PETAR N. TODOROVIĆ

DD 10

SLUČAJNE TRANSFORMACIJE

STRUKTURA STATISTIČKIH SKUPOVA

Beograd, 1961.

Svome profesoru dr Dragoljubu Markoviću izražavam najtopliju zahvalnost na savetima koje mi je pružio u toku izrade ove teze.

Takodje veliku zahvalnost dugujem profesorima dr Tadiji Pejoviću i dr Djordju Karapandžiću, koji su pročitali deo rukopisa i dali korisne savete.

Na kraju zahvaljujem Vojislavu Balabanu na korisnim diskusijama o mogućnosti primene ovog rada na praktične probleme teorije uzorka.

Ova teza je radjena u slobodnom vremenu, koje je autoru preostajalo posle sedmočasovnog rada u Institutu i pedagoškog rada na fakultetu.

Za materijalnu pomoć i razumevanje u radu autor se zahvaljuje direktorima prim.dr Jovanu Ristiću i profesoru dr Jovanu Cekiću, i šefu Odeljenja za socijalnu medicinu dr Borivoju Sirovici.

Dr Veri Atanacković autor se zahvaljuje na podacima koji su mu poslužili za ilustraciju, a Eleni Vojnović za tehničku pripremu i korekturu rukopisa.

U V O D

Objekte proučavanja klasičnog računa verovatnoće i matematičke statistike predstavljaju slučajne veličine i njihovi zakoni verovatnoća. Medjutim, od interesa je proširiti pojam slučajne veličine i na skupove, kod kojih se na slučajan način vrše promene unutar njihovih struktura. Takvi skupovi u daljem izlaganju biće nazivani slučajni objekti.

Osnovni cilj ovog rada je proučavanje specijalnih slučajnih objekata, od kojih svaki predstavlja strukturu nekog statističkog skupa, koja se na slučajan način menja u odnosu na neko jednodimenziono obeležje X. Isto tako kao što slučajna veličina može uzeti svaku vrednost iz nekog brojnog skupa, tako i posmatrana struktura može imati svaki oblik iz nekog skupa oblika. Nazovimo svaki elemenat poslednjeg skupa realizacijom. Ukupnost svih mogućih realizacija nekog slučajnog objekta naziva se prostorom definicije toga objekta.

Iz prethodnog izlaganja je očevidna analogija koja postoji izmedju slučajne veličine i slučajnog objekta. Koristeći tu analogiju prirodno je ići dalje i konstruisati sve one karakteristike i pokazatelje posmatranog objekta čiji analogoni postoje kod slučajnih veličina, i na taj način izgraditi statistiku slučajnog objekta o kome je reč.

U ovom radu biće posmatrani oni statistički skupovi čije se strukture na slučajan način menjaju u odnosu na neko obeležje, koje može uzeti samo konačan skup vrednosti. Samim tim je razumljivo da se slučajno menjaju i odgovarajući zakoni verovatnoća tih skupova. Proučavanje pomenutih skupova izvršiće se pomoću njihovih zakona verovatnoće, koji će biti predstavljeni slučajnim vektorima.

Proučavanje navedenih problema ima svoj praktičan značaj. U medicinskim, fizičkim, tehničkim, ekonomskim itd. istraživanjima često puta smo u situaciji da se nalazimo pred problemima koji imaju gornji karakter. Tako, na primer, kod proučavanja dinamike metabolizma, potrebno je u izvesnim slučajevima posmatrati /posle tretiranja grupe pacijenata nekim odredjenim biološkim principom/ lučenje neke materije, pri čemu se raspored intenziteta lučenja na slučajan način menja u toku vremena.

Boze-Ajnštajnov problem, koji se odnosi na promenu položaja čestica i kod koga je od interesa iznalaženje svih mogućih rasporeda N čestica u n ćelija, odnosno predvidjanje oblika tog rasporeda, pod pretpostavkom da je uslovljen nekim slučajnim procesom, takodje je od interesa u teorijskoj fizici.

Pri proizvodnji odredjenog industrijskog artikla često puta je neophodno posmatrati njegov raspored potrošnje u odnosu na neko obeležje. Tako, na primer, pri proizvodnji jedne odredjene vrste cipela od značaja je posmatrati raspored potrošnje u odnosu na njihovu veličinu i promene tog rasporeda tokom vremena itd.

Sve te probleme koji su od praktičnog značaja trebalo bi na neki način podvrći matematičkoj kontroli i ispitivanju. Ovaj rad je skroman prilog proučavanju tih pitanja.

P R V I   D E O

POJAM I DEFINICIJA SLUČAJNOG OBJEKTA

Kao što je već napomenuto u Uvodu, osnovni i glavni zadatak ovih izlaganja je proučavanje statističkih skupova, čije se strukture na slučajan način menjaju u odnosu na neko obeležje X. U tom cilju označimo sa S jedan takav slučajan skup. Promene njegove strukture uslovljavaju promenu zakona verovatnoće toga skupa. Iz same prirode problema sledi, da svakom obliku strukture skupa S odgovara jedan odredjen zakon verovatnoće. Isto tako važi i suprotno, tj. svakom zakonu verovatnoće /iz nekog skupa zakona verovatnoće/ odgovara jedna odredjena struktura skupa S. Prema tome, izmedju elemenata ta dva skupa /skupa struktura i odgovarajućih zakona verovatnoća/ postoji biunivoka korespondencija.

U daljem izlaganju, pošto je ovde reč o objektima koji nisu veličine, biće date i odgovarajuće definicije, odnosno oznake, koje su u skladu sa karakterom predmeta proučavanja.

Definicija 1:

Posmatrajmo skup opita O i pretpostavimo da je rezultat R svakog opita slučajan. Slučajnim objektom definisanim nad skupom opita O naziva se takav objekat čija je realizacija potpuno odredjena rezultatom R. Skup svih mogućih realizacija slučajnog objekta predstavlja njegovo područje definicije.

Primeri:

1^o/ U cilju izvodjenja izvesnog eksperimenta, grupi od N bolesnika od pelagre merena je količina šećera u krvi, pri čemu je kao rezultat dobijena odredjena distribucija frekvencija. Odmah zatim svaki bolesnik posebno tretiran je izvesnom količinom glukoze, koja je uzimana "per os" i merene su količine šećera u krvi posle 30, 60, 120 i 180 minuta. Za svaki pomenuti vremenski momenat konstruisana je odgovarajuća distribucija frekvencija.

U ovom primeru imamo slučaj, kada se pod dejstvom izvesnih faktora menja struktura posmatranog statističkog skupa u odnosu na obeležje "količina šećera u krvi". Posle davanja glukoze /skup opita O/ i merenja količina šećera u nekom trenutku t_0 /rezultat R/, dobijena je odgovarajuća distribucija frekvencija. Medjutim, pretpostavljajući poznavanje strukture posmatranog skupa u trenutku t_0 nemoguće je /usled istovremenog dejstva i fluktuacije ogromnog broja individualnih faktora varijacije/ predvideti njen tačan oblik i u nekom drugom momentu vremena t_1. U ovom slučaju struktura posmatranog skupa predstavlja slučajni objekat, dok su pojedini oblici te strukture realizacije slučajnog objekta.

2°/ Posmatrajmo svu decu odredjene starosti, koja žive na nekoj teritoriji gde su životni uslovi i standard stabilni i na odredjenoj visini. Pretpostavimo da su verovatnoće oboljenja od pojedinih tipova poliomijelita /postoje uglavnom tri poznata tipa virusa koji izazivaju poliomijelit: tip I, tip II i tip III/ redom p_I, p_{II}, p_{III}, koje je za datu populaciju teoretski moguće izračunati. Neka je dalje verovatnoća neobolevanja p; pod navedenim uslovima veličine p, p_I, p_{II} i p_{III} su konstantne tokom vremena.

Iz godine u godinu menjaće se relativne frekvencije pojedinih tipova oboljenja, na slučajan način /svake godine se posmatraju deca iste starosne grupe kao i prethodne/. Kako se struktura oboljenja od pojedinih tipova poliomijelita menja slučajno, tačan oblik te strukture unapred je nemoguće predvideti.

Posmatranu strukturu iz tih razloga nazivamo slučajnim objektom, a pojedine njene oblike realizacijama toga objekta.

3°/ Pretpostavimo da je potrebno kontrolisati kvalitet proizvodnje jedne odredjene vrste artikla, koji se proizvodi u serijama od po N komada. Svi proizvedeni artikli svrstavaju se prema kvalitetu u n klasifikacionih razreda.

Iz prirode posmatranog problema može se videti da se distribucije frekvencija pojedinih serija u odnosu na posmatranu klasifikaciju menjaju na slučajan način od serije do serije. Zbog toga se struktura skupa proizvedene serije artikala u odnosu na utvrdjene norme kvaliteta menja na slučajan način, pa, prema tome, predstavlja jedan slučajan objekat.

4°/ U praktičnim primenama teorije uzorka često je moguće naići na ovakav problem: Posmatrajmo jednu populaciju koja se sastoji od svih stanovnika iz jedne odredjene oblasti i pretpostavimo da je zadatak ocena starosne strukture posmatrane populacije na osnovi uzorka. Neka je u tom cilju iz datog skupa stanovnika dobijen slučajan uzorak od ukupno n osoba, koje rasporedjene u r starosnih grupa formiraju odredjenu distribuciju frekvencija. Neki drugi uzorak iste veličine iz iste populacije imaće neku drugu distribuciju frekvencija u odnosu na posmatrano obeležje itd.

U ovom primeru uzorak kao skup od n osoba predstavlja jedan slučajan skup, jer se njegova struktura u odnosu na obeležje "starost" menja na slučajan način. Zbog toga se ta struktura naziva slučajnim objektom, a pojedini njeni oblici su realizacije te strukture.

5°/ Posmatrajmo, najzad, još i sledeći primer, koji ima teoretski značaj i koji će u daljim izlaganjima biti detaljno obradjen. On se sastoji u sledećem:

Posmatrajmo n elemenata, koji se na slučajan način rasporedjuju u k ćelija. Vrlo je jednostavno pokazati da je tada broj mogućih rasporeda jednak

$$\binom{n+k-1}{k-1} \qquad (1)$$

Fiksiramo dalje jedan odredjen raspored, pretpostavljajući da je svaka ćelija označena jednim prirodnim brojem od 1 do k. Isto tako neka su svi elementi koji pripadaju i-toj ćeliji označeni sa i, gde je i = 1,2...k. Ako sada sve tako označene elemente izvadimo iz njihovih ćelija i pomešane zajedno stavimo u neku urnu, tada će pri slučajnom izboru jednog elementa iz te urne postojati unapred data verovatnoća da će on pripasti odredjenoj ćeliji. Na taj način moguće je zamisliti slučajnu veličinu X, koja uzima redom vrednosti 1,2...n, pri čemu je verovatnoća da će biti X = i jednaka verovatnoći izbora elementa sa oznakom i.

Ako se eksperimenat slučajnog razmeštanja tih n elemenata u k ćeliji ponavlja, onda se struktura skupa u odnosu na veličinu X menja na slučajan način. Prema tome, ta struktura predstavlja još jedan primer slučajnog objekta. Broj svih mogućih realizacija dat je izrazom /1/.

Moguće je navesti još čitav niz sličnih primera, koji se javljaju u najrazličitijim oblastima ljudske delatnosti. Medjutim, osnovni zadatak prethodnog izlaganja je ilustracija pojma "slučajni objekat" i u tu svrhu dati primeri su sasvim dovoljni.

SLUČAJNI OBJEKAT KOJI PREDSTAVLJA ZAKON VEROVATNOĆE STATISTIČKOG SKUPA, ČIJA SE STRUKTURA MENJA NA SLUČAJAN NAČIN U ODNOSU NA DATO OBELEŽJE X

Neka je S neki statistički skup, čija se struktura na slučajan način menja u odnosu na neko jednodimenzionalno obeležje X, koje može uzeti samo konačno mnogo vrednosti

$$X : x_1, x_2, \dots x_i, \dots x_n$$

Označimo verovatnoću dogadjaja da će biti $X = x_i$ sa p_i, tj.

$$P_r\{X = x_i\} = p_i$$

Tada je zakon verovatnoće od S dat sledećim skupom parova:

$$\begin{array}{ccccc} x_1, & x_2, & \dots\, x_i, & \dots & x_n \\ p_1, & p_2, & \dots\, p_i, & \dots & p_n \end{array} \qquad (2)$$

pri čemu moraju biti zadovoljeni uslovi

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \qquad 0 \le p_i \le 1 \qquad (3)$$

Pošto se struktura posmatranog skupa S menja na slučajan način, onda su,s obzirom na karakter te promene, veličine p_i slučajne veličine.

U daljem izlaganju biće, pre svega, neophodno rešiti problem načina proučavanja slučajnog objekta o kome je reč. To je neophodno iz tog razloga, što se u tu svrhu ne može upotrebiti onaj isti metod koji je bio korišćen kada je bila u pitanju jednodimenziona slučajna veličina. Mada je u opštem slučaju teško dati neko generalno uputstvo u tom smislu, za slučaj koji je predmet ovog proučavanja to se može učiniti relativno vrlo jednostavno na sledeći način:

Pretpostavimo posmatrani slučajni objekat u obliku na koji se mogu primeniti osnovne statističke ideje, principi i matematička aparatura, korišćeni pri proučavanju slučajnih veličina. Način kojim se to postiže skoro je očevidan i sastoji se u sledećem: zakon verovatnoće statističkog skupa S predstavićemo vektorom $\vec{A}$, čije su koordinate slučajne veličine p_i, tj. vektorom

$$\vec{A} = \vec{A}(p_1, \; p_2, \; \dots \; p_n)$$

Posmatrani n-dimenzionalni vektor je geometrijski ekvivalent zakona verovatnoće posmatranog statističkog skupa S. Kako su koordinate od $\vec{A}$ slučajne veličine, to je samim tim i $\vec{A}$ jedan slučajan vektor. Prema tome, $\vec{A}$ je takav n-dimenzionalni slučajni vektor čije su pojedine realizacije potpuno i jednoznačno odredjene pojedinim oblicima strukture skupa S. Obrnuto, svaka realizacija vektora $\vec{A}$ potpuno i jednoznačno odredjuje jednu strukturu skupa S.

Pretpostavimo da je ukupnost svih pojedinih oblika strukture, tj. skup svih realizacija posmatranog slučajnog objekta, jedan konačan skup. Tada svaki elemenat tog skupa realizacija ima odredjenu verovatnoću ostvarenja P_i. Ako svaku takvu realizaciju predstavimo vektorski, dobićemo sledeći skup parova:

$$\begin{array}{ccccc} \vec{A}_1, & \vec{A}_2, & \dots \; \vec{A}_j, & \dots & \vec{A}_N \\ P_1, & P_2, & \dots \; P_j, & \dots & P_N \end{array}$$

gde je N broj svih realizacija slučajnog objekta o kome je ovde reč. Posmatrani skup parova naziva se zakon verovatnoće slučajnog vektora $\vec{A}$. Veličine P_j moraju zadovoljavati uslove

$$\sum_{j=1}^{N} P_j = 1 \qquad 0 \leqslant P_j \leqslant 1$$

Slučajni vektor $\vec{A} = \vec{A}(p_1, p_2, \ldots, p_n)$, čije su realizacije vektori $\vec{A}_j$ $(j = 1, 2, \ldots, N)$, ima čitav niz osobina, koje će biti korišćene u daljim izlaganjima. Pre svega, njegove koordinate su slučajne veličine. Pošto zadovoljavaju uslov /3/, krajnje tačke njegovih realizacija moraju ležati na hiperravni.

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1 \qquad (4)$$

I najzad, s obzirom na drugi uslov /3/, te tačke hiperravni /u kojima leže krajnje tačke realizacije od $\vec{A}$/ imaju nenegativne koordinate.

Posmatrajući statističke skupove čije se strukture menjaju u odnosu na neko obeležje X, moguće ih je podeliti na dve velike klase: na one čija se struktura menja neprekidno i skupove čija se struktura menja prekidno. Prema tome, može se dati sledeća definicija:

<u>Definicija 2</u>:

Neka je dat statistički skup S čija se struktura menja u odnosu na obeležje X, koje može imati samo konačan niz vrednosti. Pretpostavimo da je zakon verovatnoće toga skupa dat u obliku /2/. Za strukturu skupa S reći ćemo da je neprekidna ako su sve veličine p_i neprekidne, Ako to nije slučaj, za istu strukturu se kaže da je prekidna.

U daljem izlaganju biće posmatrani samo oni statistički skupovi čije se strukture na slučajan način menjaju u odnosu na obeležje X /koje može uzeti samo konačan broj vrednosti/ i čiji su prostori definicije konačne klase. Tako, na primer, posmatrajmo slučajan vektor $\vec{A}$ koji ima ukupno N realizacija. Tada sledeće šema

Tabela 1

$P_r\{\vec{A}\}$	$\vec{A}$	p_1	p_2	$\cdots$	p_i	$\cdots$	p_n	$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$
P_1	$\vec{A}_1$	p_{11}	p_{21}	$\cdot\cdot$	p_{i1}	$\cdot\cdot$	p_{n1}	$\sum_{i=1}^{n} p_{i1} = 1$
P_2	$\vec{A}_2$	p_{12}	p_{22}	$\cdot\cdot$	p_{i2}	$\cdot\cdot$	p_{n2}	$\sum_{i=1}^{n} p_{i2} = 1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
P_k	$\vec{A}_k$	p_{1k}	p_{2k}	$\cdot\cdot$	p_{ik}	$\cdot\cdot$	p_{nk}	$\sum_{i=1}^{n} p_{ik} = 1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
P_N	$\vec{A}_N$	p_{1N}	p_{2N}	$\cdot\cdot$	p_{iN}	$\cdot\cdot$	p_{nN}	$\sum_{i=1}^{n} p_{iN} = 1$
$\sum_{k=1}^{N} P_k = 1$								

daje skup svih njegovih pojedinih oblika, pri čemu je, kao što se već vidi iz tabele, za svako ν

$$\sum_{i=1}^{n} p_{i\nu} = 1 \qquad 0 \leq p_{i\nu} \leq 1$$

Na sličan način kao što je definisan zakon verovatnoće i funkcija rasporeda neke slučajne veličine, moguće je i kod statističkih skupova slučajne strukture predstavljenih vektorom $\vec{A} = \vec{A}(p_1, p_2 \cdots p_n)$ definisati funkciju rasporeda i druge karakteristične pokazatelje. Dalja izlaganja biće posvećena tim problemima, odnosno definicijama pojmova, koji treba da doprinesu što boljem i širem poznavanju proučavanog objekta.

FUNKCIJA RASPOREDA SLUČAJNOG VEKTORA $\vec{A}$

Pošto, kao što smo videli, izmedju klase skupova, koja predstavlja prostor definicije strukture slučajnog statističkog skupa S i klase odgovarajućih zakona verovatnoće postoji biunivoka korespondencija, to poznavajući slučajni vektor $\vec{A}$ poznajemo i osobine slučajnog skupa S. S obzirom na uslove koje moraju zadovoljavati koordinate vektora $\vec{A}$, sledi da krajnje tačke od $\vec{A}$ leže u onim tačkama hiperravni /4/ čije su koordinate nenegativni brojevi.

Označimo dalje verovatnoću dogadjaja da je $\vec{A} = \vec{A}_i$ sa P_i, tj.

$$P_r\{\vec{A} = \vec{A}_i\} = P_i$$

ili

$$P_r\{p_1 = p_{1i},\ p_2 = p_{2i} \ldots.\ p_n = p_{ni}\} = P_i$$

Tada je verovatnoća da krajnja tačka slučajnog vektora $\vec{A}$ pasti u neku oblast Z posmatranog dela hiperravni /4/, jednaka sledećoj vrednosti:

$$P_r\{A(p_1,\ p_2,\ \ldots.\ p_n) \subset Z\} = \sum P_i'$$

gde se sabiranje vrši preko svih onih indeksa i, za koje je $A_i' \subset Z$ i $P_r\{\vec{A} = \vec{A}_i'\} = P_i'$. Drugim rečima, sabiranje se vrši preko svih onih i, čiji vektori $\vec{A}_i$ imaju osobinu da im krajnje tačke pripadaju skupu Z. Ukoliko se Z proteže na celu oblast hiperravni čije tačke imaju nenegativne koordinate, tada je očevidno

$$P_r\{\vec{A}(p_1,\ p_2,\ \ldots.\ p_n) \subset Z\} = 1$$

Definišimo sada funkciju rasporeda slučajnog vektora $\vec{A}$. U tom cilju posmatrajmo niz brojeva $\alpha_0, \alpha_1, \cdots \alpha_n$, koji zadovoljavaju sledeće uslove

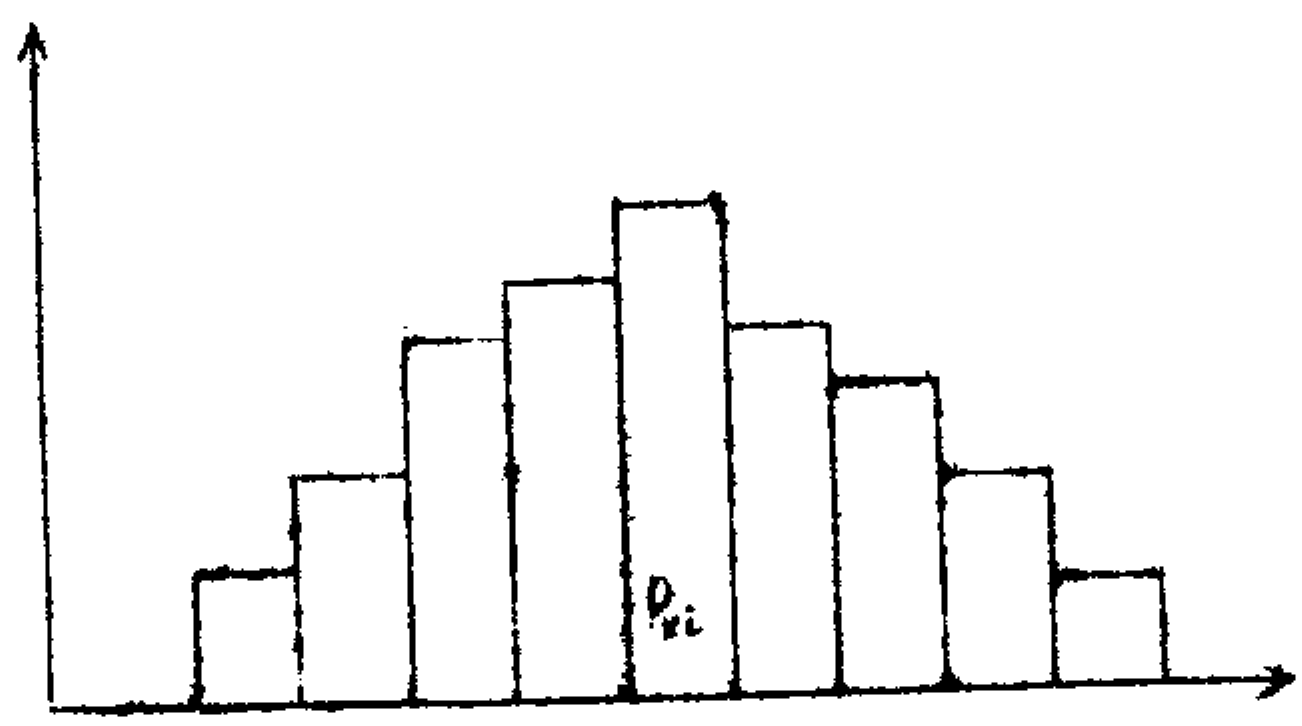
$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \geq 1 \qquad 0 \leq \alpha_i \tag{5}$$

Definicija 3:

Pod funkcijom rasporeda posmatranog vektora podrazumeva se sledeći izraz:

$$P_r\{p_1 \leq \alpha_1,\ p_2 \leq \alpha_2, \cdots p_n \leq \alpha_n\} = F(\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n)$$

U specijalnom slučaju kada je $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots \alpha_n = \alpha$, pri čemu su i dalje u važnosti uslovi /5/, geometrijski je vrlo jednostavno prikazati značenje funkcije rasporeda. U tom slučaju ona predstavlja verovatnoću ostvarenja bilo kog od zakona verovatnoće ili realizaciju bilo kog od vektora $\vec{A}_i$, čije su sve koordinate $p_{\nu i}$, $(\nu = 1, 2, \ldots n)$ manje ili jednake α. Prema tome, ako se zakon verovatnoće neke i-te realizacije slučajnog skupa S vektor $\vec{A}_i$ predstavi pomoću histograma frekvencija, dobiće se sledeća slika:



Sl.1

Pod navedenim uslovima o α_i, u ovom specijalnom slučaju funkcija rasporeda ima oblik $F(\alpha, \alpha, \cdots \alpha)$.

