Душан Адамовић, Драган Аранђеловић
Dušan Adamović, Dragan Aranđelović

СЛОБОДАН АЉАНЧИЋ
SLOBODAN ALJANČIĆ
(1922–1993)

Отисак из публикације *Живот и дело српских научника, 10*
(Српска академија наука и уметности, Биографије и библиографије,
књ. X, II одељење, књ. 10)

Reprinted from the publication: *Lives and work of the Serbian scientists, 10*
(Serbian Academy of Sciences and Arts, Biographies and bibliographies
vol. X, II section, book 10

BEOGRAD – BELGRADE
2005

Слободан Аљанчић, Београђанин по рођењу и по безмало чтиавом животу проведеном у овом граду, дугогодишњи редовни професор на Природноматематичком, касније Математичком факултету Београдског универзитета и редовни члан Српске академије наука од своје 46. године, био је један од најистакнутијих математичких научних стваралаца и педагошких делатника у нашој средини у другој половини двадесетог века. Он је, свакако, био личност која је у читавој нашој математичкој јавности – не само београдској и српској, него и на просторима тадашње Југославије – уживао поштовање и симпатију, као ретко савестан, озбиљан и успешан научни радник и као темељни познавалац пространих подручја савремене математичке анализе, а не мање као особа изузетних људских особина. Значајну афирмацију стекао је резултатима свог научног рада и на међународној математичкој сцени.

ЖИВОТНИ ТОК

Слободан Аљанчић рођен је 12. марта 1922. године у Београду. Његов отац Зденко Аљанчић (рођен 1889. године), Словенац по оцу а Чех по мајци, више се заправо осећао Чехом и боље је у детињству говорио чешки него словеначки језик. Завршивши у Аустроугарској војне школе, дочекао је крај Првог светског рата као аустроугарски официр, капетан I класе. По завршетку рата био је неколико година у активној служби у тадашњој југословенској војсци у којој је стекао чин мајора, а касније се бавио цивилним пословима. Други светски рат провео је у заробљеништву као резервни официр. После рата, радио је на Војној енциклопедији. Мати Бисенија, рођена Милошевић, потиче из грађанске породице досељене у Београд из унутрашњости Србије. Завршила је средњу школу, али се углавном бавила домаћим пословима. Аљанчић је имао старијег брата Јерка, који је био машински инжењер, а изненада је умро у 48. години.

Основну школу и тада елитну Трећу мушку гимназију Слободан Аљанчић завршио је у Београду. После матуре, коју је као одличан ђак положио 1940. године, уписао је студије грађевинске технике на београдском Техничком факултету. Рат и окупација фактички су прекинули ове студије. Међутим, то време, које је многима било стварни узрок или добар изговор за прекид школовања и рада на сопственом образовању, он је искористио да уз помоћ професора Кашанина, и набављене уџбеничке и друге литературе, савлада практично цео програм студија математике, за коју се у међувремену загрејао и којој се потпуно предао изгубивши интерес за технику. По завршетку рата и формално је прешао на Математичку групу Филозофског факултета, на којој је дипломирао јуна 1947. године. Пре тога венчао се 1946. године с Иванком Јосифовић, која је студирала економију и касније радила као административни и банкарски службеник. Говорила је више страних језика. Њихова кћи Ивана сада је професор на Хемијском факултету у Београду.

Као студент, Аљанчић је испољавао жељу да самостално научно ради и већ је пре краја студија завршио свој први научни текст *Sur une formule sommatoire généralisée (О једној уопштеној сумационој формули),* објављен 1948. године у Публикацијама Математичког института Српске академије наука. Према компетентним оценама, тај његов први рад није почетнички и у њему је показана одређена зрелост, способност да се постављени проблем у потпуности реши и добијено решење адекватно интерпретира и искористи. Овај Аљанчићев упоран и истрајан рад, у тешким ратним и можда још тежим условима у првим послератним годинама, не само на успешном окончању студија него и на даљем математичком усавршавању, показује колико је већ тада имао јасно обликоване основне циљеве и опредељења, као и чврсту решеност да их остварује. О њему у овом периоду завршавања студија и почетка активног научног рада академик Миодраг Томић, касније И кроз цео његов живот његов блиски сарадник и пријатељ, написао је: „Негде под јесен 1946. срео сам га, док сам био асистент код професора Карамате, на Природно-математичком факултету. Имао је велико знање и још већу жељу за новим сазнањима. И тада, а и доцније кад смо постали пријатељи и сарадници, он је показивао ретку особину да сваку ствар настоји да проучи до основа, да продре у срж проблема, али и да буде обазрив и критичан према своме раду, и то на сваком кораку... Он је био од оних стваралаца код којих жеље нису ишле изнад могућности, али који теже сталном напретку и угледању на добре радове... Успех у науци дошао је врло брзо. И тај успех је резултат не само његовог дара, већ и неуморног, напорног рада првих поратних година испуњених и свим могућим тешкоћама.“

После дипломирања, Аљанчић је радио као професор-приправник у Грађевинској средњетехничкој школи у Београду, а истовремено и као хонорарни асистент на Природно-математичком факултету све до 1951. године, када је на истом факултету изабран за сталног асистента. Настављајући научну активност, објавио је неколико радова посвећених темама из математичке анализе, оријентишући се притом претежно на проблематику асимптотских редова, односно развитака. Овој области у потпуности припада и његова докторска дисертација под насловом *О асимптотском развијању А-збирљивих линеарних функционела,* одбрањена јануара 1952. године у Српској академији наука (што је тада, према постојећем закону, још било могуће) пред комисијом коју су чинили академици Милутин Миланковић, Војислав Мишковић, Јован Карамата и Радивоје Кашанин, као и доцент Миодраг Томић. Његов даљи научни развој и универзитетска наставничка каријера текли су континуирано, сигурно и доста брзо, али не и пребрзо, без спољашње спектакуларности. За доцента је изабран марта 1954. године и тада, пошто је неколико година пре тога као прво хонорарни па потом стални асистент веома успешно водио вежбе из више математичких предмета, преузима предавање разних курсева опште математике и математичке анализе, за математичаре и за студенте нематематичких група на Факултету. Његов научни рад у каснијим педесетим годинама претежно се усмеравао ка теорији апроксимације с једне и ка од Јована Карамате иницираној и утемељеној теорији правилно променљивих функција и њеним применама с друге стране, али су значајно место у његовим научним активностима, тада и касније, заузимали његови радови посвећени збирљивости и Фуријеовим редовима. На самом почетку свог интересовања за теорију апроксимације, успоставио је блиску сарадњу и пријатељство с француским математичарем *Ж. Фаваром* (Jean Favard), професором на Сорбони и Политехничкој школи и у то време једним од главних ауторитета за ову област не само у Француској. Фавар је најпре у летњем семестру 1957. године у Београду одржао тромесечни курс посвећен темама и проблемима својих истраживања. Ова сарадња касније је продубљена и интензивирана у току Аљанчићевог боравка у Паризу 1957–1958. школске године, омогућеног стипендијом добијеном од Института Анри Поенкаре (Henry Poincaré). Овај боравак донео му је и друге користи, поред осталих и упознавање и сарадњу са славним руским математичарем Колмогоровом.

Сарадња и пријатељство с Фаваром настављени су и у наредним годинама, а када је Фавар 1965. године умро, његов блиски сарадник *Марк Замански* (Marc Zamansky), тада декан Факултета наука Сорбоне, замолио је Аљанчића да се укључи у „одбор за овековечавање сећања на Жана Фавара“ низом манифестација и организовањем и новчаним помагањем подизања споменика Фавару у његовом родном месту Пејра ла Номијер (Peyrat-la-Nomière). Кад је Аљанчић ту молбу прихватио, добио је место (друго по реду, због слова „А“) у подужем списку веома угледних личности француског јавног, интелектуалног и културног живота – чланова овог Одбора, а Замански му је упутио своју захвалност у веома љубазном писму.

Cher Ami,

J'ai été très heureux d'avoir un mot de vous et très heureux de savoir que vous acceptiez de faire partie du Comité d'Honneur qui s'efforcera de perpétuer la mémoire de notre ami Jean FAVARD.

J'ai ainsi l'occasion de vous dire que je ne vous ai pas du tout oublié ; je vous assure de ma fidèle amitié.

J'espère avoir l'occasion de vous voir un jour que j'espère proche et je vous prie de transmettre autour de vous mon fidèle souvenir.

Marc Zamansky

Marc ZAMANSKY.

Аљанчић је имао срећу и част да од самог почетка својих научних активности буде, заједно с једним старијим и неколицином млађих колега (М. Томићем, Р. Бојанићем, В. Вучковићем, В. Марићем, Б. Бајшанским), укључен у (неформални) круг ученика и сарадника нашег великог математичара Јована Карамате. Рад у овој око Карамате окупљеној и међусобном сарадњом повезаној групи био је од непроцењиве користи за све учеснике у њему и за развој наше математичке анализе и математике уопште у педесетим и шездесетим годинама двадесетог века. У почетку је њихова делатност захватала првенствено збирљивост, тригонометријске редове и правилно променљиве функције, и била је добрим делом наставак дотадашњих Караматиних истраживања и резултата, да би се убрзо потом проширила и продубила у разним правцима, захватајући и за нашу средину нове области. Неколико значајних радова посвећених применама правилно променљивих функција на интеграле и тригонометријске редове заједно су написали средином педесетих година Аљанчић, Бојанић и Томић. Наравно, и у овом периоду, а нарочито касније, код сваког од поменутих аутора било је и радова који се не могу приписати делатности у оквиру поменуте групе. Тако је Аљанчић, самостално или скоро самостално, започео успешну научну активност на подручјима асимптотских редова и апроксимације. Поред поменутог једногодишњег боравка у Паризу, Аљанчић је имао још само један студијски боравак у иностранству – од претходног знатно краћи, али веома добро искоришћен. То је био његов одлазак у Сједињене Америчке Државе, где је боравио од почетка маја до средине јула 1971. године. Први део овог боравка провео је на универзитету Колумбус у Охају, где је радио с професором Ранком Бојанићем и одржао два предавања, затим је присуствовао математичко-регионалној конференцији у Еванстону, а остатак расположивог времена посветио је обилажењу неколико највећих америчких универзитета.

Поред ових боравака у иностранству, учествовао је у раду великог броја научних конгреса, конференција и симпозијума, у земљи и у иностранству, међу којима треба поменути Светски математички конгрес у Москви (1966) и Математички конгрес у Ници (1970). На њима је имао укупно око 15 саопштења.

Паралелно са свим овим и неким другим активностима, Аљанчић је продужио своју врло успешну наставну и педагошку делатност на матичном Природно-математичком факултету у Београду, али и ван њега. Преузимао је нове курсеве, којима је иновирао и модернизовао наставу, а предавао је хонорарно разне математичке предмете ван Факултета, на више места у Београду и у унутрашњости. Активно је учествовао у различитим видовима последипломске наставе, не само за математичаре и не само на матичном факултету и у Београду. Све ово, а нарочито квалитети његових предавања, донели су му висок углед код свих категорија студената и других слушалаца, као и у широком кругу колега.

