, *Black Holes, White Dwarfs and neutron Stars – The Physics of Compact Objects*, New York: John Wiley & Sons
- Shu F.H., Lubow S.H., Anderson L., 1976, *Astrophys. J.*, **209**, 536
- Shu F.H., Lubow S.H., Anderson L., 1979, *Astrophys. J.*, **229**, 223
- Shu F.H., Lubow S.H., Anderson L., 1980, *Astrophys. J.*, **239**, 937
- Shu F., 1991, *The Physics of Astrophysics vol. I – Radiation*, Sausalito: University Science Books
- Shu F., 1992, *The Physics of Astrophysics vol. II – Gas Dynamics*, Sausalito: University Science Books

- Stairs I.H., 2004, *Science*, **304**, 547
- Stairs I.H., 2005, *Living Rev. Relativity*, **8**, 7
- Stepień K., 1995, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **274**, 1019
- Stepień K., 2006, *Acta Astron.*, **56**, 199
- Stroeer A., Vecchio A., 2006, *Class. Quantum Grav.*, **23**, S809
- Szalai T., Kiss L.L., Mészáros Sz., Vinkó J., Csizmadia Sz., 2007, *Astron. Astrophys.*, **465**, 943
- Tassoul J.-L., 1978, *Theory of Rotating Stars*, Princeton: Princeton University Press, str.244
- Tassoul J.-L., 2000, *Stellar Rotation*, Cambridge: Cambridge University Press
- Thorsett S.E., Arzoumanian Z., Taylor J.H., 1993, *Astrophys. J.*, **412**, L33
- Tout C.A., Hall D.S., 1991, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **253**, 9
- Tovmassian G.H., Napiwotzki R., Richer M.G., Stasinska G., Fullerton A.W., Rauch T., 2004, *Astrophys. J.*, **616**, 485
- Trimble V., 1974, *Astron. J.*, **79**, 967
- Tutukov A.V., Fedorova A.V., 1989, *Sov. Astron.*, **33**, 606
- Verbunt F., 1993, *Annu. Rev. Astron. Astrophys.*, **31**, 93
- Wang J.M., 1994, *Astrophys. J.*, **434**, 277
- Warner B., 1995, *Cataclismic Variable Stars*, Cambridge: Cambridge University Press
- Weber E.J., Davis L., 1967, *Astrophys. J.*, **148**, 217
- Whelan J., Iben I. Jr., 1973, *Astrophys. J.*, **186**, 1007
- Wilson R.E., Devinney E.J., 1971, *Astrophys. J.*, **166**, 605
- Wolszczan A., Frail D.A., 1992, *Nature*, **355**, 145
- Yakut K., Eggleton P.P., 2005, *Astrophys. J.*, **629**, 1055
- Zola S., Rucinski S. M., Baran A., Ogloza W., Pych W., Kreiner J. M., Stachoski G., Gazeas K., Niarchos P., Siwak M., 2004, *Acta Astron.*, **54**, 299