Na osnovi definicije lako je videti da skup vrednosti funkcije rasporeda mora uvek ležati u intervalu $(0,1)$, tj. uvek je $0 \leq F(\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n) \leq 1$. Zaista, ako se sa Z označi onaj skup tačaka, koji pripada delu hiperravni /4/ sa pozitivnim koordinatama i ima osobinu da koordinate krajnjih tačaka realizacija slučajnog vektora $\vec{A}$ zadovoljavaju uslove /5/, tada je, kao što smo već videli,

$$P_r\{A(p_1, p_2, \ldots p_n) \subset Z\} = \sum P_i'$$

pri čemu su P_i verovatnoće pomenutih realizacija vektora $\vec{A}$. Kako je

$$0 \leq \sum P_i' \leq 1$$

sledi da je zaista

$$0 \leq F(\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_m) \leq 1$$

U slučaju da se Z poklapa sa onim delom hiperravni /4/ čije su koordinate nenegativni brojevi, tada je

$$P_r\{ A(p_1, p_2, \dots p_n) \subset Z \} = 1 \quad \therefore \quad F(\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_m) = 1$$

Posmatrajmo sada slučaj kada je $n = 3$. Tada slučajni n-dimenzioni vektor $\vec{A}$ postaje običan trodimenzioni slučajni vektor $\vec{A} = \vec{A}(p_1, p_2, p_3)$, dok hiperravan /4/ postaje obična ravan.

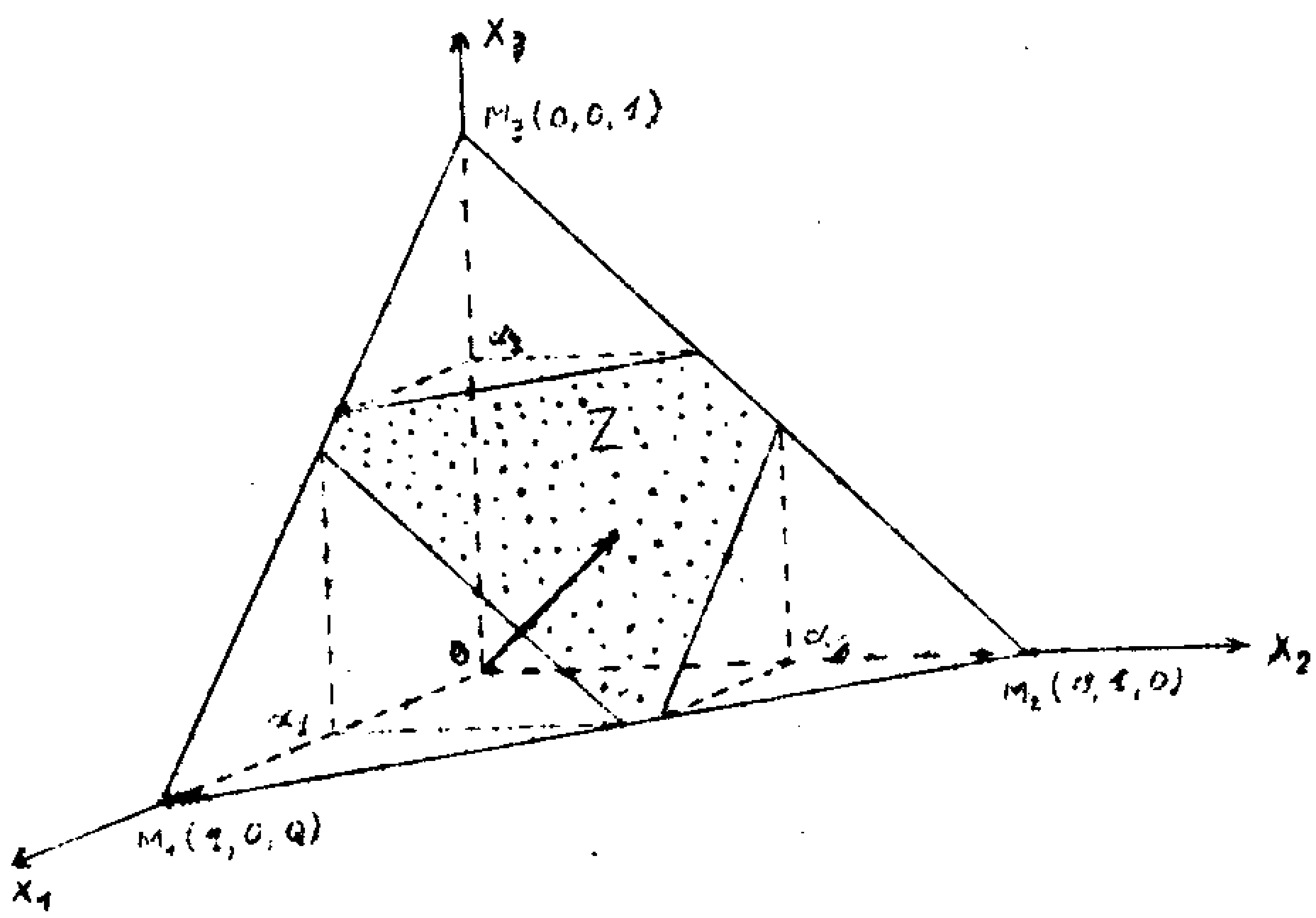
Ako se posmatrani slučajni vektor predstavi u Dekartovom ortogonalnom koordinatnom sistemu, tada s obzirom na to da je

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1 \qquad 0 \leq p_i \leq 1 \qquad (i = 1, 2, 3)$$

moraju krajnje tačke realizacija od $\vec{A}$ ležati u onim tačkama ravni

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

koje imaju nenegativne koordinate. Sledeća slika nam grafički ilustruje gornji slučaj:



Sl.2

Na osnovi definicije lako je u ovom slučaju dobiti funkciju rasporeda. Ako su α_1, α_2 i α_3 takva tri broja koja zadovoljavaju sledeće uslove: $\alpha_i \geq 0$ za svako $i = 1,2,3$ i $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \geq 1$, tada je

$$P_r \{ p_1 \leq \alpha_1, \ p_2 \leq \alpha_2, \ p_3 \leq \alpha_3 \} = F(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$$

pri čemu je $F(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ verovatnoća da će slučajna tačka $A(p_1, p_2, p_3)$ pasti u oblast Z, koja se nalazi u delu pozitivnih koordinata prethodne ravni.

$$F(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = P_r \{ A(p_1, p_2, p_3) \subset Z \} = \sum P_i'$$

JEDAN SPECIJALAN PRIMER

Radi ilustracije prethodno definisanih pojmova, posmatrajmo jedan specijalan slučajni objekat definisan u prethodnim izlaganjima /primer 5/ i koji se odnosi na raspored k elemenata u n ćelija. Pri tom se pretpostavlja da je posmatrani raspored slučajan /tj. raspored posmatranih k elemenata u n ćelija je definisan nekim slučajnim procesom/. Ako sada obeležimo svaku posmatranu ćeliju jednim prirodnim brojem od 1 do n, a sa

$$X_1, \ X_2, \ \dots \ X_i, \ \dots \ X_n$$

označimo broj elemenata redom u prvoj, drugoj,... n-toj ćeliji, tada se posmatrana distribucija frekvencija može predstaviti jednim n-dimenzionim vektorom $\vec{A}$

$$\vec{A} = (X_1, X_2, \dots X_n) \qquad (6)$$

S obzirom na činjenicu da su koordinate posmatranog vektora slučajne veličine, vezane izmedju sebe relacijom

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = k \qquad (X_i = 0, 1, 2 \dots k)$$

razumljivo da odatle sledi da je i posmatrani vektor $\vec{A}$ jedan slučajan vektor. On ima osobinu da se krajnje tačke njegovih realizacije nalaze u onim celobrojnim tačkama hiperravni

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = k \qquad (7)$$

koje imaju nenegativne koordinate. Naš zadatak se sastoji u tome da se odrede zakon verovatnoće i funkcija rasporeda posmatranog slučajnog vektora.

Pre nego što predjemo na direktno rešavanje postavljenog problema, posmatrajmo prethodno neke jednostavne primere, koji će nam pomoći da sagledamo izvesne odnose, koji će biti od fundamentalnog značaja u daljim izlaganjima.

Neka je data ravan

$$x_1 + x_2 + x_3 = k \qquad (8)$$

Da bismo izračunali broj njenih celobrojnih tačaka sa nenegativnim koordinatama, zamislimo tri urne koje zajedno sadrže k elemenata. Ako sa

$$X_1, X_2, X_3$$

označimo broj elemenata u prvoj, drugoj i trećoj urni, tada je očevidno da svakom takvom rasporedu posmatranih elemenata odgovara jedna odredjena tačka $M(X_1, X_2, X_3)$, koja leži u ravni /8/.

Isto tako, ako se posmatra hiperravan

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = k$$

i to onaj njen deo čije sve tačke imaju nenegativne koordinate, lako je odrediti ukupan broj samo onih tačaka iz posmatranog dela, čije su koordinate celi brojevi. Naime, ako, kao u prethodnom primeru, zamislimo četiri urne i k elemenata na neki način rasporedjena u njih, pri čemu je sa X_1, X_2, X_3 i X_4 označen broj elemenata redom u prvoj, drugoj... i četvrtoj urni, tada svakom takvom rasporedu odgovara jedna odredjena celobrojna tačka $M(X_1, X_2, X_3, X_4)$, koja leži na posmatranoj hiperravni. Odatle se odmah može zaključiti da je broj svih mogućih rasporeda k elemenata u posmatrane četiri urne jednak broju tačaka sa celobrojnim i nenegativnim koordinatama posmatrane hiperravni $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = k$.

Na sličan način može se zaključiti da je u opštem slučaju broj onih tačaka na nekoj hiperravni /na primer, na hiperravni 7 / koje imaju celobrojne nenegativne koordinate jednak broju svih mogućih rasporeda k elemenata u n urni. Prema tome, broj takvih tačaka na /7/ je

$$\binom{k + n - 1}{k - 1}$$

Dokažimo sada sledeću relaciju:

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{i + k}{k} = \binom{n + k + 1}{k + 1}$$

koja će biti od značaja za dalja izlaganja. U tom cilju napišimo levu stranu poslednje jednakosti u sledećem obliku:

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{i + k}{k} = \frac{1}{n!} \prod_{i=1}^{n} (k - i) = \frac{(n + k + 1)!}{n!\,(n + 1)!}$$

čime je dokaz završen.

Dokazana relacija se geometrijski može interpretirati na sledeči način: Posmatrajmo (n-1)-dimenzione hiperravni

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k$$
$$x_n = k - i$$

Njihov presek je jedna (n-2)-dimenziona hiperravan

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} = i$$

gde je

$$i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ k.$$

Zbir tačaka sa nenegativnim celobrojnim koordinatama na tih $k + 1$ ravni jednak je ukupnom broju istih tačaka na hiperravni /7/.

Predjimo sada na odredjivanje zakona verovatnoće i funkcije rasporeda slučajnog vektora /6/. Neka nam, kao što smo već rekli, koordinate X_1, X_2, ... X_n toga vektora redom predstavljaju broj elemenata u prvoj, drugoj, ...n-toj ćeliji. Označimo sa

$$P_r\{X_1 = i_1,\ X_2 = i_2,\ \dots\ X_n = i_n\} = p_{i_1 i_2 \dots i_n}$$

verovatnoću da je u prvoj ćeliji i_1 elemenata, u drugoj i_2, ..., u n-toj i_n, pri čemu brojevi i_s moraju zadovoljavati uslov

$$\sum_{s=1}^{n} i_s = k$$

Tada očevidno važe sledeće jednakosti:

$$p_{i_1 i_2 \dots i_n} = p_{i_1 i_2 \dots i_{n-1},\, k - \sum_{j=1}^{n-1} i_j} = \dots =$$

$$= p_{k - \sum_{j=2}^{n} i_j,\, i_2,\, i_3 \dots i_n}$$

pa je, prema tome,

$$P_r\{X_1 = i_1,\ X_2 = i_2,\ \dots\ X_n = i_n\} =$$

$$P_r\{X_1 = i_1, X_2 = i_2, \dots X_n = k - \sum_{j=1}^{n-1} i_j\} = p_{i_1, i_2, \dots k - \sum_{j=1}^{n-1} i_j}$$

itd.

Posmatrajmo sada ovaj specijalan slučaj: neka su sledeće koordinate slučajnog vektora $\vec{A}$ fiksirane i jednake nuli: $X_3 = X_4 = \dots = X_n = 0$. Tada je broj svih mogućih realizacija od $\vec{A}$, $k+1$ i to su sledeći vektori:

$$\vec{A}(0, k, \dots 0);\quad \vec{A}(1, k-1, 0, \dots 0); \dots\quad \vec{A}(k, 0, \dots 0)$$

sa redom odgovarajućim verovatnoćama:

$$p_{0,k,0 \dots 0};\qquad p_{1,k-1,0 \dots 0}; \dots\ p_{k,0 \dots 0};$$

U slučaju da je $X_3 = 1$, $X_4 = X_5 = \dots X_n = 0$ fiksirano, tada je broj realizacija slučajnog vektora $\vec{A}$ jednak k, i to su sledeći vektori:

$\vec{A}(0,k-1,1,0,\dots 0)$; $\vec{A}(1,k-2,1,0,\dots 0)$; .... $\vec{A}(k-1,0,1,0\dots 0)$

sa redom odgovarajućim verovatnoćama:

$p_{0,k-1,1,0,\dots,0}$; $p_{1,k-2,1,0,\dots,0}$; .... $p_{k-1,0,1,0,\dots,0}$;

itd. Uopšte, ako je $X_3 = r$ dok je $X_4 = X_5, \dots = X_n = 0$ fiksirano, ukupan broj realizacija vektora $\vec{A}$ u ovom slučaju je $k = r-1$. Ti vektori su oblika

$\vec{A}(0,k-r,r,0,\dots 0)$; $\vec{A}(1,k-r-1,r,0\dots 0)\dots$ $\vec{A}(k-r,0,r,\dots 0)$

sa odgovarajućim verovatnoćama:

$p_{0,k-r,r,0,\dots,0}$; $p_{1,k-r-1,r,0,\dots,0}$; .... $p_{k-r,0,r,0,\dots,0}$;

itd.za ostale slučajeve.

Posmatrajući pažljivo prethodno iznesene primere, mogu se lako sagledati sledeće činjenice. Pre svega kako je $(k-r+1) = \sum_{r=0}^{k-r} 1$, što predstavlja broj svih realizacija slučajnog vektora $\vec{A}$, kada je $X_3 = r$ a ostale koordinate X_4, $X_5, \dots X_n$ jednake nula, tada je broj svih mogućih realizacija od $\vec{A}$ pod uslovom da je

$$X_4 = X_5 = \dots = X_n = 0$$

jednak sledećoj vrednosti:

$$\sum_{r=0}^{k} (k - r + 1) = \sum_{r=0}^{k} \sum_{j=0}^{k-r} 1$$

Pretpostavimo sada da je

$$X_4 = p \; ; \quad X_5 = X_6 = \dots = X_n = 0$$

fiksirano; tada je broj svih realizacija od $\vec{A}$ jednak:

$$\sum_{r=0}^{k-p} (k - r - p + 1) = \sum_{r=0}^{k-p} \sum_{j=0}^{k-p-r} 1$$

Kako p može biti 0,1,2....k, to je ukupan broj svih realizacija slučajnog vektora $\vec{A}$ kada su ostale koordinate fiksirane i jednake nuli, tj. kada je $X_5 = X_6 = \dots X_n = 0$, jednak

$$\sum_{p=0}^{k}\sum_{r=0}^{k-p}(k-r-p+1) = \sum_{p=0}^{k}\sum_{r=0}^{k-p}\sum_{j=0}^{k-p-r} 1$$

itd.

Nastavljajući izvodjenje posmatranog procesa i dalje, lako je videti da se tako može doći do ukupnog broja svih realizacija prethodno definisanog slučajnog vektora $\vec{A}$. Ako se malo uredi i sistematizuje, nije teško videti da će se dobiti sledeća formula:

$$\sum_{i_{m-1}=0}^{k}\sum_{i_{m-2}=0}^{k-i_{m-1}} \dots \sum_{i_{m-j}=0}^{k-\sum_{r=1}^{j-1} i_{m-r}} \dots \sum_{i_1=0}^{k-\sum_{r=1}^{m-2} i_{m-r}} 1 \qquad (9)$$

Prethodno izvedeni račun, pomoću koga je dobijen broj svih realizacija slučajnog vektora $\vec{A}$ o kome je reč, predstavlja ujedno i nov način dobijanja svih mogućih rasporeda k elemenata u n ćelija. Dokažimo sada da je /9/ jednako

$$\binom{k+n-1}{n-1} \qquad (10)$$

Da bismo izveli dokaz tog identiteta, poslužimo se izvesnim malim transformacijama, koje će omogućiti lako prevodjenje /9/ u /lo/. Pre svega, kao što se vidi,

$$\sum_{i=0}^{k}\binom{i+n}{n} = \sum_{r=0}^{k}\binom{k-r+n}{n}$$

pa je, prema tome, očevidna veza

$$\sum_{i=0}^{k}\binom{i+n}{n} = \sum_{r=0}^{k}\binom{k-r+n}{n} = \binom{n+k+1}{n+1}$$

Na osnovu gornjih identiteta lako je dokazati tvrdjenje da je /9/ jednako /lo/. Zaista, kako je

$$\sum_{i_1=0}^{k-\sum_{r=1}^{m-2} i_{m-r}} 1 = \left(k-\sum_{r=1}^{m-2} i_{m-r}+1\right) = \binom{k-\sum_{r=1}^{m-2} i_{m-r}+1}{1}$$

to na osnovi prethodnih relacija dobijamo da je

$$\sum_{i_2=0}^{k-\sum_{r=1}^{n-3} i_{n-r}} \; \sum_{i_1=0}^{k-\sum_{r=1}^{n-2} i_{n-r}} 1 = \sum_{i_2=0}^{k-\sum_{r=1}^{n-3} i_{n-r}} \binom{k-\sum_{r=1}^{n-2} i_{n-r}+1}{1} =$$

$$= \sum_{i_2=0}^{k-\sum_{r=1}^{n-3} i_{n-r}} \binom{i_2+1}{1} = \binom{k-\sum_{r=1}^{n-3} i_{n-r}+2}{2}$$

Ako sada nastavimo na isti način, dobićemo:

$$\sum_{i_3=0}^{k-\sum_{r=1}^{n-4} i_{n-r}} \; \sum_{i_2=0}^{k-\sum_{r=1}^{n-3} i_{n-r}} \; \sum_{i_1=0}^{k-\sum_{r=1}^{n-2} i_{n-r}} 1 = \sum_{i_3=0}^{k-\sum_{r=1}^{n-4} i_{n-r}} \binom{k-\sum_{r=1}^{n-3} i_{n-r}+2}{2} =$$

$$= \sum_{i_3=0}^{k-\sum_{r=1}^{n-4} i_{n-r}} \binom{i_3+2}{2} = \binom{k-\sum_{r=1}^{n-4} i_{n-r}+3}{3}$$

Isto tako je i

$$\sum_{i_4=0}^{k-\sum_{r=1}^{n-5} i_{n-r}} \; \sum_{i_3=0}^{k-\sum_{r=1}^{n-4} i_{n-r}} \; \sum_{i_2=0}^{k-\sum_{r=1}^{n-3} i_{n-r}} \; \sum_{i_1=0}^{k-\sum_{r=1}^{n-2} i_{n-r}} 1 =$$

$$= \binom{k-\sum_{r=1}^{n-5} i_{n-r}+4}{4}$$

itd.

Nastavljajući započeti proces dalje, posle izvedenih /n-2/ koraka, konačno ćemo doći do sledeće relacije:

$$\sum_{i_{n-1}=0}^{k} \binom{k-i_{n-1}+n-2}{n-2} = \sum_{i_{n-1}=0}^{k} \binom{i_{n-1}+n-2}{n-2} = \binom{k+n-1}{n-1}$$

čime je tvrdjenje o jednakosti izraza /9/ i /10/ dokazano. Vratimo se sada na problem zakona verovatnoće slučajnog vektora $\vec{A}$. Pre svega, na osnovi prethodno dobijenih relacija proizilazi sledeća jednakost:

$$\sum_{i_{n-1}=0}^{k} \sum_{i_{n-2}}^{k-i_{n-1}} \cdots\cdots \sum_{i_2=0}^{k-\sum_{i=2}^{n-1} i_{n-i}} p_{i_1 i_2 \ldots i_n} = 1 \qquad (11)$$

U slučaju uniformnog zakona verovatnoće slučajnog vektora $\vec{A}$, tj. kada je

$$p_{i_1 i_2 \ldots\ldots i_n} = p_{i'_1 i'_2 \ldots\ldots i'_n} = p$$

za svako $i_j \neq i'_j$,

$$\sum_{j=1}^{n} i_j = \sum_{j=1}^{n} i'_j = k$$

tada mora da postoji odnos

$$\sum_{i_{n-1}=0}^{k} \cdot \cdot \cdot \sum_{i_1=0}^{k+\sum_{i=1}^{n-2} i_{n-i}} p = 1$$

odakle sledi da je

$$p = \frac{1}{\sum \cdot \cdot \cdot \sum 1} = \frac{1}{\binom{k+n-1}{n-1}}$$

Definišimo sada zakon verovatnoće i funkciju rasporeda n-dimenzionog slučajnog vektora $\vec{A} = \vec{A}(X_1, X_2, \ldots X_n)$, čije su koordinate nenegativni celi brojevi, koji zadovoljavaju sledeće uslove:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = k \qquad X_i = 0,1,2,\ldots k \qquad (i = 1,2,\ldots n)$$

Pod zakonom verovatnoće posmatranog vektora podrazumeva se skup od $\binom{k+n-1}{n-1}$ parova oblik

$$\left[\vec{A}(i_1,i_2,\ldots i_n) ;\ p_{i_1 i_2 \ldots i_n} \right]$$

odnosno

$$\left[\vec{A}(i_1,i_2,\ldots i_n) ;\ \frac{1}{\binom{k+n-1}{n-1}} \right]$$

u slučaju da je raspored uniforman.