Све претходно учинило је да је, као што рекосмо, његова научна и академска каријера, и то како на Природно-математичком факултету, тако и у Академији наука, текла доста брзо, али не пребрзо. Притом је стицање оба звања академика уследило нешто раније него што се то обично догађа, док је универзитетске титуле стицао углавном „уобичајеним", такозваним „добрим обичајима" успостављеним темпом, чак с једним краћим застојем који није сасвим лако разумети. Тако је, после избора за доцента марта 1954. године, за ванредног професора изабран октобра 1959, а за редовног тек децембра 1968. С друге стране, дописни члан Српске академије наука постао је децембра 1961. године, кад је имао 39 година, а редовни члан већ децембра 1968. са 46 година. У реферату о Аљанчићу као кандидату за редовног професора, чији су потписници били Ђуро Курепа, Константин Орлов и Боривоје Рашајски, писало је: „Закључно можемо рећи да кандидат Аљанчић др Слободан представља изграђеног математичара који је посебно у области Фуријеових редова дао важних прилога... У стручно-педагошком погледу кандидат се истиче својим излагањем, јасним предавањима, педантношћу и својим прилазима уџбеничкој литератури."

А извештај из 1961 године предлагача да се Аљанчић изабере за дописног члана академије, који су потписали академици Р, Кашанин, Ј. Карамата и С. Павловић (до материјала у вези с избором за редовног члана нисмо успели да дођемо), садржао следећу оцену: „Види се да је др Аљанчић научни радник на пољу математике чије је име познато и цењено и ван наше земље. Он се налази у пуној стваралачкој снази, у сталном раду на ширењу свог знања, а исто тако у преношењу свог знања на друге. Његов рад на Универзитету и као наставника и педагога био је увек примеран. И предлагачи се надају да ће његовим избором за дописног члана Српске академије наука и уметности Одељење природно-математичких наука добити једног члана нове генерације чији ће даљи научни рад оправдати његову веру у успех наше науке у будућности."

Углед који је и на међународној математичкој сцени стекао учинио је да професор Аљанчић, постане сарадник реферативног часописа Zentralblat für Mathematik, за који је написао преко 200 приказа радова.

Домаће признање за успехе у научном и педагошком раду била је Седмојулска награда добијена 1971. године.

У току нешто више од две последње деценије живота, почев од краја 1971. године, академик Аљанчић је био оптерећен озбиљним здравственим проблемима. Биле су то теже срчане тегобе, које су нагло избиле и доста га мучиле и ометале у раду и животу. Он се ипак с њима, упорношћу и стриктно дисциплинованим понашањем, доста успешно борио, тако да у овом периоду код њега ниједном није наступила тешка коронарна криза, тзв. инфаркт, нити је долазило до праве хоспитализације. Благодарећи овој упорној и јуначкој борби с невољама које су га задесиле, скоро у читавом овом периоду његов научни рад, а ни настава, тиме нису били сувише ометани. У неким дужим интервалима, изгледало је (само је, на жалост, изгледало) да је болест успео да савлада и да се враћа на сасвим нормалан ритам рада. Због свега овога ипак је на свој захтев нешто раније отишао у пензију 1985. године. А после ове, стоичке, истрајне и релативно успешне борбе са срчаним обољењем које га је било погодило, наишла је једна много гора, опака болест, од које му није било спаса... И у време кад га је она постепено савладавала није престајао да бар покушава да нешто ради, да се не предаје. Према речима професора Томића: „... чак и у овој болести, свестан свог краја, показивао је исти онај мир којим је некад освајао људе..."

Преминуо је 19. марта 1993. године. Његовој сахрани, поред породице и пријатеља, присуствовао је велики број колега, сарадника и студената, из свих генерација. На сахрани су говорили: у име Академије наука академик Миодраг Томић, у име Математичког института при Академији наука академик Богољуб Станковић, а у име Математичког факултета у Београду и Катедре за реалну и функционалну анализу професор др Душан Адамовић.

ОБЛАСТИ НАУЧНОГ РАДА

Целина научног опуса академика Слободана Аљанчића, у ужем смислу речи, импозантна је и то не толико бројем и дужином тих радова (укупно их је било 48) колико оригиналношћу и садржајношћу, као и ширином и разноврсношћу захвата више подручја савремене математичке анализе, а такође и повољним одјецима и утицајима које су многи од њих имали у нашој земљи и у иностранству. Уз изузимање само неколико радова који се баве неким другим темама, Аљанчићева научна делатност може се сврстати у следећих пет области:

I. теорија асимптотских редова,
II. теорија апроксимације,
III. тригонометријски редови,
IV. збирљивост,
V. правилно променљиве функције (правилна променљивост).

Неки од Аљанчићевих чланака, истина, захватају и по две, па и по три поменуте области, али се, водећи рачуна о главној, преовлађујућој тематској усмерености у конкретним случајевима, одговарајућа класификација може доста добро урадити.

I. *Асимптотски редови.* Поред конвергентних нумеричких и функционалних редова, у новијој математичкој анализи и њеним применама значајну улогу играју тзв. *асимптотски редови,* односно *асимптотски развоји функција,* који, било да су конвергетни или дивергентни, такође апроксимирају функцију у питању, али на други начин и у другом смислу него конвергентни редови. Ове редове увели су крајем XIX века француски математичар *Поенкаре* (Poincaré) и холандски *Стилтјес* (Stieltjes). Према дефиницији коју су они дали, за реалну (или комплексну) функцију $f(x)$, дефинисану у извесној околини бесконачности, ред

$$c_0+\frac{c_1}{x}+\frac{c_2}{x^2}+\cdots$$

назива се њеним *асимптотским редом* или *асимптотским развојем,* што се означава са

$$f(x)\sim c_0+\frac{c_1}{x}+\frac{c_2}{x^2}+\cdots,$$

ако је, за свако $n=0,1,2,\ldots$,

$$\lim_{x\to\infty}x^n\left(f(x)-\left(c_0+\frac{c_1}{x}+\cdots+\frac{c_n}{x^n}\right)\right)=0,$$

односно

$$f(x)=c_0+\frac{c_1}{x}+\cdots+\frac{c_n}{x^n}+o\left(\frac{1}{x^n}\right), x\to\infty.$$

Теорију ових редова развио је Поенкаре до задовољавајућег обима, а касније се њима бавио већи број математичара. Притом је сам појам асимптотског реда на више начина уопштаван; на пример, тако да се тај израз односи на редове облика

$$\frac{c_0(x)}{q_0(x)}+\frac{c_1(x)}{q_1(x)}+\frac{c_2(x)}{q_2(x)}+\cdots,$$

где су $c_\nu(x)$ периодичне функције, а функције $q_\nu(x)$, које образују тзв. *скалу* овог реда, испуњавају услов

$$q_\nu(x)\neq 0, \text{ и } \lim_{x\to\infty}\frac{q_\nu(x)}{q_{\nu+1}(x)}=0 \text{ за } \nu=0,1,2,\ldots.$$

Различита птиања у вези с асимптотским редовима, и после значајних резултата бројних аутора, остала су, међутим, отворена. Једно од њих је задатак налажења што адекватније и што општије методе развијања дате функције у асимптотски ред по датој скали.

Први Аљанчићев научни рад, под насловом *Sur une formule sommatoire généralisée* (О једној уопштеној сумационој формули), објављен је 1948. године у Публикацијама Математичког института Српске академије наука. Овај његов почетни рад није, међутим, нимало почетнички. У њему су, најпре, добијене формуле које помоћу Бернулијевих полинома изражавају низ такозваних хармонизованих интеграла дате функције, тј. њених узастопних интеграла који узимају једнаке вредности на крајевима дефиниционог интервала, а потом је коришћењем тих формула показано да уопштени Ојлер-Маклоренов сумациони образац доводи у општем случају до асимптотских редова који, сем у изузетним и тривијалним случајевима, не конвергирају. У следећем раду, написаном с *Војиславом Авакумовићем*, једним од тада водећих наших математичара, и објављеном 1950. године, коришћењем поменутих формула за хармонијске интеграле и неких њихових модификација прецизиран је и далекосежно уопштен један резултат *Ландауа* (Landau), који се односи на процену вредности првог извода функције кад су сама функција и њен други извод подвргнути извесним ограничењима. Из тог резултата на крају чланка изведен је закључак сличан закључку у претходном раду, који се односи на асимптотске редове. Тако се ова два прва Аљанчићева рада, мада посвећена и неким другим питањима, у закључним деловима дотичу асимптотских редова и суштински повезују с њиховом проблематиком. Аљанчић се овим подручјем претежно бавио у првом периоду свог научног рада. Асимптотским редовима била је у потпуности посвећена његова докторска дисертација *О асимптотском развијању А-збирљивих линеарних функционела*, одбрањена јануара 1953. године. У овом раду, поред класичних метода реалне и комплексне математичке анализе, битно су коришћени неки појмови и резултати функционалне анализе, тада код нас још скоро непознате математичке дисциплине. Ти садржаји функционалне анализе били су: нормирани простори, линеарне и ограничене функционеле и њихове репрезентације, конвергенција низова свих функционела, и још неки. У раду су тако, сукцесивном применом класичне теореме *Ф. Риса* (F. Riesz), која даје потребне и довољне услове конвергенције низа линеарних и ограничених функционела на простору $C[a, b]$, добијени потребни и довољни услови за развијање линеарне и ограничене функционеле у асимптотски ред по датој скали функција. Будући да су ти услови доста ограничавајући и стога углавном нису погодни за примене, у дисертацији су потом, увођењем Абелове збирљивости уместо конвергенције функционела, добијене варијанте погодних довољних услова за овакве развоје, и тако се на нов и јединствен начин дошло до више класичних резултата, раније добијених различитим методама, као и до неких нових асимптотских развоја.

Проблематици асимптотских редова Аљанчић је посветио још четири рада. У њима је, даљим применама методе из дисертације, али и њеним варирањем и проширивањем, као и допуњавањем неким другим поступцима, добијен низ нових асимптотских развоја, посебно функција датих ортогоналним редовима и уопштене *Ханкелове* (Hankel) функције. Захваљујући извесном угледу који су му донели претходни радови с овог подручја, Аљанчић је, на позив Белгијског центра за научна истраживања, учествовао на Међународном симпозијуму о низовима и редовима у Бриселу, децембра 1957. године, на коме је саопштио рад 14 (бројеви уз радове који се помињу односе се на списак Аљанчићевих радова на крају овог чланка). Он је касније објављен у Colloque sur la Théorie des suites, Bruxelles, 1957.

II. *Айроксимација.* Феномен *айроксимације* (приближног одређивања), у различитим видовима, присутан је и игра значајну улогу у многим областима математике и њених примена, нарочито у новијим временима. Већ се инфинитезимална математика, њене основне идеје и методе, као што су: конвергенција и гранична вредност, извод, интеграл, ред и многе друге, могу сматрати облицима апроксимације, а каснији и данашњи бурни развој нумеричких и компјутерских метода са свим њиховим спектакуларним могућностима, припада, свакако, овој сфери математике, али је само једна од њених импресивних манифестација. Речи „апроксимација" овде се, међутим, придаје једно уже, специфично значење. Кратко и сумарно речено, реч је о униформној (равномерној), или некој сличној, апроксимацији реалних функција из неког од функционалних простора, као што је простор на одређеном сегменту непрекидних или непрекидних и периодичних функција, или из извесних делова таквих простора, помоћу алгебарских односно тригонометријских полинома, или таквих полинома који припадају извесним ужим класама. Може се сматрати да је оно што је овим истраживањима непосредно претходило, а уједно представља њихов почетак, познати *Вајерштрасов став* (Weierstrass), заједно с његовом варијантом за периодичне непрекидне функције, такозваним *другим Вајерштрасовим ставом.* Према овом ставу, свака на датом сегменту непрекидна функција може се произвољно добро апроксимирати неким полиномом, а одговарајуће аналогно тврђење важи за периодичне непрекидне функције и тригонометријске полиноме. Према другом Вајерштрасовом ставу, на пример, кад се за дату функцију f из простора $C_{2\pi}$ непрекидних и с периодом 2π периодичних функција ненегативан број $\inf_{T\in H_n}\|f-T\|$, где је $\|\ \|$ норма у $C_{2\pi}$, а H_n означава скуп свих тригонометријских полинома реда не већег од n, означи са $E_n(f)$, тада је $\lim_{n\to\infty} E_n(f)=0$. $E_n(f)$ се назива *најбољом могућом айроксимацијом функције* f полиномима из H_n. Следећи значајан резултат у истом правцу, који се може сматрати првим правим ставом теорије тригонометријске апроксимације, јесте комбинација једног *Бореловог* (Borel) и једног резултата *Чебишева*, према којој за свако $f \in C_{2\pi}$ и за свако $n \in N$ постоји један и само један полином $T_n \in H_n$ такав да је $\|f - T_n\| = E_n(f)$. Овај полином T_n назива се *(n-тим) полиномом најбоље апроксимације*. У даљем развоју теорије тригонометријске апроксимације махом је испитиван однос између појединих поступака апроксимације функција из $C_{2\pi}$, поступака који свакој функцији $f \in C_{2\pi}$ за свако $n \in N$ координирају одређени полином $T_n(f) \in H_n$, и појединих делова M простора $C_{2\pi}$, тј. класа функција из $C_{2\pi}$. Резултати који се на ово односе могу бити:

директни ставови, тј. искази који, за дату позитивну функцију $\varphi(n)$ с особином $\lim_{n\to\infty}\varphi(n) = 0$, тврде да, с позитивном константом *K*, важи

$$f \in M \Rightarrow \|f - T_n(f)\| \le K\varphi(n);$$

инверзни ставови, који, под истом претпоставком о $\varphi(n)$, тврде да

$$\|f - T_n(f)\| \le K\varphi(n) \Rightarrow f \in M;$$

ставови еквиваленције, према којима важи

$$\|f - T_n(f)\| \le K\varphi(n) \Leftrightarrow f \in M;$$

Код директних ставова може се поставити питање одређивања *најбоље могуће константе K*, а неки поступци $T_n(f)$ имају својство такозване *сатурације* (засићења), која се састоји у постојању функције $\varphi_T(n)$ и *класе* $M_T \subseteq C_{2\pi}$ *(сатурације)* таквих да:

$$1^\circ \quad \|f - T_n(f)\| = O(\varphi_T(n)) \Leftrightarrow f \in M_T, \text{ и}$$
$$2^\circ \quad \|f - T_n(f)\| = o(\varphi_T(n)) \Rightarrow f \equiv 0.$$

Искази којима се утврђује сатурација за одређени поступак називају се *ставовима сатурације*. Један од поступака апроксимације је сам *n*-ти полином најбоље апроксимације, и известан број резултата ове теорије су ставови наведених типова који се односе на тај поступак. Код тих, а и других ставова, значајну улогу у дефинисању погодних класа M игра *модул непрекидности,* тј. функција $\omega(\delta; f)$ $(\delta > 0, f \in C_{2\pi})$ дефинисана са

$$\omega(\delta; f) = \sup_{|h| \le \delta} \|f(x+h) - f(x)\| \quad (\delta > 0),$$

која, могло би се слободније рећи, мери степен униформне непрекидности функције $f \in C_{2\pi}$. Поред модула непрекидности, користе се у истим улогама и неке друге функције, као што су модули непрекидности вишег реда и још неке. Од класа које се јављају у теорији апроксимације, а користе се и у вези с другим питањима, наведимо *Липшицову* (Lipschitz) класу Λ_α $(0 < \alpha \le 1)$, тј. скуп свих функција $f \in C_{2\pi}$ за које важи $\omega(\delta; f) \le K\delta^\alpha (\delta > 0; 0 < \alpha \le 1)$, и класу W дефинисану условом $\omega(\delta; f) \le K\delta |\log \delta|$ $(\delta > 0)$.

Од великог значаја за добијање директних ставова је *Џексонова* (Jackson) *теорема* из 1914, према којој у општем случају важи неједнакост

$$E_n(f) \le 12\omega(n^{-1}; f)$$

Из ње непосредно следе следећи директни ставови:

$$f \in \Lambda_\alpha \Rightarrow E_n(f) = O(n^{-\alpha}) \quad (0 < \alpha \le 1);$$

$$f \in W \Rightarrow E_n(f) = O(n^{-1} \log n).$$

Први инверзни ставови, које је добио *Бернштајн* (Bernstein), гласе:

$$E_n(f) = O(n^{-\alpha}) \Rightarrow f \in \Lambda_\alpha \quad (0 < \alpha < 1);$$

$$E_n(f) = O(n^{-1}) \Rightarrow f \in W.$$

Комбинацијом ставова изражених првим редовима ових формула добија се *став еквиваленције*

$$f \in \Lambda_\alpha \Leftrightarrow E_n(f) = O(n^{-\alpha}) \quad (0 < \alpha < 1).$$

Поред ових, илустрације ради наведених резултата, теорија о којој је реч обогаћена је низом каснијих доприноса већег броја других математичара, којима се отишло веома далеко у третирању разних других поступака веће сложености и веће општости, а такође у погледу постизања све веће прецизности и рафинираности процена. Поред простора $C_{2\pi}$, разматрани су и разни други простори реалних функција, на пример, простори $L^p_{2\pi}, p \ge 1$, а и неки од ових општији простори.

Теоријом апроксимација Аљанчић је почео активно да се бави 1957. године. Тада, или нешто раније, он је, свакако у вези с овом својом активношћу, почео да сарађује и успоставља блиске пријатељске везе с професором универзитета и Паризу *Ж. Фаваром* (Jean Favard), у то време водећим француским истраживачем у овој области. Као што је већ речено, Фавар је на београдском Природно-математичком факултету у летњем семестру 1957. године одржао тромесечни курс о апроксимацији и неким са њом повезаним темама. Благодарећи Фаваровом заузимању, вероватно, Аљанчић је школску 1957–58. годину провео на студијском боравку у Паризу, као стипендиста Института Анри Поенкаре (Henry Poincaré). Овај боравак је добро искористио за темељно упознавање не само с радом Фавара и групе његових сарадника, него и са неким другим тада актуелним и, може се рећи, „авангардним" тенденцијама у француској математичкој науци и настави математике (у то време је, на пример, замах активности и утицај групе такозваних „бурбакиста" био на врхунцу). Први Аљанчићев рад посвећен теорији апроксимације, под насловом *Classe de saturation des procédés de sommation de Holder et de Riesz* (Класа сатурације Хелдеровог и Рисовог поступка сумирања) 15, објављен је у *Comptes rendus* (Саопштењима) Француске академије наука. У овом раду су одређене класе сатурације за Хелдерове и Рисове поступке апроксимације и установљено да Цезаров (Cezàro) и Хелдеров поступак имају исту класу сатурације, али су им редови апроксимације различити, као и да ова два поступка, еквивалентна у погледу сумирања (збирљивости), нису такви у погледу апроксимације. Теорији апроксимације Аљанчић је посветио још осам радова. У њима је наставио своја проучавања разних поступака апроксимације, нарочито она која се односе на ставове еквиваленције, класе сатурације и редове апроксимације код сатурација. У тим радовима своје резултате ове врсте неколико пута је поредио с ранијим резултатима других аутора, показујући да су у неким случајевима његови резултати прецизнији од њихових. Треба нарочито истаћи значај, поред поменутог рада 15, радова 16 и 18, који се такође односе на сатурацију, као и рад 22 о апроксимацијама типичним срединама. Они су подстакли *Сунучија* (Sunouchi) и *Ваѿарија* (Watari) да добију одговарајуће исказе за опште линеарне поступке апроксимације. Овом активношћу у области теорије апроксимације, Аљанчић се, захваљујући како својој тематској усмерености тако и вредности својих доприноса, у потпуности укључио у круг оних аутора који су у његово време и нешто раније развијали ову теорију, већ у претходном периоду у основама конституисану. То су, поред *Фавара*, били *Замански* (Zamansky), *Алексић* (Alexits), *Нина Бари, Сшечкин, Никољски, Нашансон, Дзјадик, Сунучи, Вашари, Тељаковски, Бухвалшер* и више других.

Треба додати да је Аљанчић неке своје најзначајније резултате на овом подручју, уз врло повољан пријем, саопштио у Еванстону, на Регионалној конференцији посвећеној теорији апроксимације, у току већ поменутог студијског боравка у САД 1971. године. Сем тога, већ почетком шездесетих година 20. века његове радове из теорије апроксимације повољно је оценио професор *А. Зигмунд* (A. Zygmund), а цитирали су их и користили *Буцер* (P. L. Butzer), *Бухвалшер* (H. Buchwalter) и више других аутора.

Веома комплетан и прегледан приказ истраживања и резултата у области апроксимације добијених до 1960. године, међу којима и својих, Аљанчић је дао у дужем чланку, заправо краћој монографији, под насловом *О неким новијим резулшашима из шригономешријске айроксимације* (21).

III. *Тригономешријски редови.* У овој групи радова посматрају се збирови косинусног и синусног тригонометријског реда.

$$f(x)=\tfrac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx \quad \text{и} \quad g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin nx$$

и разни проблеми у вези с њима.

Асимптотско понашање функција $f(x)$ и $g(x)$ кад $x\to 0+$ разматрано је најпре у раду 9. Полазећи од познатог става према коме за монотон низ a_n и $0<\alpha<2$ важи

$$a_n\sim n^{-\alpha}, n\to\infty \Rightarrow g(x)\sim\frac{\pi}{2\Gamma(\alpha)\sin\frac{\alpha\pi}{2}}x^{\alpha-1}, x\to 0+$$

аутори кажу: „Овде ћемо дати два става који проширују класу тригонометријских редова за које важе сличне асимптотске релације. Та проширења добијају се увођењем класе споро променљивих функција“ (видети V).

Једно проширење гласи: ако је $0<\alpha<2$, $L(t)$ производ две монотоне споро променљиве функције и $a_n=L(n)n^{-\alpha}$, онда је функција $g(x)$ дефинисана за свако реално x и

$$g(x)\sim\frac{\pi}{2\Gamma(\alpha)\sin\frac{\alpha\pi}{2}}x^{\alpha-1}L\left(\frac{1}{x}\right), x\to 0+$$

Ова разматрања се настављају у реду 12, где се доказују и инверзна тврђења.

О интеграбилности функција f и g се расправља у раду (10), где се доказује еквиваленција између интеграбилности извесних функција и конвергенције одговарајућих редова. Уопштења познатих резултата добијају се заменом функције $x^{-\gamma}$ функцијом $x^{-\gamma}L(1/x)$, а низа $n^{-\gamma-1}$ низом $n^{-\gamma-1}L(n)$; при чему $L(x)$ означава споро променљиву функцију. Тако, на пример, Теорема 1 гласи:

Кад је $a_n \downarrow 0$ и $0<\gamma<2$, тада се функција $x^{-\gamma}L(1/x)g(x)$ налази у $L(0,\pi)$ ако и само ако ред $\sum n^{\gamma-1}L(n)a_n$ конвергира.