Pod funkcijom rasporeda istog vektora podrazumeva se sledeća funkcija nenegativnih veličina $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$

$$P_r\left\{ X_1 \leq \alpha_1,\ X_2 \leq \alpha_2, \ldots X_n \leq \alpha_n \right\} = F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n)$$

pri čemu veličine α_i zadovoljavaju sledeće uslove:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \geq k$$

Označimo sa Z onaj deo hiperravni /7/ čije sve tačke $M(X_1, X_2, \ldots X_n)$ imaju osobinu da im koordinate zadovoljavaju uslove $x_i \leq \alpha_i$ /za svako $i = 1, 2, \ldots n$/, tada je

$$F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n) = P_r\left\{ A(X_1, X_2, \ldots X_n) \subset Z \right\} =$$

$$= \sum_{i_{n-1}=0} \sum_{i_n=0} \cdots \sum_{i_1=0} p'_{i_1,i_2,\ldots i_n}$$

gde se sabiranje vrši preko svih onih indeksa

$$i_j \ (j = 1, 2, \ldots n)$$

koji imaju osobinu da krajnje tačke vektora $\vec{A}(i_1, i_2, \ldots i_n)$ leže u celobrojnim tačkama dela Z hiperravni /7/.

Da bismo dali analitički izraz za funkciju rasporeda i time bili u stanju da rešimo neke praktične probleme, posmatrajmo pažljivo izraz /9/. Bez nekih velikih teškoća, s obzirom na to da je

$$\sum_{i_{n-1}=0}^{K}\ \sum_{i_{n-2}=0}^{K-i_{n-1}} \cdots \sum_{i_1=0}^{K-\sum\limits_{r=0}^{n-2} i_{n-r}} p_{i_1 i_2 \ldots i_n} = 1 ,$$

možemo se uveriti u istinitost sledećih relacija:

$$\sum_{i_1=0}^{K}\ \sum_{i_n=0}^{K-i_1} \cdots \sum_{i_4=0}^{K-i_1-\sum\limits_{r=0}^{n-5} i_{n-r}}\ \sum_{i_3=0}^{K-i_1-\sum\limits_{r=0}^{n-4} i_{n-r}} p_{i_1 i_2 \ldots i_n} = 1$$

$$\sum_{i_2=0}^{K}\ \sum_{i_1=0}^{K-i_2}\ \sum_{i_n=0}^{K-i_2-i_1} \cdots \sum_{i_4=0}^{K-i_2-i_1-\sum\limits_{r=0}^{n-5} i_{n-r}} p_{i_1 i_2 \ldots i_n} = 1$$

$$- \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; -$$

$$- \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; -$$

$$\sum_{i_v=0}^{K}\ \sum_{i_{v-1}=0}^{K-i_v} \cdots \sum_{i_1=0}^{K-\sum\limits_{r=0}^{v-2} i_{v-r}}\ \sum_{i_n=0}^{K-\sum\limits_{r=0}^{v-1} i_{v-r}} \cdots \sum_{i_{v+2}=0}^{K-\sum\limits_{r=0}^{v-1} i_{v-r}-\sum\limits_{r=0}^{n-v-3} i_{n-r}} p_{i_1 i_2 \ldots i_n} = 1 \qquad (12)$$

$$- \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; -$$

$$\sum_{i_{n-1}=0}^{K}\ \sum_{i_{n-2}=0}^{K-i_{n-1}} \cdots \sum_{i_1=0}^{K-\sum\limits_{r=0}^{n-3} i_{n-r-1}} p_{i_1 i_2 \ldots i_n} = 1$$

$$\sum_{i_n=0}^{K}\ \sum_{i_{n-1}=0}^{K-i_n} \cdots \sum_{i_2=0}^{K-\sum\limits_{r=0}^{n-3} i_{n-r}} p_{i_1 i_2 \ldots i_n} = 1$$

itd. Nastavljajući isti proces odredjeni broj puta lako je videti da se može doći do one početne formule od koje smo i pošli, tj. do izraza /11/.

Izvedene relacije će nam mnogo pomoći u daljim izlaganjima. Da bismo objasnili njihovo značenje, podsetimo se na ono što je izneto u prethodnom izlaganju o delu hiperravni /7/, čije sve tačke imaju nenegativne koordinate. Za taj deo se može lako pokazati da je geometrijski objekat /n-1/ dimenzije sa n specijalnih tačaka, koje leže na os- posmatranog sistema i koje se nazivaju temenima.

Da bismo dobili zbir svih nenegativnih tačaka sa celobrojnim koordinatama, koje leže u pomenutom delu hiperravni /9/, potrebno je naći broj tačaka u svih /n+1/,/n-2/-dimenzionih"slojeva" i te brojeve sabrati. Dobijeni zbir nam daje njihov traženi broj. U slučaju hiperravni /7/ te slojeve je moguće izabrati na n različitih načina. Potpuno je jasno da se na isti način može vršiti i sabiranje onih verovatnoća koje odgovaraju pomenutim tačkama. U prethodnom slučaju te verovatnoće su tako sabirane što su išle po slojevima ka temenu $M_{n-1}(0, 0, \ldots k, 0)$

Izračunajmo sada analitički izraz za

$$F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n)$$

kad α_i imaju neke specijalne vrednosti. Kao prvi posmatrajmo slučaj kada je $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots \alpha_n = \alpha$, pri čemu je

$$\alpha \geq \left[\frac{k + (-1)^k}{2}\right]$$

Tada funkcija rasporeda ima sledeći analitički izraz:

$$F(\alpha, \alpha, \ldots \alpha) = 1 - \sum_{v=1}^{n} S_v \qquad (13)$$

gde nam S_v predstavlja sledeći zbir:

$$S_v(\alpha) = \sum_{i_v=[\alpha]}^{k} \sum_{i_{v-1}=0}^{k-i_v} \cdots \sum_{i_{v+2}=0}^{k-\sum_{z=0}^{v-1} i_{v-z} - \sum_{z=0}^{n-v-3} i_{n-z}} P_{i_1 i_2 \ldots i_n} \qquad (14)$$

Pretpostavimo sada da su α_i u opštem slučaju različiti izmedju sebe, tj. $\alpha_i \neq \alpha_j$ pri čemu je $\alpha_j \geq \left[\frac{k + (-1)^k}{2}\right]$ za svako $j = 1, 2, \ldots n$. Pod ovim pretpostavkama o veličinama α_i, funkcija rasporeda ima sledeći oblik:

$$F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n) = 1 - \sum_{v=1}^{n} S_v \qquad (15)$$

gde je u opštem slučaju S_v

$$S_v(\alpha_v) = \sum_{i_v=[\alpha_v]}^{k} \sum_{i_{v-1}=0}^{k-i_v} \cdots \sum_{i_{v+2}=0}^{k-\sum_{t=0}^{j-1} i_{v-t} - \sum_{t=0}^{n-v-1} i_{n-t}} p_{i_1 i_2 \ldots i_n} \qquad (16)$$

U opštem slučaju ako celobrojne nenegativne veličine α_i zadovoljavaju samo sledeći uslov

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \gtrless k \qquad (17)$$

tada se funkcija rasporeda javlja u sledećem obliku:

$$F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n) = P_r\{A(X_1, X_2, \ldots X_n) \subset L\} =$$

$$= \sum \sum_{L} \cdots \sum p_{i_1 i_2 \ldots i_n}$$

gde je L skup svih onih celobrojnih tačaka hiperravni /7/ čije koordinate $X_1, X_2, \ldots X_n$ zadovoljavaju uslove

$$X_1 \leq \alpha_1, \quad X_2 \leq \alpha_2, \ldots \quad X_n \leq \alpha_n$$

Posmatrajmo sada primenu izložene teorije na slučaj uniformnog zakona verovatnoće, tj. na slučaj kada su svi $p_{i_1, i_2, \ldots i_n}$ jednaki izmedju sebe, tj. kada je

$$p_{i_1 i_2 \ldots i_n} = p_{i'_1 i'_2 \ldots i'_n}$$

Pre svega, u posmatranom slučaju, kao što smo videli u prethodnom izlaganju, zakon verovatnoće slučajnog vektora $\vec{A} = \vec{A}\{X_1, X_2, \ldots X_n\}$ dat je sledećim skupom parova

$$\left[\vec{A}(i_1, i_2, \ldots i_n) ; \frac{1}{\binom{k+n-1}{n-1}} \right]$$

$$i_j = 0, 1, 2, \ldots k \qquad j = 1, 2, \ldots n$$

tj.

$$P_r\left\{ \vec{A}(X_1, X_2, \dots X_n) = \vec{A}(i_1, i_2, \dots i_n) \right\} = \frac{1}{\binom{k+n-1}{n-1}}$$

pri čemu celobrojne nenegativne veličine i_j moraju zadovoljavati uslov /17/.

Izračunajmo sada analitički izraz za funkciju rasporeda kada je $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = \alpha$, pri čemu nenegativna veličina α zadovoljava uslov $\alpha \geqslant \left[\frac{k+(-1)^k}{2}\right]$. Tada na osnovi /13/ imamo da je

$$F(\alpha, \alpha \dots \alpha) = 1 - \sum_{v=1}^{n} S_v = 1 - nS_v$$

gde je u ovom slučaju

$$S_v = \sum_{i_v=\alpha+1}^{k} \sum_{\alpha_w=0}^{k-i_v} \cdots \sum_{i_{v+1}=0}^{k-\sum_{j=1}^{v} i_j - \sum_{z=0}^{n-v-3} i_{n-z}} \frac{1}{\binom{k+n-1}{n-1}} =$$

$$= \sum_{i_{n-1}=\alpha+1}^{k} \sum_{i_{n-2}=0}^{k-i_{n-1}} \cdots \sum_{i_1=0}^{k-\sum_{z=1}^{n-2} i_{n-z}} \frac{1}{\binom{k+n-1}{n-1}}$$

Da bismo došli do konačnog izraza za funkciju rasporeda u posmatranom slučaju, neophodno je izračunati sledeći zbir:

$$S(\alpha) = \sum_{i_{n-1}=\alpha+1}^{k} \sum_{i_{n-2}=0}^{k-i_{n-1}} \cdots \sum_{i_1=0}^{k-\sum_{z=1}^{n-2} i_{n-z}} 1$$

Ako sprovedemo isti proces računanja koji je izvodjen pri dobijanju nekih formula iz prethodnog izlaganja, doći ćemo do sledećeg izraza:

$$S(\alpha) = \sum_{i_{n-1}=\alpha+1}^{k} \binom{k - i_{n-1} + n - 2}{n-2} =$$

$$= \sum_{r=0}^{k-\alpha-1} \binom{r + n - 2}{n-2} = \binom{k - \alpha + n - 2}{n-1}$$

Prema tome, $S(\alpha)$ ima sledeću vrednost:

$$S(\alpha) = \binom{k - \alpha + n - 2}{n - 1}$$

pa je konačan oblik funkcije rasporeda, prema tome:

$$F(\alpha, \alpha, \dots \alpha) = 1 - n \cdot \frac{\binom{k - \alpha + n - 2}{n - 1}}{\binom{k + n - 1}{n - 1}}$$

Posmatrana funkcija očevidno zadovoljava ovaj uslov: $0 \leqslant F \leqslant 1$. Zaista, ako je $\alpha = k$, tada je

$$\binom{k - \alpha + n - 2}{n - 1} = 0$$

pa je, prema tome, $F(\alpha, \alpha, \dots, \alpha) = 1$. S obzirom na činjenicu da je /uz prethodne pretpostavke o veličini α / uvek

$$n\binom{k - \alpha + n - 2}{n - 1} < \binom{k + n - 1}{n - 1}$$

sledi da mora biti $F > 0$, čime je tvrdjenje dokazano.

Pretpostavimo sada da je u opštem slučaju $\alpha_i \neq \alpha_j$ ali pri čemu je ipak zadovoljen uslov $\alpha_i \geqslant \left[\frac{k + (-1)^k}{2}\right]$ za svako $i = 1, 2, \dots n$. Tada će funkcija rasporeda imati sledeći oblik:

$$F(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n) = 1 - \sum_{v=1}^{n} S_v$$

gde je sada S_v dato izrazom oblika:

$$S_v = \sum_{i_v=\alpha_v+1}^{k} \sum_{i_{v-1}=0}^{k-i_v} \cdot \cdot \cdot \sum_{i_{v+2}=0}^{k-\sum_{j=1}^{v} i_j - \sum_{z=0}^{n-v-3} i_{n-z}} \frac{1}{\binom{k+n-1}{n-1}} =$$

$$= \sum_{i_{n-1}=\alpha_v+1}^{k} \cdot \cdot \cdot \sum^{k-\sum_{z=1}^{n-2} i_{n-z}} \frac{1}{\binom{k+n-1}{n-1}}$$

Ako sa $S(\alpha_v)$ označimo zbir:

$$S(\alpha_v) = \sum_{i_{n-1}=\alpha_v+1}^{k} \sum_{i_{n-2}=0}^{k-i_{n-1}} \cdot \cdot \cdot \sum_{i_1=0}^{k-\sum_{z=1}^{n-2} i_{n-z}} 1 = \binom{k-\alpha_v+n-2}{n-1}$$

tada je konačno

$$F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n) = 1 - \frac{\sum_{v=1}^{n} \binom{k-\alpha_v+n-2}{n-1}}{\binom{k+n-1}{n-1}}$$

što je inače skoro očevidno.

Pretpostavimo dalje da svi α_i ne ispunjavaju uslov $\alpha_i \geq \left[\frac{k+(-1)^k}{2}\right]$ i da postoji m takvih koji imaju osobinu da je $\alpha_i + \alpha_j < k$, pri čemu je, naravno, ispunjen uslov /17/. U cilju odredjenosti pretpostavimo da su to prvih m, tj. $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$. Analitički izraz za funkciju rasporeda u ovom slučaju /pod pretpostavkom o uniformnosti zakona verovatnoće/ odredićemo na sledeći način. Ako kao u prethodnom slučaju označimo sa S_v količ ik

$$\frac{S(\alpha_v)}{\binom{k+n-1}{n-1}} = \frac{\binom{k-\alpha_v+n-2}{n-1}}{\binom{k+n-1}{n-1}}$$

tada tražena funkcija rasporeda ima oblik:

$$F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n) = 1 - \sum_{v=1}^{m} S_v + \beta m$$

gde se βm javlja kao korektivni član, s obzirom na činjenicu da celobrojne nenegativne veličine α_i ne zadovoljavaju više uslov $\alpha_i \geq \left[\frac{k + (-1)^k}{2}\right]$ za svako i = 1, 2, ... m. Da bismo odredili vrednost posmatranog korektivnog člana poslužimo se sledećim rezonovanjem:

Posmatrajući skupove celobrojnih tačaka sa negativnim koordinatama, koji su definisani redom na sledeći način: $X_1 \leq \alpha_1$ ... $X_n \leq \alpha_n$ /pri čemu veličine α_i zadovoljavaju uslov /17/ i koje se nalaze na hiperravni /7//, potpuno je jasno da ako je za svako i = 1, 2, ... n

$$\alpha_i \geq \left[\frac{k + (-1)^k}{2}\right] \tag{18}$$

pomenuti skupovi su medjusobno disjunktni. Ukoliko taj uslov nije zadovoljen, može se desiti da neki od prethodno definisanih skupova imaju zajedničkih tačaka, što ima za posledicu da se njihove verovatnoće dva puta javljaju u funkciji rasporeda. Iz tog razloga se dodaje korektivni član βm, čiji je zadatak da tu mogućnost otkloni.

Predjimo sada na izračunavanje vrednosti korektivnog člana, pod pretpostavkom da prvih m veličina α_i (i = 1, 2, ... m) imaju osobinu da je $\alpha_i + \alpha_j < k$; tada postoji ukupno $\frac{1}{2} m(m-1)$ nedisjunktivnih skupova. Presek od ona dva skupa $X_i \leq \alpha_i$ i $X_j \leq \alpha_j$, kod kojih je, kao što smo videli, $\alpha_i + \alpha_j < k$, sadrži tačno

$$\binom{k - \alpha_i - \alpha_j + n - 1}{n - 1} \tag{19}$$

celobrojnih tačaka sa negativnim koordinatama, što je skoro očevidno.

Prema tome, korektivni član β_m ima sledeću vrednost:

$$\beta_m = \frac{1}{\binom{k+n-1}{n-1}} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=i+1}^{m} \binom{k-\alpha_i-\alpha_j+n-1}{n-1}$$

odakle sledi konačan oblik funkcije rasporeda

$$F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n) =$$

$$1 - \frac{1}{\binom{k+n-1}{n-1}} \left\{ \sum_{v=1}^{m} \binom{k-\alpha_v+n-2}{n-1} - \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=i+1}^{m} \binom{k-\alpha_i-\alpha_j+n-1}{n-1} \right\}$$

U trodimenzionom slučaju, tj. kada je $n = 3$, moguće je, kao što smo videli u prethodnim izlaganjima, sve skoro što je do sada rečeno učiniti geometrijski očevidnim. U pomenutom slučaju hiperravan /7/ postaje obična trodimenzionalna ravan oblika

$$x_1 + x_2 + x_3 = k$$

a posmatrani slučajni n-dimenzioni vektor $\vec{A}$ postaje trodimenzionalni slučajni vektor $\vec{A} = \vec{A}(X_1, X_2, X_3)$, čije su koordinate X_i vezane odnosom

$$X_1 + X_2 + X_3 = k$$

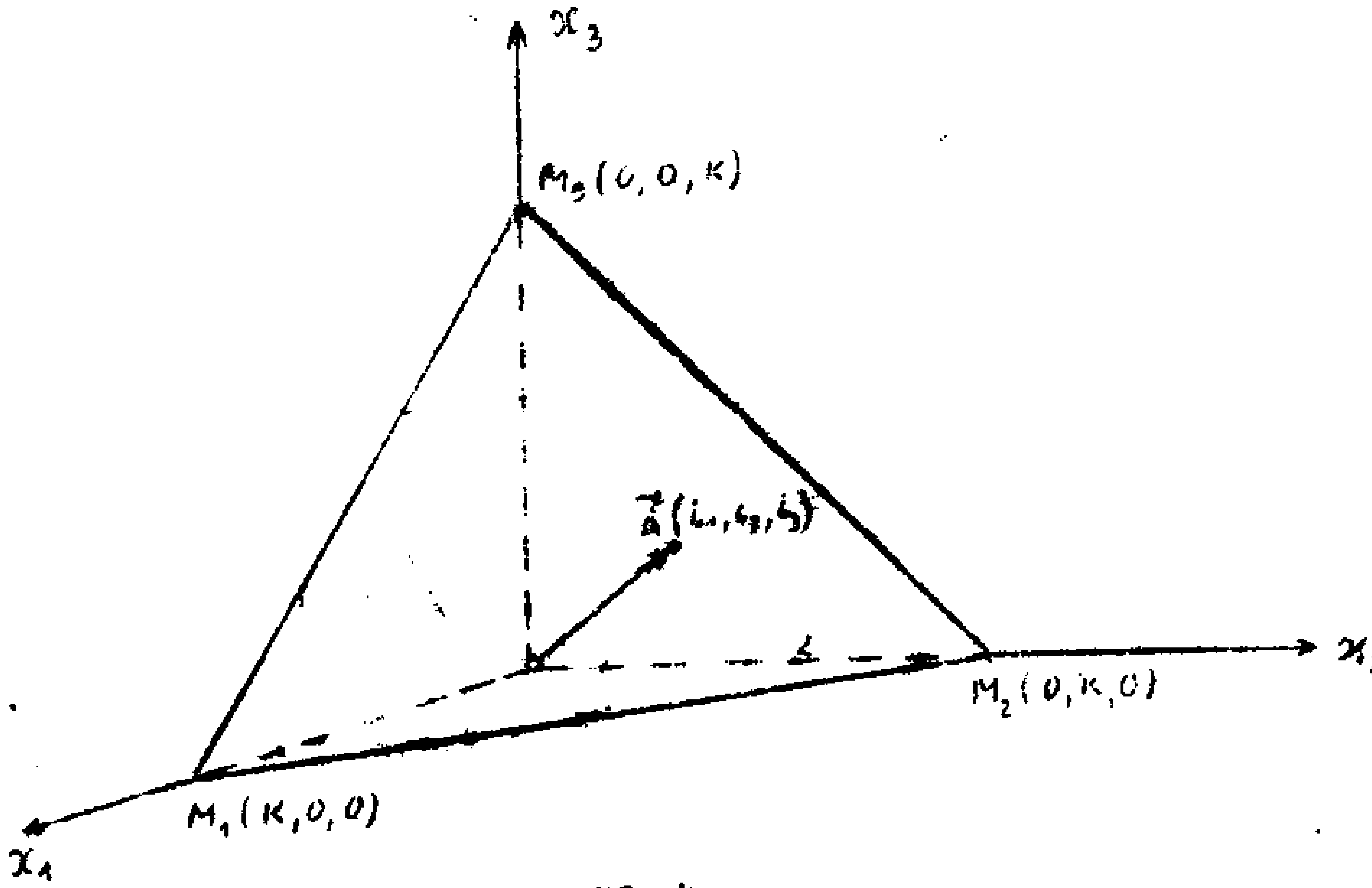
$$X_i = 0, 1, 2, \ldots k \qquad \text{za svako } i = 1,2,3$$

Predstavimo geometrijski posmatranu ravan i neku realizaciju slučajnog vektora $\vec{A}$ /sl.4/.