С. Аљанчић се, поред већ поменутог, бавио и интегралним модулима непрекидности. Реалном броју $1 \leq p < \infty$ придружује се векторски простор L^p свих мерљивих функција h с периодом 2π које имају коначну норму:

$$\|h\|_p = \left(\int_0^{2\pi} |h(x)|^p \, dx \right)^{1/p}$$

Нека је τ_t транслација реалне праве за реалан број t, тј. пресликавање $x \mapsto x+t$. Модуо непрекидности (првог реда) функције h из L_p је број

$$w_p(\delta; h) = \sup_{|t| \leq \delta} \|h \circ \tau_t - h\|_p$$

а другог реда број

$$w_p^2(\delta; h) = \sup_{|t| \leq \delta} \|h \circ \tau_t + h \circ \tau_{-t} - 2h\|_p .$$

У раду (29) се, поред осталих, доказују и следећа два става.

Став 3. Ако су Фуријеови коефицијенти a_n функције $f \in L_p \, (p>1)$ опадајући, онда је $n^{1-1/p}a_n \leq M_p \omega_p(\pi/2n; f)$

Став 4. Нека низ (a_n) задовољава за неко $p>1$ услове

$$(i)\ a_n \downarrow 0, \quad (ii)\ \sum_{k=1}^{n} k^{1-1/p}a_k = O(n^{2-1/p}a_n), \quad (iii)\ \sum_{k=n+1}^{\infty} k^{p-2}a_k^p = O(n^{p-1}a_n^p).$$

Тада је

$$\omega_p(\pi/2n; f) = O(n^{1-1/p}a_n).$$

Овај став се уопштава у раду 31, где се под претпоставкама $a_n \downarrow 0$ и $\sum_{n=1}^{\infty} n^{p-2} a_n^p < \infty$ доказује да је

$$\omega(n^{-1}; f) \le A_p n^{-1} \left(\sum_{k=1}^{n-1} k^{2p-2} a_k^p \right)^{1/p} + B_p \left(\sum_{k=n}^{\infty} k^{p-2} a_k^p \right)^{1/p}.$$

Модули непрекидности се посебно посматрају и у граничном случају $L = L^1$ као и случају простора непрекидних функција с периодом 2π. Томе су посвећени, на пример, делови радова 29 и 34. О свему томе, и још нечем другом, говори се опширно у раду 33. То друго су трансформације Фуријеовог реда добијене множењем његовог општег члана општим чланом неког низа па сабирањем тих производа: од Фуријеовог реда.

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

фукције $f \in L$ и реалног низа $\mu = (\mu_n)_n \ge 0$ гради се тригонометријски ред

$$\frac{1}{2} \mu_0 a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

У вези с овом трансформацијом постављају се многа питања. Одговори на нека од њих налазе се у 23, 25, 30, 32. Наводимо један од њих из 32:

Ако је $h \in L^p$, μ конвексан, опадајући нула-низ и $\sum_{k=1}^{n} \mu_n = O(n\mu_n)$,

онда је трансформисни ред Фуријеов ред неке функције $h_\mu \in L^p$ и

$$\omega_p^2(n^{-1}; h_\mu) \le A_p \mu_n \omega_p(n^{-1}; h).$$

IV. *Збирљивости.* Прво је *Коши* (A. L. Cauchy) 1821. године доказао следећи став: *ако низ* $c = (c_n)_{n \ge 0}$ *реалних бројева конвергира, онда његовој граничној вредности конвергира и низ* σc *с његових аритметичких средина.*

$$(\sigma c)_n = \frac{1}{1+n} \sum_{k=0}^{n} c_k.$$

Но, може низ σc конвергирати и кад низ с дивергира. Такав је, на пример, геометријски низ $c_n = (-1)^n$ који осцилаторно дивергира, док низ σc тежи нули која је гранична вредност низа c у Кошијевом смислу. Видимо да Кошијев поступак уопштава конвергенцију реалних низова придружујући некима из мора дивергентних одређене граничне вреднсоти, те тако, на неки начин, контролише дивергенцију. Овде је небитно то што је низ c реалан – могао би бити и низ у неком Банаховом простору.

Затим је, 1826. године, дошао *Абел* (N. H. Abel) са својим ставом: *ако је реалан ред* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ *конверīенūан, онда је функција* $\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$ *дефинисана за* $-1 < t \leq 1$ *и нейрекидна у ūачки 1 слева, ūј. њена лева īранична вредносū,* $\varphi(-1)$, *једнака је* $\varphi(1)$. И овде се срећемо с уопштењем збира реда. Тако је геометријски ред с општим чланом $c_n = (-1)^n$ дивергентан, али је $\varphi(t) = (1+t)^{-1}$ те је његов збир у Абеловом смислу $\varphi(-1) = 1/2$.

Крајем века, 1897. године, *Таубер* (A. Tauber) разматра инверзију Абеловог става па закључује: ако је реалан ред $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ конвергира у Абеловом смислу, а низ nc_n тежи нули кад $n \to \infty$, онда тај ред конвергира. Особина $nc_n = o(1)$ низа c позната је као *Тауберов услов*. Њега је ослабио *Лиūлвуд* (J. E. Littlewood) 1911. године замењујући га условом „низ nc_n је ограничен" да би заједно с *Хардијем* (G. H. Hardy) 1929. дошао до коначног „низ nc_n је ограничен одоздо". Следеће године се, као гром из ведра неба, појавио чувени Караматин доказ Харди-Литлвудовог става на само две стране.

Почетком двадесетог века, 1907. године, *Мерсер* (J. Mercer) доказује: *ако је* $\lambda > -1$ *реалан број и низ* $c_n + \lambda(\sigma c)_n$ *конверīенūан, онда је и низ* c_n *конверīенūан.*

Постоје три врсте ставова: Абелови (директни), Тауберови (инверзни) и Мерсерови. Описаћемо их у прилично општем облику. Посматрамо скупове $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ функција, особине P и Q на првом, а особину R на другом и пресликавање $T : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$.

Абелов став је облика: (A)$P(f) \Rightarrow R(Tf)$

Тауберов став тврди: ако је (A), онда је (B) $P(f) \Leftarrow R(Tf) \wedge Q(f)$.

Мерсеров став гласи: ако је $(T_\lambda)_{\lambda \in L}$ фамилија с особином (А) и $M \subseteq L$, онда је (С) $P(f) \Leftarrow R(T_\lambda f) \wedge \lambda \in M$.

Ако се ради о асимптотским особинама функција, онда они могу бити слаби (О-ставови) и јаки (о-ставови); сем тога се уместо особина могу посматрати бинарне релације, рецимо $f \sim g$, у ком случају (А) постаје $P(f,g) \Rightarrow R(T_f, T_g)$.

Посебно, да бисмо били ближи претходним примерима, можемо узети да је: $\mathcal{Z}$ реалан векторски простор, $C_{\mathcal{Z}}$ његов потпростор (конвергентних функција), $\lim_{\mathcal{Z}}$ линеарна форма на $C_{\mathcal{Z}}$ с особином $(\forall h \in C_{\mathcal{Z}})[h \geq 0 \Rightarrow \lim_{\mathcal{Z}} h \geq 0]$ за $\mathcal{Z}$ из $\{X, Y\}$, T линеарно пресликавање, $P(f)$ особина $f \in C_X$ а $R(h)$ особина $h \in C_Y$, $L = \mathbf{R}$ И $T_\lambda f = f + \lambda Tf$. Тада би Абелов став био облика $f \in C_X \Rightarrow Tf \in C_Y$.

За Став 1 из 2 аутори кажу да је у суштини Тауберове природе. Ту је операција Т диференцирање, па се из особине извода изводи особина диференциране функције (што се обично чини помоћу теорема о средњој вредности). И поменути став се може доказати на тај начин развијањем функције φ око тачке x у Тејлоров полином првог реда с Лагранжевим остатком, па рачунањем вреднсоти $\varphi(0)$ и $\varphi(1)$.

У раду 7, о коме ће још бити речи, посматрају се Абелови асимптотски ставови за интегралне трансформације са споро промењљивим језгром $L(t) > 0$, дефинисаним и непрекидним за $t > 0$ и с особином

$$L(\lambda t) \sim L(\lambda) \text{ кад } \lambda \to \infty \text{ за свако } t > 0$$

(видети V). Изучава се под којима ће условима важити

$$\int_a^b f(t) L(\lambda t) dt \sim L(\lambda) \int_a^b f(t) dt \text{ кад } \lambda \to \infty$$

где је $0 \leq a < b \leq \infty$. Постоји једна фина равнотежа између особина функција L и f, што је била једна од одлика Караматине школе, тако да нађени довољни услови постају и потребни кад претходна еквиваленција важи за све L одређене врсте.

Почетком седамдесетих година XX века С. Аљанчић проучава асимптотске ставове Мерсеровог типа у вези с правилно промењљивим функцијама и низовима за трансформације облика

$T_\lambda f = f + \lambda Tf$, где је T линеаран поступак збирљивости. Тиме ће се претежно бавити у својим даљим истраживањима. Што се тиче правилно променљивих низова, чија је теорија већ била разрађена, он једноставно каже да су они сужења правилно променљивих функција на скуп природних бројева (рад 55). Та једноставност је увод у срж проблема који се разматра.

Сетимо се Караматиних речи из 1931. године када је говорио о трансформацијам низова: „Поред тога Tauber-ови ставови изискују много дубље понирање у саму природу посматраних низова, што чини њихове доказе далеко тежим од доказа Mercer-ових ставова“ [О уопштењима Mercer-овог става, Глас CXLVI (72) Српске краљевске академије, стр. 90]. Један од начина доказивања Мерсеровог става је да се покаже да једначина $f + \lambda Tf = h$ има решење на које се може применити Абелов став. Аљанчић је то радио, у посебним случајевима, филигранском техником. Дуги низови једнакости су водили открићу нових бића у математичком свету. Та бића би остала непозната ако би се посегло за неким општијим Тауберовим ставом, рецимо *Винеровим* (N. Wiener). Аљанчић, какав је био, ишао је у својим истраживањима до краја крајева.

У раду 41 се посматрају интегралне трансформације $Tf(x) = \alpha x^{-\alpha}\int_0^x t^{\alpha-1} f(t)dt$ и $Tf(x) = \beta x^{\beta}\int_x^\infty t^{-\beta-1} f(t)dt$ где су $\alpha > 0$ $\beta > 0$ реални бројеви и $f(x) \sim L(x)$ кад $x \to \infty$. Овде није решен само Мерсеров проблем, него је за остале $\lambda \neq -1$ дат и асимптотски развој, са тачношћу *L(x)*, функције *f(x)*. Две друге интегралне трансформације (средине) јављају се у [42].

Радом 46 започиње разматрање матричних трансфор-мација правилно променљивих низова што се наставља у радовима 47, 55 и 58 где се размарају тежинске средине. Сам облик трансформације неодољиво подсећа на спектар линеарног оператора *T*. Зато се убрзо после рада 47 појавио један спектрални поглед на разматран проблем [Pacific Journal of Mathematics 73, 1 (1977) стр. 63–71]. Решавањем једначине $T_\lambda f = h$ у 47, Аљанчић је дошао до једне матричне трансфор-мације чије коефицијенте детаљније испитује у раду 54 и уочава да су они уопштење Цезарових бројева. Ту је и једно уопштење Г-функције.

Последњи објављен научни рад С. Аљанчића, 61, уопштава један Цезаров став помоћу појма квази-монотоног низа који је увео, у наведеном раду, његов учитељ Јован Карамата.

V. *Правилно променљиве функције.* Као златна нит протеже се правилна променљивост кроз већину Аљанчићевих радова. Она блиста у њима и излази из њих још блиставија. Ти радови спадају међу најзначајније у Аљанчићевом научном делу.

Реална функција $f(x) > 0$, дефинисана у некој околини (позитивне) бесконачности у **R**, конвергира кад $x \to \infty$ неком позитивном реалном броју (ознака $f \in C$) ако и само ако задовољава Кошијев услов:

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \frac{f(y)}{f(x)} = 1.$$

Слабљењем овог услова, додавањем неке везе између x и y, добијају се проширења скупа конвергентних функција. Та веза код *Шмита* (R. Schmidt) из године 1925. гласи $y/x \sim 1 (y/x \to 1)$, па се, сменом $y = \lambda x$, добија

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\ \lambda\to 1}} \frac{f(\lambda x)}{f(x)} = 1.$$

Карамата се 1930. године налази између Коши ја и Шмита; његова веза, $y/x \asymp 1$ (постоје реални бројеви $0 < a < b < \infty$ такви да је $ax \le y \le bx$ почев од неког x и за $y \ge x$) доводи до услова:

$$\textit{за свако } 0 < a < b < \infty \textit{ је } \lim_{x\to\infty} \frac{f(\lambda x)}{f(x)} = 1 \textit{ униформно по } a \le y \le b$$

(Теорема у униформној конвергенцији). Карамата је умео да напише овај услов, а то је и учинио, у сасвим једноставном, свима разумљивом, облику што је довело до открића споро, и отуда правилно, променљивих функција:

Споро променљива функција *је реална функција $L(x) > 0$, дефинисана и непрекидна у некој околини бесконачности у* **R**, *с особином*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(\lambda x)}{f(x)} = 1 \textit{ за свако } \lambda > 0.$$

Функција $R(x)$ је правилно променљива идекса $\rho \in \mathbf{R}$ ако је $R(x) = x^{\rho} L(x)$ за неку споро променљиву функцију $L(x)$. Споро променљива функција је правилно променљива индекса 0.

Из ове наоко једноставне особине, која то никако није због оног квантификатора „за свако $\lambda > 0$“, Карамата изводи Теорему о униформној конвергенцији и читаву, лепо заокружену, теорију правилно промењљивих функција. Истакнимо став по коме је функција L споро промењљива ако и само ако је облика

$$L(x) = c(x) \exp \int_a^x \varepsilon(t) d \log t$$

за неко $a \geq 0$, свако $x \geq a$, неко $c \in \mathcal{C}$ и неку непрекидну функцију $\varepsilon(t)$ која тежи нули кад $t \to \infty$ (Теорема о репрезентацији). Тиме је, како ће се касније видети, плодоносно проширен скуп $\mathcal{C}$ до скупа $\mathcal{L}$ споро промењљивих функција (функција log x се, на пример, налази у $\mathcal{L}/\mathcal{C}$). Првобитна имена ових фунција била су „споро растуће" (à croissence lente) и „регуларно растуће" (à croissence regulière); нова имена су уведена у раду 13 јер „више одговарају суштини".

Аљанчић сам, или заједно с другима, није се, сем у радовима 13, 44 и 51, бавио „чистом" теоријом правилно промењљивих функција. Превасходне су му биле њихове примене у разним областима анализе које су показивале њихову сврсисходност и њихов значај; при томе су, у процесу доказивања, откриване њихове нове особине којима је допуњавана почетна теорија.

Правилно промењљиве функције су мировале, изузимајући Караматине резултате из 1931, скоро двадесет година. Једино се, заслугом В. Авакумовића и Ј. Карамате, 1936. године појавио њихов слаби облик (O-облик). Крајем четрдесетих година прошлог века доказано је да се непрекидност у дефиницији може заменити мерљивошћу по Лебегу са истим последицама. Али, то није било довољно. Прави живот правилно промењљивих функција је у њиховим применама. Требало је да оне изиђу из себе самих и крену у математички свет да би показале своју снагу и, што не рећи, своју лепоту. То се ускоро и остварило. Наиме, ова теорија правилне промењљивости, од које ни њен оснивач Карамата у прво време није нарочито много очекивао, после тих својих наизглед скромних почетака и једног предратног и послератног периода релативне стагнације, почела је нагло да се развија, како у земљи тако и широм света, и то како сама теорија тако и њене разноврсне примене. Већ средином осамдесетих година двадесетог века број радова посвећених овој области или у блиској вези с њом износио је више стотина. То се, на пример, јасно види из обимне монографије *Regular Variation,* чији су аутори Bingam, Goldi и Tojgel (N. H. Bingham, C. M. Goldie, J. L. Teugels, Cambridge University Press, 1987). Ова књига је иначе један од томова енциклопедије савремених математичких наука, и у њој се на великом броју места помиње Карамата и одаје му се признање као утемељивачу читаве ове области, а такође се доста често наводе његови први настављачи Аљанчић, Бојанић и Томић и истиче значај њихових доприноса. И каснији развој теорије и примена „правилне промењивости“ није, по свему судећи, био мање успешан и динамичан.

У јесен 1952. године расправљају Аљанчић, Бојанић и Томић о асимптотском понашању збирова извесних тригонометријских редова и закључују да се оно може свести на асимптотско понашање одговарајућих интегралних трансформација са споро промењивим језгром. Тако настају радови 7, 9 и 12, којима правилно промењиве функције на велика врата улазе у математички свет.

Правилно промењива функција $R(x)$ индекса ρ могла би се сматрати асиптотским уопштењем у бесконачности степена функције x^{ρ}. Природно се поставља питање ставова S који важе за x^{ρ}, а преносе се на $R(x)$, тј. $S(x^{\rho}) \Rightarrow S(R(x))$. Одређивање таквих S захтева дубљу (логичку) анализу особина функције x^{ρ} од којих зависи $S(x^{\rho})$ и питања да ли те особине наслеђује $R(x)$. Када би се прешао тај пут, имали бисмо Принцип преноса који би нам од познатих ставова непосредно производио њихова уопштења, који би повезивао прошлост с будућношћу, можда непознатом и невиђеном. Аљанчић у неким својим радовима даје примере ставова S за које важи Принцип преноса, а поменуто важно питање поставља, на неки начин, у раду 10.

У раду 13 се посматра Фруланијев интеграл,

$$\int_{0+}^{\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x} dx$$

функиције f, локално интеграбилне на отвореном интервалу с крајевима 0 и ∞, с параметрима $a > 0$ и $b > 0$. Познати услов за његову конвергенцију, да је функција C-збирљива у 0+ и ∞, еквивалентан је, како је уочено и доказано, тврђењу да је функција

$$R(x) = \exp \int_1^x f(t) d \log t$$

правилно промењива; при томе је њен индекс једнак C-збиру функције f у бесконачности. Доказ се изводи помоћу две нове особине еквивалентне правилној промењивости.

Појавом *Фелерове* (W. Feller) књиге [An introduction to probability theory and its applications, J. Wiley, New York, 1966] правилно промењиве функције улазе у теорију вероватноће и њој сродне области да би доживеле буран развој из кога ће проистећи море радова и неколико запажених њима посвећених монографија. Игром случаја Карамата и Фелер рођени су почетком XX века у Загребу, разишли се на разне стране света да би се срели у тој књизи кад је Карамата био при крају свог животног пута.

Формула

$$\frac{L(\lambda x)}{L(x)} = 1 + o(1) \text{ } кад \text{ } x \to \infty \text{ } за \text{ } свако \text{ } \lambda > 0$$

из дефиниције споро променљиве функције само је почетак асимптотског развоја количника на левој страни ове једнакости. Шта се дешава после почетка? Један од одговора на ово питање даје монографија, рад 44, у којој се посматра строго растућа функција $\varphi(x) > 0$, дефинисана за $x \geq 0$, са својствима (i) $\varphi(\infty) = \infty$ и (ii) функција $x^{-\theta}\varphi(x)$ опада за неко $0 < \theta < \infty$ и довољно велико *x*, па се за функцију *L* из $\mathcal{L}$ каже да је *споро променљива с остатком* φ кад је

$$\frac{L(\lambda x)}{L(x)} = 1 + O\left(\frac{1}{\varphi(x)}\right) \quad (x \to \infty)$$

за свако $\lambda > 0$, што се записује у облику $L \in \mathbf{K}_\theta(\varphi)$. Даље се развија теорија оваквих функција (Теорема о униформној конвергенцији, Теорема о репрезентацији...), по Караматином свеопштем моделу из 1930. године, која се даље примењује на интгралне трансформације, тригонометријске редове и интеграле, Тауберове теореме. Стари ставови добијају ново, прецизније рухо. Тако, на пример, став о асимптотском понашању функције *g* с почетка тачке III сада постаје: ако је $0 < \alpha < 2, 0 < \theta < 2 - \alpha$ и функција *L(x)* из $\mathbf{K}_\theta(\varphi)$ монотона почев од неког *x*, онда, кад $x \to 0+$, важи

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha} L(n) \sin nx = \left(x^{1-\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha} \sin nx + O\left(\frac{1}{\varphi(1/x)}\right)\right)\left(\frac{1}{x}\right)^{1-\alpha} L\left(\frac{1}{x}\right)$$

Аљанчић је своје резултате из рада 42 о споро променљивим функцијама прецизирао у раду 50 за споро променљиве функције са остатком. Ту је посматрао и један општи Абелов став за матричне трансформације низова које чувају припадност низа скупу $\mathbf{K}_\theta(\varphi)$ (један низ припада том скупу ако је сужење на скуп природних бројева неке функције из тог скупа).

Функција *K* је *O*-правилно променљива ($K \in \mathcal{K}$) ако је дефинисана, мерљива и > 0 у некој околини бесконачности у **R**, и ако је

$$r(\lambda) := \overline{\lim_{x\to\infty}} \frac{K(\lambda x)}{K(x)} < \infty$$

за свако $\lambda > 0$. Ове функције су, као што смо већ поменули, открили Авакумовић и Карамата. Аљанчић је написао рад: A remark on the class of functions of Avakumović–Karamata and that of Bari–Stečkin да би, како је он то умео, коначно рашчистио однос између насловљених класа функција. Било је математичара који су радили с функцијама извесне врсте не знајући одакле оне потичу и откривајући већ откривено. Рад је, по свом обичају, дао друго-потписаном овога текста да га прочита и прокоментарише. После писане и усмене размене мишљења, ствари су кренуле другим током те је од поменутог настао рад 51, мала једноставна теорија функција из $\mathcal{K}$, који је имао доста успеха, вероватно због своје прегледности и систематичности (по рецепту Караматине школе), као и због неколико нових резултата. Теорема о униформној конвергенцији овде има облик: ако је $K \in \mathcal{K}$ и $0 < a < b < \infty$, онда је

$$\overline{\lim_{x\to\infty}} \sup_{a\le\lambda\le b} \frac{K(\lambda x)}{K(x)} < \infty$$

Аутори су имали мало проблема с индексима. Разматрли су, у ствари, само тзв. Караматине индексе,

$$p = p(K) = \lim_{\lambda\to 0+} \frac{\log r(\lambda)}{\log \lambda} \text{ и } q = q(K) = \lim_{\lambda\to\infty} \frac{\log r(\lambda)}{\log \lambda}$$

а постоје и *индекси Матушевске* (W. Matuszewska).