Izračunajmo sada analitički izraz za funkciju rasporeda i predstavimo to geometrijski. Posmatrajući prvo slučaj kada je $\alpha_i \geq \left[\frac{k+(-1)^k}{2}\right]$; funkcija rasporeda u ovom slučaju dobija sledeći oblik:

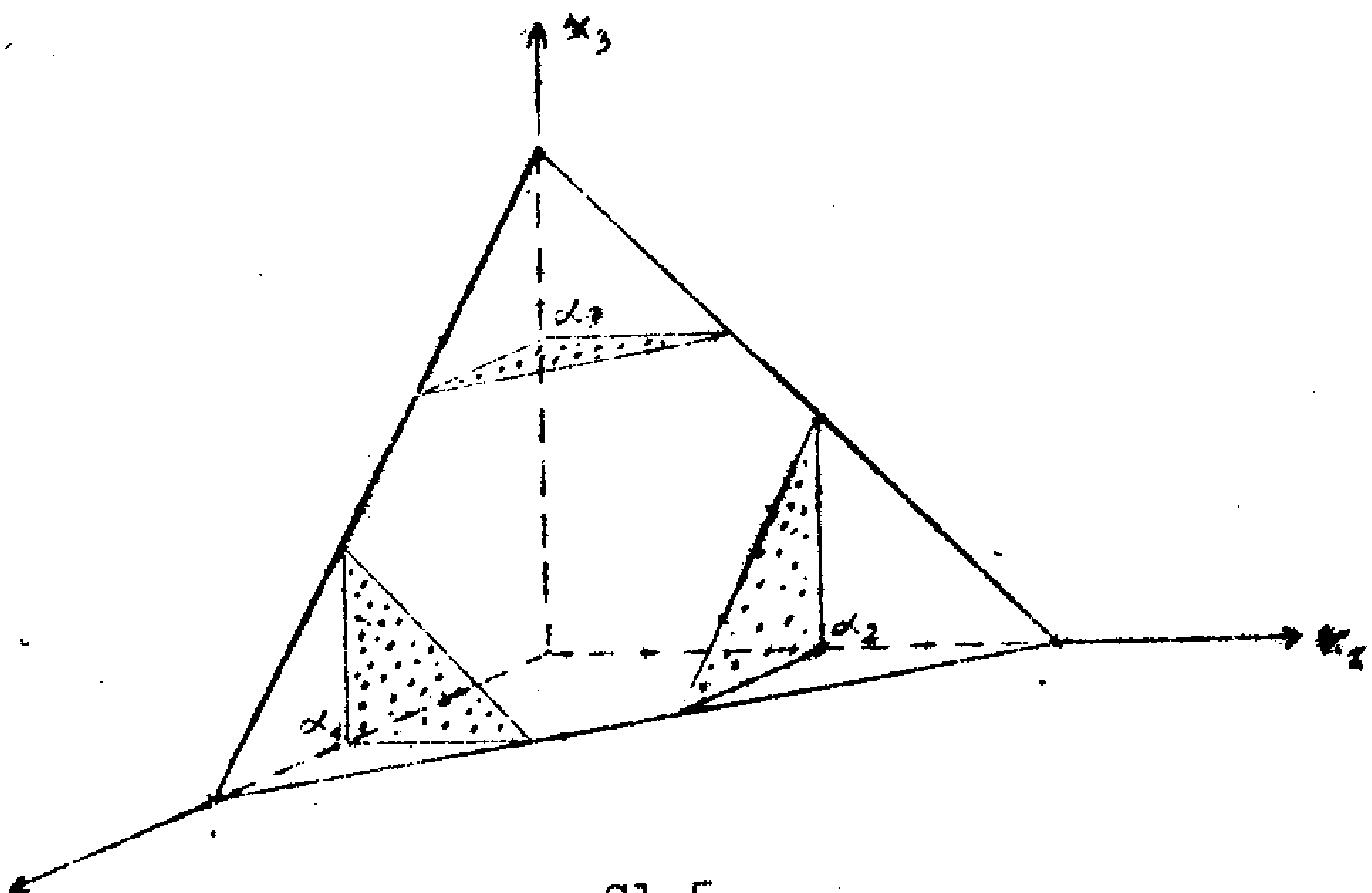
$$P_r\{X_1 < \alpha_1, \ X_2 < \alpha_2, \ X_3 < \alpha_3\} = F(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) =$$

$$= 1 - \frac{1}{\binom{k+2}{2}} \sum_{v=1}^{3} \binom{k- \quad +1}{2}$$



Sl.4

što je iz sledeće slike potpuno jasno



Sl.5

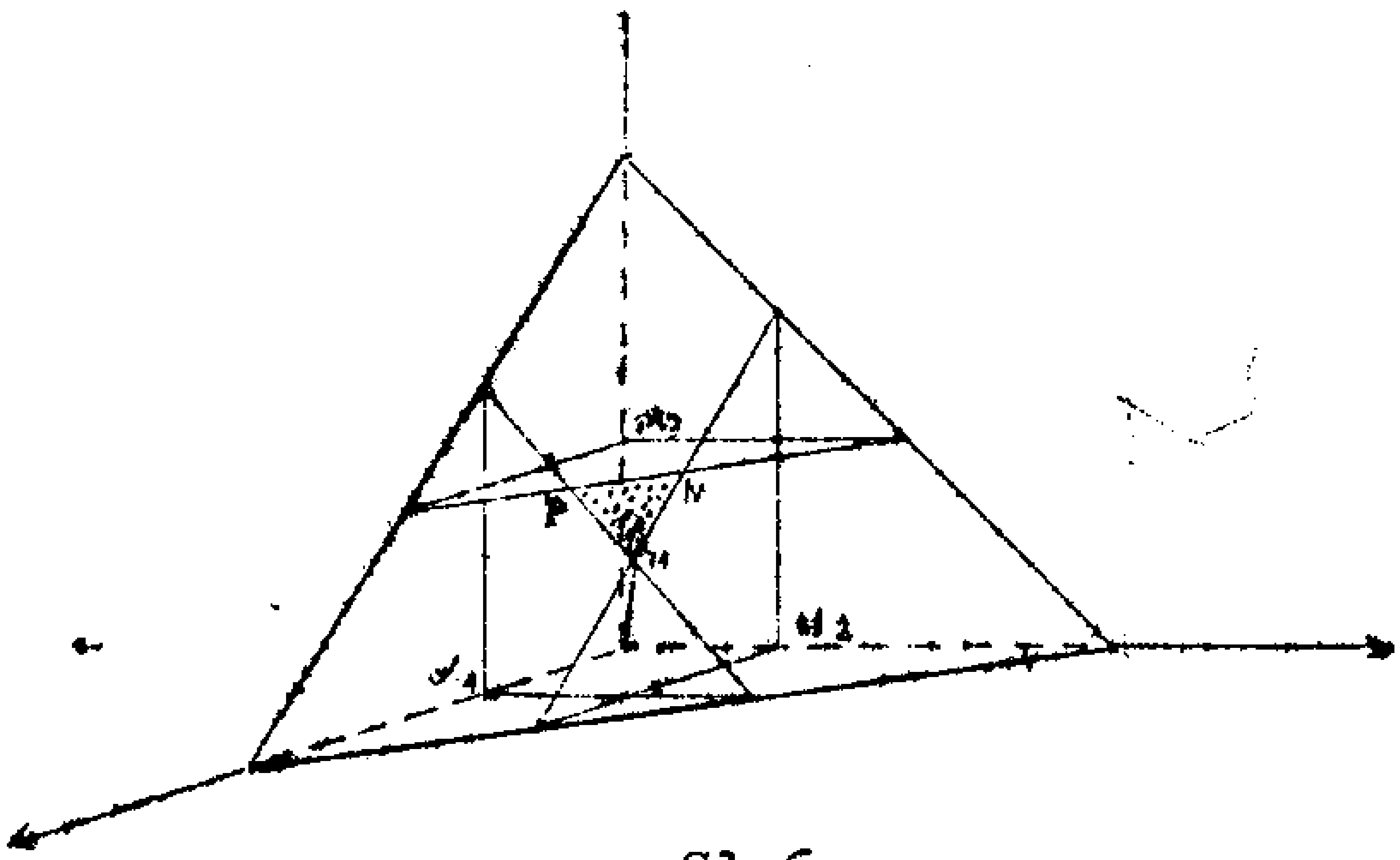
pri čemu se, naravno, pretpostavlja da nenegativne celobroj-ne veličine α_i zadovoljavaju sledeći uslov:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \geq k \tag{20}$$

Pretpostavimo sada da više nijedna od veličina α_i ne zadovoljava uslov /18/, dok je uslov /20/ zadovoljen. Tada, kao što je očevidno sa slike, oblast

$$X_1 \leq \alpha_1 \qquad X_2 \leq \alpha_2 \qquad X_3 \leq \alpha_3$$

čini trougao M.N.P.,koji leži u posmatranoj ravni /sl.6/.



Sl.6

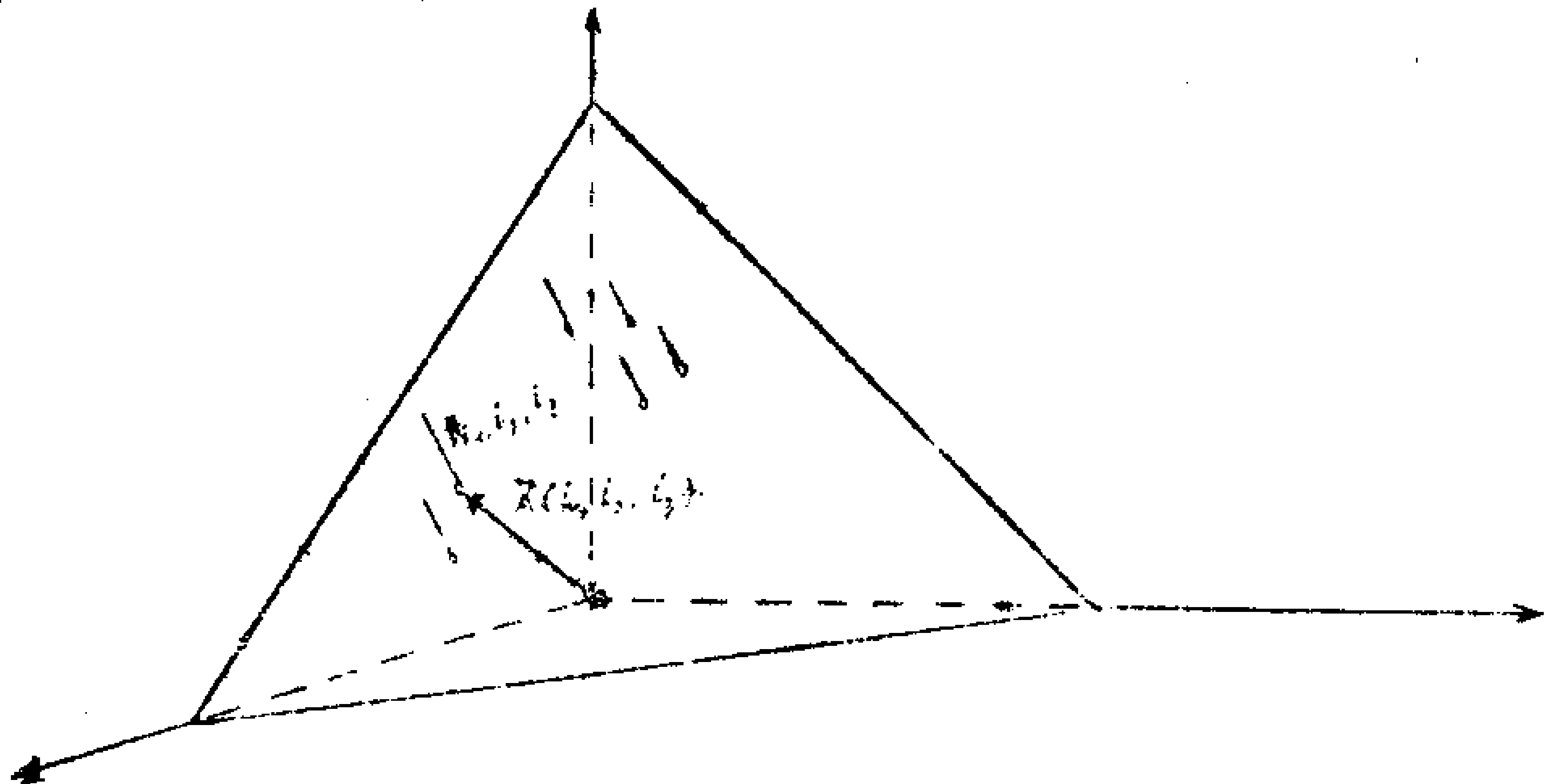
U ovom slučaju n = 3, dok je takodje m = 3, pa funkcija rasporeda dobija sledeći oblik:

$$F(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) =$$

$$= 1 - \frac{1}{\binom{k+2}{2}}\left\{\sum_{\nu=1}^{3}\binom{k-\alpha_\nu+1}{2} - \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=i+1}^{3}\binom{k-\alpha_i-\alpha_j+2}{2}\right\}$$

što je iz priložene slike potpuno jasno.

U slučaju neuniformnog rasporeda, geometrijsko predstavljanje još više pomaže u razumevanju izloženog materijala. Tako, na primer, ako označimo na posmatranoj ravni $x_1 + x_2 + x_3 = k$ celobrojne tačke sa nenegativnim koordinatama,dobiće se sledeća slika:



Sl.7

Pretpostavimo da celobrojne nenegativne veličine α_i za svako i = 1, 2, 3 zadovoljavaju uslove /18/ i /20/, tada se za funkciju rasporeda dobija sledeći izraz:

$$F(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) =$$

$$= 1 - \left\{ \sum_{i_3=\alpha_3+1}^{K} \sum_{i_2=0}^{K-i_3} p_{i_1 i_2 i_3} + \sum_{i_2=\alpha_2+1}^{K} \sum_{i_1=0}^{K-i_2} p_{i_1 i_2 i_2} + \sum_{i_1=\alpha_1+1}^{K} \sum_{i_2=0}^{K+i_1} p_{i_1 i_2 i_3} \right\}$$

koja je samo specijalan slučaj prethodne formule za n = 3.

D R U G I   D E O

NEKE DRUGE KARAKTERISTIKE SLUČAJNOG VEKTORA $\vec{A}$

U izlaganju koje je dato u prvom delu ovog teksta definisan je slučajni vektor $\vec{A}$, njegov zakon verovatnoće, funkcija rasporeda i neke druge osobine, pod pretpostavkom da je geometrijski ekvivalent zakona verovatnoće nekog statističkog skupa, čija se struktura na slučajan način menja u odnosu na neko dato obeležje, odnosno da predstavlja neku slučajnu distribuciju frekvencija. Pod pretpostavkom da posmatrano obeležje može uzeti samo n vrednosti, vektor $\vec{A}$ je jedan n-dimenzionalan slučajni vektor.

$$\vec{A} = \vec{A}(X_1, X_2, \dots X_n) \qquad (1)$$

koji, kao što smo videli, ima osobinu da su mu koordinate X_i slučajne veličine. Pri tome je X_i verovatnoća odgovarajuće vrednosti posmatranog obeležja, u slučaju da je vektor $\vec{A}$ geometrijski ekvivalenat zakona verovatnoće obeležja o kome je reč. Kada je isti vektor geometrijski ekvivalent neke distribucije frekvencija, tada slučajna veličina X_i predstavlja frekvenciju odgovarajuće vrednosti obeležja. U prvom od posmatranih slučajeva, slučajne veličine X_i su medjusobno vezane sledećim odnosom:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = 1 \qquad 0 \leq X_i \leq 1 \qquad (2)$$

Ako pretpostavimo da slučajna veličina X_i može uzeti bilo koju vrednost iz nekog konačnog skupa vrednosti, tada neposredno sledi da je i skup realizacija slučajnog vektora /1/ neki konačni skup.

U cilju što boljeg opisivanja osobina posmatranog slučajnog vektora biće konstruisan čitav niz različitih veličina i karakteristika, koje treba da doprinesu njegovom boljem upoznavanju. Neke od karakteristika su već definisane u prvom delu, dok će ostale biti date u daljem izlaganju. Kao prve biće proučeni zakoni verovatnoće i funkcije marginalnih rasporeda vektora $\vec{A}$.

ZAKONI VEROVATNOĆE MARGINALNIH RASPOREDA SLUČAJNOG VEKTORA $\vec{A}$

Posmatrajmo tabelu 1 u prvom delu izlaganja. Iz nje se lako može videti da je k-ta realizacija slučajnog vektora $\vec{A}$ data vektorom $\vec{A}_k$.

$$\vec{A}_k = \vec{A}_k \left(p_{1k},\ p_{2k}, \dots\ p_{nk} \right)$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_{ik} = 1 \qquad 0 \leq p_{ik} \leq 1 \qquad \begin{array}{l} k = 1,2,\dots N \\ i = 1,2,\dots n \end{array}$$

pod pretpostavkom da je broj svih mogućih realizacija slučajnog vektora $\vec{A}$ jednak N. Na osnovi navedenih uslova očevidno je da se krajnje tačke svih realizacija nalaze u onim tačkama hiperravni

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$$

čije su koordinate nenegativni brojevi. U daljem izlaganju, kada je slučajni vektor $\vec{A}$ geometrijski ekvivalenat nekog zakona verovatnoće, za njegovo označavanje upotrebićemo simbol $\vec{A}\,(p_1,\ p_2,\ \dots\ p_n)$, dok će se u opštem slučaju upotrebljavati oznaka $\vec{A} = \vec{A}\left(X_1,\ X_2,\ \dots\ X_n \right)$.

Predjimo sada na definiciju pojma zakona verovatnoće marginalnih rasporeda slučajnog vektora $\vec{A}$. U tom cilju pretpostavimo da slučajna veličina p_1 uzima s_1 različitih vrednosti $\bar{p}_{1i}$ $(i = 1,\ 2,\ \dots\ s_1)$ gde je $s_1 \leq$ N. Ako sada poredjamo sve vrednosti p_{1i} po veličini, dobili bismo sledeći niz od s_1 grupa, koje sadrže iste brojne vrednosti p_{1i}.

$$p^1_{11},\ p^1_{11},\ \dots\ p^1_{1\ell_1'};\quad p^1_{1,\ell_1'+1},\ \dots\ p^1_{1,\ell_1'+\ell_2'};\ \dots\ p^1_{1\sum_{i=1}^{s_1}\ell_i'}$$

gde je $\sum_{i=1}^{s_1} \ell_i' = N$ i gde za svaku od posmatranih grupa važi sledeći uslov:

$$p'_{11} = p'_{12} = \cdots = p'_{1f'_1} = \bar{p}_{11}$$

$$p'_{1,f'_1+1} = p'_{1,f'_1+2} = \cdots = p'_{1,f'_1+f'_2} = \bar{p}_{12}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$p'_{1,\sum_{i=1}^{s_1-1} f'_i+1} = p'_{1,\sum_{i=1}^{s_1-1} f'_i+2} = \cdots\ p'_{1,\sum_{i=1}^{s_1} f'_{1i}} = \bar{p}_{1s_1}$$

<u>Definicija 4</u>:

Pod marginalnim zakonom verovatnoće slučajnog vektora $\vec{A}$ u odnosu na promenljivu p_1 podrazumeva se sledeći skup od s_1 parova

$$\left[P_r \{ p_1 = \bar{p}_{1i} \} \ ; \ p_{1i} \right] \qquad i = 1, 2, \ldots s_1$$

ili napisan u razvijenom obliku

$$\bar{p}_{11}, \qquad \bar{p}_{12}, \ \ldots\ldots\ldots\ \bar{p}_{1v}, \ \ldots\ldots\ldots\ \bar{p}_{1s_1}$$

$$P_r\{p_1 = \bar{p}_{11}\}, \ P_r\{p_2 = \bar{p}_{12}\}, \ \ldots \ P_r\{p_v = \bar{p}_{1v}\}, \ldots \ P_r\{p_{s_1} = \bar{p}_{1s_1}\}$$

Izračunajmo sada verovatnoću $P_r\{ p_1 = \bar{p}_{1v} \}$. Kako se posmatrana vrednost $\bar{p}_{1v}$ javlja tačno f' puta, to je

$$P_r \{ p_1 = \bar{p}_{1v} \} = \sum_{j=1}^{f'_v} P'_{jv} \qquad (4)$$

$$v = 1, 2, \ldots s_1$$

U opštem slučaju ako se posmatra bilo koja slučajna veličina p_k i ako se vrednosti p_{ki} poredjaju po veličini, dobiće se sledeći monotono neopadajući niz:

$$p'_{k1}, \ p'_{k2}, \ \ldots\ldots\ p'_{k\sum_{i=1}^{s_k} f^k_i}$$

u kome ima s_k grupa istih vrednosti. Ako sa $\bar{p}_{ki}$ /$i=1,2,\ldots s_k$/ označimo skup vrednosti $s_k \neq N$, koje može imaju slučajna veličina p_k , a sa $P_r\{ p_k = \bar{p}_{ki} \}$ označimo verovatnoću njenog ostvarenja, tada je sledeći skup od s_k parova marginalni zakon verovatnoće slučajne veličike p_k

$$\left[P_r \left\{ p_k = \bar{p}_{k\nu} \right\} ; \bar{p}_{k\nu} \right]$$

$$\nu = 1, 2, \dots s_k$$

ili napisan u razvijenom obliku:

$$\bar{p}_{k1}, \qquad \bar{p}_{k2}, \dots\dots\dots\dots \bar{p}_{k\nu}, \dots\dots\dots\dots \bar{p}_{ks_k}$$

$$P_r\{p_k=\bar{p}_{k1}\}, \quad P_r\{p_k=\bar{p}_{k2}\}, \dots\dots P_r\{p_k=\bar{p}_{k\nu}\}, \dots\dots P_r\{p_k=\bar{p}_{ks_k}\}$$

Ako rezonujemo kao u prethodnom slučaju, može se videti da je

$$P_r \left\{ p_k = \bar{p}_{k\nu} \right\} = \sum_{j=1}^{\rho_\nu^k} P_{j\nu}^k \qquad (5)$$

gde $P_{j\nu}^k$ označava verovatnoću ostvarenja dogadjaja

$$p_k = \rho_k^1 \rho_1^\nu + \rho_2^k + \dots \rho_{\nu-1}^k + j$$

Lako je videti da posmatrani zbir na desnoj strani jednakosti /5/ daje verovatnoću da će slučajna veličina p_k uzeti vrednost $\bar{p}_{k\nu}$ bez obzira na to kakve će vrednosti imati ostale slučajne veličine.

U gornjem izlaganju pri definisanju marginalnog zakona verovatnoće ignorisali smo /n-1/ slučajnu veličinu i posmatrali samo jednu odabranu. Medjutim, isto to je moguće učiniti i sa nekim drugim brojem slučajnih veličina. Tako, na primer, ako se posmatraju prve dve slučajne veličine p_1 i p_2 a ignorišu ostale izraz

$$P_r \left\{ p_1 = \bar{p}_{1i}, \quad p_2 = \bar{p}_{2\nu} \right\}$$

predstavlja verovatnoću da će promenljiva p_1 uzeti vrednost $\bar{p}_{1i}$ a promenljiva p_2, vrednost $\bar{p}_{2\nu}$, bez obzira na to kakve će vrednosti imati ostale slučajne veličine. Izračunajmo sada vrednost pomenute verovatnoće. Na osnovi teoreme za proizvod dogadjaja

$$P_r\{p_1 = \bar{p}_{1i}, p_2 = \bar{p}_{2\nu}\} = P_r\{p_1 = \bar{p}_{1i}\} \cdot P_r\{p_2 = \bar{p}_{2\nu} | p_1 = \bar{p}_{1i}\} =$$

$$= P_r\{p_2 = \bar{p}_{2\nu}\} P_r\{p_1 = \bar{p}_{1i} | p_2 = \bar{p}_{2\nu}\} =$$

$$= P_r\{p_2 = \bar{p}_{2\nu} | p_1 = \bar{p}_{1i}\} \sum_{j=1}^{f_i} P_{ji}^{1} = P_r\{p_1 = \bar{p}_{1i} | p_2 = \bar{p}_{2\nu}\} \sum_{j=1}^{f_\nu} P_{j\nu}^{2}$$

Uopšte je

$$P_r\{p_k = \bar{p}_{k\nu}, p_r = \bar{p}_{ri}\} = P_r\{p_k = \bar{p}_{k\nu}\} P_r\{p_r = \bar{p}_{ri} | p_k = \bar{p}_{k\nu}\} =$$

$$= P_r\{p_r = \bar{p}_{ri}\} P_r\{p_k = \bar{p}_{k\nu} | p_r = \bar{p}_{ri}\} =$$

$$= P_r\{p_r = \bar{p}_{ri} | p_k = \bar{p}_{k\nu}\} \sum_{j=1}^{f_\nu^k} P_{j\nu}^{k} = P_r\{p_k = \bar{p}_{k\nu} | p_r = \bar{p}_{ri}\} \sum_{j=1}^{f_i^r} P_{ji}^{r} \qquad (6)$$

Posmatrajmo sada prvih s slučajnih veličina, a ignorišimo ostalih n-s. Tada nam izraz

$$P_r\{p_1 = \bar{p}_{1i_1}; p_2 = \bar{p}_{2i_2}, \ldots, p_s = \bar{p}_{si_s}\} \qquad (7)$$

predstavlja verovatnoću da će slučajna veličina p_1 uzeti vrednost p_{1i_1} .... a slučajna veličina p_s vrednost $\bar{p}_{si_s}$. bez obzira na to kakve će vrednosti uzeti ostale slučajne veličine. Izračunajmo sada vrednost pomenute verovatnoće. Na osnovi teoreme proizvoda sledi da je

$$P_r\{p_1 = \bar{p}_{1i_1}; p_2 = \bar{p}_{2i_2}; \ldots\ldots p_2 = \bar{p}_{si_s}\} =$$

$$= P_r\{p_1 = \bar{p}_{1i_1}\} P_r\{p_2 = \bar{p}_{2i_2} | p_1 = \bar{p}_{1i_1}\} \cdots\cdots$$

$$= P_r\{p_s = \bar{p}_{si_s} | p_1 = \bar{p}_{1i_s} ;;;; p_{s-1} = \bar{p}_{s-1, i_{s-1}}\}$$

Definicija 5:

Definišimo sada odgovarajuće zakone verovatnoća posmatranih marginalnih rasporeda. Pre svega, skup parova oblika

$$\left[P_r \left\{ p_1 = \bar{p}_{1i_1} ;\ p_2 = \bar{p}_{2i_2} \right\} ;\ \bar{p}_{1i_1}, \bar{p}_{2i_2} \right]$$

predstavlja zakon verovatnoće dvodimenzionog marginalnog rasporeda promenljivih p_1 i p_2. U opštem slučaju skup parova oblika

$$\left[P_r \left\{ p_r = \bar{p}_{ri_r} ;\ p_s = \bar{p}_{si_s} \right\} ;\ \bar{p}_{ri_r}, \bar{p}_{si_s} \right]$$

predstavljaće zakon verovatnoće dvodimenzionog marginalnog rasporeda slučajnih veličina p_r i p_s

Na sličan način moguće je definisati zakon verovatnoće marginalnog rasporeda i više slučajnih veličina. Tako, na primer, skup parova oblika

$$\left[P_r \left\{ p_1 = \bar{p}_{1i_1}, p_2 = \bar{p}_{2i_2}, \dots p_s = \bar{p}_{si_s} \right\} ;\ \bar{p}_{1i_1}, \bar{p}_{2i_2}, \dots \bar{p}_{si_s} \right]$$

naziva se s-dimenzionim zakonom verovatnoće marginalnog rasporeda promenljivih $p_1, p_2, \dots p_s$, itd. za sve ostale slučajeve.