Аљанчић је наставио истраживања у овом правцу, па у раду 57 доказује за функције из $\mathcal{K}$ ставове који одговарају неким ставовима из рада 7 и 10; при томе вешто користи поменуте индексе. То је још уочљивије у његовом прет-последњем објављеном научном раду, 60, где се посматрају регуларни оператори A на векторској мрежи $\mathcal{M}$ свих мерљивих реалних функција *f(x)*, дефинисаних за $x \ge 0$. Регуларан оператор на $\mathcal{M}$ је разлика два позитивна линеарна оператора на $\mathcal{M}$ (такве су на пример интегралне транс-формације на неким деловима простора $\mathcal{M}$). Истражују се услови под којима ће за неко K из $\mathcal{K}$ важити

$$(AK)(x) = O(K(x)) \quad (x \to \infty).$$

Идеја је да се нађе што мањи скуп функција из $\mathcal{K}$ за које важи ова релација и да се одатле закључи да она важи и за K. Аљанчић је, уз помоћ индекса, пронашао услове, знатно слабије од оних који су до тада били познати.

Сваки рад С. Аљанчића био је довршен, али и отворен. Дешавало се да се и после двадесет година врати неком од њих и да на том добро постављеном темељу гради даље.

Композиција његовог рада је мало старинска, „караматска“. Полази се од изворишта (претходних резулта-та), долази до резултата рада, па завршава доказима. Аљанчићев стил је, као што му је и говор био – одмерен и кристално јасан.

Напомињемо да је у поменутој књизи Бингама, Голдија и Тојгела од тројице главних настављача Карамате највише истицан Аљанчић, чијих је неколико радова у њој у целини репродуковано, а за Аљанчића је речено да је „једна од водећих личности у Југословенској школи математичке анализе коју је основао Ј. Карамата“.

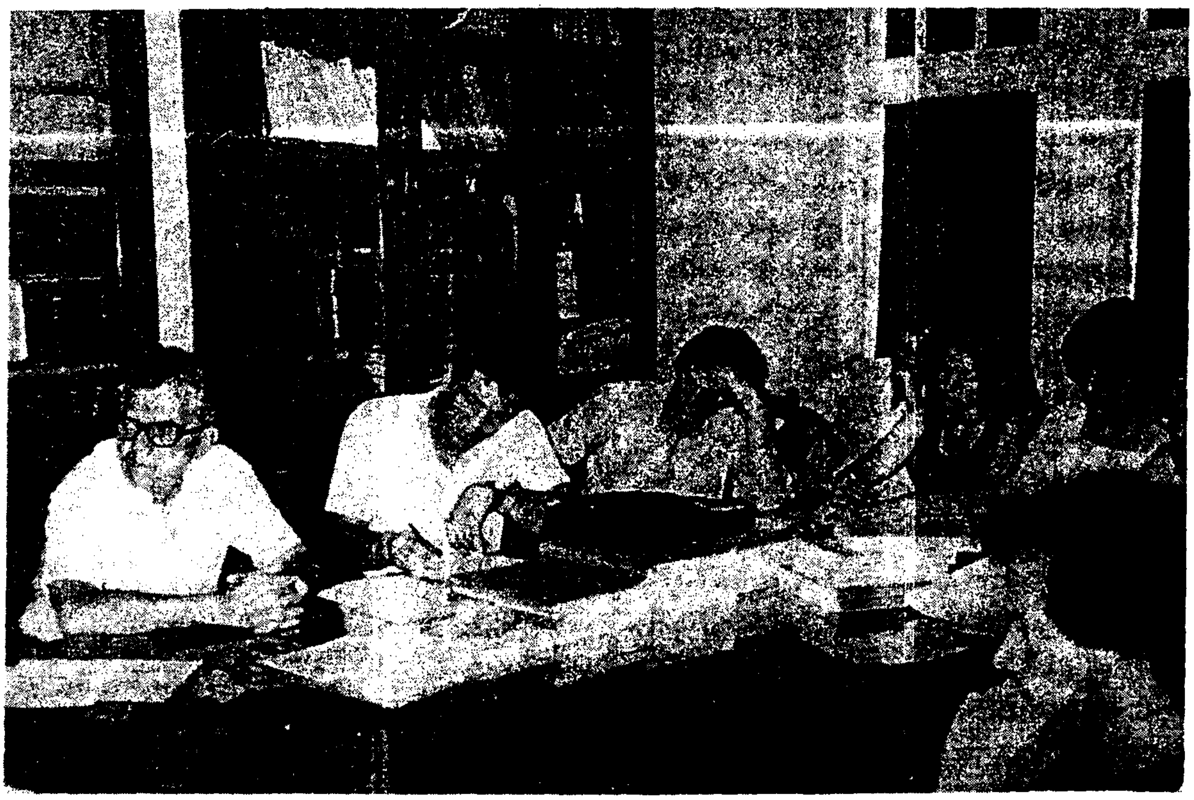
На крају овог прегледа области научног рада Слободана Аљанчића, напомињемо да су сви његови радови приказани и повољно оцењени у главним светским реферативним часописима. Сем тога, многи од њих навођени су и битно коришћени у радовима других аутора, страних и домаћих, а неки су упућивали и подстицали те ауторе на нова и даља истраживања. Најзначајније и карактеристичне примере таквих случајева поменули смо у претходном излагању.

НАСТАВА И ЈОШ НЕКЕ АКТИВНОСТИ

Може се с доста разлога рећи да је дугогодишњи рад Слободана Аљанчића у разним видовима наставе и њеним пратећим делатностима, на матичном факултету и ван њега – виђен у целини и с општег становишта, био за нашу математичку средину од истог или скоро истог значаја као његови научни доприноси. (Ова подела на област научног рада и област наставних активности додуше је, у његовом случају а и иначе, прилично условна, јер је, на пример, рад с магистрантима и докторантима, уколико је озбиљан, с једне стране највиши, завршни вид наставе, а с друге стране – више или мање активно и директно учествовање у унапређењу и развоју саме науке). Већ је поменуто да је као асистент водио вежбе из математичких предмета и да је после избора за доцента преузимао предавања више курсева опште математике (тзв. Математике 1 и 2) и разних дисциплина математичке анализе, комплексне, реалне и функционалне. Ови курсеви одвијали су се како у оквиру редовних тако и на последипломским студијама, на матичној групи, односно Институту за математику, као и на групама за механику, астрономију и физику Факултета. Неки од ових курсева или циклуса предавања били су факултативни. Приближно потпун списак свих тих курсева обухватио би, поред већ поменуте Математике 1 и 2 за нематематичаре: Анализу 1, Теорију комплексних функција, Топологију, Теорију мере и интеграције, Специјалне функције, Теорију реалних функција, Функционалну анализу и Анализу 3. Поред свега овога, у Београду је више година учествовао у настави на последипломским студијама на Факултету организационих наука и у организацији Института за економска истраживања, а учествовао је такође, годинама, у редовној и последипломској настави у Новом Саду, Крагујевцу, Нишу, Приштини и Косовској Митровици. За скоро све курсеве које је држао, Аљанчић је савесно писао одговарајућа скрипта, која су студенти користили, и то како ауторизована тако и неауторизована. У два случаја успео је да за своје курсеве публикује одговарајуће врло добре уџбенике: *Вишу мате-матику 2,* за студенте Факултета организационих наука (1974), и *Увод у реалну и функционалну анализу* (1968), о коме ће још бити речи. Веома добра и успела је, по нашој оцени, била и његова *Теорија комплексних функција,* у којој је одговарајућа материја обрађена потпуније и савременије него у било ком дотадашњем домаћем уџбеничком тексту. Овај уџбеник, коришћен у облику ауторизованих скрипата, био је при-премљен за објављивање, али баш док су завршна редиговања била у току, грубо је онемогућено његово штампање, а истовремено је Аљанчићу одузето предавање овог предмета, које је он у неколико претходних година успешно обављао. У разлоге, оне персоналне, а и неке друге, вероватне, оваквог поступка немамо намеру да улазимо. Довољно је, чини нам се, рећи да су, „таква била времена!“ – Поменутој уџбеничкој литератури треба прикључити неколико Аљанчићевих чланака намењених продубљивању и усавршавању средњо-школске и универзитетске атематичке наставе. Они су били посвећени: *увођењу ирационалних бројева у средњошколску наставу (рад 38), проширењу скупа целих у скуп рационалних бројева (рад 43), путу од вектора до векторских простора (радови 48, 49), површини, запремини и мери уопште (52, 53)* и *асимптотском понашању низова који одређено дивергирају (рад 51).*

Већ смо нагласили да је професор Аљанчић од самог почетка своје универзитетске каријере стицао не мали углед квалитетом својих предавања, што је била одлика и вежби које је држао као асистент, као и осталих његових наставних активности. Ово је безмало опште уверење и општи утисак. Њега у потпуности деле аутори овог текста, који су били Аљанчићеви студенти (првопотписаном је он као асистент држао вежбе), а касније дугогодишњи асистенти и сарадници, и као такви слушаоци многобројних његових предавања и разних других усмених излагања. Заправо, мало је рећи да су његова предавања (и вежбе) била успешна: на њима, а и при многим његовим приказивањима својих и туђих резултата којима смо имали прилике да присуствујемо, његова излагања одликовала су се изванредном јасноћом, прегледношћу, елеганцијом и усклађеношћу, и то не само у формално-стилском погледу, него и по суштинској вредности избора, распореда и уобличавања материјала, што је чинило да се и теже и компликованије ствари примају и схватају не само без већег напора, него и с угодним осећајем лаког и пуног разумевања. Тим својим наступом пленио је, а често, верујемо, и фасцинирао, генерације и генерације својих слушалаца најразличитијих врста и на најразличитијим нивоима.

Као што се то из претходног излагања види, дугогодишње наставно-педагошке активности професора Аљанчића биле су веома бројне и разноврсне. Поред редовне наставе и вођења више последипломских, специјалних и факултативних курсева и семинара, у тим активностима велики значај имао је већи број докторских и магистарских дисертација чију је израду као ментор водио или је учествовао у комисијама за њихову одбрану, пружајући притом кандидатима, често и кад званично није био ментор, стварну, суштинску помоћ, скоро увек драгоцену и пресудну. Међутим, пре свега треба истаћи изванредне Аљанчићеве заслуге за увођење *функционалне анализе,* тада нове математичке дисциплине, у наставу, на више нивоа, а такође и у широку научну делатност у нашој средини. Почело је то држањем, у току неколико година и углавном на Аљанчићеву личну иницијативу, факултативних и незваничних курсева у којима су, уз уводне и помоћне области, обрађивани елементи функционалне анализе, да би се наставило увођењем овог предмета у редовну и у разне видове последипломске наставе. Аљанчић је затим објавио, после скрипата и једне његове скраћене верзије, значајан уџбеник *Увод у реалну и функционалну анализу,* који се и данас користи. Уследило је неколико дисертација и иницирање научних активности у овој области. Тако је, Аљанчићевом заслугом, а такође и заслугом професора Бранислава Мирковића и неколико њихових млађих сарадника, функционална анализа ситуирана и конституисана као централна област, осовина математичке анализе, и на научном и на наставном плану, на Математичком факултету и у нашој средини.



Сл. 1. Професор Аљанчић с групом последипломаца и асистената у библиотеци Математичког института августа 1979. године

Није могуће не поменути још једну веома важну функцију и делатност Слободана Аљанчића, од великог значаја за развој и унапређивање математичке науке и математике уопште, у нашој средини. То је био његов рад у Математичком институту Српске академије наука, чији је сарадник званично постао 1950. године и остао до краја живота. Нешто касније, од 1958. године, радио је у управним и организационим телима Института, Научном савету а потом, од 1971, у Научном већу. Такође је од 1959. године, уз један краћи прекид, био члан Редакционог одбора *„Publications de L'Institut mathematique"*, по свој прилици и данас најбољег и најугледнијег математичког часописа у Србији, да би 1984. године постао главни уредник овог часописа. Чини нам се да је сувишно рећи да је и на овим пословима показивао ону исту ревност, савесност и ефикасност којима су се одликовале остале његове активности.

* * *

Као човек, колега и сарадник, професор Аљанчић одликовао се посебном љубазношћу, срдачношћу и комуникативношћу, али не оном формалном и рутинском, него аутентичном, с тоналитетом истинске отмености и господствености. Безмало у свим односима и ситуацијама поступао је веома прибрано, смирено и конструктивно. Према академику М. Томићу: „Сви они који су ближе познавали Слободана Аљанчића... запазили су његов увек одмерен тон и његово владање собом у свим приликама. Ја не памтим да је икада рекао неку оштрију реч или да је показао да је љут." (Првопотписани овог текста ипак памти један изузетак из тог правила коме је он лично присуствовао. Догодило се то на седници Института, односно, према ранијем називу, Катедре за математику, на којој је Аљанчићу категорички и беспризивно саопштено да штампање његових „Комплексних функција" не долази у обзир и уједно да му се одузима предавање овог предмета. Ово га је у тенутку толико погодило да је љутито на сто за којим је седео бацио неке списе, материјале за седницу које је држао у руци, и одмах потом, одговарајућим гестом и изговоривши нешто као „свега ми је доста", дао на знање да одустаје од сваког даљег разговора; само неколико тренутака после тога, међутим, сасвим се прибрао и вратио своје уобичајено спокојно држање.)

Као дугогодишњи ученици и потом сарадници професора Аљанчића, на основу његовог општег познавања и утисака о њему који су се годинама сабирали и слагали, стекли смо уверење да је за њега, поред породице, којој је био дубоко привржен, и пријатеља, с којима је неговао блиско дружење већ од гимназијских дана и ране младости, у суштини само постојао рад у науци и за науку којој је посветио живот. Није, међутим, била по среди нека скученост и једнодимензионалност: Аљанчић је живео нормалним животом културног човека, интересовао се за књижевност, уметности и позориште, активно се бавио рекреа-тивним спортом док му је то здравље дозвољавало, али ни у шта сем у претходно, а нарочито не у нешто што би у било ком погледу било инфериорно и тривијално, није улагао своју праву енергију и преданост. Имамо утисак да је овај његов став одлучне привржености само ономе за шта се определио као за главне вредности у животу, овај његов својеврсни аскетски став, плод његовог рано формираног и сазрелог уверења да је то једини начин да се на овим нашим просторима и у овим временима, у којима има толико оног што спутава и омета, као и оног што збуњује и смућује, постигне нешто значајно на плану интелектуалног стваралаштва.

Чини нам се прикладним да ово излагање закључимо следећим речима које је првопотписани изговорио у једној комеморативној прилици:

„Академик професор Слободан Аљанчић био је једна од најистакнутијих, средишњих личности у ономе што би се могло сматрати беочугом, мостом између генерација наших математичара које већ припадају прошлости, а чији су водећи представници били Михаило Петровић, Богдан Гавриловић, Николај Салтиков, Тадија Пејовић, Јован Карамата, Милош Радојчић, Радивоје Кашанин, Војислав Авакумовић, Драгољуб Марковић, с једне и данашњег времена, с друге стране. Он, међутим, није био неки пасиван, само хронолошки и ситуациони беочуг и мост, него је ту своју улогу остваривао на активан и животворан начин, својим многобројним, значајним и плодоносним иницијативама и иновацијама. Сада, када је физички и фактички отишао, суштинска достигнућа и резултати његове истрајне научне и наставне активности, њихово дејство и зрачење, као и сећање на племенитост и шарм његове личности, остаће у нашој средини трајно присутни.“

БИБЛИОГРАФИЈА РАДОВА СЛОБОДАНА АЉАНЧИЋА

Јединице овог списка уз чије су редне бројеве стављене звездице (*) нису математички научни радови у ужем смислу речи, а све остале јесу. Притом су обе верзије истог рада, она на српском и она на неком страном језику (обично је у питању превод на тај језик са само мањим модификацијама, или без њих), наведене под истим редним бројем, тј. чине једну библиографску јединицу.

1. *Sur une formule sommatoire genéralisée.* – Publications de L'Inst. math. Acad. serbe sci. **2** (1948), стр. 263–269.

2. *Одређивање најбољих граница извода када су познате извесне особине функције и осталих извода* (са В. Г. Авакумовићем). – Глас Српске академије наука CXCVIII (1950), стр. 197–210. – *Sur la meilleure limite de la dérivée d'une fonction assujéttie à des condition supplémentaries* (са В. Г. Авакумовићем). – Publications de l'Inst. math. Acad. serbe sci. **3** (1950), стр. 235–242.

3. *Прилог теорији Gegenbauer-ових полинома.*– Зборник радова Мат. инст. САН **2** (1952), стр. 113–128.

4. *О асимптотском развијању А-збирљивих линеарних функционела*(теза). – Зборник радова Мат. инст. САН **3** (1953), стр. 157–212.

5. *Développement asymptotique des fonctions représentables par les séries de Legendre.* – Publications de L'Inst. math. Acad. serbe sci. **6** (1954), стр. 115–124.

6. *О једном поступку за добијање асимптотских развитака.* – Весник друштва мат. и физ. НР Македоније **5** (1954), стр. 22–29.

7. *Sur la valeur asymtotique d'une classe des intégrales définies* (са R. Bojanićem i M. Tomićem). – Publcations de l'Inst. math. Acad. serbe sci. **3** (1950), стр. 235–242.

8*. *Uvod u teoriju kompleksnih funkcija* T. I–III (ауторизована скрипta). – Београд, 1955: T. I 227 стр. T. II 172 стр. T. III 161 стр.

9. *Два става о асимптотском понашању тригонометријских редова*(са Р. Бојанићем и М. Томићем). – Зборник радова Мат. инст. САН **4** (1955), стр. 15–26.

10. *Sur L'intégrabilité de certaines séries trigonométriques* (са Р. Бојанићем и М. Томићем). – Publications de l'Inst. math. Acad. serbe sci. **8** (1955), стр. 67–84.

11. *Über Summierbarkeit von Orthogonalenentwicklungen stetiger Funktionen.* – Publications de l'Inst. math. Acad. serbe sci. **10** (1956), стр. 121–130.

12. *Sur le comportement asymptotique au voisinage de zéro de séries trigonométriques de sinus à coefficients monotones,* (са Т. Бојанићем и М. Томићем). – Publications de l'Inst. math. Acad. serbe sci. **10** (1956), стр. 101–120.

13. *Правилно променљиве функције у Frullani-ев интеграл* (са J. Караматом). – Зборник радова Мат. инст. САН **5** (1956), стр. 239–248.

14. *Quelques cas particuliers de passage à la limite dans le développements asymptotiques.* – Centre belge de rech. math., Colloque Théorie des suites, Bruxelles (1957), стр. 96–108.

15. *Classe de saturation des procédés de sommation de Hölder et de Riesz.* – Comptes rendus Acad. sci. Paris **246** (1958), стр. 2567–2569.

16. *Meilleure approximation et classes de saturation du procédé de Hölder dans les espaces C et L^p.* – Publcations de l'Inst. math. Acad. serbe sci. 12 (1958), стр. 109–124.

17. *Über den Perronschen Satz in der Theorie der Differenzengleichungen.* – Publcations de l'Inst. math. Acad. serbe sci. **13** (1959), str. 47–56.

18. *Sur la classe de saturation de quelques procédés de sommation.* – Atti del VI Congresso dell Unione Mat. Italiana, Napoli, 1959; str. 171–172.

19. *Classe de saturation du procédé des moyennes typiques de Riesz.* – Publications de l'Inst. math. Acad. serbe sci. **13** (1959), str. 113–122.

20. *Caractérisation des classes de fonctions de Lipschitz, Zygmund et B. Sz. Nagy.* – Publications de l'Inst. math. Acad. serbe sci. 14 (1960), str. 123–128.

21.* *О неким новијим резултатима из тригонометријске апроксимације.* – Зборник радова Мат. инст. САН **8** (1960), стр. 9–52.

22. *Approximation of continuous functions by typical means of their Fourier series.* – Proc. Amer. Math. Soc 12 (1961), стр. 681–688.

23. *О модулу непрекидности Fourier-ових редова трансформисаних конвексним мултипликаторима.* – Глас САНУ CCLIV (1963), Одељење прир. мат. наука, (НС) **24**, стр. 35–53. – *Sur le module de continuité des series de Fourier transformées par des multiplicateurs convexes*. – Bull. Acad. Serbe Sci. Arts **XXXI** (1963) Cl. Sci. Math. Natur. **4**, стр. 41–51.

24. *Sur les séries de Fourier transformées par des multiplicateurs convexes.* – Atti del Congresso dell Unione Mat. Italiana, Genova, 1963, стр. 2.

25. *Über konvexe Multiplikatoren bei Fourier-Reihen.* – Math. Zeitschrift **81** (1963), стр. 215–222.

26*. *Увод у функционалну анализу.* – Универзитет у Београду, Београд, 1963, стр. 190+3.

27. *Sur le module de continuité intégral des séries de Fourier à coefficients convexes,* (са М. Томићем). – Comptes rendus Acad. sci. Paris **259** (1964), стр. 1609–1611.

28. *О логаритамским у Hölder-овим срединама.* – Глас САНУ CCLX (1965), Одељење прир. мат. наука (НС) **26** , str. 39–46. – Sur les moyennes logarithmiques et celles de Holder. – Bull. Acad, Serbe Sci. Arts **XXXV** (1966) Cl. Sci. Math. Natur. (NS) **5**, стр. 5–8.

29. *Über den Stetigkeitsmodul von Fourier-Reihen mit monotonen Koeffizienten* (са М. Томићем). – Mathem. Zeitschrift **88** (1965), стр. 275–284.

30. *О модулу непрекидности Fourier-ових редова трансформисаних конвексним мултипликаторима* (II). – Глас САНУ CCLX (1965) Одељење

прир. мат. наука, (НС) **26**, стр. 99–105. – *Sur le module de continuité des séries de Fourier transformées par des multiplicateurs convexesb (II)*. – Bull. Acad. Serbe Sci. Arts XXXV (1966), Cl. Sci. Math. Natur. (NS) 5, стр. 35–38.

31. *On the integral moduli of continuity in L^p ($1 < p < \infty$) of Fourier series with monotone coefficients*, – Proc. Amer. Math. Soc. **17** (1966), стр. 287–294.

32. *Transformationen von Fourier-Reihen durch monoton abnehmende Multiplikatoren* (са М. Томићем). – Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **17** (1–2) (1966), стр. 23–30.

33. *О доњој граници модула непрекидности израженој помоћу Fourier-ових коефицијената функције* (са М. Томићем). – Глас САНУ CCLXIX (1967), Одељење прир. мат. наука, (НС) **30**, стр. 65–77. – *Sur la borne inférieure du module de continuité de la fonction exprimée par le coefficients de Fourier* (са М. Томићем). – Bull. Acad. Serb Sci. Arts **XL** (1967) Cl. Sci. Math. Natur. (ns) стр. 39–51.