U cilju ilustrovanja prethodno uvedenih pojmova i definicija, posmatrajmo primer tretiran u prvom delu izlaganja, koji se odnosi na raspored k elemenata u n ćelija. Svaki takav moguć raspored predstavljen je vektorom, čije su koordinate celobrojne i nenegativne veličine. Na osnovi definicije vektora $\vec{A} = \vec{A}(X_1, X_2, \dots X_n)$, u ovom specijalnom slučaju je lako izračunati sve moguće zakone verovatnoće marginalnih rasporeda od $\vec{A}$. Izračunajmo prvo zakon verovatnoće marginalnog rasporeda slučajne veličine X_1. U tom cilju označimo sa

$$P_r \left\{ X_1 = i_1 \right\} = p_{i_1}^{(n)}.$$

verovatnoću da će slučajna veličina X_1 uzeti vrednost i_1, bez obzira na to kakve će vrednosti uzeti druge promenljive /tj. da će se u ćeliji X_1 nalaziti i_1 elemenata/, gde nam indeks n označava da je u pitanju n-dimenzionalni slučajni vektor. Ako fiksiramo broj elemenata u prvoj ćeliji /neka je, na primer, on i_1/, tada se u ostalih /n-1/ ćelija nalazi svakako /k - i_1/ elemenata. Od njih se može napraviti tačno

$$\binom{k - i_1 + n - 2}{n - 2}$$

različitih rasporeda. Sasvim je lako videti da je u tom slučaju

$$p^{(n)}_{i_1\cdot} = \sum_{i_n=0}^{k-i_1} \sum_{i_{n-1}=0}^{k-i_1-i_n} \cdots \sum_{i_3=0}^{k-i_1-\sum_{j=0}^{n-4} i_{n-j}} p_{i_1 i_2 \dots i_n}$$

Kako i_1 može biti 0, 1, 2, ... k, to mora biti

$$\sum_{i_1=0}^{k} p^{(n)}_{i_1\cdot} = 1$$

što neposredno sledi iz prethodno izvedenih relacija /prvi deo/. Zaista

$$\sum_{i_1=0}^{k} p_{i_1\cdot} = \sum_{i_1=0}^{k} \sum_{i_n=0}^{k-i_1} \cdots \sum_{i_2=0}^{k-i_1-\sum_{j=0}^{n-3} i_{n-j}} p_{i_1 i_2 \dots i_n} = 1$$

Uopšte ako sa

$$P_r\{X_\nu = i_\nu\} = p^{(n)}_{i_\nu\cdot}$$

označimo verovatnoću da će slučajna veličina X_ν uzeti vrednost i_ν, bez obzira na to kakve će vrednosti uzeti ostale slučajne veličine, tada je

$$p_{i_\nu\cdot} = \sum_{i_{\nu-1}=0}^{k-i_\nu} \cdot \cdot \sum_{i_1=0}^{k-\sum_{j=2}^{\nu} i_j} \cdot \cdot \sum_{i_{\nu+2}=0}^{k-\sum_{j=1}^{\nu} i_j-\sum_{j=0}^{n-\nu+3} i_{n-j}} p_{i_1 i_2 \dots i_n}$$

Kako i_ν može biti 0, 1, ... k, lako je videti da mora biti zadovoljen uslov

$$\sum_{i_\nu=0}^{k} p^{(n)}_{i_\nu\cdot} = 1$$

što skoro očevidno sledi /videti relacije /13/, prvi deo/.

Zakonom verovatnoće marginalnog rasporeda slučajne veličine X_1, prema definiciji /5/, naziva se sledeći skup parova:

$$\left[p_{i_1\cdot}^{(n)} ; i_1 \right]$$

ili napisan eksplicitno:

$$\begin{array}{llllll} X_1: & 0, & 1, & 2, \ldots & \nu, \ldots & k \\ & p_{0_1\cdot}^{(n)} & p_{1_1\cdot}^{(n)} & p_{2_1\cdot}^{(n)} \ldots & p_{\nu_1\cdot}^{(n)} \ldots & p_{k_1\cdot}^{(n)} \end{array}$$

gde je za svako $\nu = 1, 2, \ldots k$

$$0 \leq p_{\nu_1} \leq 1$$

Na sličan način može se definisati zakon verovatnoće marginalnog rasporeda za ma koju promenljivu X_s. Tako, na primer, skup parova

$$\begin{array}{llllll} X_s: & 0, & 1, & 2, \ldots & \nu, \ldots & k \\ & p_{0_s\cdot}^{(n)} & p_{1_s\cdot}^{(n)} & p_{2_s\cdot}^{(n)} \ldots & p_{\nu_s\cdot}^{(n)} \ldots & p_{k_s\cdot}^{(n)} \end{array}$$

predstavlja zakon verovatnoće marginalnog rasporeda slučajne veličine X_s, gde je za svako ν $0 \leq p_{\nu_s} \leq 1$

U prethodnom izlaganju definisani su jednodimenzioni zakoni verovatnoća marginalnih rasporeda slučajnog vektora $\vec{A}$, posmatranjem samo jedne od promenljivih, a ignorisanjem ostalih. Medjutim, kao što smo već videli, moguće je definisati i višedimenzione zakone verovatnoća marginalnih rasporeda posmatranih slučajnih veličina posmatranjem izvesnog broja njih, a ignorisanjem ostalih. Tako, na primer, posmatranjem prvih s promenljivih a ignorisanjem ostalih dobija se s-dimenzioni zakon verovatnoće marginalnog rasporeda slučajnih veličina X_1, X_2, ... X_s. Izračunajmo pre svega sledeću verovatnoću:

$$P_r \left\{ X_1 = i_1, X_2 = i_2, \ldots X_s = i_s \right\} = p_{i_1 i_2 \ldots i_s}^{(n)}$$

Da bismo to učinili na što jednostavniji način, označimo sa $\alpha_\mu = \sum_{j=1}^{\mu} i_j$. Ako sada fiksiramo prvih s promenljivih /smatrajući pri tome da je $X_1 = i_1$, $X_2 = i_2$, ... $X_s = i_s$/, tada je broj različitih rasporeda, koji se može formirati od ostalih $k - \alpha_\mu$ elemenata u $n-s$, ćelija jednak:

$$\binom{k - \alpha_\mu + n - s - 1}{n - s - 1} .$$

Nije teško videti da je tada

$$p_{i_1 i_2 \dots i_s .} = \sum_{i_n = 0}^{k-\alpha_\mu} \cdots \sum_{i_{s+1}=0}^{k-\alpha_\mu - \sum_{r=0}^{n-s-3} i_{n-r}} p_{i_1 i_2 \dots i_n}$$

Skup parova oblika

$$\left[p^{(n)}_{i_1 i_2 \dots i_s .} \, ; \, i_1, i_2, \dots i_s \right]$$

naziva se zakonom verovatnoće marginalnog rasporeda promenljivih X_1, X_2, ... X_s. Na sličan način može se definisati i zakon verovatnoće nekog drugog sistema s promenljivih $(s < n)$. Na osnovi definicije veličine $p^{(n)}_{i_1 i_2 \dots i_s .}$ moraju zadovoljavati sledeće uslove: pre svega je uvek $0 \leq p^{(n)}_{i_1 i_2 \dots i_s} \leq 1$ što je očevidno, drugo

$$\sum_{i_s=0}^{k} \sum_{i_{s-1}=0}^{k-i_s} \cdots \sum_{i_1=0}^{k-\sum_{j=2}^{s} i_j} p_{i_1 i_2 \dots i_s .} = 1$$

što direktno sledi iz formula /12/ /prvi deo/.

Kao primer posmatrajmo zakon verovatnoće marginalnog rasporeda u odnosu na dve slučajne veličine X_1, X_2, koji je dat skupom sledećih parova:

$$\begin{array}{llllll} (0,0), & (0,1), & (0,k), \;\dots & (1,k-1), \;\dots & (r,k-r), & \dots \\ p^{(n)}_{0_1 0_2 .} & p^{(n)}_{0_1 1_2 .} \;\dots & p^{(n)}_{0_1 k_2 .} \;\dots & p^{(n)}_{1_1\, k-1\, _2 .} \;\dots & p^{(n)}_{r_1\, k-r\, _2 .} & \dots \end{array}$$

ili u jednostavnijem obliku

$$\left[p^{(n)}_{i_1 i_2} \; ; \; i_1 \; i_2 \right] \qquad i_1 ; \; i_2 = 0, 1, 2, \dots k$$

$$i_1 + i_2 \leqslant k$$

U ovom slučaju je vrlo jednostavno videti da je

$$\sum_{i_2=0}^{k} \sum_{i_1=0}^{k-i_2} p^{(n)}_{i_1 i_2 .} = 1$$

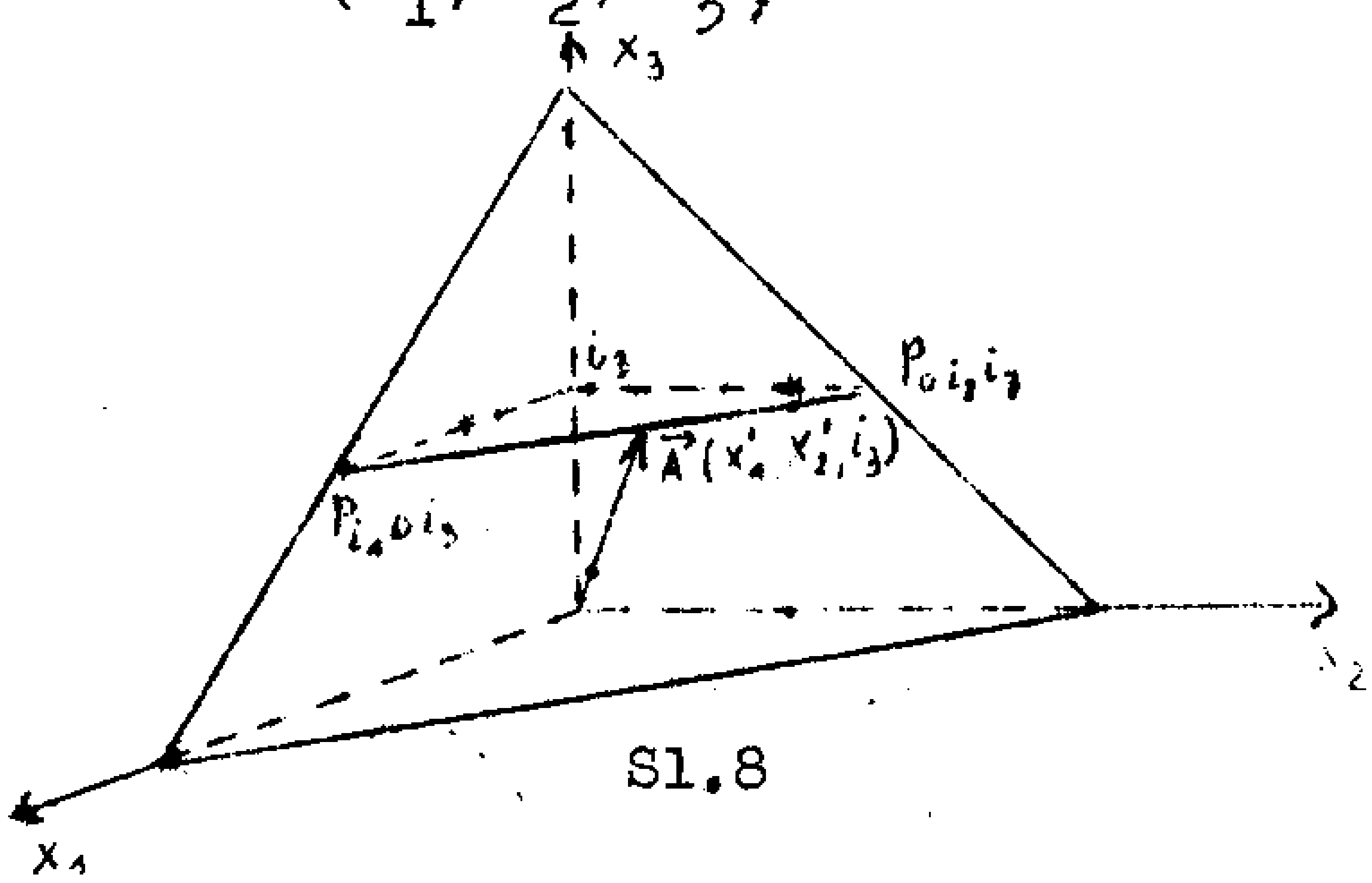
Zaista, ako je ovde

$$p_{i_1 i_2 .} = \sum_{i_n=0}^{k-i_1-i_2} \; \sum_{i_{n-1}=0}^{k-i_1-i_2-i_n} \cdot \; \cdot \; \cdot \sum_{i_4=0}^{k-i_1-i_2-\sum_{r=0}^{n-5} i_{n-r}} p_{i_1 i_2 \dots i_n}$$

odatle na osnovi formula /13/ iz prvog dela neposredno sledi dokaz tvrdjenja.

Na sličan način može se definisati zakon verovatnoće za ma koji skup od s slučajnih veličina $X_{\nu+1}, X_{\nu+2}, \dots X_{\nu+s}$, gde je $\nu + s < n$.

Kada je $n = 3$, tj. kada je posmatrani slučajan vektor trodimenzionalan, moguće je vrlo jednostavno i geometrijski očevidno interpretirati mnoge prethodno definisane pojmove. Na taj način je isto tako vrlo prosto grafičko prikazivanje zakona verovatnoće marginalnog rasporeda. Tako, na primer, ako se izvrši grafičko prikazivanje slučajnog vektora $\vec{A} = \vec{A}\,(X_1, X_2, X_3)$



Sl.8

tada je sa slike očigledna sledeća relacija:

$$P_r\left\{X_3 = i_3\right\} = \sum_{j=0}^{i_1} p_{i_1-j,j,i_3} = \sum_{j=0}^{i_2} p_{j,i_2-j,i_3} = p^{(n)}_{i_3}.$$

pa je, prema tome, zakon verovatnoće marginalnog rasporeda slučajne veličine X_3 dat sledećim skupom parova:

$$X_3: \quad 0, \quad 1, \quad 2, \ldots\ldots \nu, \ldots\ldots k$$

$$p_{o3}, \quad p_{13}, \quad p_{23}, \ldots p_{\nu 3} \ldots\ldots p_{k3}$$

Na isti način se može naći zakon verovatnoće marginalnog rasporeda slučajne veličine X_2, odnosno X_1. Tako, na primer, skup parova

$$\left[\, p^{3}_{i_2}\,,\ i_2 \right]$$

predstavlja zakon verovatnoće marginalnog rasporeda promenljive X_2, gde je

$$p^{(3)}_{i_2 .} = \sum_{j=0}^{i_1} p_{i_1-j,i_2,j} = \sum_{j=0}^{i_3} p_{j,i_2,i_3-j} =$$

$$= \sum_{j=0}^{k-i_2} p_{k-i_2-j,i_2,j} = \sum_{j=0}^{k-i_2} p_{j,i_2,k-i_2-j}$$

Nadjimo još zakone verovatnoća marginalnog rasporeda za slučaj uniformnog zakona verovatnoće slučajnog vektora $\vec{A} = \vec{A}\left(X_1, X_2, \ldots X_n\right)$. Kako je tada

$$p_{i_1 i_2 \ldots i_n} = \frac{1}{\binom{k+n-1}{n-1}}$$

to je, na primer:

$$p^{(n)}_{i_1 .} = \frac{1}{\binom{k+n-1}{n-1}} \sum_{i_n=0}^{k-i_1} \sum_{i_{n-1}=0}^{k-i_1-i_n} \cdots\cdots \sum_{i_2=0}^{k-i_1-\sum_{z=0}^{n-4} i_{n-z}} 1 = \frac{\binom{k-i_1+n-2}{n-2}}{\binom{k+n-1}{n-1}}$$

Prema tome, zakon verovatnoće marginalnog rasporeda slučajnog vektora $\vec{A}$ u odnosu na promenljivu X_1 dat je sledećim skupom parova

$$X_1: \quad 0, \qquad 1, \qquad 2, \ldots \qquad \nu \ldots\ldots\ldots\ldots k$$

$$\frac{\binom{k+n-2}{n-2}}{\binom{k+n-1}{n-1}}, \quad \frac{\binom{k+n-3}{n-2}}{\binom{k+n-1}{n-1}}, \quad \frac{\binom{k+n-4}{n-2}}{\binom{k+n-1}{n-1}}, \ldots \frac{\binom{k+n-\nu-2}{n-2}}{\binom{k+n-1}{n-1}}, \ldots \frac{1}{\binom{k+n-1}{n-1}}$$

Potpuno isti oblik zakona verovatnoće marginalnog rasporeda imaju ostale slučajne veličine X_i, kada je u pitanju uniformni zakon verovatnoće slučajnog vektora $\vec{A}$.

FUNKCIJA MARGINALNOG RASPOREDA SLUČAJNOG VEKTORA $\vec{A}$

Definicija 6:

Pod marginalnom funkcijom rasporeda promenljive p_1 podrazumeva se sledeći izraz:

$$P_r\left\{ p_1 \leq \alpha_1 \right\} = F_1.(\alpha_1) \qquad 0 \leq \alpha_1 \leq 1$$

Da bismo mu izračunali vrednost, pretpostavimo da je

$$p_{1\mu_1} \leq \alpha_1 < p_{1\mu_1+1}$$

Tada je

$$P_r\left\{ p_1 \leq \alpha_1 \right\} = \sum_{i=1}^{\mu_1} P_r\left\{ p_1 = \bar{p}_{i_1} \right\} = \sum_{i_1=1}^{\mu_1} \sum_{j=1}^{f_i^1} P_{ji}^1$$

Na sličan način može se izračunati funkcija marginalnog rasporeda ma koje promenljive p_ν

$$P_r\left\{ p_\nu \leq \alpha_\nu \right\} = F_\nu.(\alpha_\nu)$$

gde indeks ν kod F_ν znači da se pomenuta funkcija odnosi na slučajnu veličinu p_ν .

Naime,

$$P_r\left\{ p_v \leq \alpha_v \right\} = \sum_{i=1}^{\mu_v} P_r\left\{ p_v = \bar{p}_{vi} \right\} = \sum_{i=1}^{\mu_v} \sum_{j=1}^{f_i^v} p_{ji}^v$$

pod pretpostavkom da je

$$p_{v\mu_v} \leq \alpha_v < p_{v\mu_v+1}$$

Definišimo sada marginalnu funkciju rasporeda promenljivih $p_1, p_2, \dots p_r$ $(r < n)$ slučajnog vektora $\vec{A}$.

Definicija 7:

Pod marginalnom funkcijom rasporeda promenljivih $p_1, p_2, \dots p_r$ podrazumeva se sledeći izraz:

$$P_r\left\{ p_1 \leq \alpha_1, p_2 \leq \alpha_2, \dots p_r \leq \alpha_r \right\} = F_{1,2,\dots r}(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_r)$$

$$0 \leq \alpha_i \qquad i = 1, 2, \dots r$$

gde indeksi 1, 2, ... r označavaju da se funkcija $F_{1,2,\dots r}$ odnosi na slučajne veličine $p_1, p_2, \dots p_r$.

Vratimo se sada na primer rasporeda k elemenata u n ćelija i za taj slučaj izračunajmo oblike analitičkih izraza, prethodno definisanih pojmova. Ako sa $p_{i_1 i_2 \dots i_n}$ označimo verovatnoću datog rasporeda, tada je, na primer, funkcija marginalnog rasporeda promenljive X_1 sledećeg oblika:

$$P_r\left\{ X_1 \leq i_1 \right\} = \sum_{j_1=0}^{i_1} P_r\left\{ X_1 = j_1 \right\} = \sum_{j_1=0}^{i_1} p_{j_1}^{(n)} = F_1(i_1) =$$

$$= \sum_{j_1=0}^{i_1} \sum_{i_n=0}^{k-i_1} \cdots \sum_{i_n=0}^{k-i_1-\sum_{\tau=0}^{n-4} i_{n-\tau}} p_{i_1 i_2 \dots i_n}$$

Na sličan način se može pokazati da je funkcija marginalnog rasporeda ma koje promenljive X_v jednaka

$$P\left\{ X_v \leq i_v \right\} = \sum_{j_v=0}^{i_v} \sum_{i_{v-1}=0}^{k-i_v} \cdots \sum_{i_{v+2}=0}^{k-\sum_{j=1}^{v} i_j - \sum_{\tau=0}^{n-v-3} i_{n-\tau}} p_{i_1 i_2 \dots i_n} = F_v(i_v)$$

pri čemu indeks v označava da se pomenuta funkcija odnosi na slučajnu veličinu X_v.

Osobine prethodno definisane funkcije neposredno slede iz njene definicije. Pre svega, očevidno je da ona zadovoljava uslov

$$F_v(i_v) \geqslant 0$$

dok je za $i_v = k$

$$F_v(k) = 1$$

tj, uvek je $0 \leqslant F_v(i_v) \leqslant 1$ za svako $v = 1, 2, \dots n$.

Izračunajmo sada funkciju marginalnog rasporeda promenljivih $X_1, X_2, \dots X_s$. Da bismo to učinili, poslužićemo se formulom /26/ iz prvog dela, na osnovi čega je lako videti istinitost sledećeg odnosa:

$$P_r\left\{X_1 \leqslant i_1 ;\ X_2 \leqslant i_2 ;\ \dots\dots X_s \leqslant i_s\right\} = 1 - \sum_{v=1}^{s} S_v$$

gde je

$$S_v = \sum_{i_v = \alpha_{v+1}}^{k} \ \sum_{i_{v-1}=0}^{k-i_v} \cdot \ \cdot \ \cdot \sum_{i_{v+1}=0}^{k-\sum_{j=2}^{v} i_j - \sum_{z=0}^{m-v-3} i_{m-z}} p_{i_1 i_2 \dots i_m}$$

naravno pod pretpostavkom da je

$$i_j \geqslant \left[\frac{k+(-1)^k}{2}\right]$$

Prema tome je konačno

$$F_{1,2,\dots s}(i_1, i_2, \dots i_s) = 1 - \sum_{v=1}^{s} S_v$$

Na sličan način mogu se izračunati analitički izraz funkcija marginalnih rasporeda ostalih skupova promenljivih. Lako je pokazati da je ukupan broj svih mogućih funkcija marginalnih rasporeda k elemenata u n ćelija jednak

$$2\left(2^{n-1} - 1\right)$$

U slučaju uniformnog rasporeda, tj. kada je

$$p_{i_1 i_2 \ldots i_n} = \frac{1}{\binom{k+n-1}{n-1}} ,$$

funkcija marginalnog rasporeda promenljive X_v imaće sledeći oblik:

$$F(i_v) = 1 - \frac{\binom{k-i+n-2}{n-2}}{\binom{k+n-1}{n-1}}$$

dok je uopšte

$$F_{1,2,\ldots s}(i_1, i_2, \ldots i_s) = 1 - \frac{\sum_{v=1}^{s} \binom{k-i_v+n-2}{n-2}}{\binom{k+n-1}{n-1}}$$

naravno pod pretpostavkom da je

$$i_j \geqslant \left[\frac{k+(-1)^k}{2}\right] \qquad j = 1,2,\ldots s$$

USLOVNI ZAKON VEROVATNOĆE SLUČAJNOG VEKTORA $\vec{A}$

Definišimo prvo uslovnu verovatnoću. Uslovnom verovatnoćom da će promenljiva p_1 uzeti vrednost $\bar{p}_{1i_1}$, p_2 uzeti vrednost $\bar{p}_{2i_2}, \ldots$, p_v uzeti vrednost $\bar{p}_{v i_v}$ pod uslovom da p_{v+1} već ima vrednost $\bar{p}_{v+1,\, i_{v+1}}, \ldots$ p_n već ima vrednost $\bar{p}_{n i_n}$, naziva se sledeći izraz:

$$P_r\left\{ p_1 \quad p_2 = \bar{p}_{2i_2}, \ldots p_v = \bar{p}_{v i_v} \,\middle|\, p_{v+1} = \bar{p}_{v+1,\, i_{v+1}}, \ldots p_n = \bar{p}_{n i_n} \right\}$$

Kao što je skoro očevidno, vrednost te verovatnoće dobija se na ovaj način:

$$P_r\left\{p_1=\bar{p}_{1i_1},\ldots p_\nu=\bar{p}_{\nu i_\nu} \mid p_{\nu+1}=\bar{p}_{\nu+1,i_{\nu+1}},\ldots p_n=\bar{p}_{ni_n}\right\}=$$

$$=\frac{P_r\left\{p_1=\bar{p}_{1i_1},\ p_2=\bar{p}_{2i_2},\ldots p_n=\bar{p}_{ni_n}\right\}}{P_r\left\{p_{\nu+1}=\bar{p}_{\nu+1,i_{\nu+1}},\ldots p_n=\bar{p}_{ni_n}\right\}}$$

Definicija 8:

Pod uslovnim zakonom verovatnoće posmatranog slučajnog vektora $\vec{A}$ podrazumeva se sledeći skup vrednosti:

$$\left[P_r\left\{p_1=\bar{p}_{1i_1},\ \cdots\ p_\nu=\bar{p}_{\nu i_\nu} \mid p_{\nu+1}=\bar{p}_{\nu+1,i_{\nu+1}}\ \cdots\ p_n=\bar{p}_{ni_n}\right\};\ \bar{p}_{i_1}\cdots\bar{p}_{ni_n}\right]$$

Izračunajmo sada uslovnu verovatnoću za slučaj rasporeda k elemenata u n ćelija. U tom cilju označimo sa $p_{i_1i_2,\ldots i_\nu|i_{\nu+1},\ldots i_n}$ verovatnoću da se u prvoj ćeliji nalazi i_1 elemenata, u drugoj $i_2\ldots$ u ν-toj i_ν, pod uslovom da je već u $(\nu+1)$-voj ćeliji $i_{\nu+1},\ldots$ elemenata, a u n-toj i_n elemenata. Tada je

$$p_{i_1i_2\ldots i_\nu|i_{\nu+1},i_{\nu+2},\ldots i_n}=\frac{p_{i_1i_2\ldots i_n}}{p^{(n)}_{i_{\nu+1},i_{\nu+2},\ldots i_n}}=$$

$$=\frac{p_{i_1i_2\ldots i_n}}{\sum\limits_{i_{\nu+1}=0}^{k+\alpha_\nu}\cdots\sum\limits_{i_2=0}^{k-\alpha_\nu-\sum\limits_{\tau=0}^{\nu-1} i_{\nu-\tau+1}} p_{i_1i_2\ldots i_n}}$$

gde je $\alpha_\nu=\sum\limits_{j=\nu+1}^{n} i_j$

itd.

MATEMATIČKO OČEKIVANJE I MOMENTI

U dosadašnjem izlaganju bile su posmatrane i proučene neke najosnovnije osobine i karakteristike slučajnih zakona verovatnoće i distribucija frekvencija /odnosno njihovog geometrijskog analogona slučajnog vektora $\vec{A}$/ onih obeležja, koja mogu imati samo konačan broj vrednosti. U daljoj diskusiji biće definisani pojmovi kao što su matematičko očekivanje, momenti, varijansa itd. Definišimo sada matematičko očekivanje slučajnog vektora $\vec{A}$, geometrijskog ekvivalenta posmatranog slučajnog zakona verovatnoće.

<u>Definicija 9</u>:

Pod matematičkim očekivanjem E /$\vec{A}$/ vektora $\vec{A}$ podrazumeva se sledeći izraz:

$$E(\vec{A}) = \sum_{i=1}^{N} p_i \vec{A} = \sum_{i=1}^{N} \vec{A}_i (\, p_i p_{i1} \quad p_i p_{i2}, \dots \; p_i p_{in} =$$

$$= \vec{A}\left(\sum_{i=1}^{N} p_i p_i \, , \; \sum_{i=1}^{N} p_i p_i \, , \; \dots \; \sum_{i=1}^{N} p_i p_i \right) =$$

$$= \vec{A}\left(E(p_1) \, , \; E(p_2) \; \dots \; E(p_n) \right)$$

Dakle, kao što se vidi iz definicije, matematičko očekivanje slučajnog vektora $\vec{A}$ je vektor; zbir koordinata tog vektora mora da bude jednak jedinici. Zaista

$$\sum_{j=1}^{n} E(p_j) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{N} p_i p_{ij} = \sum_{i=1}^{N} p_i \sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1$$

Prema tome, matematičko očekivanje slučajnog vektora $\vec{A}$ je takav vektor $\vec{A}$ čija se krajnja tačka nalazi u onoj tački hiperravni $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$, čije su koordinate $E(p_i)$, tj. u tački $A[E(p_1), E(p_2), \dots E(p_n)]$.

U cilju ilustracije posmatrajmo opet primer, koji se odnosi na raspored k elemenata u n ćelija. U ovom slučaju potrebno je izračunati matematičko očekivanje vektora $\vec{A}(X_1, X_2, \dots X_n)$, koji je geometrijski ekvivalent distribucije frekvencija k elemenata u n ćelija. Po definiciji matematičko očekivanje E /$\vec{A}$/ jednako je sledećem izrazu:

$$E(\vec{A}) = \sum_{i_n=0}^{k} \sum_{i_{n-1}=0}^{k-i_n} \cdots \sum_{i_2=0}^{k-\sum_{r=0}^{n-3} i_{n-r}} \vec{A}(i_1, i_2, \ldots i_n)\, p_{i_1 i_2 \ldots i_n} =$$

$$= \vec{A}\left[E(X_1),\ E(X_2),\ \ldots\ E(X_n)\right]$$

pri čemu je

$$E(X_\nu) = \sum_{i_\nu=0}^{k} p^{(n)}_{i_\nu}\, i_\nu\ ;$$

gde je

$$p^{(n)}_{i_\nu} = \sum_{i_{\nu-1}=0}^{k-i_\nu} \cdots \sum_{i_{\nu+2}=0}^{k-\sum_{j=1}^{\nu} i_j - \sum_{r=0}^{n-\nu-2} i_{n-r}} i_\nu\, p_{i_1 i_2 \ldots i_n}$$

Prema tome, matematičko očekivanje je vektor

$$E(\vec{A}) = \vec{A}\left(\sum_{i_1=0}^{k} p^{(n)}_{i_1} i_1,\ \sum_{i_2=0}^{k} p^{(n)}_{i_2} i_2,\ \ldots\ \sum_{i_n=0}^{k} p^{(n)}_{i_n} i_n \right)$$

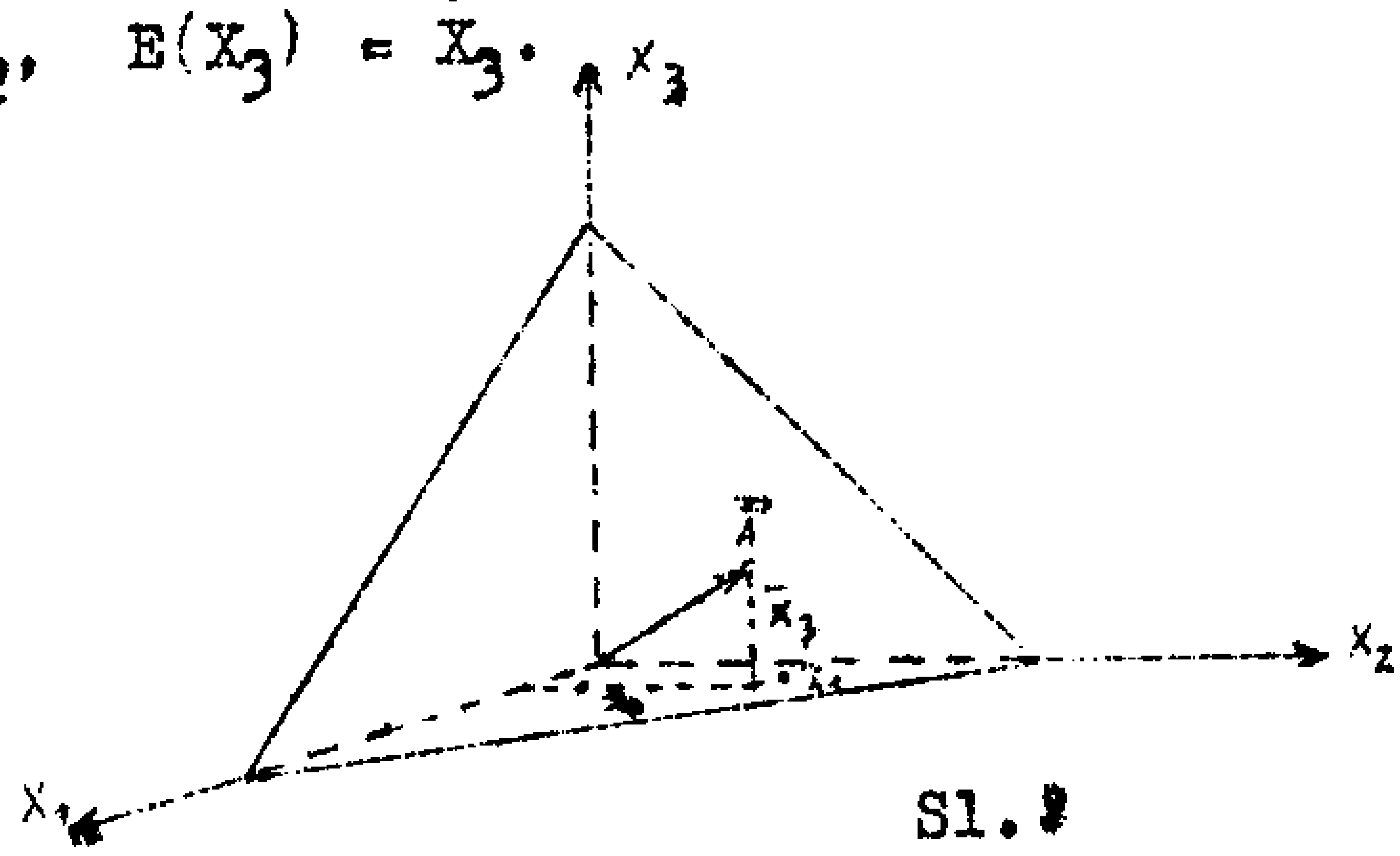
čije koordinate zadovoljavaju uslov

$$\sum_{\nu=1}^{n} E(X_\nu) = k$$

Zaista, na osnovi definicije je

$$\sum_{\nu=1}^{n} E(X_\nu) = \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{i} p^{(n)}_{i_\nu}\, i_\nu = \sum_{\nu=1}^{n} i_\nu \sum_{i_\nu=0}^{k} p^{(n)}_{i_\nu} = k$$

U slučaju tri dimenzije, tj. kada je $n = 3$, matematičko očekivanje slučajnog vektora $\vec{A}$ može se predstaviti geometrijski vektorom, čija krajnja tačka leži u onoj tački hiperravni $x_1 + x_2 + x_3 = k$, koja ima koordinate $E(X_1) = \bar{X}_1$, $E(X_2) = \bar{X}_2$, $E(X_3) = \bar{X}_3$.



Sl. 8

Kada je raspored uniforman, bez teškoća se može videti da je u tom slučaju $E(X_v) = \frac{k}{n}$, odnosno da je matematičko očekivanje oblika

$$E(\vec{A}) = \vec{A}\left(\frac{k}{n}, \frac{k}{n}, \dots \frac{k}{n}\right)$$

Definicija 10:

Predjimo sada na definiciju momenta slučajnog vektora. Pod momentom m-tog reda u odnosu na neki vektor $\vec{A}_o = \vec{A}_o(p_{o1}, p_{o2}, \dots p_{on})$ podrazumeva se sledeći izraz:

$$\mu_m = E(\vec{A} - \vec{A}_o)^k$$

pri čemu koordinate vektora $\vec{A}_o$ moraju zadovoljavati uslov

$$\sum_{i=1}^{m} p_{oi} = 1$$

Iz definicije momenta lako je videti da on može biti skalarna veličina ili vektor prema tome da li je $\frac{k}{2}$ paran ili neparan broj /naravno pri tome se pod $(\vec{A} - \vec{A}_o)^2$ podrazumeva skalarni proizvod vektora$(\vec{A} - \vec{A}_o)$ samim sobom . Kako je, u stvari, moment m-tog reda matematičko očekivanje m-tog stepena slučajnog vektora $(\vec{A} - \vec{A}_o)$, lako je videti da se on može izraziti na sledeći način:

$$\mu_m = \sum_{i=1}^{N} p_i (\vec{A}_i - \vec{A}_o)^m =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} p_i \left\{ \vec{A}_i(p_{i1} - p_{o1}, p_{i2} - p_{o2}, \dots p_{in} - p_{on}) \right\}^m$$

Ako umesto vektora $\vec{A}_o$ stavimo vektor $E/\vec{A}/$, tada se očekivana vrednost $E\{\vec{A} - E(\vec{A})\}^m$ naziva centralni momenat reda m i označava se sa ν_m

$$\nu_m = E\left[\vec{A} - E(\vec{A})\right]^m$$

U slučaju kada je m = 2, dobija se centralni momenat drugog reda, koji ćemo zvati varijansa i označavati slovom σ^2. Prema tome je

$$\sigma^2 = E\left(\vec{A} - E(\vec{A})\right)^2$$

Vrlo je lako pokazati da se varijansa može napisati u sledećem obliku:

$$\sigma^2 = E(\vec{A})^2 - [E(\vec{A})]^2$$

ili, ako se izračuna, onda je

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{n} p_i p_{ij}^2 - \sum_{i=1}^{n} p_{oi}^2$$

Varijansa kao pojam biće od izvanredne važnosti u daljim izlaganjima, kada se bude proučavao varijabilitet.

Posmatrajmo opet primer rasporeda k elemenata u n čelija, pri čemu je verovatnoća datog rasporeda $p_{i_1 i_2 \ldots i_n}$. Ako u ovom slučaju označimo sa $E/\vec{A}/$ matematičko očekivanje slučajnog vektora $\vec{A}$, tada je

$$\nu_m = E[\vec{A} - E(\vec{A})]^m =$$

$$= \sum_{i_m=0}^{k} \sum_{i_{m-1}=0}^{k-i_m} \cdots \sum_{i_2=0}^{k-\sum_{i=0}^{m-3} i_{m-2}} \{\vec{A}[i_1-E(X_1); i_2-E(X_2); \ldots i_n-E(X_n)]\}^m p_{i_1 i_2 \ldots i_n}$$

m-ti centralni momenat. Na potpuno isti način može se definisati momenat u odnosu na ma koji drugi vektor, čija krajnja tačka leži na hiperravni $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k$, i to u oblasti pozitivnih koordinata. U slučaju kada je $m = 2$ centralni momenat postaje varijansa i tada je

$$E[\vec{A} - E(A)]^2 = E(\vec{A})^2 - [E(\vec{A})]^2 =$$

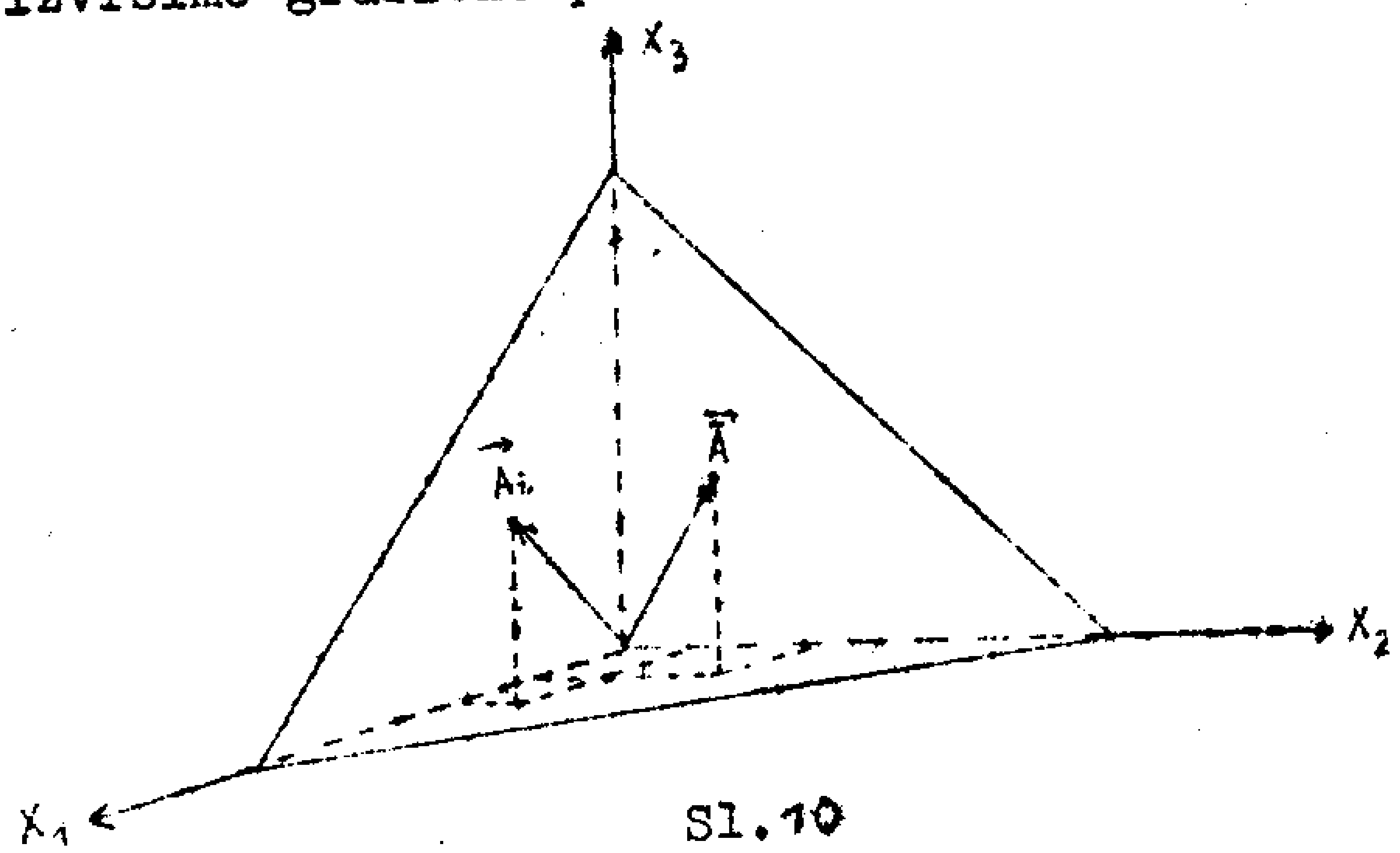
$$= \sum_{i_m=0}^{k} \cdots \sum_{i_2=0}^{k-\sum_{i=0}^{m-3} i_{m-2}} \left(\sum_{j=1}^{m} i_j^2\right) p_{i_m i_2 \ldots i_m} - \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i_j=0}^{k} p_{i_j.}^{(m)} i_j\right)^2$$

Predjimo sada na problem proučavanja varijabiliteta i mogućnosti njegovog merenja. Pre svega podsetimo se na to da kada je u pitanju bila obična slučajna veličina, da je varijabilitet bio meren odstupanjem pojedinih vrednosti te slučajne veličine od njene očekivane vrednosti. Medjutim, taj se metod direktno ne može primeniti kada su u pitanju slučajni zakoni verovatnoća, odnosno distribucije frekvencija. Medjutim, ako se pomenuti pojmovi zamene svojim prirodnim geometrijskim ekvivalentima, vektorima, tada je moguće skoro neposredno primeniti prethodnu ideju za merenje varijabiliteta. Da bi se stvar što jednostavnije predstavila i da bi se mogli koristiti geometrijskom interpretacijom, posmatrajmo, pre svega, slučaj kada je $n = 3$. Tada se prethodna hiperravan o kojoj je reč svodi na običnu ravan.

Veličinu varijabiliteta merićemo odstupanjem pojedinih realizacija slučajnog vektora $\vec{A}$ od njegovog matematičkog očekivanja na sledeći način: Posmatrajmo slučajni vektor $\vec{A} = \vec{A}(p_1, p_2, p_3)$ čije je matematičko očekivanje $E(\vec{A}) = \vec{A}[E(p_1), E(p_2), E(p_3)]$; neka je

$$\vec{A}_i = \vec{A}_i(p_{i1}, p_{i2}, p_{i3})$$

realizacija od $\vec{A}$, pri čemu je za svako i, $\sum_{j=1}^{3} p_{ij} = 1$. Ako sada izvršimo grafičko predstavljanje, dobićemo sledeću sliku:



Sl. 10

Posmatrajmo sada oba vektora $\vec{A}$ i $\vec{A}_i$. Njihovo uzajamno odstupanje možemo meriti na dva načina: veličinom ugla koji oni zaklapaju ili rastojanjem njihovih krajnjih tačaka A_i i $\bar{A}$. Medjutim, korišćenje ugla u cilju merenja uzajamnog odstupanja dovelo bi do izvesnih nezgoda ako bismo želeli da uporedjujemo varijabilitet dva slučajna zakona verovatnoće, odnosno dve distribucije frekvencija, jer taj način u mnogome zavisi pod $\bar{A}$. Iz tog razloga biće korišćen drugi od pomenutih načina. Prema tome, kao meru odstupanja vektora $\vec{A}_i$

od vektora $\vec{A}$ koristićemo duž koja je jednaka modulu razlike pomenutih vektora. Konačno meru varijabiliteta dobićemo na sledeći način:

Formirajmo kvadrate modula vektora $\vec{A}_i - \vec{\bar{A}}$ za sve $i = 1, 2, \dots N$, dalje izračunajmo aritmetičku sredinu tako dobijenih vrednosti

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} |\vec{A}_i - \vec{\bar{A}}_i|^2 f_i$$

Posmatrana veličina se svojom strukturom nameće kao prirodna mera varijabiliteta slučajnog vektora $\vec{A}$. Pokažimo sada da je dobijeni izraz u stvari centralni momenat drugog reda slučajnog vektora $\vec{A}$. Zaista, kako je

$$|\vec{A}_i - \vec{\bar{A}}|^2 = (\vec{A}_i - \vec{\bar{A}})^2 \quad \text{i}$$

$$\frac{f_i}{N} = P_i$$

to odatle naše tvrdjenje neposredno proističe.