34. *О модулу специјалних Fourier-ових редова и о модулу Fourier-ових редова трансформисаних мултипликаторима различитих типова*.– Глас САНУ CCLXIX (1967) Одељење прир. мат. наука, (НС) 30, стр. 37–64. – *Sur le module de continuité des séries de Fourier particulières et sur le module des séries de Fourier transformées par des multiplicateurs de types divers.* – Bull. Acad. Serbe Sci. Arts XL (1967) Cl. Sci. Math. Natur. (NS) **6**, стр. 13–38.

35*. *Uvod u realnu i funkcionalnu analizu.* – Univerzitet u Beogradu, Beograd, 1968. str. 326+(1); 2. izd.: 1974. str. (8)+326+(2); 3. izd.: 1978. str. (6)+326+(1) (преведено на албански 1982, друго издање 1986).

36. *On the degree od convergence of Fejér–Lebesgue sums* (са Р. Бојанићем и М. Томићем). – Enseign. Math. **15** (1969), стр. 21–28.

37. *Зигмунд-ова класа функција у теорији апроксимације.* – Посебна издања САНУ CDXXXIV (1970), Споменица у част новоизабраних чланова САНУ, **44**, стр. 3–10.

38*. *O uvođenju iracionalnih brojeva u srednješkolsku nastavu.* – Savremena nastava matematike, Beograd, 1971; стр. 141–153.

39. *Sur l'approximation locale par les moyennes arithmétiques* (са М. Томићем). – Bull. Acad. Serbe Sci. Arts XLVIII (1972), Cl. Sci. Math. Natur. **5**, стр. 17–27.

40*. *Viša matematika II (Varijacioni račun).* – FON, Beograd, 1972.

41. *Asymptotic Mercerian theorems involving slowly varying functions.* – Matematički vesnik (NS) **10** (**25**) (1973), стр. 331–337.

42. *Asymptotische Mercersätze für Hölder- und Cesàro-Mittel.* – Publications de l'Institut mathématique (Beograd) (NS) **17** (**31**) (1974), стр. 5–16.

43*. *О проширењу скупа целих бројева у скуп рационалних бројева.* – Математика, 1974, **4**; стр. 21–32.

44. *Slowly varying functions with remainder term and their applications in analysis* (са Р. Бојанићем и М. Томићем). – Посебна издања САНУ CDLXVII, Одељење природноматематичких наука, **41**, стр. (6)+51.

45*. *Viša matematika II (Diferencijalne jednačine, ekstremumi funkcija više promenljivih, Varijacioni račun).* – FON, Beograd, 1974; стр. 422.

46. *Deux théorèmes merceriens asymptotiques pour des suites à comportement lent.* – Publications de l'Institut mathématique (Beograd). – (NS) 18 (32) (1975), стр. 5–18.

47. *Sur le théorème mercerien de Čakalov.* – Publications de l'Institut mathématique (Beograd) (NS) 19 (33) (1975), стр. 9–15.

48*. *Od vektora do vektorskih prostora (I).* – Matematika 1 (1976), стр. 5–22.

39*. *Od vektora do vektorskih prostor (II).* – Matematika 2 (1976), стр. 11–28.

50. *Abel- und Mercersätze mit Restglied.* – Труды Международной конференции по теории приближения функций, Калуга; Наука, Москва, 1977, стр. 5–9.

51. *O-regularly varying functions* (са Д. Аранђеловићем). – Publications de l'Institut mathématique (Beograd) (NS) 22 (36) (1977), стр. 5–22.

52*. *Površina, zapremina i mera uopšte (I).* – Matematika 2 (1977), стр. 63–71.

53*. *Površina, zapremina i mera uopšte (II).* – Matematika 4 (1977), стр. 8–18.

54. *Generalized Cesàro numbers.* – Publications de l'Institut mathématique (Beograd) (NS) 24 (38) (1978), стр. 13–18.

55. *An asymptotic Mercerian theorem for weighted means of slowly vaying sequences.* – Bull. Acad. Serbe Sci. Arts LXIV (1979), Sciences mathématiques, 10, стр. 47–52.

56*. *O nizovima koji određeno divergiraju i o njihovom asimptotskom ponašanju.* – Putevi i dostignuća, Sarajevo, 1979, стр. 77–105.

57. *Some applications of O-regularly varying fuctions.* – Proc. Internat, Conf. "Approximation and Function Spaces", Gdansk, 1979; North-Holland Amsterdam and PWN Warsawa 1981, стр. 1–15.

58. *Mercerian theorems for weighted means.* – Proc. Internat. Conf. "Functions, Series, Operators", Budapest, 1980; стр. 93–99.

59. *Regularly varying functions in asymptotic Mercerian theorems.* – Bull. Acad. Serbe Sci. Arts LXXIX (1982), Sciences mathématiques, 12, стр. 23–30.

60. *Transformations of O-regularly varying functions by regular operators.* – Bull. Acad. Serb. Sci. Arts LXXXIV (1984), Sciences mathématiques, 13, стр. 1–6.

61. *Generalization of a theorem due to Cesàro.* – Bull. Acad. Serbe Sci. Arts XCI (1986), Sci. mathématiques, 15, стр. 1–4.

62*. *Remembering Jovan Karamata* (са М. Томићем). – Publications de l'Institut mathématique (Beograd) (NS) 68 (62) (1978), стр. 1–6.

63*. *Радивој Кашанин као математичар* (са М. Томићем). – Историја математичких наука, Књига 4, Математички институт, 1991, стр. 9–21.

Према расположивим подацима, С. Аљанчић је написао и студенти су користили неауторизована скрипта под следећим насловима: *Теорија реалних функција, Мера и интеграција,* и још нека.

SLOBODAN ALJANČIĆ
(1922–1993)

Slobodan Aljančić, professor at the Faculty of Sciences and Mathematics in Belgrade for many years, and, from the age of 46. Full Member of the Serbian Academy of Sciences and Arts, was one of the most outstanding mathematicians and teachers in Serbia in the second half of the 20th century, and also a very respected and beloved person. He was born in Belgrade on March 12, 1922. His father, Zdenko Aljančić, was of Slovenian origin, and his mother Bisenija belonged to a family from Belgrade.

He finished primary school and high school in Belgrade and, in 1940, he started to study Civil Engineering. After World War II he moved to the Faculty of Philosophy – Department of Mathematics, where he graduated in 1947.

Already during his studies he started with research and he published his first paper in 1948. After graduation he became a teacher in a secondary school and also a part-time Assistant at the Faculty of Natural Sciences, until 1951, when he obtained a regular post as Assistant at this faculty. Continuing his research, in 1953 he obtained his doctoral degree at the Academy of Sciences with the thesis „*On Asymptotic Expansions of A-Summable Linear Functionals*“. His further scientific development and his university career were rather quick. He became Assistant Professor in 1954, Associate Professor in 1959 and Full Professor in 1968. He was elected a Corresponding Member of the Serbian Academy of Sciences and Arts in 1961, and a Full Member in 1968.

Almost from the very beginning of his scientific activities. Aljančić was included in the circle of students and associates of the great Serbian mathematician Jovan Karamata, working in particular with Miodrag Tomić and Ranko Bojanić. Together with this group and also alone he studied primarily summability of trigonometric series and regularly varying functions, and before that he already started successful investigations in the area of asymptotic series and later on in the area of approximation theory. Dealing with these problems, he established a close cooperation with the leading expert in thisarea, Jacques Favard, who provided for him a sabbatical stay in Paris during 1957/58 school year. The friendship with Favard continued in the subsequent years. Besides this stay in Paris, Aljančić had only one longer stay abroad, three months in the United States, in 1971. He also took part in several domestic and foreign conferences and congresses. Parallel to the mentioned activities, Aljančić continued his extremely successful teaching activity and among others, published two successful textbooks; one of them *Introduction to Real and Functional Analysis,* was used by numerous generations of students.

During the last two decades of his life. Aljančić had serious heart troubles. However, due to his persistence and discipline, he successfully coped with these problems. Later on, another malignant disease came, from which he did not recover. He died on March 19. 1993.

The work of Aljančić can be classified into the following five areas:

I. *The theory of asymptotic series,*
II. *Approximation theory,*
III. *Trigonometric series,*
IV. *Summability,*
V. *Regularly varying functions.*

I *Asymptotic series* were introduced by Poincaré and Stieltjes at the end of the 19th century, and later on this notion was generalized in several ways. The first papers of Aljančić partially belong to this area, and the dissertation mentioned above was entirely dedicated to problems from this area. In other articles, Aljančić obtained several new asymptotic expansions.

II The *approximation theory* was concerned with approximation of the elements of a space of real functions by certain classes of trigonometric polynomials and the results consist mostly of *direct* and *inverse theorems, equivalence theorems,* and *saturation theorems.* Aljančić started to investigate this theory in 1957 and, as already mentioned, he cooperated with Favard in connection with this theory. In his works dedicated to this theory, he studied various approximation procedures, especially in connection with saturation classes and orders of approximation for saturations.

III In the area of *trigonometric series* Aljančić, alone or together with Bojanić and Tomić, used slowly varying functions to genaralize, among others, theorems concerned with the asymptotic behavior of *sine* and *cosine* series and with the relationship between the integrability of some functions and convergence of the corresponding series. He also investigated some problems in connection with Fourier series transformed by multiplication of their coefficients by given coefficients.

IV The study of *summability* has a long and abundant tradition in Serbia. Before and after World War II, Karamata and many of his followers led intensive investigations concerned with these problems. Results in this area are the so-called *direct* (Abelian), *inverse* (Tauberian) and *Mercerian* theorems. Aljančić obtained important results in many articles dealing with summability, mainly concerned with the Mercerian topic.

V Aljančić's works that belong to *regular variation (regularly varying functions)* are among the most important of his works. Slowly (and together with them regularly) varying functions were introduced by Karamata in the early thirties of the 20^{th} century. Karamata gave foundation of this theory and found its various applications. Later on, several authors, from Serbia and from abroad, contributed to the further development of this theory and to its various applications. Together with Bojanić and Tomić, with Karamata, or alone, Aljančić applied these functions to the investigation of the behavior of sums of trigonometric series, to the problem of integrability of these sums and to a problem concerned with Frullani integral. Two of his articles belong to the theory of regular variation in the broad sense. The first one, joint with Bojanić and Tomić, contains a systematic study of the so-called *slowly varying functions with a remainder term,* while the second one, joint with D. Arandjelović, develops the theory of the so-called *O-regularly varying functions.* These functions were considered by Karamata and Avakumović already in the thirties, but Aljančić and Arandjelović went much further in their investigations and also found some applications.

There are many reasons to assert that the year-lasting teaching work of Slobodan Aljančić was almost as important for us as his scientific contributions. The quality of his lectures and other forms of his teaching merit a special emphasis. Moreover, he wrote several very good textbooks, only two of which he managed to publish as books. He was the supervisor for several doctoral and masters theses, giving to his students a real and essential help. One has to emphasize especially his merits, at the teaching, as well as at the scientific level, for introducing functional analysis in Serbia.

As a man and as a colleague, Professor Aljančić had a special kindness and warmth and also a very concentrated, calm and constructive behavior in all circumstances.

Academician, Professor Slobodan Aljančić was one of the most prominent, central persons in what could be considered as a link, a bridge, between generations of Serbian mathematicians belonging already to the past, whose leading representatives were Mihailo Petrović, Bogdan Gavrilović, Nikolaj Saltikov, Tadija Pejović, Jovan Karamata, Miloš Radojčić, Radivoje Kašanin, Vojislav Avakumović and Dragoljub Marković, on the one side, and the present generation of mathematicians – on the other side.