Za konačnu meru varijabiliteta uzećemo /slično kao i kod obične slučajne veličine/ kvadratni koren iz varijanse, koji se naziva standardna devijacija

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{m} P_i P_{ij} - \sum_{i=1}^{m} p_{oi}^2}$$

U cilju ilustracije prethodno definisanog pojma, posmatrajmo opet primer rasporeda k [illegible] u n ćelija, pri čemu je zakon verovatnoće slučajnog vektora $\vec{A} = \vec{A}(X_1, X_2, \dots X_n)$ uniforman. U ovom slučaju je, kao što smo ranije videli,

$$p_{i_1 i_2 \dots i_n} = \frac{1}{\binom{k+n-1}{n-1}}$$

pa je

$$\sigma^2 = \frac{1}{\binom{k+n-1}{n-1}} \sum_{i_n=0}^{k} \cdots \sum_{i_2=0}^{k-\sum_{j=0}^{n-3} i_{n-j}} \left(\sum_{j=1}^{n} i_j^2 \right) - \sum_{j=1}^{n} E^2(X_j)$$

Da bismo na što jednostavniji način izračunali dati zbir, posmatrajmo ponovo analitički izraz za varijansu:

$$\sigma^2 = E[\vec{A} - E(\vec{A})]^2 = \sum_{i=1}^{n} E\{X_i - E(X_i)\}^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} E(X_i^2) - \sum_{i=1}^{n} E^2(X_i)$$

S obzirom na pretpostavku o uniformnosti rasporeda sledi da je $E(X_1^2) = E(X_2^2) \dots = E(X_n^2) = E(X^2)$

$$\sigma^2 = n\left[E(X^2) - E^2(X)\right] = n\left[E(X^2) - \left(\frac{k}{n}\right)^2\right]$$

Izračunajmo sada još $E(X^2)$; u našem slučaju će biti najprostije posmatrati $E(X_n^2)$, jer je

$$E(X_n^2) = \frac{1}{\binom{k+n-1}{n-1}} \sum_{i_n=0}^{k} \sum_{i_{n-1}=0}^{k-i_n} \dots \sum_{i_2=0}^{k-\sum_{i=0}^{n-3} i_{n-i}} i_n^2 =$$

$$= \frac{1}{\binom{k+n-1}{n-1}} \sum_{i_n=0}^{k} \binom{k-i_n+n-2}{n-2} i_n^2 = \frac{1}{\binom{k+n-1}{n-2}} \sum_{i=0}^{k} \binom{k-i+n-2}{n-2} i^2$$

Da bismo izračunali dati zbir, odnosno dobili konačan oblik za varijansu, posmatrajmo sledeće odnose: Pre svega izračunajmo vrednost izraza $\sum_{i=0}^{k} \binom{k-i+n-2}{n-2} i$

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{k-i+n-2}{n-2} i = -\sum_{i=0}^{k} (k-i)\binom{k-i+n-2}{n-2} + k \sum_{i=0}^{k} \binom{k-i+n-2}{n-2} =$$

$$= \binom{k+n-1}{n-1} \frac{k}{n}$$

Na osnovi dobijenog rezultata, lako je izračunati sledeći zbir:

$$\sum_{i=0}^{k}\binom{k-i+n-2}{n-2}i^2 = -\sum_{i=0}^{k}\binom{k-i+n-2}{n-2}(k^2-i^2) + k^2\sum_{i=0}^{k}\binom{k-i+n-2}{n-2} =$$

$$= \binom{k+n-1}{n-1}\frac{k(2k+n-1)}{n(n+1)}$$

Prema tome, za uniformni raspored standardna devijacija ima sledeći oblik

$$\sigma = \sqrt{n\,[E(X^2) - E^2(X)]} = \sqrt{\frac{k(kn - k + n^2)}{n(n + 1)}}$$

MATEMATIČKO OČEKIVANJE MARGINALNOG RASPOREDA

Definicija 11:

Pod matematičkim očekivanjem marginalnog rasporeda slučajnog vektora $\vec{A}$, u odnosu na promenljivu p_j, podrazumeva se sledeći izraz

$$E(p_j) = \sum_{i=1} p_i p_{ij} = \sum_{i=1}^{s_1}\sum_{r=1}^{f_v^j} \bar{p}_{jv}\, p_{rv}^{1}$$

U opštem slučaju, kada je umesto slučajne veličine p_j u pitanju veličina X_j, njeno matematičko očekivanje je, u stvari, očekivana vrednost marginalnog rasporeda slučajnog vektora $\vec{A}$.

U cilju ilustracije uvedenog pojma, posmatrajmo sledeći primer: Neka se na slučaj raspoređuje k elemenata u n urni, pri čemu je verovatnoća padanja na kod elementa u prvu urnu p_1, u drugu p_2, ... i u n-tu p_n. Tada verovatnoća da će u prvu urnu pasti i_1 elemenata, u drugu i_2, ... u n-tu i_n je

$$p_{i_1 i_2 \ldots i_n} = \frac{k!}{i_1!\, i_2! \ldots i_n!} p_1^{i_1} p_2^{i_2} \ldots p_n^{i_n}$$

pri čemu je $\sum_{j=1}^{n} i_j = k$, a $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Izračunajmo očekivanu vrednost promenljive X_j. U tom cilju posmatrajmo prvo slučaj kada je $n = 3$. Tada je, na primer:

$$E(X_1) = \sum_{i_1=0}^{k} \sum_{i_2=0}^{k-i_1} i_1 \frac{k!}{i_1!\, i_2!\, (k-i_1-i_2)!} p_1^{i_1} p_2^{i_2} p_3^{i_3} =$$

$$= kp_1 \cdot \sum_{i_1'=0}^{k-i_1} \sum_{i_2=0}^{k-i_1'-1} \frac{(k-1)!}{i_1!\, i_2!\, (v-i_1'-i_2-1)!} p_1^{i_1} p_2^{i_2} p_3^{k-i'-i_2-i_3} =$$

$$= p_1 k (p_1 + p_2 + p_3)^{n-1} = kp_1$$

Prema tome je $E(X_1) = kp_1$. Na potpuno isti način se može pokazati da je $E(X_2) = kp_2$ i $E(X_3) = kp_3$. Izračunajmo sada $E(X_s)$ kada je n ma kakav prirodan broj. U tom slučaju bi trebalo izračunati sledeći zbir:

$$E(X_s) = \sum_{i_s=0}^{k} \sum_{i_{s-1}=0}^{k-i_s} \cdots \sum_{i_{s+2}=0}^{k-\sum_{j=1}^{s} i_j - \sum_{r=0}^{n-s-3} i_{n-r}} \frac{k!}{i_1! \cdot i_2! \cdot \ldots \cdot i_n!} p_1^{i_1} \cdot p_2^{i_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{i_n}$$

Na potpuno isti način kao i u prethodnom slučaju, kada je bilo $n = 3$, može se videti da je

$$E(X_s) = kp_s$$

s obzirom na činjenicu da je

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^k = \sum_{i_n=0}^{k} \sum_{i_{n-1}=0}^{k-i_n} \cdots \sum_{i_2=0}^{k-\sum_{r=0}^{n-3} i_{n-r}} \frac{k!}{i_1!\, i_2! \cdot \ldots \cdot i_n!} x_1^{i_1} \cdot x_2^{i_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{i_n}$$

itd.

ZAKON VEROVATNOĆE ZBIRA SLUČAJNIH STRUKTURA

Posmatrajmo dva statistička skupa S_1 i S_2, čije se strukture na slučajan način menjaju u odnosu na jedno isto obeležje, koje uzima konačan broj vrednosti $x_1, x_2 \dots x_n$. Neka su zakoni verovatnoća tih skupova dati redom na sledeći način:

$$S_1: \quad \begin{matrix} x_1 & x_2 \dots\dots & x_i \dots\dots & x_n \\ p'_1 & p'_2 \dots\dots & p'_i \dots\dots & p'_n \end{matrix}$$

$$S_2: \quad \begin{matrix} x_1 & x_2 \dots\dots & x_i \dots\dots & x_n \\ p''_1 & p''_2 \dots\dots & p''_i \dots\dots & p''_n \end{matrix}$$

ili u obliku vektora $\vec{A} = \vec{A}(p_1, p_2, \dots p_n)$ i $\vec{A} = \vec{A}(p_1, p_2 \dots p_n)$. Pretpostavimo da je potrebno naći zakon verovatnoće zbira tih skupova $S_1 + S_2 = S$. U tom cilju pretpostavimo da prvi skup sadrži k_1 a drugi k_2 elemenata. Očevidno je tada da je zakon verovatnoće od S dat na sledeći način:

$$S: \quad \begin{matrix} x_1 & x_2 \dots\dots & x_i \dots\dots & x_n \\ p_1 & p_2 \dots\dots & p_i \dots\dots & p_n \end{matrix}$$

gde je

$$p_i = \frac{k_1 p'_i + k_2 p''_i}{k_1 + k_2}$$

Ako oba skupa S_1 i S_2 sadrže isti broj elemenata, odnosno ako su beskonačna, tada je

$$p_i = \frac{1}{2}\left(p'_i + p''_i\right)$$

Na sličan način može se pokazati da je zakon verovatnoće zbira $S = \sum_{v=1}^{m} S_v$ od m statističkih skupova /pri čemu je zakon verovatnoće od S dat skupom $[p'_i, x_i]$ od n parova/ dat na sledeći način:

$$S: \quad \begin{matrix} x_1 & x_2 \cdots\cdots x_i \cdots\cdots x_n \\ p_1 & p_2 \cdots\cdots p_i \cdots\cdots p_n \end{matrix}$$

gde je

$$p_i = \frac{\sum_{\nu=1}^{m} k_\nu p_i^\nu}{\sum_{\nu=1}^{m} k_\nu}$$

pri čemu je k broj elemenata u tom skupu S_ν.

Posmatrajmo slučajan vektor $\vec{A} = \vec{A}(p_1, p_2, \ldots p_n)$ i nadjimo njegov zakon verovatnoće. S obzirom na to da je

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\sum_{\nu=1}^{m} k_\nu p_i^\nu}{\sum_{\nu=1}^{m} k_\nu} = 1$$

njegove krajnje tačke leže na prethodno pomenutoj hiperravni. Nadjimo zakon verovatnoće posmatranog slučajnog vektora. Da bismo to učinili, pretpostavimo da je poznat zakon verovatnoće slučajnog vektora $\vec{A'}$ i vektora $\vec{A''}$, pri čemu je svaki od njih dat redom sledećim skupom parova:

$$\vec{A'}\,; \quad \begin{matrix} \vec{A'_1} & \vec{A'_2} \cdots\cdots \vec{A'_\mu} \cdots\cdots \vec{A'_{N_1}} \\ P'_1 & P'_2 \cdots\cdots P'_\mu \cdots\cdots P'_{N_1} \end{matrix}$$

$$A\,; \quad \begin{matrix} \vec{A''_1} & \vec{A''_2} \cdots\cdots \vec{A''_s} \cdots\cdots \vec{A''_{N_2}} \\ P''_1 & P''_2 \cdots\cdots P''_s \cdots\cdots P''_{N_2} \end{matrix}$$

/u izlaganju prvo posmatramo slučaj dva skupa/. Tada je verovatnoća ostvarenja dogadjaja

$$P_r\{\vec{A'} = \vec{A'_\mu}\,;\ \vec{A'} = \vec{A''_s}\} = P'_\mu\ P''_s$$

Prema tome, zakon verovatnoće vektora $\vec{A}$ dat je sledećim skupom od $N_1 N_2$ parova:

$$\begin{array}{llllll} \vec{A}: & \vec{A}_{11} & \vec{A}_{12} \ldots\ldots & A_{j\nu} \ldots\ldots\ldots & \vec{A}_{N_1N_2} \\ & P_{11} & P_{12} \ldots\ldots & P_{j\nu} \ldots\ldots\ldots & P_{N_1N_2} \end{array}$$

gde je $P_{j\nu} = P'_j \cdot P''_\nu$. Na sličan način se definiše zakon verovatnoće, kada je u pitanju više skupova.

Pojam zbira struktura definisan na prethodni način ima svoje prirodno značenje. Ako, na primer, posmatramo skup muškaraca i skup žena, odnosno njihove zakone verovatnoća u odnosu na jedno isto obeležje, tada se može posmatrati zakon verovatnoće u odnosu na to obeležje ta dva skupa zajedno. Na sličan način može se razumeti i razlika. Tako, na primer, ako se posmatra zakon verovatnoće skupa ljudi u odnosu, recimo, na obeležje visinu, pa se iz tog skupa odvoji izvestan broj njih sa odredjenom karakteristikom, recimo sa istim brojem godina, tada kao rezultat te operacije imamo razliku.

Nadjimo sada zakon verovatnoće razlike dva skupa S_1 i S_2 pri čemu $S_1 \supset S_2$. Pretpostavljajući da znamo zakon verovatnoće od S_1 i od S_2, njihova razlika $S = S_1 - S_2$ imaće sledeći zakon verovatnoće. Neka je zakon verovatnoće od S_1 dat skupom parova $[p'_i, x_i]$ a S_2 $[p''_i, x_i]$. Tada je zakon verovatnoće od S dat sa

$$[p_i, x_i]$$

gde je

$$p_i = \frac{k_1 p'_i - k_2 p''_i}{k_1 - k_2}$$

T R E Ć I   D E O

NEPREKIDAN SLUČAJ

/Osnovni pojmovi i definicije/

Neka je dat apstraktan prostor Ω /čije ćemo tačke označiti sa ω / sa sledećim osobinama: u Ω je definisana Borelova klasa skupova, koja specijalno u svojstvu elementa sadrži i sam prostor Ω i drugo, u istom prostoru definisana je i skup - funkcija P, koja zadovoljava sledeće uslove: Ako je S_ν (ν= 1, 2, ...) neki elemenat iz Ω , tada je

$$1^o/ \quad P(S_\nu) \geq 0$$
$$2^o/ \quad P(\sum_\nu S_\nu) = \sum_\nu P(S_\nu) \qquad S_\nu \cdot S_\mu = 0 \quad \nu \neq \mu$$
$$3^o/ \quad P(\Omega) = 1$$

Ako posmatrana skup - funkcija P zadovoljava navedene uslove, ona se tada naziva merom verovatnoće prostora Ω . Napomenimo da je udobnosti radi često puta pogodno dopuniti gornje uslove, koje zadovoljava skup - funkcija P još i sledećim: svaki podskup bilo kog skupa /koji pripada pomenutoj Borelovoj klasi skupova/ nulte mere takodje je merljiv i ima meru nula. Na osnovi svih prethodno datih osobina funkcije lako je videti i sledeću njenu karakteristiku: Ako su S_1 i S_2 elementi iz Ω i ako je $S_1 \subset S_2$, tada je

$$P(S_1) \leq P(S_2)$$

Definišimo sada pojam slučajne veličine: Realna funkcija $f(\omega)$ definisana na skupu Ω merljiva u odnosu na P meru naziva se slučajnom veličinom. U prostoru slučajnih veličina definisan je operator matematičko očekivanje $E[f(\omega)]$ na sledeći način:

$$E[f(\omega)] = \int_\Omega f(\omega)\, dP(\omega)$$

pri čemu se za f pretpostavlja da je integrabilna u odnosu na dP.

Posmatrajmo sada sistem od n slučajnih veličina

$\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \dots \xi_n(\omega)$ definisanih nad prostorom Ω. Ako sada za ma kakav sistem od n Borelovih skupova $E_1, E_2, \dots E_n$ važi sledeća relacija

$$P_{\tau}\{\xi_1(\omega)\subset E_1;\ \xi_2(\omega)\subset E_2;\dots \xi_n(\omega)\subset E_n\}_{\omega} = \prod_{i=1}^{n} P\{\xi_i(\omega)\subset E_i\}_{\omega}$$

/gde simbol $\{\quad\}_{\omega}$ označava skup svih tačaka iz za koju su ispunjeni uslovi pretpostavljeni u zagradi/, tada se za slučajne veličine $\xi_i(\omega)$ $(i = 1, 2, \dots n)$ kaže da su uzajamno nezavisne.

Neka je dalje U proizvoljan merljiv skup a $x_1(\omega)$ $x_2(\omega), \dots x_n(\omega)$ n slučajnih veličina. Označimo sa M "cilindričan" skup iz Ω definisan uslovom da tačka $(x_1(\omega), x_2(\omega), \dots x_n(\omega))$ pripada nekom proizvoljnom merljivom skupu u n-dimenzionom Euklidovom prostoru R_n $(X_1, X_2, \dots X_n)$. U takvom slučaju postoji samo jedna funkcija

$$P(U \mid X_1, X_2, \dots X_n)$$

takva da je pri ma kakvom izboru skupa M

$$P(U\cdot M) = \int_M P(U \mid X_1, X_2, \dots X_n)\, dP(X_1, X_2, \dots X_n)$$

Funkcija $P(U \mid X_1, X_2, \dots X_n)$ naziva se uslovnom verovatnoćom /u odnosu na $(X_1, X_2, \dots X_n)$ / od U. Analogno uslovnoj verovatnoći može se definisati i uslovno matematičko očekivanje. Dalje, može se pokazati da se na uslovnu verovatnoću mogu preneti sve osobine verovatnoće $P(U)$. U specijalnom slučaju za fiksirano U važi sledeća relacija:

$$0 \leqslant P(U \mid X_1, X_2, \dots X_n)$$

Posmatrajmo dalje sledeći problem: Neka je data realna osa X ili neki njen deo. Takodje neka je T neki odredjeni vremenski interval. Pretpostavimo da se u svakom momentu vremena, koji pripada vremenskom intervalu T, posmatra neka struktura, koja zavisi od vremena i koja u sebi sadrži neku slučajnu komponentu. Pretpostavimo da je za fiksirani vremenski momenat, oblik posmatrane strukture opisan nekom funkcijom definisanom na X.

Ponavljajući eksperiment veliki broj puta dobiće se skup struktura. Kako svakoj strukturi odgovara jedna funkcija, dobiće se, dakle, skup funkcija definisanih nad X. Svaki pojedini oblik strukture, odnosno odgovarajuća funkcija nazivaju se realizacijama posmatranog procesa, dok se sam proces naziva slučajni proces.

Postoje još najmanje tri različita načina, odnosno tri različita aspekta, sa kojih se može posmatrati i strože definisati dati proces. U daljem izlaganju biće posmatrana sledeća tri:

Neka je data neka veličina x_0 iz X. Ako je $f(x)$ odgovarajuća funkcija strukture, tada je $f(x_0)$ neka slučajna veličina. Prema tome, posmatrani proces može biti opisan pomoću pojma slučajne veličine. Te slučajne veličine je pogodno smatrati tačkama nekog apstraktnog prostora, naravno različitog od "prostora elementarnih dogadjaja" na kome je definisana slučajna veličina. Kada x_0 uzima redom sve vrednosti iz X, dobija se jednoparametrijska familija slučajnih veličina, odnosno kriva u našem apstraktnom prostoru. Ta kriva se naziva slučajni proces.

Drugi aspekt sa koga je moguće posmatrati slučajni proces uopšte sastoji se u sledećem: Fiksirajmo odredjenu realizaciju posmatrane strukture i posmatrajmo je kao funkciju od x. Označimo dalje tu realizaciju sa $f_\omega(x)$ i neka je Ω funkcionalni prostor svih realnih funkcija definisanih nad X. Na taj način može se posmatrani slučajni proces definisati kao familija funkcija $f_\omega(x)$, koje zavise od ω.

I, najzad, treći aspekt sastoji se u definisanju slučajnog procesa kao funkcije dve promenljive x i t, tj. funkcije oblika $f(x,t)$. Za fiksirano t imamo odredjenu funkciju, realizaciju posmatranog slučajnog procesa, dok za fiksirano x, $f(x,t)$ postaje slučajna veličina.

Posmatrajmo dalje statistički skup $\mathcal{X}$ čija se struktura na slučajan način menja u odnosu na neko jednodimenziono obeležje Y. Neka nam skup tih promena obrazuje prostor $\mathcal{E}$ čiji su elementi e. Istovremeno posmatrajmo i zakon verovatnoće posmatranog skupa . Ukupnost svih zakona verovatnoće od

Γ čini neki drugi prostor $\mathcal{E}'$. Kako svakom obliku strukture statističkog skupa Γ odgovara jedan odredjen zakon verovatnoće iz prostora $\mathcal{E}'$ i obrnuto, to izmedju elemenata skupova $\mathcal{E}$ i $\mathcal{E}'$ postoji biunivoka korespondencija. Prema tome, kao što se vidi, $\mathcal{E}'$ nam predstavlja prostor realizacije jedne slučajne funkcije, koja predstavlja zakon verovatnoće statističkog skupa Γ. Ako sa $f(y)$ označimo tu slučajnu funkciju, tada, s obzirom na njenu definiciju, ona mora zadovoljavati sledeće uslove:

$$f(y) \geq 0 \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\,dy = 1$$

Definišimo sada pojam slučajne funkcionele u $\mathcal{E}'$. Pod slučajnom funkcionelom podrazumeva se svaki odredjeni zakon na osnovi koga bilo kom elementu $f(y)$ iz $\mathcal{E}'$ odgovara odredjen realan broj. Prema tome, slučajna funkcionela je, u stvari, slučajna veličina definisana na prostoru $\mathcal{E}'$. Naravno, pretpostavlja se da je posmatrana promenljiva merljiva.

Za označavanje funkcionele poslužiće nam simbol $\Phi[f(y)]$. Tako, na primer, ako je $f^{x}(y)$ jedan odredjen elemenat iz $\mathcal{E}'$, tada nam operator

$$\Phi[f^{x}(y)] = \int_{-\infty}^{+\infty} y f(y)\,dy = E(Y)_f$$

predstavlja slučajnu veličinu.

U daljem izlaganju biće date neke osnovne napomene o prethodno definisanom pojmu. Za funkcionelu $\Phi[f(y)]$ definisanu na prostoru $\mathcal{E}'$ reći ćemo da je ograničena ako je za svaki elemenat iz $\mathcal{E}'$ zadovoljena sledeća nejednakost:

$$\left|\Phi[f(y)]\right| \leq N \| f(y) \|$$

gde je $\| f(y) \|$ norma funkcije.

Za slučajnu funkcionelu Φ reći ćemo da je distributivna ako za bilo kakvu linearnu kombinaciju od konačnog broja slučajnih funkcija $f_1(y)$, $f_2(y)$, . . . $f_m(y)$

$$c_1 f_1(y) + c_2 f_2(y) + \dots + c_m f_m(y)$$

važi sledeća jednakost:

$$\Phi\left[\sum_{i=1}^{m} c_i f_i(y)\right] = \sum_{i=1}^{m} c_i \Phi[f_i(y)]$$

Distributivne i ograničene slučajne funkcionele nazvaćemo linearnim funkcionelama. S obzirom na to da je prethodno definisana funkcionela slučajna veličina, potpuno je jasno da ona ima odredjen zakon verovatnoće, odnosno funkciju rasporeda. Prema tome, za jednu slučajnu funkcionelu reći ćemo da je neprekidna ako je odgovarajuća funkcija rasporeda neprekidna.

Označimo sada sa $\mathfrak{Z}$ klasu svih zakona verovatnoće i dajmo pojam operatora definisan nad klasom $\mathfrak{Z}$. Operatorom nad $\mathfrak{Z}$ nazvaćemo svaki odredjeni zakon na osnovi koga bilo kom elementu $f(x)$ iz $\mathfrak{Z}$ odgovara odredjeni elemenat $f(x)$ takodje iz $\mathfrak{Z}$. Za označavanje operatora uzećemo simbol $F[f(x)]$. Distributivnost uvedenog operatora definiše se na isti način kao i distributivnost funkcionele.

Operator definisan nad klasom $\mathfrak{Z}$ je ograničen ako je zadovoljen uslov:

$$\| F[f(x)] \| \leq N \| f(x) \|$$

Distributivan i ograničen operator se naziva linearnim operatorom.

U daljem izlaganju, koje će biti važno kada se budu posmatrale veze izmedju promena struktura dva statistička skupa, od značaja će biti pojam slučajnog operatora. Pod slučajnim operatorom strukture statističkog skupa Π podrazumeva se operator definisan nad prostorom Σ čiji su elementi φ.

Posmatrajmo opet apstraktan prostor Ω, čije su tačke ω i realnu funkciju $f(\omega)$ definisanu na sledeći način: Neka je dat niz tačaka $\omega_1, \omega_2, \dots \omega_n$ iz Ω; funkcija $f(\omega)$ je

$$f(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{za } \omega \neq \omega_i \\ x_i & \text{za } \omega = \omega_i \end{cases} \qquad i = 1, 2, \dots n$$

Dalje, neka je skup funkcija P odredjena sledećim pravilom

$$P(S_\nu) = \sum_{x_i \in S_\nu} p_i$$

gde je $P_r\{f(\omega) = x_i\} = p_i$. Tada je očevidno da je $P(\Omega) = 1$ i $P(s_v) \geq 0$ za svako v.

Posmatrajmo sada neki statistički skup $\mathcal{T}$, čiji je zakon verovatnoće obeležja X dat sledećim skupom parova:

$$X: \quad x_1, \quad x_2, \ldots \ldots x_i, \ldots \ldots x_n$$

$$p_1, \quad p_2, \ldots \ldots p_i, \ldots \ldots p_n$$

Pretpostavimo dalje da se struktura skupa $\mathcal{T}$ na slučajan način menja u odnosu na obeležje X i posmatrajmo sistem slučajnih veličina $p_i = f_i(\omega)$ gde je f realna funkcija definisana na Ω, kojoj odgovara skup funkcija P_i. Posmatrane slučajne veličine moraju uvek zadovoljavati sledeće uslove:

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(\omega) = 1 \qquad 1 \geq f_i(\omega) \geq 0 \qquad (1)$$

za svako $i = 1, 2, \ldots n$ i svako $\omega \subset \Omega$. Posmatrajmo sada n-dimenzionu slučajnu tačku A gde je $A\{f_1(\omega), f_2(\omega), \cdots f_n(\omega)\}$ odnosno odgovarajući n-dimenzioni slučajni vektor

$$\vec{A} = \vec{A}(p_1, p_2, \ldots p_n)$$

čije krajnje tačke /s obzirom na uslov (1) / moraju ležati na hiperravni

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \qquad (2)$$

i to u onim njenim tačkama koje imaju negativne koordinate. Ako sa $E_1, E_2, \ldots E_n$ označimo n Borelovih skupova, tada je

$$P_z\{f_1(\omega) \subset E_1, f_2(\omega) \subset E_2, \cdots f_n(\omega) \subset E_n\} = P\{A \subset \mathcal{S}\} = P(\mathcal{S})$$

gde je $\mathcal{S}$ onaj deo hiperravni (2) čije tačke imaju nenegativne koordinate i čija svaka tačka ima osobinu da joj koordinata $x_i \subset E_i$.

Kada se skup $\mathcal{S}$ sastoji iz svih onih tačaka $A(p_1, p_2, \ldots p_n)$ hiperravni (2), čije koordinate zadovoljavaju odredjene uslove, tada je moguće skup funkciju $P(\mathcal{S})$ napisati na drugačiji način u obliku funkcije tačke, zamenjujući $\mathcal{L}$ relacijama, koje moraju zadovoljavati tačke posmatranog skupa. Tako, na primer, ako se $\mathcal{L}$ sastoji iz svih onih tačaka hiperravni (2), koje zadovoljavaju uslov $a_i \leq p_i \leq b_i$ /gde su a_i i $b_i \geq 0$ za svako $i = 1,2,\ldots n$/, tada je

$$P(\mathcal{L}) = P(a_1 < p_1 \leq b_1, \ a_2 < p_2 \leq b_2, \ldots a_n < p_n \leq b_n)$$

Ako se $\mathcal{L}$ sastoji od jedne jedine tačke $A(x_1,x_2,\ldots x_n)$, tada je

$$P(\mathcal{L}) = P(p_1 = x_1, \ p_2 = x_2, \ldots \ p_n = x_n)$$

Označimo dalje sa L Lebegovu meru skupa $\mathcal{L}$. Tada se može pokazati da uvek postoji realna, jednoznačno definisana funkcija tačke $f(x_1,x_2,\ldots x_n)$ takva da je

$$P(\mathcal{L}) = \int_{\mathcal{L}} f(x_1,x_2,\ldots x_n)\, dL$$

pri čemu su promenljive x_i medjusobno povezane relacijom (2). Funkcija $f(x_1,x_2,\ldots x_n)$ naziva se zakonom verovatnoće slučajnog vektora $\vec{A}$. Ako sa $\mathcal{S}$ označimo prostor tačaka $A(P_1,P_2,\cdots P_n)$ tada je očevidno

$$P(\mathcal{S}) = \int_{\mathcal{S}} f(x_1,x_2,\ldots x_n)\, dL = 1$$

pri čemu se, naravno, pretpostavlja da je f L - integrabilna funkcija sa sledećom osobinom:

$$f(x_1,x_2,\ldots x_n) = \begin{cases} f(x_1,x_2,\ldots x_n) & \text{za } A(x_1,x_2,\ldots x_n) \subset \mathcal{L} \\ 0 & \text{za } A(x_1,x_2,\ldots x_n) \not\subset \mathcal{L} \end{cases}$$

U daljem izlaganju definisaćemo ostale karakteristike slučajnog vektora $\vec{A}$, koje će biti od najvećeg značaja u ostalim proučavanjima. Da bismo to što uspešnije izveli, uvedimo neke pojmove koji će pri tome biti od znatne koristi.

Kao što je poznato, skup tačaka u n-dimenzionom koordinatnom sistemu, koje zadovoljavaju uslov

$$F(x_1, x_2, \dots x_n) = 0$$

naziva se hiperpovršinom. Ako je F linearna funkcija, tada hiperpovršina postaje hiperravan. Nazovimo taj skup tačaka linearnim i označimo ga simbolom L_{n-1}. Lako je videti da je to jedan (n-1)- dimenzionalni skup tačaka.

Neka su dalje X i Y jednodimenzioni prostori, čiji su elementi $x \subset X$ i $y \subset Y$. Proizvodom tih prostora

$$X \times Y$$

naziva se skup svih mogućih parova, elemenata (x,y). Ako taj proizvod označimo sa Z, tada je očevidno da su parovi (x,y) elementi od Z, tj. $(x,y) \subset Z$. Posmatrajmo dalje tri jednodimenzionalna prostora X_1, X_2, X_3 čiji su elementi redom x_1, x_2, x_3. Proizvodom tih prostora naziva se skup svih mogućih triplova oblika (x_1, x_2, x_3) itd. Uopšte, neka je R_m prostor od m dimenzija, a R_k prostor od k dimenzija, pri čemu su redom odgovarajući elementi tih prostora $(x_1, x_2, \dots x_m)$ i $(y_1, y_2, \dots y_k)$. Proizvodom $R_m \times R_k$ tih prostora naziva se u opštem slučaju (m + k)-dimenzioni prostor R_{m+k}, čiji su elementi $(x_1, x_2, \dots x_m, y_1, y_2, \dots y_k)$.

Neka su dalje X_1, $X_2, \dots X_n$, n jednodimenzionih prostora pri čemu su im redom odgovarajući elementi x_1, x_2, $\dots$ x_n. Označimo sa U sledeći proizvod

$$U = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$$

Ako je u svakom od tih prostora definisana Borelova klasa skupova i Lebegova mera L_{x_i}, tada je i u prostoru U definisana Borelova klasa skupova i Lebegova mera L.

FUNKCIJA RASPOREDA SLUČAJNOG VEKTORA $\vec{A}$

Posmatrajmo opet n-dimenzionalni slučajni vektor $\vec{A} = \vec{A}(p_1, p_2, \dots p_n)$ čije koordinate p_i zadovoljavaju uslov (1), zbog čega, kao što smo videli, krajnje tačke njegovih realizacija leže na hiperravni (2). Neka je dalje $\mathcal{S}$ takav Borelov skup tačaka iz $\mathcal{L}$, čije koordinate $x_1, x_2, \dots x_n$ zadovoljavaju sledeći uslov: $x_1 \leq \alpha_1$, $x_2 \leq \alpha_2$, $\dots$ $x_n \leq \alpha_n$. Tada se skup funkcija $P(\mathcal{S})$ može napisati kao funkcija tačke na sledeći način:

$$F(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n) = \iint\limits_{\mathcal{S}} \dots \int f(x_1, \dots x_n) \varphi(x_1, \dots x_n) dx_1 \dots dx_{n-1}$$

i koja se naziva funkcijom rasporeda slučajnog vektora $\vec{A}$. Iz same definicije posmatrane funkcije lako je primetiti sledeće: dok je zakon verovatnoće f jedna (n-1)- dimenzionalna funkcija, dotle je oblast definicije funkcije F jedan n-dimenzionalan prostor.

Posmatrajmo sada specijalan slučaj kada je n = 3. Tada n-dimenzionalni vektor $\vec{A}$ postaje običan trodimenzioni vektor $\vec{A} = \vec{A}(p_1, p_2, p_3)$, dok se hiperravan (2) svodi na običnu ravan $x_1 + x_2 + x_3 = 1$. Izračunajmo sada funkciju rasporeda posmatranog vektora.

Neka su data tri jednodimenziona prostora X_1, X_2 i X_3, pri čemu su im redom odgovarajući elementi x_1, x_2 i x_3. Neka je u svakom od tih prostora definisana Borelova klasa skupova i Lebegova mera L_{x_i}. Definišimo sada dvodimenzioni prostor $\mathcal{X}_2$ kao skup svih tačaka (x_1, x_2, x_3), koje zadovoljavaju sledeće uslove: $x_i \geq 0$ i $\sum_{i=1}^{3} x_i = 1$. U posmatranom prostoru je definisana klasa Borelovih skupova iz tog razloga što on sam predstavlja jedan elemenat iz klase $U = X_1 \times X_2 \times X_3$ Borelovih skupova.

Pretpostavimo dalje da je zakon verovatnoće $f(x_1, x_2, x_3)$ slučajnog vektora $\vec{A}$ merljiva funkcija u odnosu na L meru. Tada, ako sa $\mathcal{S}_2$ označimo takav skup iz $\mathcal{X}_2$

čije tačke imaju osobinu da im koordinate x_1, x_2 i x_3 zadovoljavaju sledeći uslov: $x_1 \leqslant \alpha_1$, $x_2 \leqslant \alpha_2$, $x_3 \leqslant \alpha_3$, gde je $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \geqslant 1$, onda je

$$P(\mathcal{L}_2) = \iint_{\mathcal{L}_2} f(x_1, x_2, x_3)\, dL$$

S obzirom na to da izmedju x_1, x_2 i x_3 postoji linearna veta, to je

$$P(\mathcal{L}_2) = \iint_{\mathcal{L}_2} f(x_1, x_2, 1-x_1-x_2)\, dL$$

odakle na osnovi teoreme Fjubinija sledi da je

$$P(\mathcal{L}_2) = \int\int_{\mathcal{L}_2} f(x_1, x_2, 1-x_1-x_2)\sqrt{3}\, dL_{x_1} dL_{x_2} ,$$

odnosno

$$P(\mathcal{L}_2) = F(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$$

U specijalnom slučaju, kada veličine α_i zadovoljavaju sledeći uslov $\alpha_i + \alpha_j \geqslant 1$ za $i,j = 1, 2, 3$, poslednji integral se može napisati u sledećem obliku:

$$F(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 1 - \int_{\alpha_1}^{1}\int_{0}^{1-x_1} f\sqrt{3}\, dL_{x_1} dL_{x_2} - \int_{\alpha_1}^{1}\int_{0}^{1-x_1} f\sqrt{3}\, dL_{x_1} dL_{x_2} - \int_{\alpha_3}^{1}\int_{0}^{1-x_1} f\sqrt{3}\, dL_{x_1} dL_{x_2}$$

gde je $f \equiv f(x_1, x_2, 1-x_1-x_2)$

U slučaju da veličine α_i ne zadovoljavaju dati uslov, stvar se beznačajno komplikuje, tako da ne postoji potreba za specijalno razmatranje tog slučaja.

ZAKONI VEROVATNOĆE MARGINALNIH RASPOREDA SLUČAJNOG VEKTORA $\vec{A}$

Posmatrajmo opet slučajni vektor $\vec{A} = \vec{A}(p_1, p_2, \ldots)$ i definišimo marginalni zakon verovatnoće u odnosu na promenljivu p_i, gde su $p_i = f_i(\omega)$ realne funkcije definisane na Ω. Neka je dalje P_i skup funkcija /mera verovatnoće/

definisana takodje na Ω. Ako je E_1 neki Borelov skup na realnoj osi X_1, tada se pod marginalnom skup-funkcijom n-dimenzione slučajne promenljive $\vec{A}(p_1, p_2, \dots, p_n)$ u odnosu na slučajnu veličinu p_1 podrazumeva sledeći izraz:

$$P\{f_1(\omega) \subset \mathcal{L}_1 \cdots f_i(\omega) \subset E_i; \cdots f_n(\omega) \subset \mathcal{L}_n\}_\omega = P_i(E_i)_\omega$$

pri čemu je $P_k\{f_k(\omega) \subset \mathcal{L}_k\} = 1$ a $\mathcal{L}_k$ predstavlja prostor vrednosti slučajne veličine $f_k(\omega)$ na realnoj osi X_k u kome je definisana klasa Borelovih skupova.

Označimo dalje sa

$$\mathcal{L}_1 \times \mathcal{L}_2 \times \dots \times E_1 \times \mathcal{L}_{i+1} \times \dots \times \mathcal{L}_n = \mathcal{L}_i^*$$

takav prostor čije sve tačke $A(x_1, x_2, \dots x_n)$ imaju osobinu da su im koordinate nenegativne veličine i da su vezane relacijom $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$. Tada je

$$P_1(E_1) = \int_{\mathcal{L}_i^*} f(x_1, x_2, \dots x_n)\, dL$$

Može se pokazati da se za skup-funkciju $P_i(E_1)$, pod pretpostavkom da je skup tačaka E_1 dat izvesnim relacijama /na primer E_1 je skup svih tačaka iz interva[illegible] $, x_1)$ $0 \leq x_1 \leq 1$, može naći takva funkcija tačk $f_i(x_i)$ da je

$$f_i(x_i) = \iint_{\mathcal{L}_i^*} \cdots \int f(x_1, x_2, \cdots 1 - \sum_{i=1}^{n-1} x_i)\, \psi(x_1, x_2, \cdots x_{n-1})\, dx_1 \cdots dx_{n-1}$$

gde je $i = 1, 2, \dots n-1$, odnosno:

$$f_n(x_n) = \iint_{\mathcal{L}_n^*} \cdots \int f(1 - \sum_{i=2}^{n} x_i, x_2, \cdots x_n)\, dx_2 \cdots dx_n$$

Definišimo sada magrinalni zakon verovatnoće n-dimenzione promenljive $A(p_1, p_2, \dots p_n)$ u odnosu na slučajnu veličinu p_1. Pretpostavimo da postoji takva funkcija f_i^* definisana na $\mathcal{L}_1$ sa osobinom da je

$$f_1(x_1) = P_1(E_1) = \int_0^{x_i} f_i^*(t)\, dt$$

onda se ta funkcija naziva marginalnim zakonom verovatnoće n-dimenzione promenljive $A(p_1, p_2, \ldots p_n)$ u odnosu na slučajnu veličinu p_1.

U prethodnom izlaganju pri definisanju marginalnogzakona verovatnoće ignorisali smo $(n-1)$ slučajnu veličinu i posmatrali samo jedmu odabranu. Medjutim, moguće je ignorisati i neki drugi broj slučajnih veličina i tražiti zakon verovatnoće ostalih. Tako, na primer, ako u funkciji $f(x_1, x_2, \ldots, 1 - \sum_{i=1}^{n-1} x_1)$ fiksiramo promenljive $x_1, x_2, \ldots \ldots x_p$, tada će marginalni zakon verovatnoće tog podskupa promenljivih, gde je $p < (n - 1)$, biti dat sledećim izrazom:

$$g(x_1, x_2, \ldots x_p) = \int_{\mathcal{L}_{n-p-1}} f(x_1, x_2, \ldots x_n)\, dL_{n-p-1}$$

gde je L_{n-p-1} Lebegova mera linearnog skupa tačaka

$x_{p+1} + \ldots + x_n = 1,$

ili u obliku

$$g(x_1, x_2, \ldots x_p) = \int\int_{\mathcal{L}_{n-p-1}} \cdots \int f(x_1, \ldots x_{n-1}, 1 - \sum_{i=p+1}^{n-1} x_i)\, \theta(x_{p+1}, \ldots x_{n-1})\, dx_{p+1} \ldots dx_{n-1}$$

Na sličan način se definiše marginalni zakon verovatnoće za ma koji drugi sistem slučajnih veličina.

U cilju ilustracije posmatrajmo slučaj kada je $n = 3$. Tada je zakon verovatnoće slučajnog vektora $\vec{A} = \vec{A}(p_1, p_2, p_3)$ oblika $f(x_1, x_2, x_3)$. Izračunajmo sada marginalni zakon verovatnoće slučajne veličine p_1. Na osnovi prethodno izloženog sledi da je

$$f_1^*(x_1) = \int_0^1 f(x_1, x_2, x_3)\, dL = \int_0^1 f(x_1, x_2\ 1-x_2)\sqrt{2}\, dx_2$$

Definišimo još uslovni zakon verovatnoće. Izraz

$$f(x_1, x_2, \ldots x_p \mid x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots x_n)$$

naziva se uslovnim zakonom verovatnoće; kao što je gotovo očevidno njegov analitički izraz dobija se neposredno pomoću količnika

$$f(x_1, x_2, \ldots x_p \mid x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots x_n) = \frac{f(x_1, x_2, \ldots x_n)}{g(x_1, x_2, \ldots x_p)}$$

itd.

Kao jedna od najkarakterističnijih crta savremenog naučnog mišljenja uopšte javlja se tendencija za sve češću i širu upotrebu matematičkih metoda u proučavanjima. Ta težnja je u tesnoj vezi sa produbljivanjem već postojećih znanja i promenom načina u mišljenju, odnosno sa prelazom na kvantitativnu interpretaciju rezultata istraživanja. Pri tome je potrebno naglasiti da upotreba pomenutih metoda nikako ne znači nikakvo "preinačavanje" tih istraživanja u matematiku. Izračunavanje neke numeričke karakteristike one pojave koja se proučava i njeno matematičko tretiranje nikako nisu sami sebi cilj. Matematički metod i njegova upotreba su samo jedna etapa na putu dobijanja konačnog rešenja problema koji se proučava.

Matematička aparatura primenjena u medicinsko-biološkim istraživanjima pruža mogućnost za kvantitativnu karakterizaciju odnosa izmedju veličina i pojava koje se proučavaju, odnosno za sagledavanje oblika uzajamnih veza. Treba podvući da je primena tog aparata uslovljena kako specifičnošću i karakterom problema koji se tretiraju, tako i progresivnom tendencijom istraživača ka izražajnijim i finijim kvantitativnim metodima.

Tema ovog rada iz matematičke statistike je pre svega inspirisana problemima koji se javljaju u nekim granama medicinskih nauka i ima za cilj da doprinese njihovom rešavanju. Mada je primenljiva i u raznim drugim oblastima nauke i prakse, ovaj rad je nastao pre svega kao rezultat autorovog bavljenja /sa matematičko-statističkog aspekta/ problemima koji su u medicini poznati pod imenom "dinamika metabolizma". Neobična složenost organizama koji upravljaju njegovim funkcionisanjem i ogromna važnost za životne procese čine da su ti problemi posebno značajni i interesantni. Na sledećoj slici dat je primer takvog jednog problema, čije je proučavanje od značaja za naučnu i praktičnu medicinu.

Medicina se, kao retko koja druga oblast ljudskog rada, odlikuje izvanrednom složenošću objekata proučavanja i krajnjom komplikovanošću pojedinih problema. Cilj matematičkih metoda, pre svega metoda matematičke statistike, je odgovor na čitav niz pitanja, koja se mogu matematički interpretirati i kod kojih takva interpretacija može imati odlučujući značaj za njihovo rešenje. Medjutim, treba isto tako podvući činjenicu da, pored ogromnog značaja i krajnje humanog cilja, medicina predstavlja nepresušni izvor inspiracija kako za izgradnju novih tako i za primenu već postojećih matematičkih metoda.

Za biologiju i medicinu kao eksperimentalne nauke primena matematičkih odnosno statističkih metoda kao pomoćnih sredstava u istraživanju od višestrukog je značaja. Statistika kao grana primenjene matematike, zasnovana na teoriji verovatnoće, ima osobinu da je ista formula pogodna za široko različite grupe objekata proučavanja, tj. u važnosti je jedinstvo opštih metoda i principa. Medjutim, ono što je suštinski razlikuje od matematike je poseban način u rosudjivanju. Naime, nijedan statistički zaključak ne može se izvesti sa kategoričnom izvesnošću matematičke indukcije. U samom principu statističkog zaključivanja mora ostati i ostaje neizvesnost u apsolutnom smislu. Zadatak matematike je da pruži metode za izračunavanje te neizvesnosti.

LITERATURA

ALEKSANDROV,P.S. i A.N.KOLMOGOROV:
Vvedenie v teoriju množestv i teoriju funkciji.

ANDERSON:
An Introduction to Multivariate Statistical Analysis.

BERNŠTEJN:
Teorija verojatnostej.

GNEDENKO:
Kurs teoriji verojatnostej.

GRENADER:
Probability and Statistics.

DOOB,J.V.:
Stohastic Processes.

KENDALL,M.G.:
The Advanced Theory of Statistics.

KOLMOGOROV:
Osnovnie ponjatija teoriji verojatnostej.

KOLMOGOROV,A.N. i S.V.FOMIN:
Elementi teoriji funkcij u funkcionaljnovo analiza.

CRAMER:
Mathematical Method of Statistics.

MIHLIN:
Variacionie metodi v matematičeskoj fizike.

NATANSON:
Teorija funkcij veščestvenoj peremenoj

SAMOJLOVIČ,A.G.:
Termodinamika i statističeskaja fizika.

SMIRNOV,V.J.:
Kurs viššej matematiki.

USPENSKY,J.V.:
Introduction to Mathematical Probability.

FIHTENGOLJC:
Kurs diferencijaljnavo i integraljnavo isčislenia.

FISHER:
Contributions to Mathematical Statistics.